Aproksymacja profilu wysokościowego

Metody numeryczne - projekt 3

Oliwier Komorowski 197808

Wstęp

Profil wysokościowy (profil topograficzny) trasy to wykres przedstawiający wysokość bezwzględną w terenie w zależności od odległości punktu od początku trasy.
Znając wysokość tylko części punktów trasy możemy określić wysokości punktów pośrednich za pomocą aproksymacji interpolacyjnej.

Metody interpolacji

Interpolacja - estymacja wartości badanej w obszarach pomiędzy dyskretnymi punktami.

- **Metoda interpolacji Lagrange'a** to metoda interpolacji wielomianowej. Funkcja interpolująca $F(x)$ ma postać:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \phi_i(x)\ ,$$

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\ .$$

- **Metoda funkcjami sklejanymi** to interpolacja lokalna (między poszczególnymi węzłami) z użyciem wielomianów niskiego stopnia. $S_i(x), S_i(x), S_i(x), \dots S_n(x)$. Algorytm, dla $S_i(x)$ w postaci wielomianu trzeciego stopnia $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$, przyjmuje takie założenia (układ równań) :

$$\begin{cases} S_0(x_0) = f(x_0) \\ S_0(x_1) = f(x_1) \\ S_1(x_1) = f(x_1) \\ S_1(x_2) = f(x_2) \\ S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \\ S_0'' = S_1''(x_1) \\ S_0''(x_0) = 0 \\ S_1''(x_2) = 0 \end{cases}\ .$$

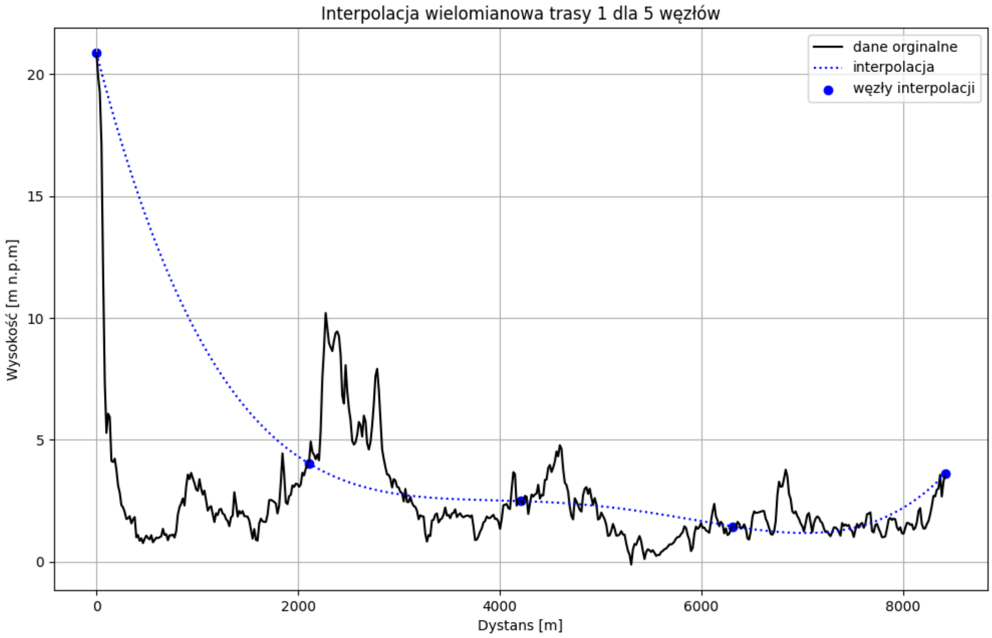
Analiza

Obie metody były analizowane na danych z przykładowych trasach:

1) Spacerniak Gdańsk - płaska trasa z jednym wzniesieniem
2) Wielki Kanion - trasa o zróżnicowanym terenie z wieloma stromymi wzniesieniami
3) Chełm - trasa z jednym dużym wzniesienie, bez bardziej stromych zbocz

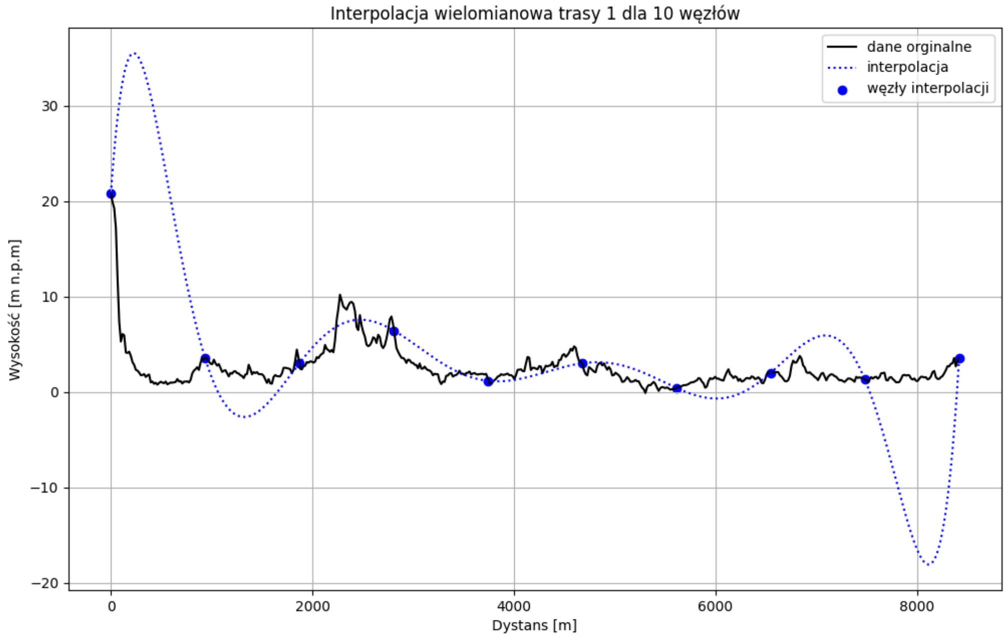
1. Analiza interpolacji wielomianowa pierwszej trasy:

- 5 węzłów



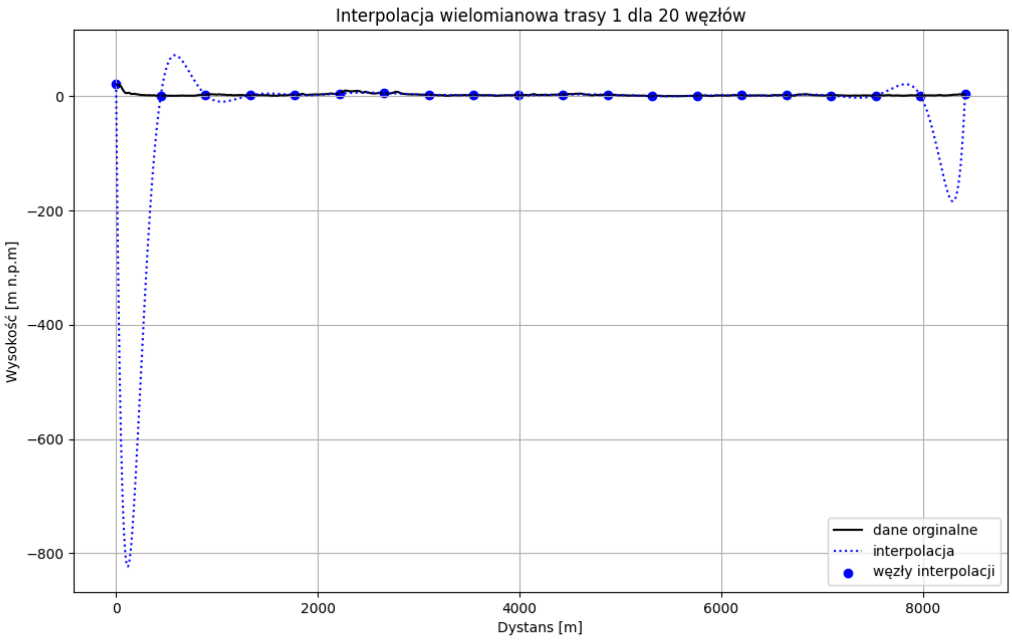
Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange’a dla małej ilości węzłów mocno uśrednia wartości funkcji reprezentującej profil wysokościowy. Ze względu na małe różnice wartości na dłuższym odcinku trasy metoda radzi sobie dobrze. Niestety w sąsiedztwie wzniesienia na trasie wielomian Lagrange’a przekłamuje rzeczywiste wartości, aby wypłaszczyć wykres interpolacji.

- 10 węzłów



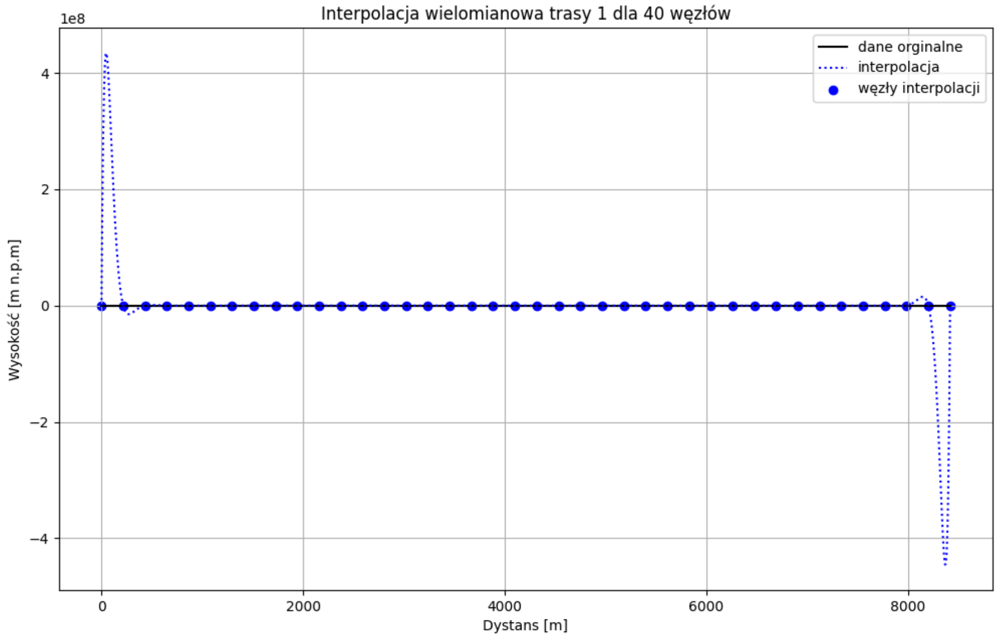
Dla 10 węzłów metoda wielomianowa zaczyna przyjmować wierniejsze odwzorowanie trasy. Niestety przy granicach interpolowanych wartości pojawiają się szumy, zakłócenia, które zakłamują obraz funkcji.

- 20 węzłów



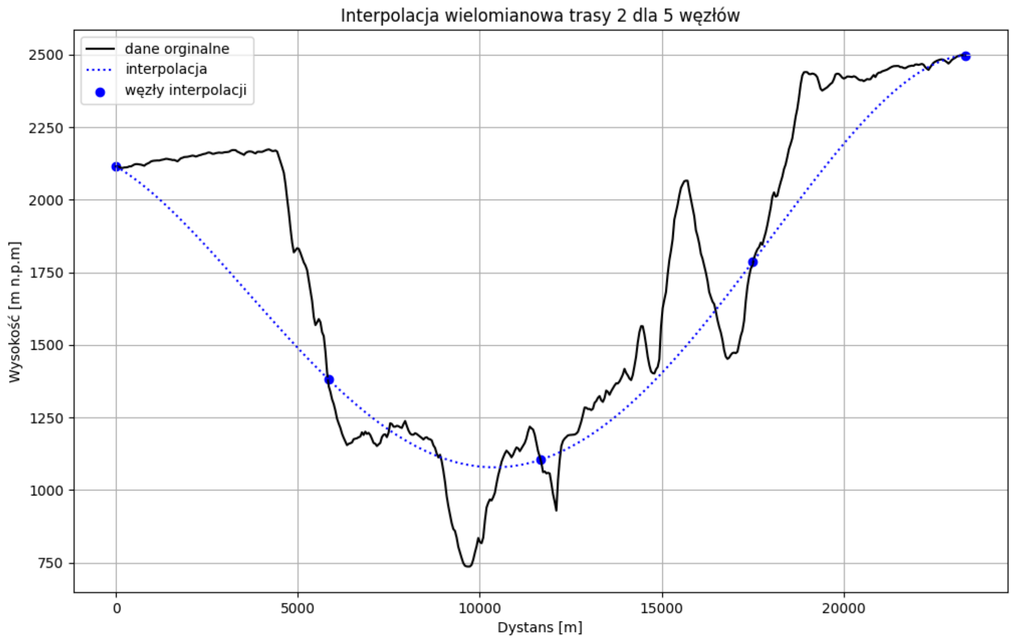
Wartości interpolacji wielomianowej dla jeszcze większej ilości węzłów zaczynają drastycznie różnić się od realnych wartości przy granicach. W tym przypadku największa różnica między realną wysokością a wynikiem interpolacji wynosi ok. 800 m.

- 40 węzłów



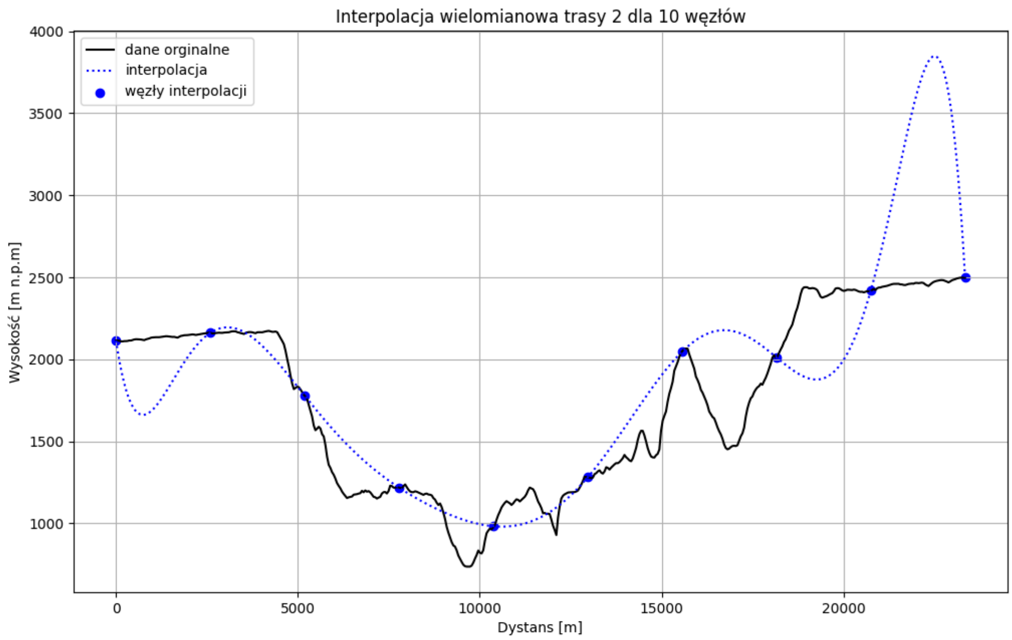
Widzimy, że dla 40 węzłów błąd metody wielomianowej dla wartości przy granicach wykresu wynosi już ponad $4 \cdot 10^8$.

2. **Analiza interpolacji wielomianowa drugiej trasy:**
   - 5 węzłów



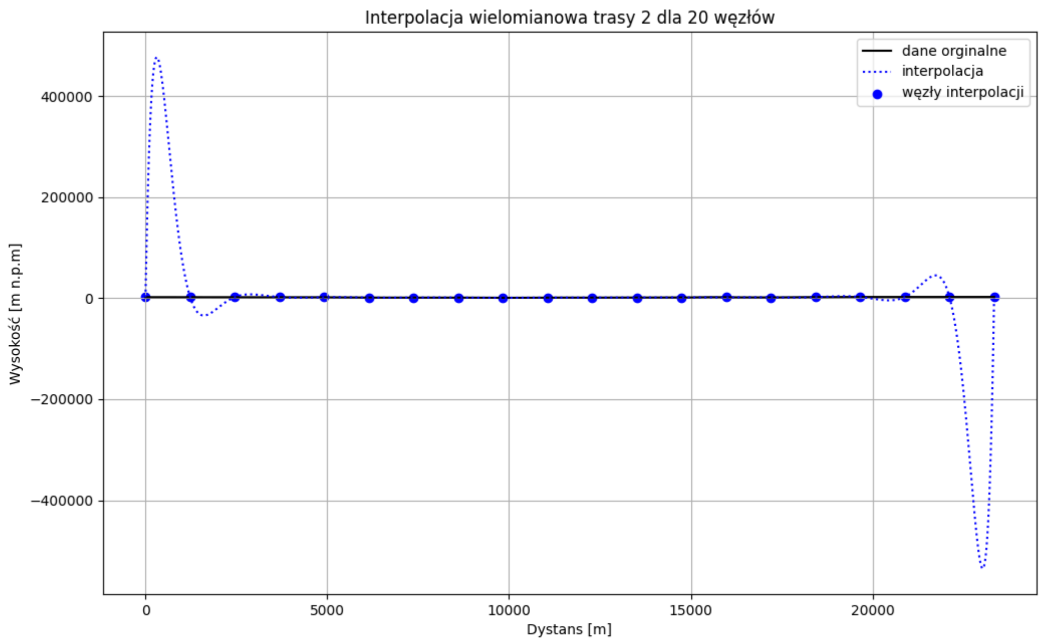
Tutaj interpolacja funkcji przybliża nam charakterystykę analizowanego terenu. Niestety błędnie obrazuje ona gwałtowność zmian wysokości na trasie.

- 10 węzłów



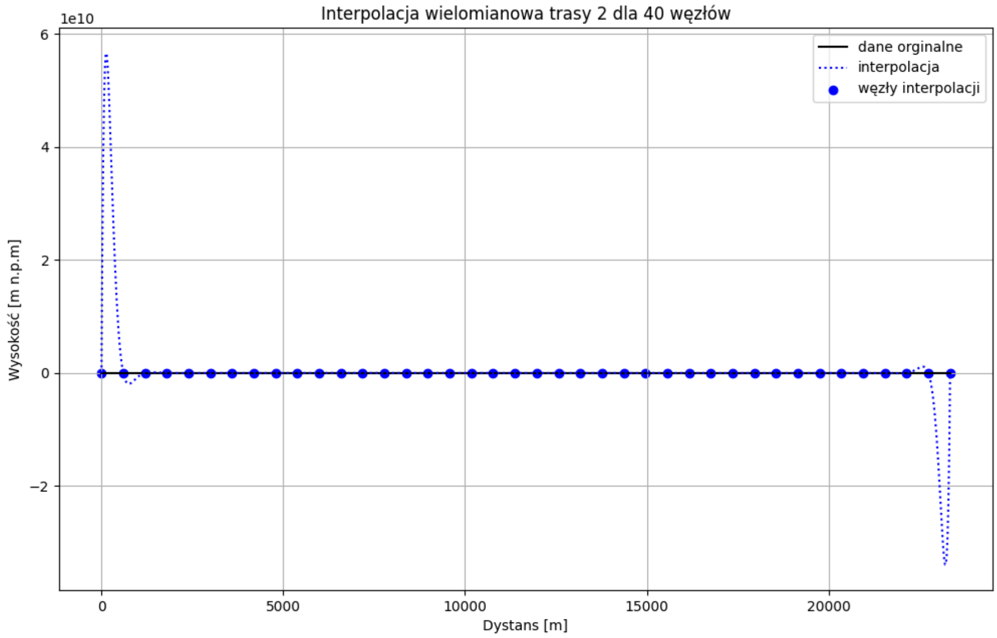
Zwiększenie ilości węzłów pomogło w zobrazowaniu tempa zmiany wysokości terenu. Możemy zaobserwować, że znowu zaczynają się pojawiać zakłócenia przy granicach funkcji.

- 20 węzłów



Dla 20 węzłów interpolacji przekłamanie wyników jest już na tyle duże, że z wykresu można błędnie wywnioskować, że różnice wysokości na oryginalnej trasie są pomijalnie małe.

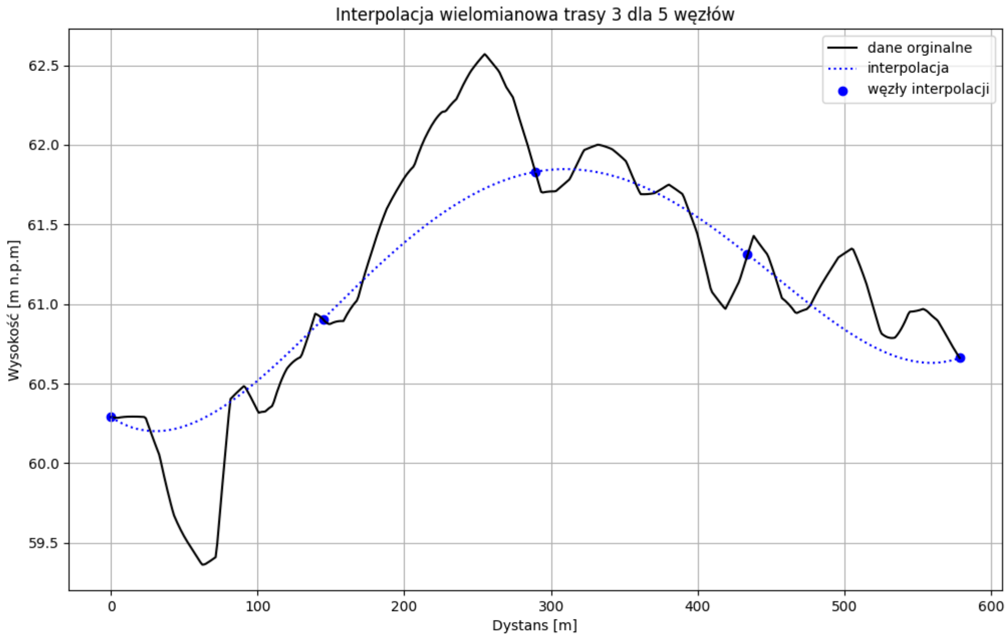
- 40 węzłów



Dla drugiej trasy w interpolacja Lagrange'a, przy 40 węzłach, błąd w zwracanych wartościach może wynosić nawet ok. $5{,}5 \cdot 10^{10}$.

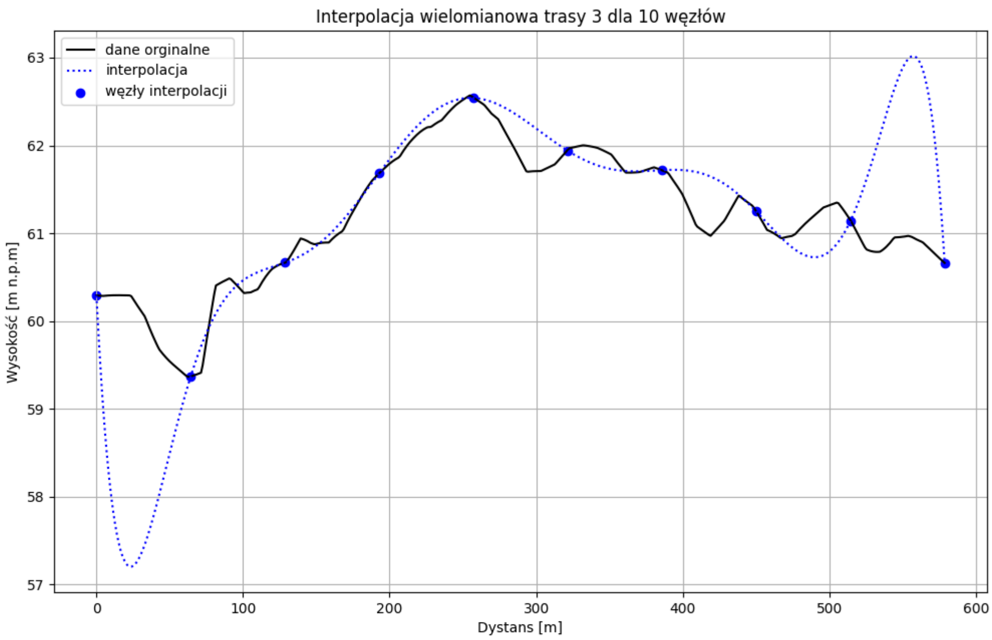
3. Analiza interpolacji wielomianowa trzeciej trasy:

- 5 węzłów



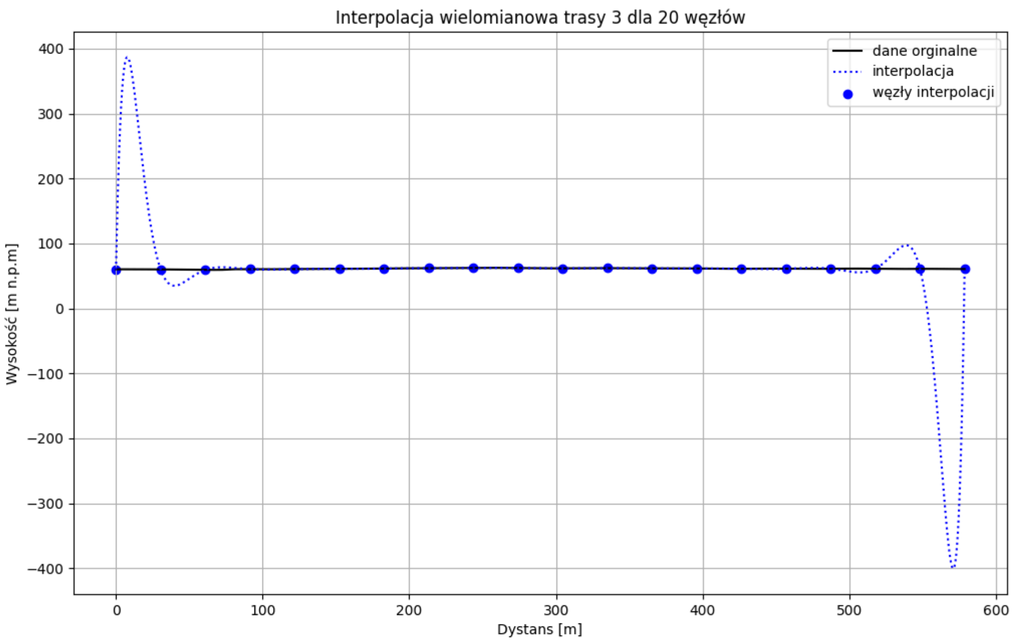
Dla 5 węzłów przy interpolacji wielomianowej trzeciej trasy osiągamy lepsze przybliżenie realnych wartości niż w przypadku trasy drugiej. Niestety ponownie mocno uśrednia wysokość na trasie. Nie można przez to zaobserwować stromych zmian w terenie.

- 10 węzłów



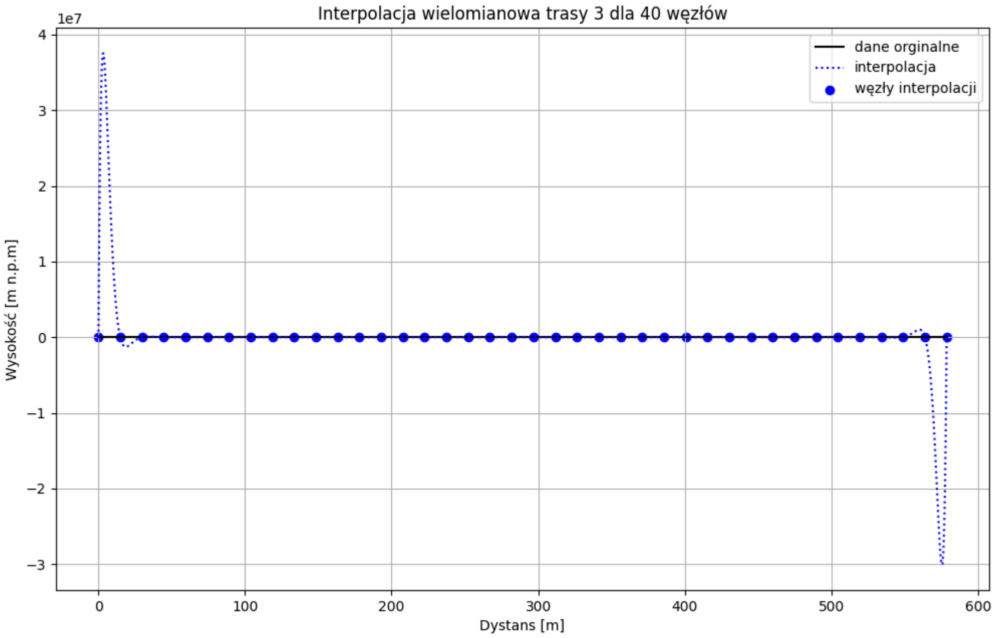
Przy 10 węzłach interpolacji ponownie pojawiają się zakłócenie przy granicach analizowanych wartości, które powodują błędną interpolacje, mimo poprawnego odwzorowania w środku wykresu.

- 20 węzłów



Ponownie metoda wielomianowa przy 20 węzłach całkowicie uniemożliwia poprawną analizę wysokości na trasie.

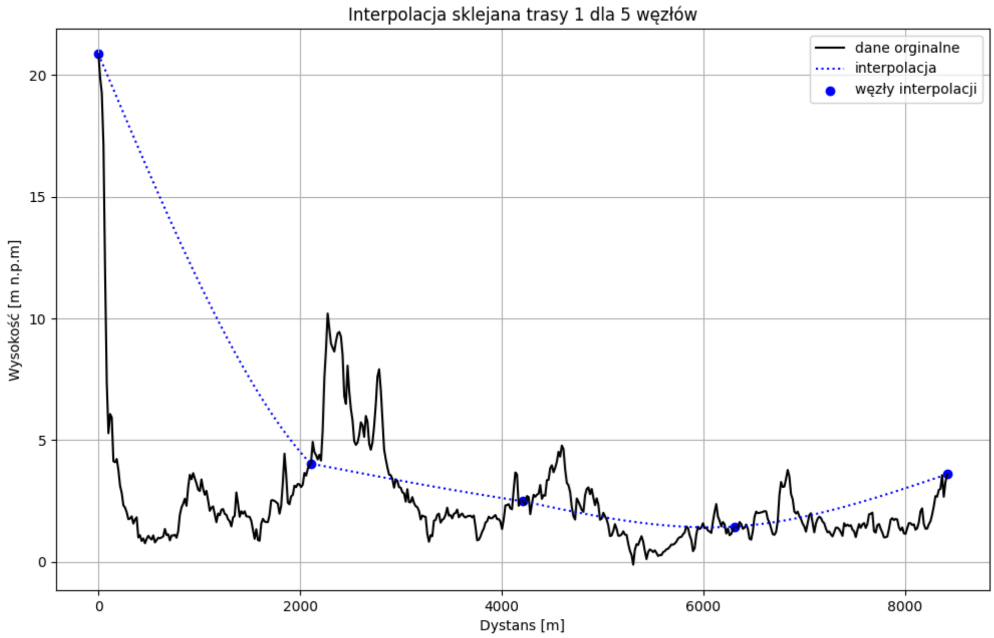
- 40 węzłów



Przy 40 węzłach, w tym przypadku, różnica w interpolowanych wartościach wynosi ok. $3{,}75 \cdot 10^7$.

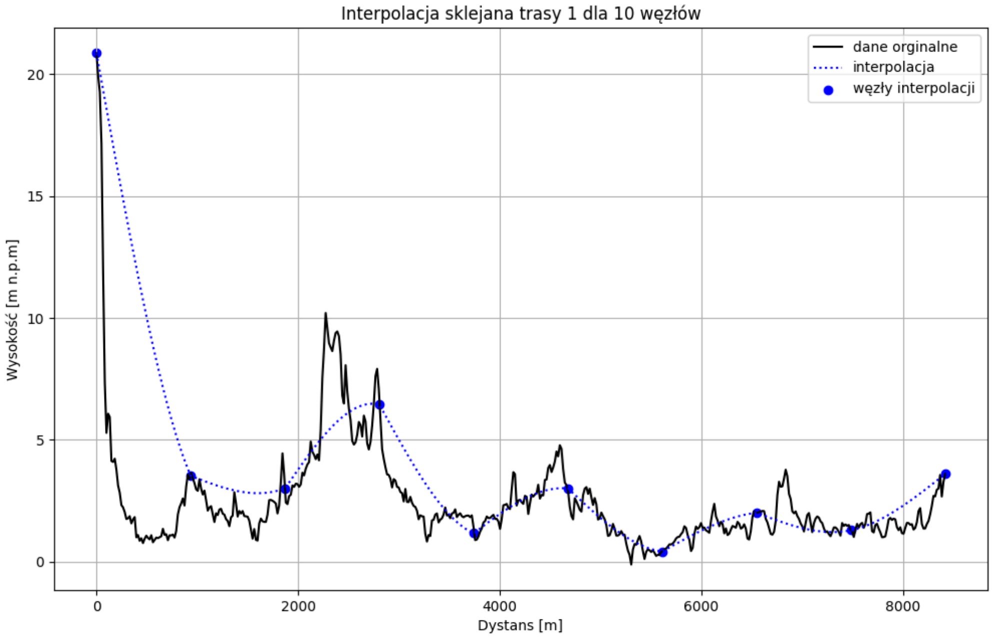
4. Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy:

- 5 węzłów



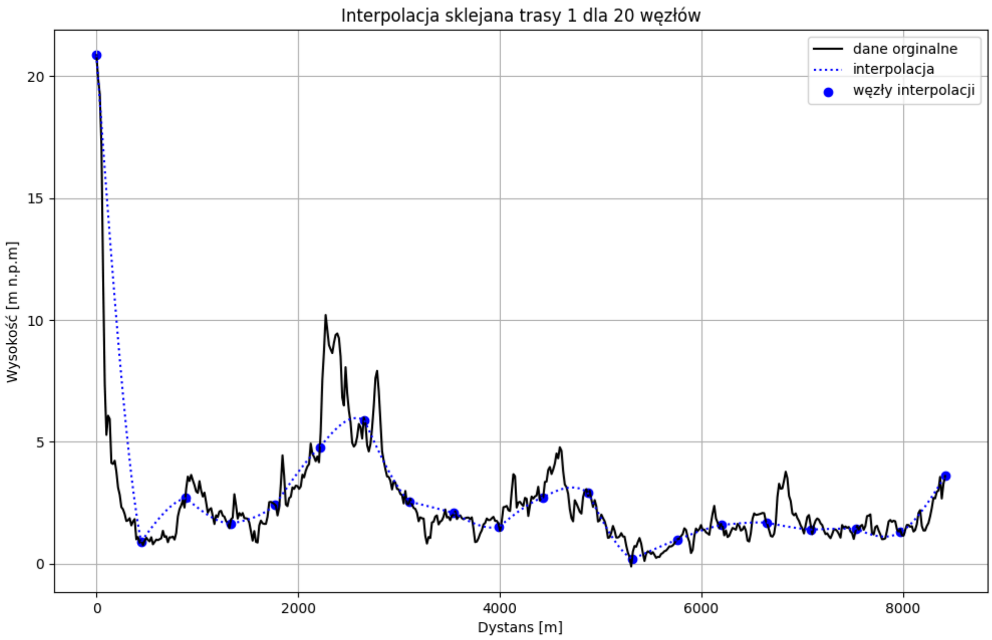
Interpolacja funkcjami sklejanymi, dla 5 węzłów, ponownie ma problem z stromościami na trasie, ponieważ mocno uśrednia wyniki.

- 10 węzłów



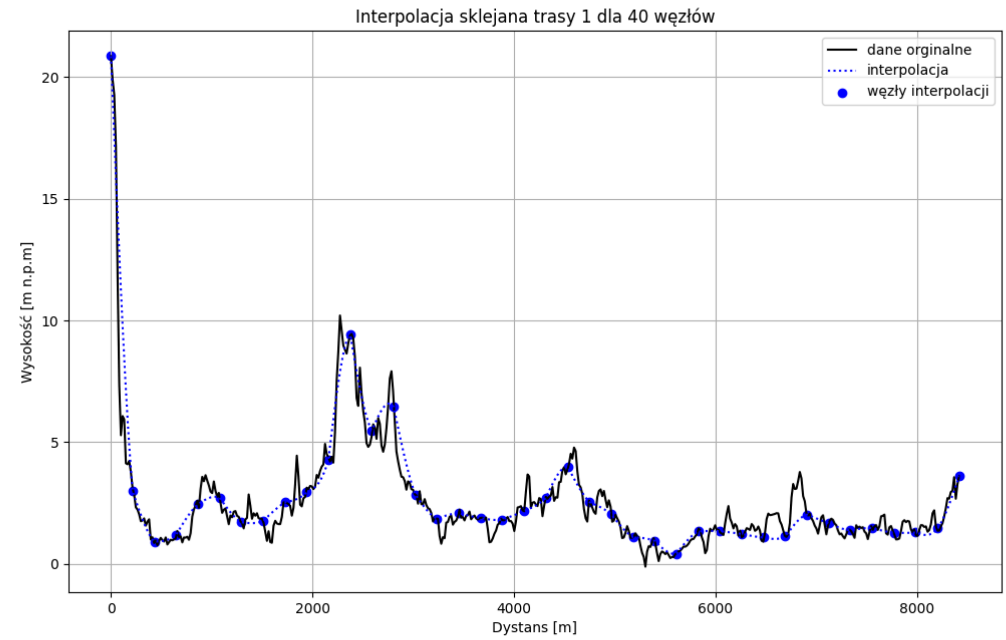
Dla 10 węzłów interpolacja zaczyna wyglądać lepiej. Można zaobserwować na wykresie lepiej odwzorowane wartości i nie pojawiają się zakłócenia, które obecne były w metodzie Lagrange'a.

- 20 węzłów



Tutaj wykres interpolacji wygląda już dobrze, ale dalej pojawiają się błędy przy mocna stromych fragmentach trasy.

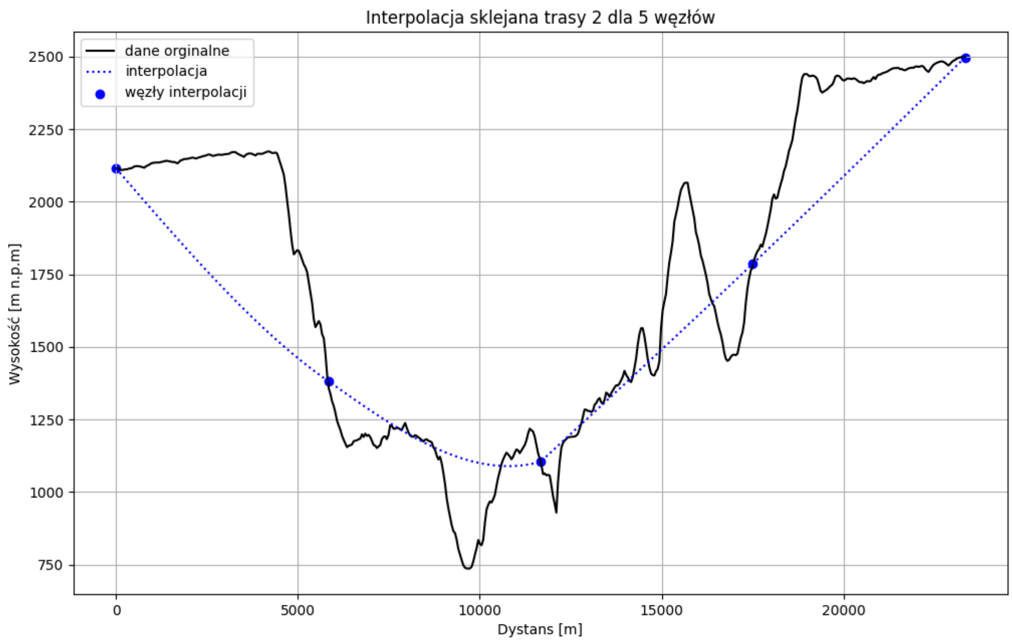
- 40 węzłów



Można powiedzieć, że dla 40 węzłów interpolacji metoda ta zwraca już satysfakcjonujący wynik.

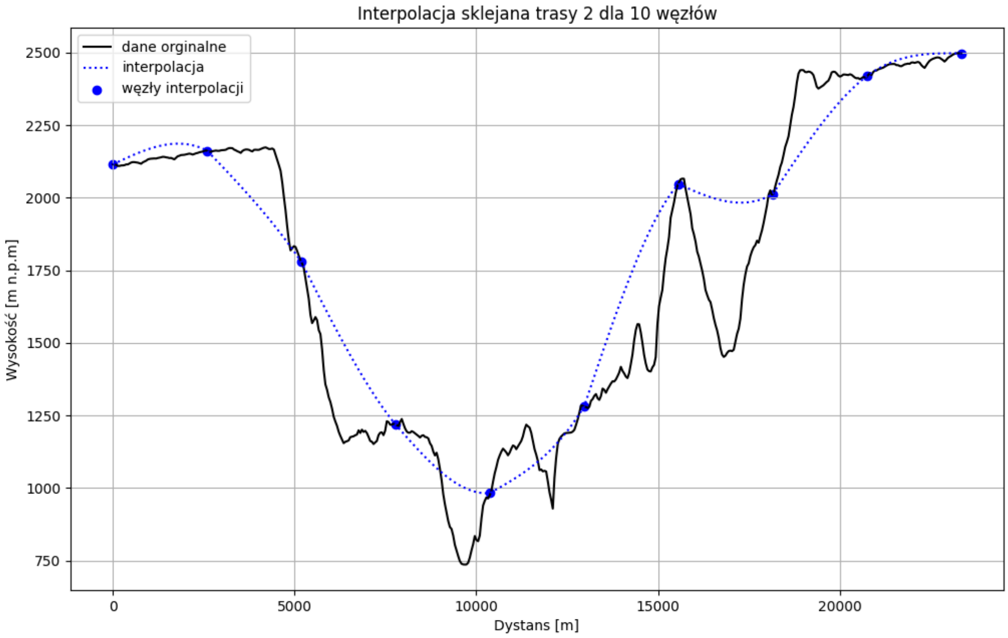
5. Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy:

- 5 węzłów



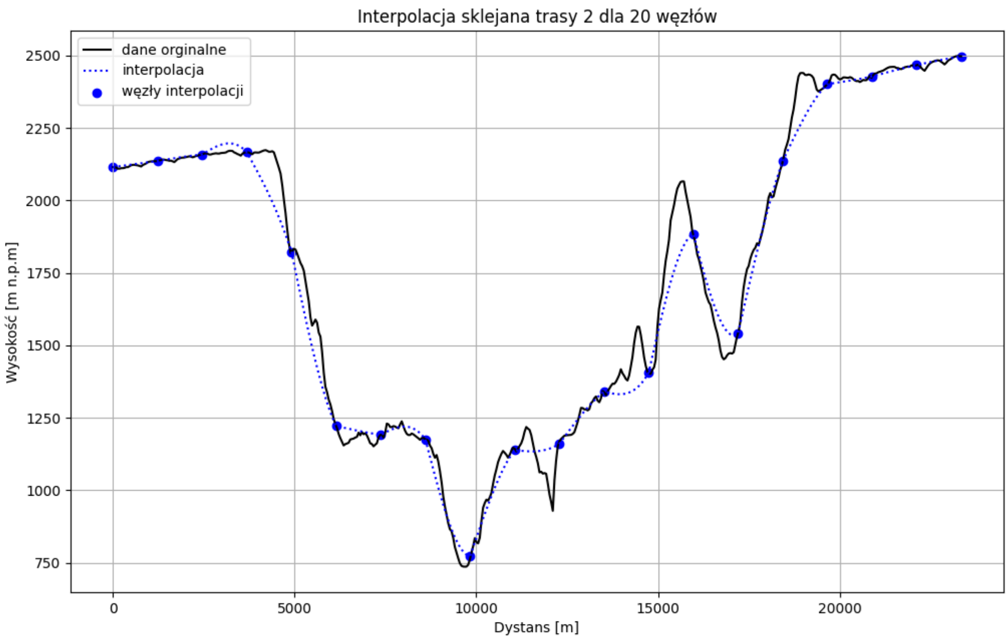
W przypadku drugiej trasy metoda funkcjami sklejanymi dalej nie potrafi zobrazować stromych fragmentów trasy dla małej ilości węzłów interpolacji.

- 10 węzłów



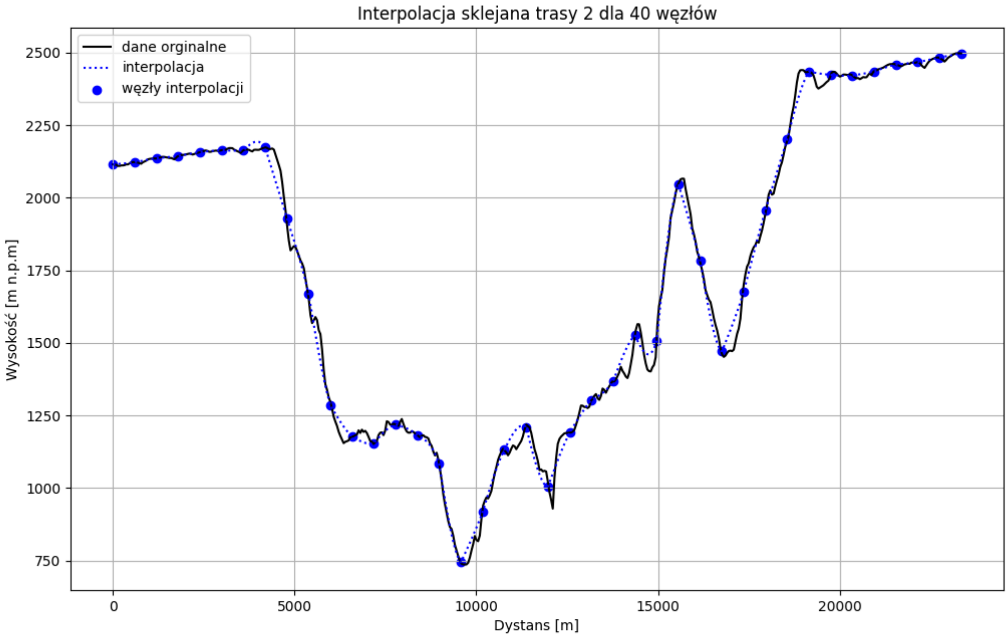
Dla 10 węzłów wynik jest już lepszy, ale dalej nie satysfakcjonujący.

- 20 węzłów



Dla 20 węzłów występują już tylko pojedyncze błędy w interpolacji.

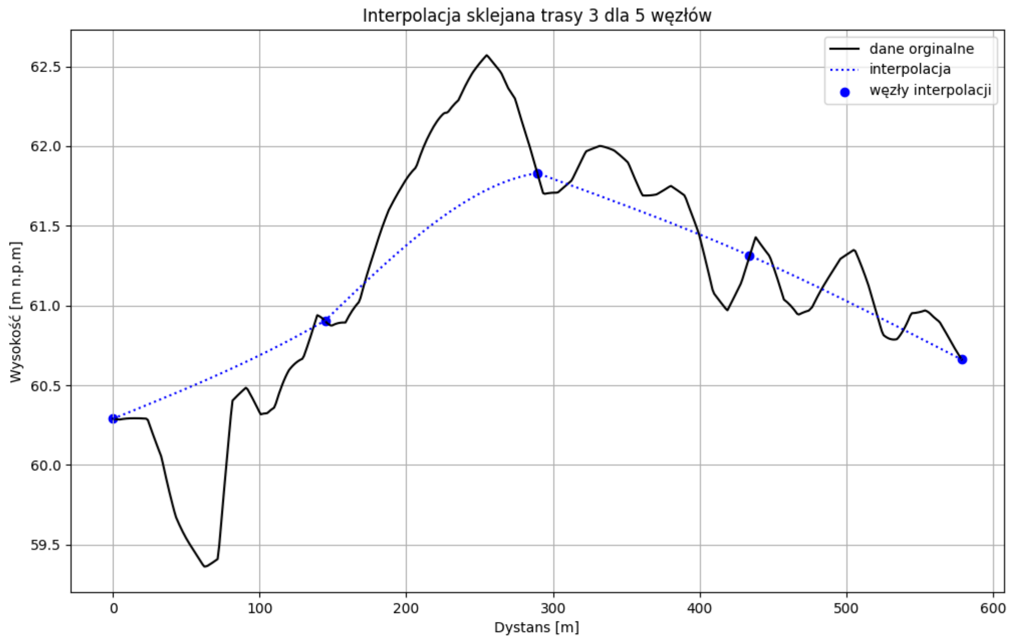
- 40 węzłów



Metoda ta osiąga satysfakcjonujący wynik dla tej trasy przy 40 węzłach interpolacji

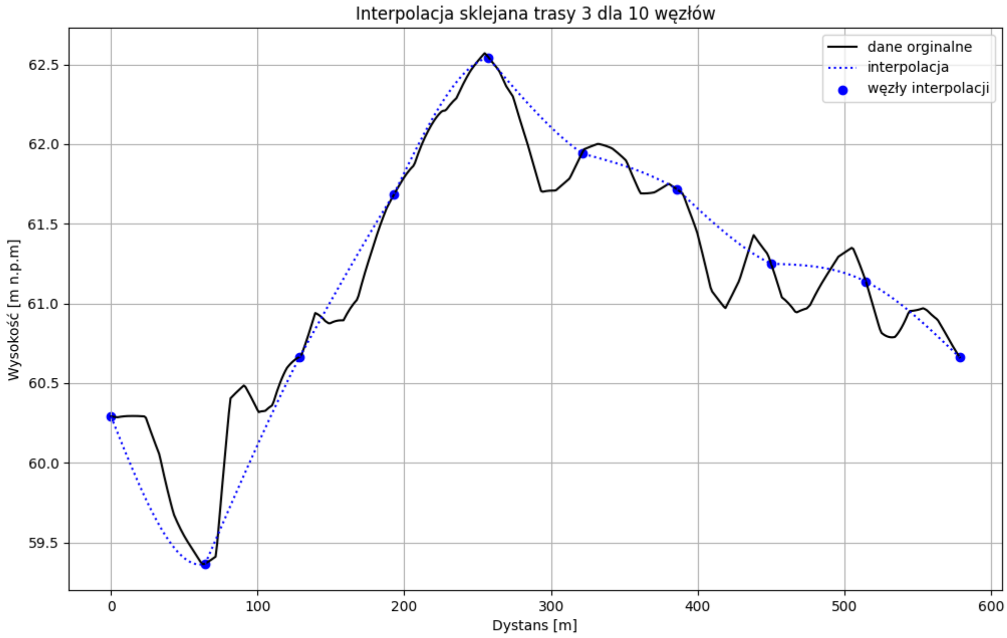
6. Analiza interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciej trasy:

- 5 węzłów



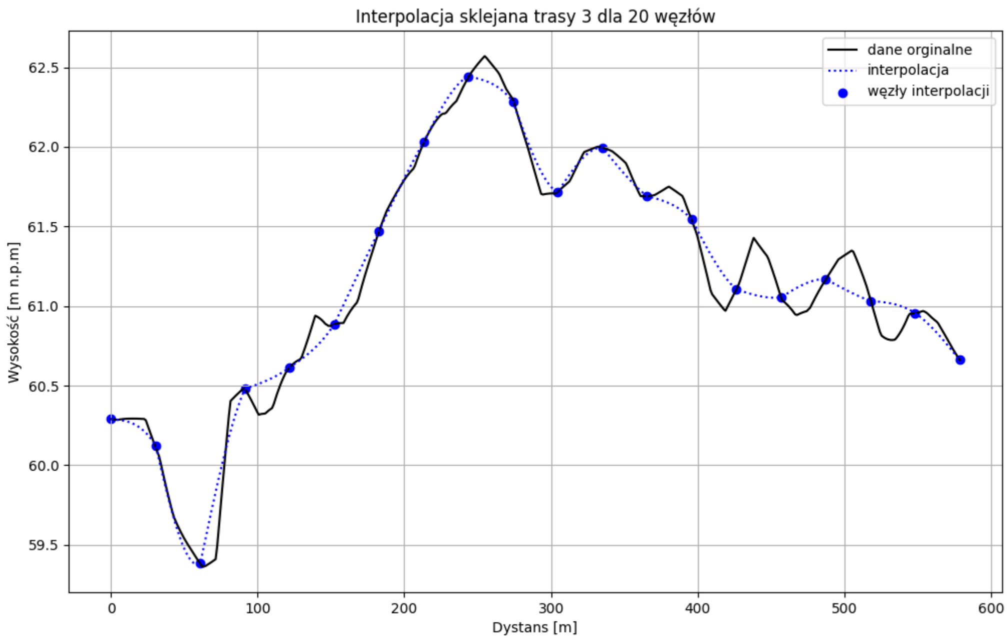
Dla 5 węzłów interpolacja funkcjami sklejanymi działa gorzej niż interpolacja wielomianowa.

- 10 węzłów



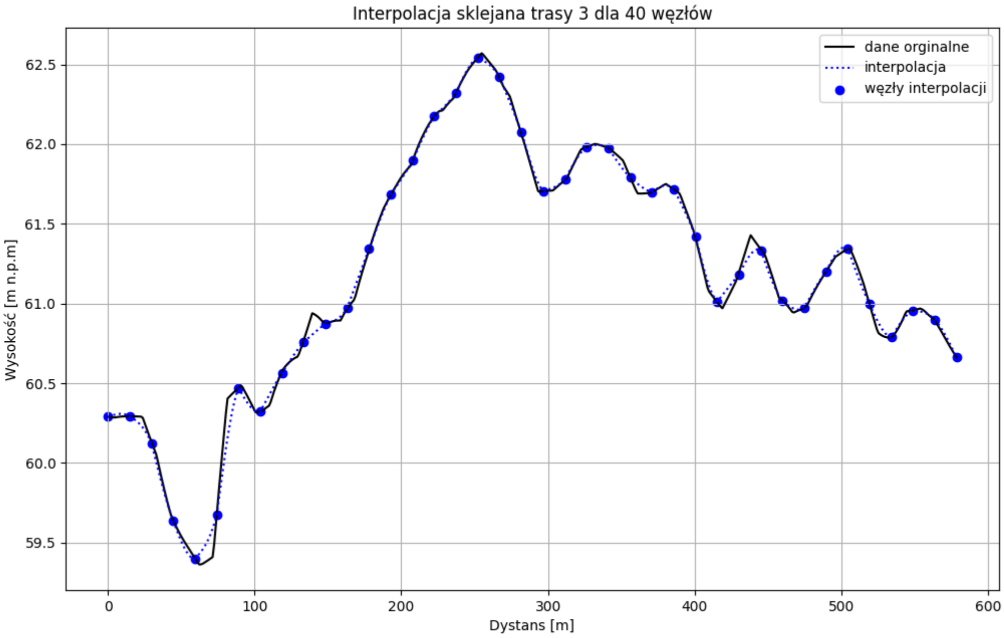
Dla 10 węzłów metoda daje już lepsze wyniki niż .wielomianowa.

- 20 węzłów



Dla 20 węzłów interpolacja jest już prawie satysfakcjonująca.

- 40 węzłów



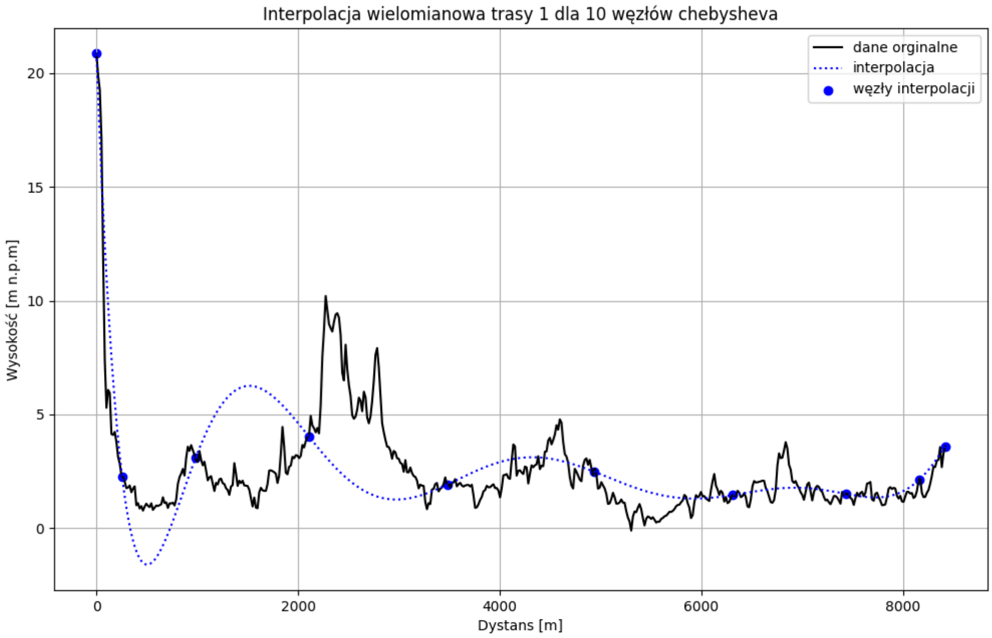
Przy 40 węzłach interpolacja jest w pełni satysfakcjonująca.

7. Analiza dodatkowa:

W analizie dodatkowej zostały zastosowane węzły interpolacji Chebysheva drugiego rodzaju aby sprawdzić wpływ rozmieszczenia węzłów na funkcje interpolacji. Węzły Chebysheva są gęściej skupione przy granicach. Położenie *N* węzłów interpolacji rozmieszczonych równomiernie w przedziale [-1, 1] definiujemy jako:

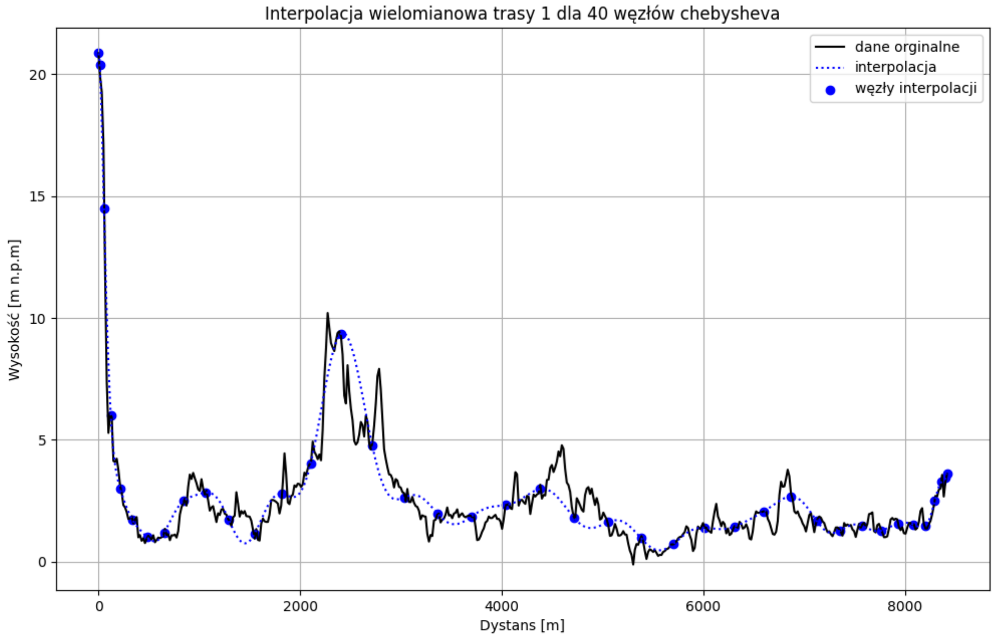
$$x_k = -1 + 2\frac{k-1}{N-1},\ k = 1, 2, ..., N$$

- metoda wielomianowa dla 10 węzłów chebysheva (trasa 1)



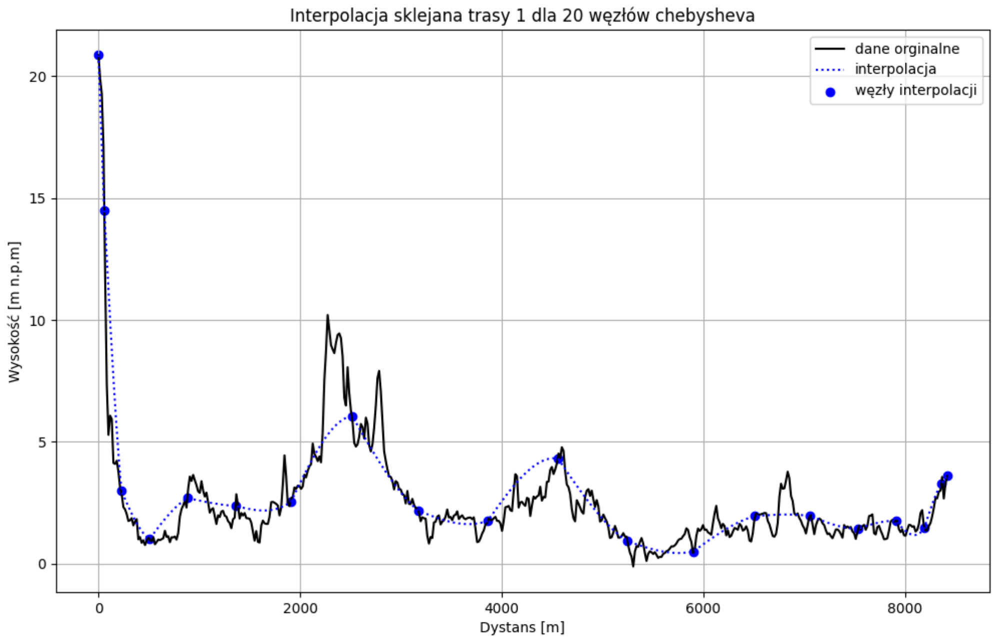
Przy wcześniejszej analizie metody wielomianowej dla 10 węzłów interpolacji rozmieszczonych w równych odległościach zaczęły pojawiać się szumy przy granicach. W tym przypadku nie widać ich. same odwzorowanie funkcji pierwotnej wydaje się delikatnie lepsze niż poprzednio.

- metoda wielomianowa dla 40 węzłów chebysheva (trasa 1)



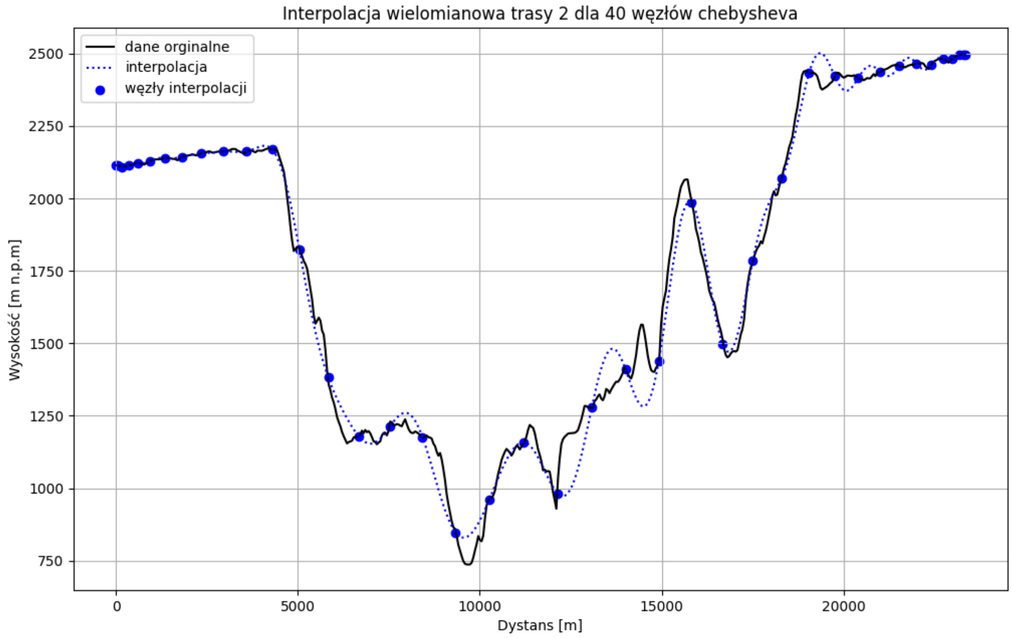
Można zauważyć, że dzięki zastosowaniu węzłów Chebysheva, mimo użycia 40 węzłów interpolacji, nie pojawiają się żadne zakłócenia przy granicach wykresu, ale samo odwzorowanie funkcji nie jest takie dokładne.

- metoda funkcjami sklejanymi dla 20 węzłów chebysheva (trasa 1)



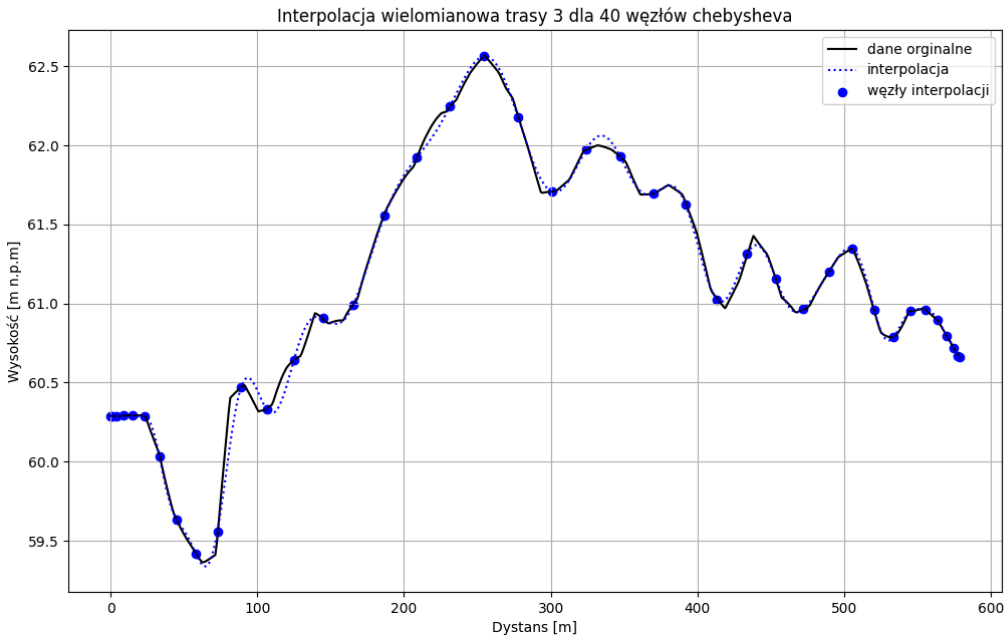
Użycie węzłów Chebysheva nie wpływa negatywnie na interpolowanie metodą funkcjami sklejanymi.

- metoda wielomianowa dla 40 węzłów chebysheva (trasa 2)



Przy interpolacji trasy drugiej też nie ma żadnych szumów dla 40 węzłów interpolacji. Niestety tutaj też widać niedokładność w odwzorowaniu pierwotnej funkcji w środku przedziału, na którym prowadzimy analizę.

- metoda wielomianowa dla 40 węzłów chebysheva (trasa 3)



Na tej trasie interpolacja wyszła najlepiej. Brak szumów i dobre odwzorowanie zmian wysokości na całej długości trasy.

Wnioski

Metoda interpolacji Lagrange'a jest stabilna i łatwa w implementacji. Nie trzeba konstruować ani rozwiązywać układu równań.

Z analizy wynika, że interpolacja wielomianowa z równomiernym rozmieszczeniem węzłów interpolacji, dla małej ilości węzłów, dobrze radzi sobie na odcinkach o małym zróżnicowaniu wartości. Trochę gorzej odwzorowuje oryginalną funkcję, gdy pojawiają się strome wzniesienia. Można by pomyśleć, że ciągłe zwiększanie ilości węzłów interpolacji zwiększy również dokładność. Jednak tak nie jest. Zbyt duży stopień wielomianu interpolacji sprawia, że, mimo poprawy dokładności wewnątrz analizowanego przedziału, zwracane wartości przy granicach wykresu dużo różnią się od oryginału. Aby zapobiec występowaniu takich szumów można zastosować węzły Chebysheva drugiego rodzaju, które są skupione bliżej granic przedziału. Pozwala to zredukować duże błędy, przy stosowaniu dużej ilości węzłów, kosztem gorszego odwzorowania funkcji w środku przedziału.

Zastosowanie metody interpolacji funkcjami sklejanymi przynosi lepsze efekty dla równomiernie rozmieszczonych węzłów interpolacji, jaki i węzłów Chebysheva drugiego rodzaju. Niestety wymaga ona rozwiązywania układu równań.