

いちよう祭2018

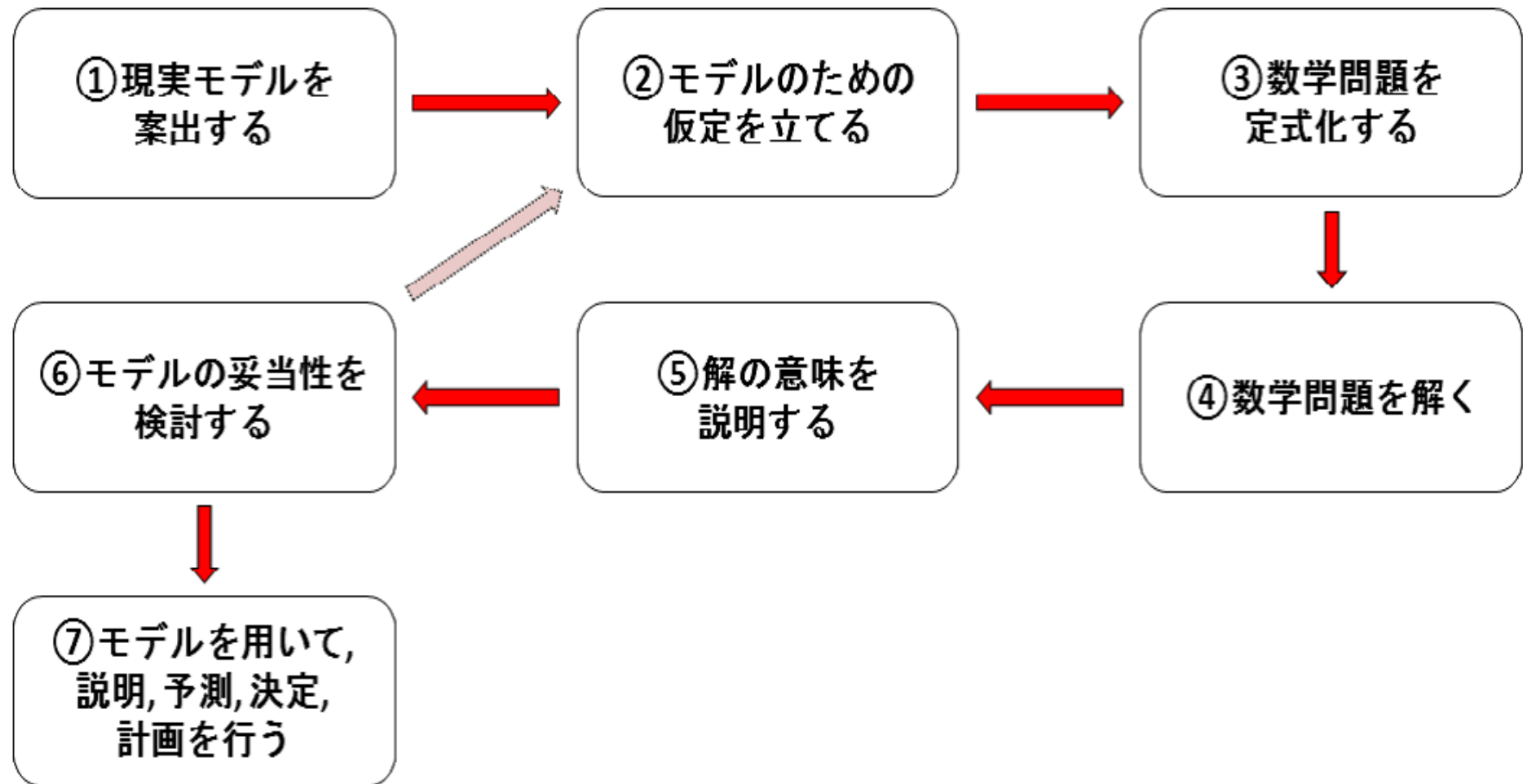
平成30年4月30日 大阪大学サイバーメディアセンター6F

お湯の冷却の数理モデル

奥村 真善美

大阪大学大学院情報科学研究科

数理モデルの仮定とその意味



「微分方程式で数学モデルを作ろう」, D. Burghes and M. Borrie 著, 垣田高夫 大町比佐栄 訳, 日本評論社, 1990, pp.3-4

現実モデルの案出とモデルのための仮定

現実問題

90°Cのお湯を、注いだ紙コップを室温が25.1°Cである部屋に置いた．このとき、紙コップのお湯が70°Cまで下がるにはどれくらいの時間がかかるだろうか．

上記の問題に対して、数値モデルを作るために、以下を仮定として用いる．

ニュートンの冷却法則

ある環境に物体が置かれたとき、物体の温度が単位時間あたりに冷却する（減る）速度は、物体とその環境の温度差に比例する．

この仮定をもとに、上記の現実問題を数学の問題へとおきかえていく（定式化）．



数学問題の定式化

t をお湯の温度を計り始めてからの時間とし, $y = y(t)$ をお湯の温度とする. そして, 室温を a とおく.

左のニュートンの冷却法則は, 以下のような微分方程式で表現することができる.

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - a).$$

ただし, k は環境と物体の性質によって決まる, t に無関係な正の比例定数である. よって, $k > 0$.

今, $t = 0$ のときのお湯の温度を y_0 , すなわち, $y_0 := y(0)$ とすると, 以下の常微分方程式の初期値問題を得る:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -k(y - a), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

(2)

次に, 定式化したこの問題の解を実際に求める.

数学問題を解く

(1) より,

$$\frac{1}{y-a} \frac{dy}{dt} = -k.$$

両辺を t で積分すると,

$$\int \frac{1}{y-a} \frac{dy}{dt} dt = \int -k dt.$$

C_1 を積分定数とすると,

$$\int \frac{1}{y-a} dy = -kt + C_1.$$

さらに, C_2 を積分定数とすると,

$$\log |y-a| + C_2 = -kt + C_1.$$

$C_3 := C_1 - C_2$ とおくと,

$$\log |y-a| = -kt + C_3.$$

数学問題を解く

つまり,

$$|y - a| = e^{-kt+C_3}.$$

すなわち,

$$y - a = \pm e^{C_3} \cdot e^{-kt}.$$

したがって, $C := \pm C_3$ とおくと,

$$y(t) = a + Ce^{-kt}.$$

今, $y_0 = y(0)$ であるので,

$$y_0 = a + C.$$

つまり, $C = y_0 - a$ であるので, 求める問題の方程式の解は,

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^{-kt}. \quad (3)$$

比例定数 k の決定

ここで, (3) を k について解く.

$$e^{-kt} = \frac{y - a}{y_0 - a}.$$

つまり,

$$-kt = \log \left(\frac{y - a}{y_0 - a} \right).$$

すなわち,

$$k = -\frac{1}{t} \log \left(\frac{y - a}{y_0 - a} \right). \quad (4)$$

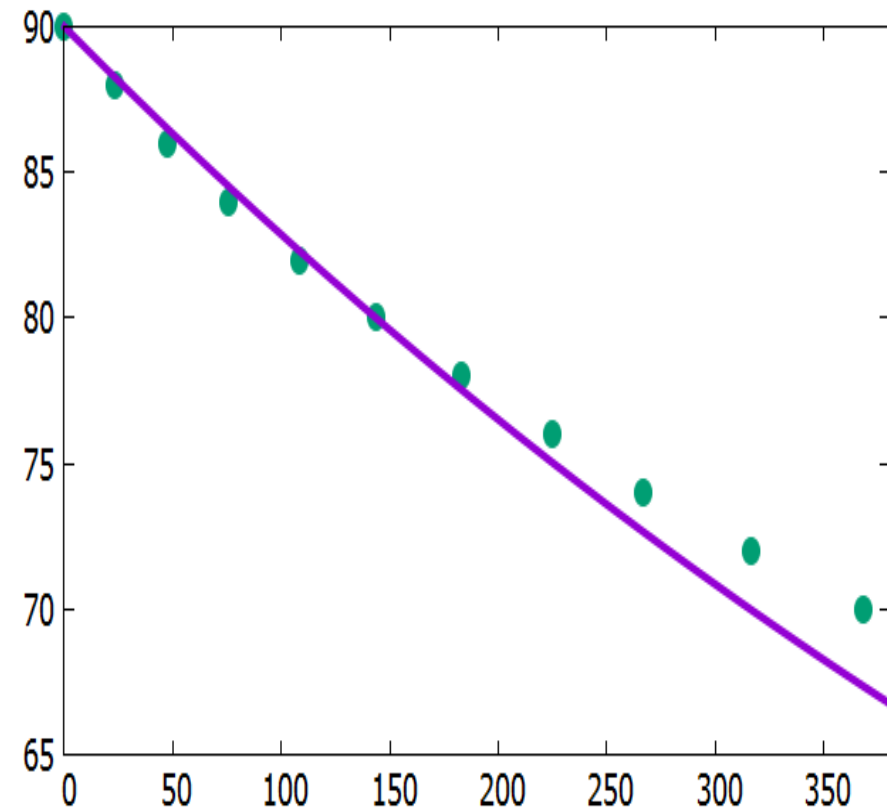
今, $y_0 = 90$ で, $a = 25.1$ であり, 測定結果から, $t = 143.64$ のとき, $y = 80$ であるので, これらの値を (4) に代入すると,

$$k = -\frac{1}{143.64} \log \left(\frac{80 - 22}{90 - 22} \right) \simeq 1.165 \times 10^{-3}. \quad (5)$$

そして, 今求めた k を (3) に代入して, 各温度における t の理論値を求める.

測定結果と理論値の比較と考察

y	t: 実測	t: 理論値
90	0	0
88	23.42	26.87
86	47.33	54.60
84	75.51	83.27
82	108.31	112.92
80	143.64	143.64
78	183.08	175.49
76	224.94	208.57
74	266.92	242.98
72	316.41	278.82
70	368.26	316.23



グラフや表から、時間 t の実測値と理論値の間には、温度が 80°C まででは、10秒以下の差しかないが、温度が 80°C を下回ると、その差が大きくなっていることが読み取れる。また、温度が 70°C のときの差は約52秒の差が出てしまっている。

原因としては、液体が均等に冷えないということ、モデル自体に問題があるということ（比例定数 k の決定の仕方が厳密でないなど）が考えられる。→モデルを再検討