

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
**«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Институт механики и математики им. Н. И. Лобачевского

Направление подготовки: 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Выпускная квалификационная работа  
**Решение задачи о течении в разветвлённой сосудистой  
системе с использованием одномерной модели кровотока**

Студентка 4 курса  
группы 05–001  
Мымрина Е. В.

Научный руководитель  
к.ф.-м.н. Калинин Е. И.  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

Казань – 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Актуальность работы . . . . .	3
1.2	Обзор методов моделирования на основе одномерной постановки .	5
1.3	Цель работы . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>8</b>
2.1	Определяющая система уравнений . . . . .	8
2.1.1	Осреднение по сечению сосуда . . . . .	8
2.1.2	Сохранение массы . . . . .	11
2.1.3	Сохранение количества движения . . . . .	11
2.1.4	Учёт вязкого трения . . . . .	14
2.1.5	Замыкающее соотношение для давления . . . . .	15
2.2	Характеристический анализ . . . . .	15
2.3	Граничные условия и условия на разрывах . . . . .	17
2.3.1	Выходное условие . . . . .	17
2.3.2	Входное условие . . . . .	17
2.3.3	Условие в точке разветвления . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Методика численного решения</b>	<b>20</b>
3.1	Аппроксимация по пространству. Метод разрывных конечных эле- ментов . . . . .	20
3.2	Аппроксимация по времени . . . . .	21
3.3	Итерационная расчётная схема . . . . .	21
3.3.1	Вычисление противопотоковых значений фуункций . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Верификация и результаты расчётов</b>	<b>25</b>
4.1	Течение в однородном одиночном сосуда . . . . .	25
4.2	Течение в одиночном сосуда с разрывными свойствами . . . . .	28
4.3	Течение в сосуда с разветвлением . . . . .	30
4.4	Течение в системе сосудов . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>39</b>

Условные обозначения	40
Список литературы	42

# 1 Введение

## 1.1 Актуальность работы

Кровь – соединительная ткань внутри организма, она состоит из форменных клеток (эритроцитов, лейкоцитов, тромбоцитов), а так же из водного раствора белков и свёртывающих веществ – плазмы. Кровь под воздействием периодических сокращений сердечной мышцы движется по замкнутой системе сосудов, циркулируя от сердца и обратно. С точки зрения гидродинамики кровотока представляет из себя пульсирующее с низкой частотой течение мелкодисперсной суспензии в замкнутой системе каналов кругового сечения с эластичными стенками, осложнённое локальными эффектами ламинарно-турбулентного перехода.

Кровь, двигаясь по сосудам, испытывает сопротивление движению со стороны сосудов и из-за своей вязкости. Поэтому сердце вбрасывает кровь в сосуды под большим давлением. В аорте давление колеблется в диапазоне от 16 кПа при систоле до 10 кПа при диастоле. По мере движения крови давление в судистом русле падает. Скорость течения крови так же зависит от диаметра сосуда, удалённости сосуда от сердца, а также фазы сердечного цикла. Максимальных значений скорость достигает в аорте (до  $\sim 1$  м/с), а минимальных – в капиллярах (около нуля).

Сложность разветвления кровеносных сосудов и вариации их размеров создают значительные трудности при решении задачи о течении крови. Математическое моделирование помогает пониманию сложностей кровотока. Эти модели позволяют описывать и строить физические процессы, происходящие в биологических системах. Это может быть полезно при выявлении, прогрессировании и лечении различных сердечно-сосудистых заболеваний, а так же в проектировании и оптимизации медицинских устройств.

Кровь состоит из взвешенных в плазме (её рассматривают, как ньютоновскую жидкость) клеток крови, которые действуют друг на друга с некоторыми силами. Самые детальные методы моделирования заключаются в построении модели течения этих клеток как отдельных частиц в вязкой жидкости. описа-

ние такого типа методов можно подробнее изучить в [4; 5; 11]. В некоторых моделях [1; 8] пренебрегают относительно мелкими и редкими – тромбоцитами (2–4 мкм в количестве 150–300 миллионов на 1 см<sup>3</sup>) и лейкоцитами (4–20 мкм в количестве 4.5 – 11 миллионов на 1 см<sup>3</sup>), а моделируют лишь самые крупные из них – эритроциты (7 – 8 мкм в количестве 3.8 до 5.6 миллиардов клеток на 1 см<sup>3</sup>). Метод ресурсоёмкий, поэтому можно моделировать лишь небольшие участки кровотока (порядка 1 см и меньше) без ветвлений либо с одним - двумя ветвлениями. Так же такая модель плохо реагирует на любые изменения в исходных данных, ведь свойства эритроцитов могут значительно изменяться, а модель строится под определённую их конфигурацию [21]. Соответственно, возникает необходимость прибегнуть к некоторым упрощениям постановки.

Можно не описывать индивидуальные частицы взвешенные в плазме, а обобщить их до вязкой неньютоновской жидкости с определёнными характеристиками, в которых отразить эффекты, связанные с наличием взвешенных в растворе частиц. Такой подход называют трехмерным моделированием. Принципиальным моментом в формулировке такой постановки является выбор модели вязкости: например, основанные на зависимости вязкости от гематокрита [19], модель Максвелла [18], модель Кассона [12]. Однако эти модели всё-таки требуют значительных вычислительных ресурсов, поэтому имеет смысл провести дальнейшее упрощение.

Наиболее простыми с точки зрения вычислительных ресурсов являются так называемые одномерные модели кровотока, в которых пространственные характеристики осредняются по поперечному сечению, а трёхмерная дифференциальная задача сводится к одномерной. В некоторых случаях эти модели используют для постановки граничных условий в многомерных задачах. Но так же они могут и целиком моделировать кровеносную систему. Такой подход к моделированию требует меньших вычислительных ресурсов, но при этом почти не уступает в точности другим моделям. О сравнении одномерных и многомерных моделей можно прочитать в [6].

**Вывод об актуальности** Таким образом, несмотря на значительное увеличение доступных вычислительных мощностей и активное развитие детальных методов численного моделирования гемодинамики, до сих пор полное описание

системы кровообращения подробными моделями остаётся невозможным, а прямое или косвенное использование одномерных моделей для таких задач является безальтернативным выбором. Поэтому развитие таких упрощённых моделей является актуальной задачей.

## 1.2 Обзор методов моделирования на основе одномерной постановки

Принципиальным вопросом в построении одномерной модели кровотока является выбор зависимости давления в сосуде от площади его поперечного сечения.

Можно использовать  $N$  интегральных условий сохранения Бернулли выражающих непрерывность полного давления  $P$ :

$$\frac{\rho u_k^2}{2} + p_k(A_k) = P.$$

Иногда для моделирования сопротивления потоку в местах стыка используют условия перепада давлений с учётом сопротивления

$$p_k(A_k(t, x_k)) - p^l(t) = \varepsilon_k R_k^l A_k(t, x_k) u_k(t, x_k),$$

которое выражается через коэффициент  $R_k^l$ . Здесь  $p^l$  – давление в точке бифуркации [1].

Но общим способом замыкания системы является явное представление алгебраической зависимости между давлением в сосуде и его площадью. Прямой подход к получению отношения  $p(A)$  включает в себя точное одновременное измерение давления и площади в разные моменты времени. Но такой метод не всегда удобен в реальности. Качественный анализ физических экспериментов подтверждает, что функция  $p(A)$  должна быть монотонной S-подобной кривой. Такая кривая удовлетворительно описывает состояния как круглого, так и эллиптического сечения. На рис. 1 показана зависимость давления в сосуде от его площади.

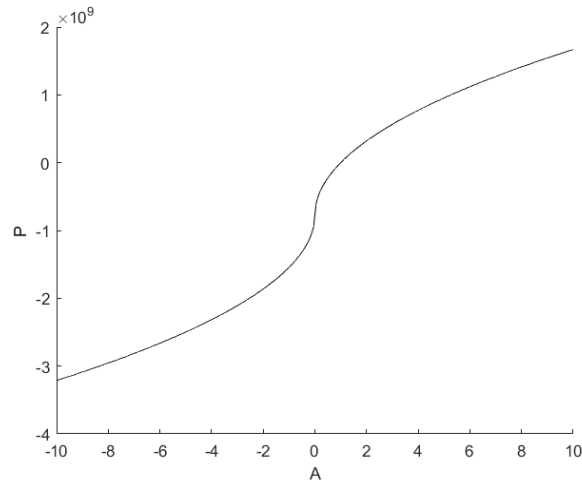


Рис. 1: График зависимости давления от поперечного сечения внутри сосуда

Для решения дифференциальных уравнений нужно выбрать подходящий метод пространственной аппроксимации области расчёта. Ниже приведём обзор наиболее часто используемых методов аппроксимации.

**Метод конечных разностей** предполагает дискретизацию области на сетку точек и последующую аппроксимацию производных в управляющих уравнениях с помощью конечных разностей. Этот метод часто используется в сочетании со схемой интегрирования по времени для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Метод конечных элементов** [17] – популярная численная схема. Он особенно хорошо подходит для моделирования сложных геометрий, таких как запутанная сеть артерий в человеческом теле. Однако он может быть вычислительно дорогим, особенно для больших и сильно разветвленных сетей.

**Метод быстрого преобразования Фурье** [14] – это подход, использующий быстрое преобразование Фурье для решения одномерных уравнений кровотока. Этот метод конкурирует с традиционными пространственно-временными численными схемами как по устойчивости, так и по скорости. Он может точно и эффективно обрабатывать сложные геометрические формы и высокоамплитудные волны. Однако он требует дальнейшего развития для учета вязкоупругих эффектов и потери массы крови из-за мелких ветвей.

**Метод разрывных конечных элементов Галеркина** [22] – это еще одна численная схема, она сочетает в себе преимущества методов конечной раз-

ности и конечных элементов, обеспечивая баланс между точностью и вычислительными затратами. Однако он может быть более сложным в реализации и может потребовать дополнительных вычислительных ресурсов для сопоставления расчетной и физической областей.

**Метод конечных объемов с локальным временным шагом высокого порядка** [13] предполагает решение управляющих уравнений с помощью метода конечных объемов высокого порядка и схемы локального шага по времени. Этот метод может быть особенно полезен для моделирования течения в сложных геометрических системах.

### 1.3 Цель работы

Целью настоящей работы является:

- разработка методики расчёта течения крови в одномерном приближении,
- написание компьютерной программы для расчёта произвольной сети сосудов,
- подбор оптимальных расчётных параметров: шагов по времени, пространству, количеству внутренних итераций,
- верификация расчётной программы путём сравнения с численными и аналитическими результатами расчётов задачи в характерных модельных постановках от других авторов,
- иллюстрация работы программы на примере сложной сети сосудов. Влияние изменения эластичных свойств одного из сосудов на интегральные характеристики течения во всей системе.



## 2 Постановка задачи

### 2.1 Определяющая система уравнений

Для вывода определяющей системы уравнений будем следовать подходу [9] с некоторыми упрощениями.

#### 2.1.1 Осреднение по сечению сосуда

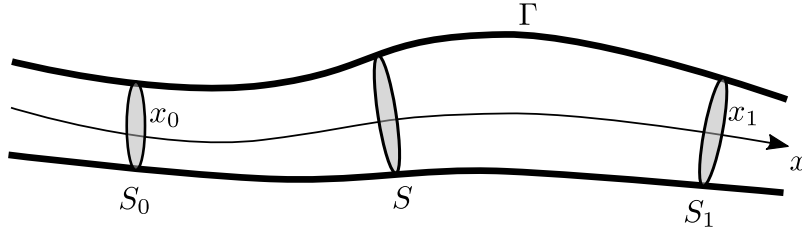


Рис. 2: Элементарный объём  $V$

Будем рассматривать течение в сосудах с продольной координатой  $x$ . Определим элементарный объём  $V$  как отрезок сосуда при  $x \in [x_0, x_1]$  (см. рис. 2). Границей этого объема будут входное и выходное сечения  $S_0$ ,  $S_1$  и боковая граница  $\Gamma$ :  $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup \Gamma$ .

Пусть величина  $g$  переносится в этом элементарном объёме несжимаемой жидкостью со скоростью  $\mathbf{u}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Тогда распишем изменения по времени  $t$  интеграла от этой величины  $g$  согласно теореме Рейнольдса:

$$\frac{d}{dt} \int_V g d\mathbf{x} = \int_V \frac{\partial g}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial V} g v_n ds \quad (2)$$

Здесь  $v_n$  – нормальная скорость объема  $V$ . Будем считать, что объём не совершает продольного движения. То есть

$$v_n|_{S_0, S_1} = 0. \quad (3)$$

Определим среднее по сечению значение как

$$\bar{g} = \frac{1}{|S|} \int_S g ds. \quad (4)$$

Тогда, с учётом того, что координаты  $x_0, x_1$  не зависят от времени (как следствие из (3)), левая часть (2) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V g d\mathbf{x} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial |S| \bar{g}}{\partial t} dx. \quad (5)$$

Далее рассмотрим второе слагаемое в правой части (2). Обозначим за  $w_n$  – скорость объема относительно  $u_n$  – скорости жидкости:

$$w_n = v_n - u_n. \quad (6)$$

$$\int_{\partial V} v_n g ds = \int_{\partial V} w_n g ds + \int_{\partial V} u_n g ds. \quad (7)$$

Для первого слагаемого в правой части (7) справедливо

$$\int_{\partial V} w_n g ds = \int_{\Gamma} w_n g ds + \int_{S_0} w_n g ds + \int_{S_1} w_n g ds = \dots$$

расписывая  $w_n$  по (6) с учётом (3)

$$= \int_{\Gamma} w_n g ds - \int_{S_0} u_n g ds - \int_{S_1} u_n g ds = \dots$$

подставляя определение (4) для произведения  $u_n g$

$$= \int_{\Gamma} w_n g ds - (|S| \overline{u_n g})_{x_0} - (|S| \overline{u_n g})_{x_1} = \dots$$

заменим нормальную скорость  $u_n$  скоростью  $u_x$  по направлению координаты  $x$  с учётом направления внешней нормали в сечениях  $x_0, x_1$

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds + (|S|\overline{u_x g})_{x_0} - (|S|\overline{u_x g})_{x_1} = \dots$$

применяя формулу интегрирования по частям

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} dx.$$

Второе слагаемое в правой части (7) распишем по формуле Гаусса-Остроградского с учётом условия неразрывности (1):

$$\int_{\partial V} u_n g \, ds = \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla g \, d\mathbf{x}$$

Собирая равенство (2) с учётом полученных соотношений получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial |S|\bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} \right) dx = \int_V \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g \right) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} w_n g \, ds$$

Далее, пользуясь произвольностью выбора продольной координаты снимем интегрирование по  $x$ :

$$\frac{\partial |S|\bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} = \int_{S(x)} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g \right) ds + \oint_{L(x)} w_n g \, dl. \quad (8)$$

Здесь  $L$  – сечение поверхности  $\Gamma$  по фиксированной продольной координате  $x$ .

### 2.1.2 Сохранение массы

Для получения закона сохранения массы рассмотрим общее соотношение (8) при  $g = 1$ :

$$\frac{\partial |S|}{\partial t} + \frac{\partial |S| \bar{u}_x}{\partial x} = \oint_{L(x)} w_n dl.$$

Интеграл в правой части – есть расход жидкости через боковые стенки сосуда. В настоящей работе мы ограничимся случаем непроницаемых стенок сосуда:

$$w_n|_{\Gamma} = 0,$$

Тогда этот интеграл будет равен нулю. Для величин в левой части введём обозначения:  $a = |S|$  – площадь поперечного сечения сосуда, равная  $a = \pi R^2$ .  $u = \bar{u}_x$  – средняя по сечению продольная скорость жидкости. Тогда закон сохранения масс примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial ua}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

### 2.1.3 Сохранение количества движения

Рассмотрим уравнения (8) при  $g = u_x$ . С учётом введённых обозначений получим

$$\frac{\partial au}{\partial t} + \frac{\partial a \bar{u}_x^2}{\partial x} = \int_{S(x)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x \right) ds + \oint_{L(x)} w_n u_x dl. \quad (10)$$

Для последующих выкладок сделаем допущение, что форма профиля скорости вдоль всей длины сосуда постоянна (не зависит от координаты  $x$ ) и радиально-симметрична (зависит только от нормированной радиальной координаты  $r' = r/R$ ). То есть  $u_x$  представима в виде

$$u_x(x, s) = u(x)U(r'), \quad (11)$$

где  $U$  – нормированный профиль скорости.

Правую часть распишем с использованием ранее выведенного закона со-

хранения масс (9):

$$\frac{\partial au}{\partial t} + \frac{\partial a\bar{u}_x^2}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial au}{\partial x} + \frac{\partial a\bar{u}_x^2}{\partial x} = \dots$$

добавим и вычтем слагаемое  $\partial au^2/\partial x$

$$= a\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial au}{\partial x} + \frac{\partial au^2}{\partial x} + \frac{\partial a(\bar{u}_x^2 - u^2)}{\partial x} = \dots$$

разложим третье слагаемое и проведём сокращения

$$= a\frac{\partial u}{\partial t} + au\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a(\bar{u}_x^2 - u^2)}{\partial x} = \dots$$

воспользуемся упрощением (11)

$$= a\frac{\partial u}{\partial t} + au\frac{\partial u}{\partial x} + (\bar{U}^2 - 1)\frac{\partial au^2}{\partial x}. \quad (12)$$

Упрощение первого интеграла в правой части будем проводить на основе общего уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости, записанного в проекции на ось  $x$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u_x, \quad (13)$$

где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность и  $\mu$  – вязкость жидкости. Будем считать, что продольные изменения скорости намного меньше, чем поперечные. Это справедливо, если справедливы условия прилипания к боковым стенкам канала. Тогда можно записать

$$\nabla^2 u_x = \nabla_S^2 u_x + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \approx \nabla_S^2 u_x,$$

за  $\nabla_S^2$  обозначен двумерный оператор Лапласа, действующий в плоскости  $S$ . Подставим это приближение в выражение (13) и проинтегрируем по плоскости

$S$ :

$$\int_S \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x \right) ds = -\frac{1}{\rho} \int_S \frac{\partial p}{\partial x} ds + \frac{\mu}{\rho} \int_S \nabla_S^2 u_x ds = \dots$$

будем считать, что давление слабо меняется поперёк канала:  $p(x, s) \approx \bar{p}(x)$

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \int_S \nabla_S^2 u_x ds = \dots$$

и раскроем второй интеграл с помощью интегрирования по частям

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \oint_L \frac{\partial u_x}{\partial n_l} dl = \dots$$

в радиально-симметричном упрощении, при котором  $n_l = r$

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu R}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R(x)} = \dots$$

воспользуемся упрощением (11) для вычисления последней производной

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu}{\rho} u \frac{\partial U}{\partial r'} \Big|_{r'=1} \quad (14)$$

Запишем уравнение (10) с учётом (12), (14):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\bar{U}^2 - 1}{a} \frac{\partial a u^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu}{\rho} \frac{u}{a} \frac{\partial U}{\partial r'} \Big|_{r'=1}. \quad (15)$$

Для проведения дальнейших упрощений необходимо допущение о форме профиля  $U$ . В простейшем случае можно считать его постоянным:  $U = 1$ . Тогда выражение (15) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (16)$$

Таким образом, мы получили уравнение движения при полном пренебрежении силами вязкого трения о стенки сосуда.

#### 2.1.4 Учёт вязкого трения

Рассмотрим радиальный профиль скорости  $U$ , который задаётся параметрическим (зависящим от параметра  $\zeta$ ) соотношением (см. [9; 16])

$$U_0(r') = \frac{\zeta + 2}{\zeta} \left(1 - (r')^\zeta\right). \quad (17)$$

Случай  $\zeta = 2$  соответствует установившемуся профилю Пуазейля. Более высокие значения  $\zeta$  отражают неустойчивый характер течения. Профили для некоторых  $\zeta$  представлены на рис. 3.

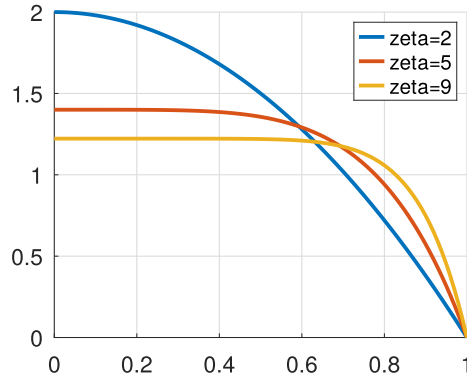


Рис. 3: Нормированный профиль скорости в зависимости от  $\zeta$

Выражения из (15), содержащие нормированную скорость, будут равны:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial r'} \right|_{r'=1} &= -(\zeta + 2), \\ \bar{U} &= 1, \end{aligned}$$

тогда само уравнение сохранения количества движения примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - K_\nu \frac{u}{a}, \quad (18)$$

где влияние вязкости описывается коэффициентом

$$K_\nu = \frac{2\pi\mu(\zeta + 2)}{\rho}.$$

### 2.1.5 Замыкающее соотношение для давления

Постановка задачи включает в себя два уравнения (9), (18) для трёх неизвестных  $u$ ,  $a$ ,  $p$ . Таким образом, необходимо ещё одно, замыкающее соотношение. Обычно таким соотношением служит зависимость давления от площади поперечного сечения  $p(a)$ . Следуя [7] запишем эту зависимость в приближении равновесного состояния (давление мгновенно подстраивается под изменение площади сечения сосуда) при условии нулевого внешнего давления:

$$p(a) = \frac{\beta}{A} \left( \sqrt{a} - \sqrt{A} \right). \quad (19)$$

Здесь  $A$  – нейтральный радиус сосуда, а коэффициент  $\beta$  вычисляется в приближении тонкой, несжимаемой, однородной, изотропной, эластичной мембраны с толщиной  $h$  и модулем упругости  $E$ :

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h.$$

## 2.2 Характеристический анализ

Запишем полученную систему гиперболических уравнений (9), (18) в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}, \quad (20)$$

где введены вектора:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} au \\ \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_\nu \frac{u}{a} \end{pmatrix}.$$



Такая система может быть приведена к характеристическому виду (см. например [15])

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Правая часть здесь получена при условии  $\mu = 0$ .  $w_{1,2}$  – переменные Римана, а  $\lambda_{1,2}$  – скорость переноса этих переменных, которые определены как

$$w_{1,2} = u \pm 4(c - c_0), \quad \lambda_{1,2} = u \pm c.\tag{22}$$

через скорость переноса возмущений  $c(a)$ :

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\beta}{A\rho}} a^{\frac{1}{4}}.\tag{23}$$

Эта скорость зависит от площади сечения сосуда (чем сосуд более растянут, тем эта скорость больше). Значение скорости в начальный момент определено как  $c_0 = c(A)$ . Отметим, что по построению значения  $w_{1,2}$  равны нулю в состоянии покоя при  $a = A, u = 0$ . Этот факт будет использован при постановке граничных условий.

В рассматриваемой здесь задаче кровотока характерные скорости течения крови не превышают 1 м/с в самых крупных сосудах, а скорости распространения возмущений имеют на порядок большие характерные значения, то  $c \gg u$ , значит

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Из этого можно сделать вывод, что переменные Римана  $w_1$  и  $w_2$  строго однонаправлены и распространяются в противоположенные по отношению друг к другу стороны. Для иллюстрации этого эффекта смотри тестовую задачу из пункта 4.2.

Зависимость естественных переменных от переменных Римана запишется как

$$u = \frac{w_1 + w_2}{2}, \quad a = \left( \frac{w_1 - w_2}{8} + c_0 \right)^4 \left( \frac{2\rho A}{\beta} \right)^2.\tag{24}$$

То есть естественные переменные содержат комбинацию однонаправленных переменных. Отсюда можно сделать вывод, что возмущения по естественным переменным могут распространяться в обе стороны расчётной области. Этот факт следует иметь ввиду при формулировке граничных условий.

## 2.3 Граничные условия и условия на разрывах

Поскольку процесс описывается гиперболической системой из двух уравнений (21), то он требует задания граничного условия на тех границах, на которых скорость распространения искомых величин противоположна внешней к границе нормали. Переменные  $w_1$  и  $w_2$  распространяются в противоположенные стороны, то есть на границе следует задавать только одну из этих переменных. Для условности будем считать границы, на которых требуется задания  $w_1$  входными, а остальные – выходными.

### 2.3.1 Выходное условие

На выходной границе поставим требования беспрепятственного выхода через границу. То есть на ней не должно формироваться никаких возмущений. На практике это означает задание

$$w_2|_{out} = 0. \quad (25)$$

### 2.3.2 Входное условие

Во входном сечении сетки сосудов обычно задают либо входной профиль давления  $p_{in}(t)$  либо общий расход  $q_{in}(t)$ . Чтобы свести эти физичные условия к условиям на переменные Римана также зададим требование неотражаемости входной границе. Подобно тому, как на выходной границе мы требовали, чтобы приходящее возмущение от  $w_1$  не провоцировало исходящее возмущение  $w_2$ , так и на входной границе потребуем, чтобы приходящее возмущение от  $w_2$  не провоцировало возмущений для  $w_1$ . При этом, в отличии от выходной границе, мы не можем просто занулить  $w_1$ ; возмущения в  $w_1$  должны генерироваться за счёт физичных граничных условий –  $q_{in}$  либо  $p_{in}$ . Таким образом, для постановки

неотражающих условий на входной границе, нам нужно вычислить значение  $w_1$  исходя из  $w_2 = 0$  и условия на физическую переменную.

**Случай заданного давления** Пусть задана  $p_{in}$ . Значит, пользуясь формулами (19), (23), можно вычислить  $c_{in}$ . Тогда из определения (22) запишем

$$\begin{aligned} w_1|_{in} &= u + 4(c_{in} - c_0), \\ 0 &= u - 4(c_{in} - c_0), \end{aligned}$$

откуда получим

$$w_1|_{in} = 8u(c_{in} - c_0). \quad (26)$$

**Случай заданного расхода** Пусть задана  $q_{in}$ . Зануляя  $w_2$  запишем систему уравнений относительно неизвестных  $a_{in}$ ,  $u_{in}$ :

$$\begin{cases} 0 = u_{in} - 4(c(a_{in}) - c_0), \\ q_{in} = u_{in}a_{in}. \end{cases}$$

Проводя преобразования придём к нелинейному уравнению относительно неизвестного  $a_{in}$ :

$$q_{in} = 4a_{in} (c(a_{in}) - c_0)$$

Решив это уравнение и найдя  $c_{in} = c(a_{in})$ , можно воспользоваться формулой (26).

### 2.3.3 Условие в точке разветвления

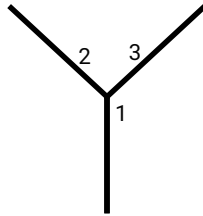


Рис. 4: Схема точки разветвления сосудов

Рассматриваемые области расчёта включаюи точки, где сосуды разветвляются. Будем рассматривать только простые разветвления, когда к одной точке

подходит три сосуда (см. схему на рис. 4). Гиперболический характер рассматриваемой системы говорит о том, что для сопряжения течений в этих трёх сосудах необходимо задать три условия сопряжения.

Первое из этих условий очевидно следует из сохранения расходов:

$$a_1 u_1 = a_2 u_2 + a_3 u_3. \quad (27)$$

Другие два условия связаны с соотношениями для давления. В простейшем случае можно задать равенство полного давления  $P = p + u^2/2$ :

$$P_1 = P_2 = P_3. \quad (28)$$

Это условие моделирует идеальное прохождение разветвления без потерь давления. Более сложные условия, моделирующие потери давления в зависимости от угла поворота сосудов при разветвлении, рассматриваются в работе [7].

## 3 Методика численного решения

### 3.1 Аппроксимация по пространству. Метод разрывных конечных элементов

Аппроксимацию системы (20) будем проводить методом разрывных конечных элементов [3]. Следуя стандартной процедуре этого метода домножением исходное уравнение на базисную функцию, проинтегрируем по конечному элементу  $E$  применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$\sum_j M_{ij} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_j + \sum_j T_{ij} \mathbf{F}_j + \bar{\mathbf{F}} \phi_i|_{x_l}^{x_r} = \sum_j M_{ij} \mathbf{B}_j.$$

Здесь  $M_{ij}$ ,  $T_{ij}$  – коэффициенты матрица масс и переноса,

$$M_{ij} = \int \phi_i \phi_j dx, \quad T_{ij} = - \int \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx.$$

Эти матрицы являются блочно-диагональными (или сводятся к блочнодиагональным в результате перенумерации узлов сетки). Значение блока этих матрицы при применении линейных и квадратичных Лагранжевых базисных функций имеют вид:

$$M_{ij}^e = \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad T_{ij}^e = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$
$$M_{ij}^e = \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} 4/15 & -1/15 & 2/15 \\ -1/15 & 4/15 & 2/15 \\ 2/15 & 2/15 & 16/15 \end{pmatrix} \quad T_{ij}^e = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 2/3 \\ 1/6 & -1/2 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

где  $\Delta x$  – разбиение области по пространству.  $\phi_i$  – базисная функция с глобальным индексом  $i$ , а  $x_l$ ,  $x_r$  – левая и правая точки элемента, которому принадлежит базисная функция  $\phi_i$  (по методике разрывных элементов каждый базис лежит внутри единственного элемента). Величина  $\bar{\mathbf{F}}$  – противопотоковое значение  $\mathbf{F}$  в выбранной точке.

## 3.2 Аппроксимация по времени

Дискретизацию по времени с шагом  $\Delta t$  будем проводить согласно  $\theta$  - схеме:

$$\sum_j M_{ij} \frac{\hat{\mathbf{U}}_j - \mathbf{U}_j}{\Delta t} + \left( \sum_j T_{ij} \mathbf{F}_j + \bar{\mathbf{F}} \phi_i \Big|_{x_l}^{x_r} \right)^\theta = \left( \sum_j M_{ij} \mathbf{B}_j \right)^\theta, \quad (29)$$

где символом  $\hat{\cdot}$  обозначено значение на следующем временном слое и введена  $\theta$  – степень неявности схемы как

$$(Y)^\theta = \theta \hat{Y} + (1 - \theta) Y.$$

При  $\theta = 0$  мы получаем чисто явную схему, при  $\theta = 1$  – чисто неявную, а выбор  $\theta = 1/2$  даёт схему Кранка-Николсон второго порядка точности.

В случае  $\theta > 0$  выражение (29) является нелинейным относительно неизвестного вектора  $\mathbf{U}$ . Для его решения требуется линеаризация.

## 3.3 Итерационная расчётная схема

Линеризацию будем проводить за счёт итерационного процесса на временном слое. Обозначим верхним индексом  $\cdot^n$  значение на прошлой (известной) итерации, а  $\cdot^{n+1}$  – значение на текущей (подлежащей определению) итерации. Тогда окончательно расчётная схема на итерации внутри временного слоя на

основе дискретизованного соотношения (29) примет вид

$$\sum_j M_{ij} \frac{a_j^{n+1} - a_j}{\Delta t} + \theta \sum_j T_{ij} a_j^{n+1} u_j^n = \dots \quad (30)$$

$$= -(1 - \theta) \sum_j T_{ij} a_j u_j - ((\theta q(\bar{a}^n, \bar{u}^n) + (1 - \theta) q(\bar{a}, \bar{u})) \phi_i|_{x_l}^{x_r}$$

$$p_j^{n+1} = \frac{\beta}{A} \left( \sqrt{a_j^{n+1}} - \sqrt{A} \right) \quad (31)$$

$$\sum_j M_{ij} \frac{u_j^{n+1} - u_j}{\Delta t} + \theta \sum_j \left( \frac{T_{ij} u_j^n}{2} + \frac{K_\nu M_{ij}}{a_j^{n+1}} \right) u_j^{n+1} = \dots \quad (32)$$

$$= -(1 - \theta) \sum_j \left( \frac{T_{ij} u_j}{2} + \frac{K_\nu M_{ij}}{a_j} \right) u_j$$

$$- \theta \sum_j T_{ij} \frac{p_j^{n+1}}{\rho} - (1 - \theta) \sum_j T_{ij} \frac{p_j}{\rho}$$

$$- \frac{1}{\rho} ((\theta P(\bar{a}^n, \bar{u}^n) + (1 - \theta) P(\bar{a}, \bar{u})) \phi_i|_{x_l}^{x_r}$$

На первом этапе решается уравнение (30) и находятся значения  $a$  на текущей итерации. Затем по этому значению определяются значения давления согласно (31) и потом решается уравнение для скорости (32).

Итерации на временном слое продолжаются, пока невязка уравнений (30), (31) при замене  $n + 1$  на  $n$  не станет меньше заданного  $\epsilon = 10^{-8}$ .

### 3.3.1 Вычисление противопотоковых значений функций

Вычисление значений  $\bar{a}$ ,  $\bar{u}$ , которые используются для вычисления численных потоков в уравнениях (30), (32) будем проводить на основе подхода [15].

Как было отмечено ранее, естественные переменные содержат в себе разнонаправленные возмущения, поэтому не могут быть использованы напрямую для вычисления противопотоковых значений  $\bar{u}$ ,  $\bar{a}$ . Поэтому используем переменные Римана. Будем рассматривать соединения двух типов: двух и трёх элементов. Их локальная нумерация представлена на рис. 5.

С учётом выбранного направления движения  $w_1$  слева направо вычислим

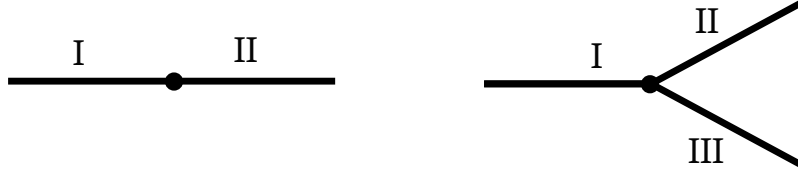


Рис. 5: Локальная нумерация элементов при рассмотрении сочленения

противопотоковые значения переменных Римана как

$$\bar{w}_1 = u_I + 4(c_I - c_0), \quad \bar{w}_2 = u_{II} - 4(c_{II} - c_0), \quad \bar{w}_3 = u_{III} - 4(c_{III} - c_0).$$

Значения  $u, c_{I,II,III}$  - есть значение функций в точке сочленения, взятое со стороны соответствующего элемента. Эти значения берутся с известного итерационного слоя.

При рассмотрении линейного сочленения (правый из рисунков 5) далее пользуясь определением (22) запишем уравнения

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{u}_1 + 4(\bar{c}_1 - c_0), \\ \bar{w}_2 &= \bar{u}_2 - 4(\bar{c}_2 - c_0) \end{aligned} \tag{33}$$

В случае, если физические свойства ( $\beta$  и  $A$ ) не терпят разрыв в точке сочленения, то  $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ ,  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$  и эта система может быть разрешена с помощью выражений (24). Иначе её следует дополнить двумя уравнениями сохранения: расхода и полного давления

$$\begin{aligned} q(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= q(\bar{u}_2, \bar{a}_2), \\ P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_2, \bar{a}_2) \end{aligned} \tag{34}$$

Нелинейная система (33), (34) может быть решена итерационным решателем (например, методом Ньютона).

В случае разветвления сосудов (правая схема на рис. 5), аналогичная система уравнений, дополненная условиями разрешимости на основе (27), (28) примет вид



$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \bar{u}_1 + 4(\bar{c}_1 - c_0), \\
\bar{w}_2 &= \bar{u}_2 - 4(\bar{c}_2 - c_0), \\
\bar{w}_3 &= \bar{u}_3 - 4(\bar{c}_3 - c_0), \\
q(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= q(\bar{u}_2, \bar{a}_2) + q(\bar{u}_3, \bar{a}_3), \\
P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_2, \bar{a}_2), \\
P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_3, \bar{a}_3).
\end{aligned} \tag{35}$$

## 4 Верификация и результаты расчётов

### 4.1 Течение в однородном одиночном сосуде

Верификацию численного метода начнём с простейшей задачи о переносе единственного импульса (волны давления) в одиночном сосуде. Задача решалась в двух постановках, заимствованных из работы [2]. В первом варианте рассматривалась невязкая жидкость, во втором использовалось значение  $\mu = 4\text{мПа}\cdot\text{с}$ . Физические параметры задачи представлены в таблице ниже

параметр	вариант 1	вариант 2
длина, м	10.0	
$R$ , см	1.0	
$E$ , МПа	0.4	
$h$ , мм	1.5	
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1050	
$\mu$ , мПа·с	0	4
$\zeta$	9	

В качестве входных граничных условий задавалось значение расхода, соответствующее экспоненциальному пику на значении  $q = 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$  в момент  $t = 0.05 \text{ с}$ :

$$q_{in}(t) = 10^{-6} \exp(-10^4(t - 0.05)^2).$$

Таким образом, максимальная скорость течения жидкости составляла около 3 мм/с. При этом скорость распространения возмущений составляла  $c_0 \approx 6.17 \text{ м/с}$ .

Известно [2], что решением рассматриваемой задачи в варианте 1 является единственная волна давления с постоянной высотой  $p_{max}$ . В варианте 2 эта волна давления будет уменьшаться с продвижением по сосуду из-за вязкой диффузии. При этом пиковое значение этой волны будет равно

$$p_{max,visc}(x) = p_{max} \exp\left(-\frac{(\zeta + 2)\pi\mu x}{\rho c_0 A}\right). \quad (36)$$

Для представленных выше постановок была произведена серия расчётов с различными шагами по времени и пространству с использованием различных схем дискретизации по времени (разных значений  $\theta$ ) и по пространству (разных степеней использованных конечных элементов).

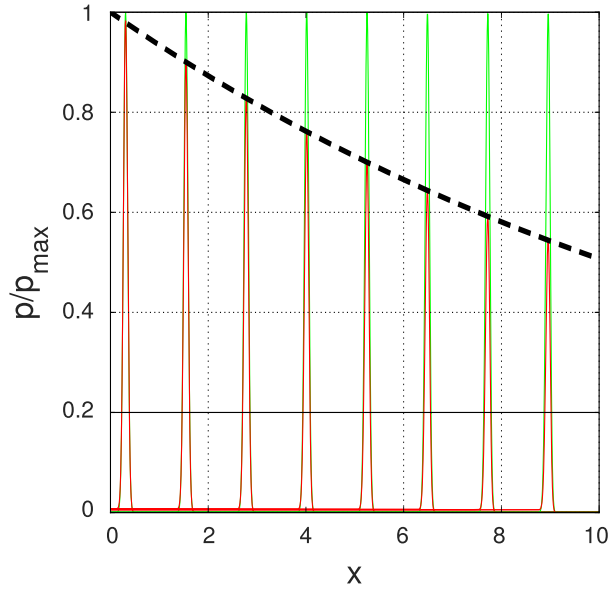
Добиться устойчивого решения с использованием элементов высоких порядков точности не удалось. Таким образом, все дальнейшие вычисления будут проводиться на линейных Лагранжевых элементах.

Результаты расчёты с использованием разных  $\theta$  схем в сравнении с результатами [2] представлены на рис. 6. Для этих расчётов использовался шаг по пространству  $\Delta x = 0.01$  и шаг по времени  $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$  с, который обеспечивал устойчивый счёт для схем  $\theta = 0.5, 1.0$ . Число Куранта, рассчитанное по скорости  $c_0$  было равно  $\text{CFL} = 0.12$ . Для явной схемы не удалось подобрать такой шаг по времени, при котором решение бы не расходилось (на рис. 6d приведены результаты для  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ ). Неявная схема (рис. 6c), хоть и демонстрировала условно устойчивое поведение, но оказалась подвержена большой численной диффузии. Результаты расчётов по схеме Кранка–Николсон (рис. 6b) показали хорошее согласование как с точным решением, так и с численным решением из [2], представленным на рис. 6a.

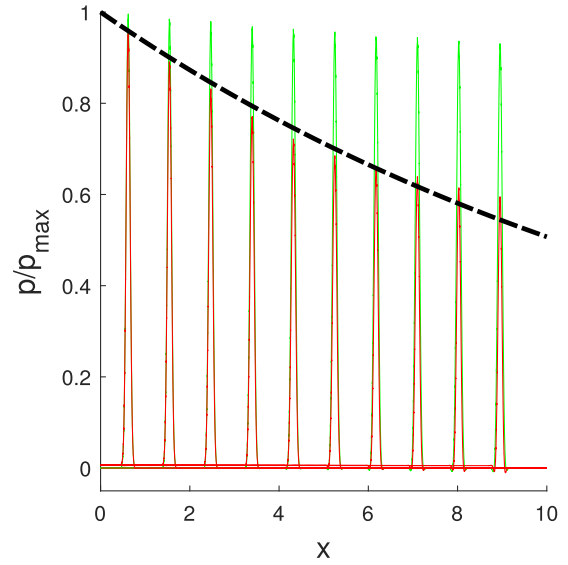
По результатам рассмотрения этого тестового случая были выработаны следующие рекомендованные параметры расчётной схемы:

- Дискретизация по пространству линейными Лагранжевыми конечными элементами;
- Схема дискретизации по времени с  $\theta = 0.5$  (Кранка–Николсон);
- Выбор шага по пространству  $\Delta x$  в  $\sim 30$  раз меньше, чем характерная длина волны;
- Выбор шага по времени  $\Delta t$  исходя из числа Куранта, рассчитанного по скорости  $c_0$ ,  $\text{CFL} \approx 0.1$ .

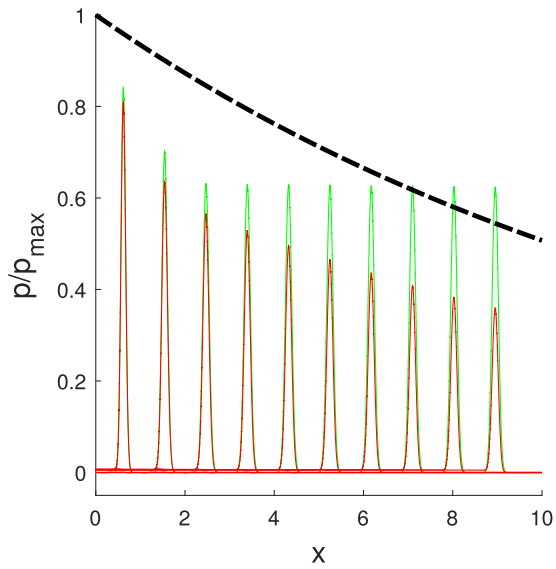
Эти параметры будут использоваться для всех дальнейших расчётов.



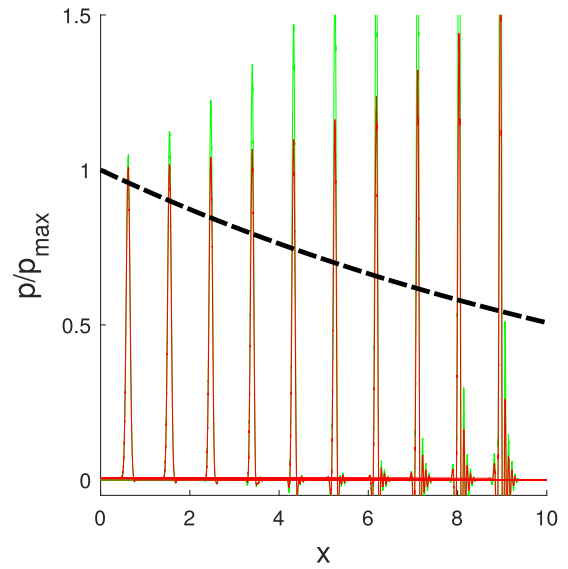
(a) Результаты из [2]



(b)  $\theta = 0.5$



(c)  $\theta = 1$



(d)  $\theta = 0$

Рис. 6: Положение скачка давления в различные моменты времени: зелёная линия – расчёт без вязкости, красная линия – расчёт с  $\mu=4\text{мПа}$ , чёрный пунктир – падение пика давления с продвижением фронта (36)

## 4.2 Течение в одиночном сосуде с разрывными свойствами

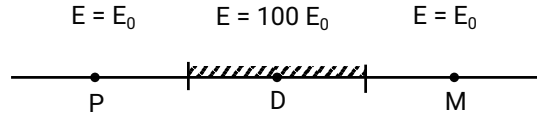


Рис. 7: Схема сосуда и расположение контрольных точек

В следующем тесте рассмотрим течение в сосуде, имеющем жёсткую вставку, модуль Юнга в которой на два порядка превышает значение в остальном сосуде [15]. Схема сосуда и расположение контрольных точек представлены на рисунке 7. Использовались следующие параметры расчёта

параметр	основной сосуд	вставка
длина, м	$2 \times 5$	5
$R$ , м	0.5	
$E$ , кПа	150	15000
$h$ , м	1	
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1	
$\mu$ , Па с	0	

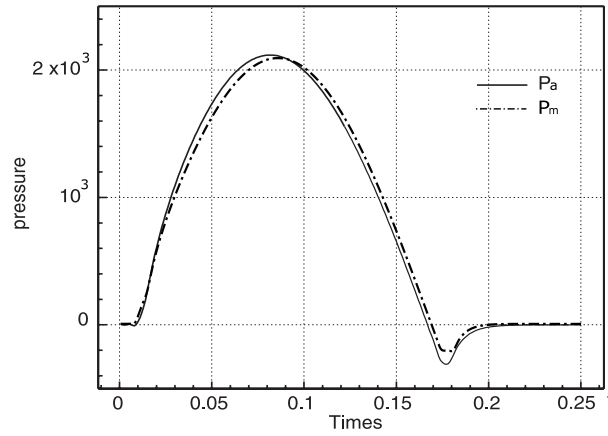
На входной границе задавалось давление

$$p(t) = \begin{cases} 2000 \sin(2\pi t/T), & t \leq T/2, \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$$

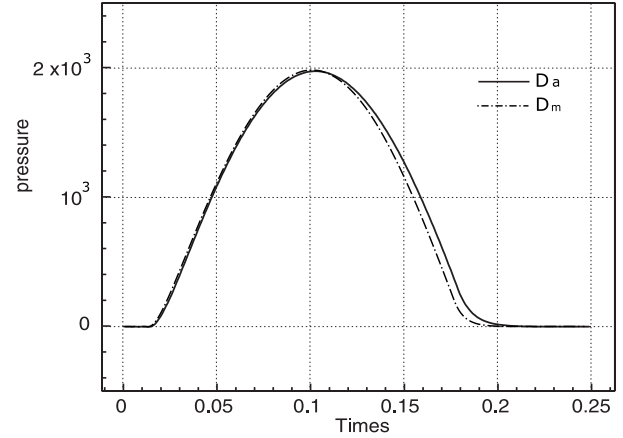
со значением периода  $T = 0.33$ .

В результате скорость распространения возмущений в основной части канала составляла  $c_0 \approx 450$ , а во вставки была больше на порядок. Расчёт проводился при выборе  $\Delta x = 0.5$ ,  $\Delta t = \Delta x \cdot 10^{-5} = 10^{-5}$ . Такой выбор обеспечивал CFL = 0.1 для максимального  $c_0$ .

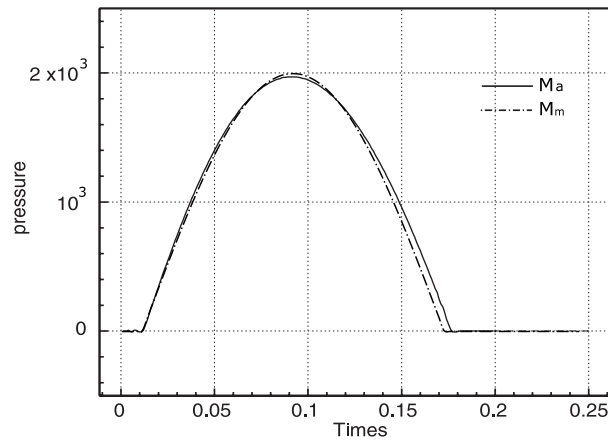
Результирующие значение давления в контрольных точках сосуда представлены на рис. 8 в сравнении с данными [15]. Наблюдается удовлетворительное совпадение полученных кривых.



(a) Контрольная  $P$  точка перед вставкой



(b) Контрольная точка  $D$  в вставке



(c) Контрольная точка  $M$  после вставки

Рис. 8: Сравнение значения давления в контрольных точках. Сплошная линия – наш расчёт, пунктирная – результаты [15]

Можно отметить, что через контрольную точку  $M$  проходит ровно одна поступательная волна давления, о чём свидетельствует резкие границы у кривых, приведённых на рис. 8c. Через точки  $P$  и  $D$  помимо основной поступательной проходят несколько отражённых волн, поэтому правая граница волны на рисунках 8a, 8b имеет заметные искажения.

### 4.3 Течение в сосуде с разветвлением

Рассматривается тестовая задача [20] о течении в разветвлении сосудов. Расчётные свойства сосудов до разветвления (сосуд 1) и после разветвления (сосуды 2) представлены ниже

параметр	сосуд 1	сосуды 2
длина, м	0.2	0.2
$R$ , мм	5.0	$5.0/\sqrt{6}$
$E$ , кПа	108	264.5
$h$ , мм	0.1	
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1000	
$\mu$ , Па с	0	

В качестве граничного условия использовалось фиксированное входное значение площади поперечного сечения  $a = A$  и зависимость скорости от времени вида:

$$u_{in}(t) = 0.01 \exp(-5000(t - 0.05)^2).$$

Таким образом, на вход подаётся единичная волна с пиковым значением скорости 0.01 м/с в момент времени 0.05 с.

Расчёты проедены на сетке из 120 конечных элементов (что соответствовало шагу по пространству  $\Delta x = 0.005$  м) с шагом по времени  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$  с. При выбранных параметрах сосудов скорость возмущений составляла  $c_0 = 1.2$  м/с и  $c_0 = 2.94$  м/с для первого и вторых сосудов соответственно. То есть число Куранта составляло  $CFL \approx 0.15$ .

Продвижение волны давления и скорости представлены на рис. 9. Поступательная волна повышенного давления и скорости формируется от входного сечения (рис. 9a) и движется вперёд до точки разветвления (рис. 9b). В этой точке происходит отражение части волны назад, после чего наблюдаются уже две волны (рис. 9c): поступательная волна продолжает движение по выходным сегментам графа, а возвратная волна повышенного давления и пониженной (отрицательной) скорости движется к входному сечению.

Чтобы отделить поступательные волны от возвратных был произведён пе-

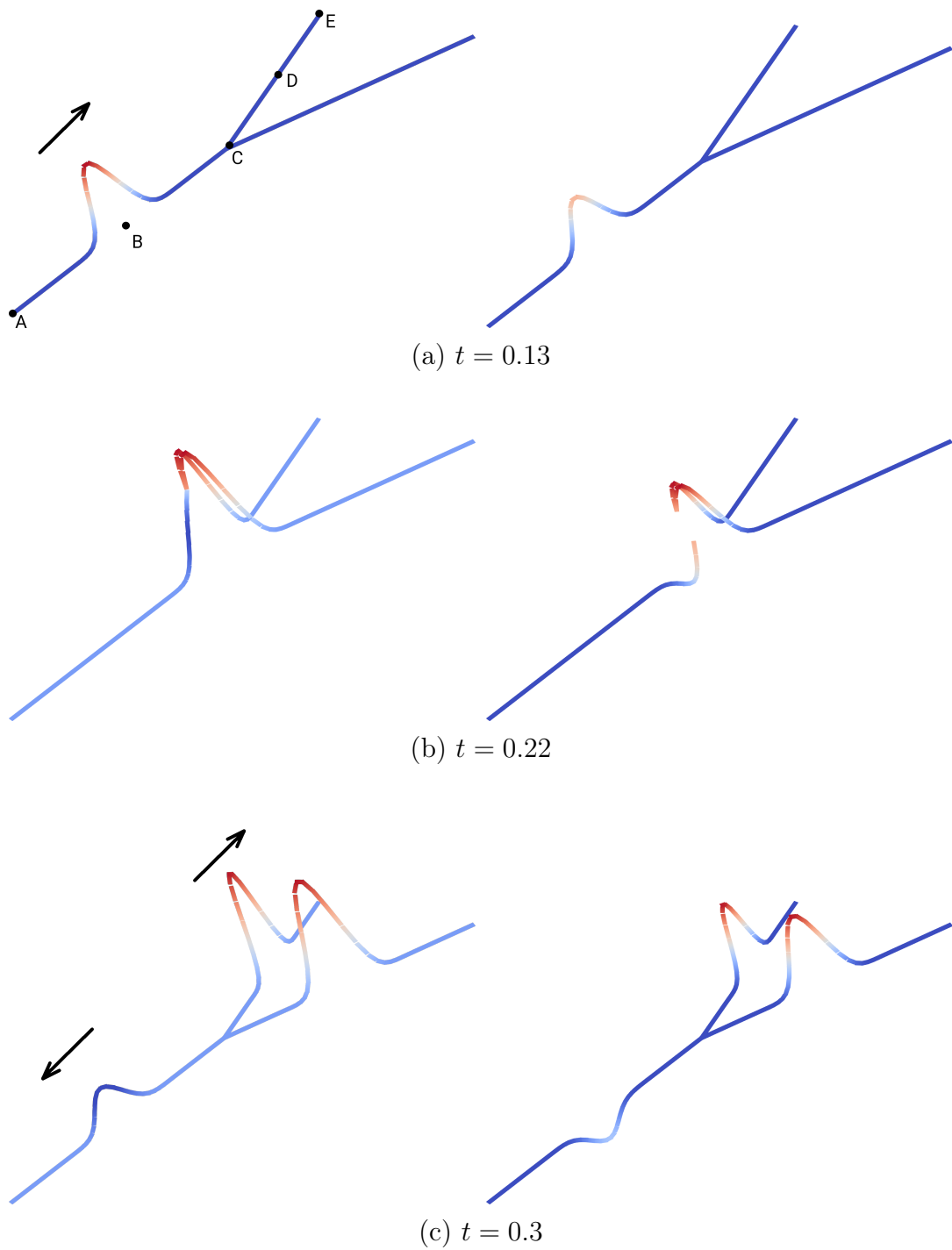


Рис. 9: Значение давления (слева) и скорости (справа) на различные моменты времени

решёт расчётных параметров в переменные Римана  $w_1$ ,  $w_2$ . Их эволюция представлена на рис. 10. Как и следует из математического смысла этих переменных, каждая из них содержит волны только одного направления. Видно, что волна  $w_2$  формируется в момент, когда поступательная волна  $w_1$  достигает точки раз-



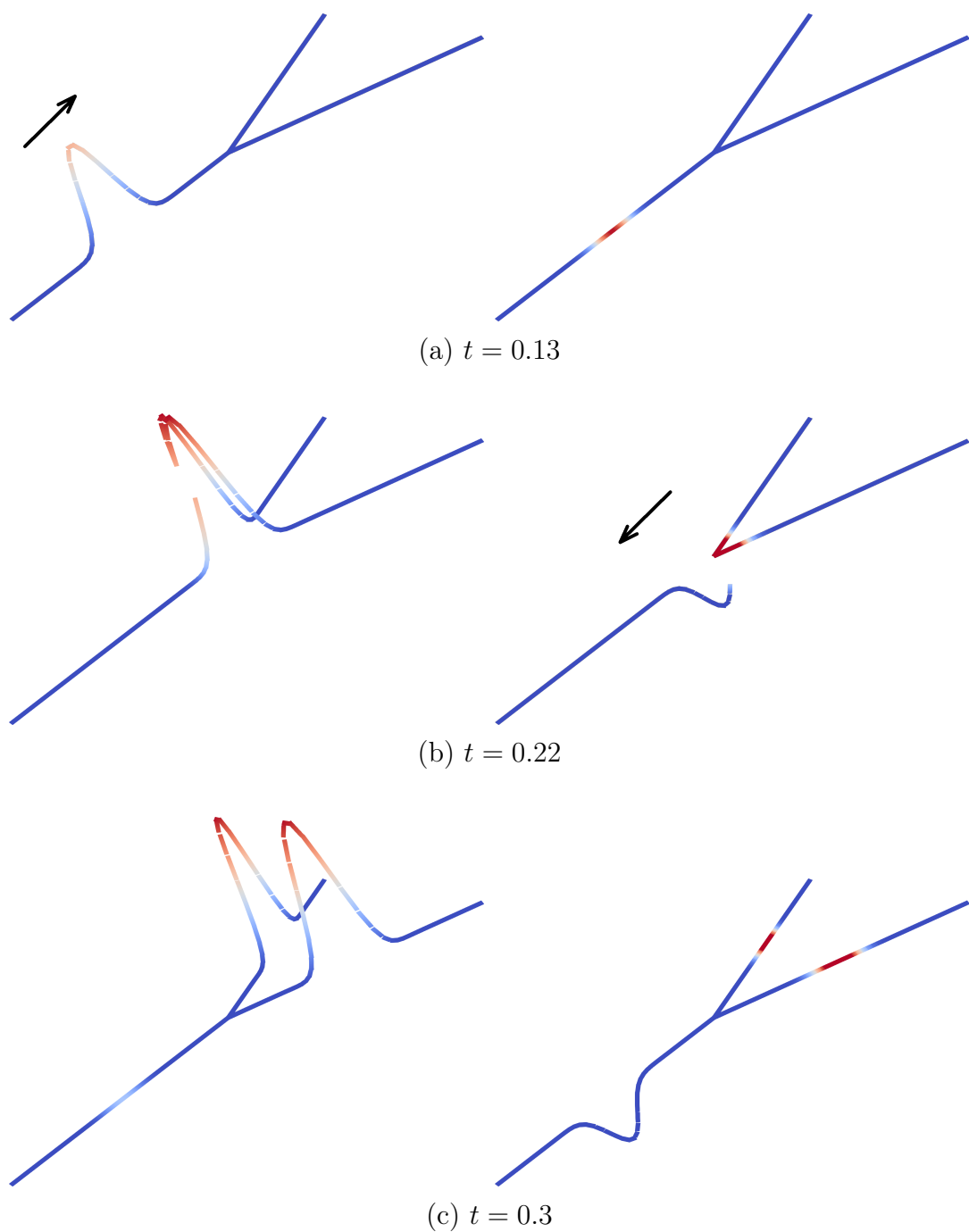


Рис. 10: Значение переменной  $w_1$  (слева) и  $w_2$  (справа) на различные моменты времени

ветвления (рис. 10b), после чего волны  $w_1$  и  $w_2$  двигаются в противоположенных направлениях (рис. 10c).

Для сравнение полученных в результате наших расчётов данные с результатами из работы [20] были построены графики значения давления в контрольных точках (расположение контрольных точек смотри на рис. 9a). Наложение

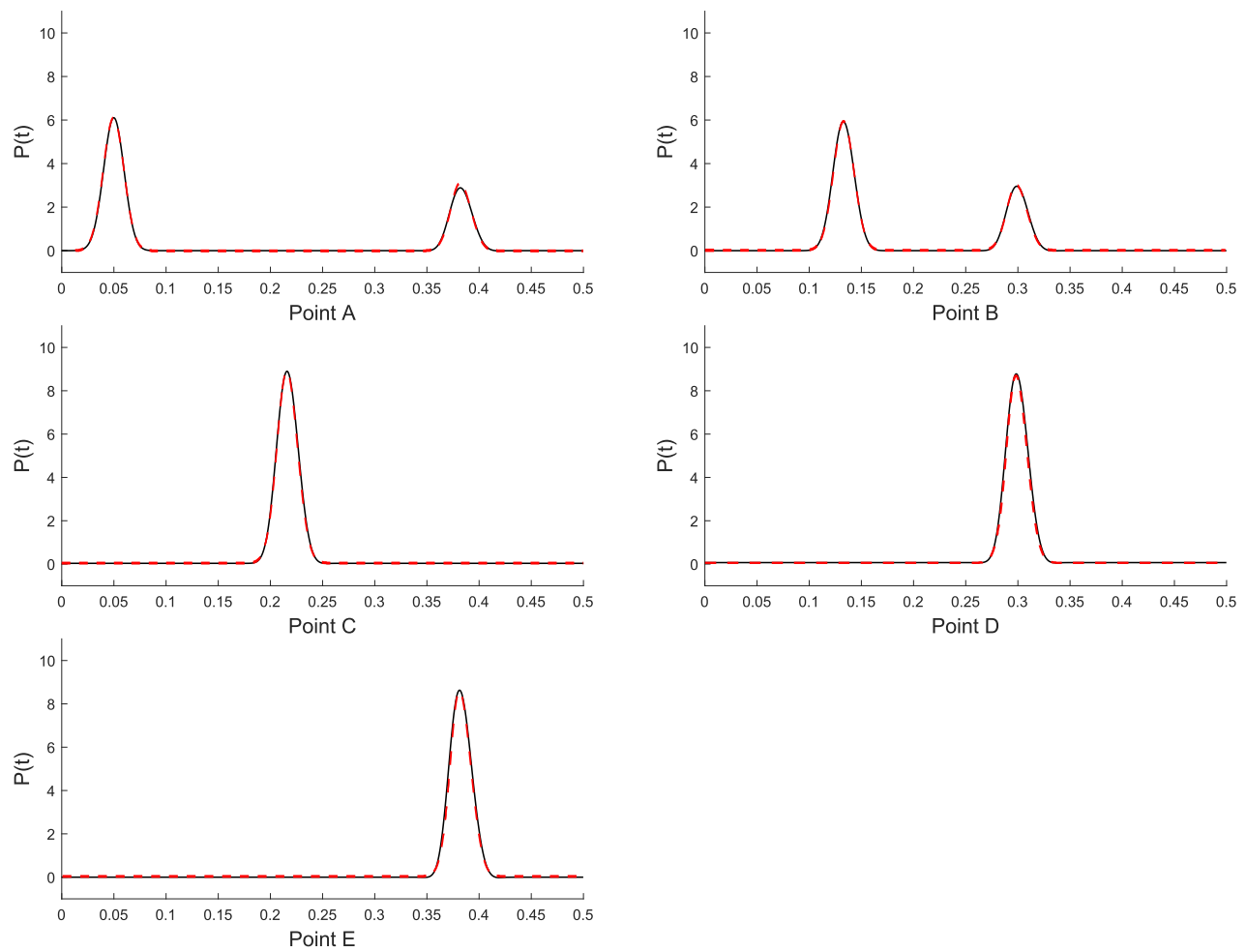


Рис. 11: Сравнение значения давления в контрольных точках. Сплошная линия – наш расчёт, пунктирная – результаты [20]

графиков, демонстрирующее хорошее совпадение результатов, представлено на рис. 11. На графиках для точек А и В видно, что через соответствующие контрольные точки проходит две волны. Сначала поступательная, потом отражённая возвратная. Тут же следует отметить, что отсутствие других возмущений говорит о корректной работе неотражающих граничных условий.

## 4.4 Течение в системе сосудов

Для иллюстрации применения численного метода рассмотрим задачу о течении в системе из семи сосудов, представленных на рис. 12.

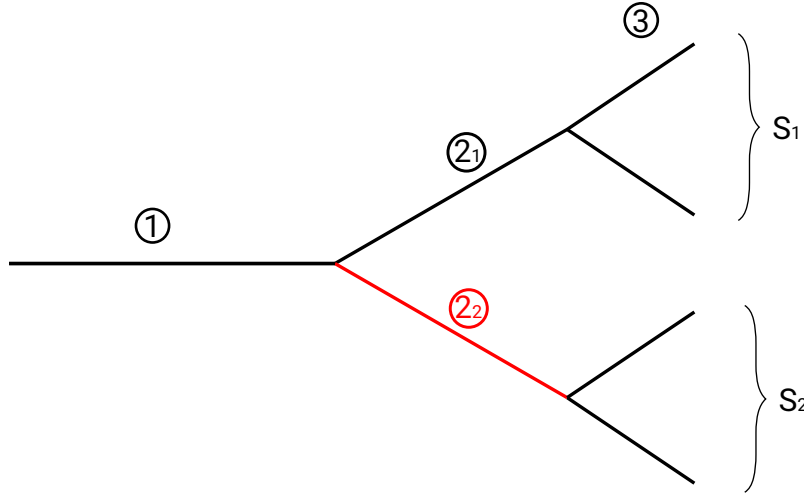


Рис. 12: Система из семи сосудов

Сосуды поделены на три группы: в группе 1 один крупный сосуд, в группе 2 два средних сосуда и в группе 3 четыре малых сосуда. Базовые свойства этих сосудов приведены в таблице (37).

параметр	сосуд 1	сосуды 2	сосуды 3
длина, м	1.0	0.8	0.5
$R$ , мм	5.0	4.0	3.0
$E$ , кПа	100		
$h$ , мм	1.5		
$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1050		
$\mu$ , Па с	0		

(37)

Упругие свойства нижнего из промежуточных сосудов 2.2 (на рисунке 12 обозначен красным цветом) в зависимости от варианта расчёта изменяются согласно вариантам, представленным в таблице 38.

параметр	вариант I	вариант II	вариант III	вариант IV
$R$ , мм	4.0	4.0	$4.0/\sqrt{2}$	$4.0/\sqrt{2}$
$E$ , кПа	100	1000	100	1000

(38)

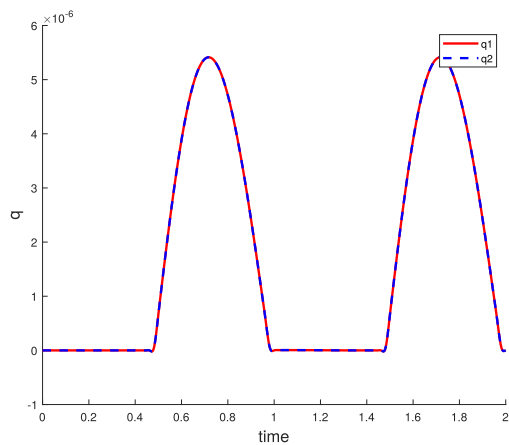
Такие изменения характерны для склеротических поражений сосудов, при которых увеличивается жёсткость стенки и уменьшается эффективный радиус сосуда [10]. Вариант I будем считать базовым, в варианте II увеличен модуль упругости сосуда, в варианте III уменьшен радиус сосуда, вариант IV является суммой изменений из вариантов II и III.

На входе устанавливается периодическое значение расхода  $q_{in}(t)$  с максимальным значением в 20мл/сек:

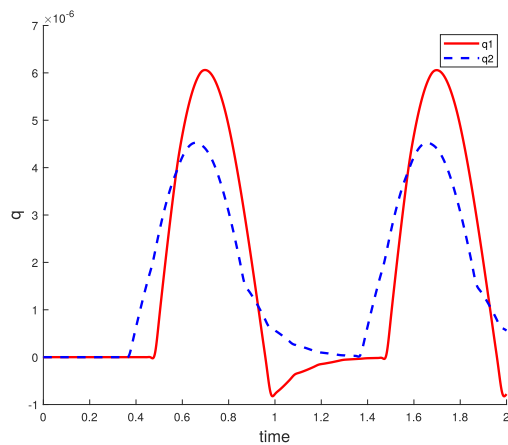
$$q_{in}(t) = 2 \cdot 10^{-5} \max(0, \sin(2\pi t/T)).$$

Рассматривались два периода  $T$ , соответствующие частоте сердцебиения *bpm* в 60 (спокойный пульс) и 180 (высокий пульс) ударов в минуту. В качестве выходного параметра мониторятся выходные значения расхода в сечениях, обозначенных на рис. 12 как  $S_1$  (неповрежденная сторона системы) и  $S_2$  (повреждённая сторона системы).

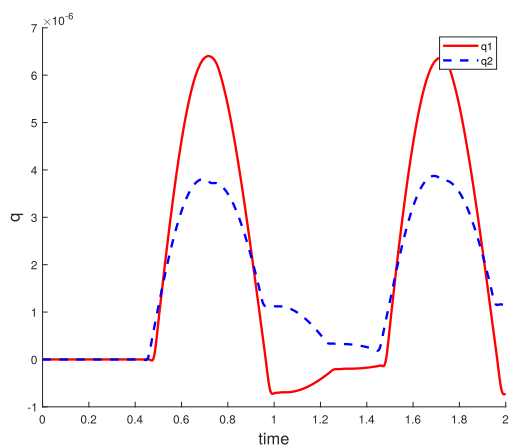
Результаты для значения  $bpm = 60$  приведены на рис. 13, а для  $bpm = 180$  – на рис. 14. На рис. 15 приведено значение скорости течения на различные моменты времени. Видно, что оба типа повреждения значительно уменьшают количество жидкости, протекающей через повреждённую сторону, при этом также происходит изменения величины расхода и для неповреждённой стороны. В частности, там наблюдаются потоки, текущие в обратном направлении ( $u < 0$ ). Для  $bpm = 180$  качественная картина не меняется, но при этом перепады значений расходов между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  кратно увеличивается. Из этого можно сделать вывод, что негативные последствия, связанные с нарушением эластичности стенок сосудов, проявляет себя сильнее при высоком пульсе.



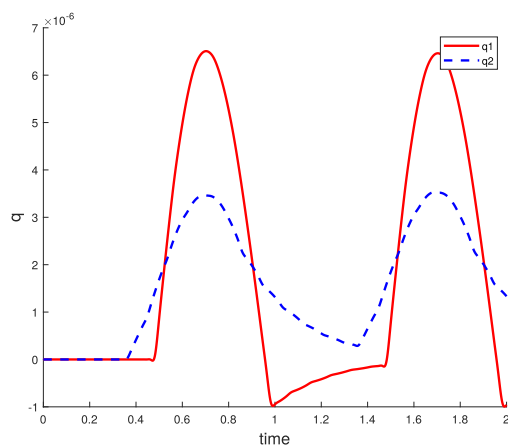
(a) Вариант I



(b) Вариант II

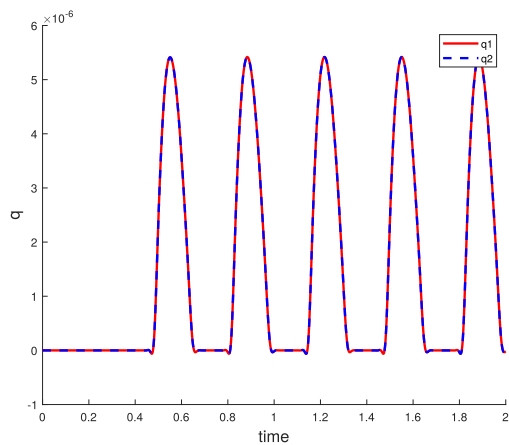


(c) Вариант III

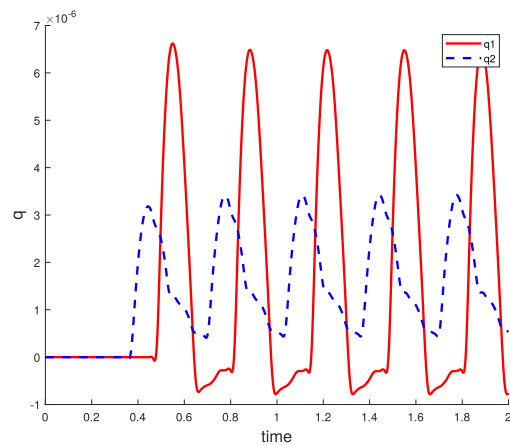


(d) Вариант IV

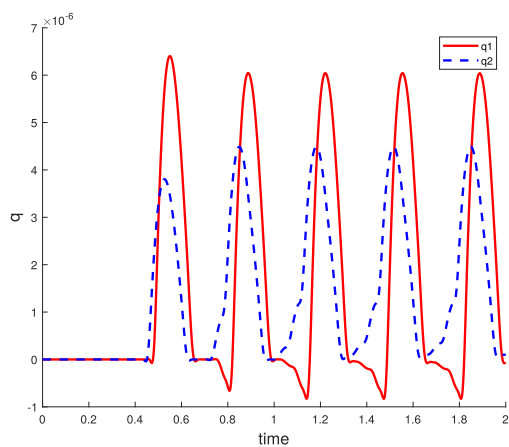
Рис. 13: Значение расходов через сечения  $S_1$  (красная линия) и  $S_2$  (синяя линия) для различных способов повреждения сосудов, ведущих к  $S_2$ . Частота —  $bpm = 60$



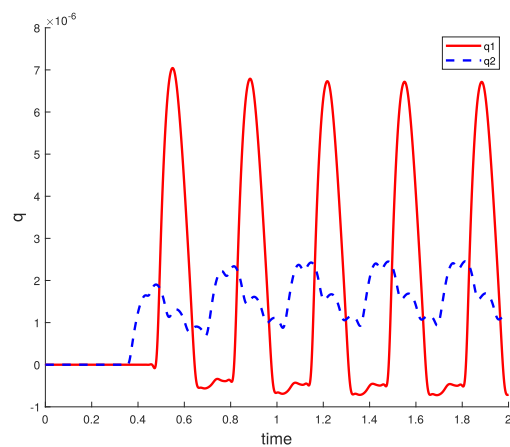
(a) Вариант I



(b) Вариант II



(c) Вариант III



(d) Вариант IV

Рис. 14: Значение расходов через сечения  $S_1$  (красная линия) и  $S_2$  (синяя линия) для различных способов повреждения сосудов, ведущих к  $S_2$ . Частота —  $bpm = 180$

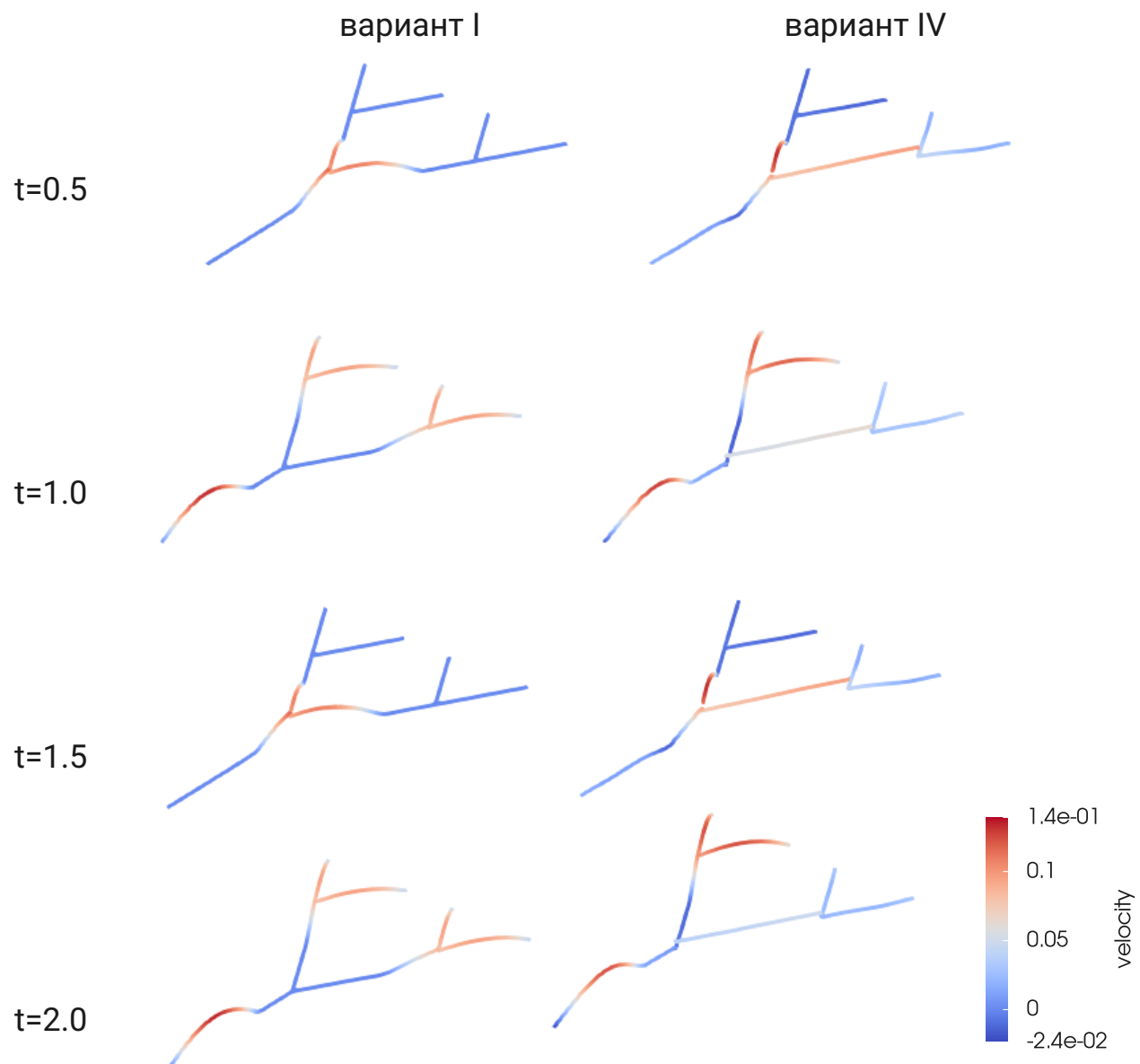


Рис. 15: Значение скорости течения  $u$  на различные моменты времени при частоте  $bpm = 180$ . Слева вариант I, справа вариант IV

## 5 Заключение

В настоящей работе была рассмотрена нестационарная задача о течении крови в разветвленной сети сосудов с упругими стенками. Кровь считалась вязкой ньютоновской жидкостью с постоянной плотностью. Использовалась одномерная модель, в которой определяющие уравнения записываются относительно средних по сечению сосуда скорости и давления, а также площади этого сечения. Упругие свойства стенок сосуда описывались по равновесной модели в приближении однородной тонкой эластичной мембраны, характеризуемой толщиной, модулем упругости и площадью поперечного сечения при отсутствии внешнего воздействия. Дополнительным упрощением модели являлось использование постоянного радиально-симметричного профиля скорости.

Для определяющей системы уравнений был разработан вычислительный алгоритм. Для аппроксимации по пространству использовался метод разрывных конечных элементов с Лагранжевыми элементами первого порядка. Аппроксимация по времени осуществлялась с помощью схемы Кранка–Николсон. Таким образом, аппроксимации и по времени и по пространству имели второй порядок точности.

Предложенная численная схема была верифицирована путём сравнения её результатов с известными аналитическими и численными решениями модельных задач о течении крови в аналогичной одномерной постановке. Рассматривались задачи о течении в одиночном однородном сосуде, о течении в сосуде с неупругой вставкой, о течении в разветвлении сосудов. Для всех рассмотренных задач получено удовлетворительное совпадение результатов.

В качестве иллюстрации применения алгоритма для расчёта более сложной системы была рассмотрена задача течения в сети из семи сосудов, один из которых имел повышенный модуль упругости и уменьшенный радиус. Подобные изменения свойств характерны для склеротических поражений сосудов. Было показано, что наличие таких повреждений в одном из сосудов ведёт к значительному перераспределению потоков на выходе из системы сосудов. Причём разница в значении расходов на выходе из системы растёт с увеличением частоты сердечных сокращений.



# Условные обозначения

$x$	пространственная координата вдоль сосуда, [м]	8
$t$	время, [с]	8
$a$	площадь поперечного сечения сосуда в фиксированном сечении, [м <sup>2</sup> ]	11
$R$	$= \sqrt{a/\pi}$ , радиус сосуда, [м]	11
$u$	средняя по поперечному сечению сосуда скорость жидкости, [м/с]	11
$r'$	нормированная на общий радиус $R$ радиальная координата сосуда, [1]	11
$U$	нормированный профиль скорости, [1]	11, 14
$p$	среднее по поперечному сечению сосуда давление, [Па]	12
$\rho$	плотность жидкости, [кг/м <sup>3</sup> ]	12
$\mu$	динамическая вязкость жидкость, [Па·с]	12
$K_\nu$	коэффициент при вязком слагаемом в определяющей системе уравнений, [м <sup>2</sup> /с]	15
$A$	площадь поперечного сечения сосуда при отсутствии внешнего воздействия, [м <sup>2</sup> ]	15
$\beta$	параметр, описывающий эластичные свойства материала стенки сосуда, [кг/с <sup>2</sup> ]	15
$h$	толщина стенки сосуда, [м]	15
$E$	модуль упругости стенки сосуда, [Па]	15
$w_{1,2}$	переменные Римана, [м/с]	16
$\lambda_{1,2}$	скорости переноса переменных Римана, [м/с]	16
$c$	скорость переноса возмущений, [м/с]	16
$c_0$	$= c(A)$ , скорость переноса возмущений в нейтральном состоянии сосуда, [м/с]	16
$q$	объёмный расход жидкости, [м <sup>3</sup> /с]	17
$P$	полное давление [Па]	19
$\Delta x$	шаг по пространству, [м]	20

$\Delta t$	шаг по времени, [с]	21
$\theta$	степень неявности дискретизации по времени	21
CFL	$= c_0 \Delta t / \Delta x$ , число Куранта, рассчитанное по скорости $c_0$ , [1]	26
$bpm$	частота сердцебиения, [ударов/мин]	35

## Список литературы

1. *Bessonov N., Babushkina E., Golovashchenko S. F., Tosenberger A., Ataullakhanov F., Panteleev M., Tokarev A., Volpert V.* Numerical Modelling of Cell Distribution in Blood Flow // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. — 2014. — Т. 9, № 6. — С. 69—84. — DOI: [10.1051/mmnp/20149606](https://doi.org/10.1051/mmnp/20149606).
2. *Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P. J., Müller L. O., Fossan F. E., Hellevik L. R., Donders W. P., Huberts W., Willemet M., Alastruey J.* A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*. — 2015. — Т. 31, № 10. — e02732. — DOI: <https://doi.org/10.1002/cnm.2732>. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cnm.2732>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.2732>.
3. *Di Pietro D. A., Ern A.* Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods. Т. 69. — Berlin : Springer, 2012. — (Mathématiques et Applications). — ISBN 9783642229794. — DOI: [10.1007/978-3-642-22980-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22980-0). — URL: <https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-22980-0>.
4. *Fedosov D., Pivkin I., Karniadakis G.* Velocity limit in DPD simulations of wall-bounded flow // *Journal of Computational Physics*. — 2008. — Февр. — Т. 227. — С. 2540—2559. — DOI: [10.1016/j.jcp.2007.11.009](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.11.009).
5. *Fedosov D. A.* Multiscale Modeling of Blood Flow and Soft Matter //. — 2010. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123491481>.
6. *Formaggia L., Gerbeau J., Nobile F., Quarteroni A.* On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2001. — Т. 191, № 6. — С. 561—582. — ISSN 0045-7825. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782501003024> ; Minisymposium on Methods for Flow Simulation and Modeling.

7. *Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A.* One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics. — 2003. — Дек. — Т. 47. — DOI: [10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29](https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29).
8. *Hosseini S. M., Feng J. J.* A particle-based model for the transport of erythrocytes in capillaries // Chemical Engineering Science. — 2009. — Т. 64, № 22. — С. 4488—4497. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.11.028>.
9. *Hughes T. J., Lubliner J.* On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels // Mathematical Biosciences. — 1973. — Т. 18, № 1. — С. 161—170. — ISSN 0025-5564. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(73\)90027-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(73)90027-8). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0025556473900278>.
10. *Maurice R., Ohayon J., Finet G., Cloutier G.* Adapting the Lagrangian speckle model estimator for endovascular elastography: Theory and validation with simulated radio-frequency data // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2004. — Сент. — Т. 116. — С. 1276—86. — DOI: [10.1121/1.1771615](https://doi.org/10.1121/1.1771615).
11. *Mehboudi A., Saidi M.* A systematic method for the complex walls no-slip boundary condition modeling in dissipative particle dynamics // Scientia Iranica. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 1253—1260. — ISSN 1026-3098. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.11.003>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1026309811002057>.
12. *Møller P. C. F., Mewis J., Bonn D.* Yield stress and thixotropy: on the difficulty of measuring yield stresses in practice // Soft Matter. — 2006. — Т. 2, вып. 4. — С. 274—283. — DOI: [10.1039/B517840A](https://doi.org/10.1039/B517840A). — URL: <http://dx.doi.org/10.1039/B517840A>.
13. *Mueller L., Blanco P., Watanabe S., Feijóo R.* A high-order local time stepping finite volume solver for one-dimensional blood flow simulations: Application to the ADAN model // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2015. — Дек. — Т. 32. — n/a—n/a. — DOI: [10.1002/cnm.2761](https://doi.org/10.1002/cnm.2761).

14. *Sazonov I., Nithiarasu P.* A novel, FFT-based one-dimensional blood flow solution method for arterial network // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. — 2019. — ОКТ. — Т. 18. — DOI: [10.1007/s10237-019-01146-0](https://doi.org/10.1007/s10237-019-01146-0).
15. *Sherwin S., Formaggia L., Peiro J., Franke V.* Computational Modeling of 1D Blood Flow with Variable Mechanical Properties and Application to the Simulation of Wave Propagation in the Human Arterial System // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2003. — ОКТ. — Т. 43. — С. 673—700. — DOI: [10.1002/flid.543](https://doi.org/10.1002/flid.543).
16. *Smith N. P., Pullan A. J., Hunter P. J.* An Anatomically Based Model of Transient Coronary Blood Flow in the Heart // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 2001. — Т. 62, № 3. — С. 990—1018. — ISSN 00361399. — URL: <http://www.jstor.org/stable/3061797> (дата обр. 16.06.2024).
17. *Taylor C. A., Hughes T. J., Zarins C. K.* Finite element modeling of blood flow in arteries // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Т. 158, № 1. — С. 155—196. — ISSN 0045-7825. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)80008-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)80008-X). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259880008X>.
18. *Thurston G. B.* Viscoelasticity of Human Blood // Biophysical Journal. — 1972. — Т. 12, № 9. — С. 1205—1217. — DOI: [https://doi.org/10.1016/s0006-3495\(72\)86156-3](https://doi.org/10.1016/s0006-3495(72)86156-3).
19. *Walburn F. J., Schneck D. J.* A constitutive equation for whole human blood // Biorheology. — 1976. — Т. 13, № 3. — С. 201—210. — DOI: <https://doi.org/10.3233/bir-1976-13307>.
20. *Xiu D., Sherwin S. J.* Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network // Journal of Computational Physics. — 2007. — Т. 226, № 2. — С. 1385—1407. — ISSN 0021-9991. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.020>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107002392>.
21. *Yamaguchi T., Ishikawa T., Imai Y., Matsuki N., Xenos M., Deng Y., Bluestein D.* Particle-Based Methods for Multiscale Modeling of Blood Flow in the Circulation

and in Devices: Challenges and Future Directions // Annals of biomedical engineering. — 2010. — Март. — Т. 38. — С. 1225—35. — DOI: [10.1007/s10439-010-9904-x](https://doi.org/10.1007/s10439-010-9904-x).

22. Yao Z., Li G., Song L. A Well-Balanced Discontinuous Galerkin Method for the Blood Flow Model // Journal of Mathematical Study. — 2017. — Июнь. — Т. 50. — С. 174—189. — DOI: [10.4208/jms.v50n2.17.04](https://doi.org/10.4208/jms.v50n2.17.04).