学籍番号:　　　　　　　　　　名前:

(問 1) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で次のように定義された 2π 周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (|x| < \pi/2) \\ 1 & (|x| \geqq \pi/2) \end{cases}$$

のフーリエ級数を求めよ。

(解答例) $f(x)$ は偶関数なので、フーリエ級数は $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ となる。ここで、$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$ である。$n \geqq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2\cdot\cos nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1\cdot\cos nx dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(2\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(2\frac{\sin\frac{\pi}{2}n - \sin 0}{n} + \frac{\sin n\pi - \sin\frac{\pi}{2}n}{n}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n} \end{aligned}$$

である。ここで、$\sin 0 = \sin n\pi = 0$ ($n \in$ 整数) を用いた。一方、

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(2\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3$$

である。以上から、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{n}\cos nx \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} - \cdots\right) \end{aligned}$$

ここで、

$$\sin\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 1 & (n = 1, 5, 9, \dots) \\ -1 & (n = 3, 7, 11, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

を用いた。

(問 2) 関数

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 < x < \pi/2) \\ 1 & (\pi/2 \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$$

を 2π 周期に拡張した周期函数のフーリエ正弦級数展開を求めよ。

(解答例) フーリエ正弦級数展開は、$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ である。ここで、$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$ である。b_n $(n = 1, 2, \dots)$ は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} 2 \cdot \sin nx dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(2\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{\cos\frac{\pi}{2}n}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0 & (n = 4, 8, 12, \dots) \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{4}{n\pi} & (n = 2, 6, 10, \dots) \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n} + 0 + \frac{1}{n}\right) = \frac{6}{n\pi} & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\cos\frac{\pi}{2}n = \begin{cases} 1 & (n = 0, 4, 8, \dots) \\ -1 & (n = 2, 6, 10, \dots) \\ 0 & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}, \quad \cos n\pi = \begin{cases} -1 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 1 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

を用いた。以上から、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6}{\pi}\sin x + \frac{4}{2\pi}\sin 2x + \frac{6}{3\pi}\sin 3x + 0 \\ &\quad + \frac{6}{5\pi}\sin 5x + \frac{4}{6\pi}\sin 6x + \frac{6}{7\pi}\sin 7x + 0 \\ &\quad + \frac{6}{9\pi}\sin 9x + \dots \end{aligned}$$

である。

(問 3) 関数 x $(-\pi < x < \pi)$ のフーリエ級数展開は、

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

である。この展開式を用いて以下の問いに答えよ。

(1) $\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - \cdots)$ を示せ。

(2) 展開式を項別積分することで、x^2 のフーリエ級数展開を求めよ。

(解答例)

(1) x $(-\pi < x < \pi)$ は区分的に滑らかなので、与えられたフーリエ級数展開式は $x = \pi/2$ で成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} - \ldots\right)\\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)\end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots\right)$$

である。

(2) 与えられたフーリエ級数展開式は区分的になめらかなので、項別積分可能である。両辺を $x = 0$ から x まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^x x dx &= 2\left(\int_0^x \sin x dx - \int_0^x \frac{\sin 2x}{2} dx + \int_0^x \frac{\sin 3x}{3} dx - \cdots\right)\\ \text{左辺} &= \frac{x^2}{2}\\ \text{右辺} &= 2\left([-\cos x]_0^x - \frac{[-\cos 2x]_0^x}{2^2} + \frac{[-\cos 3x]_0^x}{3^2} - \cdots\right)\\ &= 2\left(1 - \cos x - \frac{1 - \cos 2x}{2^2} + \frac{1 - \cos 3x}{3^2} - \cdots\right)\\ &= 2\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) - 2\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)\end{aligned}$$

よって、

$$x^2 = 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right) - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

となる。この定数項は $a_0/2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx/2 = \pi^2/3$ であたえられるので、

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)\\ \frac{\pi^2}{3} &= 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots\right)\end{aligned}$$

である。

(問 4) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ で次のように定義された 2π 周期関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < \pi/2) \\ 0 & (|x| \geqq \pi/2) \end{cases}$$

の複素フーリエ級数を求めよ。

(解答例) 複素フーリエ級数展開は、$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ である。ここで、フーリエ係数 c_n $(n \neq 0)$ は

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \cdot e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\left[e^{-inx}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{-in} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-in\pi/2} - e^{in\pi/2}}{-in} \\ &= \frac{1}{n\pi}\frac{e^{in\pi/2} - e^{-in\pi/2}}{2i} \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

であり、

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dx = \frac{1}{2}$$

以上より、

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} &+ \frac{1}{\pi}e^{ix} - \frac{1}{3\pi}e^{3ix} + \dots \\ &+ \frac{1}{\pi}e^{-ix} - \frac{1}{3\pi}e^{-3ix} + \dots \end{aligned}$$