Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) \ : \ a \in V, \ b \in V, \ a\%b = 0\}$$

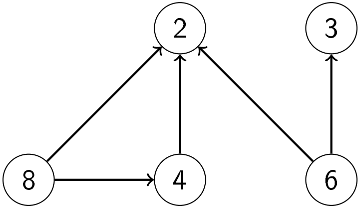
Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4,2), (6,2), (6,3), (8,2), (8,4)\} = \{(a, b) \ : \ a \in V, \ b \in V, \ a\%b = 0\}$$



Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ :\ a, b \in V\}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \ \{a, b\} \ : \ a, b \in V\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ \ :\ \ a, b \in V\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\} = \{\{a, b\}\ \ :\ \ a \in V,\ \ b \in V,\ \ (a + b)\%2 = 0\}$$

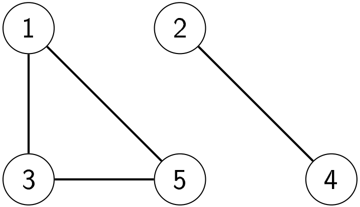
Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ :\ a, b \in V\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}\} = \{\{a, b\}\ :\ a \in V,\ b \in V,\ (a + b)\%2 = 0\}$$



Взвешенный граф

$$G = (V, E, c)$$

Взвешенный граф

$$G = (V, E, c)$$

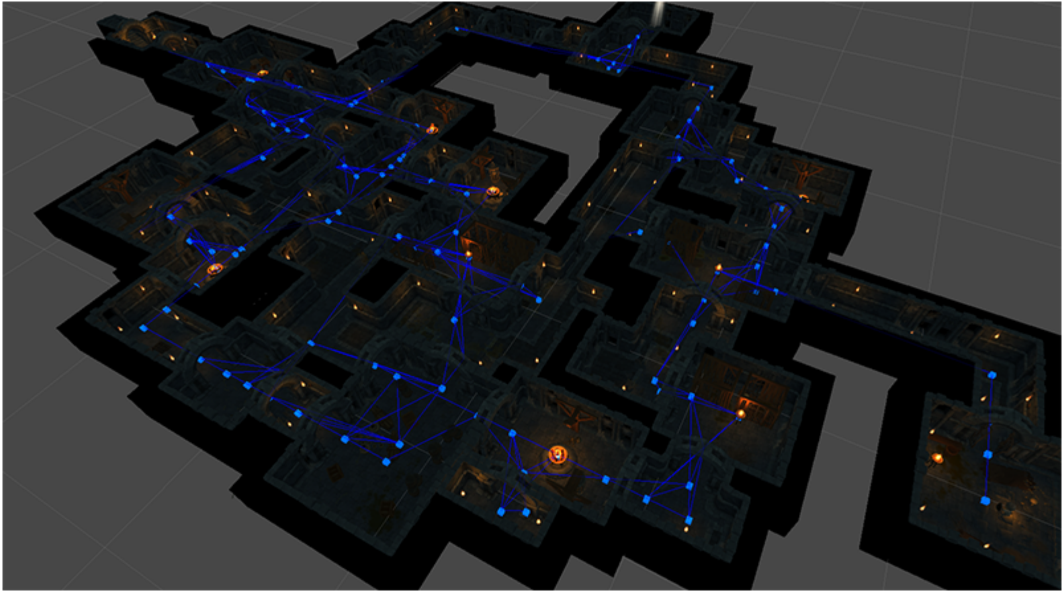
$$E \subset V \times V$$

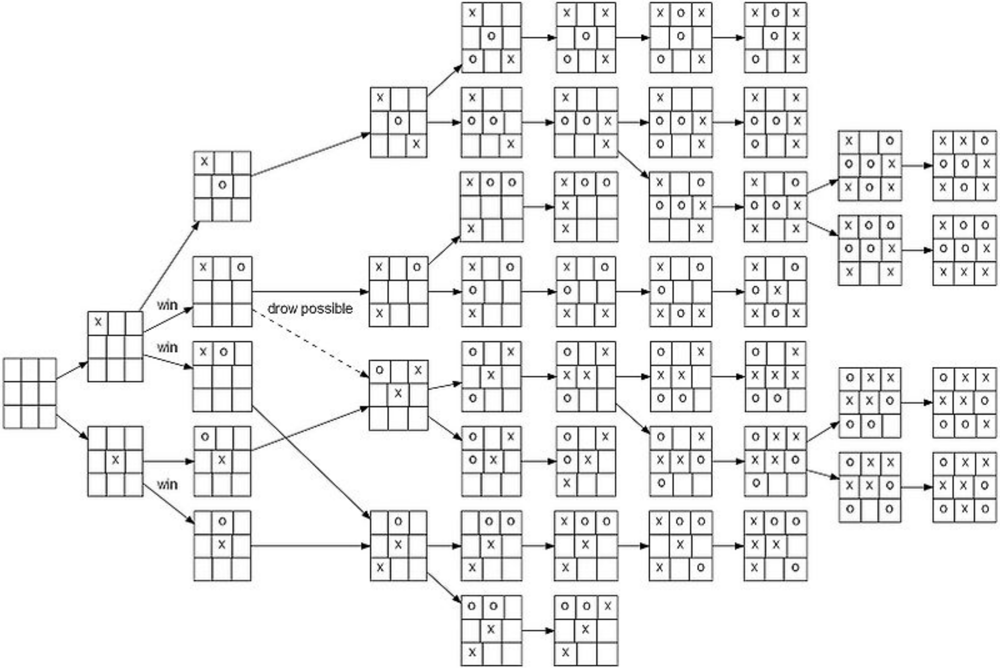
Взвешенный граф

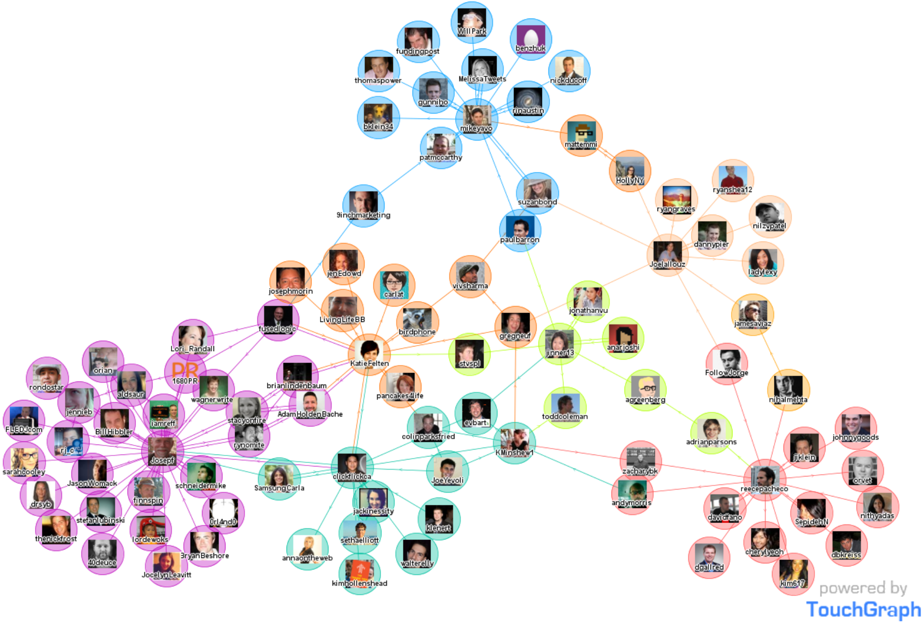
$$G = (V, E, c)$$

$$E \subset V \times V$$

$$c \ : \ E \to \mathbb{R}$$




win
win
win
drow possible


Will Park
fundingpost
benzhuk
thomaspower
MelissaTweets
nickducoff
gunnihq
rinaustin
bklein34
mikeyavo
mattemmi
patmccarthy
HollyNY
suzanbond
ryanshea12
ryangraves
nilzypatel
9inchmarketing
paulbarron
dannypier
Joelallouz
ladylexy
jenEdowd
josephmorin
carlat
vivsharma
jonathanvu
LivingLifeBB
fusedlogic
birdphone
gregneuf
jamesaviaz
Lori_Randall
anarjoshi
KatieFelten
stvspl
jinner13
orian
PR
1680PR
FollowJorge
rondostar
aldsaur
brianlindenbaum
wagnerwrite
pancakes4life
agreenberg
nihalmehta
jennieb
AdamHoldenBache
stacyonfire
evbart
toddcoleman
FLEDJcom
BillHibbler
iamreff
colinparksfried
johnnygoods
rj_c
rynomite
adrianparsons
KMinshew1
jjklein
Josepf
sarahcooley
zacharybk
orvet
JasonWomack
schneidermike
clickflickca
SamsungCarla
JoeYevoli
reecepacheco
drsyb
finnspin
andymorris
jackinessity
stefanlubinski
0rl4nd0
klenert
davidfano
SepidehN
nithyadas
thenickfrost
lordewoks
sethaelliott
40deuce
BryanBeshore
annaontheweb
cherylyeoh
dbkreiss
walterelly
JocelynLeavitt
kimhollenshead
dgallred
kim617
powered by
TouchGraph

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

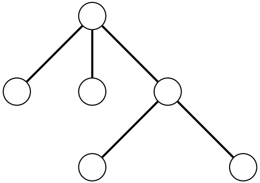
Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

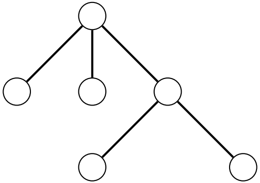
Неориентированный граф **связен**, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Для орграфов такое условие называют **сильной связностью**. **Слабая связность** орграфа означает связность соответствующего ему неориентированного графа.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

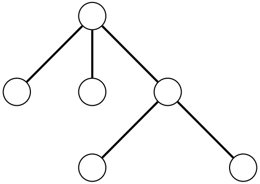


Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

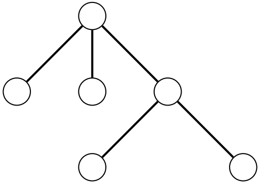
Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

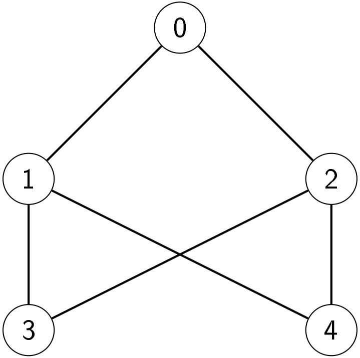
Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

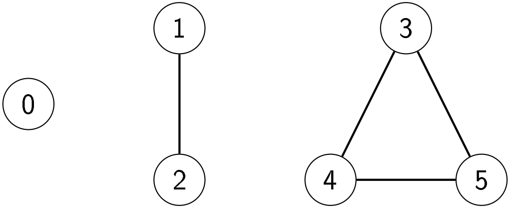


Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

Несвязный неориентированный ациклический граф иногда называют **лесом**.

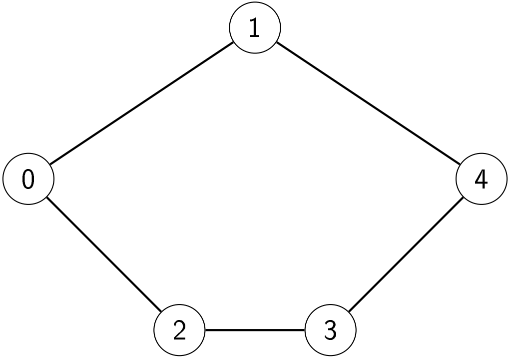

0
1
2
3
4

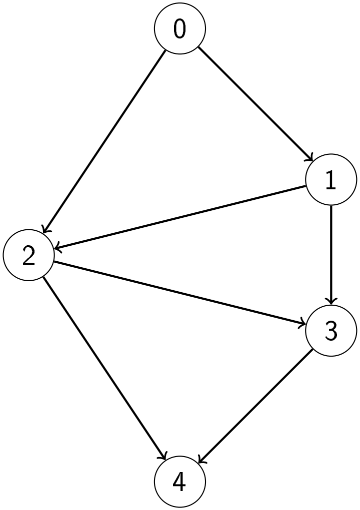

0
1
2
3
4
5

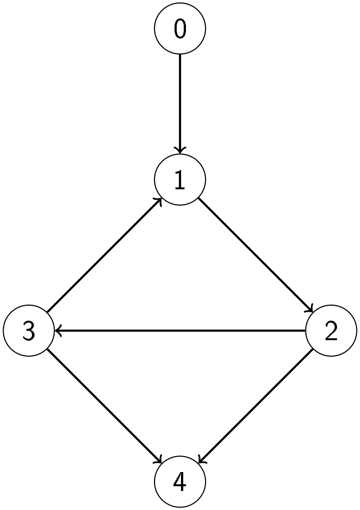
1	2	3
4	5	6
7	8	

1	2	3
4	5	
7	8	6

1	2	3
4		5
7	8	6


1
0
4
2
3


0
1
2
3
4


0
1
3
2
4

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Доказательство.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой □

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

Доказательство.

От противного: пусть такой вершины нет, значит, для каждой вершины есть входящее в нее ребро. Возьмем любую v_0, затем v_1 такую, что ребро из v_1 ведет в v_0, и так далее. Эту последовательность можно продолжить бесконечно, но вершин в графе – конечное число, следовательно, вершины повторятся, и образуют цикл. □

Лемма

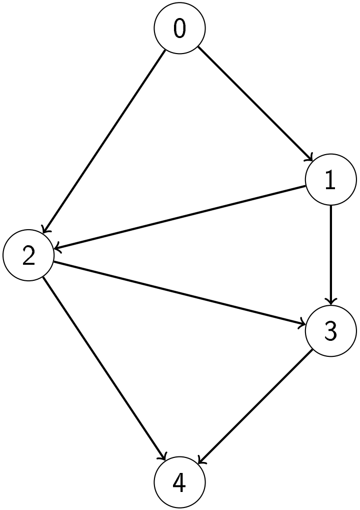
Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

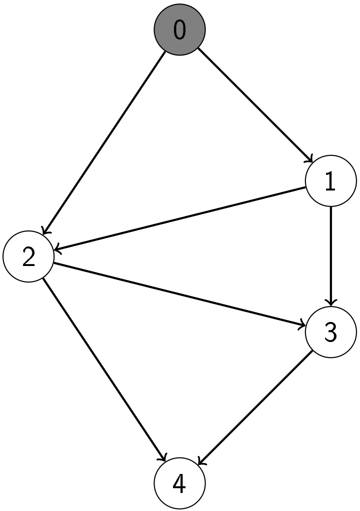
Лемма

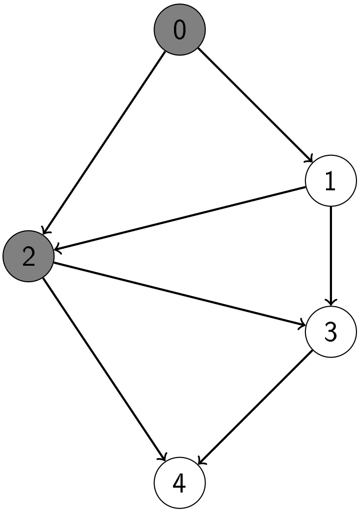
Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

Доказательство.

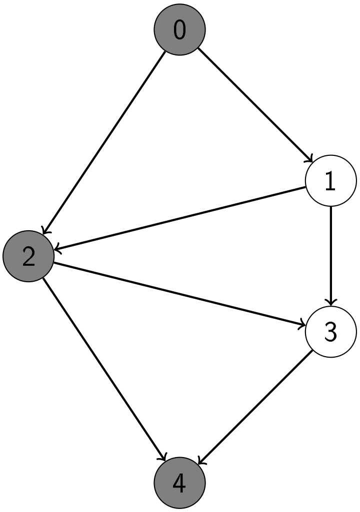
База индукции: очевидно для двухэлементного орграфа.
Шаг индукции. В графе есть вершина u с нулевой степенью захода. Исключим вершину u из графа со всеми исходящими ребрами. По предположению индукции, в получившемся графе есть топологическая сортировка $v_1, \ldots, v_n$. Тогда $u, v_1, \ldots, v_n$ будет топологической сортировкой исходного графа: в u нет входящих ребер, а значит, нет и пути из вершин $v_1, \ldots, v_n$. $\square$

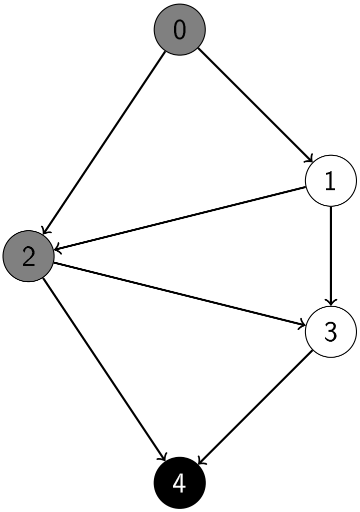

0
1
2
3
4

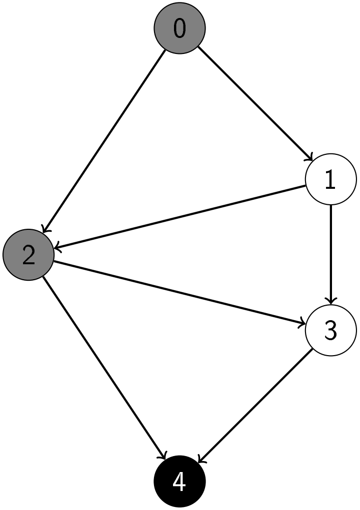

0
1
2
3
4



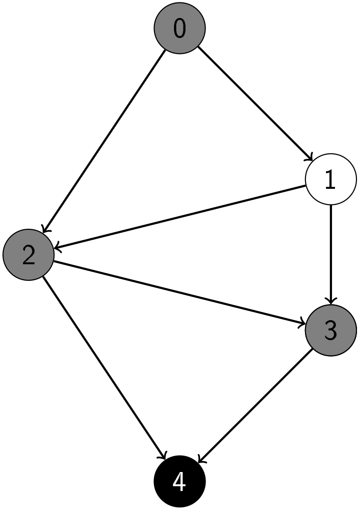
0
1
2
3
4


0
1
2
3
4

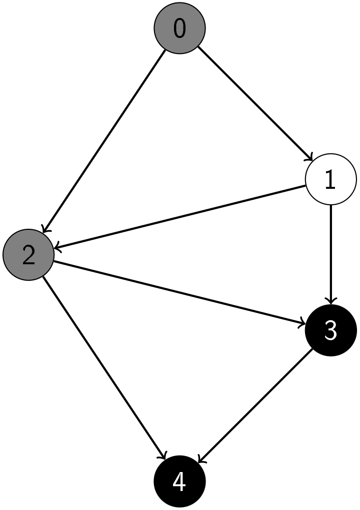

0
1
2
3
4



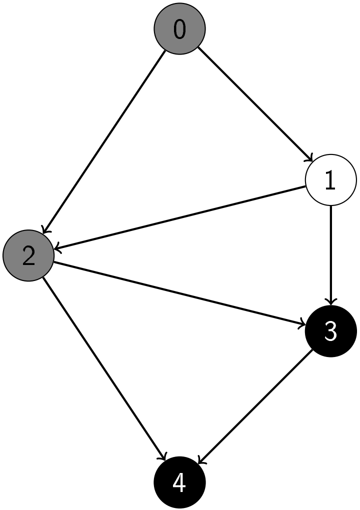
4



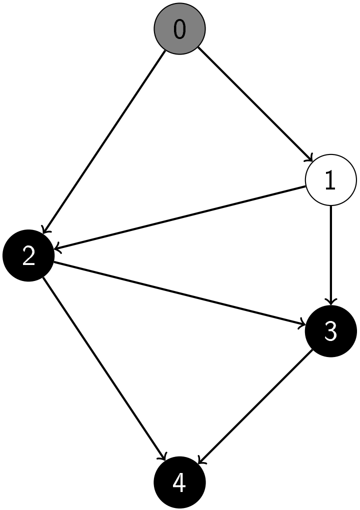
4



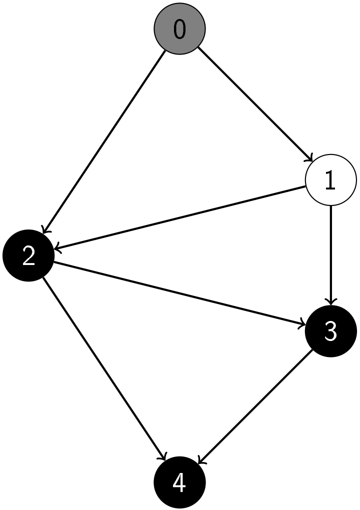
4



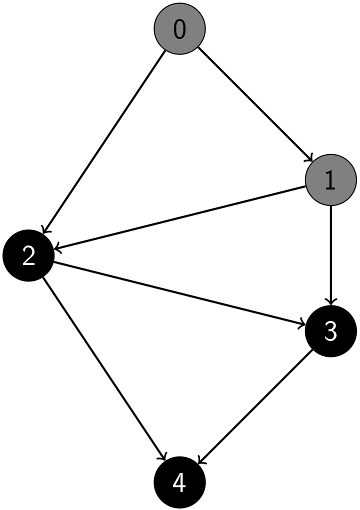
4, 3



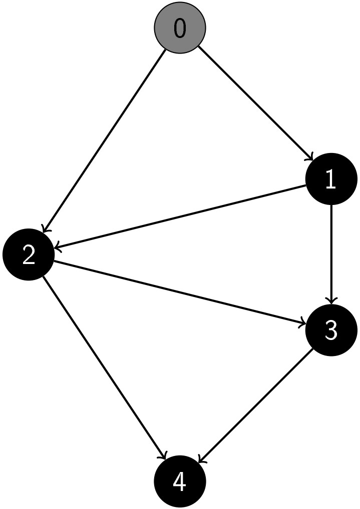
4, 3



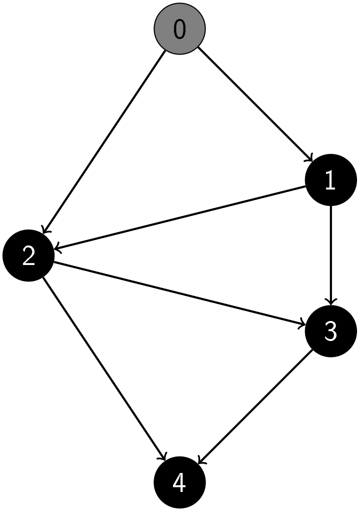
4, 3, 2



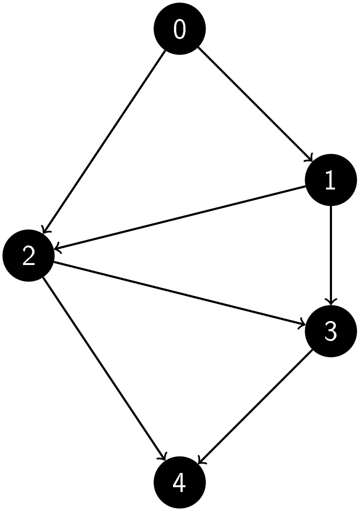
4, 3, 2



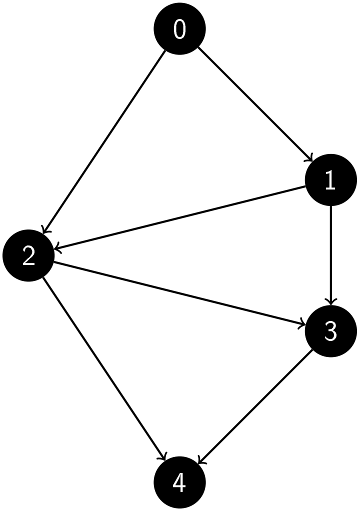
4, 3, 2



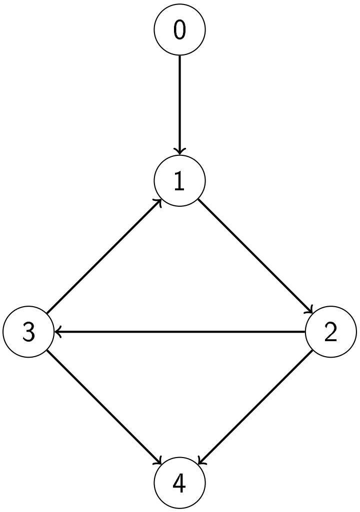
4, 3, 2, 1

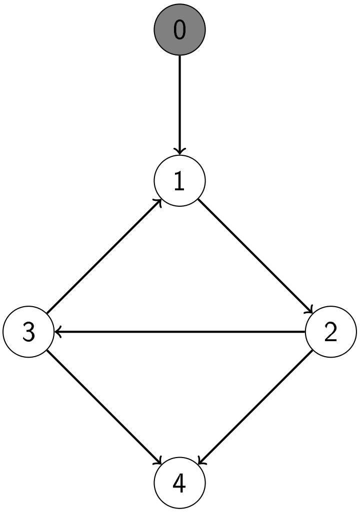


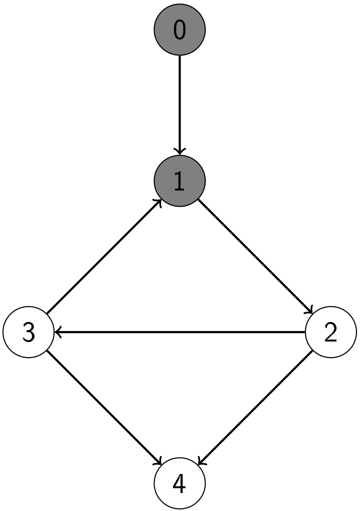
4, 3, 2, 1

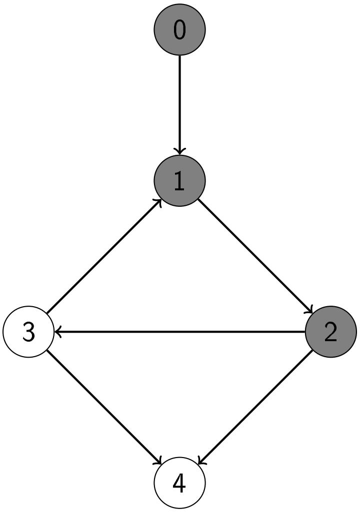


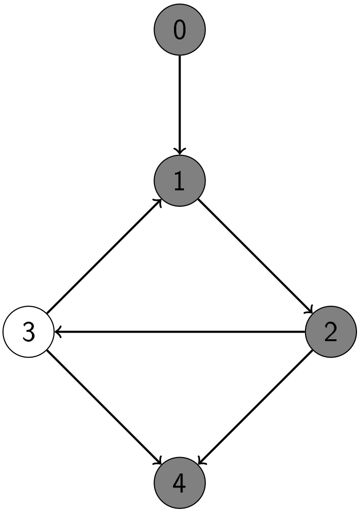
4, 3, 2, 1, 0

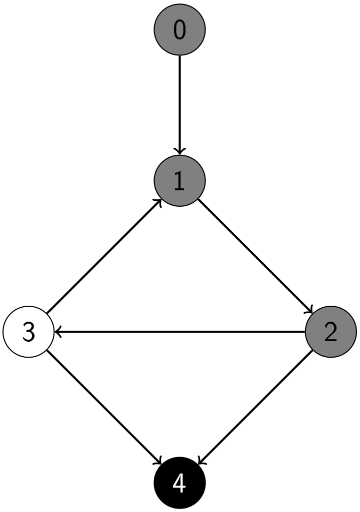

0
1
3
2
4

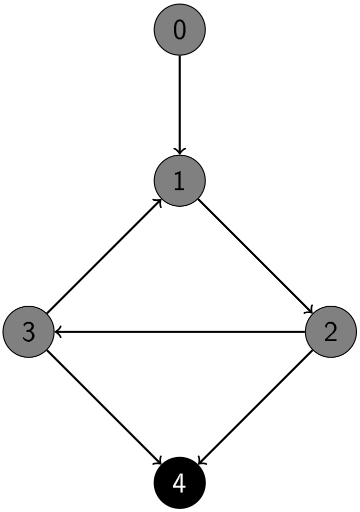

0
1
3
2
4

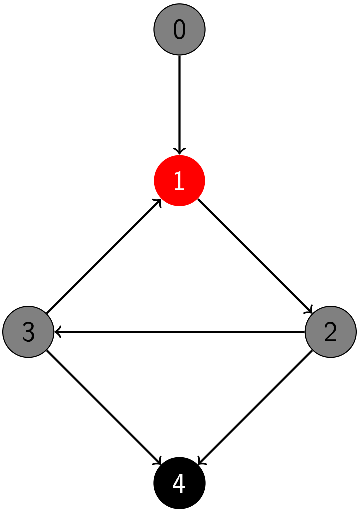

0
1
2
3
4


0
1
2
3
4


0
1
2
3
4


0
1
3
2
4


0
1
3
2
4


0
1
2
3
4

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если u – вершина с нулевой степенью исхода, а $v_1, \ldots, v_n$ – топологическая сортировка $G \setminus \{u\}$, то $v_1, \ldots, v_n$ – топологическая сортировка G.

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью исхода.

Лемма

Если u – вершина с нулевой степенью исхода, а $v_1, \ldots, v_n$ – топологическая сортировка $G \setminus \{u\}$, то $v_1, \ldots, v_n$ – топологическая сортировка G.

Лемма

Если в орграфе нет циклов, то алгоритм Тарьяна найдет топологическую сортировку.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, то алгоритм Тарьяна выдаст ошибку.

Лемма

Если в орграфе есть циклы, то алгоритм Тарьяна выдаст ошибку.

Доказательство.

Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – цикл. Тогда, начав поиск в глубину из одной из вершин v_i, алгоритм отметит эту вершину серым цветом. Затем, пройдя по вершинам $v_{i+1}, v+i+2, \ldots, v_{i-1}$, он вернется в вершину v_i, которая все еще отмечена серым цветом, и выдаст ошибку. $\square$