Multiple Regression: Testing and Interpreting Interactions

Aiken & West

1991 年（Sage）

1　連続変数間の交互作用

1.1　モデル

$$\hat{Y} = b_1X + b_2Z + b_3XZ + b_0 \tag{1.1}$$
$$= (b_1 + b_3Z)X + (b_2Z + b_0) \tag{1.2}$$

なるモデルを考える。ただし、X と Y はいずれも平均でセンタリングされているものとする[1]。

このとき、b_1 は X の**条件付き効果（conditional effect）**であり[2]、$b_1 + b_3Z$ が Z における X の**単純傾斜（simple slope）**である。

また、Z の各値における回帰直線を**単純回帰直線（simple regression line）**という。Cohen & Cohen (1983) に従って、$Z_M \pm 1SD_Z$ から Z_L, Z_M, Z_H を算出し、それぞれでの X の単純回帰直線を求めることがしばしばある。

1.2　単純傾斜の検定 （$H_0 : b_1 + b_3Z = 0$）

方法 1

単純傾斜 $b_1 + b_3Z$ の SE が $\sqrt{s_{11} + 2Zs_{13} + Z^2s_{33}}$ であることを利用して[3]、

$$t = \frac{b_1 + b_3Z}{\sqrt{s_{11} + 2Zs_{13} + Z^2s_{33}}} \tag{1.3}$$
$$df = n - k - 1 \tag{1.4}$$

を用いて検定する[4]。

メモ

回帰式を

$$\hat{Y} = b_1X + b_2Z + \cdots + b_pW + b_0 \tag{1.5}$$

とすると、

$$U = w_1b_1 + w_2b_2 + \cdots + b_pw_p = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{b} \tag{1.6}$$

の分散

$$\sigma_U^2 = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\Sigma}_b\boldsymbol{w} \tag{1.7}$$

は、$\boldsymbol{\Sigma}_b$ の推定値

$$\boldsymbol{S}_b = MS_{Y-\hat{Y}}\boldsymbol{S}_{XX}^{-1} \tag{1.8}$$

[1] XY はセンタリングされた変数の積であって、これ自体をセンタリングしているわけではない。
[2] b_1 を X の主効果と呼ぶ場合があるが、ふさわしくない。ANOVA においても主効果とは他の要因を全て平均化した場合の効果のことを言う。
[3] $s_{kk'}$ は $b_{kk'}$ の共分散
[4] n は人数、k は交互作用項も含む予測変数の数。

を用いて[5]

$$s_U^2 = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{S}_b\boldsymbol{w} \tag{1.9}$$

によって推定できる[6]。

メモここまで

方法 2

条件付き効果 b_1 そのものが単純傾斜と等しくなるよう、Z を変換して再分析する。b_1 は $Z=0$ のときの X の傾きなので、$Z_{CV} = Z - CV_Z$ と変換して分析することで、b_1 は $Z_{CV}=0$ つまり $Z = CV_Z$ の場合の単純傾斜に等しくなる[7]。

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_1'X + b_2'(Z - CV_Z) + b_3'X(Z - CV_Z) + b_0' \qquad (1.10) \\ &= b_1'X + b_2'Z_{CV} + b_3'XZ_{CV} + b_0' \qquad (1.11) \end{aligned}$$

このとき、b_1' は $Z_{CV} = 0$ つまり $Z = CV_Z$ のときの X の条件付き効果であるが、これはつまり単純傾斜 $b_1 + b_3CV_Z$ に等しい。

このような処理を行えば、b_1' の検定結果がそのまま $b_1 + b_3CV_Z$ の検定結果に等しいことになる。

1.3 単純傾斜の差の検定（$H_0 : b_1 + b_3Z_H = b_1 + b_3Z_L$）

Z_H と Z_L における単純傾斜の差を

$$\begin{aligned} d &= b_1 + b_3Z_H - (b_1 + b_3Z_L) \qquad (1.12) \\ &= (Z_H - Z_L)b_3 \qquad (1.13) \end{aligned}$$

とすると、

$$t = \frac{d}{SE_d} = \frac{(Z_H - Z_L)b_3}{\sqrt{(Z_H - Z_L)^2 s_{33}}} = \frac{b_3}{s_{33}} \tag{1.14}$$

o となり、これは b_3 の検定等計量に等しい。つまり、b_3 が有意であれば、どのような Z 同士の単純傾斜にも有意差があることになる。

メモ

Z_L, Z_M, Z_H を単にその値としてではなく、母集団平均 pm 母集団 SD のように解釈して X の単純傾斜についての検定を行っているとすると、こうした検定には正のバイアスがかかることが知られている。これについて定まった対処法はまだない。

メモここまで

疑問

単純傾斜の検定と単純傾斜の差の検定が矛盾することはないのだろうか？つまり、b_3 が有意でなくあらゆる Z において単純傾斜同士は有意差なしという結果が出たときに、Z_L では単純傾斜が有意なく Z_H では有意であるというような結果が得られることはないのだろうか。

疑問ここまで

[5] 後の R による計算で確認されるように、$\boldsymbol{S}_{XX}$ を本書にあるように独立変数の分散共分散行列とすると、`vcov()` を用いて算出した結果と一致しない。同じ結果にするには、$\boldsymbol{S}_{XX}$ を $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ とする必要がある。

[6] Maddala (1997); Morrison (1976)

[7] CV_Z を Z の**条件値（conditional value）**という。

1.4 順交互作用と逆交互作用

交互作用は、

- **順 ordinal（非交差 noncrossover）交互作用**：単純回帰直線が X の取りうる範囲で交わらない
- **逆 disordinal（交差 crossover）交互作用**：単純回帰直線が X の取りうる範囲で交わる

に分類できる[8]。この場合の「取りうる範囲」は、

1. 実際のデータで得られた範囲
2. 意味のある範囲

などが考えられる。

1.4.1 交差点の求め方

2 つの単純回帰直線

$$\hat{Y}_H = (b_1 + b_3 Z_H)X + (b_2 Z_H + b_0) \tag{1.15}$$
$$\hat{Y}_L = (b_1 + b_3 Z_L)X + (b_2 Z_L + b_0) \tag{1.16}$$

は、

$$X_{cross} = -\frac{b_2}{b_3} \tag{1.17}$$

で交わる。X_{cross} が X の取りうる範囲内にあれば、順（非交差）交互作用となる。

2 独立変数のスケーリングと回帰係数

交互作用項があると、変数のスケーリングで回帰係数の値は大きく変わる。

1. 最高次の項以外が変化する
2. X と Z を変換しても、単純傾斜 $b_1 + b_3 Z$ は変化しない
3. 回帰式自体は変化しても、ordinal / disordinal は変化しない

2.1 高次項の変化

加算変換

$$X = X' - c \tag{2.1}$$
$$Z = Z' - f \tag{2.2}$$

により、

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= b_1 X + b_2 Z + b_3 XZ + b_0 && (2.3)\\
&= b_1(X' - c) + b_2(Z' - f) + b_3(X' - c)(Z' - f) + b_0 && (2.4)\\
&= (b_1 - b_3 f)X' + (b_2 - b_3 c)Z' + b3X'Z' + (b_0 - b_1 c - b_2 f + b_3 cf) && (2.5)\\
&= b_1' X' + b_2' Z' + b_3 X'Z' + b_0' && (2.6)
\end{aligned}$$

と変形できることがわかる。つまり、交互作用項 b_3 のみが変化しない。

[8] X への回帰と Z への回帰とで順か逆かが変わる場合がある。

2.2 単純回帰式の単純傾斜

加算変換

$$X = X' - c \tag{2.7}$$
$$Z = Z' - f \tag{2.8}$$

により、

$$\begin{aligned}
\hat{Y} &= (b_1 + b_3 Z)X + (b_2 Z + b_0) &(2.9)\\
&= [b_1 + b_3(Z' - f)](X' - c) + [b_2(Z' - f) + b_0] &(2.10)\\
&= [b_1 + b_3(Z' - f)]X' + [-b_1 c + b_2(Z' - f) - b_3 c(Z' - f) + b_0] &(2.11)\\
&= (b_1 + b_3 Z)X' + (-b_1 c + b_2 Z - b_3 c Z + b_0) &(2.12)
\end{aligned}$$

と変形できることがわかる。つまり、単純傾斜は加算変換により変化しない。

2.3 交差点

$b'_2 = b_2 - b_3 c$ より、

$$X'_{cross} = -\frac{b'_2}{b'_3} = -\frac{b_2 - b_3 c}{b_3} = -\frac{b2}{b3} + c \tag{2.13}$$

となる。X の加算変換と同じく X_{cross} も移動する。

2.4 Y はセンタリングすべきか？

Y についてはセンタリングせずにもとのスケールで評価できるのであるから、センタリングする理由は特にない。

2.5 多重共線性

X と Z がセンタリングされていないと、XZ や X^2 と高い相関を持つ。

- (X, Z) と XZ の相関
- X と X^2 の相関

は、センタリングしてあれば正規性の下ではゼロになる[9]。

センタリングを怠ることで生じる多重共線性のことを、**非本質的な悪条件化 nonessential ill-conditioning** と呼ぶ[10]。

2.6 交互作用 XZ 項の解釈

Y の X への回帰と考えた場合、XZ にかかる係数 b_3 は Z の 1 ポイントの増加に対応する X の傾きの増分である。

2.7 X と Z の 1 次の項の解釈

センタリングがなされていれば、X にかかる係数 b_1 は $Z = Z_M$ の場合の傾きの大きさである。

b_1 や b_2 は X や Z の主効果ではない。主効果は他の変数の取りうる値について平均化した効果。

[9] センタリングしてあるのに相関がゼロでないのは、非正規性による。

[10] Marquardt (1980)

2.8 標準化解

一般に、

$$z_{X'Z'} \neq z_{X'} z_{Z'} \tag{2.14}$$
$$z_{XZ} \neq z_X z_Z \tag{2.15}$$

であるから、積項自体を標準化するのではなく、標準化した変数の積を用いた分析結果を「標準化解」として報告するべき[11]。

この場合、通常の標準化解と異なり切片 b_0 はゼロとはならない。

- $\bar{z}_X = 0, \bar{z}_Z = 0$ でも $\bar{z}_{XZ} = 0$ とは限らない
- $z_X z_Z$ の平均は X と Z の相関に等しい
- もし X と Z が無相関なら $z_X z_Z$ の
  - 平均=0
  - SD=1

  となる

2.9 標準化解と非標準化解の関係

$$b_i^* = b_i \frac{s_i}{s_Y} \tag{2.16}$$
$$b_0^* = \frac{b_0 - \bar{Y}}{s_Y} \tag{2.17}$$
$$\mathrm{Cov}[b_i^* b_j^*] = \mathrm{Cov}[b_i b_j] \frac{s_i s_j}{s_Y^2} \tag{2.18}$$
$$s_b^* = s_b \frac{s_i}{s_Y} \tag{2.19}$$

2.10 分析例

R のデータ `attitude` を用いて、ここまでの分析を実行してみる。

`attitude` を以下のように加工。

```
> data(attitude)
>
> attach(attitude)
> data01 <- data.frame(y=rating, x=complaints, z=privileges)
> detach(attitude)
>
> data01 <- data.frame(scale(data01, scale=F)) # センタリングのみ
> data02 <- data.frame(scale(data01))          # 標準化
>
> data01$xz <- data01$x * data01$z # センタリング変数の積
> data02$xz <- data02$x * data02$z # 標準化変数の積
>
> head(data01, n=5)
          y     x          z         xz
1 -21.633333 -15.6 -23.133333 360.880000
2  -1.633333  -2.6  -2.133333   5.546667
```

[11] Friedrich (1982)

```
3   6.366667   3.4  14.866667  50.546667
4  -3.633333  -3.6  -8.133333  29.280000
5  16.366667  11.4   2.866667  32.680000
> head(data02, n=5)
           y          x          z         xz
1 -1.7772211 -1.1716323 -1.8906841 2.21518666
2 -0.1341816 -0.1952721 -0.1743570 0.03404706
3  0.5230342  0.2553558  1.2150506 0.31027018
4 -0.2984855 -0.2703767 -0.6647362 0.17972918
5  1.3445540  0.8561929  0.2342923 0.20059937
>
> cor(data01)
            y          x          z          xz
y   1.0000000  0.8254176 0.42611687 -0.25268076
x   0.8254176  1.0000000 0.55828820 -0.18464516
z   0.4261169  0.5582882 1.00000000  0.08644766
xz -0.2526808 -0.1846452 0.08644766  1.00000000
```

data01 が非標準化、data02 が標準化したデータ。
非標準化解と標準化解はそれぞれ以下の通り。

```
> fit01 <- lm(y~x+z+xz, data=data01); summary(fit01) # 非標準化解

Call:
lm(formula = y ~ x + z + xz, data = data01)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-13.3067  -4.9662  -0.5419   6.6579   8.9681

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.602946   1.474594   0.409    0.686
x            0.749631   0.124986   5.998 2.48e-06 ***
z           -0.022962   0.134175  -0.171    0.865
xz          -0.006858   0.007864  -0.872    0.391
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 7.134 on 26 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6921,Adjusted R-squared:  0.6565
F-statistic: 19.48 on 3 and 26 DF,  p-value: 7.913e-07

> fit02 <- lm(y~x+z+xz, data=data02); summary(fit02) # 標準化解

Call:
lm(formula = y ~ x + z + xz, data = data02)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.09317 -0.40798 -0.04452  0.54696  0.73675

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.04953    0.12114   0.409    0.686
x            0.81997    0.13671   5.998 2.48e-06 ***
z           -0.02308    0.13487  -0.171    0.865
```

```
xz          -0.09178    0.10525  -0.872    0.391
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.5861 on 26 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6921,Adjusted R-squared:  0.6565
F-statistic: 19.48 on 3 and 26 DF,  p-value: 7.913e-07
```

検定結果は全く同じ。

非標準解について、Z_L, Z_M, Z_H における単純回帰直線の傾き（単純傾斜）と切片、Y の予測値、単純回帰直線の交差する X の値を求める。

```
> coef01 <- fit01$coefficients
> zm <- mean(data01$z)    # z の平均 (=0)
> zl <- zm - sd(data01$z) # z の平均-1SD
> zh <- zm + sd(data01$z) # z の平均+1sd
> vec.z <- c(zl,zm,zh)
> vec.slope <- coef01[2] + coef01[4]*vec.z; vec.slope # 単純傾斜
[1] 0.8335401 0.7496309 0.6657216
> vec.itcpt <- coef01[1] + coef01[3]*vec.z; vec.itcpt # 単純切片？
[1] 0.8838989 0.6029459 0.3219930
> vec.x <- seq(from=min(data01$x),to=max(data01$x),by=1) # x の範囲
> vec.yhat <- cbind(vec.slope[1]*vec.x+vec.itcpt[1],
+                   vec.slope[2]*vec.x+vec.itcpt[2],
+                   vec.slope[3]*vec.x+vec.itcpt[3]) # yhat
> xcross <- -coef01[3]/coef01[4]; xcross # 単純回帰直線の交差点
        z
-3.348295
```

この単純回帰直線を図示したのが図 2.1。交差点は $X_{cross} = -3.348$。

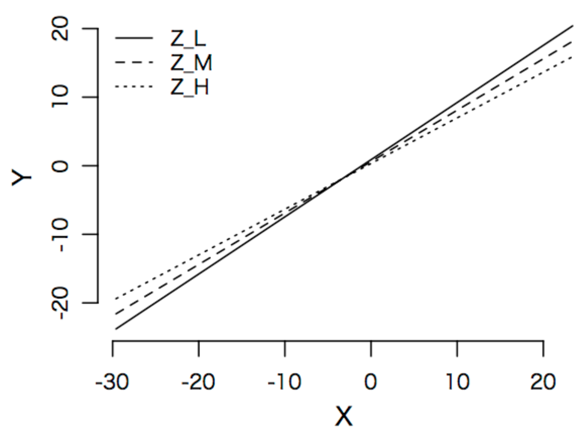

Figure 2.1: 単純回帰直線

$H_0 : Simple\ Slope = 0$ の検定を行う。（方法 1）

```
> # H0: 単純傾斜=0 の検定（方法 1）
> mat.v <- vcov(fit01) # 回帰係数の分散共分散行列
> vec.seb <- sqrt(mat.v[2,2]+2*vec.z*mat.v[2,4]+vec.z^2*mat.v[4,4]) # b の SE
> vec.t <- vec.slope/vec.seb; vec.t # t 値
```

```
[1] 6.195257 5.997740 3.741559
> df.t <- dim(data01)[1]-3-1; df.t   # 自由度
[1] 26
> pt(q=vec.t,df=df.t,lower.tail=F)*2 # 両側 p 値
[1] 1.490762e-06 2.476360e-06 9.139201e-04
>
> # 単純傾斜の SE
> MS <- sum(fit01$residuals^2)/df.t; MS # 残差平均平方
[1] 50.89091
> XX <- t(as.matrix(cbind(1,data01[,-1]))) %*% as.matrix(cbind(1,data01[,-1]))
> Sb <- MS * solve(XX)[-1,-1]; Sb     # 回帰係数の分散共分散行列
               x             z            xz
x   0.0156213878 -0.0098354140  2.769709e-04
z  -0.0098354140  0.0180028116 -2.452723e-04
xz  0.0002769709 -0.0002452723  6.184569e-05
> mat.w <- matrix(c(1,0,zl, 1,0,zm, 1,0,zh), 3, 3); mat.w # 重み行列
          [,1]         [,2]     [,3]
[1,]   1.00000 1.000000e+00  1.00000
[2,]   0.00000 0.000000e+00  0.00000
[3,] -12.23543 4.738108e-16 12.23543
> vec.seb <-sqrt(c(t(mat.w[,1]) %*% Sb %*% mat.w[,1],
+                  t(mat.w[,2]) %*% Sb %*% mat.w[,2],
+                  t(mat.w[,3]) %*% Sb %*% mat.w[,3])); vec.seb # 単純傾斜の SE
[1] 0.1345449 0.1249856 0.1779263
```

メモ

$\boldsymbol{b}$ の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_b$ は

$$\boldsymbol{S}_b = MS_{Y-\hat{Y}}\boldsymbol{S}_{XX}^{-1} \tag{2.20}$$

で推定するとされていたが、$\boldsymbol{S}_{XX}$ を本書にあるように独立変数の分散共分散行列とすると、vcov() を用いて算出した結果と一致しない。同じ結果にするには、$\boldsymbol{S}_{XX}$ を $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ とする必要がある。つまり、

$$\boldsymbol{S}_b = MS_{Y-\hat{Y}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \hat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{2.21}$$

$$= \frac{1}{n-k-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2 \times (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{2.22}$$

ということ。

メモここまで

$H_0 : \mathit{Simple\ Slope} = 0$ の検定を行う。（方法 2）

```
> # H0: 単純傾斜=0 の検定（方法 2）
> v.zcv <- data.frame(zcvl=data01$z-zl, zcvm=data01$z-zm, zcvh=data01$z-zh)
> v.xzcv <- v.zcv * data01$x; names(v.xzcv) <- c("xzcvl","xzcvm","xzcvh")
> data01cv <- cbind(data01, v.zcv, v.xzcv)
> fit01.cvl <- lm(y~x+zcvl+xzcvl, data=data01cv); summary(fit01.cvl)
...省略...
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x            0.833540   0.134545   6.195 1.49e-06 ***

...省略...
```

```
> fit01.cvm <- lm(y~x+zcvm+xzcvm, data=data01cv); summary(fit01.cvm)
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
x            0.749631   0.124986   5.998 2.48e-06 ***
... 省略...

> fit01.cvh <- lm(y~x+zcvh+xzcvh, data=data01cv); summary(fit01.cvh)
... 省略...
x            0.665722   0.177926   3.742 0.000914 ***
... 省略...
```

単純傾斜の SE を用いる方法（方法 1）でも、Z の加算変換による方法（方法 2）でも、同じ結果が得られていることがわかる。

3　3 変数の交互作用

$$\hat{Y} = b_1X + b_2Z + b_3W + b_4XZ + b_5XW + b_6ZW + b_7XZW + b_0 \tag{3.1}$$

Z_L と Z_H、W_L と W_H の組合せで回帰直線を図示する。

4　高次の関係性を構築する

- **効果（effect）**：ANOVA と同様、ばらつきを発生させる要因
- **要素（component）**：特定の予測項（X^2Z など）

4.1　モデル

$$\hat{Y} = b_1X + b_2X^2 + b_0 \tag{4.1}$$
$$\hat{Y} = b_1X + b_2X^2 + b_3Z + b_0 \tag{4.2}$$
$$\hat{Y} = b_1X + b_2X^2 + b_3Z + b_4XZ + b_0 \tag{4.3}$$
$$\hat{Y} = b_1X + b_2X^2 + b_3Z + b_4XZ + b_5X^2Z + b_0 \tag{4.4}$$

それぞれ、Y から X への回帰を Z_L, Z_M, Z_H で評価することを考えると、

1. 1 つの 2 次曲線
2. 平行な複数の 2 次曲線
3. 平行ではないが形状は等しい複数の 2 次曲線
4. 形状の異なる複数の 2 次曲線

となる。また、XZ の項が入ってくると、Y から Z への回帰を X_L, X_M, X_H で評価すると、これらの回帰直線は同一点で交わらなくなる。

4.2　ANOVA と MR（重回帰）

- ANOVA では曲線的な関係性が 3 水準以上あれば自動で含まれるのに対し、MR ではどの項を含めるべきか指定する必要がある。
- ANOVA の主効果も、直交多項式によって線形、2 次の各自由度 1 のコンポーネントに分解することができる。

4.3 単純傾斜

Y の X への回帰における単純傾斜とは、回帰式の X に関する 1 次の偏微分である。

上記の定義は、1 次の項だけ含まれたモデルにも当てはまる。例えば、式 (4.1) は

$$\hat{Y} = (b_1 + b_2X)X + b_0 \tag{4.5}$$

と変形できるが、$b_1 + b_2X$ は単純傾斜**ではない**。この場合は、

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} = b_1 + 2b_2X \tag{4.6}$$

が単純傾斜。

このとき b_1 は $X = 0$ のときの単純傾斜であるから、もし $b_1 > 0$ なら、回帰曲線は X の平均付近で正に傾いている（増加傾向にある）と判断できる。

4.4 単純傾斜の検定

単純傾斜について各 SE を算出し t 統計量を計算して検定を行うこともできる。また、X や Z について加算変換を施すことで、b_1 を単純傾斜として検定することもできる。

例えば、

$$\begin{aligned}\hat{Y} &= b_1X + b_2X^2 + b_3Z + b_4XZ + b_5X^2Z + b_0 &(4.7)\\ &= (b_1 + b_4Z)X + (b_2 + b_5Z)X^2 + b_3Z + b_0 &(4.8)\end{aligned}$$

と変換でき、Y の X に対する単純傾斜は、

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} = b_1 + b_4Z + 2(b_2 + b_5Z)X \tag{4.9}$$

となる。このとき、b_1 が $X = 0, Z = 0$ の場合の単純傾斜に相当することを考えると、ある CV_X および CV_Z における単純傾斜を知りたければ、

$$\begin{aligned}X_{CV} &= X - CV_X &(4.10)\\ Z_{CV} &= Z - CV_Z &(4.11)\end{aligned}$$

と変換した上で

$$\hat{Y} = b'_1X_{CV} + b'_2X^2_{CV} + b'_3Z_{CV} + b'_4X_{CV}Z_{CV} + b'_5X^2_{CV}Z_{CV} + b'_0 \tag{4.12}$$

を当てはめれば、

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} = b'_1 + b'_4Z_{CV} + 2(b'_2 + b'_5Z_{CV})X_{CV} \tag{4.13}$$

における b'_1 は、$X_{CV} = 0, Z_{CV} = 0$ つまり $X = CV_X, Z = CV_Z$ における単純傾斜に等しいことになる。

4.5 高次の項を含める際の注意点

高次の項同士は、センタリングがなされていても強く相関している場合があり、多重共線性を引き起こす可能性がある[12]。

ここでは独立変数の積や 2 次項を考えて曲線的な関係性を考えたが、回帰係数自体を

$$\begin{aligned}X^* &= \log X &(4.14)\\ Z^* &= Z^{1/2} &(4.15)\end{aligned}$$

[12]例えば XZ^2 と X^2Z など。

などとして 1 次の項のみ、もしくは X^*Z^* を独立変数とした回帰分析を実行することや、

$$Q = b_0 K^{b_1} L^{b_2} u \tag{4.16}$$

を

$$\log Q = \log b_0 + b_1 \log K + b_2 \log L + \log u \tag{4.17}$$

などとすることもできる。