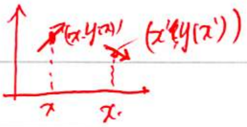
各点 (x, y(x)) での接線の傾きが与えられている.

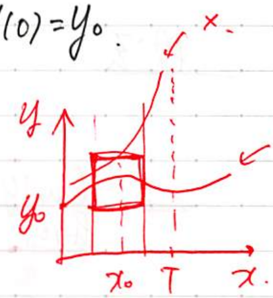
→ y(x)のgraphは描けそう…?



常微分方程式の解法

y(x)を求めたい.

初期値問題. $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$, $0<x$, $y(0)=y_0$.



・参考 解の存在定理. (数学的に解が存在するか)

・$D = [x_0 - A, x_0 + A] \times [y_0 - B, y_0 + B]$.

? Thm. ・f: Dで連続, $|f| \le {}^\exists M$.

・f: Lipshitz $|f(x,y) - f(x,z)| \le {}^\exists K|y-z|$ 暴れない.

第2変数についての強い連続性

$\Rightarrow |x-x_0| \le \min\left(A, \frac{B}{M}, \frac{1}{K}\right)$ で解は存在して唯一.

「Lipshitz連続 ⇒ 連続」が成立.

※ 解が存在するかどうか分かっていないのに計算することでも

Navier-Stokes eq. 天気予報

※ 解かなきゃいけない方程式は他にもたくさん.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y', \cdots, y^n)$$ を解きたいときは.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dz_{n-1}}{dx} = f(x, y, z_1, \cdots, z_{n-1}) \\ \frac{dz_{n-2}}{dx} = z_{n-1} \\ \vdots \\ \frac{dy}{dx} = z_1 \end{cases}$$

↑ 下から読むと分かり易い.

とバラして、一階と思って解けばよい. ?

高階微分 — (中間変数を用意して、一階の常微分方程式を連立すればよい.)

cf: $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)$

No. 2

Date 1 9.

・**数値解法** … 一段法 と 多段法 の2つに大まかく分けられる.

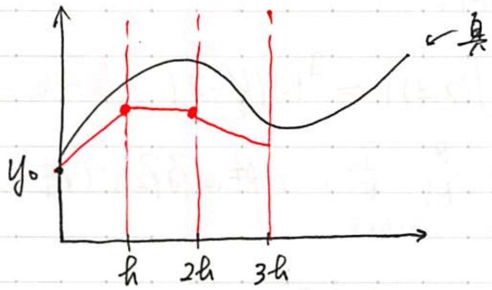
・一段法. $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y(x))$

漸化式 $y(x) \mapsto y(x+h)$

(*)

① $\Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \boxed{\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h} = f(x, y(x))}$

└ 無限は計算機では扱えない. ⟶ $h \ll 1$ として近似. (*)部分を.



$y(0) \mapsto y(h)$ の近似.

真の解 $y(x)$ と区別して. 近似解を $y_n \simeq y(nh)$ $(n=0,1,\cdots)$

と書くと. $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = f(x_n, y_n)$. , $x_n = nh$.

…「陽的 Euler 法」といわれる.

ここイミは?

② ・同様に. $\dfrac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \boxed{\dfrac{y(x)-y(x-h)}{h} = f(x, y(x))}$

近似の仕方は一つではないので こうしてもよい

ここを考えると.

これが known

$\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

…「陰的 Euler 法」

例えば $\dfrac{dy}{dx} = \sin y$ とか $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x} = \sin y_{n+1}$

$f(y) = \dfrac{y_{n+1}-y_n}{\Delta x} - \sin y_{n+1} = 0$ を

解く必要!

Date 1 9

陰 $y(x) = \sin x + x + e^x + \cdots$
どう見てもキレイに書けない(?)

どちらを選ぶかが大事.

・「陽的」「陰的」とは?

・陽的: y_{n+1} が「陽に」見えていて求まる.

・陰的: y_{n+1} が 方程式の解 として「陰的に」def. されている.

→ Newton 法 (非線形方程式の解法) などが必要.

└→ f は この形 と考えている. 非線形

陰的のとき.

∴ 一般に $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ とかだと. 連立の非線形方程式に.

→ Jacobian の逆行列を求める必要. (コスト大). ↔ 安定性

トレードオフ.

・他に: 台形則.

・RK公式 (よく分からないときはとりあえずこれ). など.
なに使えばよいか

・(多段法に行く前に.) 「近似度」(精度).

今, 仮に $y_n = y(nh)$ としたとき, 1 ステップで入る誤差は.

陽的Euler法 $y_{n+1} = y_n + \underline{f(x_n, y_n) h}$ ← 今, $y' = f$ を解いているので (?)

仮定 ‖ ‖

真 $-) \ y(x_n + h) = y(x_n) + \underline{y'(x_n) h} + \frac{1}{6} y''(x_n) h^2 + O(h^3)$

$y_{n+1} - y(x_n + h) = \frac{1}{6} y'' h^2 + O(h^3)$

∴ 1ステップ進むと. $O(h^2)$ の誤差が入る. 局所誤差

No. 4
Date 1 9.

どこまでの範囲で数値解を求めるか

・ラフに考えると… 問題を $x \in [0, X]$ で解くことにして.

区間を n (N?) 分割 ($h = \frac{X}{N}$) すると. $x = X$ までにたまる誤差は.

$$O(h^2) \times N = O(h^1) \quad \text{大域誤差}$$

N ← ~~…~~ 差

→ このことを. 「陽的 Euler 法は 1次の公式という」.

h をより小さくしたときに. どれくらいの速さで誤差が小さくなるか.

i.e. 次数は高い方が良い (しかし. トレードオフに注意)

多段法 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = f(x, y(x))}$$

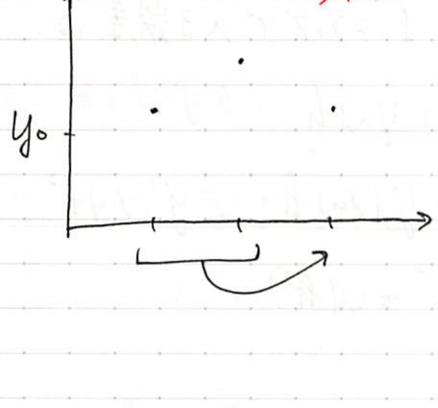
・$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f(x_n, y_n) \quad (n = 1, 2, \cdots) \quad \cdots \text{「中点則」}$$

nは1から.

三項間漸化式

? 中点則は. $(y_{n-1}, y_n) \longmapsto y_{n+1}$ という形.

多段



・y_0: 初期値.

・y_1: 出発値. … これは積分して求める (?)

$\frac{dy}{dx} = \lambda y$ の厳密解 $y = y(0)e^{\lambda x}$

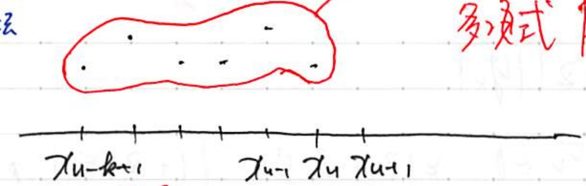
今までは Taylor展開を基礎にしていた。

・補間により、高次の公式を機械的に作れる。

(例) Adams法。

Lagrange補間を基礎にした方法

これら k個の点から $(k-1)$次 Lagrange補間多項式 $P_{k-1}(x)$ を作る



これ何つけてる? → $-y_n$?

そして、$y_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x)\,dx$ …「陽Adams」

解析的に求まる(?)

沢山のデータを使用 → 精度よい。

・安定性

絶対使ってはいけない

→ 次回。

(・中点則は不安定 $y' = -2y$.)

$y' = f = \lambda y$.

・線形型安定性解析 $\frac{dy}{dx} = f = \lambda y$ $(\mathrm{Re}\,\lambda < 0)$ $y \propto e^{\lambda x}$?

この式なに?

$\lambda \in \mathbb{C}$.

└ 発散しない(?)

このとき中点則は、

$$\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = \lambda y_n \iff y_{n+1} - 2\overset{h}{\boxed{\lambda h}}\, y_n - y_{n-1} = 0.$$

・$x^2 - 2z - 1 = 0$ の根 α, β として、$y_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$

今、$\alpha\beta = -1$. ——→ $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ のとき、αかβの片方は絶対値>1.

↓

グチャグチャに。

$|\alpha||\beta| = 1$.

キチンと考えると(略)

→ $|\alpha| = |\beta| = 1 \vee (|\alpha| < 1 \vee |\beta| > 1)$

∴ $\forall h > 0$ に対し、中点則は不安定.

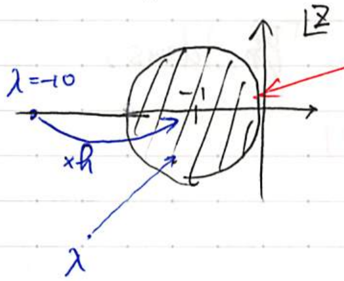
i.e. $n \to \infty$ のとき y_nが発散.

・陽的Euler法

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = \lambda y_n \iff y_{n+1} = (1+\underbrace{\lambda h}_{z})y_n$$

$\therefore\ |y_{n+1}| = |1+z||y_n|$

$|y_n| < \infty\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$ としたいなら、$|1+z| \leq 1$ が必要十分。



$z = \lambda h$

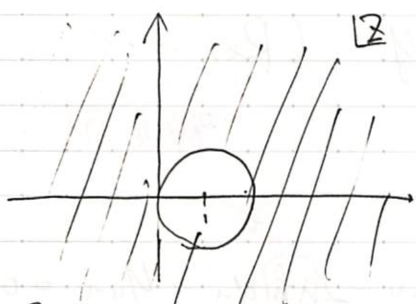
自分で選ぶ

問題given

例：$\lambda = -10$ だったら、$h < \frac{1}{5}$ととる。

$\therefore$ hを十分小さくとる必要。(公式が動く範囲が小さい)

・陰的Euler



となる。

$\therefore$ $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ なら、

$\forall h > 0$; 公式は安定。

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} = \lambda y_{n+1} \iff y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n$$

$\therefore$ 陰Eが安定 $\iff \left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \leq 1$

$\iff 1 \leq |1-h\lambda|$

数値解析（松尾）　配付資料　　　　2015 年 1 月 9 日

■ 常微分方程式の数値解法

初期値 $y(0)$ が与えられているとして，初期値問題：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x,y), \qquad x > 0$$

を考える.「格子」$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$,「近似解」$y_n \simeq y(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく．以下では簡単のため,「格子幅」$x_{n+1} - x_n = h$ は一定とする.

[一段法]

- 陽的 Euler 法（1 次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$.
- 陰的 Euler 法（1 次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$.
- 台形則（2 次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)}{2}$.　…fを2回計算する必要.
- （標準的な 4 次）Runge–Kutta 法：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{1}{6}k_1 + \dfrac{1}{3}k_2 + \dfrac{1}{3}k_3 + \dfrac{1}{6}k_4$.
  ただし，$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$.

[多段法]　ここでは $f_n = f(x_n, y_n)$ と略記する.

- 中点則（2 次）: $\dfrac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = f_n$.
- 陽的 Adams 法：
  - 1 次：陽的 Euler 法と一致.
  - 2 次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{3}{2}f_n - \dfrac{1}{2}f_{n-1}$.
  - 3 次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{23}{12}f_n - \dfrac{16}{12}f_{n-1} + \dfrac{5}{12}f_{n-2}$.
- 陰的 Adams 法：
  - 1 次：陰的 Euler 法と一致.
  - 2 次：台形則と一致.
  - 3 次：$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = \dfrac{5}{12}f_{n+1} + \dfrac{8}{12}f_n - \dfrac{1}{12}f_{n-1}$.

『数値解析入門 [増補版]』山本哲朗，サイエンス社より：中点則の不安定現象

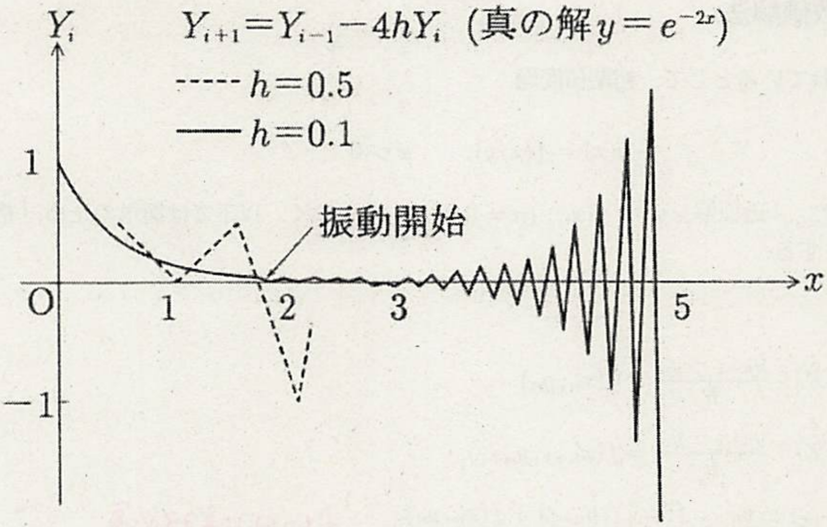
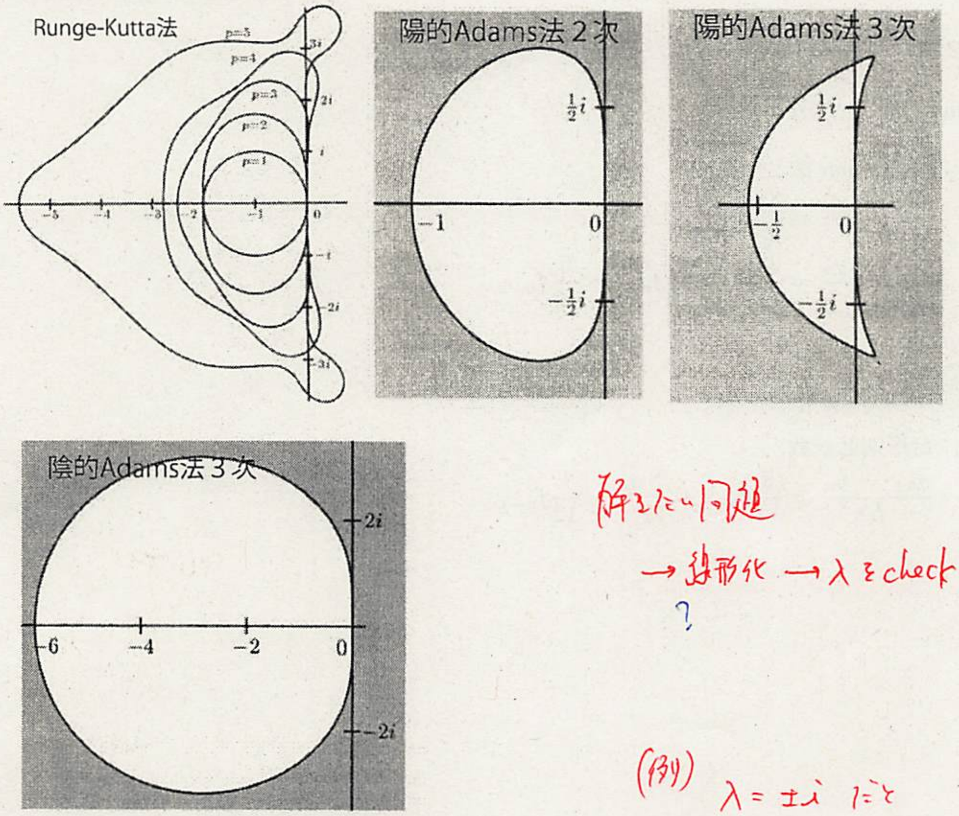


図 10.4 $y'=-2y,\ y(0)=1$ に対する中点公式

“Numerical Methods for Ordinary Differential Equations” (Butcher,Wiley) より：各種公式の安定領域
（それぞれ線の内側が安定）



解きたい問題

→ 線形化 → λをcheck → どの解法が安定か考える
?

λにhをかけて
安定領域に入るか

(例) λ=±i だと
陽的Eulerだと hをいくら小さくしても
安定領域には入らず.

本問2 片方は解けて、片方はムリ.