

# Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

# Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

# Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

## Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, a \% b = 0\}$$

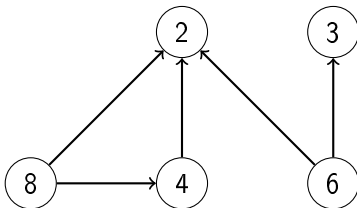
## Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, a \% b = 0\}$$



# Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

# Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

# Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



# Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, (a + b) \% 2 = 0\}$$

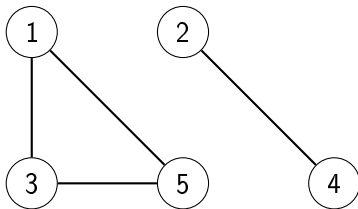
# Неориентированный граф

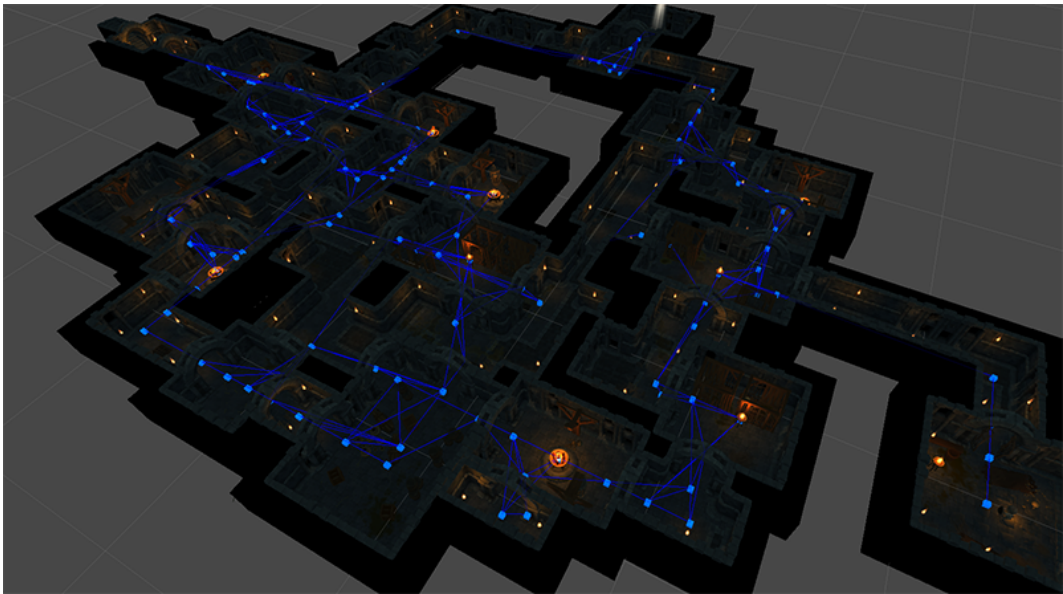
$$G = (V, E)$$

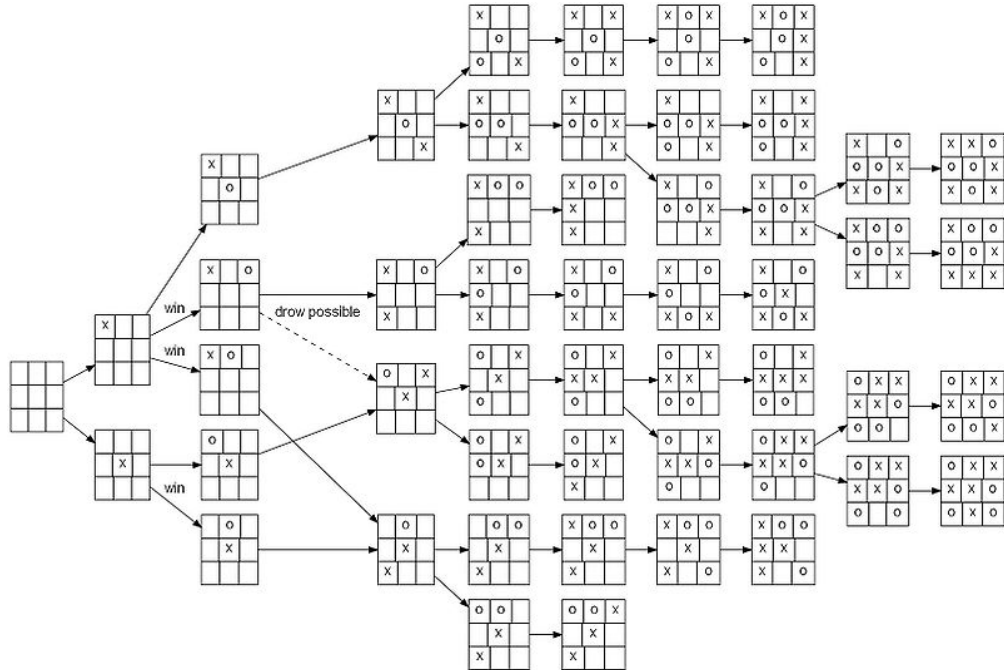
$$E = \{ \{a, b\} : a, b \in V \}$$

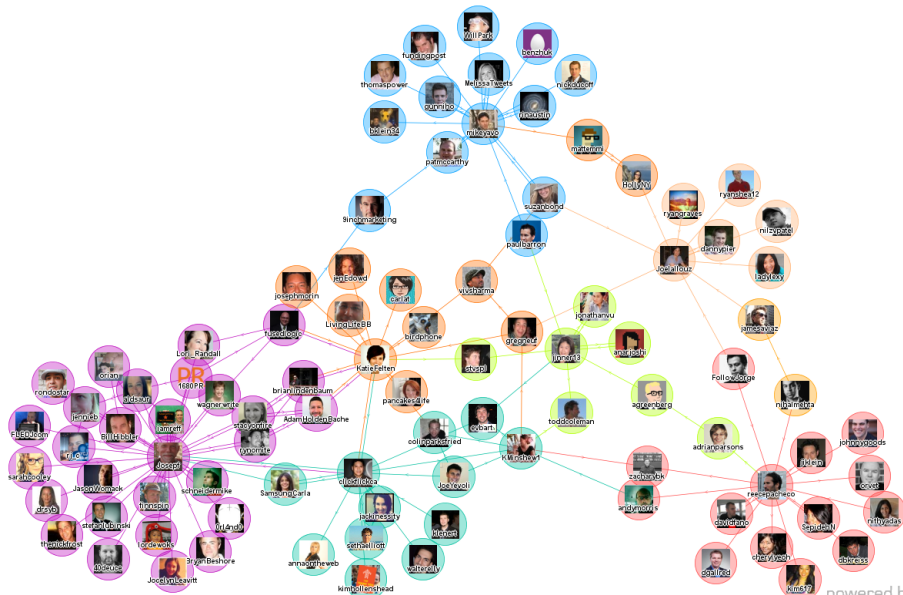
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 4)\} = \{(a, b) : a \in V, b \in V, (a + b) \% 2 = 0\}$$









Ребро  $e$  инцидентно вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

**Степенью вершины** в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.



Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

**Степенью вершины** в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

**Путь (маршрут)** – это последовательность  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$ , где  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $e_i \in E$ ,  $v_i \in V$ .

Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

**Степенью вершины** в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

**Путь (маршрут)** – это последовательность  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$ , где  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $e_i \in E$ ,  $v_i \in V$ .

**Простой путь** – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

**Степенью вершины** в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

**Путь (маршрут)** – это последовательность  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$ , где  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $e_i \in E$ ,  $v_i \in V$ .

**Простой путь** – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

**Цикл (контур)** – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Ребро  $e$  **инцидентно** вершине  $v$ , если  $e = (v, w)$  или  $e = (w, v)$  для некоторого  $w$

Вершины  $v$  и  $w$  **индицентны**, если  $(v, w) \in E$ .

**Степенью вершины** в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

**Путь (маршрут)** – это последовательность  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$ , где  $e_i = (v_i, v_{i+1})$ ,  $e_i \in E$ ,  $v_i \in V$ .

**Простой путь** – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

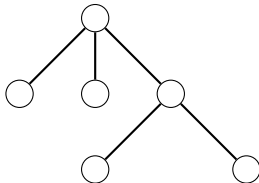
**Цикл (контур)** – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Неориентированный граф **связен**, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Для орграфов такое условие называют **сильной связностью**.

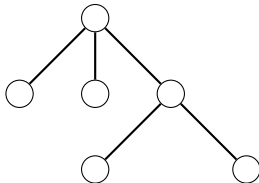
**Слабая связность** орграфа означает связность соответствующего ему неориентированного графа.

**Дерево** – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

**Дерево** – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

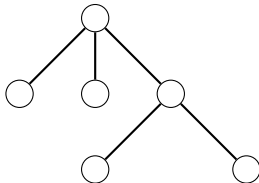


**Дерево** – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



**Лист** – это вершина дерева, имеющая степень 1.

**Дерево** – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

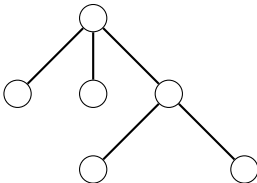


**Лист** – это вершина дерева, имеющая степень 1.

**Корень** – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.



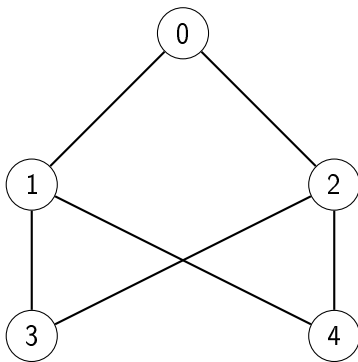
**Дерево** – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

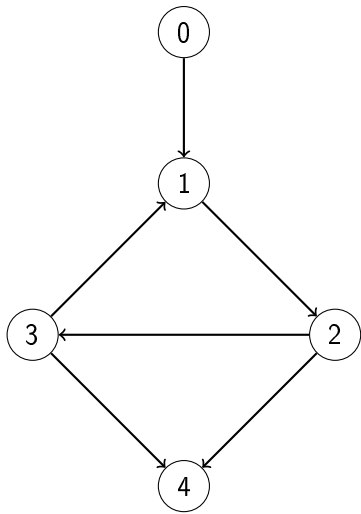
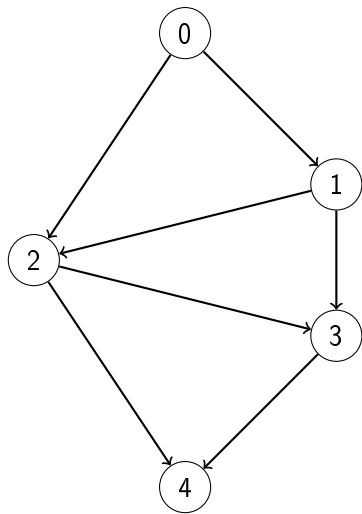


**Лист** – это вершина дерева, имеющая степень 1.

**Корень** – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

Несвязный неориентированный ациклический граф иногда называют **лесом**.





**Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.**

**Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.**

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

**Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.**

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

**Лемма 2. Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.**

**Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.**

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

**Лемма 2. Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.**

От противного: пусть такой вершины нет, значит, для каждой вершины есть входящее в нее ребро. Возьмем любую  $v_0$ , затем  $v_1$  такую, что ребро из  $v_1$  ведет в  $v_0$ , и так далее. Эту последовательность можно продолжить бесконечно, но вершин в графе – конечное число, следовательно, вершины повторятся, и образуют цикл.

**Лемма 3. Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован**



### Лемма 3. Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

База индукции: очевидно для двухэлементного орграфа.

Шаг индукции. По Лемме 2, есть вершина  $u$  с нулевой степенью захода.

Исключим вершину  $u$  из графа со всеми исходящими ребрами. По предположению индукции, в получившемся графе есть топологическая сортировка  $v_1, \dots, v_n$ . Тогда  $u, v_1, \dots, v_n$  будет топологической сортировкой исходного графа: в  $u$  нет входящих ребер, а значит, нет и пути из вершин  $v_1, \dots, v_n$ .