2018 年 10 月 30 日 火曜日 出題

| 解析学演習 | 中間レポート | 担当 | 奥島 輝昭 |
|---|---|---|---|

- 提出締め切り：11 月 16 日の授業開始時
- 形式: A4 用紙に記入し，左上をホチキスでとめること

以下の問 1 ～ 9 に答えなさい。答えだけでなく導出過程も記すこと。

(問 1) $f(x) = \sqrt{x}$ を区間 $[0,\ 1]$ で考え，平均値の定理 $\dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$ $(0 < c < 1)$ における $c$ を求めよ。

(問 2) 帰納法を用いて，$n = 1, 2, 3, \dots$ のとき，
$\dfrac{d^n}{dx^n} \tan^{-1}(x) = (n-1)! \cos^n(y) \cdot \sin\left(n(y + \dfrac{\pi}{2})\right)$ $\qquad (y = \tan^{-1} x)$ が成り立つことを示せ。

(問 3) $\dfrac{d^n}{dx^n} \tan^{-1}(0) = \begin{cases} (-1)^m (2m)! & (n = 2m+1,\ m = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (n = 2m,\ m = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$ が成り立つことを示せ。

(問 4) マクローリンの定理を用いて，$0 < \theta < 1$ を満たすある $\theta$ が存在して，
$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dfrac{1}{2k+1} x^{2k+1} + R_{2n+1}$,
$R_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \cos^{2n+1} z \cdot \sin\left((2n+1)(z + \frac{\pi}{2})\right) \cdot x^{2n+1} \quad (z = \tan^{-1}(\theta x))$
が成り立つことを示せ。

(問 5) $|x| \leqq 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0$ が成り立つことを示し，
$\tan^{-1} x$ のマクローリン展開を求めよ。

(問 6) $\tan^{-1} x$ のマクローリン展開を用いて，$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ が成り立つことを示せ。

(問 7) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ を，$|x| < 1$ でマクローリン展開せよ。

(問 8) $x < 0$ のとき，$1 + x < e^x < 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(問 9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$ の値を求めよ。