Sjakkmatte for ungdomsskolen

2. februar 2022

Kjerneelementer

1. Utforsking og problemløsing

   Utforsking i matematikk handler om at elevene leter etter mønstre, finner sammenhenger og diskuterer seg fram til en felles forståelse. Elevene skal legge mer vekt på strategiene og framgangsmåtene enn på løsningene. Problemløsing i matematikk handler om at elevene utvikler en metode for å løse et problem de ikke kjenner fra før. Algoritmisk tenkning er viktig i prosessen med å utvikle strategier og framgangsmåter for å løse problemer og innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. Videre innebærer det å vurdere om delproblemene best kan løses med eller uten digitale verktøy. Problemløsing handler også om å analysere og omforme kjente og ukjente problemer, løse dem og vurdere om løsningene er gyldige.

2. Modellering og anvendelser

   En modell i matematikk er en beskrivelse av virkeligheten i matematisk språk. Elevene skal ha innsikt i hvordan modeller i matematikk brukes for å beskrive dagliglivet, arbeidslivet og samfunnet ellers. Modellering i matematikk handler om å lage slike modeller. Det handler også om å kritisk vurdere om modellene er gyldige, og hvilke begrensninger de har, vurdere modellene i lys av de opprinnelige situasjonene og vurdere om de kan brukes i andre situasjoner. Anvendelser i matematikk handler om at elevene skal få innsikt i hvordan de skal bruke matematikk i ulike situasjoner, både i og utenfor faget.

3. Resonnering og argumentasjon

   Resonnering i matematikk handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker. Det innebærer at elevene skal forstå at matematiske regler og resultater ikke er tilfeldige, men har klare begrunnelser. Elevene skal utforme egne resonnementer både for å forstå og for å løse problemer. Argumentasjon i matematikk handler om at elevene begrunner framgangsmåter, resonnementer og løsninger og beviser at disse er gyldige.

4. Representasjon og kommunikasjon

   Representasjoner i matematikk er måter å uttrykke matematiske begreper, sammenhenger og problemer på. Representasjoner kan være konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske. Kommunikasjon i matematikk handler om at elevene bruker matematisk språk i samtaler, argumentasjon og resonnementer. Elevene må få mulighet til å bruke matematiske representasjoner i ulike sammenhenger gjennom egne erfaringer og matematiske samtaler. Elevene må få mulighet til å forklare og begrunne valg av representasjonsform. Elevene må kunne oversette mellom matematiske representasjoner og dagligspråket og veksle mellom ulike representasjoner.

5. Abstraksjon og generalisering

   Abstraksjon i matematikk innebærer at elevene gradvis utvikler en formalisering av tanker, strategier og matematisk språk. Utviklingen går fra konkrete beskrivelser til formelt symbolspråk og formelle resonnementer. Generalisering i matematikk handler om at elevene oppdager sammenhenger og strukturer og ikke blir presentert for en ferdig løsning. Det vil si at elevene kan utforske tall, utregninger og figurer for å finne sammenhenger og deretter formalisere ved å bruke algebra og hensiktsmessige representasjoner.

6. Matematiske kunnskapsområder

   De matematiske kunnskapsområdene omfatter tall og tallforståelse, algebra, funksjoner, geometri, statistikk og sannsynlighet. Elevene må tidlig få et godt tallbegrep og få utvikle varierte regnestrategier. Algebra handler om å utforske strukturer, mønstre og relasjoner og er en viktig forutsetning for at elevene skal kunne generalisere og modellere i matematikk. Funksjoner gir elevene et viktig verktøy for å studere og modellere endring og utvikling. Geometri er viktig for at elevene skal utvikle en god romforståelse. Kunnskap om statistikk og sannsynlighet gir elevene et godt grunnlag når de skal gjøre valg i sitt eget liv, i samfunnet og i arbeidslivet. Kunnskapsområdene danner grunnlaget som elevene trenger for å utvikle matematisk forståelse ved å utforske sammenhenger innenfor og mellom kunnskapsområdene.

Læringsmål for ungdomsskolen

8. klasse

a. bruke potenser og kvadratrøtter i utforsking og problemløsing og argumentere for framgangsmåter og resultater

b. utvikle og kommunisere strategier for hoderegning i utregninger

c. utforske og beskrive primtallsfaktorisering og bruke det i brøkregning

d. utforske algebraiske regneregler

e. beskrive og generalisere mønstre med egne ord og algebraisk

f. lage og løse problemer som omhandler sammensatte måleenheter

g. lage og forklare regneuttrykk med tall, variabler og konstanter knyttet til praktiske situasjoner

h. lage, løse og forklare ligninger knyttet til praktiske situasjoner

i. utforske, forklare og sammenligne funksjoner knyttet til praktiske situasjoner

j. representere funksjoner på ulike måter og vise sammenhenger mellom representasjonene

k. utforske hvordan algoritmer kan skapes, testes og forbedres ved hjelp av programmering

9. klasse

a. beskrive, forklare og presentere strukturer og utviklinger i geometriske mønstre og i tallmønstre

b. utforske egenskapene ved ulike polygoner og forklare begrepene formlikhet og kongruens

c. utforske, beskrive og argumentere for sammenhenger mellom sidelengdene i trekanter

d. utforske og argumentere for hvordan det å endre forutsetninger i geometriske problemstillinger påvirker løsninger

e. utforske og argumentere for formler for areal og volum av tredimensjonale figurer

f. tolke og kritisk vurdere statistiske framstillinger fra mediene og lokalsamfunnet

g. finne og diskutere sentralmål og spredningsmål i reelle datasett

h. utforske og argumentere for hvordan framstillinger av tall og data kan brukes for å fremme ulike synspunkter

i. beregne og vurdere sannsynlighet i statistikk og spill

j. simulere utfall i tilfeldige forsøk og beregne sannsynligheten for at noe skal inntreffe, ved å bruke programmering

10. klasse

a. utforske og generalisere multiplikasjon av polynomer algebraisk og geometrisk

b. utforske og sammenligne egenskaper ved ulike funksjoner ved å bruke digitale verktøy

c. lage, løse og forklare ligningssett knyttet til praktiske situasjoner

d. regne ut stigningstallet til en lineær funksjon og bruke det til å forklare begrepene endring per enhet og gjennomsnittsfart

e. utforske sammenhengen mellom konstant prosentvis endring, vekstfaktor og eksponentialfunksjoner

f. hente ut og tolke relevant informasjon fra tekster om kjøp og salg og ulike typer lån og bruke det til å formulere og løse problemer

g. planlegge, utføre og presentere et utforskende arbeid knyttet til personlig økonomi

h. bruke funksjoner i modellering og argumentere for framgangsmåter og resultater

i. modellere situasjoner knyttet til reelle datasett, presentere resultatene og argumentere for at modellene er gyldige

j. utforske matematiske egenskaper og sammenhenger ved å bruke programmering

Oversikt over oppgaver

En hovedoppgave er ment å passe til en klassetime. For å gjøre det lett å velge en oppgave har vi angitt relevante kjerneelement og læringsmål i parentes. Kjerneelementene er angitt som K1-K6 og læringsmålene er angitt som 8a-8k (8. klasse), 9a-9j (9. klasse) og 10a-10j (10.klasse), i henhold til oversikten på de forrige sidene. Videre har hver oppgave underspørsmål, ofte av stigende vanskelighetsgrad, slik at oppgaven kan tilpasses trinn, klasse og enkeltelever. Kort beskrivelse av oppgave og kobling til læringsmål, og en oppsummering av delspørsmål.

1. Firetårnsproblemet (K1, 8k, 9a). Plassering av tårn for å dekke flest mulige lyse felter. Hovedsakelig en oppgave i systematisk problemløsning, der man bør starte med enklere delproblemer og gradvis øke kompleksiteten.

   Oppgaven kan utvides til å finne flere riktige løsninger, skrive en algoritme for å finne nye løsninger, samt å finne det geometriske mønsteret som løsningene har til felles.

2. Brikkeverdier (8b, 8g, 8h, 10c). Ulike regneoppgaver knyttet til brikkenes verdi.

   Telle opp verdien til et utvalg brikker og opptelling av hvem som leder på sjakkbrettet. Løse likningssett for å finne antallet ulike sjakkbrikker i et utvalg.

3. Brikkemobilitet (K1). Ulike oppgaver knyttet til hvordan de ulike brikkene kan flytte. Oppgave i systematisk utforsking av brikkenes mobilitet, og å bruke kunnskapen til å løse noen morsomme problemer.

   Avgjøre brikkenes styrke fra ulike felter. Avgjøre brikkenes styrke i konkrete stillinger; «varmekart» og prosentvis utnyttelse av potensial. Finne korteste veier eller alle veier mellom to felt. Sette opp et utvalg brikker slik at de angriper flest mulig/alle felter eller motstandere, eller sette opp brikker slik at ingen angriper hverandre. Sjakklabyrint; finne en vei for en brikke som unngår felter som er angripet, og til slutt sier sjakk på motstanders konge. Likninger.

4. Programmering og sjakk (8k, 9j, 10j, 8a). Ulike oppgaver knyttet til programmering og sjakk. Seksjonen starter med en innføring i hvordan man kan representere sjakkbrettet i programmeringsspråket Python.

   Regne ut hvor fort antall riskorn dobles i legenden om sjakkens opprinnelse.

5. Mer kommer.

1 Firetårnsproblemet

Plasser fire tårn på sjakkbrettet slik at alle de lyse feltene blir angrepet.

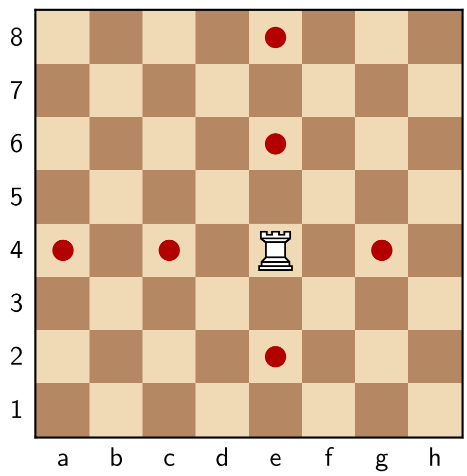
Delspørsmål

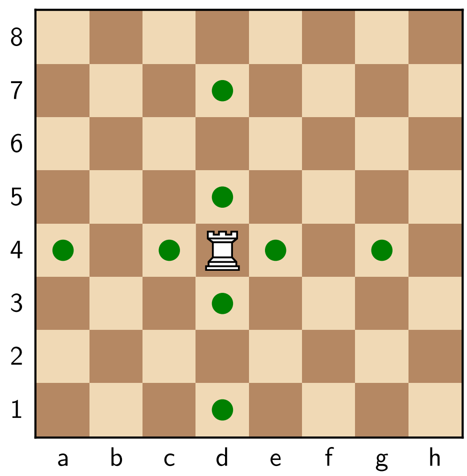
1. Hvor mange lyse felt er det på sjakkbrettet?
2. Sett ett tårn på sjakkbrettet. Hvor mange lyse felt angriper tårnet? Endres dette når du flytter tårnet til ulike felter? Plasser tårnet slik at det angriper flest mulig lyse felt.
3. Legg til et ekstra tårn på sjakkbrettet. Hvor bør det plasseres for at de to tårnene angriper flest lyse felt?
4. Legg til et tredje tårn og gjenta.
5. Legg til et fjerde tårn og gjenta. Angripes alle de lyse feltene?
6. Hva er en algoritme for å finne en riktig plassering av tårnene? Kan du bruke algoritmen til å finne flere riktige tårnplasseringer?
7. Hva slags geometrisk mønster har de ulike løsningene til felles? Kan dette brukes til å lage en annen algoritme?
8. Vanskelig spørsmål utenfor læringsmålene: Hva er antallet forskjellige løsninger?

Tips og løsninger

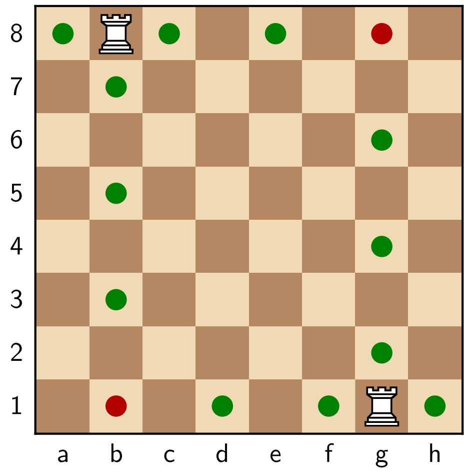
1. 32 lyse felt.

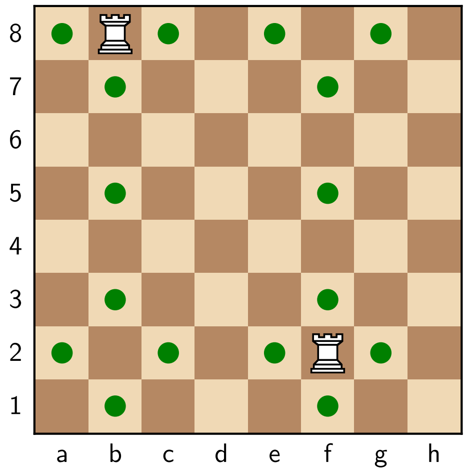
2. Når tårnet selv står på lyst felt, angriper det 6 lyse felt (markert rødt). Når tårnet selv står på mørkt felt, angriper det 8 lyse felt (markert grønt). Tårnet bør derfor stå på mørkt felt.



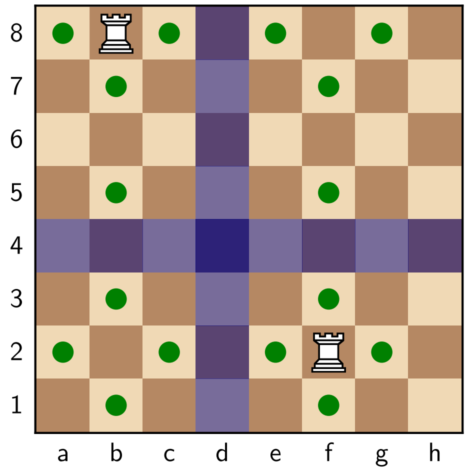


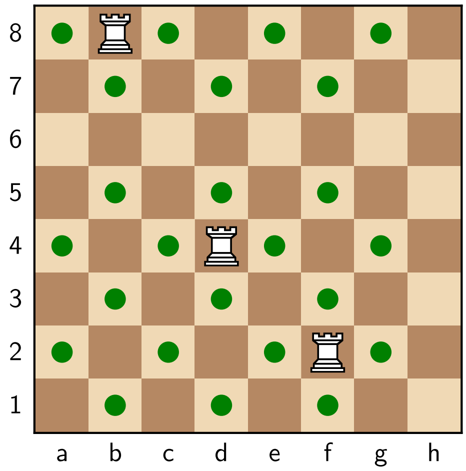
3. For å få oversikt i de neste oppgavene, er det lurt å plassere merkelapper på de lyse feltene som angripes av tårn. Fra forrige punkt vet vi at begge tårnene bør stå på mørkt felt. Nå må vi også unngå at tårnene dekker noen av de samme feltene, som markert rødt i første diagram under. Da dekkes kun 14 hvite felter. I andre diagram har vi derimot ingen overlapp og $2 \cdot 8 = 16$ hvite felter dekkes.



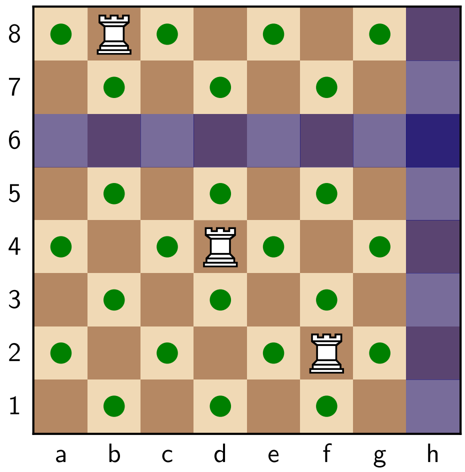


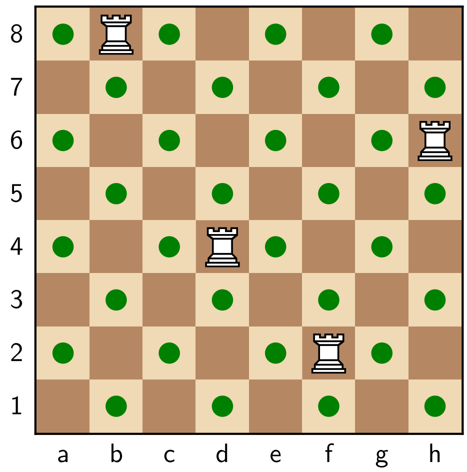
4. Som vist i diagrammet under finner vi en rad og fil som ikke har noen av de grønnmerkede feltene. Raden og filen møtes i et mørkt felt og dermed kan vi plassere et tårn her uten å «gjenbruke» noen av de hvite feltene. De tre tårnene angriper da $3 \cdot 8 = 24$ felter.





5. Vi gjentar forrige punkt og finner en tårnplassering som angriper $8 \cdot 4 = 32$ lyse felter, det vil si alle de lyse feltene.

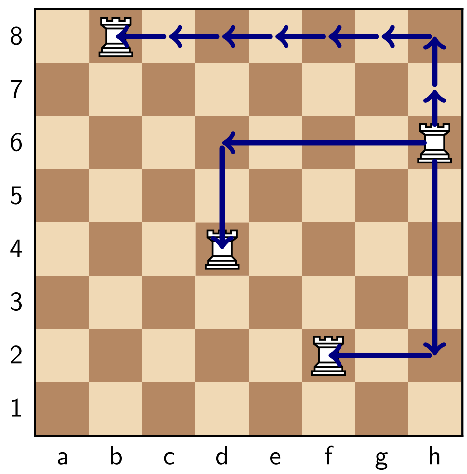




6. En algoritme er:

1. Plasser et tårn på et mørkt felt.
2. Marker alle hvite felter som blir angrepet.
3. Finn en rad og fil som møtes i et svart felt, slik at raden og filen ikke har noen tidligere merkede felter.
4. Plasser et tårn i møtepunktet og gå tilbake til steg 2. Gjenta helt til fire tårn er plassert.

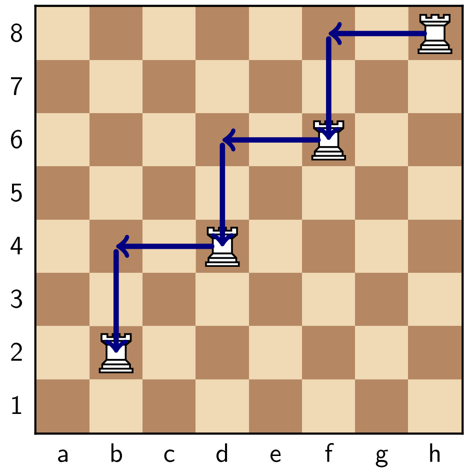
7. Mønsteret er at for å komme fra et tårn til et annet, går vi alltid et partall antall felter i både vertikal og horisontal retning. Vi kan for eksempel telle antall felter fra tårnet lengst til høyre til de andre tårnene, slik diagrammet viser. For å komme til det øverste tårnet må vi to opp og seks til siden, og så videre. Det kan være en fin øvelse for elevene å sjekke at det er «partalldistanse» mellom alle tårn. Grunnen til dette mønsteret alltid oppstår er følgende.



- Tårnene står på mørke felt, og hvis vi går partalls distanse vertikalt og horisontalt kommer vi igjen til et mørkt felt.
- Angrepslinjene til tårnene skal aldri møtes i lyse felt. Vi satt opp stillingen for å unngå slik overlapp.
- Derfor møtes tårnenes angrepslinjer i mørke felt. Dette skjer når de to tårnene har «partallsdistanse» mellom seg.

Konklusjon: Når tårnenes angrepslinjer kun møtes i mørke felt, unngår vi overlapp på lyse felt og dette tillater oss å dekke alle de 32 lyse feltene. For å få tårnenes angrepslinjer til å kun møtes i mørke felt, må vi sørge for at det er «partallsdistanse» mellom alle tårn. Vi kan bruke dette til å lage følgende algoritme:

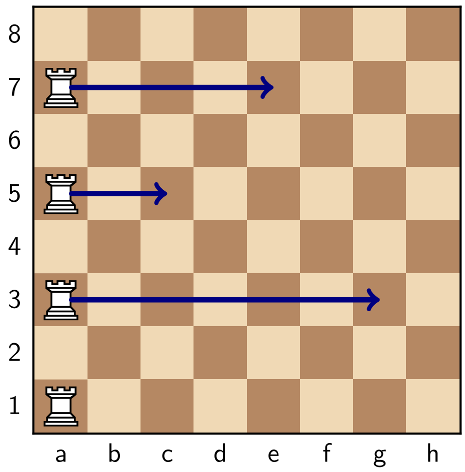
1. Sett et tårn på et svart felt.
2. Sett et nytt tårn i partallsdistanse til tidligere lagte tårn.
3. Gjenta steg 2 til alle tårn er lagt.

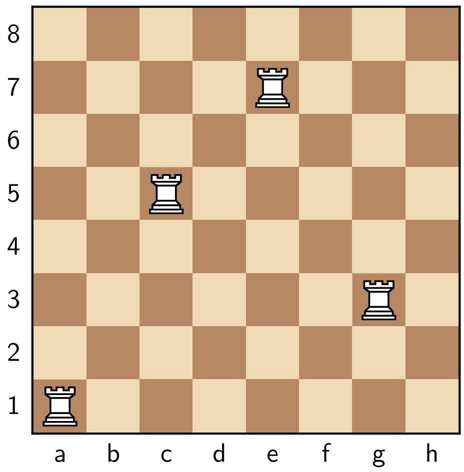


Vi kan ta vertikal og horisontal distanse hver for seg og få en enda enklere algoritme:

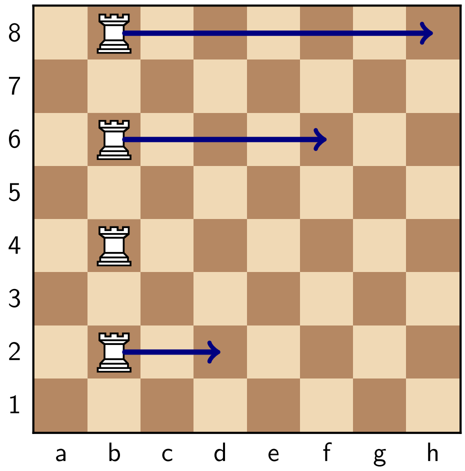
1. Sett fire tårn på de svarte feltene i a-fila. Tårnene har nå partalls distanse i vertikal retning.
2. Flytt tårnene i horisontal retning, slik at de havner på svarte felter og på hver sin fil. Dette sørger for at tårnene har partalls distanse i horisontal retning.

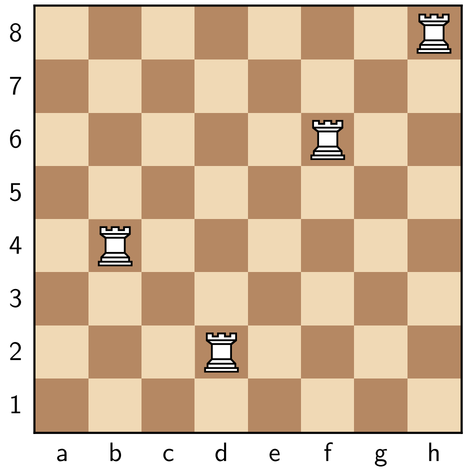
I eksempelet under flyttes tårnene til hver sin fil, nemlig filene a, c, e og g.





Merk at filene b, d, f og h aldri blir brukt dersom vi starter med tårnene i a-fila. Ved å starte fra b-fila får vi også med de andre løsningene:





Merk at alle algoritmene her må regnes som «menneskelige algoritmer», siden det gjøres valg underveis. Det er ikke aktuelt å programmere disse algoritmene, siden en datamaskin ikke kan gjøre valg av seg selv. Man kan i stedet lage et program som tar imot informasjon om hvor tårnene står, og regner ut om det er en riktig tårnplassering. Se hovedoppgaven Programmering og sjakk.

8. Vi tar utgangspunkt i den siste algoritmen. For det øverste tårnet har vi fire muligheter; enten la det stå eller flytte det horisontalt til en av tre mørke felter. For det andre tårnet må vi nå ta hensyn til at en fil allerede er brukt opp, og vi har derfor tre muligheter. For det tredje tårnet får vi dermed to muligheter, og kun en mulighet for det siste tårnet. Det er derfor $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måter å flytte tårnene på når de står i a-fila. Det er like mange muligheter når tårnene står i b-fila, så antall riktige tårnplasseringer blir $24 \cdot 2 = 48$.

Merk at vi ikke har tatt hensyn til symmetri; selv om to løsninger er like når sjakkbrettet roteres, regner vi dem som forskjellige i denne oppgaven.

2 Brikkeverdier

♔ ∞, ♕ 9, ♖ 5, ♘ 3, ♗ 3, ♙ 1

Delspørsmål

1. Telling av brikker.

2. Utrigning av materiell stilling.

2.1. Slå ut brikker med høyest verdi.

3 Programmering og sjakk

Innføring i sjakk på Python