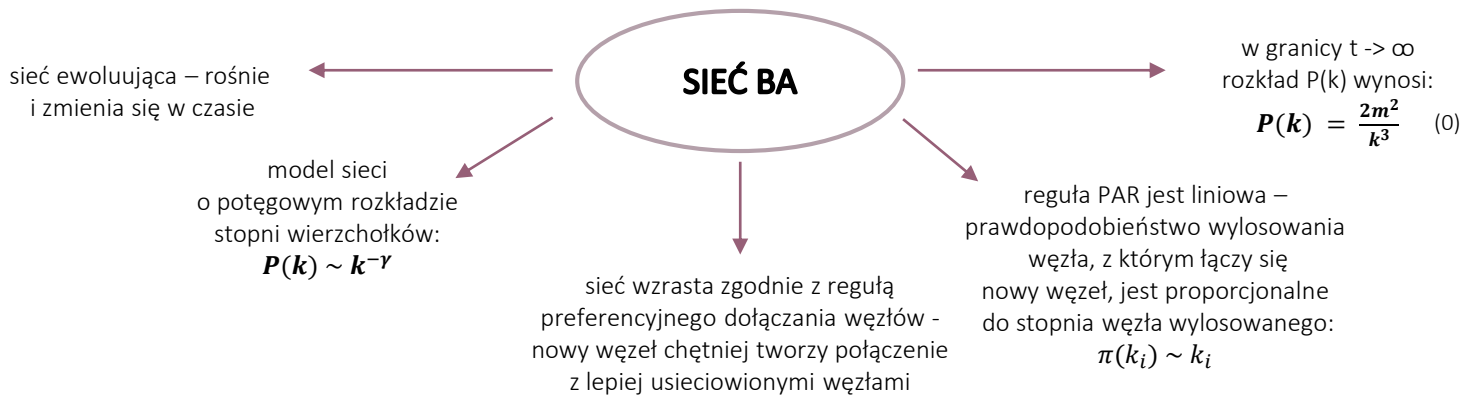


# Modelowanie Procesów Stochastycznych

## Tytuł projektu: Sieci BA

Autor: Aleksandra Buczek



## IMPLEMENTACJA ALGORYTMU BA: (etap 1. projektu)

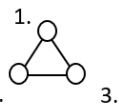
### parametry sieci BA:

- \*  $N_0$  – liczba węzłów w klastrze początkowym,  $N_0 \geq 1$
- \*  $m$  – liczba połączeń z innymi węzłami utworzonych przez nowy dodany węzeł,  $m \leq N_0$
- \*  $N$  – końcowa liczba węzłów sieci

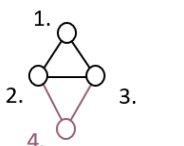
### proces tworzenia sieci BA:

0) Podanie parametrów:  $N, N_0, m$

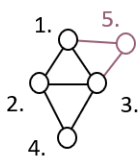
1) Segment początkowy:



2) Nowy węzeł:

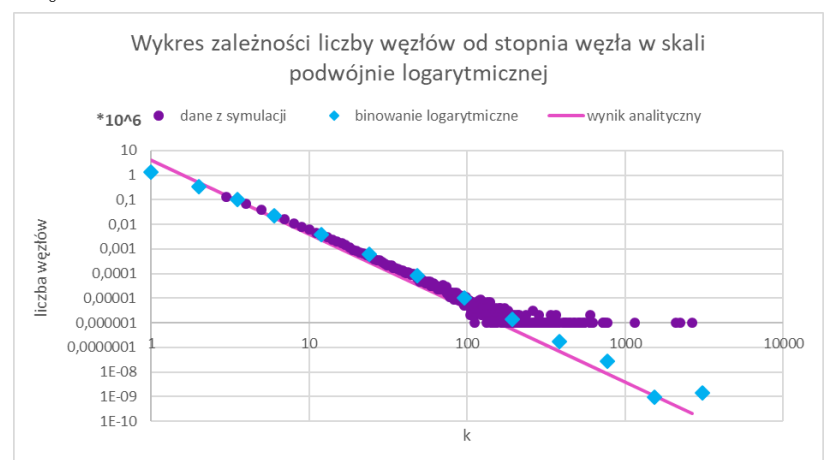


3) Kolejne węzły...



... aż do dodania  $N$  węzłów

W ramach projektu przeprowadzono symulację sieci BA dla:  $N_0 = m = 1$  oraz  $N = 2 \cdot 10^6$ :



W skali podwójnie logarytmicznej rozkłady potęgowe przyjmują postać:  
 $\ln P(k) = -\gamma \ln k + \ln C$ , gdzie:  $C$  – stała. Odpowiada to liniowemu równaniu:  $y = ax + b$ .

Na wykresie można zaobserwować zależność liniową. Po dopasowaniu prostej (wyznaczonej poprzez binowanie logarytmiczne) do danych z symulacji, otrzymano wartość  $\gamma = 2.82$ , czyli zbliżoną do wyniku analitycznego, w którym  $\gamma = 3$ .

## PROCEDURA TWORZENIA SIECI BA, A ŁAŃCUCH MARKOWA: (etapy 2. i 3. projektu)

Dla sieci BA jednym ze sposobów wyznaczenia rozkładu stopni wierzchołków jest skorzystanie z metody równania master. Wykorzystywany jest rozkład prawdopodobieństwa stopni węzłów, gdzie  $k_i(t)$  to zmienna losowa. Przyjmując, że  $p_i(k, t_i, t)$  to prawdopodobieństwo, że węzeł dodany do sieci BA w kroku czasowym  $t_i$ , w chwili  $t$  ma stopień wynoszący  $k_i$ , można zapisać:

$$p_i(k, t_i, t + 1) = \sum_{l=0}^m p(l; m) p_i(k - l, t_i, t), \quad (1)$$

gdzie  $p(l; m)$  - prawdopodobieństwo otrzymania przez węzeł  $l$  ( $l \leq m$ ) połączeń (opisane rozkładem Bernoulliego). Równanie to pokazuje prawdopodobieństwo, że węzeł uzyska nowe krawędzie i zwiększy swój stopień o  $l$ , zmieniając w ten sposób swój stan. Dla wszystkich węzłów w sieci BA rozkład prawdopodobieństwa wynosi:

$$P(k, t_i, t) = \frac{1}{t} \sum_{t_i=1}^t p_i(k, t_i, t). \quad (2)$$

Na podstawie powyższych równań oraz po uwzględnieniu granicy  $t \rightarrow \infty$ , otrzymano:

$$P(k, t_i, t + 1) = \left(1 - \frac{k}{2t}\right) P(k, t_i, t) + \left(\frac{k-1}{2t}\right) P(k-1, t_i, t). \quad (3)$$

Znajdująca się w algorytmie tworzenia sieci BA reguła preferencyjnego dołączania powoduje, że:

- \* kolejne stopnie wierzchołka  $k_i(t)$  zmieniają się w krokach czasowych:  $t = i, i+1, i+2, \dots$ , jak:  $m, m+1, m+2, \dots$ ; w danym czasie zmiana ta związana jest z pewną losowością,
- \* stopień węzła ewoluuje na skutek dołączania do sieci nowych węzłów, pojawiających się z kolejnymi krokami czasowymi; jest tym samym zależny od czasu, z wartością stopnia zależną od poprzedniej.

Na podstawie tych obserwacji, można stwierdzić, że procedura tworzenia sieci BA jest procesem stochastycznym, a stopnie wierzchołków (i wraz z nimi ich rozkład) tworzą łańcuch Markowa z prawdopodobieństwami przejść zależnymi od czasu, uzyskanymi z równania (3) i wynoszącymi:

$$\begin{cases} 1 - \frac{k}{2t}, & \text{gdy stopień węzła nie ulega zmianie,} \\ \frac{k}{2t}, & \text{gdy stopień węzła zwiększa się o 1.} \end{cases} \quad (4)$$

Prawdopodobieństwa te są zmienne w czasie, co oznacza, że jest to niejednorodny łańcuch Markowa.

W granicy  $t \rightarrow \infty$ , czas można przyjąć jako zmienną ciągłą:

$$P(k, t_i, t + 1) - P(k, t_i, t) = \frac{dP(k, t_i, t)}{dt}. \quad (5)$$

Podstawiając powyższe równanie do (3) oraz przyjmując, że dla dużych czasów  $P(k, t_i, t) \rightarrow P(k)$ , otrzymano:

$$P(k) = \left(\frac{k-1}{k+2}\right) P(k-1). \quad (6)$$

Po zastosowaniu rekurencji oraz dla warunku początkowego:  $P(m) = \frac{2}{m+2}$ , wyznaczono równanie na rozkład stopni wierzchołków w sieci BA:

$$P(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}. \quad (7)$$

Można zauważyć, że w granicy  $k \gg m$ , rozkład ten przyjmuje postać równoważną do równania (0), czyli postaci analitycznej. Uzyskana z symulacji wartość wykładnika  $\gamma = 2.82$ , pokazuje, że również w tym przypadku rozkład stopni wierzchołków dąży do omawianej postaci. Dla tych podejść otrzymano równoważne wyniki.

### Podsumowanie:

Występująca w sieci BA reguła preferencyjnego dołączania ma znaczący wpływ na sposób, w jaki sieć ewoluje. Nowe węzły wybierają z większym prawdopodobieństwem bardziej usieciowane, starsze węzły niż te, o mniejszym stopniu. W rezultacie, węzły o wyższym stopniu mają większą szansę na dalsze podwyższanie tego parametru. Jest to zjawisko występujące w wielu rzeczywistych sieciach złożonych, znane pod nazwą efektu świętego Mateusza (lub rich get richer). Pojawia się np. w sieci cytowań, czy sieci kontaktów społecznych. Węzły wybierane są losowo, co wprowadza do procesu tworzenia sieci BA aspekt stochastyczny.