44名

20　　年 7月 20日 金 曜日（1 － 2 時限）実施

線形代数	第5章テスト	担当	奥島 輝昭

- 所要時間：40 分
- 持ち込み：すべて可（教科書、ノート、プリント、高校の教科書等）

I. $A = \begin{pmatrix} -16 & 30 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}$ として以下の問いに答えよ。

(問 1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(問 2) A を対角化せよ。

(問 3) A^n を求めよ。

(問 4) e^A を求めよ。

$$\begin{array}{r} 16 \\ 17 \\ \hline 112 \\ 16 \\ \hline 272 \end{array}$$

II. (問 5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} -16-\lambda & 30 \\ -9 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0$　　$(\lambda+16)(\lambda-17)+30\cdot 9 = \lambda^2-\lambda-\overbrace{16\times 17}^{272}+270 = \underbrace{\lambda^2-\lambda-2}_{(\lambda+1)(\lambda-2)} = 0$

$\lambda = -1, 2$

$\lambda=-1$ のとき $\begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$x-2y=0 \to x=2y=2c$　$y=c$

$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 2c \\ c \end{pmatrix} = \underline{c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda=2$ のとき $\begin{pmatrix} -18 & 30 \\ -9 & 15 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ $x=\frac{5}{3}y=5c'$　$y=3c'$

$\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 5c' \\ 3c' \end{pmatrix} = \underline{c'\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}$

(2) $P = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{6-5}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおき

$A = PDP^{-1}$ となる。

(3) $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2(-1)^n & 5\cdot 2^n \\ (-1)^n & 3\cdot 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6(-1)^n - 5\cdot 2^n & -10(-1)^n + 10\cdot 2^n \\ 3(-1)^n - 3\cdot 2^n & -5(-1)^n + 6\cdot 2^n \end{pmatrix}$

(4) $e^{A} = Pe^{D}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 5e^{2} \\ e^{-1} & 3e^{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6e^{-1} - 5e^{2} & -10e^{-1} + 10e^{2} \\ 3e^{-1} - 3e^{2} & -5e^{-1} + 6e^{2} \end{pmatrix}$

$\frac{1-\lambda^2}{2} + 4 = \frac{5-\lambda^2}{2}$

(5) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{① = ① - \frac{1-\lambda}{2}③}{=} \begin{vmatrix} 0 & -(1-\lambda) & \boxed{2 + \frac{(1-\lambda)(1+\lambda)}{2}} \\ 0 & (1-\lambda) & 2 \\ 2 & 2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$

$= 2 \times (-)^{3+1} \begin{vmatrix} -(1-\lambda) & \frac{5-\lambda^2}{2} \\ (1-\lambda) & 2 \end{vmatrix} = 2(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \frac{5-\lambda^2}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ③=③+①

$= 2(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & \frac{5-\lambda^2}{2} \\ 0 & \frac{9-\lambda^2}{2} \end{vmatrix} = 2(1-\lambda)\frac{-(9-\lambda^2)}{2} = -(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+3)$

$\underline{\lambda = 1,\ 3,\ -3}$

$\lambda = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \to \begin{matrix} x = -c \\ y = c \end{matrix}$

$\vec{x_1} = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\lambda = 3$ のとき

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ $\vec{x_2} = \begin{pmatrix} c' \\ c' \\ c' \end{pmatrix} = \underline{c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\lambda = -3$ のとき

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$x = -\frac{z}{2} = -c''$

$y = -\frac{z}{2} = -c''$

$z = 2c''$

よって $\vec{x_3} = \begin{pmatrix} -c'' \\ -c'' \\ 2c'' \end{pmatrix} = \underline{c''\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

学科	年次	学籍番号		氏名	