

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт механики и математики им. Н. И. Лобачевского

Направление подготовки: 01.03.03 Механика и математическое моделирование

Выпускная квалификационная работа
**Решение задачи о течении в разветвлённой сосудистой системе с
использованием одномерной модели кровотока**

Студентка 4 курса
группы 05–001
Мырина Е. В.

Научный руководитель
к.ф.-м.н. Калинин Е. И.
« ____ » _____ 2024 г.

Содержание

1 Введение	2
1.1 Актуальность работы	2
1.2 Обзор методов моделирования на основе одномерной постановки	3
1.3 Цель работы	4
2 Постановка задачи	5
2.1 Определяющая система уравнений	5
2.1.1 Осреднение по сечению сосуда	5
2.1.2 Сохранение массы	6
2.1.3 Сохранение количества движения	7
2.1.4 Учёт вязкого трения	8
2.1.5 Замыкающее соотношение для давления	9
2.2 Характеристический анализ	9
2.3 Граничные условия и условия на разрывах	10
2.3.1 Выходное условие	11
2.3.2 Входное условие	11
2.3.3 Условие в точке разветвления	11
3 Методика численного решения	13
3.1 Аппроксимация по пространству. Метод разрывных конечных элементов	13
3.2 Аппроксимация по времени	13
3.3 Итерационная расчётная схема	13
3.3.1 Вычисление противопотоковых значений функций	14
4 Верификация и результаты расчётов	16
4.1 Течение в однородном одиночном сосуде	16
4.2 Течение в одиночном сосуде с разрывными свойствами	18
4.3 Течение в сосуде с разветвлением	20
4.4 Течение в системе сосудов	23
5 Заключение	27
Условные обозначения	28
Список литературы	29

1 Введение

1.1 Актуальность работы

Кровь – соединительная ткань внутри организма, она состоит из форменных клеток (эритроцитов, лейкоцитов, тромбоцитов), а так же из водного раствора белков и свёртывающих веществ – плазмы. Кровь под воздействием периодических сокращений сердечной мышцы движется по замкнутой системе сосудов, циркулируя от сердца и обратно. С точки зрения гидродинамики кровотока представляет из себя пульсирующее с низкой частотой течение мелкодисперсной суспензии в замкнутой системе каналов кругового сечения с эластичными стенками, осложнённое локальными эффектами ламинарно-турбулентного перехода.

Кровь, двигаясь по сосудам, испытывает сопротивление движению со стороны сосудов и из-за своей вязкости. Поэтому сердце вбрасывает кровь в сосуды под большим давлением. В аорте давление колеблется в диапазоне от 16 кПа при систоле до 10 кПа при диастоле. По мере движения крови давление в сосудистом русле падает. Скорость течения крови так же зависит от диаметра сосуда, удалённости сосуда от сердца, а также фазы сердечного цикла. Максимальных значений скорость достигает в аорте (до ~ 1 м/с), а минимальных – в капиллярах (около нуля).

Сложность разветвления кровеносных сосудов и вариации их размеров создают значительные трудности при решении задачи о течении крови. Математическое моделирование помогает пониманию сложностей кровотока. Эти модели позволяют описывать и строить физические процессы, происходящие в биологических системах. Это может быть полезно при выявлении, прогрессировании и лечении различных сердечно-сосудистых заболеваний, а так же в проектировании и оптимизации медицинских устройств.

Кровь состоит из взвешенных в плазме (её рассматривают, как ньютоновскую жидкость) клеток крови, которые действуют друг на друга с некоторыми силами. Самые детальные методы моделирования заключаются в построении модели течения этих клеток как отдельных частиц в вязкой жидкости. Описание такого типа методов можно подробнее изучить в [4; 5; 11]. В некоторых моделях [1; 8] пренебрегают относительно мелкими и редкими – тромбоцитами (2–4 мкм в количестве 150–300 миллионов на 1 см^3) и лейкоцитами (4–20 мкм в количестве 4.5 – 11 миллионов на 1 см^3), а моделируют лишь самые крупные из них – эритроциты (7 – 8 мкм в количестве 3.8 до 5.6 миллиардов клеток на 1 см^3). Метод ресурсоёмкий, поэтому можно моделировать лишь небольшие участки кровотока (порядка 1 см и меньше) без ветвлений либо с одним - двумя ветвлениями. Так же такая модель плохо реагирует на любые изменения в исходных данных, ведь свойства эритроцитов могут значительно изменяться, а модель строится под определённую их конфигурацию [21]. Соответственно, возникает необходимость прибегнуть к некоторым упрощениям постановки.

Можно не описывать индивидуальные частицы взвешенные в плазме, а обобщить их до вязкой неньютоновской жидкости с определёнными характеристиками, в которых отразить эффекты, связанные с наличием взвешенных в растворе частиц. Такой подход называют трехмерным моделированием. Принципиальным моментом в формулировке такой постановки является выбор модели вязкости: например, основанные на зависимости вязкости от гематокрита [19], модель Максвелла [18], модель Кассона [12]. Однако эти модели всё-таки требуют значительных вычислительных ресурсов, поэтому имеет смысл провести дальнейшее упрощение.

Наиболее простыми с точки зрения вычислительных ресурсов являются так называемые одномерные модели кровотока, в которых пространственные характеристики осредняются по поперечному сечению, а трёхмерная дифференциальная задача сводится к одномерной. В некоторых случаях эти модели используют для постановки граничных условий в многомерных задачах. Но так же они могут и целиком моделировать кровеносную систему. Такой подход к моделированию требует меньших вычислительных ресурсов, но при этом почти не уступает в точности другим моделям. О сравнении одномерных и многомерных моделей можно прочесть в [6].

Вывод об актуальности Таким образом, несмотря на значительное увеличение доступных вы-

числительных мощностей и активное развитие детальных методов численного моделирования гемодинамики, до сих пор полное описание системы кровообращения подробными моделями остаётся невозможным, а прямое или косвенное использование одномерных моделей для таких задач является безальтернативным выбором. Поэтому развитие таких упрощённых моделей является актуальной задачей.

1.2 Обзор методов моделирования на основе одномерной постановки

Принципиальным вопросом в построении одномерной модели кровотока является выбор зависимости давления в сосуде от площади его поперечного сечения.

Можно использовать N интегральных условий сохранения Бернулли выражающих непрерывность полного давления P :

$$\frac{\rho u_k^2}{2} + p_k(A_k) = P.$$

Иногда для моделирования сопротивления потоку в местах стыка используют условия перепада давлений с учётом сопротивления

$$p_k(A_k(t, x_k)) - p^l(t) = \varepsilon_k R_k^l A_k(t, x_k) u_k(t, x_k),$$

которое выражается через коэффициент R_k^l . Здесь p^l – давление в точке бифуркации [1].

Но общим способом замыкания системы является явное представление алгебраической зависимости между давлением в сосуде и его площадью. Прямой подход к получению отношения $p(A)$ включает в себя точное одновременное измерение давления и площади в разные моменты времени. Но такой метод не всегда удобен в реальности. Качественный анализ физических экспериментов подтверждает, что функция $p(A)$ должна быть монотонной S-подобной кривой. Такая кривая удовлетворительно описывает состояния как круглого, так и эллиптического сечения. На рис. 1 показана зависимость давления в сосуде от его площади.

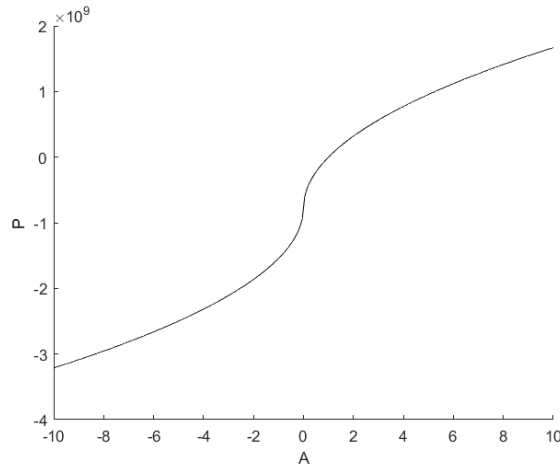


Рис. 1: График зависимости давления от поперечного сечения внутри сосуда

Для решения дифференциальных уравнений нужно выбрать подходящий метод пространственной аппроксимации области расчёта. Ниже приведём обзор наиболее часто используемых методов аппроксимации.

Метод конечных разностей предполагает дискретизацию области на сетку точек и последующую аппроксимацию производных в управляющих уравнениях с помощью конечных разностей. Этот метод часто используется в сочетании со схемой интегрирования по времени для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод конечных элементов [17] – популярная численная схема. Он особенно хорошо подходит для моделирования сложных геометрий, таких как запутанная сеть артерий в человеческом теле. Однако он может быть вычислительно дорогим, особенно для больших и сильно разветвленных сетей.

Метод быстрого преобразования Фурье [14] – это подход, использующий быстрое преобразование Фурье для решения одномерных уравнений кровотока. Этот метод конкурирует с традиционными пространственно-временными численными схемами как по устойчивости, так и по скорости. Он может точно и эффективно обрабатывать сложные геометрические формы и высокоамплитудные волны. Однако он требует дальнейшего развития для учета вязкоупругих эффектов и потери массы крови из-за мелких ветвей.

Метод разрывных конечных элементов Галеркина [22] – это еще одна численная схема, она сочетает в себе преимущества методов конечной разности и конечных элементов, обеспечивая баланс между точностью и вычислительными затратами. Однако он может быть более сложным в реализации и может потребовать дополнительных вычислительных ресурсов для сопоставления расчетной и физической областей.

Метод конечных объемов с локальным временным шагом высокого порядка [13] предполагает решение управляющих уравнений с помощью метода конечных объемов высокого порядка и схемы локального шага по времени. Этот метод может быть особенно полезен для моделирования течения в сложных геометрических системах.

1.3 Цель работы

Целью настоящей работы является:

- разработка методики расчёта течения крови в одномерном приближении,
- написание компьютерной программы для расчёта произвольной сети сосудов,
- подбор оптимальных расчётных параметров: шагов по времени, пространству, количеству внутренних итераций,
- верификация расчётной программы путём сравнения с численными и аналитическими результатами расчётов задачи в характерных модельных постановках от других авторов,
- иллюстрация работы программы на примере сложной сети сосудов. Влияние изменения эластичных свойств одного из сосудов на интегральные характеристики течения во всей системе.

2 Постановка задачи

2.1 Определяющая система уравнений

Для вывода определяющей системы уравнений будем следовать подходу [9] с некоторыми упрощениями.

2.1.1 Осреднение по сечению сосуда

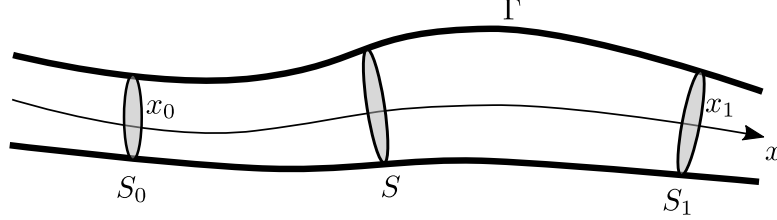


Рис. 2: Элементарный объём V

Будем рассматривать течение в сосуде с продольной координатой x . Определим элементарный объём V как отрезок сосуда при $x \in [x_0, x_1]$ (см. рис. 2). Границей этого объема будут входное и выходное сечения S_0 , S_1 и боковая граница Γ : $\partial V = S_0 \cup S_1 \cup \Gamma$.

Пусть величина g переносится в этом элементарном объёме несжимаемой жидкостью со скоростью \mathbf{u} :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Тогда распишем изменения по времени t интеграла от этой величины g согласно теореме Рейнольдса:

$$\frac{d}{dt} \int_V g d\mathbf{x} = \int_V \frac{\partial g}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial V} g v_n ds \quad (2)$$

Здесь v_n – нормальная скорость объема V . Будем считать, что объём не совершает продольного движения. То есть

$$v_n|_{S_0, S_1} = 0. \quad (3)$$

Определим среднее по сечению значение как

$$\bar{g} = \frac{1}{|S|} \int_S g ds. \quad (4)$$

Тогда, с учётом того, что координаты x_0 , x_1 не зависят от времени (как следствие из (3)), левая часть (2) может быть представлена в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V g d\mathbf{x} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial |S| \bar{g}}{\partial t} dx. \quad (5)$$

Далее рассмотрим второе слагаемое в правой части (2). Обозначим за w_n – скорость объема относительно u_n – скорости жидкости:

$$w_n = v_n - u_n. \quad (6)$$

$$\int_{\partial V} v_n g ds = \int_{\partial V} w_n g ds + \int_{\partial V} u_n g ds. \quad (7)$$

Для первого слагаемого в правой части (7) справедливо

$$\int_{\partial V} w_n g \, ds = \int_{\Gamma} w_n g \, ds + \int_{S_0} w_n g \, ds + \int_{S_1} w_n g \, ds = \dots$$

расписывая w_n по (6) с учётом (3)

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds - \int_{S_0} u_n g \, ds - \int_{S_1} u_n g \, ds = \dots$$

подставляя определение (4) для произведения $u_n g$

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds - (|S|\overline{u_n g})_{x_0} - (|S|\overline{u_n g})_{x_1} = \dots$$

заменяем нормальную скорость u_n скоростью u_x по направлению координаты x с учётом направления внешней нормали в сечениях x_0, x_1

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds + (|S|\overline{u_x g})_{x_0} - (|S|\overline{u_x g})_{x_1} = \dots$$

применяя формулу интегрирования по частям

$$= \int_{\Gamma} w_n g \, ds - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} \, dx.$$

Второе слагаемое в правой части (7) распишем по формуле Гаусса-Остроградского с учётом условия неразрывности (1):

$$\int_{\partial V} u_n g \, ds = \int_V \mathbf{u} \cdot \nabla g \, d\mathbf{x}$$

Собирая равенство (2) с учётом полученных соотношений получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial |S|\bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} \right) dx = \int_V \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g \right) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} w_n g \, ds$$

Далее, пользуясь произвольностью выбора продольной координаты снимем интегрирование по x :

$$\frac{\partial |S|\bar{g}}{\partial t} + \frac{\partial |S|\overline{u_x g}}{\partial x} = \int_{S(x)} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla g \right) ds + \oint_{L(x)} w_n g \, dl. \quad (8)$$

Здесь L – сечение поверхности Γ по фиксированной продольной координате x .

2.1.2 Сохранение массы

Для получения закона сохранения массы рассмотрим общее соотношение (8) при $g = 1$:

$$\frac{\partial |S|}{\partial t} + \frac{\partial |S|\overline{u_x}}{\partial x} = \oint_{L(x)} w_n \, dl.$$

Интеграл в правой части – есть расход жидкости через боковые стенки сосуда. В настоящей работе мы ограничимся случаем непроницаемых стенок сосуда:

$$w_n|_{\Gamma} = 0,$$

Тогда этот интеграл будет равен нулю. Для величин в левой части введём обозначения: $a = |S|$ – площадь поперечного сечения сосуда, равная $a = \pi R^2$. $u = \bar{u}_x$ – средняя по сечению продольная скорость жидкости. Тогда закон сохранения масс примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial ua}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

2.1.3 Сохранение количества движения

Рассмотрим уравнения (8) при $g = u_x$. С учётом введённых обозначений получим

$$\frac{\partial au}{\partial t} + \frac{\partial a\bar{u}_x^2}{\partial x} = \int_{S(x)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x \right) ds + \oint_{L(x)} w_n u_x dl. \quad (10)$$

Для последующих выкладок сделаем допущение, что форма профиля скорости вдоль всей длины сосуда постоянна (не зависит от координаты x) и радиально-симметрична (зависит только от нормированной радиальной координаты $r' = r/R$). То есть u_x представима в виде

$$u_x(x, s) = u(x)U(r'), \quad (11)$$

где U – нормированный профиль скорости.

Правую часть распишем с использованием ранее выведенного закона сохранения масс (9):

$$\frac{\partial au}{\partial t} + \frac{\partial a\bar{u}_x^2}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial au}{\partial x} + \frac{\partial a\bar{u}_x^2}{\partial x} = \dots$$

добавим и вычтем слагаемое $\partial au^2 / \partial x$

$$= a \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial au}{\partial x} + \frac{\partial au^2}{\partial x} + \frac{\partial a(\bar{u}_x^2 - u^2)}{\partial x} = \dots$$

разложим третье слагаемое и проведём сокращения

$$= a \frac{\partial u}{\partial t} + au \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial a(\bar{u}_x^2 - u^2)}{\partial x} = \dots$$

воспользуемся упрощением (11)

$$= a \frac{\partial u}{\partial t} + au \frac{\partial u}{\partial x} + (\bar{U}^2 - 1) \frac{\partial au^2}{\partial x}. \quad (12)$$

Упрощение первого интеграла в правой части будем проводить на основе общего уравнения движения для вязкой несжимаемой жидкости, записанного в проекции на ось x :

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u_x, \quad (13)$$

где p – давление, ρ – плотность и μ – вязкость жидкости. Будем считать, что продольные изменения скорости намного меньше, чем поперечные. Это справедливо, если справедливы условия прилипания к

боковым стенкам канала. Тогда можно записать

$$\nabla^2 u_x = \nabla_S^2 u_x + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \approx \nabla_S^2 u_x,$$

за ∇_S^2 обозначен двумерный оператор Лапласа, действующий в плоскости S . Подставим это приближение в выражение (13) и проинтегрируем по плоскости S :

$$\int_S \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u_x \right) ds = -\frac{1}{\rho} \int_S \frac{\partial p}{\partial x} ds + \frac{\mu}{\rho} \int_S \nabla_S^2 u_x ds = \dots$$

будем считать, что давление слабо меняется поперёк канала: $p(x, s) \approx \bar{p}(x)$

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \int_S \nabla_S^2 u_x ds = \dots$$

и раскроем второй интеграл с помощью интегрирования по частям

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \oint_L \frac{\partial u_x}{\partial n_l} dl = \dots$$

в радиально-симметричном упрощении, при котором $n_l = r$

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu R}{\rho} \frac{\partial u_x}{\partial r} \Big|_{r=R(x)} = \dots$$

воспользуемся упрощением (11) для вычисления последней производной

$$= -\frac{1}{\rho} |S| \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu}{\rho} u \frac{\partial U}{\partial r'} \Big|_{r'=1} \quad (14)$$

Запишем уравнение (10) с учётом (12), (14):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\bar{U}^2 - 1}{a} \frac{\partial a u^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\pi\mu}{\rho} \frac{u}{a} \frac{\partial U}{\partial r'} \Big|_{r'=1}. \quad (15)$$

Для проведения дальнейших упрощений необходимо допущение о форме профиля U . В простейшем случае можно считать его постоянным: $U = 1$. Тогда выражение (15) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (16)$$

Таким образом, мы получили уравнение движения при полном пренебрежении силами вязкого трения о стенки сосуда.

2.1.4 Учёт вязкого трения

Рассмотрим радиальный профиль скорости U , который задаётся параметрическим (зависящим от параметра ζ) соотношением (см. [9; 16])

$$U_0(r') = \frac{\zeta + 2}{\zeta} \left(1 - (r')^\zeta \right). \quad (17)$$

Случай $\zeta = 2$ соответствует установившемуся профилю Пуазейля. Более высокие значения ζ отражают неустойчивый характер течения. Профили для некоторых ζ представлены на рис. 3.

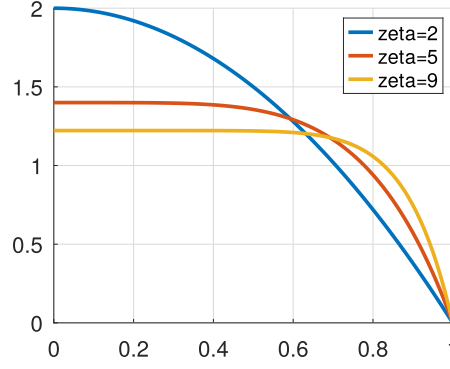


Рис. 3: Нормированный профиль скорости в зависимости от ζ

Выражения из (15), содержащие нормированную скорость, будут равны:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r'} \right|_{r'=1} = -(\zeta + 2),$$

$$\bar{U} = 1,$$

тогда само уравнение сохранения количества движения примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - K_\nu \frac{u}{a}, \quad (18)$$

где влияние вязкости описывается коэффициентом

$$K_\nu = \frac{2\pi\mu(\zeta + 2)}{\rho}.$$

2.1.5 Замыкающее соотношение для давления

Постановка задачи включает в себя два уравнения (9), (18) для трёх неизвестных u , a , p . Таким образом, необходимо ещё одно, замыкающее соотношение. Обычно таким соотношением служит зависимость давления от площади поперечного сечения $p(a)$. Следуя [7] запишем эту зависимость в приближении равновесного состояния (давление мгновенно подстраивается под изменение площади сечения сосуда) при условии нулевого внешнего давления:

$$p(a) = \frac{\beta}{A} \left(\sqrt{a} - \sqrt{A} \right). \quad (19)$$

Здесь A – нейтральный радиус сосуда, а коэффициент β вычисляется в приближении тонкой, несжимаемой, однородной, изотропной, эластичной мембраны с толщиной h и модулем упругости E :

$$\beta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} E h.$$

2.2 Характеристический анализ

Запишем полученную систему гиперболических уравнений (9), (18) в векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{B}, \quad (20)$$

где введены вектора:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} au \\ \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_\nu \frac{u}{a} \end{pmatrix}.$$

Такая система может быть приведена к характеристическому виду (см. например [15])

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Правая часть здесь получена при условии $\mu = 0$. $w_{1,2}$ – переменные Римана, а $\lambda_{1,2}$ – скорость переноса этих переменных, которые определены как

$$w_{1,2} = u \pm 4(c - c_0), \quad \lambda_{1,2} = u \pm c. \tag{22}$$

через скорость переноса возмущений $c(a)$:

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\beta}{A\rho}} a^{\frac{1}{4}}. \tag{23}$$

Эта скорость зависит от площади сечения сосуда (чем сосуд более растянут, тем эта скорость больше). Значение скорости в начальный момент определено как $c_0 = c(A)$. Отметим, что по построению значения $w_{1,2}$ равны нулю в состоянии покоя при $a = A$, $u = 0$. Этот факт будет использован при постановке граничных условий.

В рассматриваемой здесь задаче кровотока характерные скорости течения крови не превышают 1 м/с в самых крупных сосудах, а скорости распространения возмущений имеют на порядок большие характерные значения, то $c \gg u$, значит

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Из этого можно сделать вывод, что переменные Римана w_1 и w_2 строго однонаправлены и распространяются в противоположенные по отношению друг к другу стороны. Для иллюстрации этого эффекта смотри тестовую задачу из пункта 4.2.

Зависимость естественных переменных от переменных Римана запишется как

$$u = \frac{w_1 + w_2}{2}, \quad a = \left(\frac{w_1 - w_2}{8} + c_0 \right)^4 \left(\frac{2\rho A}{\beta} \right)^2. \tag{24}$$

То есть естественные переменные содержат комбинацию однонаправленных переменных. Отсюда можно сделать вывод, что возмущения по естественным переменным могут распространяться в обе стороны расчётной области. Этот факт следует иметь ввиду при формулировке граничных условий.

2.3 Граничные условия и условия на разрывах

Поскольку процесс описывается гиперболической системой из двух уравнений (21), то он требует задания граничного условия на тех границах, на которых скорость распространения искомых величин противоположна внешней к границе нормали. Переменные w_1 и w_2 распространяются в противоположенные стороны, то есть на границе следует задавать только одну из этих переменных. Для условности будем считать границы, на которых требуется задания w_1 входными, а остальные – выходными.

2.3.1 Выходное условие

На выходной границе поставим требования беспрепятственного выхода через границу. То есть на ней не должно формироваться никаких возмущений. На практике это означает задание

$$w_2|_{out} = 0. \quad (25)$$

2.3.2 Входное условие

Во входном сечении сетки сосудов обычно задают либо входной профиль давления $p_{in}(t)$ либо общий расход $q_{in}(t)$. Чтобы свести эти физические условия к условиям на переменные Римана также зададим требование неотражаемости входной границе. Подобно тому, как на выходной границе мы требовали, чтобы приходящее возмущение от w_1 не провоцировало исходящее возмущение w_2 , так и на входной границе потребуем, чтобы приходящее возмущение от w_2 не провоцировало возмущений для w_1 . При этом, в отличие от выходной границе, мы не можем просто занулить w_1 ; возмущения в w_1 должны генерироваться за счёт физических граничных условий – q_{in} либо p_{in} . Таким образом, для постановки неотражающих условий на входной границе, нам нужно вычислить значение w_1 исходя из $w_2 = 0$ и условия на физическую переменную.

Случай заданного давления Пусть задана p_{in} . Значит, пользуясь формулами (19), (23), можно вычислить c_{in} . Тогда из определения (22) запишем

$$\begin{aligned} w_1|_{in} &= u + 4(c_{in} - c_0), \\ 0 &= u - 4(c_{in} - c_0), \end{aligned}$$

откуда получим

$$w_1|_{in} = 8u(c_{in} - c_0). \quad (26)$$

Случай заданного расхода Пусть задана q_{in} . Зануляя w_2 запишем систему уравнений относительно неизвестных a_{in} , u_{in} :

$$\begin{cases} 0 = u_{in} - 4(c(a_{in}) - c_0), \\ q_{in} = u_{in}a_{in}. \end{cases}$$

Проводя преобразования придём к нелинейному уравнению относительно неизвестного a_{in} :

$$q_{in} = 4a_{in}(c(a_{in}) - c_0)$$

Решив это уравнение и найдя $c_{in} = c(a_{in})$, можно воспользоваться формулой (26).

2.3.3 Условие в точке разветвления

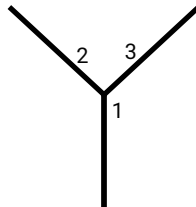


Рис. 4: Схема точки разветвления сосудов

Рассматриваемые области расчёта включаюи точки, где сосуды разветвляются. Будем рассматривать только простые разветвления, когда к одной точке подходит три сосуда (см. схему на рис. 4).

Гиперболический характер рассматриваемой системы говорит о том, что для сопряжения течений в этих трёх сосудах необходимо задать три условия сопряжения.

Первое из этих условий очевидно следует из сохранения расходов:

$$a_1 u_1 = a_2 u_2 + a_3 u_3. \quad (27)$$

Другие два условия связаны с соотношениями для давления. В простейшем случае можно задать равенство полного давления $P = p + u^2/2$:

$$P_1 = P_2 = P_3. \quad (28)$$

Это условие моделирует идеальное прохождение разветвления без потерь давления. Более сложные условия, моделирующие потери давления в зависимости от угла поворота сосудов при разветвлении, рассматриваются в работе [7].

3 Методика численного решения

3.1 Аппроксимация по пространству. Метод разрывных конечных элементов

Аппроксимацию системы (20) будем проводить методом разрывных конечных элементов [3]. Следуя стандартной процедуре этого метода домножим исходное уравнение на базисную функцию, проинтегрируем по конечному элементу E применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$\sum_j M_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_j + \sum_j T_{ij} \mathbf{F}_j + \bar{\mathbf{F}} \phi_i|_{x_l}^{x_r} = \sum_j M_{ij} \mathbf{B}_j.$$

Здесь M_{ij} , T_{ij} – коэффициенты матрица масс и переноса,

$$M_{ij} = \int \phi_i \phi_j dx, \quad T_{ij} = - \int \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx.$$

Эти матрицы являются блочно-диагональными (или сводятся к блочнодиагональным в результате перенумерации узлов сетки). Значение блока этих матрицы при применении линейных и квадратичных Лагранжевых базисных функций имеют вид:

$$M_{ij} = \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad T_{ij} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$M_{ij} = \frac{\Delta x}{2} \begin{pmatrix} 4/15 & -1/15 & 2/15 \\ -1/15 & 4/15 & 2/15 \\ 2/15 & 2/15 & 16/15 \end{pmatrix} \quad T_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 & 2/3 \\ 1/6 & -1/2 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

где Δx – разбиение области по пространству. ϕ_i – базисная функция с глобальным индексом i , а x_l , x_r – левая и правая точки элемента, которому принадлежит базисная функция ϕ_i (по методике разрывных элементов каждый базис лежит внутри единственного элемента). Величина $\bar{\mathbf{F}}$ – противопотоковое значение \mathbf{F} в выбранной точке.

3.2 Аппроксимация по времени

Дискретизацию по времени с шагом Δt будем проводить согласно θ - схеме:

$$\sum_j M_{ij} \frac{\hat{\mathbf{U}}_j - \mathbf{U}_j}{\Delta t} + \left(\sum_j T_{ij} \mathbf{F}_j + \bar{\mathbf{F}} \phi_i|_{x_l}^{x_r} \right)^\theta = \left(\sum_j M_{ij} \mathbf{B}_j \right)^\theta, \quad (29)$$

где символом $\hat{\cdot}$ обозначено значение на следующем временном слое и введена θ – степень неявности схемы как

$$(Y)^\theta = \theta \hat{Y} + (1 - \theta)Y.$$

При $\theta = 0$ мы получаем чисто явную схему, при $\theta = 1$ – чисто неявную, а выбор $\theta = 1/2$ даёт схему Кранка-Николсон второго порядка точности.

В случае $\theta > 0$ выражение (29) является нелинейным относительно неизвестного вектора \mathbf{U} . Для его решения требуется линеаризация.

3.3 Итерационная расчётная схема

Линеризацию будем проводить за счёт итерационного процесса на временном слое. Обозначим верхним индексом n значение на прошлой (известной) итерации, а $^{n+1}$ – значение на текущей (подлежащей определению) итерации. Тогда окончательно расчётная схема на итерации внутри временного слоя

на основе дискретизованного соотношения (29) примет вид

$$\sum_j M_{ij} \frac{a_j^{n+1} - a_j}{\Delta t} + \theta \sum_j T_{ij} a_j^{n+1} u_j^n = \dots \quad (30)$$

$$= -(1 - \theta) \sum_j T_{ij} a_j u_j - ((\theta q(\bar{a}^n, \bar{u}^n) + (1 - \theta)q(\bar{a}, \bar{u})) \phi_i|_{x_l}^{x_r}$$

$$p_j^{n+1} = \frac{\beta}{A} \left(\sqrt{a_j^{n+1}} - \sqrt{A} \right) \quad (31)$$

$$\sum_j M_{ij} \frac{u_j^{n+1} - u_j}{\Delta t} + \theta \sum_j \left(\frac{T_{ij} u_j^n}{2} + \frac{K_\nu M_{ij}}{a_j^{n+1}} \right) u_j^{n+1} = \dots \quad (32)$$

$$= -(1 - \theta) \sum_j \left(\frac{T_{ij} u_j}{2} + \frac{K_\nu M_{ij}}{a_j} \right) u_j$$

$$- \theta \sum_j T_{ij} \frac{p_j^{n+1}}{\rho} - (1 - \theta) \sum_j T_{ij} \frac{p_j}{\rho}$$

$$- \frac{1}{\rho} ((\theta P(\bar{a}^n, \bar{u}^n) + (1 - \theta)P(\bar{a}, \bar{u})) \phi_i|_{x_l}^{x_r}$$

На первом этапе решается уравнение (30) и находятся значения a на текущей итерации. Затем по этому значению определяются значения давления согласно (31) и потом решается уравнение для скорости (32).

Итерации на временном слое продолжаются, пока невязка уравнений (30), (31) при замене $n + 1$ на n не станет меньше заданного $\epsilon = 10^{-8}$.

3.3.1 Вычисление противопотоковых значений фуункций

Вычисление значений \bar{a} , \bar{u} , которые используются для вычисления численных потоков в уравнениях (30), (32) будем проводить на основе подхода [15].

Как было отмечено ранее, естественные переменные содержат в себе разнонаправленные возмущения, поэтому не могут быть использованы напрямую для вычисления противопотоковых значений \bar{u} , \bar{a} . Поэтому используем переменные Римана. Будем рассматривать соединения двух типов: двух и трёх элементов. Их локальная нумерация представлена на рис. 5.

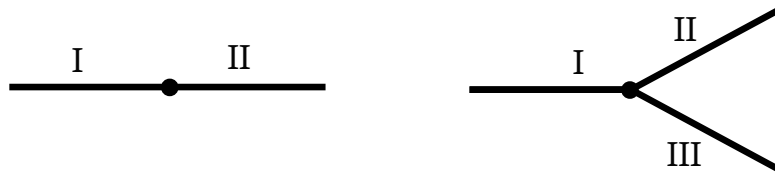


Рис. 5: Локальная нумерация элементов при рассмотрении сочленения

С учётом выбранного направления движения w_1 слева направо вычислим противопотоковые значения переменных Римана как

$$\bar{w}_1 = u_I + 4c_I, \quad \bar{w}_2 = u_{II} - 4c_{II}, \quad \bar{w}_3 = u_{III} - 4c_{III}.$$

Значения $u, c_{I,II,III}$ - есть значение функций в точке сочленения, взятое со стороны соответствующего элемента. Эти значения берутся с известного итерационного слоя.

При рассмотрении линейного сочленения (правый из рисунков 5) далее пользуясь определением (22) запишем уравнения

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{u}_1 + 4\bar{c}_1, \\ \bar{w}_2 &= \bar{u}_2 - 4\bar{c}_2 \end{aligned} \quad (33)$$

В случае, если физические свойства (β и A) не терпят разрыв в точке сочленения, то $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$ и эта система может быть разрешена с помощью выражений (24). Иначе её следует дополнить двумя уравнениями сохранения: расхода и полного давления

$$\begin{aligned} q(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= q(\bar{u}_2, \bar{a}_2), \\ P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_2, \bar{a}_2) \end{aligned} \tag{34}$$

Нелинейная система (33), (34) может быть решена итерационным решателем (например, методом Ньютона).

В случае разветвления сосудов (правая схема на рис. 5), аналогичная система уравнений, дополненная условиями разрешимости на основе (27), (28) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= \bar{u}_1 + 4\bar{c}_1, \\ \bar{w}_2 &= \bar{u}_2 - 4\bar{c}_2, \\ \bar{w}_3 &= \bar{u}_3 - 4\bar{c}_3, \\ q(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= q(\bar{u}_2, \bar{a}_2) + q(\bar{u}_3, \bar{a}_3), \\ P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_2, \bar{a}_2), \\ P(\bar{u}_1, \bar{a}_1) &= P(\bar{u}_3, \bar{a}_3). \end{aligned} \tag{35}$$

4 Верификация и результаты расчётов

4.1 Течение в однородном одиночном сосуде

Верификацию численного метода начнём с простейшей задачи о переносе единственного импульса (волны давления) в одиночном сосуде. Задача решалась в двух постановках, заимствованных из работы [2]. В первом варианте рассматривалась невязкая жидкость, во втором использовалось значение $\mu = 4 \text{ мПа}\cdot\text{с}$. Физические параметры задачи представлены в таблице ниже

параметр	вариант 1	вариант 2
длина, м	10.0	
R , см	1.0	
E , МПа	0.4	
h , мм	1.5	
ρ , кг/м ³	1050	
μ , мПа·с	0	4
ζ	9	

В качестве входных граничных условий задавалось значение расхода, соответствующее экспоненциальному пику на значении $q = 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ в момент $t = 0.05 \text{ с}$:

$$q_{in}(t) = 10^{-6} \exp(-10^4(t - 0.05)^2).$$

Таким образом, максимальная скорость течения жидкости составляла около 3 мм/с. При этом скорость распространения возмущений составляла $c_0 \approx 6.17 \text{ м/с}$.

Известно [2], что решением рассматриваемой задачи в варианте 1 является единственная волна давления с постоянной высотой p_{max} . В варианте 2 эта волна давления будем уменьшаться с продвижением по сосуду из-за вязкой диффузии. При этом пиковое значение этой волны будет равно

$$p_{max,visc}(x) = p_{max} \exp\left(-\frac{(\zeta + 2)\pi\mu x}{\rho c_0 A}\right). \quad (36)$$

Для представленных выше постановок была произведена серия расчётов с различными шагами по времени и пространству с использованием различных схем дискретизации по времени (разных значений θ) и по пространству (разных степеней использованных конечных элементов).

Добиться устойчивого решения с использованием элементов высоких порядков точности не удалось. Таким образом, все дальнейшие вычисления будут проводиться на линейных Лагранжевых элементах.

Результаты расчёты с использованием разных θ схем в сравнении с результатами [2] представлены на рис. 6. Для этих расчётов использовался шаг по пространству $\Delta x = 0.01$ и шаг по времени $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, который обеспечивал устойчивый счёт для схем $\theta = 0.5, 1.0$. Число Куранта, рассчитанное по скорости c_0 было равно $\text{CFL} = 0.12$. Для явной схемы не удалось подобрать такой шаг по времени, при котором решение бы не расходилось (на рис. 6d приведены результаты для $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$). Неявная схема (рис. 6c), хоть и демонстрировала условно устойчивое поведение, но оказалась подвержена большой численной диффузии. Результаты расчётов по схеме Кранка–Николсон (рис. 6b) показали хорошее согласование как с точным решением, так и с численным решением из [2], представленным на рис. 6a.

По результатам рассмотрения этого тестового случая были выработаны следующие рекомендованные параметры расчётной схемы:

- Дискретизация по пространству линейными Лагранжевыми конечными элементами;
- Схема дискретизации по времени с $\theta = 0.5$ (Кранка–Николсон);

- Выбор шага по пространству Δx в ~ 30 раз меньше, чем характерная длина волны;
- Выбор шага по времени Δt исходя из числа Куранта, рассчитанного по скорости c_0 , $CFL \approx 0.1$.

Эти параметры будут использоваться для всех дальнейших расчётов.

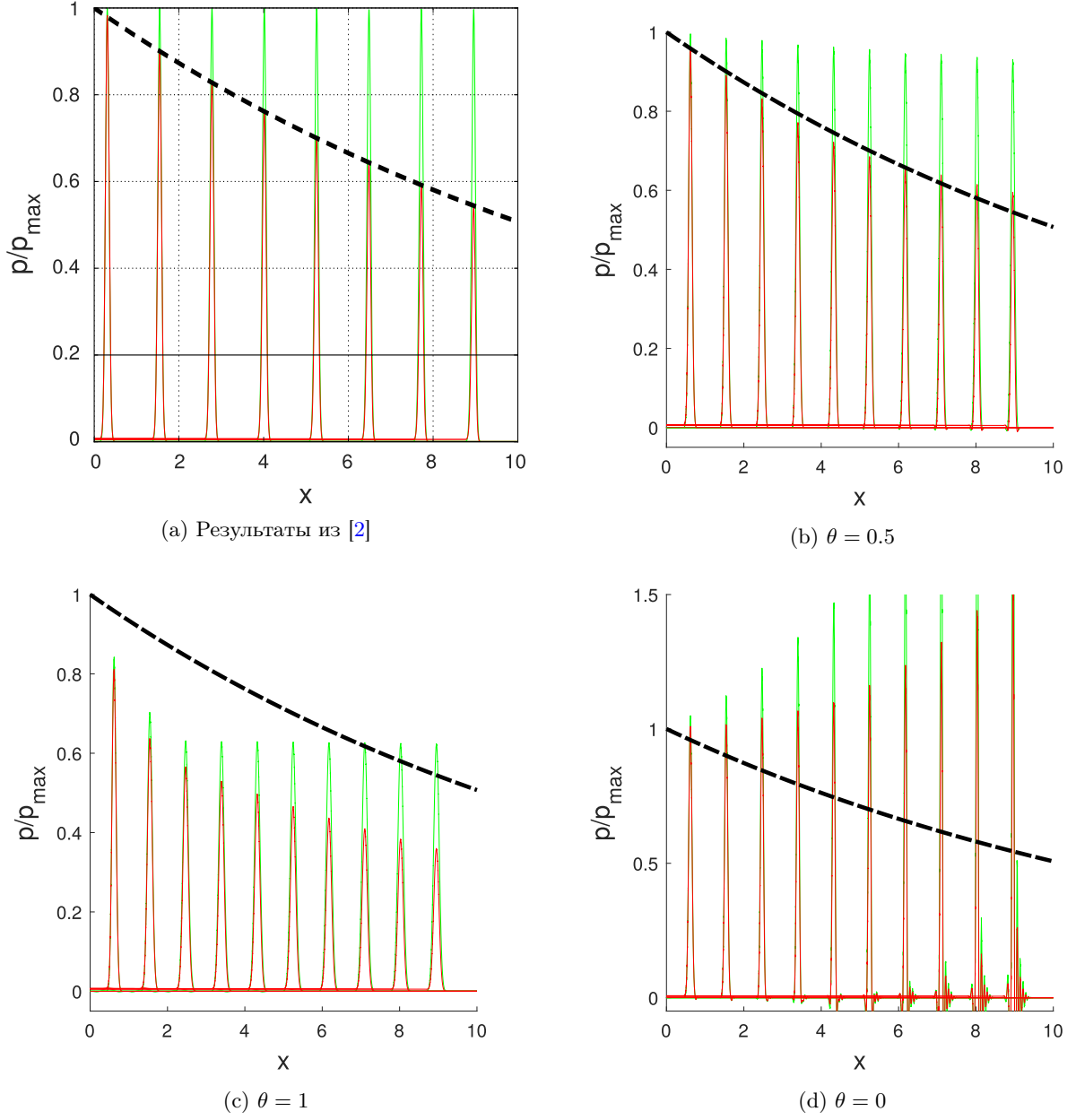


Рис. 6: Положение скачка давления в различные моменты времени: зелёная линия – расчёт без вязкости, красная линия – расчёт с $\mu=4\text{мПа}$, чёрный пунктир – падение пика давления с продвижением фронта (36)

4.2 Течение в одиночном сосуде с разрывными свойствами

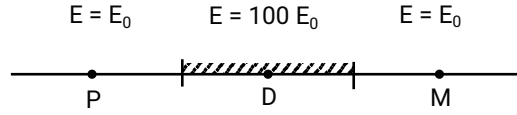


Рис. 7: Схема сосуда и расположение контрольных точек

В следующем тесте рассмотрим течение в сосуде, имеющем жёсткую вставку, модуль Юнга в которой на два порядка превышает значение в остальном сосуде [15]. Схема сосуда и расположение контрольных точек представлены на рисунке 7. Использовались следующие параметры расчёта

параметр	основной сосуд	вставка
длина, м	2×5	5
R , м	0.5	
E , кПа	150	15000
h , м	1	
ρ , кг/м ³	1	
μ , Па с	0	

На входной границе задавалось давление

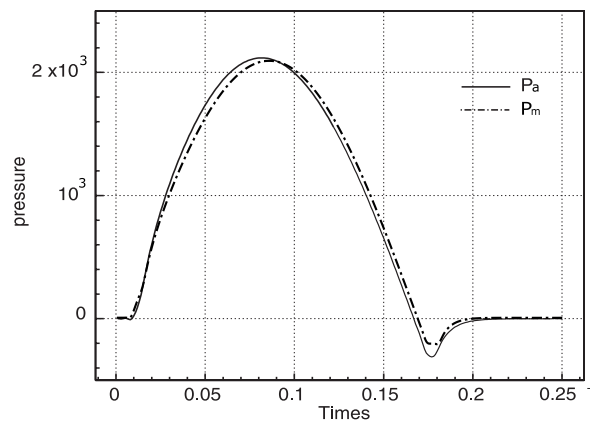
$$p(t) = \begin{cases} 2000 \sin(2\pi t/T), & t \leq T/2, \\ 0, & t > T/2 \end{cases}$$

со значением периода $T = 0.33$.

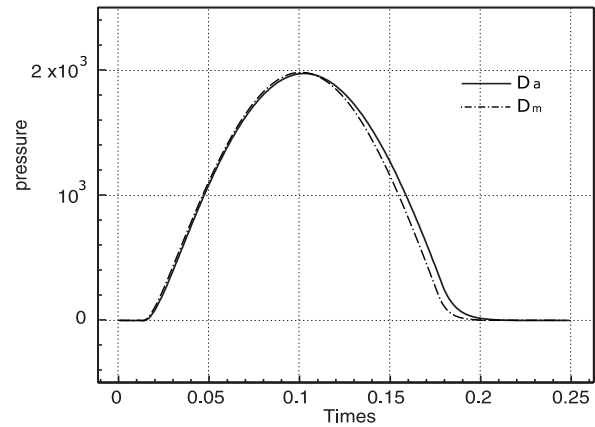
В результате скорость распространения возмущений в основной части канала составляла $c_0 \approx 450$, а во вставки была больше на порядок. Расчёт проводился при выборе $\Delta x = 0.5$, $\Delta t = \Delta x \cdot 2 \cdot 10^{-5} = 10^{-5}$. Такой выбор обеспечивал CFL = 0.1 для максимального c_0 .

Результирующие значения давления в контрольных точках сосуда представлены на рис. 8 в сравнении с данными [15]. Наблюдается удовлетворительное совпадение полученных кривых.

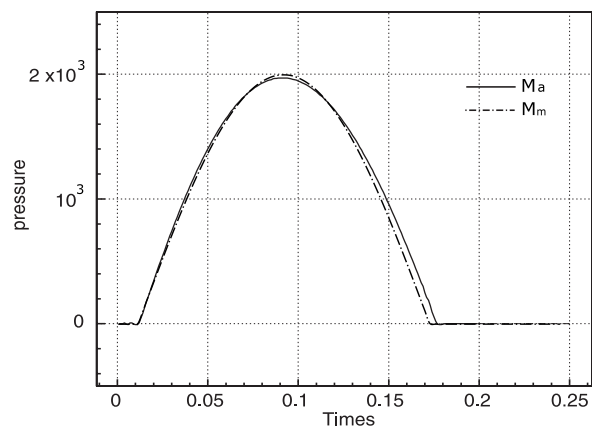
Можно отметить, что через контрольную точку M проходит ровно одна поступательная волна давления, о чём свидетельствуют резкие границы у кривых, приведённых на рис. 8с. Через точки P и D помимо основной поступательной проходят несколько отражённых волн, поэтому правая граница волны на рисунках 8а, 8b имеет заметные искажения.



(a) Контрольная P точка перед вставкой



(b) Контрольная точка D в вставке



(c) Контрольная точка M после вставки

Рис. 8: Сравнение значения давления в контрольных точках. Сплошная линия – наш расчёт, пунктирная – результаты [15]

4.3 Течение в сосуде с разветвлением

Рассматривается тестовая задача [20] о течении в разветвлении сосудов. Расчётные свойства сосудов до разветвления (сосуд 1) и после разветвления (сосуды 2) представлены ниже

параметр	сосуд 1	сосуды 2
длина, м	0.2	0.2
R , мм	5.0	$5.0/\sqrt{6}$
E , кПа	108	264.5
h , мм	0.1	
ρ , кг/м ³	1000	
μ , Па с	0	

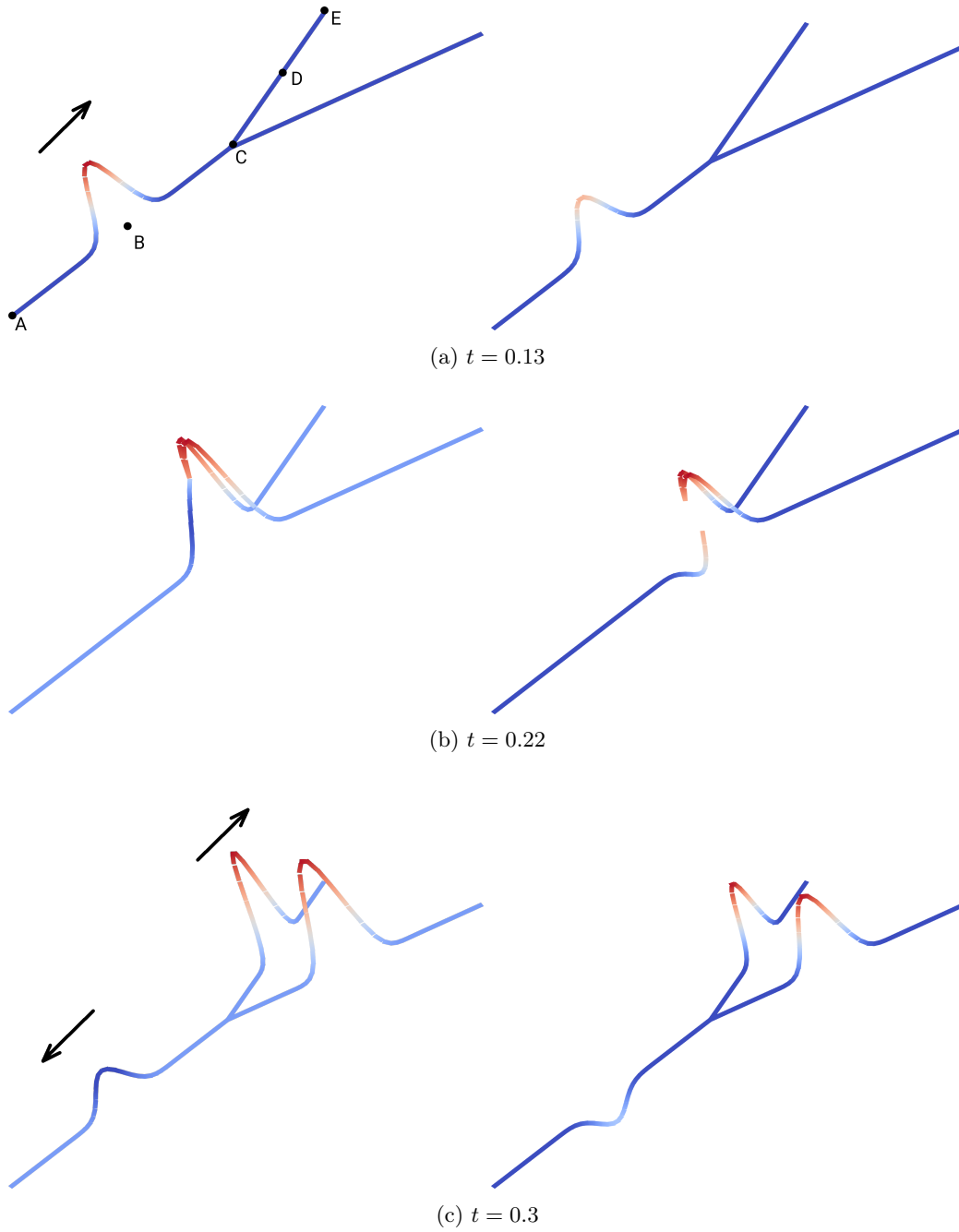


Рис. 9: Значение давления (слева) и скорости (справа) на различные моменты времени

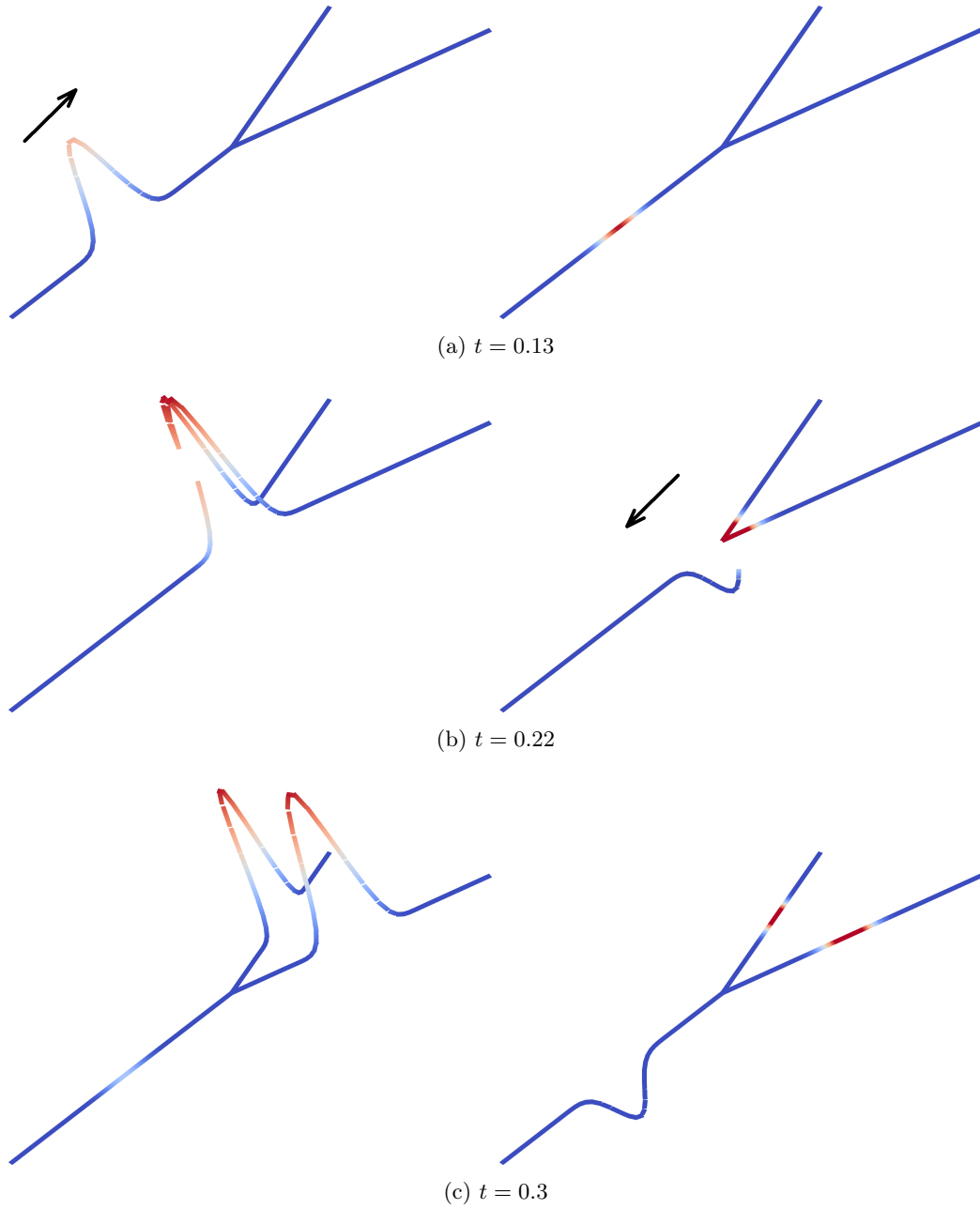


Рис. 10: Значение переменной w_1 (слева) и w_2 (справа) на различные моменты времени

В качестве граничного условия использовалось фиксированное входное значение площади поперечного сечения $a = A$ и зависимость скорости от времени вида:

$$u_{in}(t) = 0.01 \exp(-5000(t - 0.05)^2).$$

Таким образом, на вход подаётся единичная волна с пиковым значением скорости 0.01 м/с в момент времени 0.05 с.

Расчёты проедены на сетке из 120 конечных элементов (что соответствовало шагу по пространству $\Delta x = 0.005$ м) с шагом по времени $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4}$ с. При выбранных параметрах сосудов скорость возмущений составляла $c_0 = 1.2$ м/с и $c_0 = 2.94$ м/с для первого и вторых сосудов соответственно. То есть число Куранта составляло $CFL \approx 0.15$.

Продвижение волны давления и скорости представлены на рис. 9. Поступательная волна повышенного давления и скорости формируется от входного сечения (рис. 9a) и движется вперёд до точки разветвления (рис. 9b). В этой точке происходит отражение части волны назад, после чего наблюдаются

уже две волны (рис. 9с): поступательная волна продолжает движение по выходным сегментам графа, а возвратная волна повышенного давления и пониженной (отрицательной) скорости движется к входному сечению.

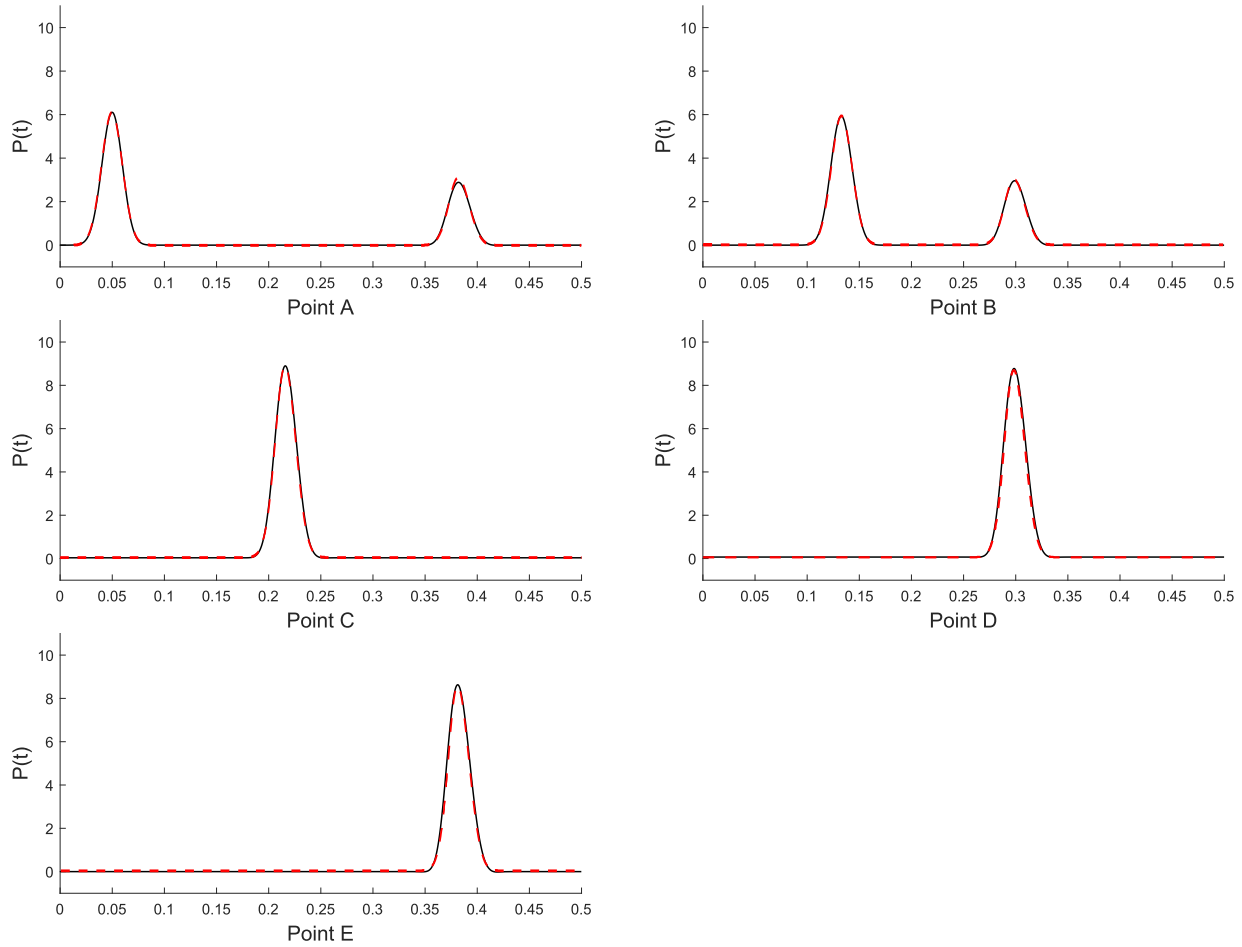


Рис. 11: Сравнение значения давления в контрольных точках. Сплошная линия – наш расчёт, пунктирная – результаты [20]

Чтобы отделить поступательные волны от возвратных был произведён пересчёт расчётных параметров в переменные Римана w_1 , w_2 . Их эволюция представлена на рис. 10. Как и следует из математического смысла этих переменных, каждая из них содержит волны только одного направления. Видно, что волна w_2 формируется в момент, когда поступательная волна w_1 достигает точки разветвления (рис. 10b), после чего волны w_1 и w_2 двигаются в противоположенных направлениях (рис. 10c).

Для сравнение полученных в результате наших расчётов данные с результатами из работы [20] были построены графики значения давления в контрольных точках (расположение контрольных точек смотри на рис. 9a). Наложение графиков, демонстрирующее хорошее совпадение результатов, представлено на рис. 11. На графиках для точек А и В видно, что через соответствующие контрольные точки проходит две волны. Сначала поступательная, потом отражённая возвратная. Тут же следует отметить, что отсутствие других возмущений говорит о корректной работе неотражающих граничных условий.

4.4 Течение в системе сосудов

Для иллюстрации применения численного метода рассмотрим задачу о течении в системе из семи сосудов, представленных на рис. 12.

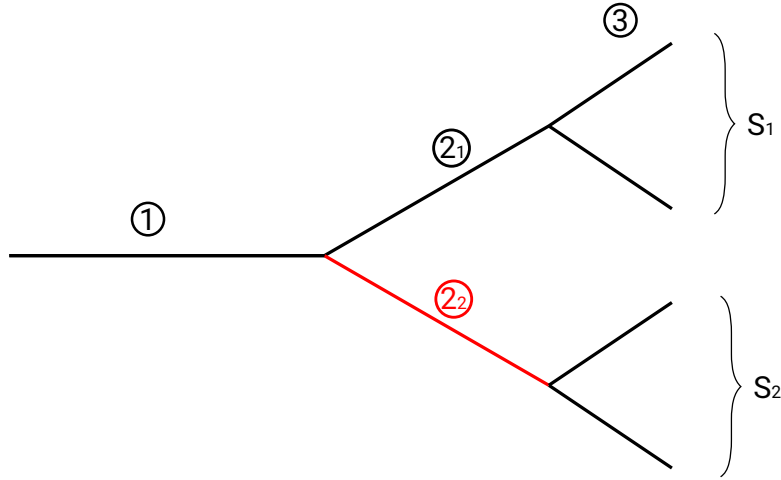


Рис. 12: Система из семи сосудов

Сосуды поделены на три группы: в группе 1 один крупный сосуд, в группе 2 два средних сосуда и в группе 3 четыре малых сосуда. Базовые свойства этих сосудов приведены в таблице (37).

параметр	сосуд 1	сосуды 2	сосуды 3
длина, м	1.0	0.8	0.5
R , мм	5.0	4.0	3.0
E , кПа	100		
h , мм	1.5		
ρ , кг/м ³	1050		
μ , Па с	0		

(37)

Упругие свойства нижнего из промежуточных сосудов 2.2 (на рисунке 12 обозначен красным цветом) в зависимости от варианта расчёта изменяются согласно вариантам, представленным в таблице 38.

параметр	вариант I	вариант II	вариант III	вариант IV
R , мм	4.0	4.0	$4.0/\sqrt{2}$	$4.0/\sqrt{2}$
E , кПа	100	1000	100	1000

(38)

Такие изменения характерны для склеротических поражений сосудов, при которых увеличивается жёсткость стенки и уменьшается эффективный радиус сосуда [10]. Вариант I будем считать базовым, в варианте II увеличен модуль упругости сосуда, в варианте III уменьшен радиус сосуда, вариант IV является суммой изменений из вариантов II и III.

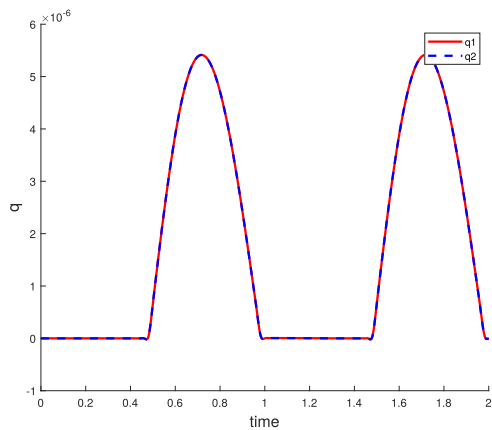
На входе устанавливается периодическое значение расхода $q_{in}(t)$ с максимальным значением в 20мл/сек:

$$q_{in}(t) = 2 \cdot 10^{-5} \max(0, \sin(2\pi t/T)).$$

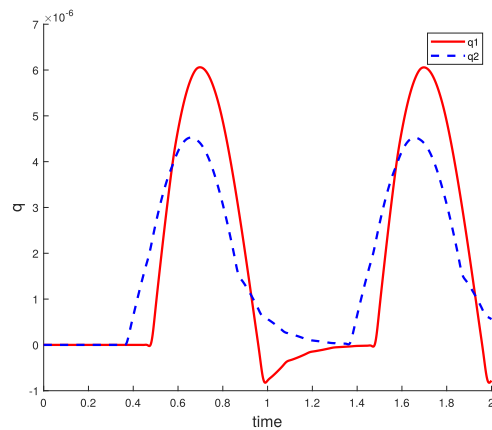
Рассматривались два периода T , соответствующие частоте сердцебиения bpm в 60 (спокойный пульс) и 180 (высокий пульс) ударов в минуту. В качестве выходного параметра мониторятся выходные значения расхода в сечениях, обозначенных на рис. 12 как S_1 (неповрежденная сторона системы) и S_2 (повреждённая сторона системы).

Результаты для значения $bpm = 60$ приведены на рис. 13, а для $bpm = 180$ – на рис. 14. На рис. 15 приведено значение скорости течения на различные моменты времени. Видно, что оба типа повре-

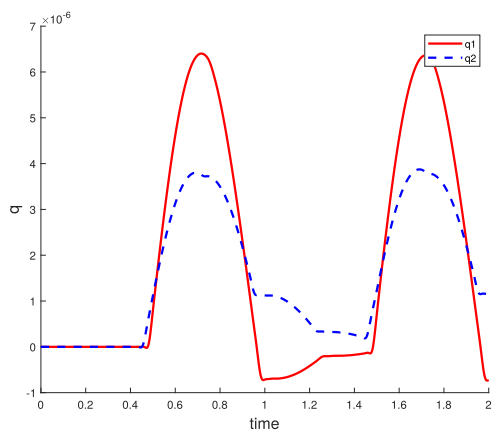
ждения значительно уменьшают количество жидкости, протекающей через повреждённую сторону, при этом также происходит изменения величины расхода и для неповреждённой стороны. В частности, там наблюдаются потоки, текущие в обратном направлении ($u < 0$). Для $bpm = 180$ качественная картина не меняется, но при этом перепады значений расходов между сечениями S_1 и S_2 кратно увеличивается. Из этого можно сделать вывод, что негативные последствия, связанные с нарушением эластичности стенок сосудов, проявляет себя сильнее при высоком пульсе.



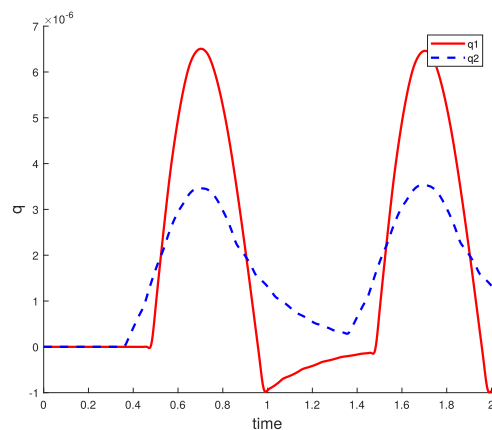
(a) Вариант I



(b) Вариант II

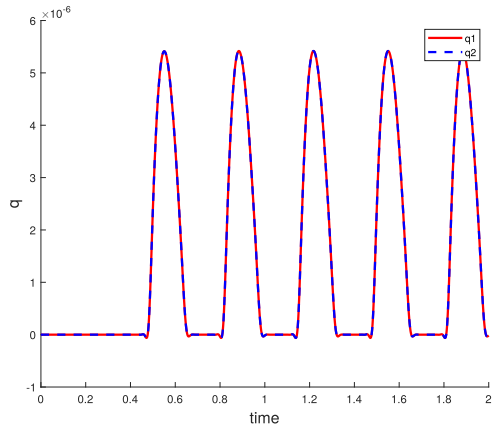


(c) Вариант III

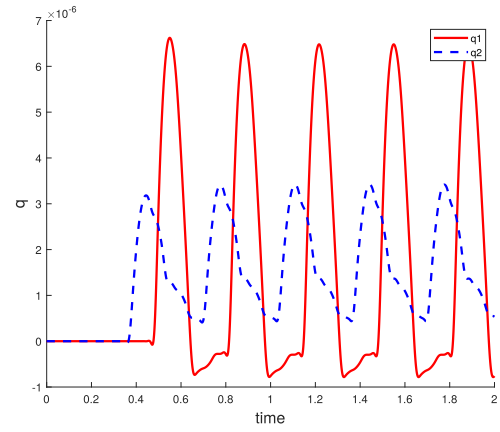


(d) Вариант IV

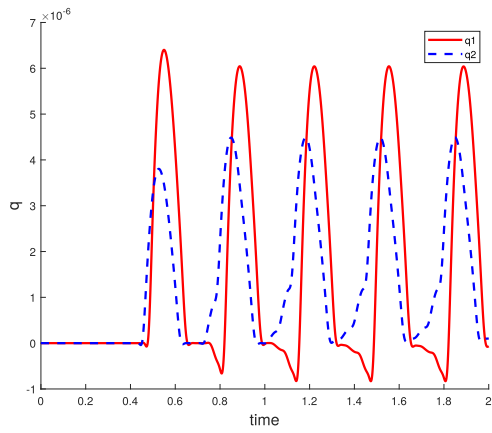
Рис. 13: Значение расходов через сечения S_1 (красная линия) и S_2 (синяя линия) для различных способов повреждения сосудов, ведущих к S_2 . Частота – $bpm = 60$



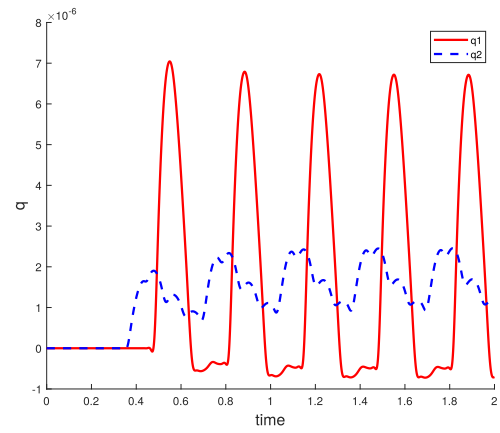
(a) Вариант I



(b) Вариант II



(c) Вариант III



(d) Вариант IV

Рис. 14: Значение расходов через сечения S_1 (красная линия) и S_2 (синяя линия) для различных способов повреждения сосудов, ведущих к S_2 . Частота – $bpt = 180$

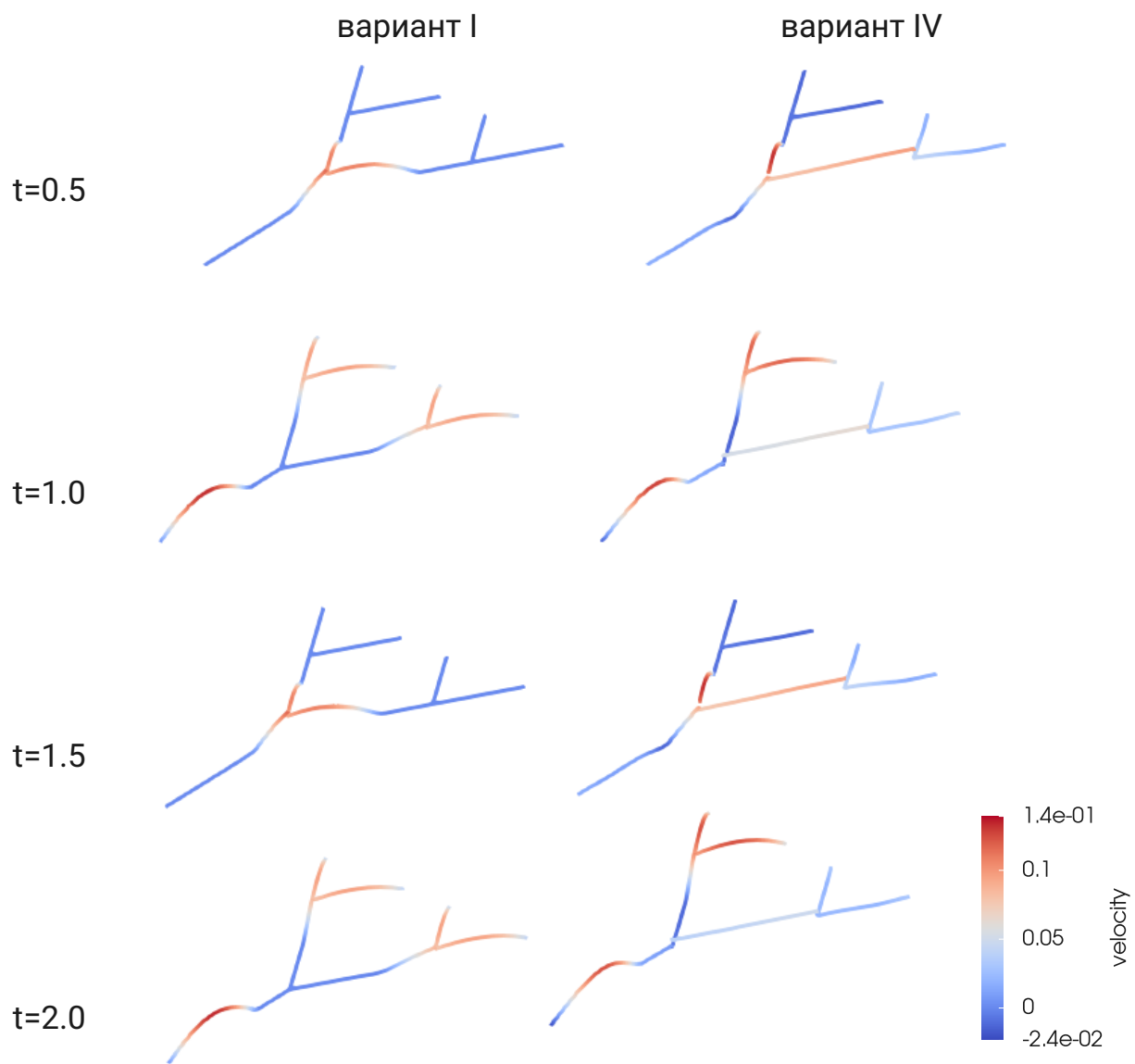


Рис. 15: Значение скорости течения u на различные моменты времени при частоте $bpm = 180$. Слева вариант I, справа вариант IV

5 Заключение

В настоящей работе была рассмотрена нестационарная задача о течении крови в разветвленной сети сосудов с упругими стенками. Кровь считалась вязкой ньютоновской жидкостью с постоянной плотностью. Использовалась одномерная модель, в которой определяющие уравнения записываются относительно средних по сечению сосуда скорости и давления, а также площади этого сечения. Упругие свойства стенок сосуда описывались по равновесной модели в приближении однородной тонкой эластичной мембраны, характеризуемой толщиной, модулем упругости и площадью поперечного сечения при отсутствии внешнего воздействия. Дополнительным упрощением модели являлось использование постоянного радиально-симметричного профиля скорости.

Для определяющей системы уравнений был разработан вычислительный алгоритм. Для аппроксимации по пространству использовался метод разрывных конечных элементов с Лагранжевскими элементами первого порядка. Аппроксимация по времени осуществлялась с помощью схемы Кранка–Николсон. Таким образом, аппроксимации и по времени и по пространству имели второй порядок точности.

Предложенная численная схема была верифицирована путём сравнения её результатов с известными аналитическими и численными решениями модельных задач о течении крови в аналогичной одномерной постановке. Рассматривались задачи о течении в одиночном однородном сосуде, о течении в сосуде с неупругой вставкой, о течении в разветвлении сосудов. Для всех рассмотренных задач получено удовлетворительное совпадение результатов.

В качестве иллюстрации применения алгоритма для расчёта более сложной системы была рассмотрена задача течения в сети из семи сосудов, один из которых имел повышенный модуль упругости и уменьшенный радиус. Подобные изменения свойств характерны для склеротических поражений сосудов. Было показано, что наличие таких повреждений в одном из сосудов ведёт к значительному перераспределению потоков на выходе из системы сосудов. Причём разница в значении расходов на выходе из системы растёт с увеличением частоты сердечных сокращений.

Условные обозначения

x	пространственная координата вдоль сосуда, [м]	5
t	время, [с]	5
a	площадь поперечного сечения сосуда в фиксированном сечении, [м ²]	7
R	$= \sqrt{a/\pi}$, радиус сосуда, [м]	7
u	средняя по поперечному сечению сосуда скорость жидкости, [м/с]	7
r'	нормированная на общий радиус R радиальная координата сосуда, [1]	7
U	нормированный профиль скорости, [1]	7, 8
p	среднее по поперечному сечению сосуда давление, [Па]	7
ρ	плотность жидкости, [кг/м ³]	7
μ	динамическая вязкость жидкости, [Па·с]	7
K_ν	коэффициент при вязком слагаемом в определяющей системе уравнений, [м ² /с]	9
A	площадь поперечного сечения сосуда при отсутствии внешнего воздействия, [м ²]	9
β	параметр, описывающий эластичные свойства материала стенки сосуда, [кг/с ²]	9
h	толщина стенки сосуда, [м]	9
E	модуль упругости стенки сосуда, [Па]	9
$w_{1,2}$	переменные Римана, [м/с]	10
$\lambda_{1,2}$	скорости переноса переменных Римана, [м/с]	10
c	скорость переноса возмущений, [м/с]	10
c_0	$= c(A)$, скорость переноса возмущений в нейтральном состоянии сосуда, [м/с]	10
q	объёмный расход жидкости, [м ³ /с]	11
P	полное давление [Па]	12
Δx	шаг по пространству, [м]	13
Δt	шаг по времени, [с]	13
θ	степень невязности дискретизации по времени	13
CFL	$= c_0 \Delta t / \Delta x$, число Куранта, рассчитанное по скорости c_0 , [1]	17
bpm	частота сердцебиения, [ударов/мин]	23

Список литературы

1. Bessonov N., Babushkina E., Golovashchenko S. F., Tosenberger A., Ataullakhanov F., Panteleev M., Tokarev A., Volpert V. Numerical Modelling of Cell Distribution in Blood Flow // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2014. — Т. 9, № 6. — С. 69–84. — DOI: [10.1051/mmnp/20149606](https://doi.org/10.1051/mmnp/20149606).
2. Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P. J., Müller L. O., Fossan F. E., Hellevik L. R., Donders W. P., Huberts W., Willemet M., Alastruey J. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2015. — Т. 31, № 10. — e02732. — DOI: <https://doi.org/10.1002/cnm.2732>. — eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cnm.2732>. — URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.2732>.
3. Di Pietro D. A., Ern A. Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods. Т. 69. — Berlin : Springer, 2012. — (Mathématiques et Applications). — ISBN 9783642229794. — DOI: [10.1007/978-3-642-22980-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-22980-0). — URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-22980-0>.
4. Fedosov D., Pivkin I., Karniadakis G. Velocity limit in DPD simulations of wall-bounded flow // Journal of Computational Physics. — 2008. — Февр. — Т. 227. — С. 2540–2559. — DOI: [10.1016/j.jcp.2007.11.009](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.11.009).
5. Fedosov D. A. Multiscale Modeling of Blood Flow and Soft Matter //. — 2010. — URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:123491481>.
6. Formaggia L., Gerbeau J., Nobile F., Quarteroni A. On the coupling of 3D and 1D Navier–Stokes equations for flow problems in compliant vessels // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2001. — Т. 191, № 6. — С. 561–582. — ISSN 0045-7825. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00302-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00302-4). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782501003024> ; Minisymposium on Methods for Flow Simulation and Modeling.
7. Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // Journal of Engineering Mathematics. — 2003. — Дек. — Т. 47. — DOI: [10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29](https://doi.org/10.1023/B:ENGI.0000007980.01347.29).
8. Hosseini S. M., Feng J. J. A particle-based model for the transport of erythrocytes in capillaries // Chemical Engineering Science. — 2009. — Т. 64, № 22. — С. 4488–4497. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.11.028>.
9. Hughes T. J., Lubliner J. On the one-dimensional theory of blood flow in the larger vessels // Mathematical Biosciences. — 1973. — Т. 18, № 1. — С. 161–170. — ISSN 0025-5564. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(73\)90027-8](https://doi.org/10.1016/0025-5564(73)90027-8). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0025556473900278>.
10. Maurice R., Ohayon J., Finet G., Cloutier G. Adapting the Lagrangian speckle model estimator for endovascular elastography: Theory and validation with simulated radio-frequency data // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2004. — Сент. — Т. 116. — С. 1276–86. — DOI: [10.1121/1.1771615](https://doi.org/10.1121/1.1771615).
11. Mehboudi A., Saidi M. A systematic method for the complex walls no-slip boundary condition modeling in dissipative particle dynamics // Scientia Iranica. — 2011. — Т. 18, № 6. — С. 1253–1260. — ISSN 1026-3098. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scient.2011.11.003>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1026309811002057>.
12. Møller P. C. F., Mewis J., Bonn D. Yield stress and thixotropy: on the difficulty of measuring yield stresses in practice // Soft Matter. — 2006. — Т. 2, вып. 4. — С. 274–283. — DOI: [10.1039/B517840A](https://doi.org/10.1039/B517840A). — URL: <http://dx.doi.org/10.1039/B517840A>.
13. Mueller L., Blanco P., Watanabe S., Feijóo R. A high-order local time stepping finite volume solver for one-dimensional blood flow simulations: Application to the ADAN model // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. — 2015. — Дек. — Т. 32. — n/a–n/a. — DOI: [10.1002/cnm.2761](https://doi.org/10.1002/cnm.2761).

14. *Sazonov I., Nithiarasu P.* A novel, FFT-based one-dimensional blood flow solution method for arterial network // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. — 2019. — Окт. — Т. 18. — DOI: [10.1007/s10237-019-01146-0](https://doi.org/10.1007/s10237-019-01146-0).
15. *Sherwin S., Formaggia L., Peiro J., Franke V.* Computational Modeling of 1D Blood Flow with Variable Mechanical Properties and Application to the Simulation of Wave Propagation in the Human Arterial System // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2003. — Окт. — Т. 43. — С. 673–700. — DOI: [10.1002/flid.543](https://doi.org/10.1002/flid.543).
16. *Smith N. P., Pullan A. J., Hunter P. J.* An Anatomically Based Model of Transient Coronary Blood Flow in the Heart // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 2001. — Т. 62, № 3. — С. 990–1018. — ISSN 00361399. — URL: <http://www.jstor.org/stable/3061797> (дата обр. 16.06.2024).
17. *Taylor C. A., Hughes T. J., Zarins C. K.* Finite element modeling of blood flow in arteries // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Т. 158, № 1. — С. 155–196. — ISSN 0045-7825. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)80008-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)80008-X). — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259880008X>.
18. *Thurston G. B.* Viscoelasticity of Human Blood // Biophysical Journal. — 1972. — Т. 12, № 9. — С. 1205–1217. — DOI: [https://doi.org/10.1016/s0006-3495\(72\)86156-3](https://doi.org/10.1016/s0006-3495(72)86156-3).
19. *Walburn F. J., Schneck D. J.* A constitutive equation for whole human blood // Biorheology. — 1976. — Т. 13, № 3. — С. 201–210. — DOI: <https://doi.org/10.3233/bir-1976-13307>.
20. *Xiu D., Sherwin S. J.* Parametric uncertainty analysis of pulse wave propagation in a model of a human arterial network // Journal of Computational Physics. — 2007. — Т. 226, № 2. — С. 1385–1407. — ISSN 0021-9991. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.05.020>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107002392>.
21. *Yamaguchi T., Ishikawa T., Imai Y., Matsuki N., Xenos M., Deng Y., Bluestein D.* Particle-Based Methods for Multiscale Modeling of Blood Flow in the Circulation and in Devices: Challenges and Future Directions // Annals of biomedical engineering. — 2010. — Март. — Т. 38. — С. 1225–35. — DOI: [10.1007/s10439-010-9904-x](https://doi.org/10.1007/s10439-010-9904-x).
22. *Yao Z., Li G., Song L.* A Well-Balanced Discontinuous Galerkin Method for the Blood Flow Model // Journal of Mathematical Study. — 2017. — Июнь. — Т. 50. — С. 174–189. — DOI: [10.4208/jms.v50n2.17.04](https://doi.org/10.4208/jms.v50n2.17.04).