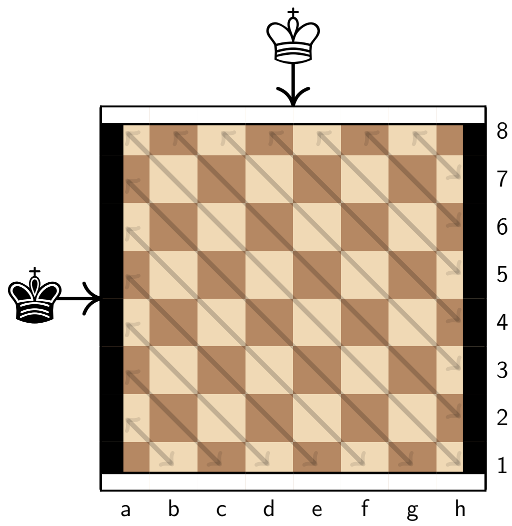
Trygg kongevei og tilfeldige tårn

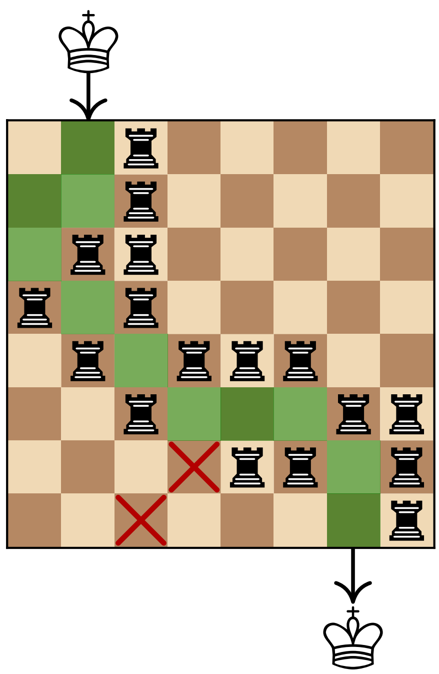
***Trygg kongevei*-problemet.**

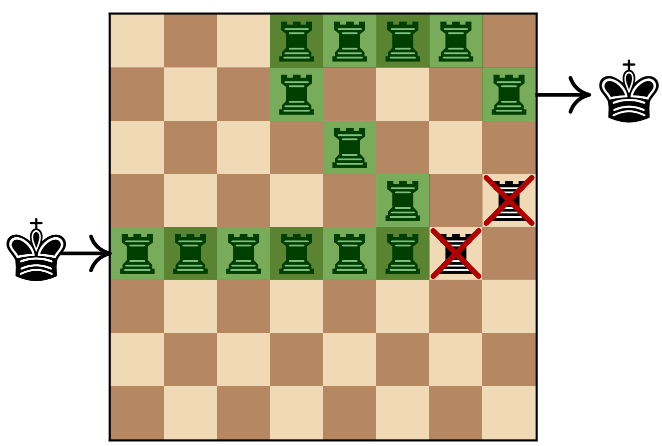
I dette problemet skal vi finne ut om hvit og/eller svart konge kan komme seg over brettet. Kravene er:

- Hvit konge skal komme seg mellom de to hvite sidene, det vil si fra åttenderaden til førsteraden.
- Svaret konge skal komme seg mellom de svarte sidene, altså fra a-fila til h-fila.
- Kongene er skadet. Alle rette bevegelser er lovlige, men skråbevegelser må følge linjene som er vist på brettet.
- Svart konge må vandre langs svarte tårn, mens hvit konge må unngå svarte tårn. Se eksempler under.



Eksempler på trygge kongeveier for hvit og svart. Vi har vist med rødt kryss skråbevegelser som ikke er lov. Skråbevegelser skal altså være i samme retning som diagonalen a8-h1.





***Tilfeldige tårn*-forsøket.**

I dette tilfeldige forsøket er utfallet et sjakkbrett med svarte tårn i tilfeldige posisjoner .

1. Gå gjennom feltene på sjakkbrettet, for eksempel i rekkefølgen som er vist på figuren.

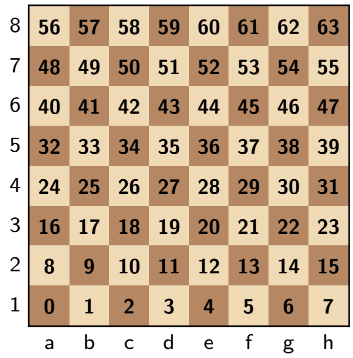
2. Kast kron og mynt ved hvert felt – hvis det blir kron setter du tårn på feltet, og hvis det blir mynt lar du feltet stå tomt.

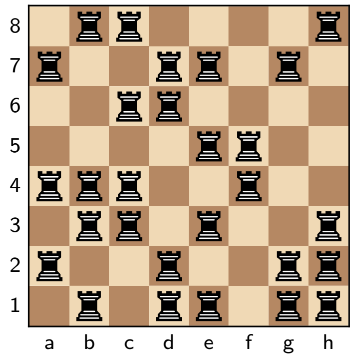
Tips for gjennomføring på fysisk sjakkbrett:

- Du kan godt gjøre forsøket på et mindre brett. Lag for eksempel et 4×4-brett i et av hjørnene, og dekk over resten av sjakkbrettet med noe papir.

- Du kan bruke svarte papirbrikker i stedet for tårn.

- Hvis du ikke har en mynt kan for eksempel en terning brukes. Sett tårn hvis terningen lander på 1,2 eller 3, og la stå tomt hvis terningen lander på 4,5 eller 6.





Hovedoppgaver. Ved å ta utgangspunkt i dette problemet og forsøket kan man velge mellom mange forskjellige oppgaver med litt ulikt fokus.

1. Gjennomfør *Tilfeldige tårn*-forsøket på et fysisk sjakkbrett. Finn deretter ut om hvit og/eller svart konge har en trygg kongevei. Kan gjøres på et mindre brett, for eksempel 4×4-brett. Dette er en fin introduksjonsøvelse til de neste oppgavene.

2. Siden det er langtekkelig å gjøre forsøket for hånd, kan vi simulere forsøket ved hjelp av programmering. Gå inn på `bit.ly/sjakkmatte` og klikk deg inn på *Simulering av tilfeldige tårn.* Her finner du mange oppgaver og kan gjøre så mange som ønskelig.

3. La en elev være den hvite kongen og la en annen elev være den svarte kongen. Hvit side starter med å legge et hvitt tårn på brettet, og deretter legger svart side et svart tårn. De bytter på å legge tårn helt til en av sidene har laget en trygg kongevei med sine tårn. Den siden vinner spillet.

4. For et mer matematisk fokus knyttet til tilfeldige forsøk og sannsynlighet, velg fra oppgavene gitt på de neste sidene.

Matematisk bakgrunn. I kjernen av oppgavene ligger et matematisk teorem som kalles *Hex-teoremet* (navnet er inspirert av spillet *Hex*). I vårt tilfellet sier teoremet at på et brett med svarte tårn er kun to utfall mulige:

- Hvit har en trygg kongevei, men ikke svart.
- Svart har en trygg kongevei, men ikke hvit.

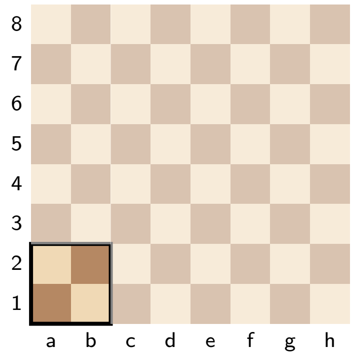
Dette gjelder altså uansett antall svarte tårn og hvor de er plassert. Konsekvensene av teoremet er følgende:

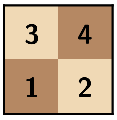
- Når vi gjør *Tilfeldige tårn*-forsøket, er det 50% sannsynlig at hvit har en trygg kongevei. Svart har samme sannsynlighet.
- De to hendelsene «Hvit har trygg kongevei» og «Svart har trygg kongevei» er komplementære hendelser.
- Spillet som er beskrevet i (3) kan aldri ende uavgjort, siden det alltid er en som vil ende opp med en trygg kongevei når hele brettet er fylt. Når en side har vunnet, så kan ikke den tapende siden lage sin egen vei, uansett hvor mange gratistrekk spilleren får.

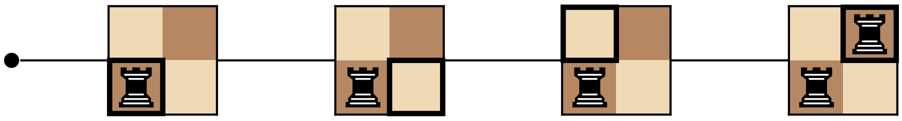
På de siste sidene gir vi en forklaring av hvorfor Hex-teoremet stemmer, og hvorfor vi får disse konsekvensene. (Denne delen er ikke helt klar).

Matematiske oppgaver

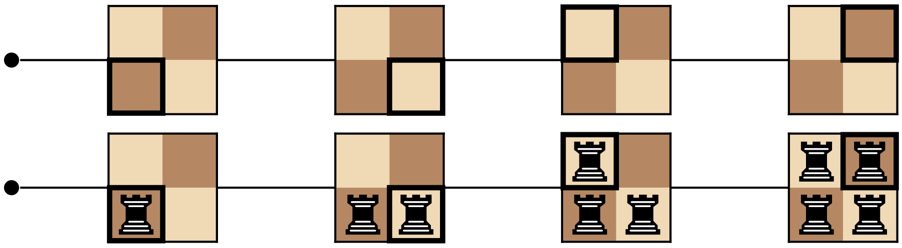
Vi begynner med å få en grunnleggende forståelse for telling av muligheter og regning av sannsynligheter. For å starte så enkelt som mulig, ser vi på 2×2-brettet uthevet til høyre. Dekk gjerne til resten av sjakkbrettet med papir eller annet.
Husk at for å få en tilfeldig tårnplassering, går vi innom hvert felt og kaster kron og mynt for å avgjøre om feltet skal ha tårn eller stå tomt. Under ser du hvilken rekkefølge vi går gjennom feltene på 2×2-brettet, og deretter ser du et mulig utfall av forsøket. Vi har uthevet hvilket felt vi er på i hvert av de fire stegene.



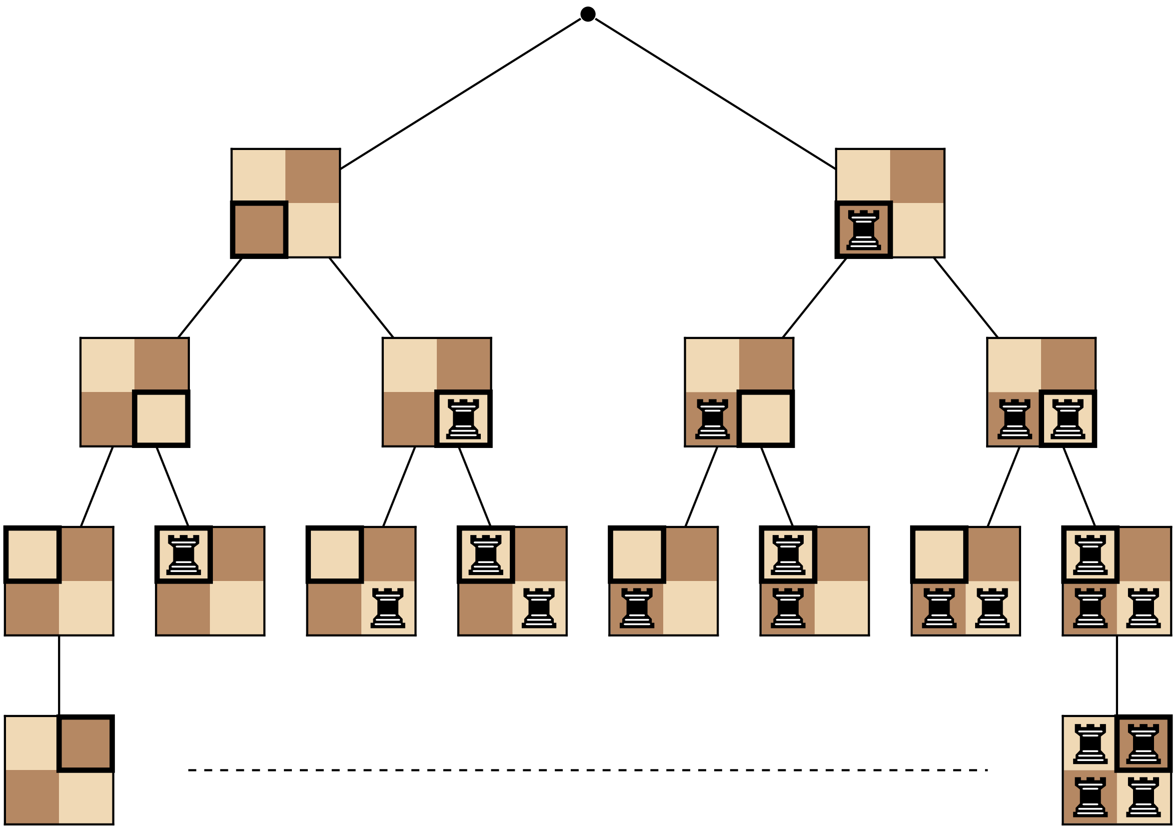




På første felt plasserte vi altså et tårn, deretter lot vi de to neste feltene stå tomme, før vi til slutt plasserte et tårn på fjerde felt. Her ble det like mange tårn og tomme felter, men det trenger ikke alltid å skje, som følgende utfall viser:



Nå lister vi opp alle mulige utfall i et *beslutningstre*. I et slikt diagram går vi nedover på brettet for å lese et utfall – vi går til høyre for å plassere tårn på det neste feltet og til venstre for å la det stå tomt.

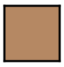
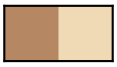
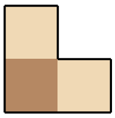
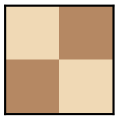


Oppgaver i telling og representasjon

1. Tegn opp alle mulige tårnplasseringer, altså tegn opp det som skulle stått i de striplede linjene i beslutningstreet. Du kan sette kryss i stedet for å tegne tårn.

   - Hint: På diagrammet mangler den nederste raden, og den får vi ved å lage to nye forgreninger fra hver av brettene ovenfor. Disse forgreningene bestemmer om det fjerde feltet (b2) skal ha tårn eller ikke.

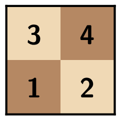
2. Hva er antall mulige tårnplasseringer er det på følgende utradisjonelle sjakkbrett:

   a)  b)  c)  d) 

   - Hint: Se på beslutningstreet igjen. I den første raden vurderer vi antall muligheter for det første feltet, i den andre raden vurderer vi antall muligheter for de to første feltene, og så videre.

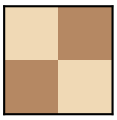
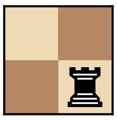
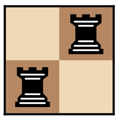
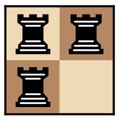
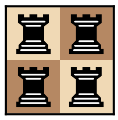
3. Etter å løst den forrige oppgaven, kan du se hvordan antall mulige tårnplasseringer øker når du legger til et felt på brettet? Kan du ut ifra dette regne ut hva antall tårnplasseringer ville vært på et brett med fem felter?

4. Tenk deg at du kaster kron og mynt for å få en tilfeldig tårnplassering. Du bruker en spesiell mynt der det står 1 på den ene siden, og 0 på den andre. Hvis du får 1 skal du sette tårn på feltet, og hvis du får 0 skal du la feltet stå tomt. Husk at vi går gjennom feltene i rekkefølgen vist til høyre.

   (a) Hvilken tårnplassering har du fått hvis sekvensen av myntkast er 0110? (Første kast er 0, andre og tredje kast er 1, og siste kast er 0).

   (b) Skriv opp sekvensen av myntkast som gir følgende tårnplasseringer:

   (c) Skriv opp riktig $0, 1$-sekvens under alle tårnplasseringene som du tegnet opp i (1). Du skal altså gjøre samme som i forrige punkt, men på alle mulighetene.

   (d) Skriv opp en $0, 1$-sekvens for to tårn som står på linje (enten vertikalt eller horisontalt). Det er totalt fire slike sekvenser – kan du skrive opp alle disse? Forsøk gjerne å komme fram til svaret i hodet, altså uten å se på oversikten du lagde i forrige punkt.

Oppgaver i sannsynlighet. Vi skal nå tenke oss at *Tilfeldige tårn*-forsøket gjøres på et 2×2-brett, og vi skal regne ut sannsynligheten for ulike hendelser. I den forrige delen fant du *utfallsrommet* til forsøket, altså mengden av alle mulige utfall. Ha gjerne denne oversikten foran deg – velg selv om du vil bruke 2×2-diagrammer eller $0, 1$-sekvenser.

Hvis vi for eksempel ønsker tårn på alle felter, så er sannsynligheten 50% for at vi får tårn på det første feltet, 50% på det andre feltet, og så videre. Derfor er sannsynligheten for dette utfallet $0.5^4 = 0.0625$, altså 6.25%. Men regnestykket hadde blitt akkurat det samme i et hvilket som helst annet utfall (for eksempel at alle felter er tomme). Derfor er alle utfall like sannsynlige. Da kan vi bruke formelen:

$$P(\text{Hendelse}) = \frac{\text{Antall gunstige utfall}}{\text{Antall mulige utfall}}$$

Du skal regne ut sannsynligheten for hendelsene som er listet under. Sett først ring rundt de gunstige utfallene for hendelsen, og regn deretter ut sannsynligheten.

1. Brettet er tomt (alle de fire feltene er tomme).
2. Brettet er fullt (alle de fire feltene har tårn).
3. Ett tårn på brettet.
4. To tårn på brettet.
5. Tre tårn på brettet.
6. Null eller ett tårn på brettet.
7. Flere tårn enn tomme felter på brettet.
8. To tårn som danner en diagonal.
9. To tårn som danner en linje (horisontal eller vertikal).

Vi minner nå om hva en komplementær hendelse betyr. La oss si at H er en hendelse som har noen gunstige utfall, og vi setter ring rundt disse. Den komplementære hendelsen består av alle utfallene vi ikke har satt ring rundt. Vi skriver den komplementære hendelsen som H^C. Nå kan vi regne ut sannsynligheten til H^C ved å bruke formelen:

$$P(H^C) = 1 - P(H)$$

Hendelsen «Brettet er tomt» har ett gunstig utfall, nemlig det utfallet der alle feltene er tomme. Alle de andre utfallene har ett eller flere tårn. Derfor kan vi skrive:

$$T = \text{Brettet er tomt}$$
$$T^C = \text{Brettet har minst et tårn}$$

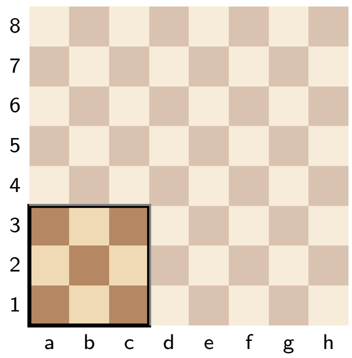
Ifølge formelen over kan vi da regne ut sannsynligheten for at brettet har minst et tårn:

$$P(T^C) = 1 - P(T).$$

Regn ut sannsynlighen for følgende hendelser:

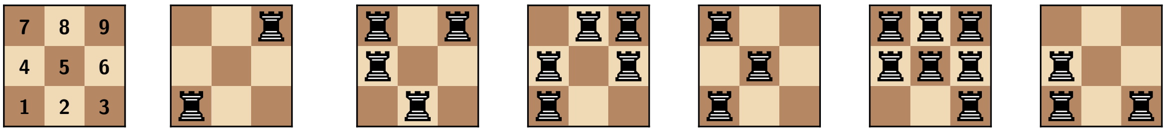
10. Brettet har minst et tårn.
11. Brettet har midre enn fire tårn.
12. Brettet har mer enn ett tårn.
13. Ekstraoppgave: Finn på egne hendelser og regn ut sannsynligheten.

Oppgaver på 3×3-brett



1. Hva er antall mulige tårnplasseringer på 3×3-brettet?

2. Du går gjennom feltene i rekkefølgen vist i første figur, og kaster en mynt med sider 0 og 1 for å avgjøre hvilke felter som skal ha tårn (1 for tårn og 0 for tomt felt). Hvis sekvensen av myntkast er 100 000 001 betyr det at det første og siste feltet har tårn, som vist i andre figur. Skriv opp 0,1-sekvensene til de neste figurene.



100 000 001 (a) (b) (c) (d) (e)

3. Tegn opp tårnplasseringen til følgende sekvenser av myntkast. Du kan sette kryss i stedet for å tegne tårn.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
010 010 010	000 110 110	011 011 011	101 010 101	111 101 111

4. Når vi gjør *Tilfeldige tårn*-forsøket på 3×3-brettet, hva er sannsynligheten for følgende hendelser?

   (a) Brettet er tomt.

   (b) Brettet er fullt.

   (c) Ett tårn på brettet.

   (d) Minst ett tårn på brettet.

   (e) Minst to tårn på brettet.

   (f) Tre tårn på brettet som danner en horisontal eller vertikal linje.

   (g) Fire tårn på brettet som danner et kvadrat.

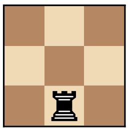
   (h) Vanskelig: Tårnene på brettet danner nøyaktig ett rektangel.

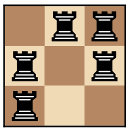
Vi skal nå se på to mer kompliserte hendelser:

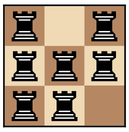
$$H = \text{Hvit har en trygg kongevei}$$
$$S = \text{Svart har en trygg kongevei}$$

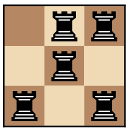
Les *Trygg kongevei*-problemet dersom du ikke husker hvordan slike veier er definert. Disse hendelsene er kompliserte i den forstand at det er ikke enkelt å liste opp alle utfallene som inngår i hver av dem. Det går an å si noe, for eksempel at utfallet med bare tomme felter må være i H (og ikke i S). Tilsvarende vil utfallet med tårn på alle felter være i S (og ikke i H).

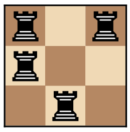
5. Avgjør om hvit og/eller svart har en trygg kongevei i følgende utfall av forsøket:

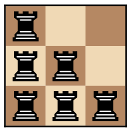

(a)

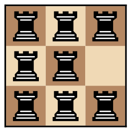

(b)


(c)


(d)


(e)


(f)


(g)

6. Undersøk om det går an å plassere tårn på 3×3-brettet slik at både hvit og svart har en trygg kongevei. Hvis du tror dette er umulig, forsøk å gi en begrunnelse.

7. Tror du det går an å plassere tårn slik at hverken hvit eller svart har en trygg kongevei?

Her kommer fasiter og forklaring av Hex-teoremet (som forteller at svaret er nei på de to siste spørsmålene).