Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4, 2), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4)\} = \{(a, b) \ : \ a \in V, \ b \in V, \ a\%b = 0\}$$

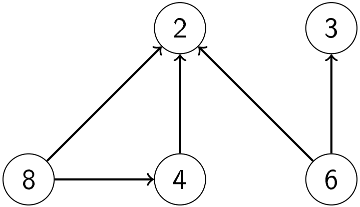
Ориентированный граф (орграф)

$$G = (V, E)$$

$$E \subset V \times V$$

$$V = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

$$E = \{(4,2),(6,2),(6,3),(8,2),(8,4)\} = \{(a,b)\ :\ a \in V,\ b \in V,\ a\%b = 0\}$$



Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ :\ a, b \in V\}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ \ :\ \ a, b \in V\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Неориентированный граф

$$G = (V, E)$$

$$E = \{\ \{a, b\}\ :\ a, b \in V\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1, 3), (1, 5), (3, 5), (2, 4)\} = \{(a, b)\ :\ a \in V,\ b \in V,\ (a + b)\%2 = 0\}$$

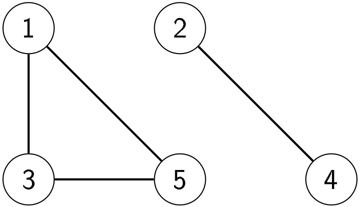
Неориентированный граф

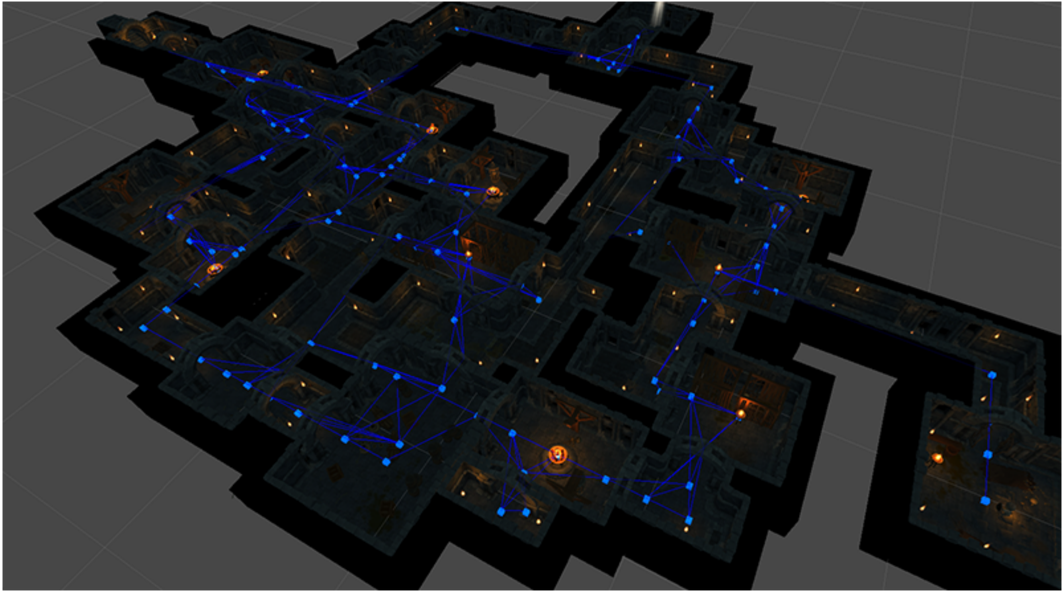
$$G = (V, E)$$

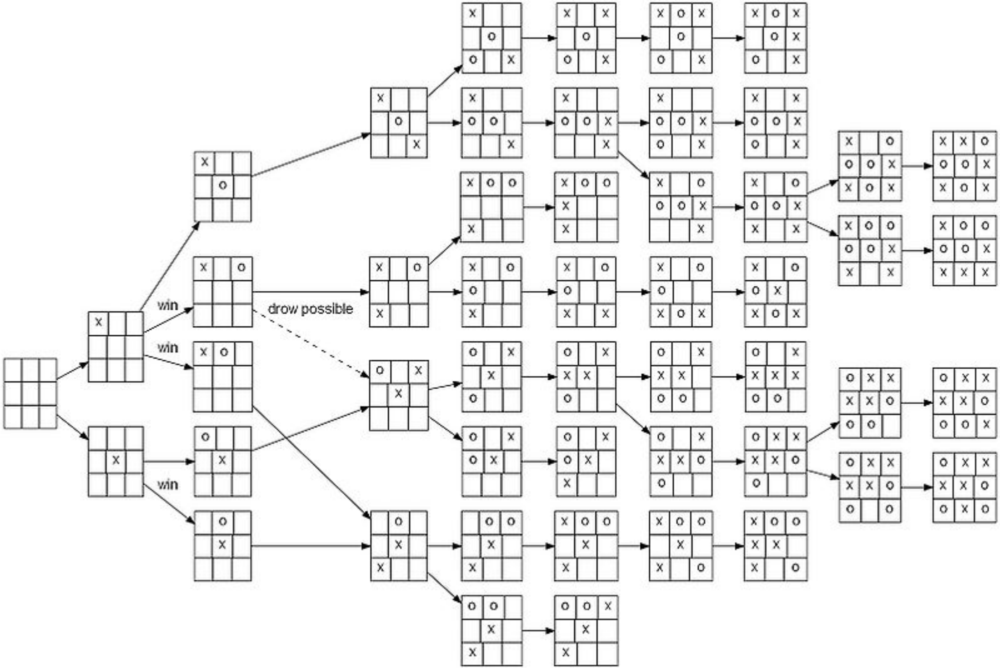
$$E = \{\ \{a, b\}\ :\ a, b \in V\}$$

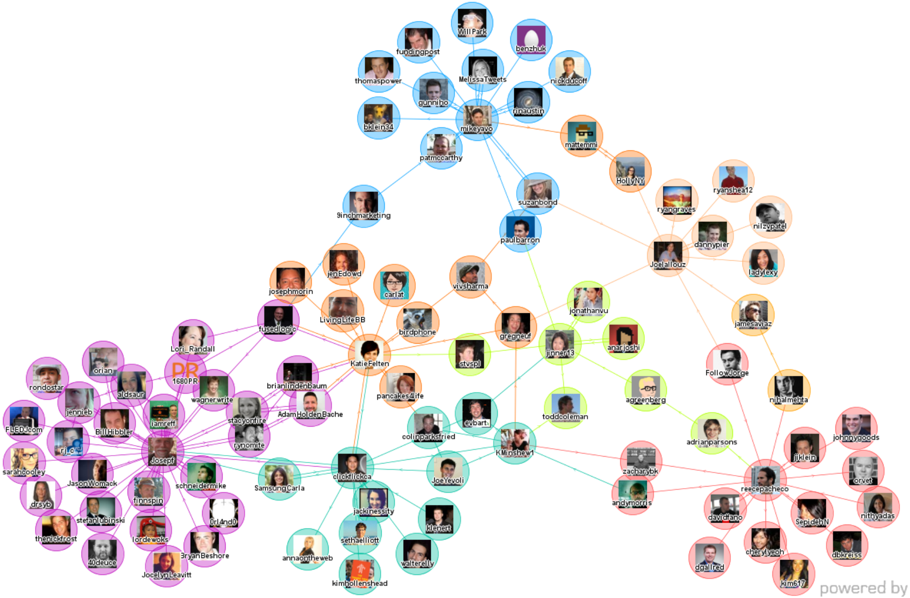
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{(1,3), (1,5), (3,5), (2,4)\} = \{(a, b)\ :\ a \in V,\ b \in V,\ (a + b)\%2 = 0\}$$






win
win
win
drow possible



powered by TouchGraph

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

Ребро e **инцидентно** вершине v, если $e = (v, w)$ или $e = (w, v)$ для некоторого w

Вершины v и w **индицентны**, если $(v, w) \in E$.

Степенью вершины в неориентированном графе называют количество инцидентных ей ребер. Для ориентированных графов разделяют степень захода и степень исхода.

Путь (маршрут) – это последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$, где $e_i = (v_i, v_j)$, $e_i \in E$, $v_i \in V$.

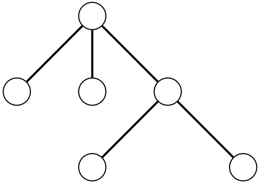
Простой путь – это путь, в котором все ребра и вершины различны.

Цикл (контур) – это путь, в котором первая и последняя вершина совпадают, но других совпадений нет.

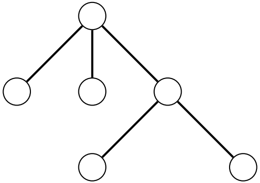
Неориентированный граф **связен**, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Для орграфов такое условие называют **сильной связностью**. **Слабая связность** орграфа означает связность соответствующего ему неориентированного графа.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

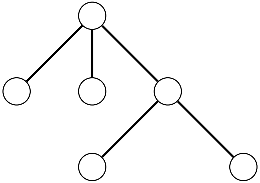


Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

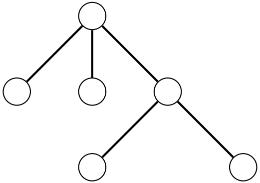
Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.



Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

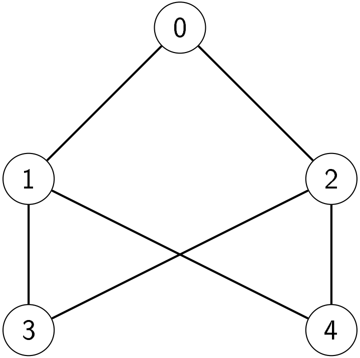
Дерево – это связный неориентированный граф, не содержащий циклов.

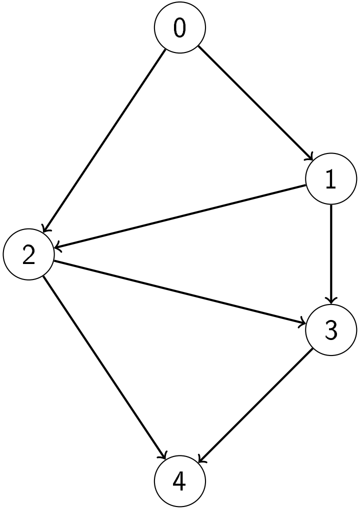


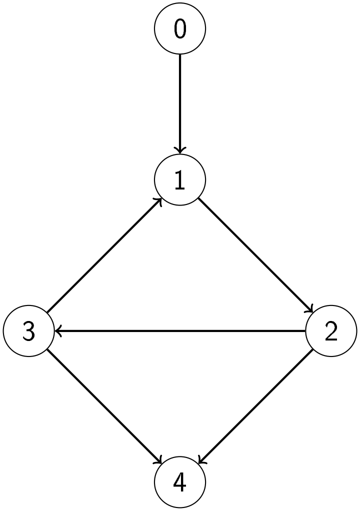
Лист – это вершина дерева, имеющая степень 1.

Корень – это произвольно выбранная и зафиксированная вершина дерева.

Несвязный неориентированный ациклический граф иногда называют **лесом**.


0
1
2
3
4


0
1
2
3
4


0
1
3
2
4

Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

Лемма 2. Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

Лемма 1. Если в орграфе есть циклы, он не может быть топологически отсортирован.

Из любой вершины цикла есть путь в любую другую, а значит, в каком бы порядке мы их не расположили, этот порядок не будет топологической сортировкой

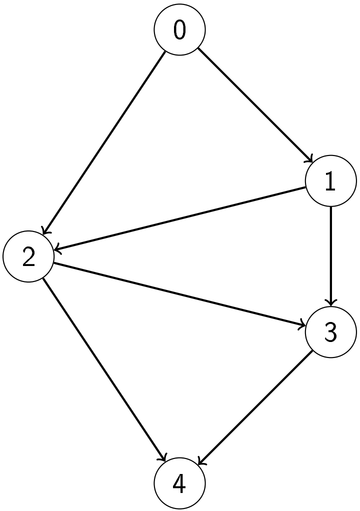
Лемма 2. Если в орграфе нет циклов, то в нем есть вершина с нулевой степенью захода.

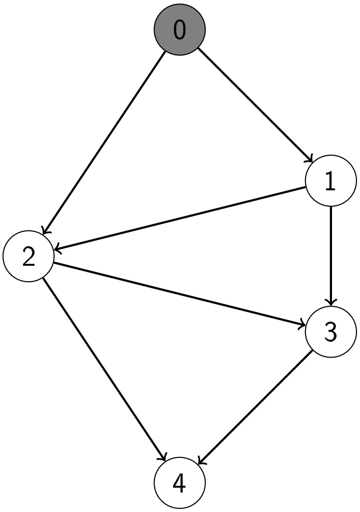
От противного: пусть такой вершины нет, значит, для каждой вершины есть входящее в нее ребро. Возьмем любую v_0, затем v_1 такую, что ребро из v_1 ведет в v_0, и так далее. Эту последовательность можно продолжить бесконечно, но вершин в графе – конечное число, следовательно, вершины повторятся, и образуют цикл.

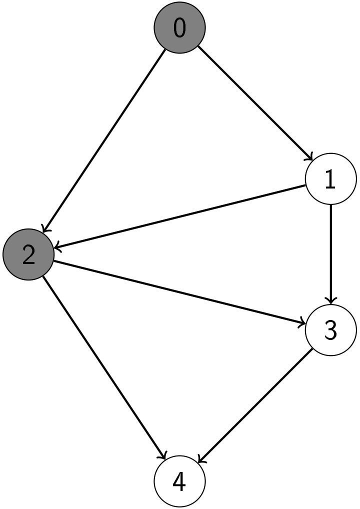
Лемма 3. Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

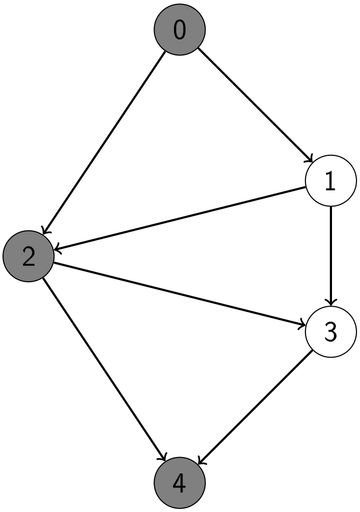
Лемма 3. Если в орграфе нет циклов, он может быть топологически отсортирован

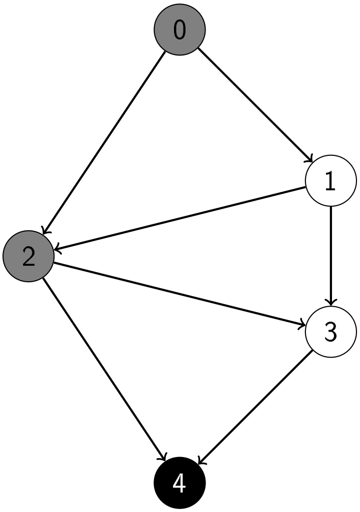
База индукции: очевидно для двухэлементного орграфа.
Шаг индукции. По Лемме 2, есть вершина u с нулевой степенью захода. Исключим вершину u из графа со всеми исходящими ребрами. По предположению индукции, в получившемся графе есть топологическая сортировка $v_1, \ldots, v_n$. Тогда $u, v_1, \ldots, v_n$ будет топологической сортировкой исходного графа: в u нет входящих ребер, а значит, нет и пути из вершин $v_1, \ldots, v_n$.

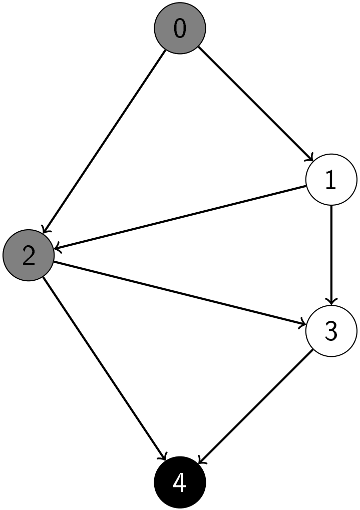

0
1
2
3
4


0
1
2
3
4

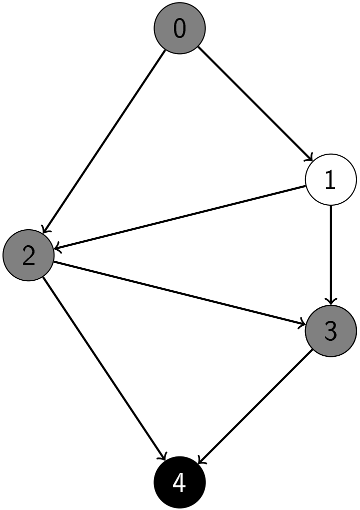

0
1
2
3
4


0
1
2
3
4

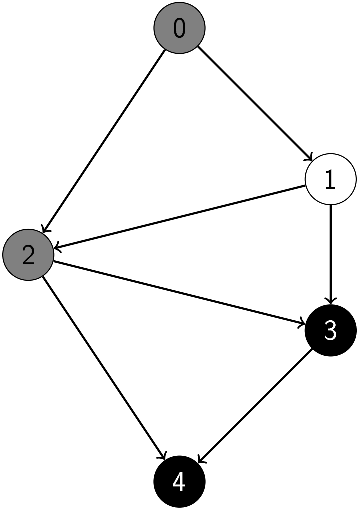

0
1
2
3
4



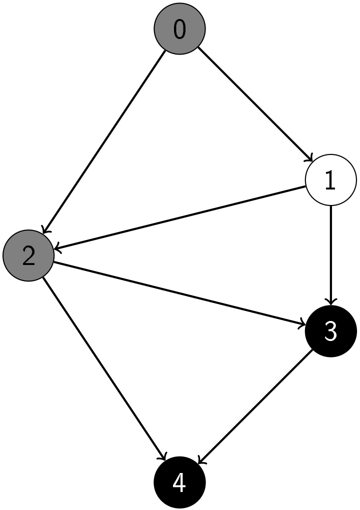
4



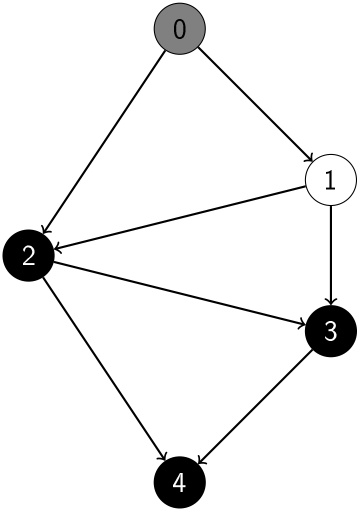
4



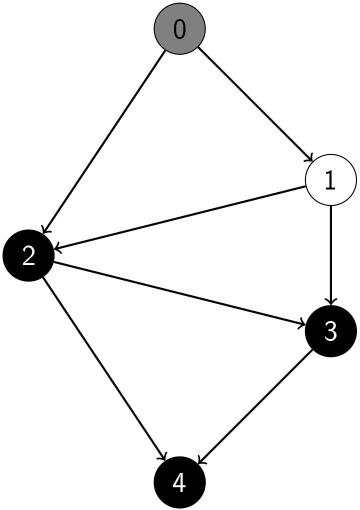
4



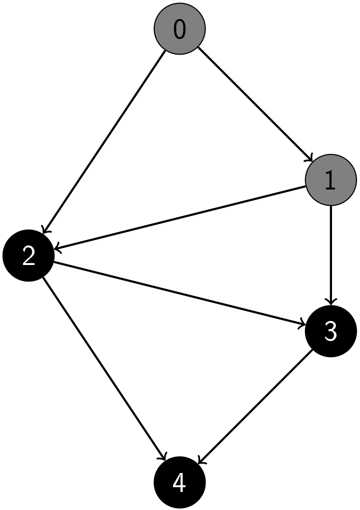
4, 3



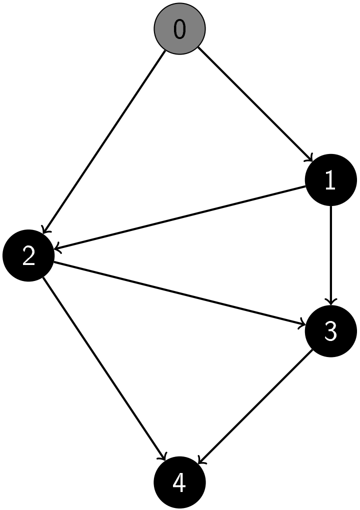
4, 3



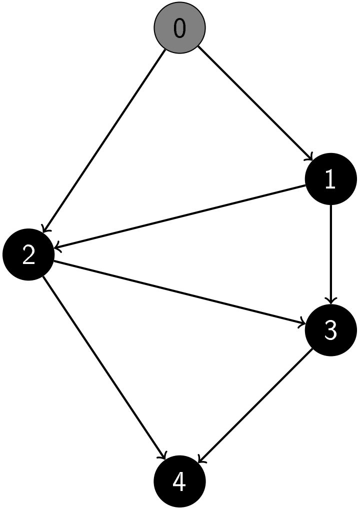
4, 3, 2



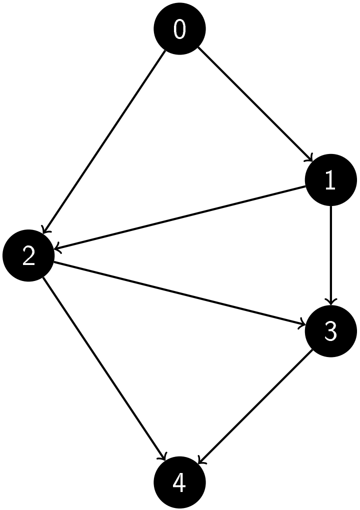
4, 3, 2



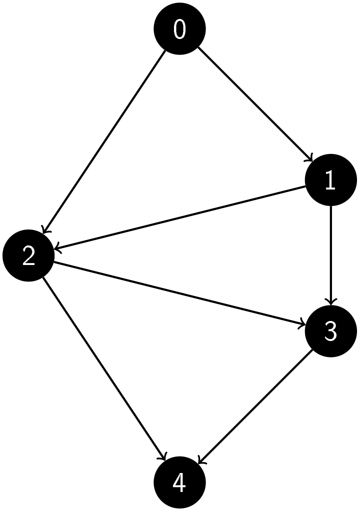
4, 3, 2



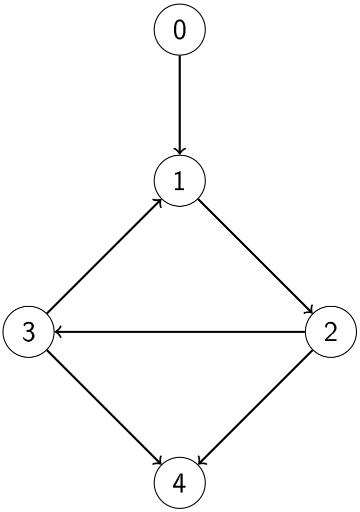
4, 3, 2, 1

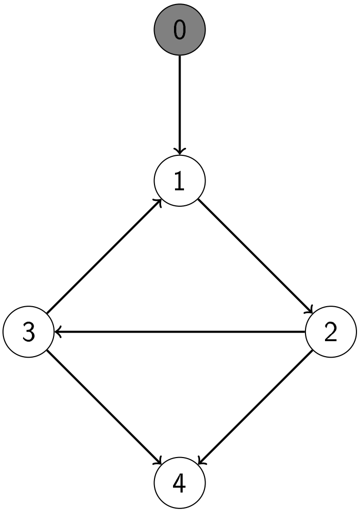


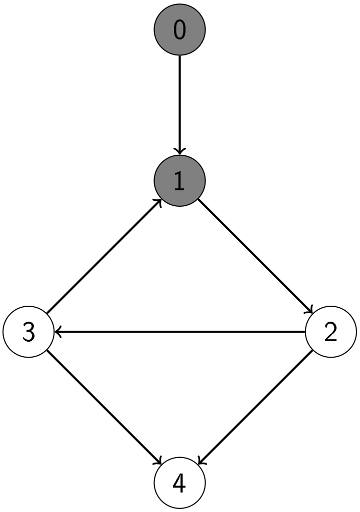
4, 3, 2, 1

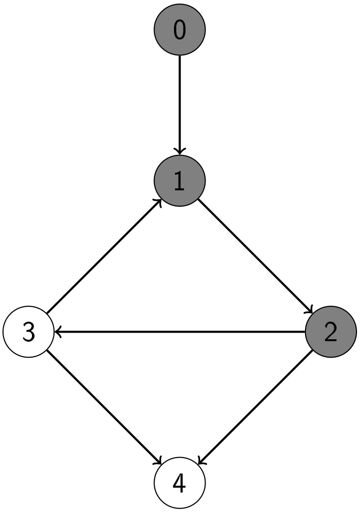


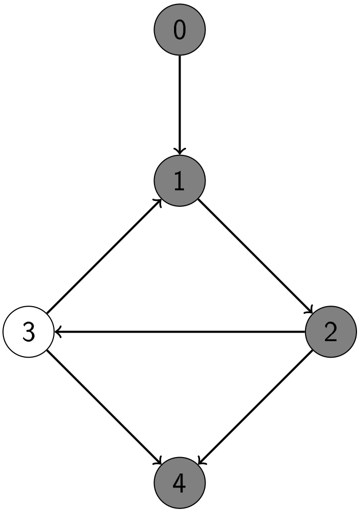
4, 3, 2, 1, 0

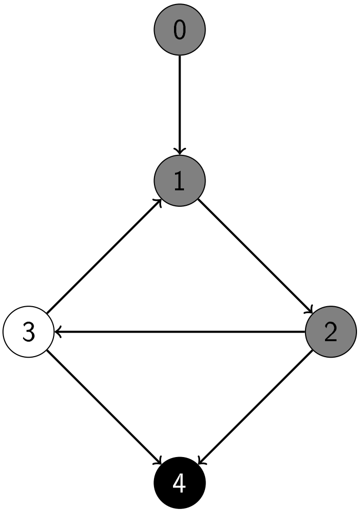

0
1
2
3
4

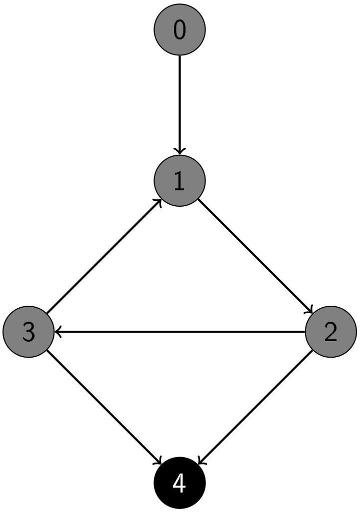

0
1
2
3
4

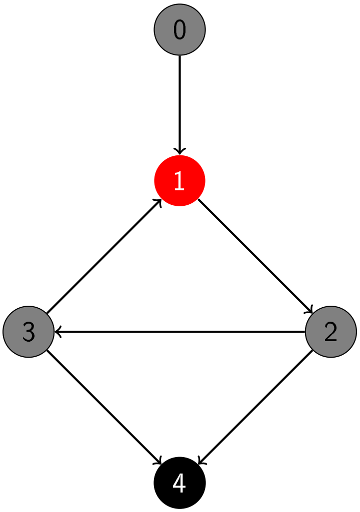

0
1
3
2
4


0
1
2
3
4


0
1
3
2
4


0
1
2
3
4


0
1
3
2
4


0
1
2
3
4