

# Sudoku : combien de grilles ?

(Jacques Guyot 2020 – licence **CC-BY-SA**)

Un problème classique avec sa solution.

2				1				7
		8	3		5	6		
	5							1
				8				9
	9		4					7
	3							
							6	
	1	7		4	6		8	
5				7				2

2	6	9	8	1	4	3	5	7
1	7	8	3	2	5	6	4	9
4	5	3	7	6	9	2	1	8
7	2	4	6	8	1	5	9	3
6	9	5	4	3	2	8	7	1
8	3	1	5	9	7	4	2	6
9	8	2	1	5	3	7	6	4
3	1	7	2	4	6	9	8	5
5	4	6	9	7	8	1	3	2

Nous allons nous intéresser aux grilles, indépendamment des problèmes et la question est combien de grilles différentes de sudoku existent.

En oubliant les contraintes, il y a 81 cases et 9 valeurs possibles,  $9^{81}$  est le nombre maximum de grilles possibles sans contrainte (soit 1,97E+77)

Mais on comprend que le nombre est plus petit. La grille est formée de 9 blocs. Chaque bloc contient une et une seule fois les chiffres de 1 à 9. Le nombre de blocs différents est égale à 9 factoriel  
Soit  $9! = 362880$

Les permutations pour la grille de 9 blocs donnent  $362880^9$  (soit 1,09E+50)

B1	B2	B3
B4	B5	B6
B7	B8	B9

## Manipulations de la grille.

Quelles sont les opérations qui laissent inchangées un sudoku et qui donne une nouvelle grille.

On voit que l'on peut dériver sans peine des nouveaux Sudokus, en permutant :

- 1) des blocs (3x3) par lignes et par colonnes
- 2) des lignes complètes à l'intérieur d'un même bloc
- 3) des colonnes complètes à l'intérieur d'un même bloc

2	6	9	8	1	4	3	5	7
1	7	8	3	2	5	6	4	9
4	5	3	7	6	9	2	1	8
7	2	4	6	8	1	5	9	3
6	9	5	4	3	2	8	7	1
8	3	1	5	9	7	4	2	6
9	8	2	1	5	3	7	6	4
3	1	7	2	4	6	9	8	5
5	4	6	9	7	8	1	3	2

2	6	9	8	1	4	3	5	7
1	7	8	3	2	5	6	4	9
4	5	3	7	6	9	2	1	8
7	2	4	6	8	1	5	9	3
6	9	5	4	3	2	8	7	1
8	3	1	5	9	7	4	2	6
9	8	2	1	5	3	7	6	4
3	1	7	2	4	6	9	8	5
5	4	6	9	7	8	1	3	2

On constate que par permutation successive de lignes, de blocs, il est possible de transformer le sudoku. Mais fondamentalement, il reste identique.

On peut aussi permuter deux chiffres sur l'ensemble de la grille, par exemple permutation du 1 et du 2

2	6	9	8	1	4	3	5	7
1	7	8	3	2	5	6	4	9
4	5	3	7	6	9	2	1	8
7	2	4	6	8	1	5	9	3
6	9	5	4	3	2	8	7	1
8	3	1	5	9	7	4	2	6
9	8	2	1	5	3	7	6	4
3	1	7	2	4	6	9	8	5
5	4	6	9	7	8	1	3	2

1	6	9	8	2	4	3	5	7
2	7	8	3	1	5	6	4	9
4	5	3	7	6	9	1	2	8
7	1	4	6	8	2	5	9	3
6	9	5	4	3	1	8	7	2
8	3	2	5	9	7	4	1	6
9	8	1	2	5	3	7	6	4
3	2	7	1	4	6	9	8	5
5	4	6	9	7	8	2	3	1

## Normalisation de la grille

L'idée de la normalisation de la grille est de réduire le nombre de grilles à tester.

## Normalisation de B1

Par la permutation des chiffres, il est toujours possible d'avoir le B1 suivant :

**B1 =**

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Cette normalisation permet de réduire de  $9! = 362880$ , l'espace de recherche.

## Normalisation de B5

Par permutation des lignes et des colonnes, il est possible de contraindre B5 tel que le « 1 » soit dans le coin gauche supérieur et que  $a < b$  et  $c < d$ .

**B5 =**

<b>1</b>	<b>a</b>	<b>b</b>
<b>c</b>		
<b>d</b>		

Cette normalisation permet de réduire de 36, l'espace de recherche.

## Normalisation de B9

Par permutation des lignes et des colonnes, il est possible de contraindre B9 tel que le « 1 » soit dans le coin gauche supérieur et que  $k < l$  et  $m < p$ .

**B9 =**

<b>1</b>	<b>k</b>	<b>l</b>
<b>m</b>		
<b>p</b>		

Cette normalisation permet de réduire de 36, l'espace de recherche.

## Normalisation de $B5 \leq B9$

Une dernière normalisation, utilisant la permutation des blocs va permettre de d'ordonner B5 et B9 afin que le nombre 1abcdefgh  $\leq$  1klmnopqr.

Cette dernière normalisation permet de réduire de pratiquement 2 l'espace de recherche.

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>							
<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>							
<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>							
			<b>1</b>	<b>a</b>	<b>b</b>				
			<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>				
			<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>				
						<b>1</b>	<b>k</b>	<b>l</b>	
						<b>m</b>	<b>n</b>	<b>o</b>	
						<b>p</b>	<b>q</b>	<b>r</b>	

Il existe 10080 blocs possibles pour B5 et B9.

Les couples B5<=B9 est  $10080 * (10080+1)/2$  soit 50'808'240 différentes normalisations de la diagonale.

## Le programme

Nous avons développé un programme pour trouver le nombre grille de sudoku pour une diagonale donnée, donc B1, B5 et B9 sont fixés pour chaque évaluation.

Prenons l'exemple suivant :

1	2	3						
4	5	6		448			448	
7	8	9						
			1	2	3			
			4	5	6			
			7	8	9			
						1	2	3
						4	5	6
						7	8	9

En fixant B1, B5 et B9, on réduit beaucoup les possibilités des grilles B3 et B4.

B2 doit être compatible horizontalement avec B1 et verticalement avec B5. De fait, il existe seulement 448 grilles possibles.

Dans notre exemple, B3 doit être compatible horizontalement avec B1 et verticalement avec B9. De fait, il existe aussi 448 grilles possibles.

Mais B2 et B3 doivent aussi être compatibles. De fait, il existe seulement 3584 combinaisons de B2 et B3. Donc assez peu de situations à explorer.

En fixant B2 et B3, les autres blocs sont fortement contraints. En moyenne, on trouve 40 à 80 grilles dès que B1, B2, B3, B5 et B9 sont fixés.

## Le programme

Ce programme a revérifié le résultat de 2005, Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis ont trouvé

**6'670'903'752'021'072'936'960**

Ce programme revérifie ce nombre, la version la plus rapide est:

**ComputeAllSolution\_HALF.java**

Le calcul a été effectué sur un seul CPU (i7-7820x). Le programme a été lancé 15 fois pour effectuer le calcul en parallèle. L'ensemble a duré environ 9 jours.

Ce programme a construit les fichiers qui comptent les solutions des sous-grilles. (voir folder Results).

Le programme **Validate\_HALF** permet de sommer les résultats partiels.

```
fact9: 362880
perm2x3: 36
permB5B9: 2
sumdiag      : 1748364208
sumbig       : 7093166782680
nbsymetries  : 470292480
permB5B9     : 2
nbsudokuJG   : 6670903752021072936960
totsdkto be found: 6670903752021072936960
```