Notes on Yoshida (2006)

2020 年 3 月 6 日

Notation

- $\mathbb{M}((S,\mathcal{A}) \to (T,\mathcal{B})) := \{f\colon S \to T\colon f$ は $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-可測関数$\}$
- $C(S)$: S 上の連続関数全ての集合

1　零集合・可測修正・完備化

§1.5 測度零集合

- 特に断らない場合 $(S,\mathcal{A},\mu)$ は測度空間.

Definition 1.1 (零集合)**.** $\emptyset \in \mathcal{A} \subseteq 2^S$, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$: 非負単調とする.

$$N \subseteq S\colon \mu-\text{ 零集合} \overset{\Delta}{\iff} \exists \widetilde{N} \in \mathcal{A};\ N \subseteq \widetilde{N},\ \mu(\widetilde{N}) = 0.$$

$\mu-$ 零集合全体を $\mathcal{N}^\mu$ で表す.

- 測度ゼロの集合の部分集合が零集合．零集合の中には測度が未定義のものもありうることに注意.
- 零集合の可算無限和は零集合.

Example 1.1 ($\mathbb{R}^d$ のルベーグ測度の性質)**.**

- $S \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{A}$ とし，$(S,\mathcal{A},\mu)$ を測度空間とする.
- $\forall x \in S \forall r > 0;\ \mu(B(x,r) \cap S) > 0$ とする.
  - これは例えば $S := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \mathscr{B}(\mathbb{R})$ のときは成立.
- このとき，零集合の内点の集合は空集合, *i.e.*, $N \in \mathcal{N}^\mu \implies N^\circ = \emptyset$.
  - $x \in N^\circ$ とすると，$\exists r;\ B(x,r) \cap S \subseteq N$ より矛盾.
  - これは，$\overline{S} = \overline{S \setminus N}$ を含意.
- $f, g \in C(S)$, $f = g$, $\mu-$a.e. ならば，$\forall x \in S;\ f(x) = g(x)$.
  - 仮に $\exists x \in S;\ f(x) = g(x)$ だとする.
  - 連続性より，ある開区間 I 上で $f \neq g$ である.

– I は内点を持つため，零集合でない．これは $f = g,\ \mu-$a.e. に矛盾．

Definition 1.2 (μ-a.e.)**.** $A \in \mathcal{A}, x \in A$ に関する命題 $P(x)$ を考える．$A_1 := \{x \in A \colon P(x)$ が真$\}$ としたとき，

$$P(x) \text{ は } A \text{ 上 } \mu\text{-}a.e. \text{ で成立} \overset{\Delta}{\iff} A \setminus A_1 \in \mathcal{N}^\mu$$

§2.3 可測修正

- しばしば，S 上，$\mu-$a.e. で定義される関数が出てくる．
  - 例: S 上で定義された可測関数列 $(f_n)_n$ について，$f = \lim_n f_n$ が，$\mu-$a.e. で収束先を持つとき．
- そのような関数についても，S 上の可測関数と同様に積分の議論を行える．

Definition 1.3 (μ-a.e. に定義された可測関数, 可測修正)**.** $N \in \mathcal{N}^\mu, f \colon S \setminus N \to \mathbb{K}$ とする，

$$f \text{ が } \mu\text{-}a.e. \text{ に定義された可測関数} \overset{\Delta}{\iff} S \text{ 上の可測関数 } \widetilde{f} \text{ で } f = \widetilde{f} \text{ となるものが存在.}$$

$$\overset{(*)}{\iff} \exists N_1 \in \mathcal{N}^\mu;\ N \subseteq N_1,\ f|_{S \setminus N_1} \text{が } S \setminus N_1 \text{ 上の可測関数}$$

- $\widetilde{f}$ を f の可測修正という．

(*) の証明**:**

- $\implies$) $N_1 := N \cup \{x \in S \colon f(x) \neq \widetilde{f}(x)\}$ とすれば良い．
  - $S_0 \subseteq S, f \in \mathbb{M}(S \to \mathbb{K})$ に対し，$f|_{S_0} \in \mathbb{M}(S_0, \mathcal{A}|_{S_0})$ であることに注意．
- $\impliedby$) $\widetilde{N} \in \mathcal{N}^\mu \cap \mathcal{A}$ s.t. $N_1 \subseteq \widetilde{N}$ をとり，$\widetilde{f}$ が $\widetilde{N}$ 上で定値, $S \setminus N$ 上で f と同じ値をとるとすればよい．
  - $\widetilde{f}$ が S 上可測であることは，上記の注意より $f|_{S \setminus \widetilde{N}}$ が $(S \setminus \widetilde{N}, \mathcal{A}|_{S \setminus \widetilde{N}})$ 上可測であることから従う．

□

- μ-a.e. に定義された関数の和や極限も μ-a.e. に定義される．
- μ-a.e. に定義された関数の積分を，その可測修正の積分として定義する．
  - μ-a.e. に定義された関数 f が A 上可積分 $\overset{\Delta}{\iff}$ f の可測修正 $\widetilde{f}$ が A 上可積分

$$\int_A f \mathrm{d}\mu := \int_A \widetilde{f} \mathrm{d}\mu.$$

§3 完備化

- 測度の完備化ってどういうときに必要になるの？
  - Riemann 積分との関係を考えるとき？
    - ∗ 累次積分とかでも大事に．(完備測度版の Fubini の定理)
  - 完備じゃない測度だとどういうまずいことが起きるの？

Definition 1.4 (完備な測度)**.** 測度 μ が完備 $\overset{\Delta}{\iff} \mathcal{N}^\mu \subseteq \mathcal{A}$.

- 任意の測度は，$\mathcal{A}$ に零集合を「加える」ことで完備化できる．

Proposition 1.1 (測度の完備化)**.** .

1.
$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\mu} &:= \{B \subseteq S\colon \underbrace{\exists A, \widetilde{A} \in \mathcal{A};\ A \subseteq B \subseteq \widetilde{A},\ \mu(\widetilde{A} \setminus A) = 0}_{(\star)}\} \\ &= \sigma\left(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}^{\mu}\right).\end{aligned}$$
2. $(\star)$ を満たす $B \in \mathcal{A}^{\mu}$, $A, \widetilde{A} \in \mathcal{A}$ に対し，$\mu^{*}(B) := \mu(A)$ と定めると，$(\mathcal{A}^{\mu}, \mu^{*})$ は測度になる．
3. $\mathcal{N}^{\mu^{*}} = \mathcal{N}^{\mu}$. よって，$(\mathcal{A}^{\mu}, \mu^{*})$ は完備な測度.
4. $(\mathcal{B}, \nu)$: S 上の測度, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$ のとき，
$$(\mathcal{B}, \nu)\text{: 完備} \implies \mathcal{A}^{\mu} \subseteq \mathcal{B} \implies \nu|_{\mathcal{A}^{\mu}} = \mu^{*}.$$

- $(\mathcal{A}^{\mu}, \mu^{*})$ を $(\mathcal{A}, \mu)$ の完備化と呼ぶ.
  - 完備化 $(\mathcal{A}^{\mu}, \mu^{*})$ は，元の測度 $(\mathcal{A}, \mu)$ を含む完備な測度の中で最小なものであり，元の測度を含む任意の完備な測度に置いて，$\mathcal{A}^{\mu}$ 上の測度は一意に定まる．
- 完備化された $\mathcal{A}^{\mu}$ 内の任意の集合 B に対し，μ-測度 0 の差を除いて一致するような集合 $A \in \mathcal{A}$ が存在.
- 同様の性質が $\mathcal{A}$-可測関数と $\mathcal{A}^{\mu}$ 可測関数の間にも成立.

Proposition 1.2. $g\colon S \to \overline{\mathbb{R}}$ について，以下の命題は同値*:*

1. g: $\mathcal{A}^{\mu}$-可測
2. $\exists f, \widetilde{f};\ f, \widetilde{f}$: $\mathcal{A}^{\mu}$-可測, $f \leq g \leq \widetilde{f},\ \mu(f \neq \widetilde{f}) = 0$
3. $\exists f; f$: $\mathcal{A}$-可測, $f = g,\ \mu-$a.e.

Proof. (1)⇒(2): g を単関数の和で表すのがポイント． □

Proposition 1.3 (完備測度の下での可測性を保証する十分条件)**.** $\phi \in \mathbb{M}((S, \mathcal{A}) \to (T, \mathcal{B}))$ とする．次の条件が満たされるならば，$\phi \in \mathbb{M}((S, \mathcal{A}^{\mu}) \to (T, \mathcal{B}^{\nu}))$.

$$B \in \mathcal{B}, \nu(B) = 0 \implies \mu(\phi^{-1}(B)) = 0.$$

■Lebesgue 測度

- $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d}), \mu)$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d})$ 上の Lebesgue 測度とする．
- $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d}), \mu)$ の完備化 $(\mathcal{L}^{d}, \mu^{*})$ を $\mathbb{R}^{d}$ 上の Lebesgue 測度という．
  - $A \subseteq \mathbb{R}^{d}$: Lebesgue 可測 $\overset{\Delta}{\iff} A \in \mathcal{L}^{d}$.
  - $S \subseteq \mathbb{R}^{d}, T = \mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ とする．
  - $\mathcal{L}^{d}(S) := \mathcal{L}^{d}|_{S}$
  - $f\colon S \to T$: Lebesgue 可測 $\overset{\Delta}{\iff} f$: $\mathcal{L}^{d}(S)/\mathcal{B}(T)$-可測
  - $f\colon S \to T$: Borel 可測 $\overset{\Delta}{\iff} f$: $\mathcal{B}(S)/\mathcal{B}(T)$-可測

Example 1.2. $\mu(\partial A) = 0 \implies A \in \mathcal{L}^d$. $(\because)\ \overline{A} \setminus A^\circ = \partial A$, 開集合と閉集合は $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に属する．

- 次の命題は，フーリエ解析とかするときに重要になる (らしい．)

Proposition 1.4 (Lebesgue 測度の平行移動不変性)**.**

$$\forall B \in \mathcal{L}^d\ \forall c \in \mathbb{R}^d;\ \mu^*(c+B) = \mu^*(B).$$

Proof.

- $\phi\colon x \mapsto x - c$ とすれば，$c + B = \phi^{-1}(B)$ であることを使う．
  - $\nu(B) := \mu(\phi^{-1}(B)) = \mu(c+B)$ とし，ν と μ が $\mathcal{L}^d$ 上で一致することを示したい．
- まず $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上で成立することを示す．
  - 測度の一致を示すための常套手段: 基本集合 $\mathcal{I}^d|_{\mathbb{R}^d}$ の下での一致を示す．
- $\mathcal{L}^d$ 上での成立は，完備測度の一意性より従う．

□

- 完備化が大事な理由の一つは，(おそらく) 次の定理を得るため．
- μ を Lebesgue 測度 (完備) とする．

Theorem 1.1 (Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係)**.** $f := \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を有界関数とする．このとき，(1) $\iff$ (2) $\implies$ (3)

1. f の不連続点全体は μ-零集合
2. f は *Riemann* 可積分
3. $f \in L^1(\mu)$, $\int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\mu =$ *Riemann* 積分の値.

Proof. memo: 例えば，(2) $\implies$ (3) を示す際，「$\underline{f} = f = \overline{f}$ であり，かつ，$\underline{f}, \overline{f}$ が可測ならば，f が可測」を示す必要が出てくる．これは完備測度だから可能．(完備化する前の $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ で頑張ろうとすると，f の可測性が示せず，$\int f \mathrm{d}\mu$ がそのままでは定義できなくなる？) □