

Eksperimentell verdi for treghetsmomentet til rullende kuler

P. Rasmussen^a, S. A. Ruste^a, O. R. Meberg^a, H. M Frisinger^a

^aInstitutt for fysikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

Sammendrag

For å finne sammenhengen mellom teoretisk og empirisk konstant til treghetsmomentet ble det gjennomført forsøk på en slak parabelbane. Ved å se bort fra blandt annet luftmotstand og andre feilkilder ble alle feilkildene samlet i treghetsmomentets konstant. Det viste seg å være $(34,5 \pm 5,1)\%$ høyere empirisk treghetsmoment for kuleskall sammenlignet med teoretisk verdi. For kompakt kule var denne forskjellen på $(22,6 \pm 5,4)\%$ høyere for det empiriske treghetsmomentet.

1. Introduksjon

”Treghetsmoment er et uttrykk for en gjenstands motstand mot å få rotasjonshastigheten endret.” [1] Treghetsmomentet er proporsjonal med massen og kvadratet av radiusen. Et legeme vil derfor ha et stort treghetsmoment ved høy masse som er plassert langt unna rotasjonsaksen. Teorien om treghetsmoment er essensiell for å forstå hvordan et rullende objekt oppfører seg.

Et kuleskall med et høyt treghetsmoment vil altså bruke lenger tid for å oppnå en fart sammenlignet med en kompakt kule. I dette prosjektet vil treghetsmomentets teoretiske verdi sammenlignes med målte verdier. Gjennom rulling i en slak parabelbane vil disse verdiene komme frem fra bevaring av mekanisk energi. Hvor stor vil avviket være fra det teoretiske treghetsmomentet til en utregnet verdi?

2. Teori

For å beregne de teoretiske verdiene for treghetsmomentkonstanten utnyttes formelen (kap. 9.6, ref. [2])

$$I_0 = \frac{C}{MR^2} \quad (1)$$

for kuleskall og kompakt kule. Hvor M er massen, R er radiusen og I_0 er treghetsmomentet. C-verdiene for kuleskall og kompakt kule er henholdsvis $\frac{2}{3}$ og $\frac{2}{5}$. Disse konstantene blir brukt som uttrykk for treghetsmomentet fordi M og R er konstant.

De eksperimentelle verdiene for treghetsmomentet kommer frem gjennom bevaring av mekanisk energi (kap. 9.4, ref. [2]),

$$U - W_{\text{luft}} - W_{\text{friksjon}} = K_{\text{transl}} + K_{\text{rot}} \quad (2)$$

der U er potensiell energi, K er kinetisk energi og W er arbeid fra luftmotstand og friksjon.

Det blir gjort noen antagelser i forsøket for å forenkle uttrykket. Det antas ren rulling, ingen vibrasjoner og ingen luftmotstad. Det medfører at $W_{\text{friksjon}} = 0$ og $W_{\text{luft}} = 0$.

K_{transl} er et uttrykk for kinetisk energi på grunn av massesenterets hastighet i baneretningen og er gitt av formelen:

$$K_{\text{transl}} = \frac{1}{2} \cdot Mv^2 \quad (3)$$

K_{rot} er et uttrykk for kinetisk energi på grunn av rotasjonshastigheten til kulen, samt treghetsmomentet og er gitt av formelen;

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2 \quad (4)$$

der ω er vinkelhastigheten.

Ut fra formelen for bevaring av mekanisk energi kan det regnes ut en C -verdi ut fra empirisk data fra Tracker. Settes C for seg selv får en

$$C = \frac{2 \cdot g \cdot \Delta h}{v^2} - 1 \quad (5)$$

der g er jordakselerasjonen, Δh er høydeforskjellen fra start til slutt punkt og v er hastigheten i sluttpunktet.

Alle empiriske målinger vil føre med seg feilkilder. Meneskelig feil, feil med måleinstrumenter og fysiske feilkilder spiller inn. For usikkerhetsberegninger ble det tatt utgangspunkt i Gauss' feilforplantningslov [3],

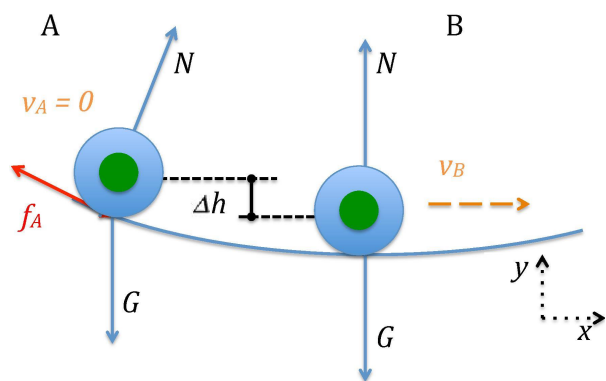
$$\partial F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y\right)^2} \quad (6)$$

hvor x og y er ulike faktorer for usikkerhet. I dette forsøket vil disse faktorene ta utgangspunkt i standardavvik for høydeforskjell, fart og gravitasjon. Det gir formelen

$$\partial C = \sqrt{\left(\frac{4gh}{v^3} \partial v\right)^2 + \left(\frac{2h}{v^2} \partial g\right)^2 + \left(\frac{2g}{v^2} \partial h\right)^2} \quad (7)$$

I numeriske beregninger er akselerasjonen i et gitt punkt gitt ved (kap. 10.3, ref. [2])

$$a = \frac{g \sin \beta}{1 + C} \quad (8)$$



Figur 1: Objekt som forflytter seg på halv-parabelbane, med antatt ren rulling. A indikerer startpunkt, mens B både bunnpunkt og sluttunkt. Høydeforskjell gjennom forsøket betegnes som Δh . Rullefriksjonen er angitt som f_a , mens v er farten. Normalkraft er N , og G er gravitasjonskraften.

farten ved

$$v = v_0 + a \cdot \Delta t \quad (9)$$

og posisjon langs x-aksen

$$x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v \cdot \cos \beta \quad (10)$$

der β er vinkelen til banen i et gitt punkt.

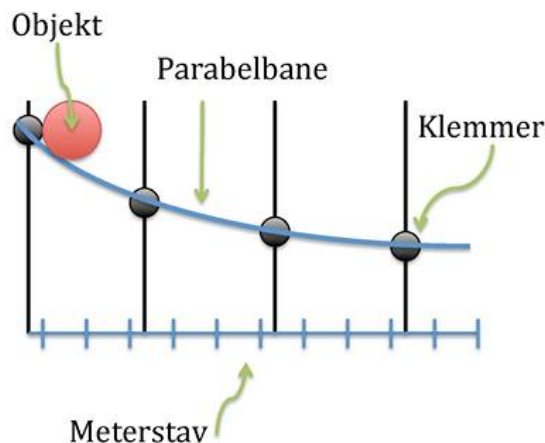
3. Metode

3.1. Praktisk utførelse

Setter opp en slak parabelbane med markert start og sluttunkt figur 2. Kameraet av typen Panasonic Lumix blir satt opp i høyde med parabelbanen med horisontal vinkel og målestokk for kalibrering av Tracker legges frem. Etter disse forberedelsene blir selve forsøket gjennomført ti ganger for hver av de to kulene (henholdsvis radius $(40 \pm 0,3)mm$ og masse $(2,8 \pm 0,1)g$, samt radius $(22 \pm 0,03)mm$ og masse $(30,5 \pm 0,1)g$. Først blir filmen startet og kulen sluppet med null hastighet i gitt startpunkt. Filmen blir avsluttet når ballen passerer sluttunktet.

3.2. Analyse av data

De 20 videoene lastet inn i Tracker hvorpå et aksesystem og en kalibreringslinje blir satt. All data for y (høyde og v_y langs y-aksen) og translasjonshastighet blir satt inn i et regneark. Startpunkt for målingene blir satt til det tidspunktet der translasjonshastigheten er over $0,002m/s$. Sluttunktet blir satt til det tidspunktet der y -verdien er under $0,06m$ (bunnen på parabelbanen). Ut fra listene med verdier for slutfart og høydeforskjell blir gjennomsnitt og standardfeil regnet ut. Et uttrykk for kurven som banen utgjør blir også estimert gjennom Tracker for å kunne regne ut den numeriske hastigheten.



Figur 2: Viser oppsett for forsøk.

3.3. Numerikk

Det har blitt brukt en numerisk modell med Eulers' metode som utgangspunkt for å finne slutfarten til objektet. Dette ble gjennomført ved bruk av formlene (8), (9) og (10) hvor vinkelen β er hentet fra polynomet av banen gitt av tracker og steglengden ble satt til $\partial t = 0,05$ s.

4. Resultater

Forsøket ble gjennomført 10 ganger for hvert objekt, hvor høydeforskjell og slutfart ble registrert for hvert forsøk i Tracker. Farten som funksjon av tid er vist i figur 6, mens strekning som funksjon av tid er gitt i figur 8. Resultatene ble så brukt til å regne ut gjennomsnittsverdi og standardavvik for hver av dataene. Disse er samlet i tabell 1

Tabell 1: Gjennomsnittsverdier for startfart og høydeforskjell, samt standardavvik for disse verdiene.

Objekt	v_{slutt} [m/s]	std. avvik	Δh [m]	std. avvik
Kuleskall	0,893	0,006	0,084	0,001
Kompakt kule	1,002	0,010	0,078	0,001

Kreftene på objektene vist i figur 1 er beregnet numerisk og plottet i MatLab. Friksjonskraften som funksjon av posisjon langs x-aksen er gitt av figur 3, og normalkraften som funksjon av posisjon langs x-aksen er gitt i figur 4.

Konstanten C i uttrykket for treghetsmoment ble beregnet til $C_{e,kuleskall} = 1,023$, og $C_{e,kompakt kule} = 0,519$ gjennom formel (5).

Usikkerheten i C for begge objektene ble beregnet gjennom formel (7), hvor usikkerhet i høydeforskjell og hastighet er gitt av standardavvik gitt i tabell 1. Usikkerheten i gravitasjonen er gitt av jordas gjennomsnittsakselerasjon g med den totale usikkerheten $g = (9,80665 \pm 0,026)m/s^2$ [4]. Dette ga da

$$C_{e,kuleskall} = 1,023 \pm 0,079$$

$$C_{e, \text{kompakt kule}} = 0,519 \pm 0,036$$

Forsøket ble også gjennomført numerisk, gjennom å sette konstanten C i formelene (1) lik sine teoretiske verdier gitt ved $C_{t, \text{kuleskall}} = 2/3$ og $C_{t, \text{kompakt kule}} = 2/5$. Hastigheten numerisk som funksjon av tid er vist i figur 5, mens strekning som funksjon av tid er vist i figur 7. Slutfarten numerisk ble registrert i samme punkt som slutfarten eksperimentelt og ga.

$$v_n, \text{ kuleskall} = 0,997 \text{ m/s} \quad v_n, \text{ kompakt kule} = 1,067 \text{ m/s}$$

Det kan regnes ut en prosentvis forskjell mellom eksperimentell og numerisk slutfastighet med usikkerhet gjennom

$$1 - \frac{v_t}{v_n} = (10,4 \pm 0,6)\% \quad 1 - \frac{v_t}{v_n} = (6,1 \pm 1,0)\%$$

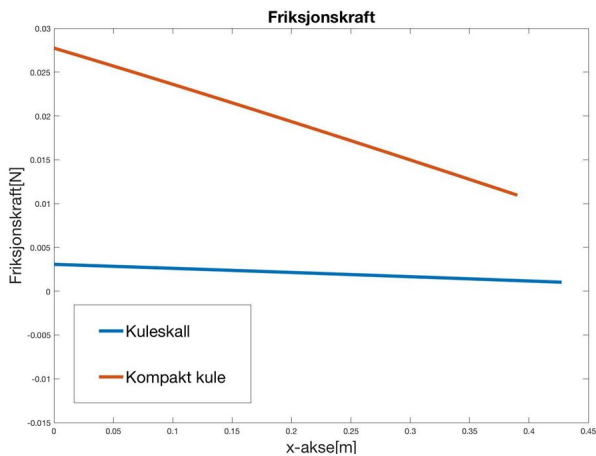
(Kuleskall t.v og kompakt kule t.h)

Der v_t , teoretisk er hentet fra tabell 1 ved slutfastighet v_{slutt} .

Prosentvis forhold mellom teoretisk C -verdi og empirisk verdi ble så regnet ut

$$1 - \frac{C_{t, \text{kuleskall}}}{C_{e, \text{kuleskall}}} = (34,5 \pm 5,1)\%$$

$$1 - \frac{C_{t, \text{kompakt kule}}}{C_{e, \text{kompakt kule}}} = (22,6 \pm 5,4)\%$$



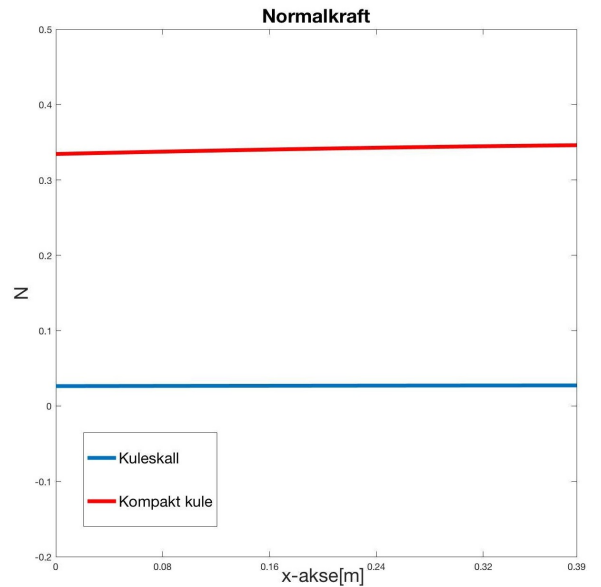
Figur 3: Beskrivelse av friksjonskraften på hvert legeme, som funksjon av posisjonen.

5. Diskusjon

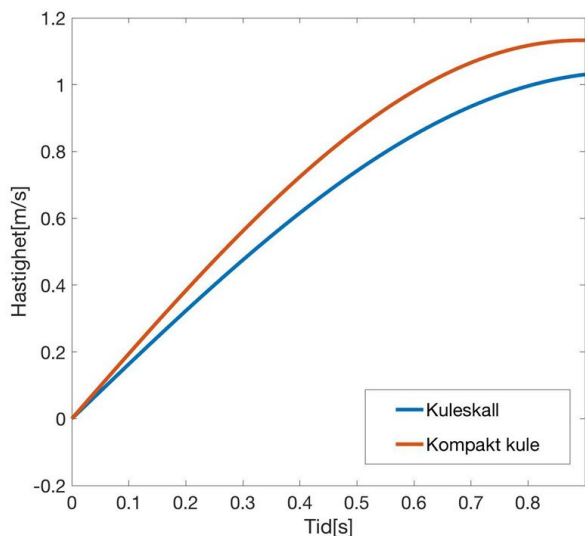
I usikkerhetsanalysen er det beregnet total usikkerhet for konstanten C med hensyn på gravitasjon, fart og høyde fra gjennom Gauss' feilforplantingslov. Resultatene viser at disse tre faktorene utgjør en usikkerhet på $\pm 0,036$ for kompakt kule, noe som tilsvarer et feilestimat på 7%. På samme måte er usikkerheten til kuleskallet på $\pm 0,079$, noe som tilsvarer et 8% feilestimat. Disse variablene utgjør en forskjell, men i tillegg har problemstillingen andre feilkilder som ikke er med i beregningene. Luftmotstand, glidning, vibrasjoner, feilmålinger og tilfeldige feil vil påvirke resultatet.

For å minimere luftmotstand som feilkilde ble det brukt en slak parabelbane. Det er gunstig å gjøre forsøk med relativt lave translasjonshastigheter fordi det gir lavere luftmotstand i forsøk med rullende kuler. Det er en ulempe at det ble brukt kuler med ulik radius i forsøket grunnet de to kulene vil ha ulikt energitap pga luftmotstand. En kule med større radius ha et høyere energitap pga. luftmotstand enn en kompakt kule i et slikt forsøk. Det ville vært fordelaktig å ha kuler med like stor radius for å minimere denne forskjellen i luftmotstand. Det å regne ut det eksakte energitapet pga. luftmotstand er en omfattende oppgave og, derfor ser oppgaven bort fra luftmotstand ved beregning av C -verdiene fra de empiriske dataene.

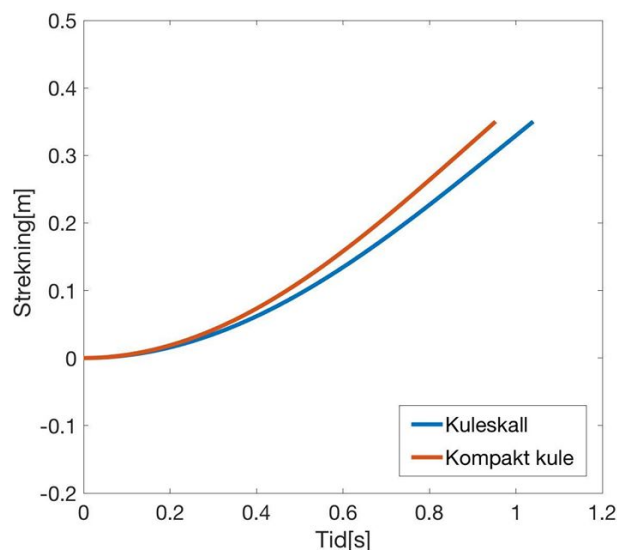
Feil i utførelsen av forsøket er også en feilkilde i dataene. Plassering av kamera, måten kulene blir sluppet på, og ujevnheter i banen er feil som kan spille inn. Gjennom analysen i Tracker dukker også andre feilkilder opp. God plassering av koordinatsystem, markering av målestokk og bra gjennomført «autotracking» er kritisk for å få gode resultater. Denne oppgaven beskriver ikke et estimat på hvor mye disse feilkildene har påvirket forsøket.



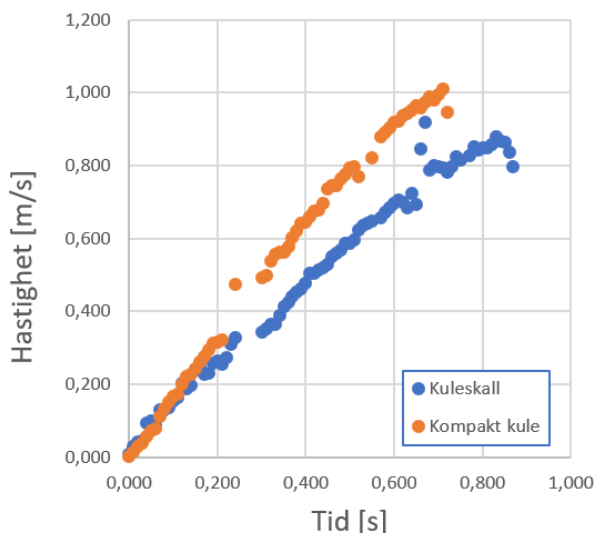
Figur 4: Representativ beskrivelse av normalkraften på hvert legeme.



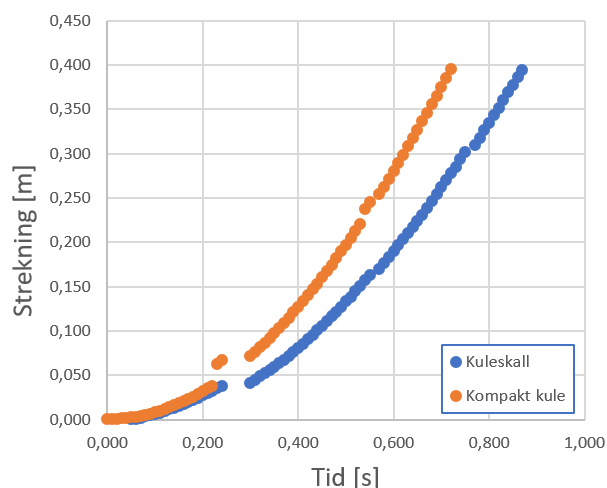
Figur 5: Numerisk beregning av hastigheten som funksjon av tiden til kulene.



Figur 7: Numerisk beregning av hastigheten som funksjon av tiden til kulene.



Figur 6: Målt hastighet som funksjon av tiden for kulene på slak parabelbane (ref figur 2).



Figur 8: Målt strekning som funksjon av tiden for kulene på slak parabelbane (ref figur 2).

Ved å anta ren rulling neglisjeres glidning. Hvilket er rimelig å anta ved lave rotasjonshastigheter. Numeriske beregninger viser vesentlige forskjeller i friksjonskraften 3 som trolig kommer av forskjellen i masse, og dermed normalkraft 4.

De teoretiske C -verdiene tar utgangspunkt i perfekte geometriske former med perfekt massefordeling. Kuleskall og kompakte kuler er teoretiske objekter med visse egenskaper. I dette forsøket ble det brukt kuler som fremstår som kuleskall og kompakte kuler, men hvor nær disse kulene er til de teoretiske formene er usikkert.

Fra eksperimentet viste det seg at for kuleskall ble C -verdien $(34,5 \pm 5,1)\%$ høyere enn den teoretiske verdi-

en. For den kompakte kule var resultatet $(22,6 \pm 5,4)\%$ høyere for de eksperimentelle verdiene. Konstanten C fra treghetsmomentet vil trolig være høyere eksperimentelt enn teoretisk fordi det ikke blir tatt hensyn til tap av mekanisk energi i utregningen av C . Alle feilkilder og tap i mekanisk energi vil samles i konstanten. Tapet av mekanisk energi vil føre til lavere translasjonshastighet. Fra formelene for mekanisk energi ses det at det nødvendigvis er en større C enn om all potensiell energi hadde gått til kinetisk energi.

Som nevnt kan kulenes geometri og massefordeling også spille inn i denne forskjellen. Vårt kuleskall vil være lavere enn den teoretiske. Vår kompakte kule vil være høyere enn teoretisk verdi.

Numerikk er en beregning uavhengig av empirisk data

fra Tracker, men gravitasjon og referansepunkter blir brukt for å gjennomføre numerikken. Disse referansepunktene vil gi en usikkerhet i sammenligningen til de empiriske beregninger. Referansepunktene som ble satt er start- og slutt punkt gitt ved x -verdiene. Figur 5 og 6, samt figur 7 og 8 har klare likheter, noe som gir kredibilitet til forsøkene som er gjennomført.

I de numeriske beregningene ble de teoretisk riktige C verdiene brukt for å kunne sammenligne hastigheten opp mot eksperimentelle data. Det numeriske ble programmert med samme startposisjon og fart som det eksperimentelle, ble kjørt til ett gitt slutt punktet i banen. Det er mulig å sammenligne sluthastighet mellom det numeriske og eksperimentelle for å vurdere tap i mekanisk energi.

Numerisk ble hastigheten i slutt punktet til kuleskallet gitt til å være $0,997\text{ m/s}$, dette er $10,4\%$ høyere enn slutfarten ble eksperimentelt. For kompakt kule ble denne hastigheten $1,067\text{ m/s}$, noe som er $6,1\%$ høyere. Dette stemmer overens med de andre resultatene som sier at C vil være høyere eksperimentelt enn teoretisk.

6. Konklusjon

I dette forsøket er empirisk C -verdi $(34,5 \pm 5,1)\%$ høyere enn den teoretiske verdien for kuleskall og $(22,6 \pm 5,4)\%$ høyere for kompakt kule. Avviket kan blant annet skyldes energitap i mekanisk energi og en ikke perfekt geometri/massefordeling.

7. Referanseliste

- [1] Øyvind Grøn, Store Norske Leksikon, *treghetsmoment*: <https://snl.no/treghetsmoment> (sjekket 16. november 2019).
- [2] Young, H. D. og R. A. Freedman: *University Physics*. Pearson Education, 14. utgave, 2016.
- [3] Taylor, J. R.: *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 2 utgave, 1997.
- [4] Knut Hofstad, Store Norske Leksikon, *tyngdens akselerasjon*: https://snl.no/tyngdens_akselerasjon (sjekket 16. november 2019).
- [5] Nesse, T. og V. Risinggård, Institutt for fysikk, NTNU: *NTNU fysikk lab*. <http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/index.html> (sjekket 16. november 2019).