続・心理統計学の基礎

南風原朝和

2014 年（有斐閣アルマ）

1 非心分布

1.1 非心 t 分布

$$y \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{1.1}$$

のとき、

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s'/\sqrt{N}} \tag{1.2}$$

$$= \frac{\bar{y} - \mu_0}{s'} \times \sqrt{N} \tag{1.3}$$

は、帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$ が真なら自由度 $N - 1$ の t 分布に従うが、偽 $H_1 : \mu \neq \mu_0$ であれば、自由度 $N - 1$、非心度

$$\lambda = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}} \tag{1.4}$$

$$= \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \times \sqrt{N} \tag{1.5}$$

$$= \delta_0 \times \sqrt{N} \tag{1.6}$$

の非心 t 分布に従う。

R による検定力の算出

R の関数 `pt()` と `qt()` を用いて、特定の δ_0 と N の下での検定力を算出することができる。非心度は `ncp` で指定。

```
> ### 1 標本 t 検定の検定力
> t.power <- function(d0,n){
+  lambda <- d0*sqrt(n)
+  p.lwr <- pt(qt(0.025,df=n-1),df=n-1,ncp=lambda,lower.tail=T)
+  p.upr <- pt(qt(0.975,df=n-1),df=n-1,ncp=lambda,lower.tail=F)
+  power <- p.lwr+p.upr
+  return(power)
+ }
> t.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=10)
[1] 0.08765715 0.29317561 0.61623276
> t.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=20)
[1] 0.1359563 0.5645044 0.9238988
> t.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=40)
[1] 0.2345965 0.8693981 0.9985194
```

1.2 非心カイ 2 乗分布

$$y \sim N(\mu, \sigma^2) \tag{1.7}$$

のとき、

$$z'^2 = \left(\frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right)^2 \tag{1.8}$$

は、自由度 1、非心度

$$\lambda = \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{N}}\right)^2 \tag{1.9}$$

$$= \left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\right)^2 \times N \tag{1.10}$$

$$= \delta_0^2 \times N \tag{1.11}$$

の非心カイ 2 乗分布に従う[1]。

R による検定力の算出

R の関数 pchisq() と qchisq() を用いて、特定の δ_0 と N の下での検定力を算出することができる。

```
> ### カイ 2 乗分布における検定力
> chisq.power <- function(d0,n){
+  lambda <- d0^2*n
+  power <- pchisq(qchisq(p=0.95,df=1),df=1,ncp=lambda,lower.tail=F)
+  return(power)
+ }
> chisq.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=10)
[1] 0.09693545 0.35260808 0.71561661
> chisq.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=20)
[1] 0.1454725 0.6087795 0.9471412
> chisq.power(d0=c(0.2,0.5,0.8),n=40)
[1] 0.2441412 0.8853791 0.9990314
```

2 効果量

2.1 点双列相関係数

母集団点双列相関係数は、標準化平均値差 δ と

$$\rho_{pb} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 1/[\pi(1-\pi)]}} \tag{2.1}$$

という関係にある。δ が同じであっても、母比率 π が異なれば ρ_{pb} は異なる。

点双列相関係数と標準化平均値差、母比率との関係

```
> ### 点双列相関係数と標準化平均値差 δ
> rhopb.delta <- function(d,pi){
+  rhopb <- d/sqrt(d^2+1/(pi*(1-pi)))
+  return(round(rhopb,3))
+ }
> rhopb.delta(d=c(0.2,0.5,0.6,0.8,1.0),pi=0.1)
[1] 0.060 0.148 0.177 0.233 0.287
> rhopb.delta(d=c(0.2,0.5,0.6,0.8,1.0),pi=0.3)
```

[1] 平均=自由度+非心度となる。

```
[1] 0.091 0.223 0.265 0.344 0.417
> rhopb.delta(d=c(0.2,0.5,0.6,0.8,1.0),pi=0.5)
[1] 0.100 0.243 0.287 0.371 0.447
```

ρ_{pb} は $\pi = 0.5$ のときに最大となるが、その場合でも $\delta = 0.8$ に対応する値は $\rho_{bp} = .371$ 程度でしかない。

2.2 相関係数 ρ の信頼区間

Fisher の Z 変換にもとづく

2 変数正規分布が仮定される場合、

$$CI_\rho = \tanh\left(\tanh^{-1} r \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N-3}}\right) \tag{2.2}$$

非心 t 分布にもとづく

一方の各値における他方の条件付き分布が等分散の正規分布である場合、

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \times \sqrt{N-2} \tag{2.3}$$

は、自由度 $N-1$、非心度

$$\lambda = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \times \sqrt{N} \tag{2.4}$$

の非心 t 分布に従う。

そこで、t_{data} をデータから計算された t 値として、

1. $t_{(N-2,\lambda_L)_{1-\alpha/2}} = t_{\text{data}}$ となる λ_L を求める
2. $t_{(N-2,\lambda_U)_{\alpha/2}} = t_{\text{data}}$ となる λ_U を求める
3. $CI[\rho_L, \rho_U] = [\lambda_L/\sqrt{N+\lambda_L^2}, \lambda_U/\sqrt{N+\lambda_U^2}]$ [2]

によって ρ の CI を求める[3]。

R による信頼区間の算出

Z 変換と、R のパッケージ MBESS における非心 t 分布の信頼限界を求めるための関数 `conf.limits.nct()` を利用する方法で、ρ の信頼区間を求める。

```
> ### 相関係数の信頼区間
> data(cars) # cars データを使用
> r <- cor(cars$speed,cars$dist)
> n <- dim(cars)[1]
> # Z 変換にもとづく方法
> tanh(atanh(r)-qnorm(p=0.975)/sqrt(n-3)) # 下限
[1] 0.6816422
> tanh(atanh(r)+qnorm(p=0.975)/sqrt(n-3)) # 上限
[1] 0.8862036
> # 非心 t 分布にもとづく方法
> library("MBESS") # Kelley (2007) による MBESS の読み込み
> t <- r/sqrt(1-r^2)*sqrt(n-2) # t 値の計算
> df <- n-2
```

[2] 式 (2.4) より、$\rho = \lambda/\sqrt{N+\lambda^2}$ である。

[3] 非心度の CI から母数の CI への変換については、Smithson (2001, 2004); Steiger & Fouladi (1997) を参照。

```
> (ci.lambda <- conf.limits.nct(t.value=t,df=df,conf.level=0.95))
$Lower.Limit
[1] 6.716289
$Prob.Less.Lower
[1] 0.025
$Upper.Limit
[1] 12.15884
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025
> ci.lambda$Lower.Limit/sqrt(n+ci.lambda$Lower.Limit^2) # 下限
[1] 0.6886834
> ci.lambda$Upper.Limit/sqrt(n+ci.lambda$Upper.Limit^2) # 上限
[1] 0.8644462
```

> メモ
> Z 変換による CI $[0.68, 0.89]$ の方が、非心 t 分布による CI $[0.69, 0.86]$ より若干広めである。ちなみに、R の関数 `cor.test()` は Z 変換による方法で CI を算出している。

2.3 独立な 2 群の平均値差（標準化平均値差の信頼区間）

2 群の平均値差の検定のための検定統計量[4]

$$t = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{s^*} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{2.5}$$

$$= g \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{2.6}$$

は、自由度 $n_1 + n_2 - 2$ で非心度が

$$\lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{2.7}$$

$$= \delta \times \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \tag{2.8}$$

の非心 t 分布に従う。

そこで、t_{data} をデータから計算された t 値として、

1. $t_{(n_1+n_2-2,\lambda_L)_{1-\alpha/2}} = t_{\mathrm{data}}$ となる λ_L を求める
2. $t_{(n_1+n_2-2,\lambda_U)_{\alpha/2}} = t_{\mathrm{data}}$ となる λ_U を求める
3. $CI[\delta_L, \delta_U] = \left[\lambda_L \times \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}, \lambda_U \times \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}\right]$ [5]

が δ の CI。

g の近似的な SE

$$SE_g \approx \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} + \frac{g^2}{2(n_1 + n_2 - 2)}} \tag{2.9}$$

を利用して、

$$g \pm 1.96 \times SE_g \tag{2.10}$$

で求めることもできる。

---

[4] テキストでは、g を d と表している。

[5] 式 (2.8) より、$\delta = \lambda \times \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$ である。

メモ
南風原 (2014) では、式 (2.9) は g の SE であり、CI は $z_{critical}$ によって求めるとしている。
一方、大久保・岡田 (2012) では、式 (2.9) は d の SE で、CI は $t_{critical}$ で求めるとしている。

R による信頼区間の算出

R のデータ PlantGrowth を利用し、δ の CI を比較してみる。

```
> ### 標準化平均値差の信頼区間
> data(PlantGrowth) # 植物の成長データ
> data01 <- subset(PlantGrowth, group!="trt2") # 2 群だけ取り出す
> data01$group <- droplevels(data01$group)     # 水準 trt2 を削除
> fit.ttest <- t.test(weight~group, var.equal=T, data=data01) # t 検定
> t <- as.numeric(fit.ttest$statistic) # t 値
> n1 <- dim(subset(data01,group=="ctrl"))[1] # n1
> n2 <- dim(subset(data01,group=="trt1"))[1] # n2
> df <- n1+n2-2 # 自由度
> # 非心度を利用
> library("MBESS")
> (ci.lambda <- conf.limits.nct(t.value=t,df=df,conf.level=0.95)) # 非心度の CI
$Lower.Limit
[1] -0.8222405
$Prob.Less.Lower
[1] 0.025
$Upper.Limit
[1] 3.173121
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025

> ci.lambda$Lower.Limit * sqrt((n1+n2)/(n1*n2)) # 下限
[1] -0.3677171
> ci.lambda$Upper.Limit * sqrt((n1+n2)/(n1*n2)) # 上限
[1] 1.419063
> # effsize の cohen.d() で算出
> library("effsize")
> (ci.g <- cohen.d(weight~group, data=data01)) # "effsize"で求めた CI
Cohen's d
d estimate: 0.5327478 (medium)
95 percent confidence interval:
       inf        sup
-0.4769679  1.5424635
> # g とその近似的 SE を用いて算出
> SE.d.approx <- sqrt((n1+n2)/(n1*n2)+(ci.g$estimate^2)/(2*(n1+n2-2)))
> as.numeric(ci.g$estimate - 1.96 * SE.d.approx) # 下限
[1] -0.3609002
> as.numeric(ci.g$estimate + 1.96 * SE.d.approx) # 上限
[1] 1.426396
```

メモ
非心 t 分布による正確な CI は $[-0.37, 1.42]$、近似的 SE を用いると $[-0.36, 1.43]$。一方、cohen.d() では $[-0.48, 1.54]$ とかなり広め。cohen.d() では Cooper et al. (2009) の改良版 SE を用いているとのこと。

2.4　対応のある 2 群の平均値差

差得点の平均 $\bar{v}$ とその不偏分散 $s_v'^2$ を用いた検定統計量

$$t = \frac{\bar{v}}{s_v'} \times \sqrt{N} \tag{2.11}$$

$$= d' \times \sqrt{N} \tag{2.12}$$

は、自由度 $N-1$ で非心度

$$\lambda = \frac{\mu_v}{\sigma_v} \times \sqrt{N} \tag{2.13}$$

$$= \delta' \times \sqrt{N} \tag{2.14}$$

の非心 t 分布に従う。

効果量 δ' は、「効果の大きさ」の指標であると同時に、「効果の一般性」の指標でもある。

2.5　クラメルの連関係数

$a \times b$ の連関表について、$m = \min(a, b)$ のとき、

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{(m-1)N}} \tag{2.15}$$

は $0 \leq V \leq 1$ を取る。

V の母数を γ^* とすると、

$$\gamma^* = \sqrt{\frac{E(\chi^2)}{(m-1)N}} \tag{2.16}$$

$$\approx \sqrt{\frac{df + \lambda}{(m-1)N}} \tag{2.17}$$

となる。ただし、

$$\lambda = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(\pi_{ij} - \pi_{0ij})^2}{\pi_{0ij}} \times N \tag{2.18}$$

は非心度。カイ 2 乗統計量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \tag{2.19}$$

は、近似的に自由度 $(a-1)(b-1)$、非心度 λ の非心カイ 2 乗分布に従う。

これを利用して、クラメルの連関係数の CI を求めることができる。

R によるクラメルの連関係数の CI

R のデータ `HairEyeColor` を用いて、クラメルの連関係数の CI を求める。

```
> ### クラメルの連関係数
> data(HairEyeColor)
> data01 <- apply(HairEyeColor, c(1,2), sum) # 男女合計
> chisq.test(data01) # カイ 2 乗検定
Pearson's Chi-squared test
data:  data01
```

```
X-squared = 138.29, df = 9, p-value < 2.2e-16

> (V <- sqrt(138.29/(3*592))) # クラメルの連関係数
[1] 0.2790448
> (ci.lambda <- conf.limits.nc.chisq(Chi.Square=138.29,df=9,conf.level=0.95))
$Lower.Limit
[1] 88.73678
$Prob.Less.Lower
[1] 0.025
$Upper.Limit
[1] 179.583
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025
> sqrt((9+ci.lambda$Lower.Limit)/(3*592)) # 下限
[1] 0.2345889
> sqrt((9+ci.lambda$Upper.Limit)/(3*592)) # 上限
[1] 0.325859
```

$V = .28$ で、$95\% CI[.23, .33]$ となった。

2.6 重回帰分析

2.6.1 決定係数

p 個の独立変数を所与としたときの従属変数の分布が等分散の正規分布に従うとすると、検定統計量

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \times \frac{N-p-1}{p} \tag{2.20}$$

は、自由度 p と $N-p-1$、非心度が

$$\lambda = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \times N \tag{2.21}$$
$$= \theta^2 \times N \tag{2.22}$$

の非心 F 分布に従う[6]。この非心度の逆変換

$$\rho^2 = \frac{\lambda}{N+\lambda} \tag{2.23}$$

を用いて、非心度の CI から決定係数の CI を算出する。
なお、ρ^2 の推定量としては、自由度調整済み決定係数

$$R^2_{\mathrm{adj}} = 1 - \frac{N-1}{N-p-1}(1-R^2) \tag{2.24}$$

が用いられる。

南風原 (2002) の復習

部分相関係数と偏相関係数 変数 y、x_1、x_2 があるとする。
y と x_2 から x_1 の影響を除いた成分（x_1 で x_2 を予測したときの残差）$x_2|x_2$ と y の相関係数

$$r_{y(2|1)} = \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} \tag{2.25}$$

[6] Cohen (1988) は、θ^2 を f^2 と表記している。

が部分相関係数。

　y から x_1 の影響を除いた成分と $x_2|x_1$ の相関係数

$$r_{y2|1} = \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{1-r_{y1}^2}\sqrt{1-r_{12}^2}} \tag{2.26}$$

が偏相関係数。

　このとき、

$$r_{y2|1} = \frac{r_{y(2|1)}}{\sqrt{1-r_{y1}^2}} \tag{2.27}$$

が成り立つことから、$r_{y2|1}$ と $r_{y(2|1)}$ は符号が同じで、絶対値は $r_{y2|1}$ の方が大きい。

偏回帰係数　$x_2|x_1$ によって、y を回帰予測することを考える。そのときの回帰係数は、

$$b_{y(2|1)} = r_{y(2|1)}\frac{s_y}{s_{2|1}} \tag{2.28}$$

$$= r_{y(2|1)}\frac{s_y}{s_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \quad \text{（分母は予測の標準誤差）} \tag{2.29}$$

$$= \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} \times \frac{s_y}{s_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \tag{2.30}$$

$$= \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{1-r_{12}^2} \times \frac{s_y}{s_2} \tag{2.31}$$

となる。

　次に、$x_2|x_1$ によって、$y|x_1$ を回帰予測することを考える。そのときの回帰係数は、

$$b_{y2|1} = r_{y2|1}\frac{s_{y|1}}{s_{2|1}} \tag{2.32}$$

$$= r_{y2|1}\frac{s_y\sqrt{1-r_{y1}^2}}{s_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \tag{2.33}$$

$$= \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{\sqrt{1-r_{y1}^2}\sqrt{1-r_{12}^2}} \times \frac{s_y\sqrt{1-r_{y1}^2}}{s_2\sqrt{1-r_{12}^2}} \tag{2.34}$$

$$= \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{1-r_{12}^2} \times \frac{s_y}{s_2} \tag{2.35}$$

となる。つまり、偏回帰係数は

$$b_{y(2|1)} = b_{y2|1} \tag{2.36}$$

である。

　また、全ての変数を標準化していれば、標準偏回帰係数

$$b^*_{y(2|1)} = \frac{r_{y2} - r_{y1}r_{12}}{1-r_{12}^2} \tag{2.37}$$

を得る。

個々の独立変数の寄与の評価　独立変数が x_1 のみのモデルの分散説明率は r_{y1}^2。ここに独立変数 x_2 を追加すると、モデルの分散説明率は

$$R_{y\cdot12}^2 = \frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \tag{2.38}$$

となる。すると、x_2 を加えたことによる分散説明率の増分は、

$$\begin{aligned}
R_{y\cdot12}^2 - r_{y1}^2 &= \frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2} - r_{y1}^2 && (2.39)\\
&= \frac{r_{y1}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12} - r_{y1}^2(1 - r_{12}^2)}{1 - r_{12}^2} && (2.40)\\
&= \frac{r_{y1}^2 r_{12}^2 + r_{y2}^2 - 2r_{y1}r_{y2}r_{12}}{1 - r_{12}^2} && (2.41)\\
&= \frac{(r_{y2} - r_{y1}r_{12})^2}{1 - r_{12}^2} && (2.42)\\
&= r_{y(2|1)}^2 && (2.43)
\end{aligned}$$

と、x_2 から x_1 の影響を除いた部分と y との間の部分相関係数の 2 乗になる。

復習ここまで

2.6.2　部分決定係数

また、q 個の独立変数を加えて p 個にした場合、検定統計量

$$F = \frac{\Delta R^2}{1 - R_{\text{after}}^2} \times \frac{N - p - 1}{q} \tag{2.44}$$

は、自由度 q と $N - p - 1$、非心度が

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\Delta\rho^2}{1 - \rho_{\text{after}}^2} \times N && (2.45)\\
&= \theta'^2 \times N && (2.46)
\end{aligned}$$

の非心 F 分布に従う。この決定係数の増分 $\Delta\rho^2(= \rho_{\text{part}}^2)$ は、部分決定係数である。$\rho_{\text{part}}^2(= \Delta\rho^2)$ は、θ'^2 からだけでは導けないので、検定力を直接規定する効果量ではない。

ρ_{part}^2 の推定量 $R_{\text{adj.part}}^2$ は、変数投入後の自由度調整済み $R_{\text{adj.after}}^2$ と変数投入前の自由度調整済み $R_{\text{adj.before}}^2$ の差が用いられる。

メモ
ρ_{part}^2 の推定には自由度調整済み R_{adj}^2 の差を用いるが、偏決定係数の CI の算出に用いる F の分子は、R^2 の差である。また、部分決定係数の CI については記載がない。ただし、部分決定係数は部分相関係数の 2 乗なのであるから、相関係数の CI を求める方法で決定係数の CI を求めることができるのでは？

2.6.3 偏決定係数

$$\rho^2_{\text{partial}} = \frac{\rho^2_{\text{part}}}{1-\rho^2_{\text{before}}} \tag{2.47}$$
$$= \frac{\rho^2_{\text{part}}}{1-(\rho^2_{\text{after}}-\rho^2_{\text{part}})} \tag{2.48}$$
$$= \frac{\rho^2_{\text{part}}/(1-\rho^2_{\text{after}})}{1+\rho^2_{\text{part}}/(1-\rho^2_{\text{after}})} \tag{2.49}$$
$$= \frac{\theta'^2}{1+\theta'^2} \tag{2.50}$$

ρ^2_{partial} は θ'^2 だけから導けるので、検定力を直接規定する効果量である。よって、式 (2.46) の非心度は、

$$\lambda = \frac{\rho^2_{\text{partial}}}{1-\rho^2_{\text{partial}}} \times N \tag{2.51}$$

と書け、

$$\rho^2_{\text{partial}} = \frac{\lambda}{N+\lambda} \tag{2.52}$$

と逆変換できる。

式 (2.44) と式 (2.46) から、非心度 λ の CI を求め、これを式 (2.52) により逆変換することで ρ^2_{partial} の CI を得る[7]。

R による R^2 の CI

データ attitude で、2 つの独立変数を所与としたときの R^2 の CI[8]。

```
> ### 回帰分析における決定係数
> data(attitude) # 管理職による評価データ
> # 独立変数を 2 とした場合の決定係数の CI
> fit.before <- lm(rating~complaints+privileges, data=attitude)
> summary(fit.before)
Call:
lm(formula = rating ~ complaints + privileges, data = attitude)
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-12.7887  -5.6893  -0.0284   6.2745   9.9726
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.32762    7.16023   2.141   0.0415 *
complaints   0.78034    0.11939   6.536 5.22e-07 ***
privileges  -0.05016    0.12992  -0.386   0.7025
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
Residual standard error: 7.102 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6831,Adjusted R-squared:  0.6596
F-statistic:  29.1 on 2 and 27 DF,  p-value: 1.833e-07
> (ci.lambda <- conf.limits.ncf(F.value=29.1, df.1=2, df.2=27,conf.level=0.95))
$Lower.Limit
```

[7] ただし、これは独立変数の値を所与とした場合の CI。独立変数も含めて多変数正規分布にもとづくと考える場合は、別の方法をとる必要がある（Lee (1971); Algina and Olejnik (2000）を参照。R であれば、MBESS パッケージの関数 ci.R2() で算出できる。

[8] 独立変数をランダムと考えた場合の結果も、MBESS の ci.R2() を利用。

```
[1] 21.92565
$Prob.Less.Lower
[1] 0.025
$Upper.Limit
[1] 107.3271
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025
> ci.lambda$Lower.Limit/(30+ci.lambda$Lower.Limit) # 下側
[1] 0.4222508
> ci.lambda$Upper.Limit/(30+ci.lambda$Upper.Limit) # 上側
[1] 0.7815435
> # 2つの独立変数を確率変数と考えた場合のR^2のCI（MBESSの関数ci.R2()）
> ci.R2(R2=0.6831,df.1=2,df.2=27,conf.level=0.95,Random.Predictors=T)
$Lower.Conf.Limit.R2
[1] 0.4097597
$Prob.Less.Lower
[1] 0.025
$Upper.Conf.Limit.R2
[1] 0.8244622
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025
```

メモ
$R^2 = .68$、$R^2_{\mathrm{adj}} = .66$ で、$95\% CI[.42, .78]$（所与)、$[.41, .82]$（ランダム） となった。ランダムと考えた方がやや広めである。

独立変数を4つ追加して、偏決定係数のCIを算出。

```
> # 独立変数を4つ加えた場合の偏決定係数のCI
> fit.after <- update(fit.before,~.+learning+raises+critical+advance)
> summary(fit.after)
Call:
lm(formula = rating ~ complaints + privileges + learning + raises +
    critical + advance, data = attitude)
Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-10.9418  -4.3555   0.3158   5.5425  11.5990
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 10.78708   11.58926   0.931 0.361634
complaints   0.61319    0.16098   3.809 0.000903 ***
privileges  -0.07305    0.13572  -0.538 0.595594
learning     0.32033    0.16852   1.901 0.069925 .
raises       0.08173    0.22148   0.369 0.715480
critical     0.03838    0.14700   0.261 0.796334
advance     -0.21706    0.17821  -1.218 0.235577
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
Residual standard error: 7.068 on 23 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7326,Adjusted R-squared:  0.6628
F-statistic:  10.5 on 6 and 23 DF,  p-value: 1.24e-05

> (Drho <- 0.7326-0.6831) # 追加した4変数に関する部分決定係数
[1] 0.0495
> (Drho.adj <- 0.6628-0.6594) # 自由度調整済み部分決定係数
```

```
[1] 0.0034
> (F.value <- Drho/(1-0.7326) * (30-6-1)/4)
[1] 1.064417
> (ci.lambda <- conf.limits.ncf(F.value=F.value,df.1=4,df.2=23,conf.level=0.95))
$Lower.Limit
[1] NA
$Prob.Less.Lower
[1] NA
$Upper.Limit
[1] 12.5678
$Prob.Greater.Upper
[1] 0.025

> ci.lambda$Lower.Limit/(30+ci.lambda$Lower.Limit) # 下側
[1] NA
> ci.lambda$Upper.Limit/(30+ci.lambda$Upper.Limit) # 上側
[1] 0.295242
```

$\Delta R^2 = .0495$、$\Delta R^2_{\text{adj}} = .0034$ で、偏決定係数の $95\% CI[0, .30]$。

2.6.4 標準偏回帰係数

$$\beta^*_j = \rho_{\text{partial}} \frac{\sqrt{1-\rho^2_{y\cdot 1\cdots(j)\cdots p}}}{\sqrt{1-\rho^2_{j\cdot 1\cdots(j)\cdots p}}} \tag{2.53}$$

$$= \frac{\rho_{\text{part}}}{\sqrt{1-\rho^2_{j\cdot 1\cdots(j)\cdots p}}} \tag{2.54}$$

の近似的な CI は、

$$[\beta^*_{jL}, \beta^*_{jU}] = b^*_j \pm t_{(N-p-1)_{1-\alpha/2}} \sqrt{\frac{1-R^2}{(1-R^2_{j\cdot 1\cdots(j)\cdots p})(N-p-1)}} \tag{2.55}$$

で求められる[9]。

2.7 分散分析

2.7.1 完全無作為 1 要因

効果量と CI

検定統計量

$$F = \frac{MS_A}{MS_e} \tag{2.56}$$

は、自由度 $a-1$ と $N-a$、非心度が

$$\lambda = \frac{\sigma^2_A}{\sigma^2_\epsilon} \times N \tag{2.57}$$

$$= \theta^2 \times N \tag{2.58}$$

$$= \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \times N \tag{2.59}$$

[9] Hayes (1994)。標準化に用いる SD の標本変動を考慮していないので、デルタ法にもとづく方法の方がよいとされる（Jones & Waller, 2013）。

の非心 F 分布に従う[10]。

非心度は、

$$\eta^2 = \frac{\lambda}{N+\lambda} \tag{2.60}$$

と逆変換でき、λ の CI から η の CI を計算する。

> メモ
>
> 要因 A に関する母集団分散について、テキストでは
>
> $$\sigma_A^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{a} n_j(\mu_j - \mu)^2 \tag{2.61}$$
>
> と表記されている。この式で見ると母集団効果量に標本サイズが含まれているようで大変違和感を覚える。これは、
>
> $$\sigma_A^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} a\frac{n_j}{N}(\mu_j - \mu)^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} a\frac{n_j}{an}(\mu_j - \mu)^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} \frac{n_j}{n}(\mu_j - \mu)^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{a} w_j(\mu_j - \mu)^2 \tag{2.62}$$
>
> とも表せ、標本を a 水準に均等割した場合との各群の人数比 $w_j = n_j/n$ で重みづけしたものだと考えられる。つまり、このような人数比を母集団が成り立っていた場合の分散、ということになる。この想定が妥当かどうかは、ケースバイケースだと思うのだが…。（調査であれば人数比は偶然、実験であっても欠測が生じる。）

メモ：効果量の解釈

$$\theta = \frac{\sigma_A}{\sigma_\epsilon} \tag{2.63}$$

を標準化平均値差 δ の拡張と考えたとき、分散説明率 η^2 といずれが解釈可能性の観点から優れているだろうか？

テキストでは、

- 水準の数と従属変数の分散が連動する（群内分散が一定のまま、群間分散が増大）場合は δ や θ
- 水準の数と従属変数の分散が連動しない場合は ρ や η^2

を報告するのが自然であるとしている。

決定係数の点推定

決定係数 η^2 の点推定にあたっては、

$$\hat{\eta}^2 = \frac{SS_A}{SS_T} \tag{2.64}$$

$$\hat{\eta}^2_{\text{adj}}(=\epsilon^2) = 1 - \frac{N-1}{N-a}(1-\hat{\eta}^2) \tag{2.65}$$

$$\omega^2 = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_\epsilon^2} \tag{2.66}$$

がある。

自由度調整済みの決定係数 ϵ^2 と分散の不偏推定量を用いた ω^2 はほとんど値に差がなく[11]、かつ回帰分析との連続性から前者を報告するのが自然であるとテキストは主張している。

---

[10] Cohen (1988) は、θ を f と表記している。また、$\eta^2 = \sigma_A^2/\sigma_T^2$ で、標本サイズに比例した母集団の下で、$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_\epsilon^2$ という分解ができる。

[11] 大久保・岡田 (2012)

メモ
ϵ^2 を用いるか ω^2 を用いるかについて、回帰分析の決定係数についても、ω^2 をベースに説明すれば、分散分析においてそれを利用することの連続性は保てるのでは？
また、ランダム効果を考慮した場合も ϵ^2 をベースにした議論は成り立つのだろうか？

メモ
点推定値は $\hat{\eta}^2$、$\hat{\eta}^2_{\mathrm{adj}}(=\epsilon^2)$、$\omega^2$ で異なった値となるが、CI については共通である。これはいささか違和感を覚える。もちろん、これは決定係数に限った話ではない。δ の推定においても、d や g で点推定値は異なるが、非心分布を用いた CI は点推定の方法に依存しない。

R による決定係数と CI

データ PlantGrowth を用いて、決定係数と信頼区間を求める。
　従属変数は weight、独立変数は group（3 水準）、各 10 個体からなる 1 要因完全無作為デザイン。

```
> ### 分散分析（完全無作為 1 要因）
> data(PlantGrowth) # データの読み込み
> fit.aov <- aov(weight~group, data=PlantGrowth) # 分散分析
> summary(fit.aov) # 分散分析の結果
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
group        2  3.766  1.8832   4.846 0.0159 *
Residuals   27 10.492  0.3886
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> # 決定係数の点推定
> SSa <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[1]
> SSe <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[2]
> MSa <- summary(fit.aov)[[1]]$"Mean Sq"[1]
> MSe <- summary(fit.aov)[[1]]$"Mean Sq"[2]
> (hat.eta.sq <- SSa / (SSa + SSe)) # η 2 乗
[1] 0.2641483
> (epsilon.sq <- 1-(30-1)/(30-3)*(1-hat.eta.sq)) # 自由度調整済みη 2 乗
[1] 0.2096408
> hat.sigma.sq.a <- 2*(MSa-MSe)/30
> hat.sigma.sq.e <- MSe
> (omega.sq <- hat.sigma.sq.a / (hat.sigma.sq.a + hat.sigma.sq.e)) # ω 2 乗
[1] 0.2040788
> # 決定係数の区間推定
> ci.lambda <- conf.limits.ncf(F.value=4.846,df.1=2,df.2=27,conf.level=0.95)
> ci.lambda$Lower.Limit / (30+ci.lambda$Lower.Limit) # 下側
[1] 0.009902468
> ci.lambda$Upper.Limit / (30+ci.lambda$Upper.Limit) # 上側
[1] 0.4638933
> Lambda2Rsquare(Lambda=ci.lambda$Lower.Limit, N=30) # 下側（関数利用）
[1] 0.009902468
> Lambda2Rsquare(Lambda=ci.lambda$Upper.Limit, N=30) # 上側（関数利用）
[1] 0.4638933
```

　※ $\hat{\eta}^2$ の算出の際に、SS でなく MS を用いそうになるので注意。
　ここでは、非心度 λ から ρ^2 への変換に、関数 Lambda2Rsquare() を用いる方法も行ってみた。結果は、$95\%CI[.01, .46]$。

メモ
回帰分析と同じように、分散分析においても水準はランダムである場合がある。
ここで紹介されている方法は、固定された独立変数の下での等分散正規性を仮定したものであるから、ランダム要因が含まれている場合、また等分散性が成り立たない場合については、それ以外の方法をとる必要があるはずである。
決定係数については、Kirk (2013) で ω^2 と ρ_I^2 とで固定効果とランダム効果に分けて記述されていたような（要確認）。

2.7.2 多要因のデザイン

検定統計量

バランスデザインが基本であり、母集団においても各セルの人数割合が等しいと想定する。

このとき、検定対象となる効果を σ_μ で表せば、検定統計量 F は非心度

$$\lambda = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\epsilon^2} \times N \tag{2.67}$$
$$= \theta_\mu^2 \times N \tag{2.68}$$
$$= \frac{\Delta\eta_\mu^2}{1-\eta_{\text{full}}^2} \times N \tag{2.69}$$

の非心 F 分布に従う[12]。

メモ
テキストでは、バランスデザインの分散分析では「他の独立変数の影響」が生じないため、「部分決定係数」という用語ではなく、当該の要因によって従属変数の分散のどれだけの割合を説明できるかを「決定係数」と呼ぶことになる、とされている。
しかし、モデル全体での分散説明率を指すのか、それとも各独立変数（要因）を加えたことによる説明率の増分を指すのかの区別は重要であり、回帰分析と分散分析が本質的に同じなのであれば、このような呼称の区別は無意味である。
分散分析でも現状はアンバランスデザインが多いことを考えれば、むしろ、独立変数間の相関とは無関係に、前者は「決定係数」、後者は「部分決定係数」と呼ぶ方が混乱がなくてよいと考える。

偏決定係数

$$\eta_{\text{partial}.\mu}^2 = \frac{\eta_\mu^2}{1-\eta_{\text{full}|\mu}^2} \tag{2.70}$$

当該要因について、F 検定統計量の値を求める。これを上側下側の限界値とする非心度を求め、非心度を

$$\eta_{\text{partial}.\mu}^2 = \frac{\lambda}{N+\lambda} \tag{2.71}$$

によって変換することで、偏決定係数の CI を得る。

R による偏決定係数の CI

データ npk を用いて、偏決定係数の CI を算出してみる。

[12] $\Delta\eta_\mu^2$ は、当該要因の追加による分散説明率の増加分。また、対応のある要因が含まれる場合、水準観の相関や球面性仮定からの逸脱度が非心度に反映される（Faul et al., 2007, Table 3）。

```
> ### 分散分析（完全無作為 2 要因）
> data(npk) # データの読み込み
> fit.aov <- aov(yield~N+P+N:P,data=npk) # 分散分析
> summary(fit.aov)
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
N            1  189.3  189.28   5.758 0.0263 *
P            1    8.4    8.40   0.256 0.6187
N:P          1   21.3   21.28   0.647 0.4305
Residuals   20  657.4   32.87
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> # N の主効果について、部分決定係数を求める
> SSn <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[1]
> SSp <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[2]
> SSi <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[3]
> SSe <- summary(fit.aov)[[1]]$"Sum Sq"[4]
> (hat.eta.sq.part <- SSn / (SSn + SSp + SSi + SSe)) # ε 2 乗と ω 2 乗は略
[1] 0.215985
> # N の主効果について、偏決定係数を求める
> (hat.eta.sq.partial <- SSn / (SSn + SSe)) # ε 2 乗と ω 2 乗は略
[1] 0.2235571
> ci.lambda <- conf.limits.ncf(F.value=5.758,df.1=1,df.2=20,conf.level=0.95)
> Lambda2Rsquare(Lambda=ci.lambda$Lower.Limit, N=24) # 下側（関数利用）
[1] NA
> Lambda2Rsquare(Lambda=ci.lambda$Upper.Limit, N=24) # 上側（関数利用）
[1] 0.4540877
```

$\eta^2_{\mathrm{partial}.N}$ の $95\% CI[0, 0.45]$

2.8 共分散構造分析におけるモデル適合度

適合度検定

最尤法により最小化される指標を f_{ML} とし、その最小値を $\hat{f}_{\mathrm{ML}}$ とすると、

$$\chi^2 = N \times \hat{f}_{\mathrm{ML}} \tag{2.72}$$

は、近似的に自由度

$$df = \frac{p(p+1)}{2} - q \tag{2.73}$$

非心度

$$\lambda = N \times f^*_{\mathrm{ML}} \tag{2.74}$$

の非心カイ 2 乗分布に従う[13]。

一般に、モデルの自由度が小さい（推定すべき母数 q がたくさんある）ほど f^*_{ML} は小さくなる。そこで、母集団における 1 自由度あたりの f^*_{ML} を

$$RMSEA_{\mathrm{pop}} = \sqrt{\frac{f^*_{\mathrm{ML}}}{df}} \tag{2.75}$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{N \times df}} \tag{2.76}$$

[13] p は観測変数、q は母数の数。また、f^*_{ML} は、母集団分散共分散の値で評価した f_{ML} の値。大きいほど、母集団分散共分散とモデルとデータから導かれる分散共分散とが乖離していることになる。

と定義する[14]。

データから非心度 λ の CI を求め、これを変換することで $RMSEA_{\mathrm{pop}}$ の CI を求めることができる。

$E[\chi^2] = df + \lambda$ から $\hat{\lambda} = \chi^2 - df$ で推定することを考えると、

$$
\begin{aligned}
RMSEA &= \sqrt{\frac{\hat{f}^*_{\mathrm{ML}}}{df}} && (2.77)\\
&= \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{N} \times \frac{1}{df}} && (2.78)\\
&= \sqrt{\frac{\chi^2 - df}{N} \times \frac{1}{df}} && (2.79)\\
&= \sqrt{\frac{N \times \hat{f}_{\mathrm{ML}} - df}{N} \times \frac{1}{df}} && (2.80)\\
&= \sqrt{\frac{\hat{f}_{\mathrm{ML}}}{df} - \frac{1}{N}} && (2.81)
\end{aligned}
$$

によって $RMSEA_{\mathrm{pop}}$ を点推定することができる。

R による RMSEA の CI

データ ability.cov を用いて、確認的因子分析（1 因子）を行ったときの RMSEA の CI を算出する。

```
> ### 共分散構造分析
> data(ability.cov)
> library("lavaan")
> cfa.model <- "g =~ general + picture + blocks + maze + reading + vocab" # モデル
> fit.cfa <- cfa(cfa.model, sample.cov=ability.cov$cov, sample.nobs=112)  # 分析
> fitMeasures(fit.cfa,c("chisq","df","rmsea")) # 適合度指標
 chisq     df  rmsea
78.327  9.000  0.262
> ci.lambda <- conf.limits.nc.chisq(Chi.Square=78.327,df=9,conf.level=0.95)
> sqrt(ci.lambda$Lower.Limit / (112*9)) # 下側
[1] 0.2002755
> sqrt(ci.lambda$Upper.Limit / (112*9)) # 上側
[1] 0.3273406
```

$RMSEA = .262$ で、$95\% CI[.200, .327]$ となった。

3　対比分析

3.1　対比とは

$$
\begin{aligned}
\psi &= c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \cdots + c_J\mu_J && (3.1)\\
&= \sum_{j=1}^{J} c_j\mu_j && (3.2)
\end{aligned}
$$

[14] Steiger & Lind (1980)

ただし、

$$\sum_{j=1}^{J} c_j = 0 \tag{3.3}$$

である。

メモ
Kirk (2013) では、さらに

$$\sum_{j=1}^{J} |c_j| = 2 \tag{3.4}$$

とするのが一般的であるとされている。

対比分析の中でも、直線的増加や 2 次曲線的に変化する傾向など、母平均の特定の増減傾向に調べるための分析は**傾向分析**と呼ばれる。

3.2 検定と推定

対比の推定量を

$$\hat{\psi} = \sum_{j=1}^{J} c_j \bar{y}_j \tag{3.5}$$

とすると、$y_j \sim N(\mu_j, \sigma_\epsilon)$ の下で、

$$\hat{\psi} \sim N\left(\mu_{\hat{\psi}}, \sigma^2_{\hat{\psi}}\right) \tag{3.6}$$

$$\sim N\left(\psi, \sigma^2_\epsilon \sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}\right) \tag{3.7}$$

となる。

そこで、σ^2_ϵ を残差平均平方 MS_e で推定するとして、

$$\hat{\sigma}_{\hat{\psi}} = \sqrt{MS_e \sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}} \tag{3.8}$$

とすると、

$$t = \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}} \tag{3.9}$$

は、帰無仮説 $H_0 : \psi = 0$ の下で自由度 df_e の t 分布に従う。よって、対比の信頼区間は

$$CI_\psi = \hat{\psi} \pm t_{1-\alpha/2} \times \hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \tag{3.10}$$

によって算出できる。

また、帰無仮説が偽であれば、非心度

$$\lambda = \frac{\psi}{\sigma_\epsilon} \div \sqrt{\sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}} \tag{3.11}$$

$$= \frac{\delta_\psi}{\sqrt{\sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}}} \tag{3.12}$$

の非心 t 分布に従う。このとき、

$$\delta_\psi = \frac{\psi}{\sigma_\epsilon} \tag{3.13}$$

を、**標準化対比**といい、

$$d_\psi = \frac{\hat{\psi}}{\hat{\sigma}_\epsilon} = \frac{\hat{\psi}}{\sqrt{MS_e}} \tag{3.14}$$

によって点推定し、非心度 λ からの逆変換

$$\delta_\omega = \lambda \times \sqrt{\sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}} \tag{3.15}$$

によって δ_ψ の CI を算出することができる。

R を用いた対比の分析

データ `PlantGrowth` を用いて、2 つの実験群の平均が統制群に等しいという対比を作る。対比と標準化対比について、検定と区間推定を行う。

```
> ### 対比分析
> data(PlantGrowth)
> cw <- matrix(c(1,-0.5,-0.5),1,3) # 対比係数
> Ms <- matrix(tapply(PlantGrowth$weight, PlantGrowth$group, mean),1,3) # 群平均
> (psi.hat <- as.numeric(cw %*% t(Ms))) # 対比の推定値
[1] -0.0615
> fit.aov <- aov(weight~group, data=PlantGrowth) # 分散分析
> (MSe <- summary(fit.aov)[[1]]$"Mean Sq"[2]) # 誤差平均平方
[1] 0.3885959
> (dfe <- summary(fit.aov)[[1]]$"Df"[2]) # 誤差自由度
[1] 27
> (sigma.psi.hat <- sqrt(MSe * sum(cw^2/10)))
[1] 0.241432
> (t <- psi.hat/sigma.psi.hat) # t 値
[1] -0.2547302
> pt(q=t,df=dfe,lower.tail=T)*2 # p 値
[1] 0.8008617
> ME <- sigma.psi.hat*qt(p=0.975,df=dfe) # 誤差範囲
> psi.hat + c(-ME, ME) # 対比の CI
[1] -0.5568775  0.4338775
> (std.psi.hat <- psi.hat/sqrt(MSe)) # 標準化対比の推定値
[1] -0.09865657
> ci.lambda <- conf.limits.nct(t.value=t, df=dfe, conf.level=0.95) # 非心度の CI
> ci.lambda$Lower.Limit * sqrt(sum(cw^2/10)) # 下限
[1] -0.857291
> ci.lambda$Upper.Limit * sqrt(sum(cw^2/10)) # 上限
[1] 0.6617939
```

対比は $\hat{\psi} = -0.06$ と推定され、統計的に有意ではない（$t_{(27)} = -0.25, p = .80$）。対比の信頼区間は $95\%CI[-0.56, 0.43]$。標準化対比は $d_\psi = -0.10$ と推定され、$95\%CI[-0.86, 0.66]$。

3.3 分散分析との関係

3.3.1 対比の平方和

t^2 は F 分布に従うことから、

$$t^2 = \frac{\hat{\psi}^2}{\hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}}} \tag{3.16}$$

$$= \frac{\hat{\psi}^2}{MS_e \sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}} \tag{3.17}$$

$$= \frac{\hat{\psi}^2 / \sum_{j=1}^{J} \frac{c_j^2}{n_j}}{MS_e} \tag{3.18}$$

$$= \frac{MS_\psi}{MS_e} \tag{3.19}$$

$$= \frac{SS_\psi / 1}{SS_e / df_e} \tag{3.20}$$

と平均平方の比に変換できる。

3.3.2 直交対比の平方和と群間平方和

$J-1$ 個の直交対比、すなわち

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{c_{1j} c_{2j}}{n_j} = 0 \tag{3.21}$$

が全ての対について満たされていれば、それらの平方和の和は SS_b に等しくなる。つまり、

$$SS_b = \sum_{j=1}^{J-1} SS_{\psi_j} \tag{3.22}$$

である。

さらに、群間平方和の検定のための F は

$$F = \frac{MS_b}{MS_e} \tag{3.23}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{J-1} SS_{\psi_j} / (J-1)}{MS_e} \tag{3.24}$$

$$= \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} \frac{SS_{\psi_j}}{MS_e} \tag{3.25}$$

$$= \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} F_{\psi_j} \tag{3.26}$$

となることから、通常の平均値差の検定に関する F は、$J-1$ 個の直交対比に関する検定統計量 F_{ψ_j} の平均になる。

- 総括的な検定：拡散した問い
- 対比の検定：焦点化した問い [15]

[15] Rosenthal, Rosnow, & Rubin (2000)

総括的な検定は、顕著な効果を示す対比から弱い効果しか示さない対比まで平均化した検定になっているので、顕著な効果を示すことが予想される対比に焦点化した検定（自由度 1 の検定）に比べ、検定力が低くなる可能性がある。

3.4 Scheffé の方法

Šidàk の方法や Bonferroni（Dunn）の方法では、検定すべき対比の数 K に応じて有意水準が変わってしまう。

有意水準を一定のまま、組単位の誤りの確率（familywise error rate）を統制するために、Scheffé の方法が用いられる。

直交対比の平方和が取り得る最大値 $SS_{\psi.\max}$ は、SS_b である。このときの F 値は、

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{MS_{\psi.\max}}{MS_e} && (3.27)\\
&= \frac{SS_{\psi.\max}/1}{MS_e} && (3.28)\\
&= \frac{SS_{\psi.\max}/(J-1)}{MS_e} \times (J-1) && (3.29)\\
&= \frac{SS_b/(J-1)}{MS_e} \times (J-1) && (3.30)\\
&= \frac{MS_b}{MS_e} \times (J-1) && (3.31)
\end{aligned}
$$

となる。よって、対比の検定の棄却の限界値を $F_{1-\alpha} \times (J-1)$ としておけば、「最大可能な対比が誤って有意になる確率」は α となる。t を用いて対比の検定や推定を行う場合、棄却域は

$$|t| \geq \sqrt{(J-1) \times F_{1-\alpha}} \quad (3.32)$$

とすればよい。すると、CI は

$$CI_\psi = \hat{\psi} \pm \sqrt{(J-1) \times F_{1-\alpha}} \times \hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \quad (3.33)$$

となる。

4 マルチレベル分析

4.1 センタリング

ランダム係数モデル

レベル 1 モデルの独立変数 x は、集団平均でセンタリングする。

$$
\begin{aligned}
y_{ij} &= \beta_{0j} + \beta_{1j}(x_{ij} - \bar{x}_{.j}) + r_{ij} && (4.1)\\
\beta_{0j} &= \gamma_{00} + u_{0j} && (4.2)\\
\beta_{1j} &= \gamma_{10} + u_{1j} && (4.3)
\end{aligned}
$$

各パラメータは、

- β_{0j} 各集団における y の平均
  - γ_{00} 母集団全体での平均
- β_{1j} 各集団における回帰直線の傾き
  - γ_{10} 集団内回帰直線の母集団平均

となる。

ランダム効果の共分散分析モデル

レベル 1 モデルの独立変数は、全体平均でセンタリングする。

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(x_{ij} - \bar{x}_{..}) + r_{ij} \tag{4.4}$$
$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j} \tag{4.5}$$
$$\beta_{1j} = \gamma_{10} \tag{4.6}$$

各パラメータは、

- β_{0j} x の全体平均における各集団の y の予測値（調整済み平均）
  - γ_{00} x の全体平均における各集団の y の予測値の平均
- $\beta_{1j}(=\gamma_{10})$ 全ての集団に共通の集団内回帰直線

となる。

このとき、ランダム係数モデルにおける γ_{10} とランダム効果の共分散分析モデルにおける γ_{10} の値は一致しない。これを解消するには、共分散分析モデルの切片に集団平均でセンタリングした x を加え、

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\bar{x}_{.j} + u_{0j} \tag{4.7}$$

とする必要がある[16]。

4.2 モデルの比較

尤度比検定は、制限付き最尤法でなく通常の最尤法の結果に適用される。ただし、ランダム効果の部分のみが異なる形で入れ子関係にあるモデルについては、制限付き最尤法において尤度比検定を行うこともできる。

5 メタ分析

5.1 標準化平均値差の統合

標準化された平均値差 g_i の近似的分散は、式 (2.9) に示したように

$$v_i \approx \frac{n_{1i}+n_{2i}}{n_{1i}n_{2i}} + \frac{g_i^2}{2(n_{1i}+n_{2i}-2)} \tag{5.1}$$

で[17]、これを用いて

$$(g_i - 1.96\sqrt{v_i},\ g_i + 1.96\sqrt{v_i}) \tag{5.2}$$

で研究 i の効果量の CI を求められる[18]。

5.2 等質性の検討

平均値差 g_i の近似的分散の逆数を $w_i = 1/v_i$ とし、母集団効果量 δ を

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} w_i g_i}{\sum_{i=1}^{k} w_i} \tag{5.3}$$

によって推定する。

[16] Raudenbush & Bryk (2002, pp.135-141)
[17] Kline (2004, p.108)
[18] Hedges & Olkin (1985, Chapter 5) は、δ の不偏推定量 g_{adj} を提示し、その近似的分散が $\frac{n_1+n_2}{n_1n_2} + \frac{g_{\mathrm{adj}}^2}{2(n_1+n_2)}$ で与えられることを示している。

このとき、

$$Q=\sum_{i=1}^{k} w_i(g_i-\hat{\delta})^2 \tag{5.4}$$

が、$H_0:\delta_i=\delta$ for all i の下で、自由度 $k-1$ のカイ 2 乗分布に従うことを利用して、等質性の検定を行う。

また、δ_i の分散 τ^2 は、モーメント法により

$$\hat{\tau}^2=\frac{Q-(k-1)}{\sum_{i=1}^{k} w_i-(\sum_{i=1}^{k} w_i^2)/(\sum_{i=1}^{k} w_i)} \tag{5.5}$$

と推定できる。

ランダム効果モデルによって $\hat{\mu}_\delta$ が推定された場合、

$$\hat{\mu}_\delta \pm 1.96\times\hat{\tau} \tag{5.6}$$

を効果量の “95% plausible value interval” と呼ぶ[19]。つまり、δ_i の 95%はこの範囲に含まれるだろうということ。

メモ
テキストでは、固定効果モデルによる $\hat{\delta}$ を利用して δ_i の含まれる範囲を例示しているが、これは混乱を招く。

[19] Cooper et al. (2009, p.302)（Chapter 16 by Raudenbush）