

## 微分積分学II 最終講義日（再試験）

担当：奥島輝昭

- 試験実施日：2019年1月22日（火5-6時限）
- 所要時間：80分
- 持ち込み：すべて可（教科書，自筆ノート，プリント，参考図書）
- 添付する解答用紙（4枚）
- 添付する計算用紙（なし）

問 A, B, C, D において、選択した問題の番号を丸で囲み、その問題について解答せよ。解答は、解答用紙に記入すること。

A. 以下の問から1問を選択し答えなさい。解答は途中計算も記すこと。

(問1) つぎの極限を調べよ。

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^3}$$

(問2)  $z = \log(x + y)$  に関して、 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , および  $\Delta z$  を求めよ。

(問3)  $u = x + y$ ,  $v = x - y$  とする。偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

を、 $u, v$  に関する偏微分で表し、偏微分方程式の解が、 $f, g$  を二回連続微分可能な関数として

$$z = f(x + y) + g(x - y)$$

と書けることを示せ。

(問4) 座標変換  $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

に関して、以下の問いに答えよ。

(a)  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  を  $\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \theta}$  を用いて表せ。

(b)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  を  $r, \theta$  に関する偏微分で表せ。

**B.** 以下の問から1問を選択し答えなさい。解答は途中計算も記すこと。

(問5)  $z = \log(x + y)$  の全微分を求めよ。

(問6)  $x^3 - 2xy + y^3 = 0$  から定まる陰関数  $y(x)$  の極値を求め、 $x = 1$ ,  $y = 1$  における接線の方程式を求めよ。

(問7)  $z = x^3 - y^3 - 3x + 12y$  に関して、極大、極小もしくは鞍点（サドル）をもつ点があれば、その座標と極値を求めよ。

(問8) ラグランジュの未定乗数法を用いて、 $x^2 + y^2 = 1$  の条件下で、 $f(x, y) = y - x^2$  の停留値を求めよ。これらの停留値が、それぞれ、極大、極小のどちらかを判定せよ。

C. 以下の問から1問を選択し答えなさい。解答は途中計算も記すこと。

(問9)  $\iint_D y dx dy$  ( $D : x^2 \leq y \leq 2x$ ) の値を求めよ。

(問10)  $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left( \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \cos y^2 dy \right) dx$  の値を求めよ。

(問11)  $\iint_D (2x + y) dx dy$  ( $D : 0 \leq x + y \leq 2, 0 \leq x - y \leq 1$ ) の値を求めよ。

(問12)  $\iint_D x^3 y^4 e^{-x-y} dx dy$  ( $D : 0 \leq x, y \leq \infty$ ) の値を求めよ。

(問13)  $\iiint_D \cos(x + y + z) dx dy dz$  ( $D : 0 \leq x, y, z \leq \frac{\pi}{2}$ ) の値を求めよ。

(問14)  $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$  ( $D : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ) の値を求めよ。

**D.** 以下の問から 1 問を選択し答えなさい。解答は途中計算も記すこと。

(問 15)  $y' = xy^2, \quad y(0) = -1$

(問 16)  $y' - \frac{y}{x} = \log x$  の一般解を求めよ。必要ならば、 $\int \frac{\log x}{x} dx = \frac{(\log x)^2}{2} + C$  ( $C$  は任意定数) を用いてよい。

(問 17)  $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

(問 18)  $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(問 19)  $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(問 20)  $y'' - y' - 2y = x^2 + x$  の一般解を求めよ。

(問 21)  $y'' - 4y = e^x$  の一般解を求めよ。

(問 22)  $y'' + y = \cos 2x$  の一般解を求めよ。