Теория Алгоритмов

Лекция 8

Екатеринбург, 2015

Оглавление

Оглавление

Формулировка

Определение

Проверить, является ли данная булева формула выполнимой

Доказательство NP-полноты языка L

1. $L \in NP$
2. L — NP-труден
   2.1 N — NP-труден
   2.2 $f(w) \in N \Leftrightarrow w \in L$
   2.3 f - полиномиален

Оглавление

Формулировка

Определение

Проверить, является ли данная булева формула, записаная в 3-конъюнктивной нормальной форме, выполнимой

Докажем NP-полноту 3SAT

Имеем задачу:

$$(x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3)\&$$
$$(\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3)\&$$
$$(x_1 \lor x_2 \lor x_3)$$

1. $3SAT \in NP$
2. $SAT \underset{c}{\rightsquigarrow} 3SAT$

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 \lor a_{2,1}x_2 \lor & \cdots & a_{n,1}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n}x_1 \lor a_{2,n}x_2 \lor & \cdots & a_{n,n}x_n \end{matrix} =$$

Докажем $f(w) \in$ 3SAT $\Leftarrow w \in$ SAT

$w \in \mathrm{SAT} \Rightarrow$ хотя бы 1 из дизъюнктов равен 1

Имеем формулу w из SAT:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \neg \vee x_4 \vee x_5)$$

Превратим ее в набор дизъюнктов $f(w)$ для 3SAT:

$$(x_1 \vee x_2 \vee y_1)\&$$
$$(\neg y_1 \vee \neg x_3 \vee y_2)\&$$
$$(\neg y_2 \vee \neg x_4 \vee x_5)$$

"Протаскиваем" 1 так, чтобы $f(w) \Rightarrow w$

Докажем $f(w) \in$ 3SAT $\Rightarrow w \in$ SAT

Нельзя добиться истинности конъюнкций не используя ни одного $x = 1$, а значит итоговая строка равна 1

Оглавление

Формулировка

Определение

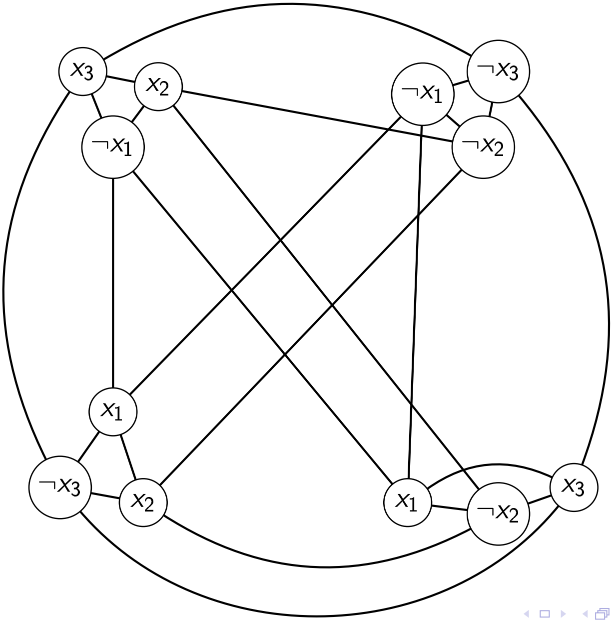
По графу $G = (V, E)$ и числу k узнать, существует ли независимое множество вершин V', такое что $|V'| = k$

Докажем NP-полноту IS

1. IS $\in NP$
2. IS - NP-трудна
3. 3SAT $\underset{c}{\rightsquigarrow}$ IS

$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) = F_1$
$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) = F_2$
$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) = F_3$
$(\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_2) = F_4$

Каждую переменную в каждом дизъюнкте превращаем в вершину графа. Вершины соеденены сторонами если состоят в одном дизъюнкте (будем назыать их E_1), либо являются отрицанием друг друга (x_i и $\neg x_i$)) (будем называть их E_2)


x_3
x_2
$\neg x_1$
$\neg x_1$
$\neg x_3$
$\neg x_2$
x_1
$\neg x_3$
x_2
x_1
$\neg x_2$
x_3

$w \in 3SAT \Rightarrow f(w) = (V, E, k) \in IS$

$\exists x_1 \dots x_n : F_1(x_1 \dots x_n) = F_2(x_1 \dots x_n) = \dots = 1$
Среди каждой тройки 3SAT существует формула, равная 1
E_1 независисмы по определению
E_2 независимы по построению $(x_i \neq \neg x_i)$

$w \in 3SAT \Leftarrow f(w) = (V, E, k) \in IS$

$\exists$ IS , $V' : |V'| = k$
x_i не может быть выбрано с $\neg x_i$
Выбрано строго по 1 вершине в каждой тройке и нет противоречий, значит 3SAT выполнима.

Оглавление

Сводимость некоторых NP-полных задач