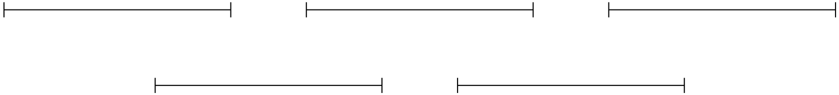
Задача разбиения

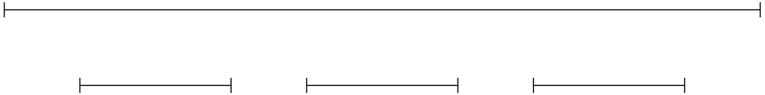
Найти такое подмножество B множества $A \subset \mathbb{N}$, что

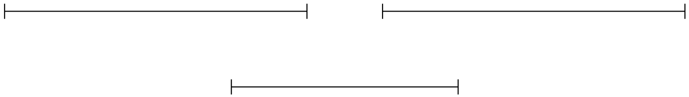
$$\sum_{x \in B} x = \sum_{x \in A \setminus B} x$$

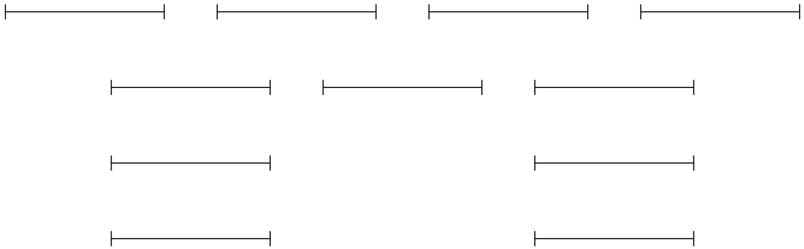
Задача коммивояжера

Найти такой цикл C во взвешенном графе G, что каждая вершина G входит в C ровно один раз, и суммарный вес C минимален из вовзможных.









Доказательство корректности:
Пусть $s(x_i)$ – начало промежутка x_i, $e(x_i)$ – окончание.
Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решение, найденное жадным алгоритмом, и $z_1, \ldots, z_m$ – оптимальное решение.

Доказательство корректности:
Пусть $s(x_i)$ – начало промежутка x_i, $e(x_i)$ – окончание.
Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решение, найденное жадным алгоритмом, и $z_1, \ldots, z_m$ – оптимальное решение.

Лемма

Для любого k, $e(y_k) \leq e(z_k)$.

Доказательство корректности:

Пусть $s(x_i)$ – начало промежутка x_i, $e(x_i)$ – окончание.

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решение, найденное жадным алгоритмом, и $z_1, \ldots, z_m$ – оптимальное решение.

Лемма

Для любого k, $e(y_k) \leq e(z_k)$.

Доказательство.

База индукции: жадный алгоритм выбирает y_1 так, что $e(y_1)$ – минимально.
Шаг индукции: поскольку $e(y_{k-1}) \leq e(z_{k-1})$, то z_k является допустимым для продолжения $y_1, \ldots, y_{k-1}$. y_k – элемент с минимальным e из всех допустимых, следовательно, $e(y_k) \leq e(z_k)$. □

Доказательство корректности:
Пусть $s(x_i)$ – начало промежутка x_i, $e(x_i)$ – окончание.
Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решение, найденное жадным алгоритмом, и $z_1, \ldots, z_m$ – оптимальное решение.

Лемма

Для любого k, $e(y_k) \leq e(z_k)$.

Доказательство.

База индукции: жадный алгоритм выбирает y_1 так, что $e(y_1)$ – минимально.
Шаг индукции: поскольку $e(y_{k-1}) \leq e(z_{k-1})$, то z_k является допустимым для продолжения $y_1, \ldots, y_{k-1}$. y_k – элемент с минимальным e из всех допустимых, следовательно, $e(y_k) \leq e(z_k)$. □

Лемма

$n \geq m$.

Доказательство корректности:
Пусть $s(x_i)$ – начало промежутка x_i, $e(x_i)$ – окончание.
Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решение, найденное жадным алгоритмом, и $z_1, \ldots, z_m$ – оптимальное решение.

Лемма

Для любого k, $e(y_k) \le e(z_k)$.

Доказательство.

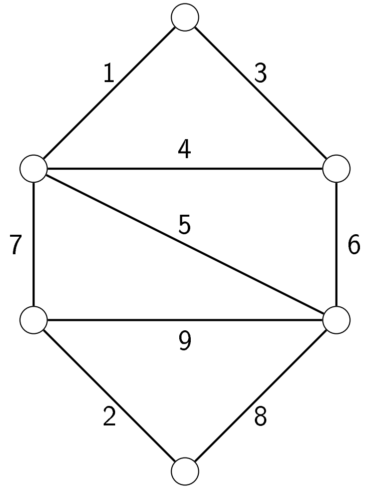
База индукции: жадный алгоритм выбирает y_1 так, что $e(y_1)$ – минимально.
Шаг индукции: поскольку $e(y_{k-1}) \le e(z_{k-1})$, то z_k является допустимым для продолжения $y_1, \ldots, y_{k-1}$. y_k – элемент с минимальным e из всех допустимых, следовательно, $e(y_k) \le e(z_k)$. □

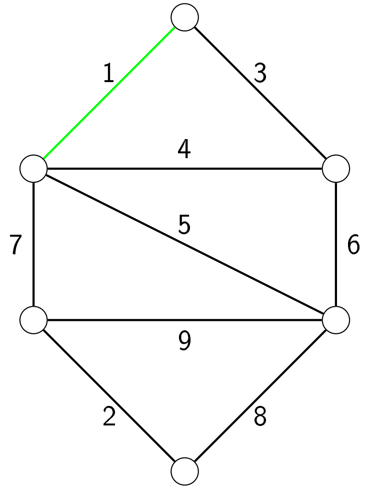
Лемма

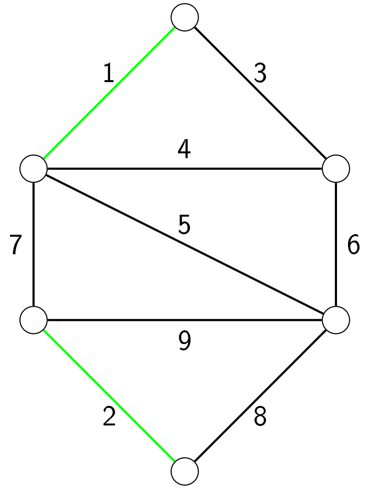
$n \ge m$.

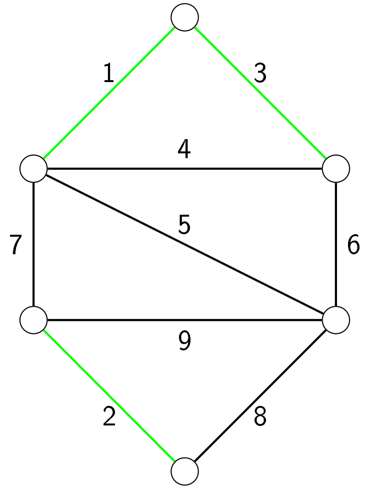
Доказательство.

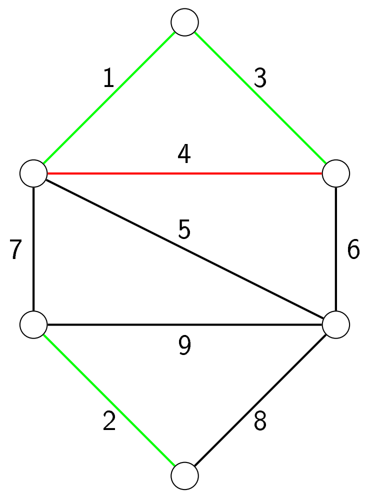
Пусть $m > n$. Поскольку $e(y_n) < e(z_n)$, то z_n допустим для $y_1, \ldots, y_n$. Но тогда жадный алгоритм включил бы его в эту последовательность. □


1
3
4
5
7
6
9
2
8

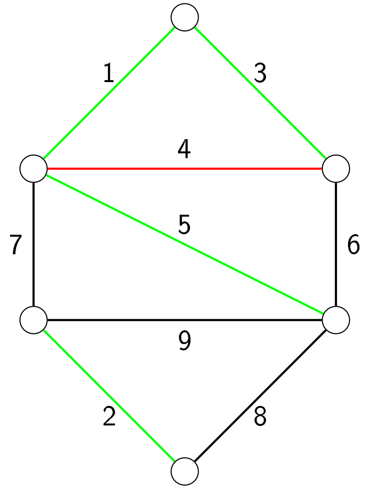

1
3
4
7
5
6
9
2
8

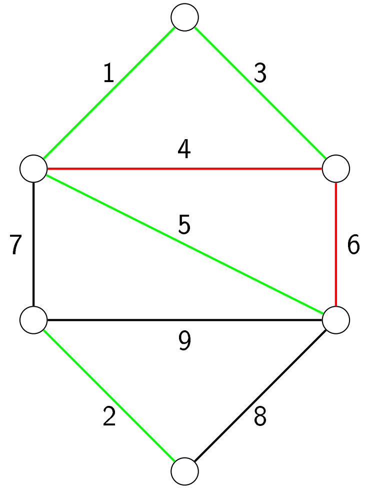

1
3
4
5
7
6
9
2
8

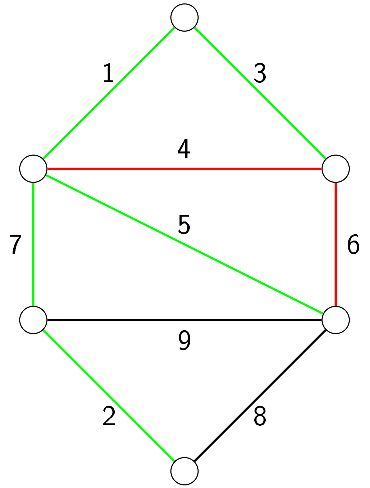

1
3
4
5
7
6
9
2
8

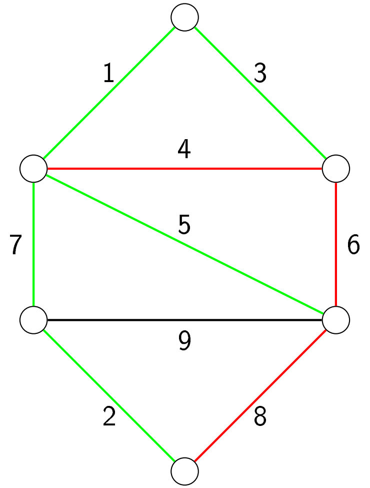


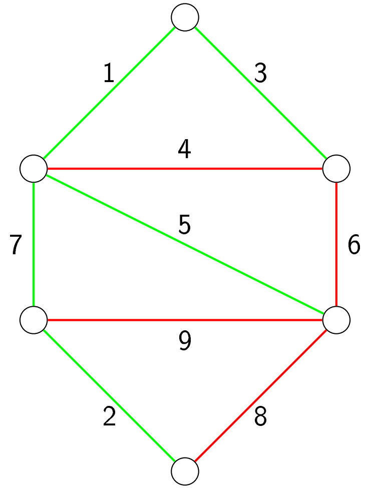
1
3
4
5
7
6
9
2
8


1
3
4
5
7
6
9
2
8


1
3
4
5
7
6
9
2
8


1
3
4
7
5
6
9
2
8


1
3
4
5
7
6
9
2
8


1
3
4
5
7
6
9
2
8

Теорема

На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$ *является подмножеством минимальное остовного дерева.*

Теорема

На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$ *является подмножеством минимальное остовного дерева.*

Доказательство.

$\square$

Теорема

На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$ *является подмножеством минимальное остовного дерева.*

Доказательство.

База индукции. Очевидно для $k = 0$ и пустой последовательности.

$\square$

Теорема

На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$ *является подмножеством минимальное остовного дерева.*

Доказательство.

База индукции. Очевидно для $k = 0$ и пустой последовательности.
Шаг индукции. Пусть $F = \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. По предположению индукции, существует минимальное остовное дерево T, содержащее F. Если T содержит e_k, то шаг индукции выполняется.

$\square$

Теорема

На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \dots, e_k$ является подмножеством минимальное остовного дерева.

Доказательство.

База индукции. Очевидно для $k = 0$ и пустой последовательности.
Шаг индукции. Пусть $F = \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. По предположению индукции, существует минимальное остовное дерево T, содержащее F. Если T содержит e_k, то шаг индукции выполняется.
Если нет, то $T + e_k$ содержит цикл C. Этот цикл содержит некое ребро p, такое что p не входит в F (в противном случае, $F + e_k$ содержит цикл, и алгоритм Краскала не мог бы выбрать e_k как продолжение F).

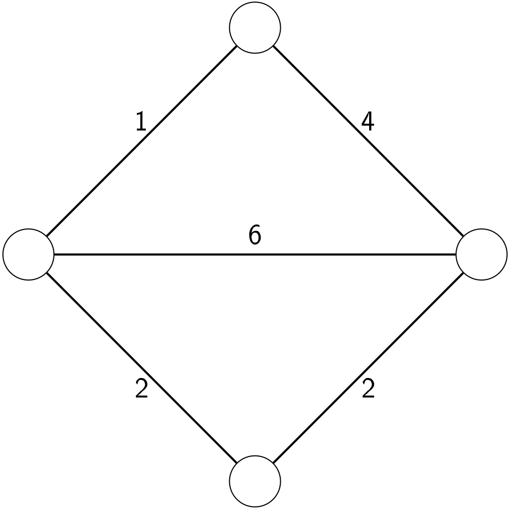
$\square$

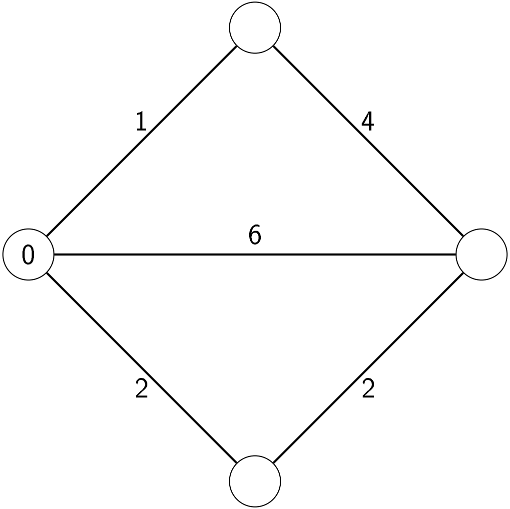
Теорема

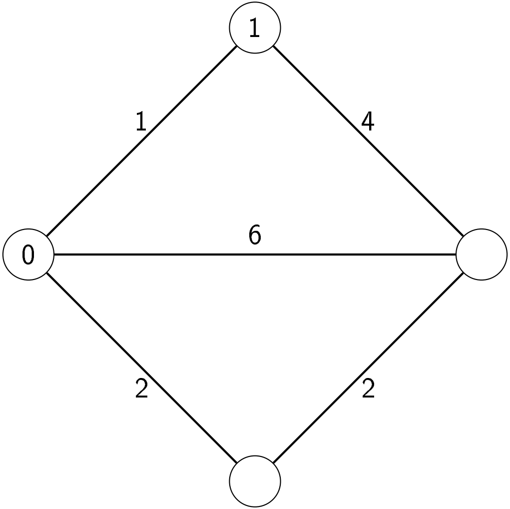
На каждом шаге алгоритма Краскала, последовательность ребер $e_1, \ldots, e_k$ является подмножеством минимальное остовного дерева.

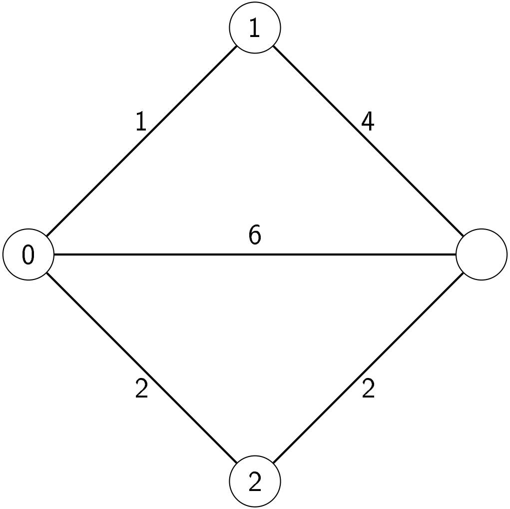
Доказательство.

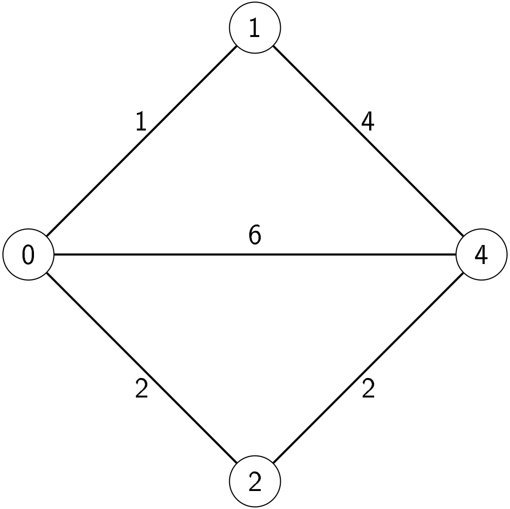
База индукции. Очевидно для $k = 0$ и пустой последовательности.
Шаг индукции. Пусть $F = \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. По предположению индукции, существует минимальное остовное дерево T, содержащее F. Если T содержит e_k, то шаг индукции выполняется.
Если нет, то $T + e_k$ содержит цикл C. Этот цикл содержит некое ребро p, такое что p не входит в F (в противном случае, $F + e_k$ содержит цикл, и алгоритм Краскала не мог бы выбрать e_k как продолжение F).
Тогда $T - p + e_k$ является деревом. Учтем, что $w(e_k) \leq w(p)$, поскольку жадный алгоритм выбрал e_k, а не p. Следовательно, $w(T - p + e_k) \leq w(T)$, но T – оптимально, следовально, $T - p + e_k$ также оптимально. $\square$

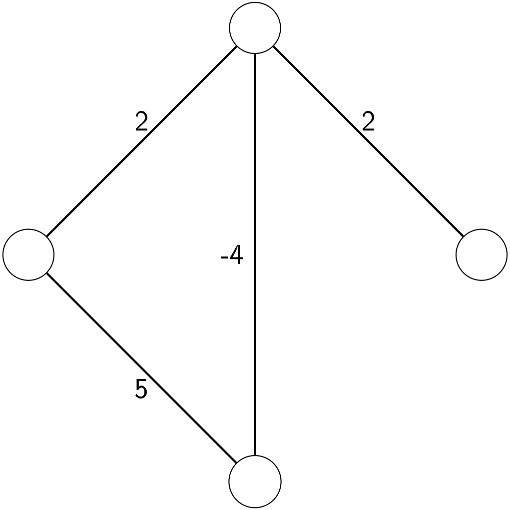

1
4
6
2
2

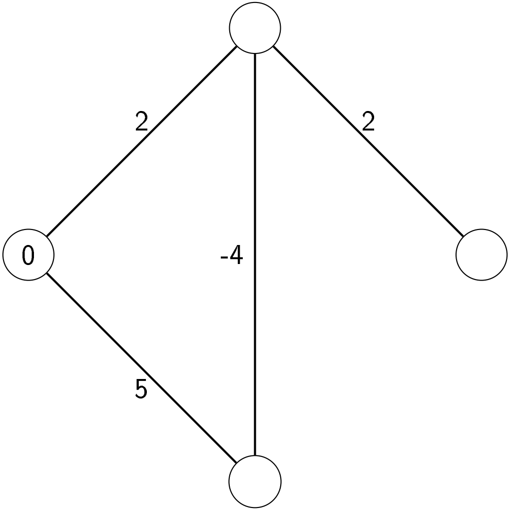

1
4
6
0
2
2

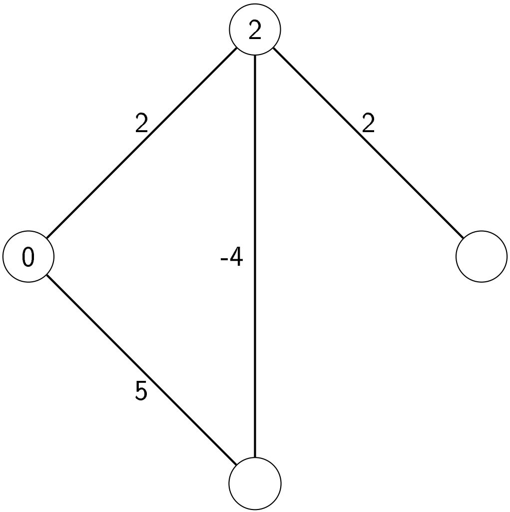

1
1
4
6
0
2
2


1
1
4
6
0
2
2
2

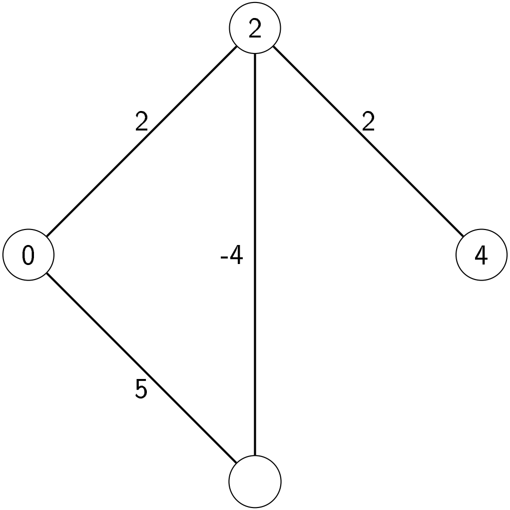

1
1
4
6
0
4
2
2
2

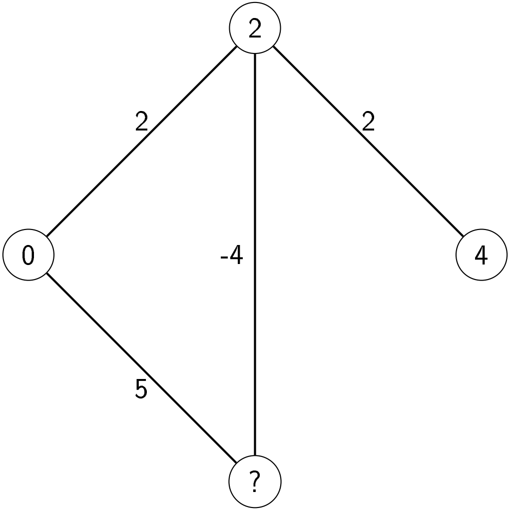

2
2
-4
5


2
2
0
-4
5



2
2
2
0
-4
5


2
2
2
0
-4
4
5


2
2
2
0
-4
4
5
?

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$.`PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Доказательство.

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Доказательство.

Индукция по количеству вершин в S.

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Доказательство.

Индукция по количеству вершин в S.
База индукции: очевидно для v_0.

Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Доказательство.

Индукция по количеству вершин в S.
База индукции: очевидно для v_0.
Шаг индукции. Пусть v – вершина, которую алгоритм добавляет в S по ребру (u, v). Пусть P_u – путь, найденный алгоритмом из v_0 в u, P_v – аналогичный путь для v. По предположению индукции P_u является кратчайшим путем из v_0 в u. По выбору ребра (u, v), P_v является кратчайшим путем из v_0 в v из тех, что проходят только через вершины из S.

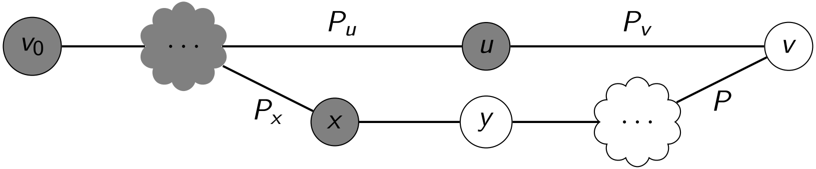
Обозначим `visited` через S, `visited`$[v]$`.PathLength` через $p(v)$, `start` через v_0.

Теорема

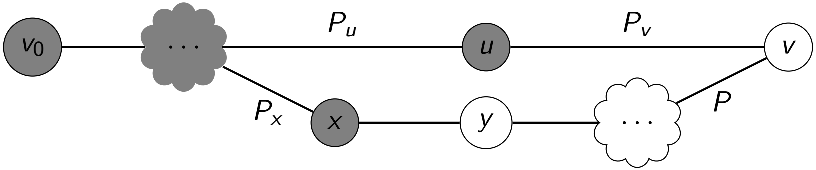
Пусть все веса в графе неотрицательны. Тогда на каждом шаге алгоритма для всех v из S, $p(v)$ является длиной кратчайшего пути из v_0 в v.

Доказательство.

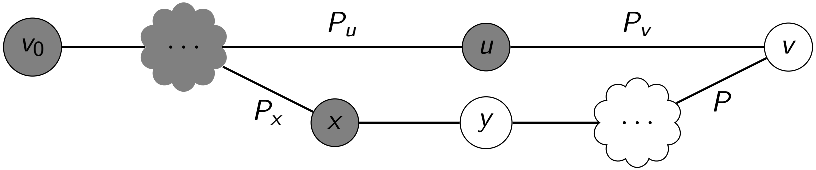
Индукция по количеству вершин в S.
База индукции: очевидно для v_0.
Шаг индукции. Пусть v – вершина, которую алгоритм добавляет в S по ребру (u, v). Пусть P_u – путь, найденный алгоритмом из v_0 в u, P_v – аналогичный путь для v. По предположению индукции P_u является кратчайшим путем из v_0 в u. По выбору ребра (u, v), P_v является кратчайшим путем из v_0 в v из тех, что проходят только через вершины из S.
Предположим, что P_v не является кратчайшим. Следовательно, существует другой путь P с меньшей длиной. Поскольку P_v – кратчайший из путей, которые состоят только из вершин S, в P должна быть вершина не из S. Обозначим первую такую вершину как y, предшествующую ей – как x.



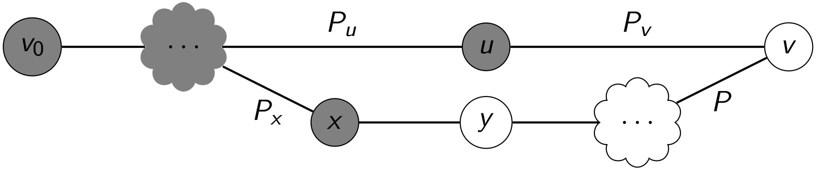
v_0
$\cdots$
P_u
u
P_v
v
P_x
x
y
$\cdots$
P



$\mathcal{L}(P_v)$

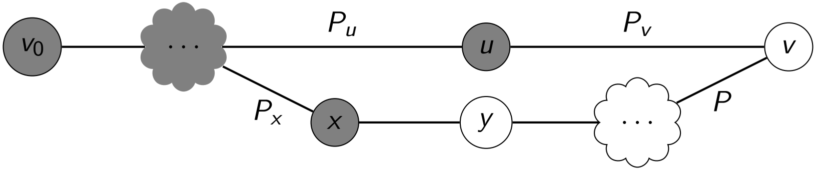


$$\mathcal{L}(P_v) = \mathcal{L}(P_u) + w(u, v)$$



$$\mathcal{L}(P_v) = \mathcal{L}(P_u) + w(u,v) \overset{1}{\leq} \mathcal{L}(P_x) + w(x,y)$$

1) т.к. для добавления выбрана v, а не y



$$\mathcal{L}(P_v) = \mathcal{L}(P_u) + w(u, v) \overset{1}{\leq} \mathcal{L}(P_x) + w(x, y) \overset{2}{\leq} \mathcal{L}(P)$$

1) т.к. для добавления выбрана v, а не y

2) т.к. все веса неотрицательны

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

10

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

10 6

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

5

10 6

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

4	5
10	6

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

	2
4	5
10	6

$$A = \{2, 5, 1, 6, 10, 4\}$$

	1
	2
4	5
10	6

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

3

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

3 3

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

2	
3	3

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

2	2
3	3

$$A = \{3, 3, 2, 2, 2\}$$

	2
2	2
3	3

$$P(B) = \min\left(\sum_{x \in B} x, \sum_{x \in A \setminus B} x\right)$$

$$P(B) = \min\left(\sum_{x \in B} x, \sum_{x \in A \setminus B} x\right)$$

$$OPT(A) = \min_{B \subset A} P(B)$$

$$P(B) = \min\left(\sum_{x \in B} x, \sum_{x \in A \setminus B} x\right)$$

$$OPT(A) = \min_{B \subset A} P(B)$$

Если c – цена решения, найденного жадным алгоритмом для разбиения множества A, то $c \leq 4OPT(A)/3$

$$P(B) = \min\left(\sum_{x\in B} x, \sum_{x\in A\setminus B} x\right)$$

$$OPT(A) = \min_{B\subset A} P(B)$$

Если c – цена решения, найденного жадным алгоритмом для разбиения множества A, то $c \leq 4OPT(A)/3$

$$d(B) = \left|\sum_{x\in B} - \sum_{x\in A\setminus B} x\right|$$

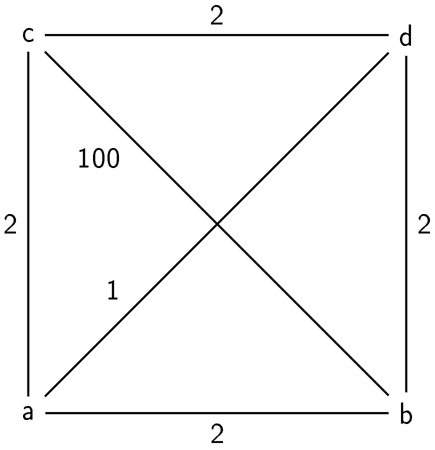
$$P(B) = \min\left(\sum_{x\in B} x, \sum_{x\in A\setminus B} x\right)$$

$$OPT(A) = \min_{B\subset A} P(B)$$

Если c – цена решения, найденного жадным алгоритмом для разбиения множества A, то $c \leq 4OPT(A)/3$

$$d(B) = \left|\sum_{x\in B} - \sum_{x\in A\setminus B} x\right|$$

Если B – решение, найденное жадным алгоритмом, то $d(B) = O\left(|A|^{-1}\right)$


c
2
d
100
2
2
1
a
b
2