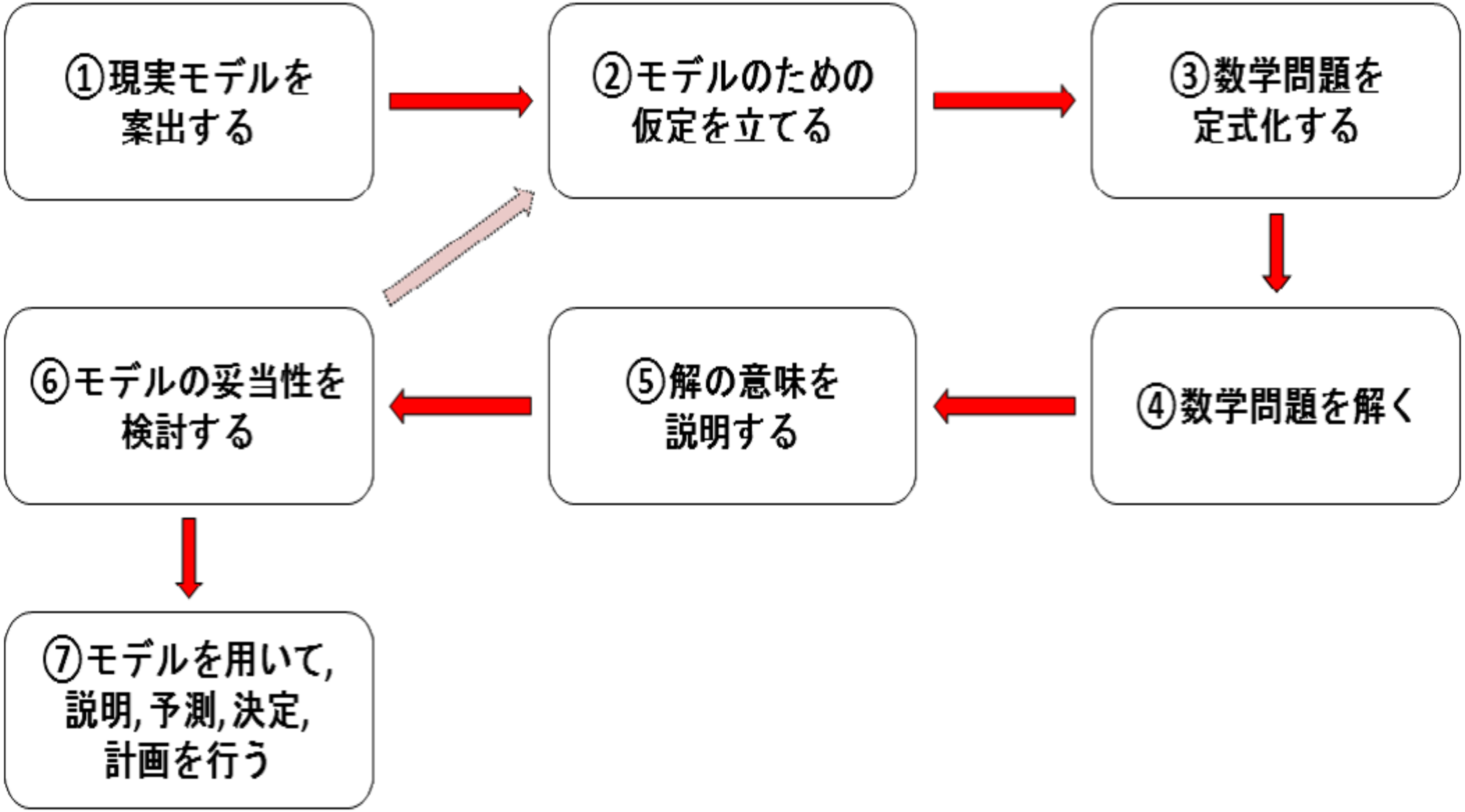
平成29年4月30日

穴から漏れる水の数理モデル

奥村 真善美
大阪大学大学院情報科学研究科

数理モデルの仮定とその意味



現実問題

透明なペットボトルを用意し，ボトルの下の方の側面に穴を開ける．その穴の中心を0cmとして，上へ順に1cmずつ目盛を付ける．水を付けた目盛の10cmの高さまで水を入れたとき、何秒で水は抜け落ちるだろうか．ただし，ボトルの蓋は外しておく．

tを水が流出し始めてからの時間とし，$h = h(t)$をボトルの穴から上の水の高さ，$u = u(t)$をボトルの水の体積とする．さらに，体積速度(単位時間あたりに穴から噴出する水の体積)を$v = v(t)$とする．すなわち，

$$v := -\frac{du}{dt} \tag{1}$$

とする．ここで，u_0を穴の下にある水の体積，Aを断面積とすると，

$$u(t) = u_0 + A \cdot h(t) \tag{2}$$

となるため，(1)，(2)より，

$$v = -A \cdot \frac{dh}{dt}. \tag{3}$$

トリチェリの法則

粘性のない流体が容器の穴から噴出するとき，穴の面積が流体の水面の面積よりはるかに小さいならば，g を重力加速度とすると，噴出速度(単位時間あたりに面積１の穴から噴出する水の体積)$\tilde{v}$ は以下で与えられる:

$$\tilde{v} = \sqrt{2gh}. \tag{4}$$

穴の面積を a とすると，(4) より $v = a\tilde{v} = a\sqrt{2gh}$ であり，これを (3) に代入すると，

$$a\sqrt{2gh} = -A \cdot \frac{dh}{dt}.$$

$A > 0$ より，$\mu := a\sqrt{2g}/A$ とおくと，

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{a\sqrt{2g}}{A} \cdot h^{\frac{1}{2}} = -\mu h^{\frac{1}{2}}.$$

$t = 0$ のときのボトルの穴から上の水の高さを h_0 とすると，以下の常微分方程式の初期値問題を得る:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\mu h^{\frac{1}{2}}, & (5) \\ h(0) = h_0. & (6) \end{cases}$$

(5) より,

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\frac{dh}{dt} = -\mu.$$

両辺を t で積分すると,

$$\int h^{-\frac{1}{2}}\frac{dh}{dt}dt = \int -\mu dt.$$

C を積分定数とすると,

$$2h^{\frac{1}{2}} = -\mu t + C. \tag{7}$$

ここで, (6), (7) を用いると, $C = 2\sqrt{h_0}$. よって, これを (7) に代入すると,

$$h(t) = \left(-\frac{1}{2}\mu t + \sqrt{h_0}\right)^2$$

となる. ゆえに,

$$h'(t) = 2\left(-\frac{1}{2}\mu t + \sqrt{h_0}\right)\cdot\left(-\frac{\mu}{2}\right) = -\mu\left(-\frac{1}{2}\mu t + \sqrt{h_0}\right).$$

$h'(t) = 0$ とすると, $t = 2\sqrt{h_0}/\mu$.

よって，h の増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{h_0}}{\mu}$	$\cdots$
h'		$-$	0	$+$
h	$\sqrt{h_0}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，h は $0 \leq t \leq 2\sqrt{h_0}/\mu$ で単調に減少し，$2\sqrt{h_0}/\mu \leq t$ で単調に増加する．つまり，現象としては，

$$h(t) = \left(-\frac{\mu t}{2} + \sqrt{h_0}\right)^2 \quad (0 \leq t \leq 2\sqrt{h_0}/\mu) \tag{8}$$

を考えればよい．(8) を μ について解くと，

$$\sqrt{h} = -\frac{\mu t}{2} + \sqrt{h_0},$$

つまり，

$$\mu = \frac{2\sqrt{h_0} - 2\sqrt{h}}{t}.$$

実験結果とμの決定

実験結果を表にまとめたものが以下となる.

高さ	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1回目	0	4.8	9.6	15.3	20.9	28.8	36.2	44.9	55.9	69.8
2回目	0	4.9	9.8	15.6	21.4	28.1	35.5	44.1	54.8	68.9
3回目	0	4.7	9.5	15.5	20.9	27.7	34.9	43.5	54.0	68.0
平均時間	0	4.8	9.6	15.5	21.1	28.2	35.5	44.2	54.9	68.9

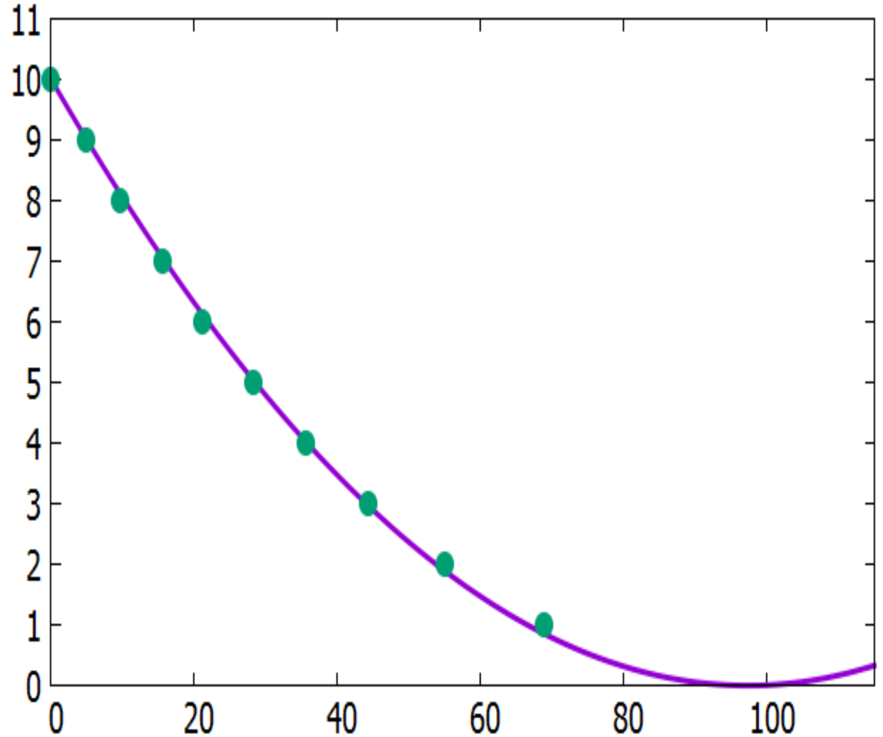
今, $h_0 = 10$であり, 実験結果から, $h = 3$のとき, $t = 44.2$であるので, これらのデータと先程求めたμに関する式を用いて, 定数μを求める. 実際,

$$\mu = \frac{2\sqrt{10} - 2\sqrt{3}}{68.9} = 0.06471\ldots \simeq 0.065.$$

そして, 今求めたμを(8)に代入して, 各高さにおけるtの理論値を求める.

実験結果と理論値の比較と考察

h	t: 実測	t: 理論値
10	0	0
9	4.8	5.0
8	9.6	10.3
7	15.5	16.0
6	21.1	22.0
5	28.2	28.6
4	35.5	35.9
3	44.2	44.2
2	54.9	54.0
1	68.9	66.8



表から，時間 t の実測値と理論値の間には $h = 1$ のときには２秒程度の差，それ以外では１秒未満の差しかないことがわかる．グラフからも差がそれほど大きくないことが見て取れる．

それでもある程度差が出てしまう原因としては，粘性により水が穴のまわりにくっついて離れにくくなり，穴の直径がやや小さくなってしまうことなどが考えられる．

では，水を 15cm の高さまで水を入れたときはどのような結果になるだろうか．