

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, a \% b = 0\}$$

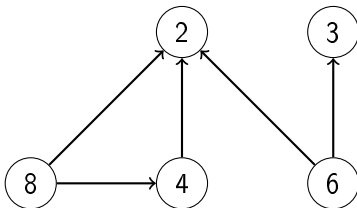
Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, a \% b = 0\}$$



Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\} = \{\{a, b\} : a \in V, b \in V, (a + b) \% 2 = 0\}$$

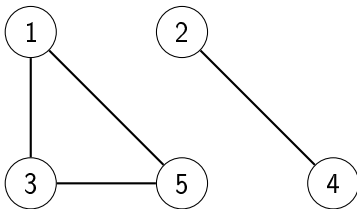
Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\} = \{\{a, b\} : a \in V, b \in V, (a + b) \% 2 = 0\}$$



Взвешенный граф

$$G = (V, E, c)$$

Взвешенный граф

$$G = (V, E, c)$$

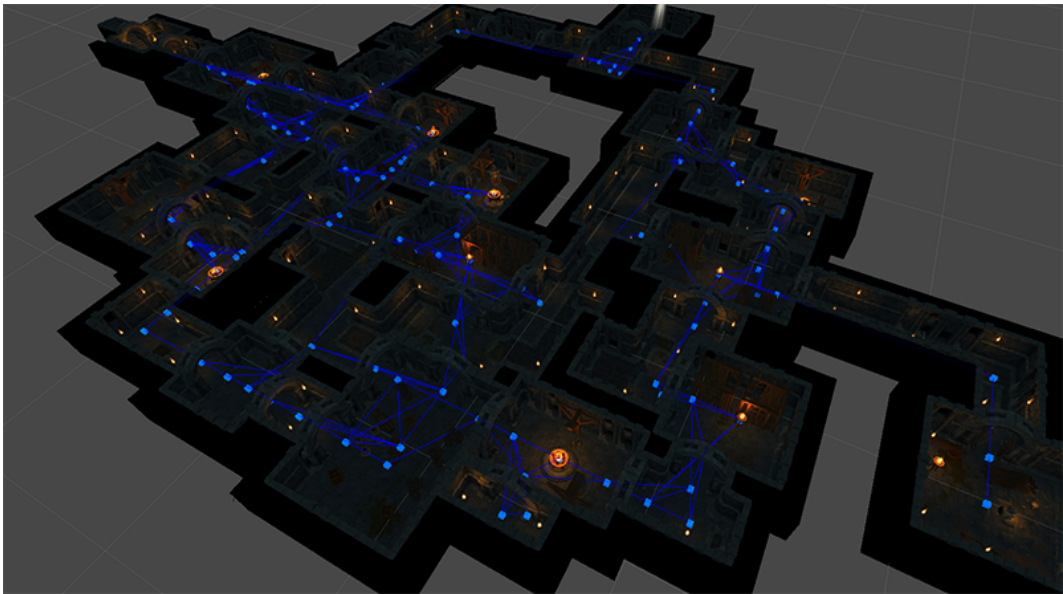
$$E \subset V \times V$$

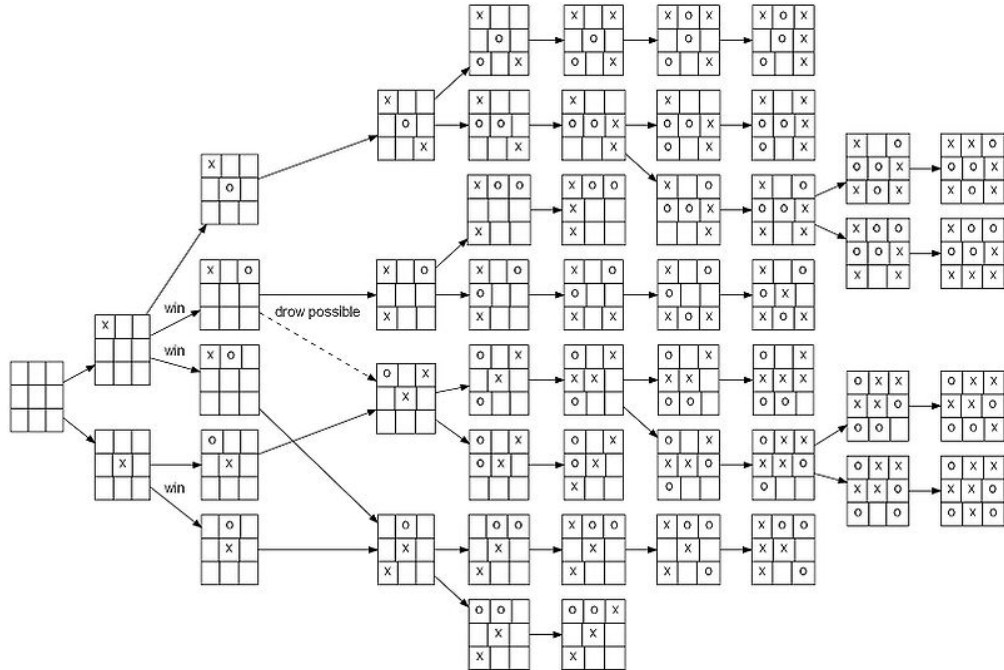
Взвешенный граф

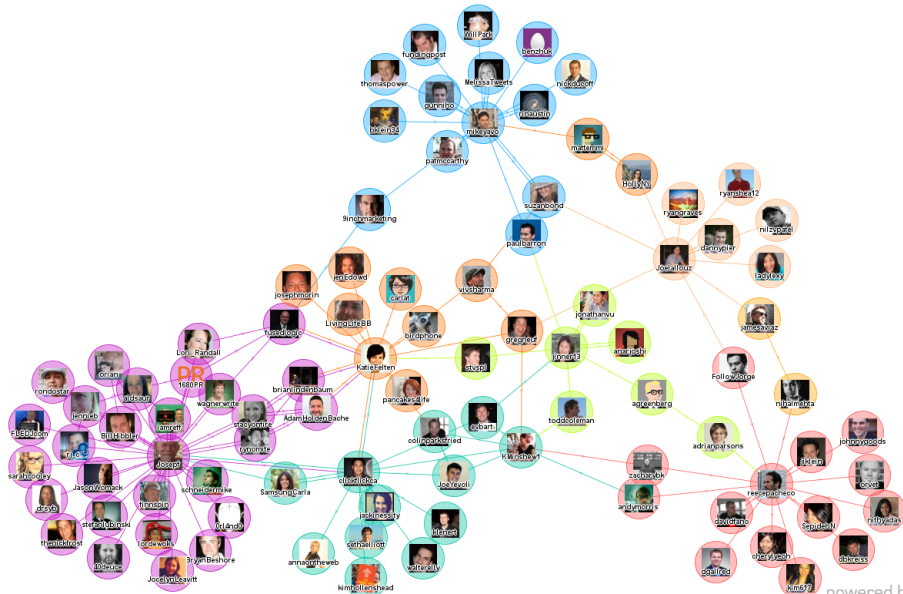
$$G = (V, E, c)$$

$$E \subset V \times V$$

$$c : E \rightarrow \mathbb{R}$$







Ребро e инцидентно вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Ребро e **инцидентно** вершине v , если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

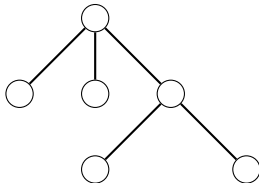
Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Неориентированный граф **связен**, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Для орграфов такое условие называют **сильной связностью**.

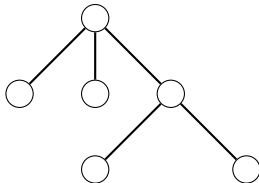
Слабая связность орграфа означает связность соответствующего ему неориентированного графа.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

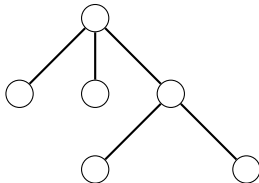


Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

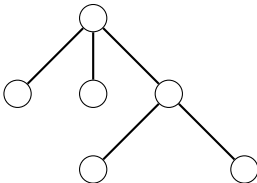
Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

Несвязный неориентированный ациклический граф иногда называют **лесом**.

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1
 2_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

$$2_2$$

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_2
 3_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

$$3_1$$

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

3_1
 3_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

$$3_2$$

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_1
 4_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1
 2_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

 2_1
 3_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1

4_1

4_2

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1

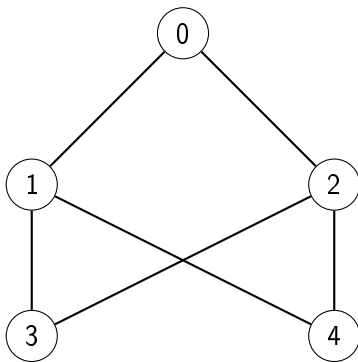
4_1

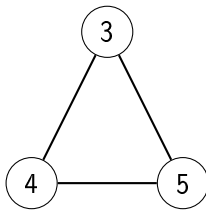
4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

2_1

4_1	3_2	4_2	X
X	2_2	X	X
X	1	2_1	3_1

3_1

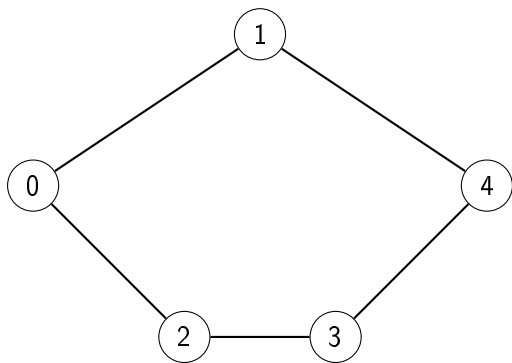


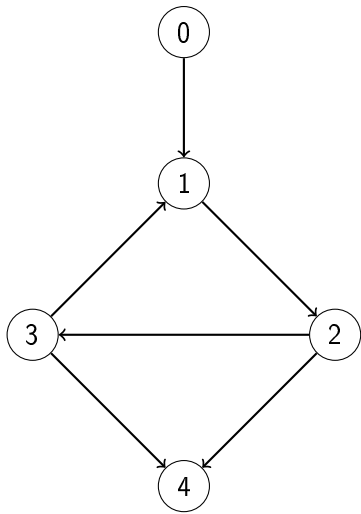
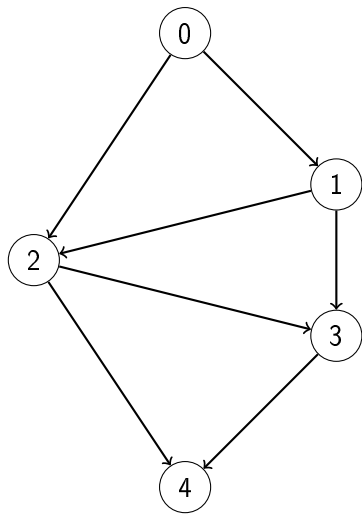


1	2	3
4	5	6
7	8	

1	2	3
4	5	
7	8	6

1	2	3
4		5
7	8	6





Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

Доказательство.

От противного: пусть такой вершины нет, значит, для каждой вершины есть входящее в нее ребро. Возьмем любую v_0 , затем v_1 такую, что ребро из v_1 ведет в v_0 , и так далее. Эту последовательность можно продолжить бесконечно, но вершин в графе — конечное число, следовательно, вершины повторятся, и образуют цикл. □

Лемма

Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

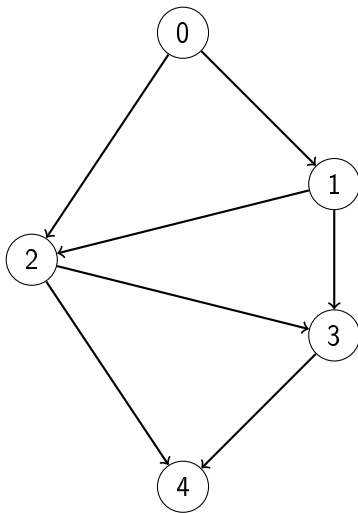
Лемма

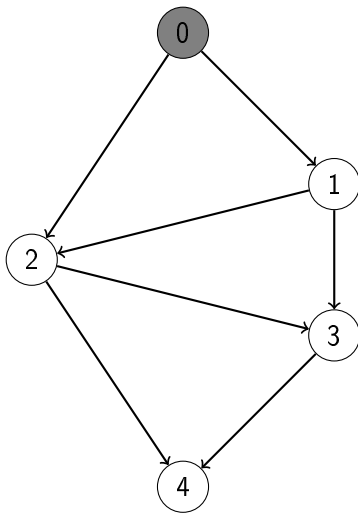
Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

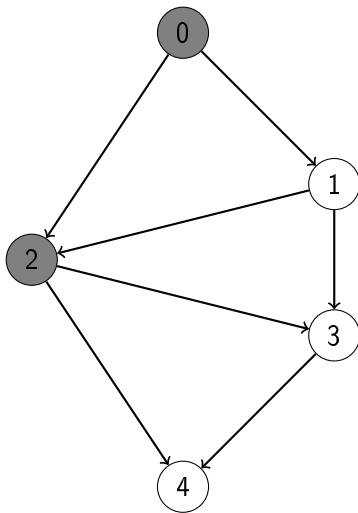
Доказательство.

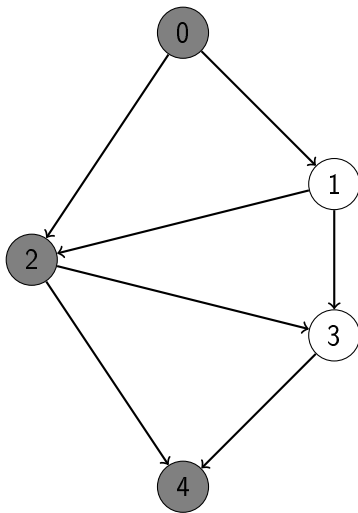
База индукции: очевидно для двухэлементного орграфа.

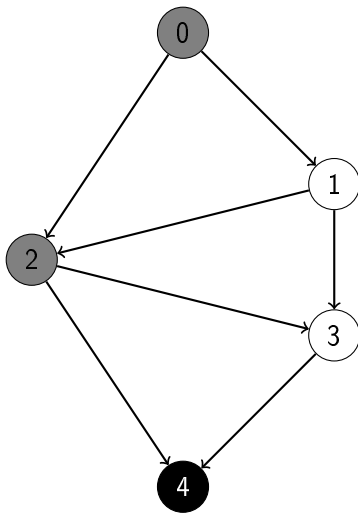
Шаг индукции. В графе есть вершина u с нулевой степенью захода. Исключим вершину u из графа со всеми исходящими ребрами. По предположению индукции, в получившемся графе есть топологическая сортировка v_1, \dots, v_n . Тогда u, v_1, \dots, v_n будет топологической сортировкой исходного графа: в u нет входящих ребер, а значит, нет и пути из вершин v_1, \dots, v_n . □

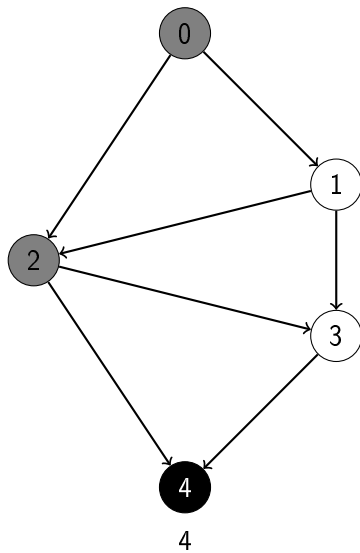


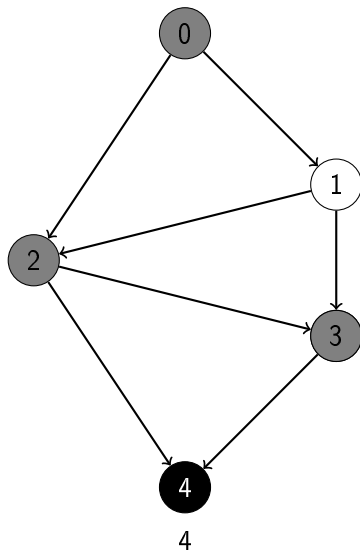


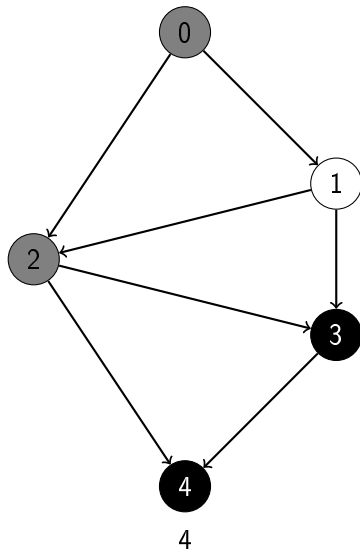


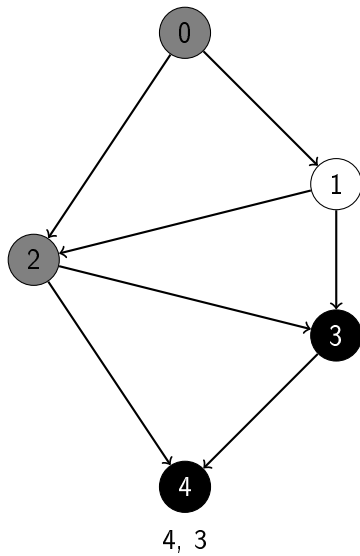


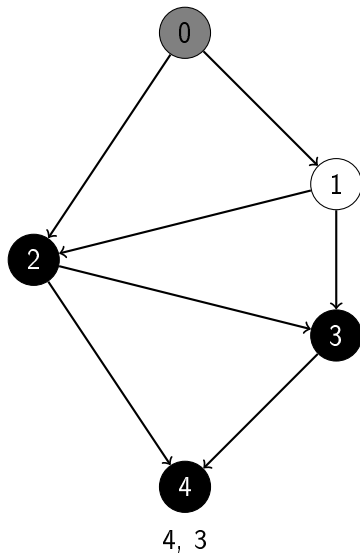


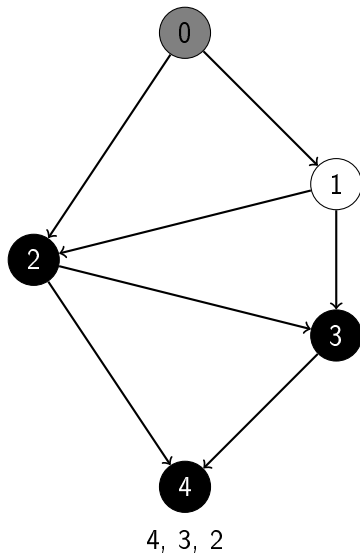


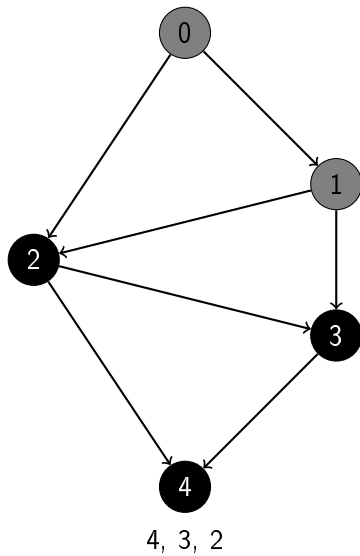


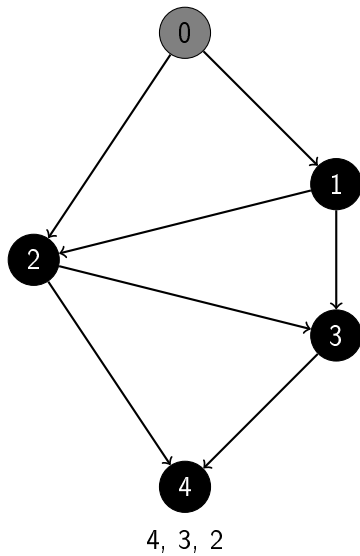


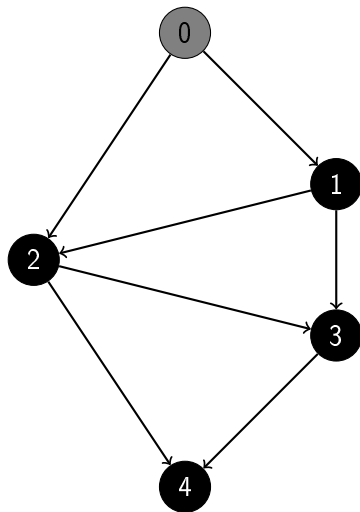




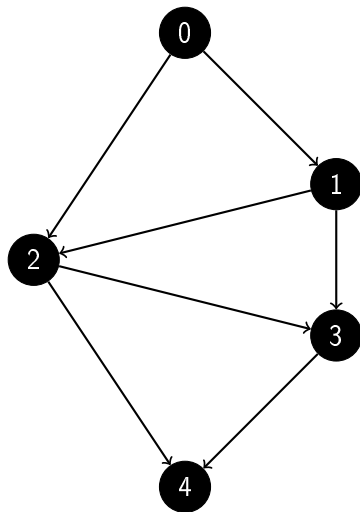




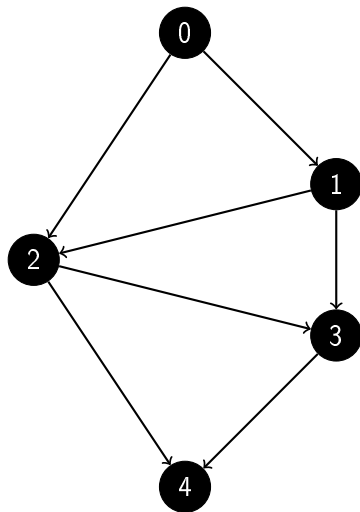




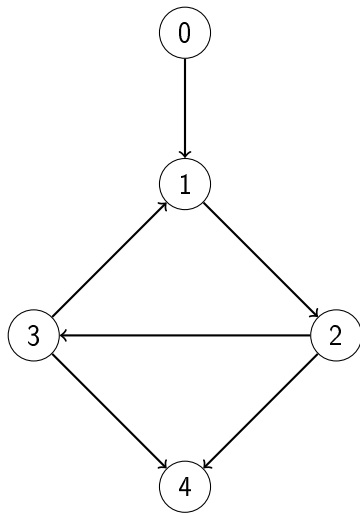
4, 3, 2, 1

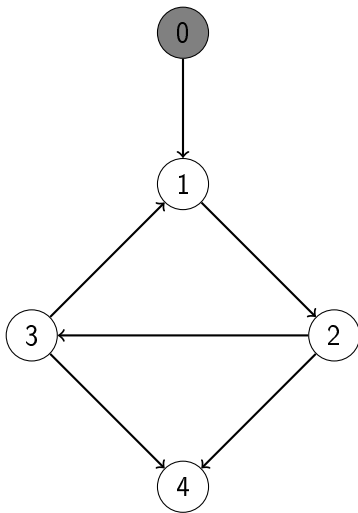


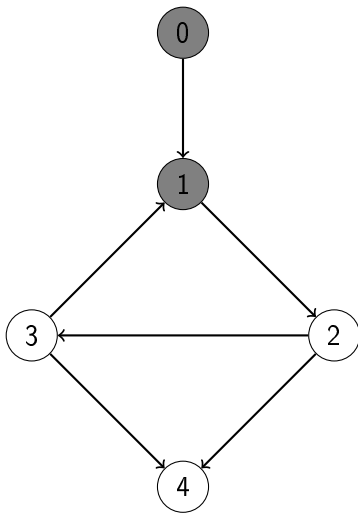
4, 3, 2, 1

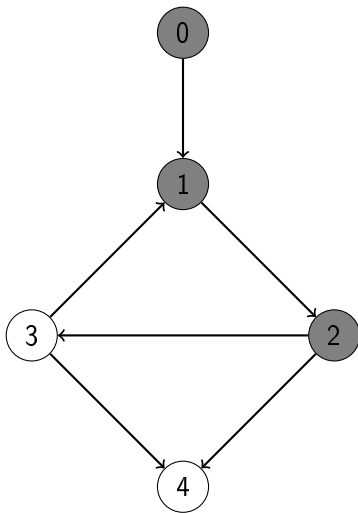


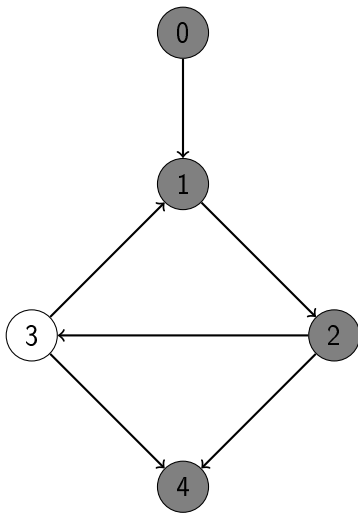
4, 3, 2, 1, 0

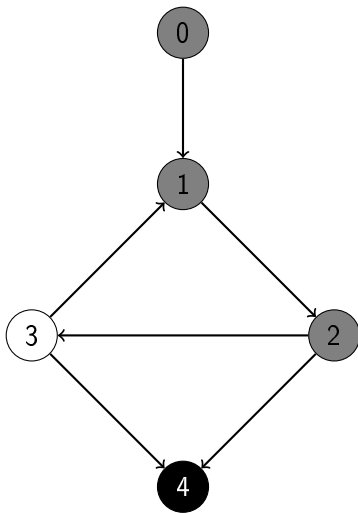


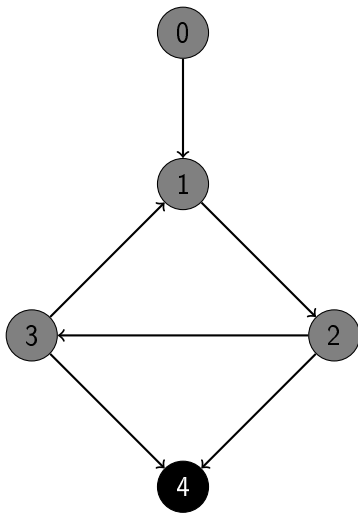


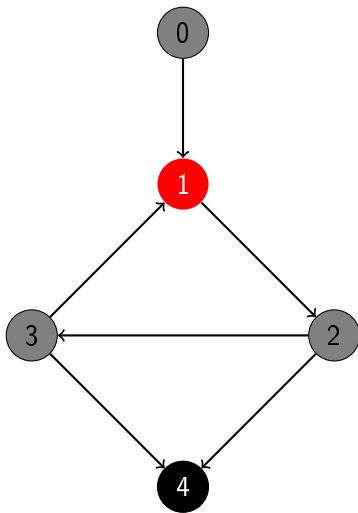












Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если u – вершина с нулевой степенью исхода, а v_1, \dots, v_n – топологическая сортировка $G \setminus \{u\}$, то v_1, \dots, v_n, u – топологическая сортировка G .

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если u – вершина с нулевой степенью исхода, а v_1, \dots, v_n – топологическая сортировка $G \setminus \{u\}$, то v_1, \dots, v_n, u – топологическая сортировка G .

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то алгоритм Тарьяна найдет топологическую сортировку.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, то алгоритм Тарьяна выдаст ошибку.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, то алгоритм Тарьяна выдаст ошибку.

Доказательство.

Пусть v_1, \dots, v_n – цикл. Тогда, начав поиск в глубину из одной из вершин v_i , алгоритм отметит эту вершину серым цветом. Затем, пройдя по вершинам $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i-1}$, он вернется в вершину v_i , которая все еще отмечена серым цветом, и выдаст ошибку. □