

SERIE SCHAUM

SEYMOUR LIPSCHUTZ

TOPOLOGIE

**COURS
ET
PROBLEMES**

**650
EXERCICES
RESOLUS**

TOPOLOGIE

SERIE SCHAUM

SEYMOUR LIPSCHUTZ

*Professeur associé de mathématiques
Temple University*

TOPOLOGIE

**COURS
ET
PROBLÈMES**

*Traduction française
M. LOBENBERG*

Quatrième tirage

Groupe McGraw-Hill :

Auckland — Bogota — Hambourg — Lisbonne — Londres — Madrid —
Milan — Mexico — Montréal — New Delhi — New York — Panama — Paris
— San Juan — Sao Paulo — Singapour — Sydney — Tokyo — Toronto



Topologie, Cours et problèmes, est traduit de :

Theory and problems of General Topology

Copyright © 1965 by McGraw-Hill, New York

Copyright © 1981 by McGraw-Hill, Paris pour la traduction française
(Edition originale ISBN : 0-07-037988-2 McGraw-Hill Inc., New York)

ISBN 2-7042-1025-X

La Loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants-droit ou ayants-cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'Article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contre-façon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code Pénal.

McGraw-Hill. 28 Rue Beaunier. 75014 Paris

Préface

La topologie générale est devenue récemment une partie essentielle des connaissances de base que tout étudiant en mathématiques doit posséder. Ce livre est conçu pour être utilisé comme manuel d'un cours classique de topologie, ou comme complément aux ouvrages traditionnels existant sur le sujet. Comme ouvrage de référence, il devrait aussi être d'une grande utilité pour tous ceux souhaitant être en possession d'une introduction rigoureuse et détaillée à la topologie.

Chaque chapitre débute par un énoncé clair des définitions, principes et théorèmes relatifs au sujet traité, accompagnés d'exemples et de figures illustrant la question. On trouve à la suite une série de problèmes résolus et de problèmes supplémentaires de difficulté croissante. Les problèmes résolus illustrent et développent la théorie ; ils mettent en lumière les points délicats dont la connaissance permet à l'étudiant d'éviter de se sentir constamment mal à l'aise ; enfin, ils permettent la répétition des principes fondamentaux, ce qui est essentiel à une bonne assimilation du sujet. Les démonstrations de nombreux théorèmes sont incluses parmi les problèmes résolus. Les problèmes supplémentaires permettent une révision complète du contenu de chaque chapitre.

Les sujets traités incluent les propriétés fondamentales des espaces topologiques, métriques et normés, les axiomes de séparation, les notions de compacité, de topologie produit et de connexité. Les théorèmes qui sont démontrés comprennent le lemme et le théorème de métrisabilité d'Urysohn, le théorème de Tychonoff sur les produits d'espaces topologiques et le théorème de Baire. Le dernier chapitre, consacré aux espaces fonctionnels, est une étude des topologies de la convergence simple, de la convergence uniforme et de la convergence compacte. En outre, les trois premiers chapitres présentent les notions indispensables de théorie des ensembles, le quatrième chapitre est consacré aux topologies de la droite et du plan, et l'appendice donne les propriétés fondamentales des nombres réels.

Le contenu de l'ouvrage dépasse ce qui est normalement enseigné dans un premier cours de topologie. Nous avons voulu, en effet, faire un livre qui soit d'un maniement plus souple, procurer un ouvrage de référence plus utile et susciter des intérêts ultérieurs pour le sujet.

Je tiens à remercier mes nombreux amis et collègues, particulièrement le Dr. Joan Landman, pour leurs suggestions pertinentes et la révision critique du manuscrit. Je tiens aussi à exprimer ma gratitude au personnel de la Schaum Publishing Company, et particulièrement à Jeffrey Albert et Alan Hopenwasser, pour leur précieuse collaboration.

Seymour LIPSCHUTZ
Temple University

Table des matières

Chapitre 1. Ensemble et relations

Ensembles, éléments	1
Sous-ensembles	2
Ensemble universel et ensemble vide	2
Classes, collections, familles et espaces	2
Opération sur les ensembles	3
Produit cartésien d'ensembles	4
Relations	5
Relations d'équivalence	6
Composition des relations	7

Chapitre 2. Applications

Applications	19
Injection, surjection, application réciproque et application identique	20
Famille indexée, produit d'une famille d'ensembles	21
Généralisation des notions de réunion et d'intersection	21
Fonctions d'ensembles associées à une application	22
Algèbre des applications à valeurs réelles	24

Chapitre 3. Cardinaux et relations d'ordre

Ensembles équivalents	36
Ensembles dénombrables	36
La puissance du continu	37
Le théorème de Schroeder-Bernstein	37
La notion de cardinal	38
Le théorème de Cantor et l'hypothèse du continu	38
Ensembles ordonnés	39
Sous-ensembles d'un ensemble ordonné	39
Plus petit et plus grand élément	40
Eléments maximaux et éléments minimaux	40
Majorants et minorants	40
Lemme de Zorn	41

Chapitre 4. Topologie de la droite et du plan

La droite numérique réelle	53
Ensembles ouverts de R	53
Points d'accumulation	54
Théorème de Bolzano-Weierstrass	55
Ensembles fermés	55
Théorème de Heine-Borel	55
Suites	56
Suites convergentes	56
Sous-suites	57

Suites de Cauchy	58
Caractère complet	58
Fonctions continues	58
Topologie du plan	60
Chapitre 5. Espaces topologiques : définitions	
Espaces topologiques	74
Points d'accumulation	75
Ensembles fermés	76
Fermeture ou adhérence d'un ensemble	77
Intérieur, extérieur, frontière	78
Voisinages et systèmes de voisinages	79
Suites convergentes	79
Topologies moins fine et plus fine	80
Sous-espaces, topologie induite	80
Définitions équivalentes d'une topologie	81
Chapitre 6. Bases et sous-bases	
Base d'une topologie	98
Sous-bases	99
Topologie engendrée par une famille d'ensembles	100
Base locale	100
Chapitre 7. Continuité et homéomorphie	
Applications continues	109
Applications continues et proximité arbitraire	110
Continuité en un point	111
Continuité séquentielle en un point	111
Applications ouvertes et fermées	111
Espaces homéomorphes	112
Propriétés topologiques	113
Topologie induite par des applications	113
Chapitre 8. Espaces métriques et normés	
Distances	124
Distances d'ensembles, diamètres	125
Boules ouvertes	126
Topologies induites par une métrique, espaces métriques	127
Propriétés des topologies induites par une métrique	128
Métriques ou distances équivalentes	128
Problème de métrisabilité	129
Espaces métriques isométriques	129
Espace euclidien de dimension m	130
Espace de Hilbert	130
Convergence et continuité dans les espaces métriques	131
Espaces normés	131
Chapitre 9. Dénombrabilité	
Espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité	145
Espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité	145
Théorèmes de Lindelöf	146
Espaces séparables	146
Propriétés héréditaires	147
Chapitre 10. Axiomes de séparation	
Introduction	154
Espaces T_1	154

Espaces séparés ou de Hausdorff	154
Espaces réguliers	155
Espaces normaux	156
Lemme d'Urysohn et théorème de métrisabilité	157
Applications séparant les points	157
Espaces complètement réguliers	157
Chapitre 11. Compacité	
Recouvrements	167
Ensembles compacts	167
Sous-ensembles d'espaces compacts	169
Propriété d'intersection finie	169
Compacité et espaces séparés	169
Espaces séquentiellement compacts	170
Ensembles possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass	171
Espaces localement compacts	172
Compactification	172
Compacité dans les espaces métriques	173
Ensembles précompacts	174
Nombre de Lebesgue d'un recouvrement	175
Chapitre 12. Espaces produits	
Topologie produit	184
Base de la topologie produit pour un produit fini	185
Sous-base et base de définition de la topologie produit	185
Exemple d'un espace produit	186
Théorème de Tychonoff sur le produit de compacts	188
Produits d'espaces métriques	188
Ensemble de Cantor	189
Propriétés de l'ensemble de Cantor	189
Chapitre 13. Connexité	
Ensembles séparés	198
Ensembles connexes	198
Espaces connexes	199
Connexité sur la droite réelle	200
Composantes connexes	201
Espaces localement connexes	202
Chemins	202
Ensembles connexes par arcs	203
Chemins homotopes	203
Espaces simplement connexes	204
Chapitre 14. Espaces métriques complets	
Suites de Cauchy	215
Espaces métriques complets	216
Principe des fermés enboîtés	216
Espaces complets et applications contractantes	217
Complétions	217
Théorème de Baire	218
Espaces complets et compacité	218
Construction des nombres réels	219
Chapitre 15. Espaces de fonctions	
Espaces de fonctions	227
Topologie définie par un point et un ouvert	227
Convergence simple	228
Convergence uniforme	229

L'espace de fonctions $C[0, 1]$	230
Fonctions uniformément bornées	231
Equicontinuité, théorème d'Ascoli	231
Topologie définie par un compact et un ouvert	232
Topologie de la convergence uniforme compacte	232
Fonctionnelles sur les espaces normés	233
Appendice Propriétés des nombres réels	245
Axiomes de corps	245
La droite réelle	246
Sous-ensembles de \mathbf{R}	246
Nombres positifs	246
Ordre	247
Valeur absolue	248
Axiome de la borne supérieure	248
Propriété des intervalles emboîtés	249
Index	256
Index des symboles	260

CHAPITRE 1

Ensembles et relations

ENSEMBLES, ELEMENTS

On rencontre la notion d'ensemble dans toutes les branches des mathématiques. Intuitivement, un ensemble est une collection ou une famille d'objets bien définie, et sera noté à l'aide de lettres majuscules A, B, X, Y, \dots . Les objets composant l'ensemble sont appelés ses *éléments* et seront notés à l'aide de lettres minuscules a, b, x, y, \dots . L'assertion “ p est un élément de A ” ou, ce qui est équivalent, “ p appartient à A ” s'écrit

$$p \in A$$

La négation de $p \in A$ s'écrit $p \notin A$.

Il y a essentiellement deux façons de caractériser un ensemble donné. La première consiste, si cela est possible, à énumérer les éléments de l'ensemble. Par exemple,

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

désigne l'ensemble A dont les éléments sont les lettres a, e, i, o et u . Remarquons que les éléments de A sont séparés par des virgules et placés à l'intérieur d'une accolade $\{ \}$. La deuxième façon consiste à énoncer les propriétés communes à tous les éléments de l'ensemble. Par exemple,

$$B = \{x : x \text{ est un entier, } x > 0\}$$

ce qui se lit “ B est l'ensemble des x tels que x soit un entier et x soit positif”, désigne l'ensemble B dont les éléments sont les entiers positifs. Pour représenter un élément arbitraire de l'ensemble on utilise une lettre qui sera en général x ; les deux points se lisent “tels que” et la virgule “et”.

Exemple 1.1 : L'ensemble B précédent peut aussi s'écrire $B = \{1, 2, 3, \dots\}$. Remarquons que $-6 \notin B$, $3 \in B$ et $\pi \notin B$.

Exemple 1.2 : Les intervalles de la droite réelle, définis ci-dessous, se rencontrent très fréquemment en mathématiques. Ici a et b sont des nombres réels tels que $a < b$.

$$\text{L'intervalle ouvert d'origine } a \text{ et d'extrémité } b = (a, b) = \{x : a < x < b\}$$

$$\text{L'intervalle fermé d'origine } a \text{ et d'extrémité } b = [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$\text{L'intervalle semi-ouvert d'origine } a \text{ et d'extrémité } b, \text{ ouvert en } a, \text{ fermé en } b = (a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

$$\text{L'intervalle semi-ouvert d'origine } a \text{ et d'extrémité } b, \text{ fermé en } a, \text{ ouvert en } b = [a, b) = \{x : a \leq x < b\}$$

Deux ensembles A et B sont *égaux*, ce que l'on écrit $A = B$, s'ils sont constitués des mêmes éléments, c'est-à-dire si tout élément de A appartient à B et tout élément de B appartient à A . La négation de $A = B$ s'écrit $A \neq B$.

Exemple 1.3 : Soient $E = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $F = \{2, 1\}$ and $G = \{1, 2, 2, 1\}$. Alors $E = F = G$.

On observera qu'un ensemble ne dépend pas de la façon dont ses éléments sont rangés. Un ensemble n'est pas modifié si ses éléments sont répétés ou énumérés d'une manière différente.

Un ensemble peut être *fini* ou *infini*. Un ensemble est fini s'il est formé de n éléments distincts, où n est un entier positif ; dans le cas contraire il est infini. En particulier, un ensemble possédant exactement un élément s'appelle un *singleton*.

SOUS-ENSEMBLES

Un ensemble A est un *sous-ensemble* ou une *partie* d'un ensemble B , ce que l'on écrit

$$A \subset B \text{ or } B \supset A$$

si tout élément de A appartient à B ; c'est-à-dire si $x \in A$ implique $x \in B$. On dit aussi que A est *inclus* dans B ou que A est *contenu* dans B ou encore que B *contient* A . La négation de l'inclusion $A \subset B$ s'écrit $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$ et revient à affirmer qu'il existe un $x \in A$ tel que $x \notin B$.

Exemple 2.1 : Considérons les ensembles

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, \quad B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$C = \{x : x \text{ est un nombre premier, } x > 2\} = \{3, 5, 7, 11, \dots\}.$$

Alors $C \subset A$ car tout nombre premier supérieur à 2 est impair. Par contre $B \not\subset A$ car $10 \in B$ et $10 \notin A$.

Exemple 2.2 : Nous noterons respectivement \mathbf{N} l'ensemble des nombres entiers positifs, \mathbf{Z} l'ensemble des nombres entiers, \mathbf{Q} l'ensemble des nombres rationnels et \mathbf{R} l'ensemble des nombres réels. Par conséquent,

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

On observera que si $A \subset B$ il n'est pas exclu que $A = B$. Nous pouvons en effet reformuler la définition de l'égalité de deux ensembles de la manière suivante :

DEFINITION : Deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Dans le cas où $A \subset B$ et $A \neq B$, nous dirons que A est un *sous-ensemble propre* de B , ou que A est *strictement inclus* dans B . Le lecteur doit savoir que certains auteurs utilisent le symbole \subseteq pour désigner l'inclusion et n'utilisent le symbole \subset que dans le cas de l'inclusion stricte.

Notre premier théorème découle des définitions précédentes.

Théorème 1.1 : Soient A , B et C des ensembles quelconques. Alors (i) $A \subset A$; (ii) si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A = C$; et (iii) si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

ENSEMBLE UNIVERSEL ET ENSEMBLE VIDE

Dans toute application de la théorie des ensembles, tous les ensembles considérés sont des parties d'un ensemble fixé. Nous appellerons cet ensemble *l'ensemble universel* ou le *référentiel* et nous le désignerons dans ce chapitre par U . Il convient aussi d'introduire la notion d'*ensemble vide*, c'est-à-dire d'un ensemble ne possédant aucun élément. Cet ensemble, noté \emptyset , est considéré comme étant un ensemble fini et est une partie de tout autre ensemble. Par conséquent pour tout ensemble A , $\emptyset \subset A \subset U$.

Exemple 3.1 : En géométrie plane, l'ensemble universel est constitué par l'ensemble des points du plan.

Exemple 3.2 : Soit $A = \{x : x^2 = 4, x \text{ est un entier impair}\}$. Alors A est vide, c'est-à-dire $A = \emptyset$.

Exemple 3.3 : Soit $B = \{\emptyset\}$. Alors $B \neq \emptyset$ car B contient un élément.

CLASSES, COLLECTIONS, FAMILLES ET ESPACES

Il est fréquent que les éléments d'un ensemble soient eux-mêmes des ensembles. Par exemple, toute droite d'un ensemble de droites est un ensemble de points. Pour clarifier ce type de situations, nous utiliserons les mots *famille*, *collection* ou *classe* et nous les considérerons comme des synonymes d'ensemble. En général nous utiliserons *famille* pour un ensemble d'ensembles et *collection* pour un ensemble de familles. Les mots *sous-classe*, *sous-collection* et *sous-famille* sont synonymes de sous-ensemble.

Exemple 4.1 : Les éléments de la famille $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{5, 6\}\}$ sont les ensembles $\{2, 3\}$, $\{2\}$ et $\{5, 6\}$.

Exemple 4.2 : Soit A un ensemble quelconque. L'ensemble des parties de A , que l'on note $\mathcal{P}(A)$ ou 2^A , est la famille de tous les sous-ensembles de A . En particulier, si $A = \{a, b, c\}$ alors

$$\mathcal{P}(A) = \{A, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$$

En général, si l'ensemble A est fini et possède n éléments, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(A)$ a 2^n éléments.

Le mot *espace* servira à désigner un ensemble non vide muni d'une certaine structure mathématique, par exemple un espace vectoriel, un espace métrique ou un espace topologique. Dans ce cas, les éléments de l'espace s'appellent des points.

OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

La *réunion* de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A ou à B , c'est-à-dire

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Ici "ou" est utilisé dans le sens de "et/ou".

L'*intersection* de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B , c'est-à-dire

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si A et B n'ont aucun élément commun, on dit que A et B sont *disjoints*. Une famille \mathcal{A} d'ensembles s'appelle une *famille disjointe d'ensembles* si les ensembles distincts composant \mathcal{A} sont deux à deux disjoints.

La *différence* de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \setminus B$, constitué des éléments de A n'appartenant pas à B . Autrement dit,

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

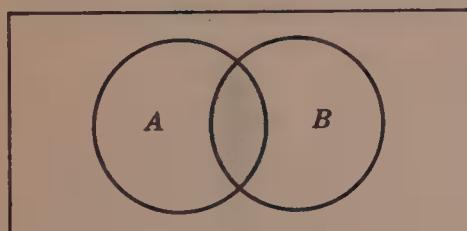
On observera que $A \setminus B$ et B sont disjoints, c'est-à-dire $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

Le *complémentaire* d'un ensemble A est l'ensemble, noté A^c , constitué des éléments de U n'appartenant pas à A , c'est-à-dire

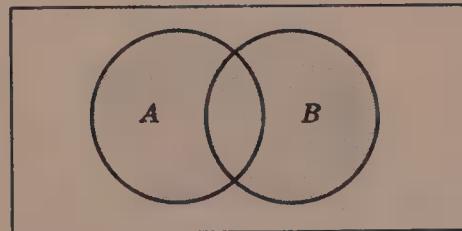
$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

Autrement dit, A^c est la différence de l'ensemble universel U et de A .

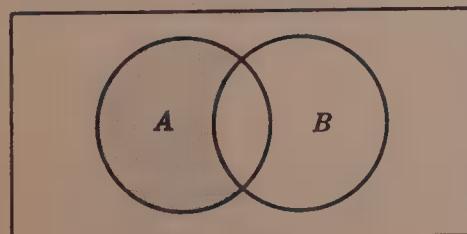
Exemple 5.1 : Les diagrammes suivants, appelés diagrammes de Venn, illustrent les opérations précédentes sur les ensembles. Ils consistent à représenter les ensembles par des aires planes simples et U , l'ensemble universel, par l'aire totale du rectangle.



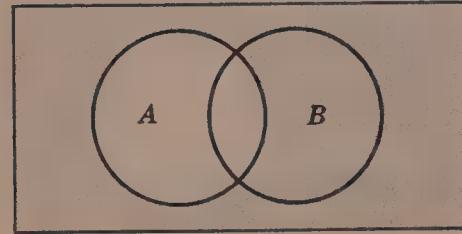
$A \cap B$ est ombré



$A \cup B$ est ombré



$A \setminus B$ est ombré



A^c est ombré

Les opérations sur les ensembles qui précèdent satisfont à certaines lois ou identités qui sont rassemblées dans le tableau ci-dessous (tableau 1). En effet, nous avons le

Théorème 1.2 : Les ensembles satisfont aux lois du tableau 1.

LOIS DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES	
Idempotence	
1a. $A \cup A = A$	1b. $A \cap A = A$
Associativité	
2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Commutativité	
3a. $A \cup B = B \cup A$	3b. $A \cap B = B \cap A$
Distributivité	
4a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Existence d'éléments neutres	
5a. $A \cup \emptyset = A$	5b. $A \cap U = A$
6a. $A \cup U = U$	6b. $A \cap \emptyset = \emptyset$
Complémentarité	
7a. $A \cup A^c = U$	7b. $A \cap A^c = \emptyset$
8a. $(A^c)^c = A$	8b. $U^c = \emptyset, \emptyset^c = U$
Lois de de Morgan	
9a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	9b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Tableau 1

Remarque : Chacune des lois précédentes se déduit d'une loi de logique analogue. Par exemple,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ et } x \in A\} = B \cap A$$

Ici nous utilisons le fait que l'assertion "p et q", c'est-à-dire $p \wedge q$, est logiquement équivalente à l'assertion "q et p", c'est-à-dire $q \wedge p$.

La relation d'inclusion entre ensembles et les opérations précédentes sont liées par le

Théorème 1.3 : Chacune des conditions suivantes est équivalente à $A \subset B$:

- (i) $A \cap B = A$
- (ii) $A \cup B = B$
- (iii) $B^c \subset A^c$
- (iv) $A \cap B^c = \emptyset$
- (v) $B \cup A^c = U$

PRODUIT CARTESIEN D'ENSEMBLES

Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien (ou simplement produit) de A et B , noté $A \times B$, est l'ensemble constitué par tous les couples $\langle a, b \rangle$ où $a \in A$ et $b \in B$, c'est-à-dire

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}$$

Le produit d'un ensemble A par lui-même, $A \times A$, sera noté A^2 .

Exemple 6.1 : Le plan cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un objet familier du lecteur (Fig. 1-1). Ici, chaque point P représente un couple $\langle a, b \rangle$ de nombres réels et vice versa.

Exemple 6.2 : Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$. Alors

$$A \times B = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

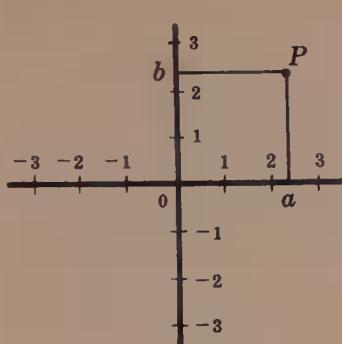


Fig. 1-1

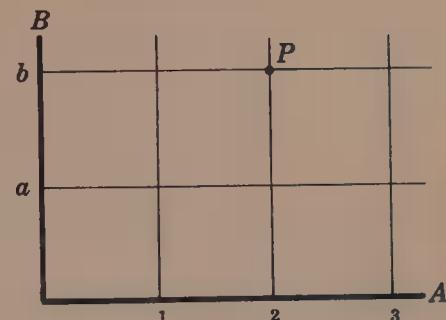


Fig. 1-2

Comme A et B ne contiennent pas un grand nombre d'éléments, il est possible de représenter $A \times B$ par un diagramme cartésien comme sur la Fig. 1-2 ci-dessus. Les droites verticales issues des points de A et les droites horizontales issues des points de B se coupent en 6 points représentant $A \times B$ d'une manière évidente. Le point P représente le couple $\langle 2, b \rangle$. En général, si les ensembles A et B possèdent respectivement s et t éléments, alors $A \times B$ possède $s \times t$ éléments.

Remarque : La notion de "couple" peut se définir rigoureusement par $\langle a, b \rangle \equiv \{\{a\}, \{a, b\}\}$. ? A l'aide de cette définition on peut démontrer la propriété "d'ordre" :

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ implique } a = c \text{ et } b = d.$$

La notion d'ensemble produit se généralise à un nombre fini arbitraire d'ensembles de manière naturelle. Le produit des ensembles A_1, \dots, A_m , que l'on écrit

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m \quad \text{ou} \quad \prod_{i=1}^m A_i$$

est l'ensemble constitué par tous les m -uples (a_1, a_2, \dots, a_m) où $a_i \in A_i$ pour tout i .

RELATIONS

Une *relation binaire* (ou *relation*) R d'un ensemble A dans un ensemble B associé à chaque couple $\langle a, b \rangle$ de $A \times B$ une et une seule des assertions suivantes :

- (i) " a est lié à b ", notée $a \ R \ b$
- (ii) " a n'est pas lié à b ", notée $a \not R \ b$.

Une relation d'un ensemble A dans lui-même s'appelle une *relation dans A* (ou une *relation définie dans A*).

Exemple 7.1 : L'inclusion est une relation définie dans toute famille d'ensembles. En effet, étant donné un couple arbitraire d'ensembles A et B , on a soit $A \subset B$ soit $A \not\subset B$.

Observons que toute relation R d'un ensemble A dans un ensemble B définit d'une manière unique un sous-ensemble R^* de $A \times B$ de la façon suivante :

$$R^* = \{\langle a, b \rangle : a \ R \ b\}$$

Réciproquement, toute partie R^* de $A \times B$ permet de définir une relation R de A dans B de la façon suivante :

$$a \ R \ b \text{ssi } \langle a, b \rangle \in R^*$$

Cette correspondance entre les relations R de A dans B et les sous-ensembles de $A \times B$ nous permet de reformuler la définition d'une relation :

DEFINITION : Une relation de A dans B est un sous-ensemble de $A \times B$.

Le *domaine* d'une relation R de A dans B se compose de l'ensemble décrit par la première coordonnée des couples de R et *l'image* se compose de l'ensemble décrit par la seconde coordonnée, c'est-à-dire

$$\text{domaine de } R = \{a : \langle a, b \rangle \in R\}, \text{ image de } R = \{b : \langle a, b \rangle \in R\}$$

La relation *réciproque* de R que l'on note R^{-1} , est la relation de B dans A définie par

$$R^{-1} = \{\langle b, a \rangle : \langle a, b \rangle \in R\}$$

Remarquons que R^{-1} peut s'obtenir en permutant les éléments des couples de R .

Exemple 7.2 : Considérons la relation

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

définie dans $A = \{1, 2, 3\}$. Le domaine de $R = \{1, 2\}$, l'image de $R = \{2, 3\}$ et

$$R^{-1} = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$$

On observera que R et R^{-1} sont identiques, respectivement, aux relations \langle et \rangle définies dans A , c'est-à-dire

$$\langle a, b \rangle \in R \text{ssi } a < b \quad \text{et} \quad \langle a, b \rangle \in R^{-1} \text{ssi } a > b$$

La *relation identité* dans tout ensemble A , que l'on note Δ ou Δ_A , est l'ensemble de tous les couples de $A \times A$ ayant même coordonnées, c'est-à-dire

$$\Delta_A = \{\langle a, a \rangle : a \in A\}$$

La relation identité se nomme aussi la *diagonale* de $A \times A$ au vu de sa position sur un diagramme cartésien de $A \times A$.

RELATIONS D'EQUIVALENCE

Une relation R dans un ensemble A , c'est-à-dire un sous-ensemble R de $A \times A$, s'appelle une *relation d'équivalence* si et seulement si elle satisfait aux axiomes suivants :

[E₁] Pour tout $a \in A$, $\langle a, a \rangle \in R$.

[E₂] Si $\langle a, b \rangle \in R$, alors $\langle b, a \rangle \in R$.

[E₃] Si $\langle a, b \rangle \in R$ et $\langle b, c \rangle \in R$, alors $\langle a, c \rangle \in R$.

En général, une relation est dite *réflexive* ssi [E₁] est vérifié, *symétrique* ssi [E₂] est vérifié et *transitive* ssi [E₃] est vérifié. Par conséquent, une relation R est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 8.1 : Considérons la relation d'inclusion entre ensembles \subseteq . Le théorème 1.1 permet d'affirmer que $A \subseteq A$ pour tout ensemble A , et que

$$\text{si } A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C \text{ alors } A \subseteq C$$

Donc \subseteq est à la fois réflexive et transitive. Mais

$$A \subseteq B \text{ et } A \neq B \text{ implique } B \not\subseteq A$$

Par conséquent, \subseteq n'est pas symétrique et n'est donc pas une relation d'équivalence.

Exemple 8.2 : En géométrie euclidienne, la similitude des triangles est une relation d'équivalence. En effet, soient α , β et γ des triangles quelconques, alors : (i) α est semblable à lui-même ; (ii) si α est semblable à β alors β est semblable à α ; et (iii) si α est semblable à β et β est semblable à γ alors α est semblable à γ .

Soit R une relation d'équivalence dans A , on appelle *classe d'équivalence* d'un élément quelconque $a \in A$, notée $[a]$, l'ensemble des éléments liés à a :

$$[a] = \{x : \langle a, x \rangle \in R\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence, noté A/R , s'appelle *l'ensemble quotient de A par R* :

$$A/R = \{[a] : a \in A\}$$

L'ensemble quotient A/R jouit des propriétés suivantes :

Théorème 1.4 : Soient A un ensemble muni d'une relation d'équivalence R et $[a]$ la classe d'équivalence de l'élément $a \in A$. Alors :

- (i) Pour tout $a \in A$, $a \in [a]$.
- (ii) $[a] = [b]$ si et seulement si $\langle a, b \rangle \in R$.
- (iii) Si $[a] \neq [b]$, alors les ensembles $[a]$ et $[b]$ sont disjoints.

Une famille \mathcal{A} de parties non vides de A s'appelle une *partition* de A ssi (1) tout élément $a \in A$ appartient à une partie de \mathcal{A} et (2) les parties constituant \mathcal{A} sont deux à deux disjointes. Par conséquent, le théorème qui précède implique le *théorème fondamental des relations d'équivalence* qui suit :

Théorème 1.5 Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble A . Alors l'ensemble quotient A/R est une partition de A .

Exemple 8.3 : Soit R_5 la relation définie sur l'ensemble \mathbb{Z} des entiers par

$$x \equiv y \pmod{5}$$

qui s'énonce "x est congru à y modulo 5" et dont le sens est " $x - y$ est divisible par 5". Alors R_5 est une relation d'équivalence dans \mathbb{Z} . Il existe exactement cinq classes d'équivalence distinctes dans \mathbb{Z}/R_5 :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\} = \dots = [-10] = [-5] = [0] = [5] = \dots \\ E_1 &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, \dots\} = \dots = [-9] = [-4] = [1] = [6] = \dots \\ E_2 &= \{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, \dots\} = \dots = [-8] = [-3] = [2] = [7] = \dots \\ E_3 &= \{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\} = \dots = [-7] = [-2] = [3] = [8] = \dots \\ E_4 &= \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} = \dots = [-6] = [-1] = [4] = [9] = \dots \end{aligned}$$

Remarquons que tout entier x , pouvant s'écrire d'une manière unique sous la forme $x = 5q + r$ avec $0 \leq r < 5$, appartient à la classe d'équivalence E_r où r est le reste de x dans la division par 5. Notons que les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes et que $\mathbb{Z} = E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

COMPOSITION DES RELATIONS

Soient U une relation de A dans B et V une relation de B dans C , c'est-à-dire $U \subseteq A \times B$ et $V \subseteq B \times C$. La relation de A dans C formée de tous les couples $\langle a, c \rangle \in A \times C$ tels qu'il existe un élément $b \in B$ vérifiant

$$\langle a, b \rangle \in U \quad \text{et} \quad \langle b, c \rangle \in V$$

se nomme la *composée* de la relation U par la relation V et se note $V \circ U$. (Le lecteur doit savoir que cette relation est notée $U \circ V$ par certains auteurs.)

Il est commode d'introduire les symboles supplémentaires qui suivent :

\exists , il existe t.q., tel que \forall , pour tout (ou : quel que soit) \Rightarrow , implique

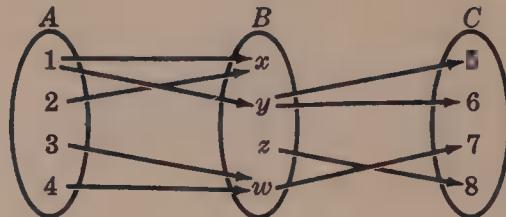
Cela étant, nous pouvons écrire :

$$V \circ U = \{ \langle x, y \rangle : x \in A, y \in C; \exists b \in B \text{ t.q. } \langle x, b \rangle \in U, \langle b, y \rangle \in V \}$$

Exemple 9.1 : Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ et

$$U = \{\langle 1, x \rangle, \langle 1, y \rangle, \langle 2, x \rangle, \langle 3, w \rangle, \langle 4, w \rangle\} \quad \text{et} \quad V = \{\langle y, 5 \rangle, \langle y, 6 \rangle, \langle z, 8 \rangle, \langle w, 7 \rangle\}$$

Autrement dit, U est une relation de A dans B et V est une relation de B dans C . Nous pouvons concrétiser U et V de la façon suivante :



Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle 1, 5 \rangle &\in V \circ U \text{ puisque } y \in B \text{ et } \langle 1, y \rangle \in U, \langle y, 5 \rangle \in V \\ \langle 1, 6 \rangle &\in V \circ U \text{ puisque } y \in B \text{ et } \langle 1, y \rangle \in U, \langle y, 6 \rangle \in V \\ \langle 3, 7 \rangle &\in V \circ U \text{ puisque } w \in B \text{ et } \langle 3, w \rangle \in U, \langle w, 7 \rangle \in V \\ \langle 4, 7 \rangle &\in V \circ U \text{ puisque } w \in B \text{ et } \langle 4, w \rangle \in U, \langle w, 7 \rangle \in V \end{aligned}$$

Aucun autre couple n'appartient à $V \circ U$ et l'on a,

$$V \circ U = \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 7 \rangle, \langle 4, 7 \rangle\}$$

Remarquons que $V \circ U$ est exactement composé de l'ensemble des couples $\langle x, y \rangle$ pour lesquels il existe, sur le diagramme précédent, un "chemin" allant de $x \in A$ à $y \in C$ constitué de deux flèches consécutives,

Exemple 9.2 : Soient U et V les relations définies dans \mathbb{R} par

$$U = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{et} \quad V = \{(y, z) : 2y + 3z = 4\}$$

Alors, la composée $V \circ U$ des relations U et V peut être obtenue en éliminant y entre les deux équations $x^2 + y^2 = 1$ et $2y + 3z = 4$. Autrement dit,

$$V \circ U = \{(x, z) : 4x^2 + 9z^2 - 24z + 12 = 0\}$$

Exemple 9.3 : Soient \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs et R la relation $<$ dans \mathbb{N} , c'est-à-dire, $\langle a, b \rangle \in R$ ssi $a < b$. Donc $\langle a, b \rangle \in R^{-1}$ ssi $a > b$. Alors

$$\begin{aligned} R \circ R^{-1} &= \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}; \exists b \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \langle x, b \rangle \in R^{-1}, \langle b, y \rangle \in R \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}; \exists b \in \mathbb{N} \text{ t.q. } b < x, b < y \} \\ &= (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{1\}) = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}; x, y \neq 1 \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R &= \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}; \exists b \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \langle x, b \rangle \in R, \langle b, y \rangle \in R^{-1} \} \\ &= \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}; \exists b \in \mathbb{N} \text{ t.q. } b > x, b > y \} \\ &= \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

Notons que $R \circ R^{-1} \neq R^{-1} \circ R$.

PROBLEMES RESOLUS

ENSEMBLES, ELEMENTS ET SOUS-ENSEMBLES

1. Soit $A = \{x : 3x = 6\}$. Peut-on écrire $A = \{2\}$?

Solution :

A est l'ensemble composé de l'unique élément 2, c'est-à-dire $A = \{2\}$. Le nombre 2 appartient à A ; il n'est pas égal à A . Il y a une différence fondamentale entre un élément p et l'ensemble $\{p\}$ qui est un singleton.

2. Déterminer lesquels des ensembles suivants sont égaux : \emptyset , $\{0\}$, $\{\emptyset\}$.

Solution :

Ils sont tous distincts. L'ensemble $\{0\}$ contient un élément, le nombre zéro. L'ensemble \emptyset ne contient aucun élément ; c'est l'ensemble vide. L'ensemble $\{\emptyset\}$ contient aussi un élément, l'ensemble vide.

3. Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont égaux à l'ensemble vide :

- (i) $X = \{x : x^2 = 9, 2x = 4\}$, (ii) $Y = \{x : x \neq x\}$, (iii) $Z = \{x : x + 8 = 8\}$.

Solution :

- (i) il n'existe pas de nombres vérifiant simultanément les équations $x^2 = 9$ et $2x = 4$; donc $X = \emptyset$.
(ii) Nous supposons que tout objet est égal à lui-même, Y est donc vide. Certains auteurs définissent d'ailleurs l'ensemble vide par l'identité $\emptyset \equiv \{x : x \neq x\}$.
(iii) Le nombre zéro est solution de l'équation $x + 8 = 8$; donc $Z = \{0\}$. Par conséquent $Z \neq \emptyset$.

4. Démontrer que $A = \{2, 3, 4, 5\}$ n'est pas un sous-ensemble de $B = \{x : x \text{ est pair}\}$.

Solution :

Il est nécessaire de montrer qu'au moins un élément de A n'appartient pas à B . Puisque $3 \in A$ et $3 \notin B$, A n'est pas un sous-ensemble de B .

5. Démontrer l'assertion (iii) du théorème 1.1 : Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Solution :

Nous devons montrer que tout élément de A appartient aussi à C . Soit $x \in A$. L'inclusion $A \subset B$ implique $x \in B$. Mais $B \subset C$ implique $x \in C$. Nous avons donc montré que $x \in A$ entraîne $x \in C$, c'est-à-dire $A \subset C$.

6. Démontrer que si A est un sous-ensemble de l'ensemble vide \emptyset , alors $A = \emptyset$.

Solution :

L'ensemble vide \emptyset est une partie de tout ensemble ; en particulier $\emptyset \subset A$. Mais, par hypothèse, $A \subset \emptyset$; la définition 1.1 permet donc de conclure que $A = \emptyset$.

7. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties de l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$.

Solution :

Les parties de S sont $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ et l'ensemble vide \emptyset . Donc

$$\mathcal{P}(S) = \{S, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

Remarquons qu'il y a $2^3 = 8$ parties de S .

8. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}(S)$ des parties de l'ensemble $S = \{3; \{1, 4\}\}$.

Solution :

Remarquons d'abord que S est un ensemble à deux éléments, 3 et l'ensemble $\{1, 4\}$. Donc $\mathcal{P}(S)$ contient $2^2 = 4$ éléments : S lui-même, l'ensemble vide \emptyset , le singleton $\{3\}$ contenant 3 et le singleton $\{\{1, 4\}\}$ contenant l'ensemble $\{1, 4\}$. Autrement dit,

$$\mathcal{P}(S) = \{S, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, \emptyset\}$$

OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

9. Soient $U = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Déterminer : (i) A^c , (ii) $(A \cap C)^c$, (iii) $B - C$, (iv) $(A \cup B)^c$.

Solution :

- (i) A^c est formé de l'ensemble des éléments de U n'appartenant pas à A ; donc $A^c = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
(ii) $A \cap C$ est formé des éléments appartenant à la fois à A et à C ; donc

$$A \cap C = \{3, 4\} \quad \text{et} \quad (A \cap C)^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

- (iii) $B \setminus C$ est formé des éléments de B n'appartenant pas à C ; donc $B - C = \{2, 8\}$.

- (iv) $A \cup B$ est formé de l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux à la fois) ; donc

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = \{5, 7, 9\}$$

10. Montrer que $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

Solution :

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap B &= \{x : x \in B, x \in A \setminus B\} \\ &= \{x : x \in B, x \in A, x \notin B\} = \emptyset \end{aligned}$$

puisque il n'existe pas d'élément x vérifiant à la fois $x \in B$ et $x \notin B$.

11. Démontrer la loi de de Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Solution :

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{x : x \notin A \cup B\} \\ &= \{x : x \notin A, x \notin B\} \\ &= \{x : x \in A^c, x \in B^c\} = A^c \cap B^c \end{aligned}$$

12. Montrer que $B \setminus A = B \cap A^c$.

Solution : $B \setminus A = \{x : x \in B, x \notin A\} = \{x : x \in B, x \in A^c\} = B \cap A^c$

13. Démontrer la loi de distributivité de l'intersection par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Solution :
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A; x \in B \cup C\} \\ &= \{x : x \in A; x \in B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A, x \in B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

On observera que la troisième égalité ci-dessus est obtenue en utilisant la loi analogue de logique :

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

où \vee lit “ou” et \wedge se lit “et”.

14. Démontrer que, quels que soient les ensembles A et B , $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

Solution :

Soit $x \in A \cap B$; alors $x \in A$ et $x \in B$. En particulier, $x \in A$. Par conséquent, $A \cap B \subset A$. Si $x \in A$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, c'est-à-dire $x \in A \cup B$. Il en résulte que $A \subset A \cup B$. Autrement dit, nous avons $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

15. Démontrer l'assertion (i) du théorème 1.3 : $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.

Solution :

Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in A$; alors l'hypothèse implique $x \in B$. Donc $x \in A$ et $x \in B$, c'est-à-dire $x \in A \cap B$. Par conséquent, $A \subset A \cap B$. Mais, d'après le problème précédent, $A \cap B \subset A$. Donc $A \cap B = A$.

Réciproquement, supposons que $A \cap B = A$. Nous avons donc, en particulier, $A \subset A \cap B$. Mais, d'après le problème précédent, $A \cap B \subset B$. Le théorème 1.1 permet alors de conclure que $A \subset B$.

ENSEMBLES PRODUITS, RELATIONS, COMPOSITION DES RELATIONS

16. Soient $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$. Déterminer les ensembles suivants :
- (i) $A \times (B \cup C)$, (ii) $(A \times B) \cup (A \times C)$.

Solution :

(i) Calculons d'abord $B \cup C = \{2, 3, 4\}$. On obtient alors

$$A \times (B \cup C) = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle\}$$

(ii) Déterminons d'abord $A \times B$ et $A \times C$:

$$A \times B = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle\}, \quad A \times C = \{\langle a, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle b, 4 \rangle\}$$

Calculons ensuite la réunion de ces deux ensembles :

$$(A \times B) \cup (A \times C) = \{\langle a, 2 \rangle, \langle a, 3 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle a, 4 \rangle, \langle b, 4 \rangle\}$$

On observera que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

17. Démontrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Solution :

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= \{\langle x, y \rangle : x \in A, y \in B \cap C\} \\ &= \{\langle x, y \rangle : x \in A, y \in B, y \in C\} \\ &= \{\langle x, y \rangle : \langle x, y \rangle \in A \times B, \langle x, y \rangle \in A \times C\} \\ &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

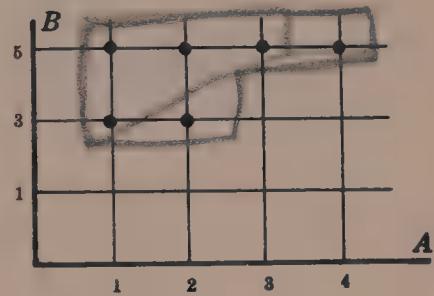
18. Soit R la relation $<$ de l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble $B = \{1, 3, 5\}$, c'est-à-dire, $\langle a, b \rangle \in R$ ssi $a < b$.

(i) Ecrire R sous la forme d'un ensemble de couples.

(ii) Représenter R sur un diagramme cartésien de $A \times B$.

(iii) Déterminer le domaine de R , l'image de R et la relation R^{-1} .

(iv) Déterminer $R \circ R^{-1}$.



Solution

(i) R est composé de l'ensemble des couples $\langle a, b \rangle \in A \times B$ tels que $a < b$; donc

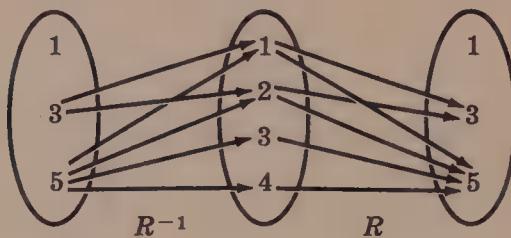
$$R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle \}$$

(ii) R est représenté sur le diagramme cartésien de $A \times B$ tracé ci-dessus.

(iii) Le domaine de R est formé de l'ensemble des premières coordonnées des couples appartenant à R ; par conséquent le domaine de $R = \{1, 2, 3, 4\}$. L'image de R est formé de l'ensemble des secondes coordonnées des couples appartenant à R ; par conséquent l'image de $R = \{3, 5\}$. R^{-1} s'obtient en intervertissant les coordonnées des couples appartenant à R ; donc

$$R^{-1} = \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle \}$$

(iv) Pour obtenir $R \circ R^{-1}$, construisons les diagrammes de R^{-1} et de R représentés ci-dessous. Observons que R^{-1} , le second facteur du produit $R \circ R^{-1}$, se construit le premier. On obtient alors

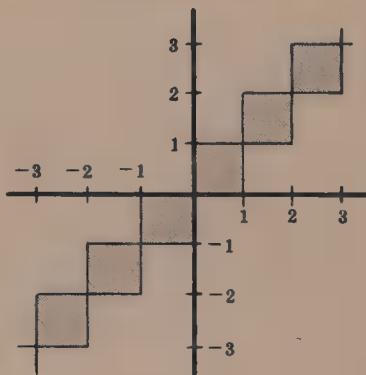


$$R \circ R^{-1} = \{ \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 5, 5 \rangle \}$$

19. Soit T la relation définie dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $x T y$ s'il existe un entier n tel que l'on ait simultanément $x \in [n, n + 1]$ et $y \in [n, n + 1]$. Tracer le graphe de la relation T .

Solution :

T se compose de l'ensemble des carrés ombrés représentés ci-dessous.



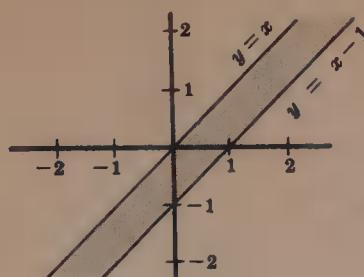
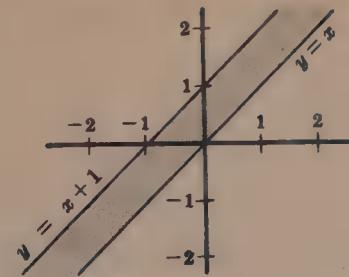
20. Soit T la relation définie dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels par $x T y$ ssi $0 \leq x - y \leq 1$.
- Donner l'expression de T et de T^{-1} considérés comme des sous-ensemble $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ et tracer leurs graphes.
 - Montrer que $T \circ T^{-1} = \{ \langle x, z \rangle : |x - z| \leq 1 \}$.

Solution :

$$(i) T = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbf{R}, 0 \leq x - y \leq 1 \}$$

$$T^{-1} = \{ \langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in T \} = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbf{R}, 0 \leq y - x \leq 1 \}$$

Représentations graphiques des relations T et T^{-1} :

Graphe de T Graphe de T^{-1}

(ii) La composée des deux relations s'écrit par définition,

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1} &= \{ \langle x, z \rangle : \exists y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \langle x, y \rangle \in T^{-1}, \langle y, z \rangle \in T \} \\ &= \{ \langle x, z \rangle : \exists y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \langle y, x \rangle, \langle y, z \rangle \in T \} \\ &= \{ \langle x, z \rangle : \exists y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } 0 \leq y - x \leq 1, 0 \leq y - z \leq 1 \} \end{aligned}$$

Posons $S = \{ \langle x, z \rangle : |x - z| \leq 1 \}$ et montrons que $T \circ T^{-1} = S$.

Soit $\langle x, z \rangle$ un élément de $T \circ T^{-1}$. Alors $\exists y \in \mathbb{R}$ t.q. $0 \leq y - x, 0 \leq y - z \leq 1$. Or

$$0 \leq y - x, y - z \leq 1 \Rightarrow y - z \leq 1$$

$$\Rightarrow y - z \leq 1 + y - x$$

$$\Rightarrow x - z \leq 1$$

et

$$0 \leq y - x, y - z \leq 1 \Rightarrow y - x \leq 1$$

$$\Rightarrow y - x \leq 1 + y - z$$

$$\Rightarrow -1 \leq x - z$$

Autrement dit $0 \leq y - x, y - z \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - z \leq 1$ c'est-à-dire $|x - z| \leq 1$

Par conséquent, $\langle x, z \rangle \in S$, i.e. $T \circ T^{-1} \subset S$.

Supposons maintenant que $\langle x, z \rangle$ appartienne à S ; c'est-à-dire $|x - z| \leq 1$.

Posons $y = \max(x, z)$; alors $0 \leq y - x \leq 1$ et $0 \leq y - z \leq 1$.

Par suite, le couple $\langle x, z \rangle$ appartient aussi à $T \circ T^{-1}$, c'est-à-dire $S \subset T \circ T^{-1}$. Finalement, $T \circ T^{-1} = S$.

21. Soient $R \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$ deux relations quelconques. Démontrer que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Solution : } (S \circ R)^{-1} &= \{ \langle z, x \rangle : \langle x, z \rangle \in S \circ R \} \\ &= \{ \langle z, x \rangle : \exists y \in Y \text{ t.q. } \langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in S \} \\ &= \{ \langle z, x \rangle : \exists y \in Y \text{ t.q. } \langle z, y \rangle \in S^{-1}, \langle y, x \rangle \in R^{-1} \} \\ &= R^{-1} \circ S^{-1} \end{aligned}$$

22. Soient $R \subset W \times X$, $S \subset X \times Y$ et $T \subset Y \times Z$ trois relations quelconques. Démontrer que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

$$\begin{aligned} \text{Solution : } (T \circ S) \circ R &= \{ \langle w, z \rangle : \exists x \in X \text{ t.q. } \langle w, x \rangle \in R, \langle x, z \rangle \in T \circ S \} \\ &= \{ \langle w, z \rangle : \exists x \in X, \exists y \in Y \text{ t.q. } \langle w, x \rangle \in R, \langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in T \} \\ &= \{ \langle w, z \rangle : \exists y \in Y \text{ t.q. } \langle w, y \rangle \in S \circ R, \langle y, z \rangle \in T \} \\ &= T \circ (S \circ R) \end{aligned}$$

RELATIONS REFLEXIVES, SYMETRIQUES, TRANSITIVES ET D'EQUIVALENCE

23. Soient R une relation dans A , c'est-à-dire $R \subset A \times A$. Démontrer les propositions suivantes :

- (i) R est réflexive ssi $\Delta_A \subseteq R$.
- (ii) R est symétrique ssi $R = R^{-1}$.
- (iii) R est transitive ssi $R \circ R \subseteq R$.
- (iv) Si R est réflexive, alors $R \circ R \supseteq R$ et $R \circ R$ est réflexive.
- (v) Si R est symétrique, alors $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R$,
- (vi) Si R est transitive, alors $R \circ R$ est transitive.

Solution :

- (i) Rappelons la définition de la diagonale : $\Delta_A = \{(a, a) : a \in A\}$. Cela étant, R est réflexive ssi, pour tout $a \in A$, $(a, a) \in R$; c'est-à-dire ssi $\Delta_A \subseteq R$.
- (ii) Cette proposition est une conséquence immédiate des définitions de R^{-1} et de la symétrie d'une relation.
- (iii) Soit $(a, c) \in R \circ R$; alors $b \in A$ tel que $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$. Par transitivité $(a, b), (b, c) \in R$ entraîne $(a, c) \in R$. Par conséquent, $R \circ R \subseteq R$.

Réciproquement, supposons $R \circ R \subseteq R$. Si $(a, b), (b, c) \in R$, alors $(a, c) \in R \circ R \subseteq R$. Autrement dit, R est transitive.

- (iv) Soit R réflexive et $(a, b) \in R$. Le couple $(b, b) \in R$. Puisque $R \circ R = \{(a, c) : \exists b \in A \text{ t.q. } (a, b) \in R, (b, c) \in R\}$, il est clair que $(a, b) \in R \circ R$, c'est-à-dire, $R \subseteq R \circ R$.

En outre, $\Delta_A \subseteq R \subseteq R \circ R$ implique la réflexivité de $R \circ R$.

$$\begin{aligned} (v) \quad R \circ R^{-1} &= \{ (a, c) : \exists b \in A \text{ t.q. } (a, b) \in R^{-1}, (b, c) \in R \} \\ &= \{ (a, c) : \exists b \in A \text{ t.q. } (a, b) \in R, (b, c) \in R^{-1} \} \\ &= R^{-1} \circ R \end{aligned}$$

- (vi) Soit $(a, b), (b, c) \in R \circ R$. Par (iii), $R \circ R \subseteq R$; donc $(a, b), (b, c) \in R$. Par suite $(a, c) \in R \circ R$, c'est-à-dire $R \circ R$ est transitive.

24. Déterminer si la relation $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ définie dans $X = \{1, 2, 3\}$ est (i) réflexive, (ii) symétrique, (iii) transitive.

Solution :

- (i) R n'est pas réflexive puisque $2 \in X$ et $(2, 2) \notin R$.
- (ii) R est symétrique puisque $R^{-1} = R$.
- (iii) R n'est pas transitive ; en effet $(3, 2) \in R, (2, 3) \in R$ mais $(3, 3) \notin R$.

25. Considérons l'ensemble $N \times N$, c'est-à-dire l'ensemble des couples de nombres entiers positifs. Soit R la relation, notée \cong et définie dans $N \times N$ par

$$(a, b) \cong (c, d) \text{ ssi } ad = bc$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence.

Solution :

Remarquons que pour tout $(a, b) \in N \times N$, $(a, b) \cong (a, b)$ puisque $ab = ba$; donc R est réflexive.

Supposons $(a, b) \cong (c, d)$. Alors $ad = bc$, ce qui implique $cb = da$. Donc $(c, d) \cong (a, b)$ et par conséquent R est symétrique.

Supposons maintenant que $(a, b) \cong (c, d)$ et $(c, d) \cong (e, f)$. Alors $ad = bc$ et $cf = de$. Nous obtenons donc

$$(ad)(cf) = (bc)(de)$$

et après simplification des deux membres, $af = be$. Par conséquent $(a, b) \cong (e, f)$ et R est transitive.

Puisque R est réflexive, symétrique et transitive, R est une relation d'équivalence.

On observera, en écrivant le couple ordonné $\langle a, b \rangle$ sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, que la relation R est en fait la définition usuelle de l'égalité de deux fractions c'est-à-dire, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ssi $ad = bc$.

26. Démontrer le théorème 1.4 : Soient A un ensemble muni d'une relation d'équivalence R et $[a]$ la classe d'équivalence de l'élément $a \in A$. Alors :
- Pour tout $a \in A$, $a \in [a]$.
 - $[a] = [b]$ si et seulement si $\langle a, b \rangle \in R$.
 - Si $[a] \neq [b]$, alors les ensembles $[a]$ et $[b]$ sont disjoints.

Solution :

Démonstration de (i). Puisque R est réflexive, pour tout $a \in A$, $\langle a, a \rangle \in R$ et donc $a \in [a]$.

Démonstration de (ii). Supposons $\langle a, b \rangle \in R$. Nous voulons montrer que $[a] = [b]$. Soit $x \in [b]$; alors $\langle b, x \rangle \in R$. Par hypothèse, $\langle a, b \rangle \in R$; la transitivité de R implique donc $\langle a, x \rangle \in R$. Par conséquent, $x \in [a]$, c'est-à-dire $[b] \subset [a]$. Pour démontrer que $[a] \subset [b]$, remarquons que $\langle a, b \rangle \in R$ entraîne $\langle b, a \rangle \in R$, puisque la relation R est symétrique. Un raisonnement semblable au précédent nous permet donc d'écrire $[a] \subset [b]$. Finalement $[a] = [b]$.

Réciproquement, si $[a] = [b]$, la réflexivité de R implique $b \in [b] = [a]$, c'est-à-dire $\langle a, b \rangle \in R$.

Démonstration de (iii). Démontrons, ce qui est équivalent, la proposition contraposée, c'est-à-dire si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, alors $[a] = [b]$. Si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, il existe un élément $x \in A$ tel que $x \in [a] \cap [b]$, par suite $\langle a, b \rangle \in R$ et $\langle b, a \rangle \in R$. Puisque R est symétrique, $\langle x, b \rangle \in R$ et puisque R est transitive $\langle a, b \rangle \in R$. L'assertion (ii) permet alors de conclure que $[a] = [b]$.

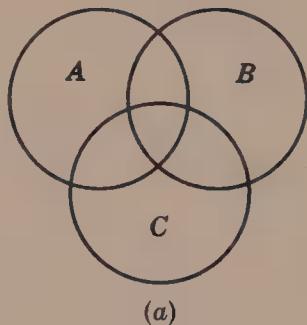
PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ENSEMBLES, ELEMENTS ET SOUS-ENSEMBLES

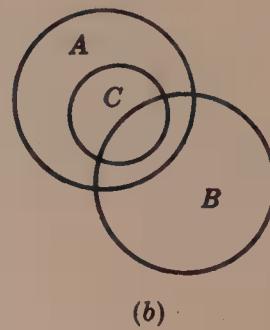
27. Déterminer parmi les ensembles suivants ceux qui sont égaux à l'ensemble vide :
- | | |
|--|--|
| (i) $\{x : 1 < x < 2, x \in \mathbb{R}\}$ | (iii) $\{x : x \in \emptyset\}$ |
| (ii) $\{x : 1 < x < 2, x \in \mathbb{N}\}$ | (iv) $\{x : x^2 < x, x \in \mathbb{R}\}$ |
28. Soient $A = \{1, 2, \dots, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ et $E = \{3, 5\}$. Parmi ces ensembles, lesquels sont égaux à X si nous est donnée l'information suivante ?
- X et B sont disjoints,
 - $X \subset D$ et $X \not\subset B$,
 - $X \subset A$ et $X \subset C$,
 - $X \not\subset C$ et $X \not\subset A$.
29. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.
 - Tout sous-ensemble d'un ensemble infini est infini.
30. Déterminer toutes les relations d'inclusion et d'appartenance possibles entre les trois ensembles suivants : $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
31. Démontrer que l'intervalle fermé $[a, b]$ n'est pas un sous-ensemble de l'intervalle ouvert (a, b) .
32. Trouver l'ensemble des parties $\mathcal{P}(U)$ de $U = \{0, 1, 2\}$ et l'ensemble des parties $\mathcal{P}(V)$ de $V = \{0, \{1, 2\}\}$.
33. Soient S un ensemble non vide arbitraire et 2^S l'ensemble des parties de S . Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
- | | | | |
|-----------------|----------------------|-----------------------|--------------------------|
| (i) $S \in 2^S$ | (ii) $S \subset 2^S$ | (iii) $\{S\} \in 2^S$ | (iv) $\{S\} \subset 2^S$ |
|-----------------|----------------------|-----------------------|--------------------------|

OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

34. Soient $A = \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Déterminer les ensembles : $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.
35. Sur chacun des diagrammes de Venn ci-dessous tracer en grisé :



(a)



(b)

36. Montrer à l'aide de diagrammes de Venn et démontrer que $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.
37. (i) Démontrer que $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
(ii) A l'aide d'un contre-exemple montrer que, en général $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
38. Démontrer que $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$; $2^A \cup 2^B \subset 2^{A \cup B}$. Donner un exemple où l'on a $2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}$.
39. Démontrer le théorème 1.3 : Chacune des conditions suivantes est équivalente à $A \subset B$:
(Observation. Dans le problème 15, on a déjà montré l'équivalence de l'égalité $A \cap B = A$ et de l'inclusion $A \subset B$.)
(i) $A \cap B = A$, (ii) $A \cup B = B$, (iii) $B^c \subset A^c$, (iv) $A \cap B^c = \emptyset$, (v) $B \cup A^c = U$
40. Démontrer que $A \subset B$ ssi $(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)$ pour tout ensemble C .

ENSEMBLES PRODUITS, RELATIONS, COMPOSITION DES RELATIONS

41. Démontrer que $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
42. Utiliser la définition d'un couple c'est-à-dire $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ pour prouver que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ ssi $a = c$ et $b = d$.
43. Soient m et n deux entiers positifs, calculer le nombre de relations distinctes d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments.
44. Soit R la relation dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs définie par
- $$R = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}, x + 2y = 12 \}$$
- (i) Ecrire R sous la forme d'un ensemble de couples, (ii) Trouver le domaine de R , l'image de R et R^{-1} . (iii) Déterminer $R \circ R$. (iv) Déterminer $R^{-1} \circ R$.
45. On considère la relation $R = \{(4, 5), (1, 4), (4, 6), (7, 6), (3, 7)\}$ définie dans \mathbb{N} .
(i) Trouver le domaine de R , l'image de R et la relation R^{-1} . (ii) Déterminer $R \circ R$. (iii) Déterminer $R^{-1} \circ R$.
46. Soient U et V les relations dans \mathbb{R} définies par $U = \{(x, y) : x^2 + 2y = 5\}$ et $V = \{(x, y) : 2x - y = 3\}$. (i) Déterminer $V \circ U$. (ii) Déterminer $U \circ V$.
47. On considère les relations $<$ et \leqslant définies dans \mathbb{R} . Démontrer que $< \cup \Delta = \leqslant$ où Δ désigne la diagonale.

RELATIONS D'EQUIVALENCE

48. On suppose que R et S sont des relations (non vides) dans un ensemble A . Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

- (1) Si R est symétrique, alors R^{-1} est symétrique.
- (2) Si R est réflexive, alors $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
- (3) Si R est symétrique, alors $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
- (4) Si R et S sont transitives, alors $R \cup S$ est transitive.
- (5) Si R et S sont transitives, alors $R \cap S$ est transitive.
- (6) Si R et S sont symétriques, alors $R \cup S$ est symétrique.
- (7) Si R et S sont symétriques, alors $R \cap S$ est symétrique.
- (8) Si R et S sont réflexives, alors $R \cap S$ est réflexive.

49. On considère l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ des couples d'entiers positifs. Soit \simeq la relation dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$\langle a, b \rangle \simeq \langle c, d \rangle \quad \text{ssi} \quad a + d = b + c$$

- (i) Démontrer que \simeq est une relation d'équivalence. (ii) Trouver la classe d'équivalence $[\langle 2, 5 \rangle]$ de $\langle 2, 5 \rangle$.

50. Soit \sim la relation dans \mathbb{R} définie par $x \sim y$ ssi $x - y$ est un entier. Démontrer que \sim est une relation d'équivalence.

51. Soit \sim la relation définie dans le plan cartésien \mathbb{R}^2 par $\langle x, y \rangle \sim \langle w, z \rangle$ ssi $x = w$. Démontrer que \sim est une relation d'équivalence et représenter graphiquement plusieurs classes d'équivalence.

52. On ■ donne deux nombres réels quelconques a et b . Soit \sim la relation définie dans \mathbb{R}^2 par

$$\langle x, y \rangle \sim \langle w, z \rangle \quad \text{t.q.} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad x - w = ka, \quad y - z = kb$$

Démontrer que \sim est une relation d'équivalence et représenter graphiquement plusieurs classes d'équivalence.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

27. Les ensembles définis en (ii) et en (iii) sont vides.

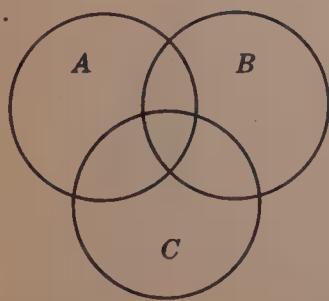
31. ■ $\in [a, b]$ mais $a \notin (a, b)$.

32. $\mathcal{P}(V) = \{V, \{0\}, \{\{1, 2\}\}, \emptyset\}$

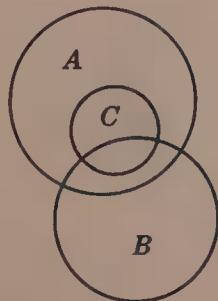
33. (i) T , (ii) F , (iii) F , (iv) T

34. $A \cup B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}, \quad A \cap B = \{1, 2\}, \quad A \setminus B = \{3, \{1, 2, 3\}\}, \quad B \setminus A = \{\{1, 2\}\}$.

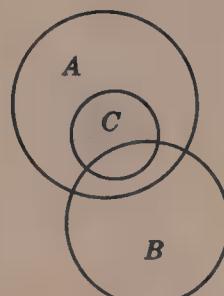
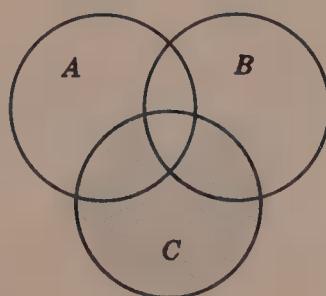
- 35.



(i)



(ii)

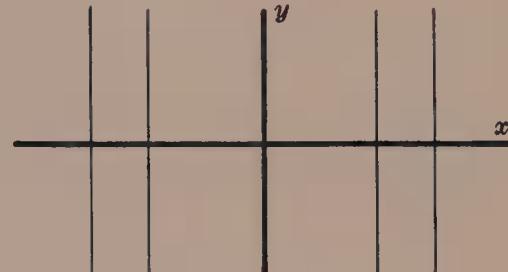


37. (ii) $C = \emptyset$, $A = B \neq \emptyset$ 38. Exemple : $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.43. 2^{mn} 44. (i) $R = \{\langle 10, 1 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle\}$ (ii) domaine de $R = \{10, 8, 6, 4, 2\}$, image de $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 $R^{-1} = \{\langle 1, 10 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 2 \rangle\}$ (iii) $R \circ R = \{\langle 8, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ (iv) $R^{-1} \circ R = \{\langle 10, 10 \rangle, \langle 8, 8 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 45. (i) domaine de $R = \{4, 1, 7, 3\}$, image de $R = \{5, 4, 6, 7\}$, $R^{-1} = \{\langle 5, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 7, 3 \rangle\}$ (ii) $R \circ R = \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 6 \rangle, \langle 3, 6 \rangle\}$ (iii) $R^{-1} \circ R = \{\langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ 46. $V \circ U = \{\langle x, y \rangle : x^2 + y = 2\}$, $U \circ V = \{\langle x, y \rangle : 4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0\}$

48. (1) T, (2) T, (3) T, (4) F, (5) T, (6) T, (7) T, (8) T

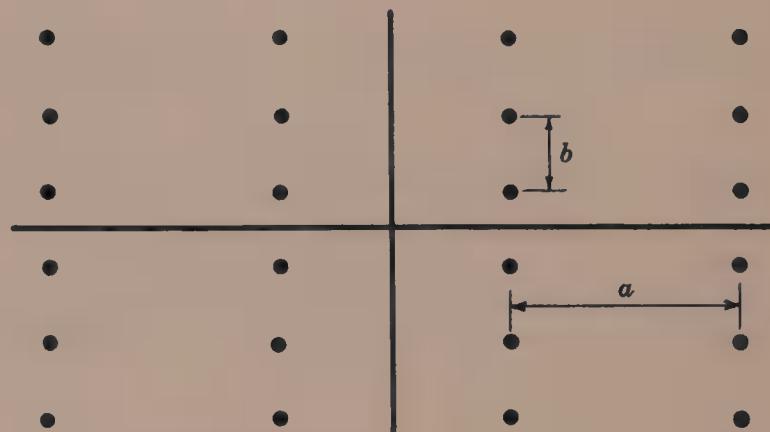
49. (ii) $[(2, 5)] = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \dots, \langle n, n+3 \rangle, \dots\}$

51.



Les classes d'équivalence sont les droites verticales.

52.

Le graphique ci-dessus représente une classe d'équivalence. La distance entre deux points adjacents de même ordonnée est a et la distance entre deux points adjacents de même abscisse est b .

CHAPITRE 2

Applications

APPLICATIONS

Supposons qu'à tout élément d'un ensemble A soit associé un élément unique d'un ensemble B ; l'ensemble, f , de ces correspondances s'appelle une *application de A dans B* (ou une *fonction* définie sur A à valeurs dans B) et s'écrit

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ou} \quad A \xrightarrow{f} B$$

L'unique élément de B associé à $a \in A$ par l'application f se note $f(a)$, et s'appelle l'*image* de a par f ou encore la *valeur* de f en a . L'ensemble de départ (ou source) de f est A , et l'*ensemble d'arrivée* (ou *but*) est B . A toute application $f : A \rightarrow B$ correspond la relation définie dans l'ensemble $A \times B$ donnée par :

$$\{(a, f(a)) : a \in A\}$$

Cet ensemble s'appelle le *graphe* de f . L'*image* de f , notée $f[A]$, est l'ensemble des images, c'est-à-dire $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$.

Deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : A \rightarrow B$ sont dites égales, ce qui s'écrit $f = g$,ssi, $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$, c'est-à-dire si elles ont le même graphe. En conséquence, nous ne ferons pas de distinction entre une application et son graphe. Un sous-ensemble f de $A \times B$, c'est-à-dire une relation de A dans B , est une applicationssi il possède la propriété suivante : [F] Tout élément $a \in A$ est la première coordonnée d'un couple et un seul $\langle a, b \rangle$ appartenant à f .

La négation de $f = g$ s'écrit $f \neq g$ et équivaut à l'assertion : $\exists a \in A$ tel que $f(a) \neq g(a)$.

Exemple 1.1 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui fait correspondre à tout nombre réel son carré, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ici f est une *application à valeurs réelles*. Son graphe, $\{(x, x^2) ; x \in \mathbb{R}\}$, est représenté sur la Fig. 2-1. L'image de f est l'ensemble des nombres réels non négatifs, c'est-à-dire $f[\mathbb{R}] = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.

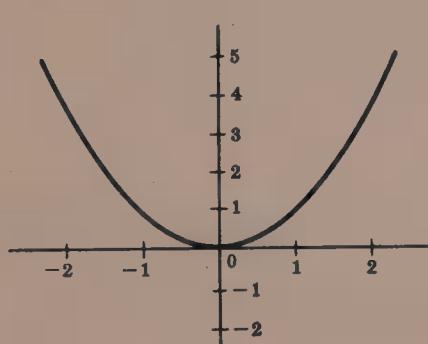


Fig. 2-1

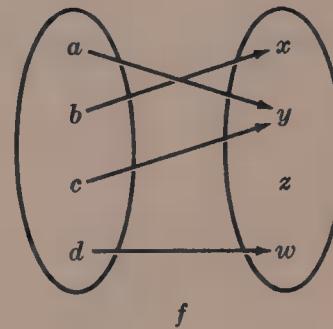


Fig. 2-2

Exemple 1.2 : Soient $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{x, y, z, w\}$. La figure 2-2 définit une application f de A dans B . Ici $f[A] = \{x, y, w\}$ et le graphe de l'application f est la relation

$$\{\langle a, y \rangle, \langle b, x \rangle, \langle c, y \rangle, \langle d, w \rangle\}$$

Exemple 1.3 : Une application $f : A \rightarrow B$ s'appelle une *application constante* s'il existe un élément $b_0 \in B$ tel que $f(a) = b_0$ pour tout $a \in A$. Par conséquent l'image $f[A]$ d'une application constante est un singleton, c'est-à-dire $f[A] = \{b_0\}$.

Considérons maintenant les deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, représentées ci-dessous :

$$\textcircled{A} \xrightarrow{f} \textcircled{B} \xrightarrow{g} \textcircled{C}$$

L'application définie dans A à valeurs dans C qui, à l'élément $a \in A$ associe l'élément $g(f(a))$ de C est dite l'*application composée* ou le *produit* de f par g . Elle se note $g \circ f$. Ainsi, par définition,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

On notera que si l'on considère $f \subset A \times B$ et $g \subset B \times C$ comme des relations, nous avons déjà défini un produit $g \cdot f$ (chapitre 1). Les deux produits $g \cdot f$ et $g \circ f$ sont identiques. En effet si f et g sont des applications, alors $g \cdot f$ est une application et $g \cdot f = g \circ f$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ et $A \subset X$, la *restriction* de f à A , notée $f|_A$, est l'application de A dans Y définie par

$$f|_A(a) \equiv f(a) \text{ pour tout } a \in A$$

Ceci équivaut à $f|_A = f \cap (A \times Y)$. Inversement, si $f : X \rightarrow Y$ est la restriction d'une application $g : X^* \rightarrow Y$ où $X \subset X^*$, l'application g s'appelle une *extension* de f .

INJECTION, SURJECTION, APPLICATION RECIPROQUE ET APPLICATION IDENTIQUE

On dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est *injective* si deux éléments distincts de A ont des images distinctes, c'est-à-dire si

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

On dit qu'une application $f : A \rightarrow B$ est *surjective* si tout $b \in B$ est l'image d'un élément $a \in A$, c'est-à-dire si

$$b \in B \Rightarrow \exists a \in A \text{ tel que } f(a) = b$$

Par conséquent si une application f est surjective, $f[A] = B$.

En général, la relation réciproque f^{-1} d'une application $f \subset A \times B$ ne sera pas une application. Cependant, si f est à la fois injective et surjective, f^{-1} est une application de B dans A qui s'appelle l'*application réciproque* (ou *inverse*) de f . Dans ce cas on dit que f est une *bijection* de A sur B ou que f est une application *biunivoque*.

La diagonale $\Delta_A \subset A \times A$ est une application, appelée l'*application identique* sur A . Elle se note aussi 1_A ou 1 . Donc $1_A(a) = a$ pour tout $a \in A$. Il est clair que si $f : A \rightarrow B$, alors

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A$$

En outre, si f est une bijection et si f^{-1} est la bijection réciproque, on a

$$f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = 1_B$$

La réciproque est aussi vraie :

Proposition 2.1 : Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ deux applications telles que

$$g \circ f = 1_A \quad \text{et} \quad f \circ g = 1_B$$

Alors l'application réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ existe et $g = f^{-1}$.

Exemple 2.1 : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois applications définies par

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = x^3 - x \quad \text{et} \quad h(x) = x^2$$

L'application f représentée sur la Fig. 2-3(a) est injective : géométriquement, cela signifie que toute droite horizontale contient un point de f au plus. L'application g représentée sur la Fig. 2-3(b) est surjective ; géométriquement, cela signifie que toute droite horizontale contient au moins un point de g . L'application h représentée sur la Fig. 2-3(c) n'est ni injective ni surjective ; en effet $h(2) = h(-2) = 4$ et $h[\mathbb{R}]$ est un sous-ensemble de \mathbb{R} distinct de \mathbb{R} , par exemple $-16 \notin h[\mathbb{R}]$.

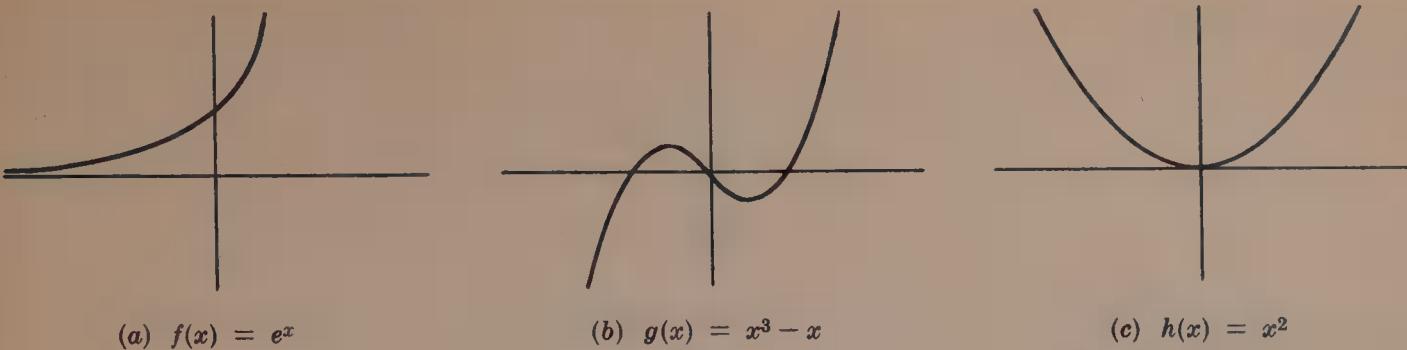


Fig. 2-3

FAMILLE INDEXEE, PRODUIT D'UNE FAMILLE D'ENSEMBLES

Une *famille indexée* par I , associe un ensemble A_i à tout $i \in I$, c'est-à-dire définit une application de I dans une famille d'ensembles. On note une telle famille

$$\{A_i : i \in I\}, \quad \{A_i\}_{i \in I} \quad \text{ou simplement} \quad \{A_i\}$$

L'ensemble I s'appelle l'*ensemble d'indices* de la famille ; on dit que les ensembles A_i sont *indexés* et qu'un élément $i \in I$ est un *indice*. Lorsque l'ensemble d'indices I est l'ensemble des entiers positifs, la famille d'ensembles $\{A_1, A_2, \dots\}$ s'appelle une *suite* (d'ensembles).

Exemple 3.1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs, posons

$$D_n = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ est un multiple de } n\}$$

$$\text{Alors } D_1 = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad D_2 = \{2, 4, 6, \dots\}, \quad D_3 = \{3, 6, 9, \dots\}, \dots$$

Le *produit cartésien* d'une famille indexée $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, que l'on note :

$$\prod \{A_i : i \in I\} \quad \text{ou} \quad \prod_{i \in I} A_i \quad \text{ou simplement} \quad \prod_i A_i$$

est constitué par l'ensemble de toutes les applications $p : I \rightarrow \bigcup_i A_i$ telles que pour tout $i \in I$ on ait $p(i) = a_i \in A_i$. Nous noterons un tel élément du produit par $p = \langle a_i : i \in I \rangle$. Pour tout $i_0 \in I$, il existe une fonction π_{i_0} appelée la i_0 -ième *projection*, de l'ensemble produit $\prod_i A_i$ sur l'*ensemble facteur* A_{i_0} (d'indice i_0) ; elle est définie par

$$\pi_{i_0}(\langle a_i : i \in I \rangle) = a_{i_0}$$

Exemple 3.2 : On sait que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est formé de l'ensemble des triplets $p = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ de nombres réels. Désignons maintenant par R_1 , R_2 et R_3 trois exemplaires de \mathbb{R} . Nous pouvons alors considérer p comme une fonction définie sur $I = \{1, 2, 3\}$ en posant $p(1) = a_1 \in R_1$, $p(2) = a_2 \in R_2$ et $p(3) = a_3 \in R_3$. Autrement dit

$$\mathbb{R}^3 = \prod \{R_i : i \in I, R_i = \mathbb{R}\}$$

GENERALISATION DES NOTIONS DE REUNION ET D'INTERSECTION

Les notions de réunion et d'intersection que nous avons définies pour deux ensembles peuvent être généralisées dans le cas d'une famille \mathcal{A} arbitraire de sous-ensembles d'un ensemble universel U . La réunion des ensembles de \mathcal{A} , notée $\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$, est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des ensembles de \mathcal{A} :

$$\bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, \exists A \in \mathcal{A} \text{ t.q. } x \in A\}$$

L'intersection des ensembles de \mathcal{A} , notée $\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\}$, est l'ensemble des éléments appartenant à tous les ensembles de \mathcal{A} :

$$\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\} = \{x : x \in U, x \in A \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}\}$$

Lorsqu'une famille $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, de sous-ensembles de U admet I comme ensemble d'indices, nous noterons respectivement la réunion et l'intersection des ensembles de \mathcal{A} , par

$$\bigcup\{A_i : i \in I\}, \quad \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{ou} \quad \cup_i A_i$$

$$\bigcap\{A_i : i \in I\}, \quad \bigcap_{i \in I} A_i \quad \text{ou} \quad \cap_i A_i$$

Dans le cas d'une suite $\{A_1, A_2, \dots\}$ de sous-ensembles de U , la réunion et l'intersection s'écriront respectivement

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots$$

Exemple 4.1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des entiers positifs, soit $D_n = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ est un multiple de } n\}$ (cf. exemple 3.1). Alors

$$\bigcup\{D_i : i \geq 10\} = \{10, 11, 12, \dots\} \quad \text{et} \quad \cap_{i=1}^{\infty} D_i = \emptyset$$

Exemple 4.2 : Soit $I = [0, 1]$ et, pour tout $i \in I$ posons $A_i = [0, i]$. Alors

$$\cup_i A_i = [0, 1] \quad \text{et} \quad \cap_i A_i = \{0\}$$

Ces opérations généralisées vérifient aussi certaines propriétés de distributivité et les lois de De Morgan rencontrées au chapitre 1.

Théorème 2.2 : Pour toute famille d'ensembles $\mathcal{A} = \{A_i\}$ et tout sous-ensemble B ,

$$(i) \quad B \cup (\cap_i A_i) = \cap_i (B \cup A_i) \quad (ii) \quad B \cap (\cup_i A_i) = \cup_i (B \cap A_i)$$

Théorème 2.3 : Soit $\mathcal{A} = \{A_i\}$ une famille arbitraire de sous-ensembles de U . Alors :

$$(i) \quad (\cup_i A_i)^c = \cap_i A_i^c \quad (ii) \quad (\cap_i A_i)^c = \cup_i A_i^c$$

Le théorème suivant sera utilisé fréquemment.

Théorème 2.4 : Soit A un ensemble quelconque et, pour tout $p \in A$, soit G_p un sous-ensemble de A tel que $p \in G_p \subset A$. Alors $A = \cup \{G_p : p \in A\}$.

Remarque : Dans le cas d'une famille vide de sous-ensembles d'un ensemble universel U , il est commode de définir

$$\bigcup\{A : A \in \emptyset\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcap\{A : A \in \emptyset\} = U$$

Par conséquent $\bigcup\{A_i : i \in \emptyset\} = \emptyset$ et $\bigcap\{A_i : i \in \emptyset\} = U$.

FONCTIONS D'ENSEMBLES ASSOCIEES A UNE APPLICATION

Soit $f : X \rightarrow Y$. Alors l'*image* $f[A]$ d'un sous-ensemble quelconque A de X est l'ensemble des images des points de A et l'*image réciproque* $f^{-1}[B]$ d'un sous-ensemble quelconque B de Y est l'ensemble des points de X dont l'image appartient à B . On a donc :

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\} \quad \text{et} \quad f^{-1}[B] = \{x : x \in X, f(x) \in B\}$$

Exemple 5.1 : Considérons l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(x) = x^2$. Alors

$$f[\{1, 3, 4, 7\}] = \{1, 9, 16, 49\}, \quad f[(1, 2)] = (1, 4)$$

$$\text{Et} \quad f^{-1}[\{4, 9\}] = \{-3, -2, 2, 3\}, \quad f^{-1}[(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1)$$

Ainsi à une application $f : X \rightarrow Y$ est associée une application, que nous noterons aussi f , de $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X dans $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de Y , et une application f^{-1} de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$. Ces applications associées s'appellent des *fonctions d'ensembles* car elles appliquent des familles d'ensembles dans des familles d'ensembles.

Notons que la fonction d'ensembles f^{-1} n'est pas en général l'application réciproque de l'application f elle-même considérée comme fonction d'ensembles. Par exemple, si f est l'application de l'exemple 5.1, on a

$$f^{-1} \circ f [(1, 2)] = f^{-1} [(1, 4)] = (1, 2) \cup (-2, -1)$$

On observera que des crochets au lieu de parenthèses sont utilisés afin de distinguer une application et sa fonction d'ensemble associée, c'est-à-dire $f(a)$ représente une valeur de la fonction initialement donnée, alors que $f[A]$ et $f^{-1}[B]$ représentent les images des fonctions d'ensembles associées à f .

Ces fonctions d'ensembles associées possèdent diverses propriétés. Mentionnons en particulier :

Théorème 2.5 : Soit $f : X \rightarrow Y$. Alors, quels que soient les sous-ensembles A et B de X ,

- | | |
|---|--|
| (i) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ | (iii) $f[A \setminus B] \supset f[A] \setminus f[B]$ |
| (ii) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$ | (iv) $A \subset B$ implique $f[A] \subset f[B]$ |

et plus généralement, pour toute famille indexée $\{A_i\}$ de sous-ensembles de X ,

$$(i') f[\cup_i A_i] = \cup_i f[A_i] \quad (ii') f[\cap_i A_i] \subset \cap_i f[A_i]$$

Les exemples qui suivent montrent que les inclusions (ii) et (iii) ne peuvent pas en général, être remplacées par des égalités.

Exemple 5.2 : Considérons les sous-ensembles

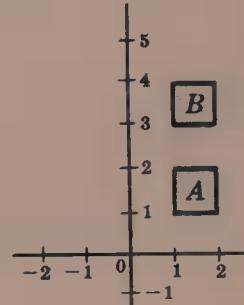
$$A = [1, 2] \times [1, 2] \quad \text{and} \quad B = [1, 2] \times [3, 4]$$

du plan \mathbb{R}^2 et la projection $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sur la première coordonnée, c'est-à-dire sur l'axe des x . Observons que $\pi[A] = \pi[B] = [1, 2]$, et que $A \cap B = \emptyset$ implique $\pi[A \cap B] = \emptyset$. Par conséquent

$$\pi[A] \cap \pi[B] = [1, 2] \neq \pi[A \cap B] = \emptyset$$

En outre, $A - B = A$ et donc

$$\pi[A \setminus B] = [1, 2] \neq \emptyset = \pi[A] \setminus \pi[B]$$



Par contre, l'application réciproque f^{-1} est plus "sympathique" car l'égalité a lieu dans les deux cas. En effet,

Théorème 2.6 : Soit $f : X \rightarrow Y$. Alors quels que soient les sous-ensembles A et B de X ,

- | |
|---|
| (i) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ |
| (ii) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ |
| (iii) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$ |
| (iv) $A \subset B$ implique $f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$ |

et plus généralement, pour toute famille indexée A_i de sous-ensembles de Y .

$$(i') f^{-1}[\cup_i A_i] = \cup_i f^{-1}[A_i] \quad (ii') f^{-1}[\cap_i A_i] = \cap_i f^{-1}[A_i]$$

Puisque $f^{-1}[Y] = X$, nous obtenons comme cas particulier de (iii) le

$$f(X \setminus A) = f(X) \setminus f(A)$$

Corollaire 2.7 : Soient $f : X \rightarrow Y$ et $A \subset Y$. Alors $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c$.

Enfin, il existe entre les deux fonctions d'ensembles f et f^{-1} la relation suivante :

Théorème 2.8 : Soient $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$. Alors

$$(i) \quad A \subset f^{-1} \circ f[A] \quad (ii) \quad B \supset f \circ f^{-1}[B]$$

Comme nous l'avons vu précédemment, l'inclusion (i) ne peut pas en général être remplacée par une égalité.

ALGEBRE DES APPLICATIONS A VALEURS REELLES

Désignons par $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ la famille de toutes les applications à valeurs réelles définies sur un ensemble X . Certaines opérations peuvent être définies sur $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ à partir d'opérations correspondantes définies sur \mathbf{R} . Plus précisément, si $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{R}$, définissons :

$$\begin{aligned} (f+g) : X &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{par} \quad (f+g)(x) \equiv f(x) + g(x) \\ (k \cdot f) : X &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{par} \quad (k \cdot f)(x) \equiv k(f(x)) \\ (|f|) : X &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{par} \quad (|f|)(x) \equiv |f(x)| \\ (fg) : X &\rightarrow \mathbf{R} \quad \text{par} \quad (fg)(x) \equiv f(x)g(x) \end{aligned}$$

Il est commode d'identifier un nombre réel $k \in \mathbf{R}$ avec l'application constante $f(x) = k$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Avec cette convention $(f+k) : X \rightarrow \mathbf{R}$ désigne l'application

$$(f+k)(x) \equiv f(x) + k$$

On notera que $(fg) : X \rightarrow \mathbf{R}$ ne désigne pas la composition des applications f et g que nous avons définie précédemment.

Exemple 6.1 : Considérons les applications

$$f = \{(a, 1), (b, 3)\} \quad \text{et} \quad g = \{(a, 2), (b, -1)\}$$

dont l'ensemble de départ est $X = \{a, b\}$. Alors

$$\begin{aligned} (3f - 2g)(a) &\equiv 3f(a) - 2g(a) = 3(1) - 2(2) = -1 \\ (3f - 2g)(b) &\equiv 3f(b) - 2g(b) = 3(3) - 2(-1) = 11 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$3f - 2g = \{(a, -1), (b, 11)\}$$

D'une manière analogue, puisque

$$\begin{aligned} \text{nous obtenons } |g|(x) &\equiv |g(x)| \quad \text{et} \quad (g+3)(x) \equiv g(x) + 3, \\ |g| &= \{(a, 2), (b, 1)\} \quad \text{et} \quad g+3 = \{(a, 5), (b, 2)\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ muni des lois de composition précédentes possède diverses propriétés dont certaines sont contenues dans le théorème qui suit.

Théorème 2.9 : La famille $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ de toutes les applications à valeurs réelles, définies sur un ensemble X , non vide, et munie des opérations mentionnées ci-dessus vérifie les axiomes d'espace vectoriel (réel) :

[V₁] L'addition des applications f et g vérifie :

- (1) $(f+g) + h = f + (g+h)$
- (2) $f + g = g + f$
- (3) $\exists 0 \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$, i.e. $0 : X \rightarrow \mathbf{R}$, tel que $f + 0 = f$.
- (4) pour tout $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$, $\exists -f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{R})$, i.e. $-f : X \rightarrow \mathbf{R}$, tel que $f + (-f) = 0$.

[V₂] L'opération de multiplication par un scalaire $k \cdot f$ d'une application f par un nombre réel k vérifie :

$$(1) \quad k \cdot (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$$

$$(2) \quad 1 \cdot f = f$$

[V₃] Les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire vérifient :

$$(1) \quad k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$$

$$(2) \quad (k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$$

Exemple 6.2 : Soit $X = \{1, 2, \dots, m\}$. Toute application $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est un m -uple ordonné $\langle f(1), \dots, f(m) \rangle$. En outre si

$$f = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \quad \text{et} \quad g = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$$

alors $f + g = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$

$$\text{et, pour tout } k \in \mathbf{K}, \quad k \cdot f = \langle ka_1, \dots, ka_m \rangle$$

Dans cet exemple, l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel de dimension m .

Exemple 6.3 : Une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est dite *bornée* ssi

$\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$

Désignons par $\beta(X, \mathbb{R})$ la famille de toutes les fonctions bornées de X dans \mathbb{R} . Il est clair que $\beta(X, \mathbb{R})$ jouit des propriétés suivantes :

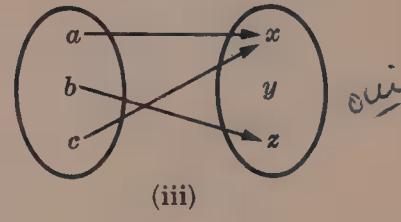
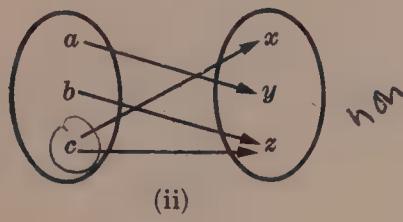
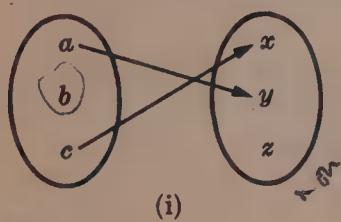
- (i) Si $f, g \in \beta(X, \mathbb{R})$, alors $f + g \in \beta(X, \mathbb{R})$.
(ii) Si $f \in \beta(X, \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $k \cdot f \in \beta(X, \mathbb{R})$.

Ainsi l'ensemble $\beta(X, \mathbb{R})$ des fonctions bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

PROBLEMES RESOLUS

APPLICATIONS

1. Dire si les diagrammes ci-dessous définissent ou non une application de l'ensemble $A = \{a, b, c\}$ dans l'ensemble $B = \{x, y, z\}$.



Solution :

- (i) Non. L'élément $b \in A$ n'a pas d'image.
 (ii) Non. Deux éléments, x et z , sont associés à $c \in A$.
 (iii) Oui.

2. Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Dire si chacune des relations suivantes est une application de X dans X .

- (i) $f = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ non
(ii) $g = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$ non
(iii) $h = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$ oui

Solution :

Rappelons qu'un sous-ensemble f de $X \times X$ est une application $f : X \rightarrow X$ ssi tout $x \in X$ est la première coordonnée d'un et un seul couple de f .

- (i) Non. Deux couples $\langle 2, 3 \rangle$ et $\langle 2, 1 \rangle$ de f ont la même première coordonnée.
- (ii) Non. L'élément $2 \in X$ n'est la première coordonnée d'aucun couple de g .
- (iii) Oui. Quoique $2 \in X$ soit la première coordonnée de deux couples de h , ces deux couples sont égaux.

3. Considérons les applications

$$\begin{aligned} f &= \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 5, 2 \rangle\} \\ g &= \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\} \end{aligned}$$

définies dans $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et à valeurs dans X .

- (i) Déterminer les images de f et g . $f[x] = \{3, 5, 1, 2\}$ $g[x] = \{4, 1, 2, 3\}$
- (ii) Trouver les images des applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$.
 $g[f[x]] = \{1, 3, 4\}$ $f[g[x]] = \{1, 3, 5\}$

Solution :

- (i) Rappelons que l'image d'une application est l'ensemble des images, c'est-à-dire l'ensemble des deuxièmes coordonnées. Donc

$$\text{Image de } f = \{3, 5, 1, 2\} \quad \text{et} \quad \text{Image de } g = \{4, 1, 2, 3\}.$$

- (ii) Utilisons la définition de la composition des fonctions et calculons :

$$\begin{array}{ll} (g \circ f)(1) \equiv g(f(1)) = g(3) = 1 & (f \circ g)(1) \equiv f(g(1)) = f(4) = 1 \\ (g \circ f)(2) \equiv g(f(2)) = g(5) = 3 & (f \circ g)(2) \equiv f(g(2)) = f(1) = 3 \\ (g \circ f)(3) \equiv g(f(3)) = g(3) = 1 & (f \circ g)(3) \equiv f(g(3)) = f(1) = 3 \\ (g \circ f)(4) \equiv g(f(4)) = g(1) = 4 & (f \circ g)(4) \equiv f(g(4)) = f(2) = 5 \\ (g \circ f)(5) \equiv g(f(5)) = g(2) = 1 & (f \circ g)(5) \equiv f(g(5)) = f(3) = 3 \end{array}$$

Autrement dit

$$g \circ f = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}$$

$$f \circ g = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 3 \rangle\}$$

On observera que $f \circ g \neq g \circ f$.

4. Considérons les applications $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définies par les formules

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 2$$

Trouver les formules permettant de définir les applications composées $g \circ f$ et $f \circ g$.

Solution :

Calculons $g \circ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de la façon suivante : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$

$$(g \circ f)(x) \equiv g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

On observera que l'on obtient le même résultat en écrivant

$$y = f(x) = 2x + 1, \quad z = g(y) = y^2 - 2$$

puis en éliminant y entre ces deux équations :

$$z = y^2 - 2 = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

On calculera d'une manière analogue $f \circ g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

$$(f \circ g)(x) \equiv f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$$

5. Démontrer que la composition des applications est une loi associative, c'est-à-dire si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ alors $h : C \rightarrow D$, then $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Solution :

Ce résultat est une conséquence immédiate de l'associativité de la composition des relations démontree au chapitre 1. Donnons une démonstration directe :

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))), \quad \forall a \in A \\ (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

Par conséquent $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

INJECTIONS ET SURJECTIONS

6. Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. Démontrer que :

- (i) si f et g sont surjectives, alors $g \circ f : A \rightarrow C$ est surjective.
(ii) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f : A \rightarrow C$ est injective.

Solution :

- (i) Soit $c \in C$. Puisque g est surjective, $\exists b \in B$ t.q. $g(b) = c$. Puisque f est surjective $\exists a \in A$ tel que $f(a) = b$. Donc $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$, c'est-à-dire l'application $g \circ f$ est aussi surjective.
(ii) Supposons que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$; c'est-à-dire $g(f(a)) = g(f(a'))$. Puisque g est injective $f(a) = f(a')$ et puisque f est injective $a = a'$. Par conséquent l'application $g \circ f$ est injective.

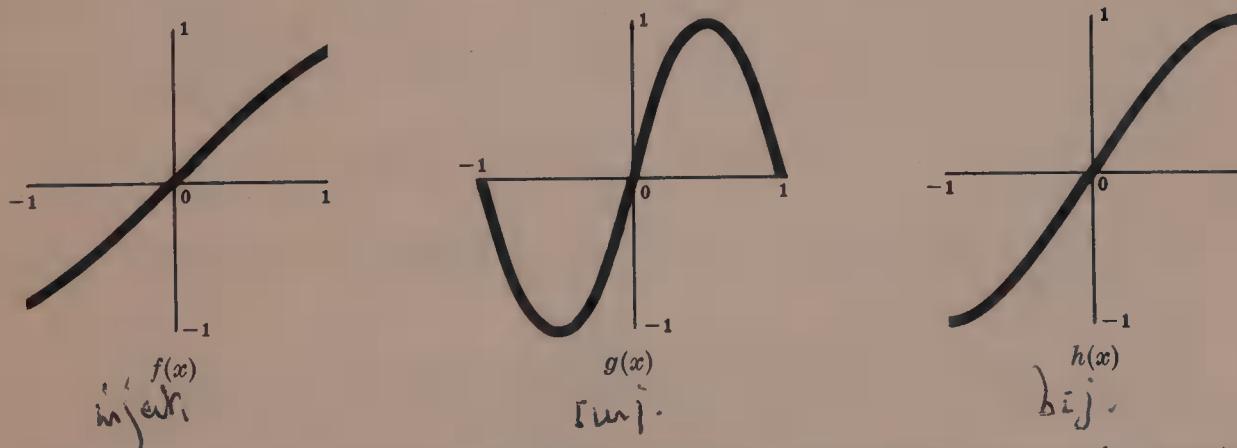
7. Soit $A = [-1, 1]$. Considérons les trois applications $f : A \rightarrow A$, $g : A \rightarrow A$ et $h : A \rightarrow A$ définies par

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin \pi x, \quad h(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$$

Indiquer si chacune de ces applications est (i) injective, (ii) surjective, (iii) bijective (c'est-à-dire à la fois injective et surjective).

Solution :

Traçons les graphes de ces fonctions :



L'application f est injective ; toute parallèle à l'axe des x contient un point plus appartenant à f . Elle n'est pas surjective car, par exemple, $\sin x \neq 1$ pour tout $x \in A$. L'application g est surjective ; toute parallèle à l'axe des x contient au moins un point de g . Mais g n'est pas injective puisque, par exemple, $g(-1) = g(0) = 0$. L'application h est à la fois injective et surjective ; toute parallèle à l'axe des x contient exactement un point de h .

8. Montrer que si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont des applications bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} : C \rightarrow A$ existe et est égale à $f^{-1} \circ g^{-1} : C \rightarrow A$.

$(g \circ f) : A \rightarrow C$ bijection

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Solution :

Si nous prouvons que

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A \quad \text{et} \quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_B$$

la proposition 2.1 permettra de conclure.

L'associativité de la composition des applications permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) \\ &= f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) \\ &= f^{-1} \circ (1 \circ f) \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= 1_A \end{aligned}$$

Puisque $g^{-1} \circ g = 1$ et $1 \circ f = f = f \circ 1$. D'une manière analogue,

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \\ &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (1 \circ g^{-1}) \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_B \end{aligned}$$

9. Dans quel cas la projection $\pi_{i_0}: \prod \{A_i : i \in I\} \rightarrow A_{i_0}$, $A_{i_0} \neq \emptyset$, est elle surjective ?

Solution :

Une projection est toujours surjective si le produit $\prod \{A_i : i \in I\}$ est non vide, c'est-à-dire si aucun des ensembles A_i n'est l'ensemble vide.

FAMILLE INDEXEE

10. Soient $A_n = \{x : x \text{ est un multiple de } n\}$, où $n \in \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs et $B_i = [i, i+1]$, où $i \in \mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs. Déterminer : (i) $A_3 \cap A_5$; (ii) $\bigcup \{A_i : i \in P\}$, où P désigne l'ensemble des nombres premiers ; (iii) $B_3 \cap B_4$; $\bigcup \{B_i : i \in \mathbb{Z}\}$; (v) $(\bigcup \{B_i : i \geq 7\}) \cap A_5$.

(i) $A_{15} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (pas n^{me} premier)

Solution :

- (i) Les nombres qui sont simultanément multiples de 3 et de 5 sont des multiples de 15 ; donc $A_3 \cap A_5 = A_{15}$.
- (ii) Tout entier positif distinct de 1 est un multiple d'au moins un nombre premier ; donc $\bigcup \{A_i : i \in P\} = \{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
- (iii) $B_3 \cap B_4 = \{x : 3 \leq x \leq 4, 4 \leq x \leq 5\} = \{4\}$
- (iv) Tout nombre réel appartient à au moins un intervalle du type $[i, i+1]$; par conséquent $\bigcup \{B_i : i \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.
- (v) $(\bigcup \{B_i : i \geq 7\}) \cap A_5 = \{x : x \text{ est un multiple de } 5, x \geq 7\} = A_5 \setminus \{5\} = \{10, 15, 20, \dots\}$.

11. Soit $D_n = (0, 1/n)$, où $n \in \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs. Déterminer :

(i) $D_3 \cup D_7$ (iii) $D_8 \cup D_t$ (v) $\bigcup \{D_i : i \in A \subset \mathbb{N}\}$

(ii) $D_3 \cap D_{20}$ (iv) $D_8 \cap D_t$ (vi) $\bigcap \{D_i : i \in \mathbb{N}\}$

(iii) $D_5 \cap S \subseteq \mathbb{R}$ (vi) $= \emptyset$ (v) $a = \min \{A\}$

(iv) $D_5 \cap S \subset \mathbb{R}$ (v) $\bigcap \{D_i : i \in \mathbb{N}\}$ ouvert $\Rightarrow a = \min \{A\}$

Solution :

- (i) Puisque $(0, 1/7) \subset (0, 1/3)$, $D_3 \cup D_7 = D_3$.
- (ii) Puisque $(0, 1/20) \subset (0, 1/3)$, $D_3 \cap D_{20} = D_{20}$.
- (iii) Posons $m = \min \{s, t\}$, c'est-à-dire m est le plus petit des deux nombres s et t ; alors D_m est identique à l'un des ensembles D_s ou D_t et contient l'autre. Ainsi $D_s \cup D_t = D_m$.
- (iv) Posons $M = \max \{s, t\}$, c'est-à-dire M est le plus grand des deux nombres s et t . Alors $D_s \cap D_t = D_M$.
- (v) Soit $a \in A$ le plus petit des nombres de A . Alors $\bigcup \{D_i : i \in A \subset \mathbb{N}\} = D_a$.
- (vi) Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\exists i \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin (0, 1/i)$. Donc $\bigcap \{D_i : i \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.

12. Démontrer l'assertion (ii) du théorème 2.2 : $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$. (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion).

Solution :

$$\left. \begin{aligned} B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) &= \{x : x \in B, x \in \bigcup_{i \in I} A_i\} \\ &= \{x : x \in B, \exists i_0 \in I \text{ t.q. } x \in A_{i_0}\} \\ &= \{x : \exists i_0 \in I \text{ t.q. } x \in B \cap A_{i_0}\} \\ &= \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \end{aligned} \right\}$$

13. Montrer que si $\{A_i : i \in I\}$ est une famille indexée d'ensembles et $i_0 \in I$, alors

Solution :

Soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$; alors pour tout $i \in I$, $x \in A_i$. En particulier $x \in A_{i_0}$ et donc $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$. Soit maintenant $y \in A_{i_0}$. Puisque $i_0 \in I$, $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$ est donc $A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

14. Démontrer le théorème 2.4 : Soit A un ensemble quelconque et, pour tout $p \in A$, soit G_p un sous-ensemble de A tel que $p \in G_p \subset A$. Alors $A = \bigcup \{G_p : p \in A\}$.

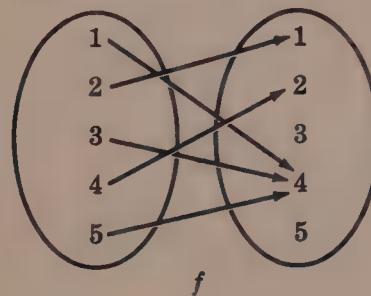
Solution :

Soit $x \in \bigcup \{G_p : p \in A\}$. Alors $\exists p_0 \in A$ tel que $x \in G_{p_0} \subset A$; donc $x \in A$ et $\bigcup \{G_p : p \in A\} \subset A$. (Autrement dit, si chaque G_p est un sous-ensemble de A , alors l'union des ensembles G_p est aussi un sous-ensemble de A .)

Soit maintenant $y \in A$. Alors $y \in G_y$, et donc $y \in \bigcup \{G_p : p \in A\}$. Ainsi $A \subset \bigcup \{G_p : p \in A\}$ et les deux ensembles considérés sont égaux.

FONCTIONS D'ENSEMBLES ASSOCIEES A UNE APPLICATION

15. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $f : A \rightarrow A$ l'application définie par le diagramme :



Déterminer les ensembles suivants : (i) $f[\{1, 3, 5\}]$, (ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}]$, (iii) $f^{-1}[\{3, 5\}]$.

Solution :

- (i) $f[\{1, 3, 5\}] = \{f(1), f(3), f(5)\} = \{4\}$
- (ii) $f^{-1}[\{2, 3, 4\}] = \{4, 1, 3, 5\}$

(iii) $f^{-1}[\{3, 5\}] = \emptyset$ car 3 et 5 ne sont pas les images d'aucun élément de A .

16. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer :

- (i) $f^{-1}[\{25\}]$, (ii) $f^{-1}[\{-9\}]$, (iii) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}]$, (iv) $f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}]$.

Solution :

(i) $f^{-1}[\{25\}] = \{5, -5\}$ en effet $f(5) = 25, f(-5) = 25$ et ces deux nombres sont les seuls ayant pour carré 25.

(ii) $f^{-1}[\{-9\}] = \emptyset$ car -9 n'est pas le carré d'un nombre réel.

(iii) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}] = \{0\}$ puisque $f(0) = 0 \leq 0$ et le carré de tout autre nombre réel est strictement positif.

(iv) $f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}]$ désigne l'ensemble des nombres x tels que $4 \leq x^2 \leq 25$. Par conséquent,

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a' \Rightarrow f^{-1}[\{x : 4 \leq x \leq 25\}] = [2, 5] \cup [-5, -2]$$

17. Soit $f : X \rightarrow Y$ une injection. Démontrer que la fonction d'ensemble associée $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est aussi une injection.

Solution : $f[A] = f[B] \Rightarrow A = B$ parce que si $a \in A$ alors $f(a) \in f[A] \subseteq f[B]$ et donc $f(a) \in f[B] \Rightarrow \exists b \in B$ tel que $f(b) = f(a)$ mais f est injective donc $b = a \Rightarrow a \in B \Rightarrow A = B$

Si $X = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$; par conséquent $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est injective. En effet deux éléments distincts de $\mathcal{P}(X)$ ne peuvent avoir la même image puisque $\mathcal{P}(X)$ ne possède pas deux éléments distincts.

Si $X \neq \emptyset$, $\mathcal{P}(X)$ possède au moins deux éléments. Soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$ et supposons $A \neq B$. Alors $\exists p \in X$ tel que $p \in A, p \notin B$ (ou $p \in B, p \notin A$). Dans ces conditions $f(p) \in f[A]$ et puisque f est injective, $f(p) \notin f[B]$ (ou $f(p) \in f[B]$ et $f(p) \notin f[A]$). Donc $f[A] \neq f[B]$, et la fonction induite f est aussi injective.

18. Démontrer les assertions (i) et (iii) du théorème 2.5 :

- (a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$, (b) $f[A] \setminus f[B] \subset f[A \setminus B]$.

Solution :

(a) Montrons d'abord que $f[A \cup B] \subset f[A] \cup f[B]$. Soit $y \in f[A \cup B]$, i.e. $\exists x \in A \cup B$ tel que $f(x) = y$. Donc ou $x \in A$ ou $x \in B$; or

$$x \in A \text{ implique } f(x) = y \in f[A]$$

$$\text{et} \quad x \in B \text{ implique } f(x) = y \in f[B].$$

Dans tous les cas on a $y \in f[A] \cup f[B]$.

Démontrons maintenant l'inclusion inverse, i.e. $f[A] \cup f[B] \subset f[A \cup B]$. Soit $y \in f[A] \cup f[B]$. Alors $y \in f[A]$ ou $y \in f[B]$; or

$$y \in f[A] \text{ implique } \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y$$

$$\text{et} \quad y \in f[B] \text{ implique } \exists x \in B \text{ tel que } f(x) = y$$

Dans tous les cas, $y = f(x)$ avec $x \in A \cup B$, i.e. $y \in f[A \cup B]$.

- (b) Si $y \in f[A] \setminus f[B]$, alors $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$ et $y \notin \{f(x) : x \in B\}$. Donc $x \notin B$ et par conséquent $x \in A - B$. Il en résulte bien que $y \in f(A - B)$.

19. Démontrer les assertions (ii) et (iii) du théorème 2.6 :

- (a) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, (b) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Solution :

- (a) Démontrons d'abord l'inclusion $f^{-1}[A \cap B] \subset f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$, supposons que $x \in f^{-1}[A \cap B]$. Alors $f(x) \in A \cap B$, i.e. $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. Ainsi $x \in f^{-1}[A]$ et $x \in f^{-1}[B]$. Par conséquent $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$. Alors $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, i.e. $f(x) \in A \cap B$, et finalement $x \in f^{-1}[A \cap B]$.

- (b) Pour démontrer que $f^{-1}[A \setminus B] \subset f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$, supposons que $x \in f^{-1}[A \setminus B]$. Il en résulte que $f(x) \in A \setminus B$, i.e. $f(x) \in A$ et $f(x) \notin B$. Ainsi $x \in f^{-1}[A]$ et $x \notin f^{-1}[B]$, i.e. $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Pour démontrer l'inclusion inverse, considérons $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$. Alors $f(x) \in A$ et $f(x) \notin B$, i.e. $f(x) \in A \setminus B$. Donc $x \in f^{-1}[A \setminus B]$.

ALGEBRE DES APPLICATIONS A VALEURS REELLES

20. Soit $X = \{a, b, c\}$ et soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ deux applications définies par :

$$f = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, -2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}, \quad g = \{\langle a, -2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

Calculer : (i) $f + 2g$, (ii) $fg - 2f$, (iii) $f + 4$, (iv) $|f|$, (v) f^2 .

Solution: $\{ \langle a, -3 \rangle, \langle b, -2 \rangle, \langle c, 5 \rangle \}; \{ \langle a, -4 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, -3 \rangle \}; \{ \langle a, 5 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 7 \rangle \}$

(i) Il vient :

$$(f + 2g)(a) \equiv f(a) + 2g(a) = 1 - 4 = -3$$

$$(f + 2g)(b) \equiv f(b) + 2g(b) = -2 + 0 = -2$$

$$(f + 2g)(c) \equiv f(c) + 2g(c) = 3 + 2 = 5$$

Autrement dit, $f + 2g = \{\langle a, -3 \rangle, \langle b, -2 \rangle, \langle c, 5 \rangle\}$.

$$(ii) \text{ De manière analogue } (fg - 2f)(a) \equiv f(a)g(a) - 2f(a) = (1)(-2) - 2(1) = -4$$

$$(fg - 2f)(b) \equiv f(b)g(b) - 2f(b) = (-2)(0) - 2(-2) = 4$$

$$(fg - 2f)(c) \equiv f(c)g(c) - 2f(c) = (3)(1) - 2(3) = -3$$

C'est-à-dire,

$$fg - 2f = \{\langle a, -4 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, -3 \rangle\}$$

(iii) Puisque par définition, $(f + 4)(x) = f(x) + 4$, ajoutons 4 à chaque image, c'est-à-dire à la dernière coordonnée de chaque couple de f . Ainsi

$$f + 4 = \{\langle a, 5 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 7 \rangle\}$$

(iv) Puisque $|f|(x) \equiv |f(x)|$, remplaçons dans chaque couple définissant f la deuxième coordonnée par sa valeur absolue. Ainsi

$$|f| = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 3 \rangle\}$$

(v) Puisque $f^2(x) = (ff)(x) = f(x)f(x) = (f(x))^2$, remplaçons dans chaque couple de f la seconde coordonnée par son carré. Ainsi

$$f^2 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 4 \rangle, \langle c, 9 \rangle\}$$

21. Définissons $\hat{0} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ par $\hat{0}(x) = 0$ pour tout $x \in X$. Montrer que pour tout

$$f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}), \quad (i) \quad f + \hat{0} = f \quad \text{et} \quad (ii) \quad f\hat{0} = \hat{0}.$$

Solution : $\forall x \in X: (f + \hat{0})(x) = f(x) + 0 = f(x)$ et $\forall x \in X: (f \cdot \hat{0})(x) = f(x) \cdot \hat{0}(x) = f(x) \cdot 0 = 0$

(i) $(f + \hat{0})(x) = f(x) + \hat{0}(x) = f(x) + 0 = f(x)$ pour tout $x \in X$; donc $f + \hat{0} = f$. On notera que $\hat{0}$ vérifie la condition (3) de l'axiome $[V_1]$ du théorème 2.9.

(ii) $(f\hat{0})(x) = f(x)\hat{0}(x) = f(x) \cdot 0 = 0 = \hat{0}(x)$ pour tout $x \in X$; donc $f\hat{0} = \hat{0}$.

22. Démontrer que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ vérifie l'axiome $[V_3]$ du théorème 2.9, c'est-à-dire si $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ et $k, k' \in \mathbb{R}$, alors :

$$(i) \quad k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g, \quad (ii) \quad (k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f.$$

$$\forall x \in X: \begin{cases} k(f+g)(x) = k(f(x)+g(x)) = kf(x)+kg(x) \\ k(k'+k)f(x) = (k+k')kf(x) = kf(x)+k'kf(x) \end{cases}$$

Solution :

$$(i) \quad [k \cdot (f + g)](x) = k[(f + g)(x)] = k[f(x) + g(x)] = k(f(x)) + k(g(x)) \\ (k \cdot f + k \cdot g)(x) = (k \cdot f)(x) + (k \cdot g)(x) = k(f(x)) + k(g(x))$$

pour tout $x \in X$; donc $k \cdot (f + g) = k \cdot f + k \cdot g$. (On notera que nous avons utilisé ici la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, propriété qui est vérifiée par les nombres réels k , $f(x)$ et $g(x)$.)

$$(ii) \quad ((k + k') \cdot f)(x) = (k + k')f(x) = k(f(x)) + k'(f(x)) \\ (k \cdot f + k' \cdot f)(x) = (k \cdot f)(x) + (k' \cdot f)(x) = k(f(x)) + k'(f(x))$$

pour tout $x \in X$; ainsi $(k + k') \cdot f = k \cdot f + k' \cdot f$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

APPLICATIONS

23. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > 2 \\ x^2 - 2|x| & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$, $g(x) = 3x + 1$.

Calculer (i) $f(-2)$, (ii) $g(-3)$, (iii) $f(4)$, (iv) $(g \circ f)(1)$, (v) $(f \circ g)(2)$, (vi) $(f \circ f)(3)$.

$$0, -8, 3, g(f(2)) = g(-1) = -2, f(g(2)) = f(7) = 9, f(f(3)) = f(1) = -1$$

24. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

Trouver des formules permettant de définir les applications composées suivantes : (i) $f \circ g$, (ii) $g \circ f$, (iii) $f \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2x^2 + 6x - 1}{[x^2 + 3x + 1]^2 + 3} = \frac{2x^2 + 6x - 1}{x^4 + 9x^3 + 19x^2 + 15x + 5}$$

25. Soit $k : X \rightarrow X$ une application constante. Démontrer que pour toute application $f : X \rightarrow X$, $k \circ f = k$. Que peut-on dire de l'application $f \circ k$?

$\forall x \in X : (k \circ f)(x) = k(f(x)) = k(f(k(x))) = f(k) : \text{appl. constante.}$

26. On considère l'application $f(x) = x$ où $x \in \mathbb{R}$ et $x \geq 0$. Dire si oui ou non chacune des applications suivantes est une extension de f . $f(x) = f(x)$ pour tout x dans le domaine de f .

(i) $g_1(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ oui (iii) $g_3(x) = (x + |x|)/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ oui

(ii) $g_2(x) = x$ où $x \in [-1, 1]$ non (iv) $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oui.

27. Soient $A \subset X$ et $f : X \rightarrow Y$. L'inclusion canonique j de A dans X , notée $j : A \subset X$ est définie par $j(a) = a$ pour tout $a \in A$. Montrer que la restriction $f|A$ de f à A est égale à l'application composée $f \circ j$, c'est-à-dire $f|A = f \circ j$.

$$\text{f}|A : A \rightarrow Y \quad f|A(x) = f(x) \quad \forall x \in A$$

$$(f \circ j)(x) = f(j(x)) = f(x) \quad \forall x \in A$$

INJECTIONS, SURJECTIONS ET APPLICATIONS INVERSES

$$(f \circ 1_A)(x) = f(1_A(x)) = f(x) \quad \forall x \in A$$

$$(f \circ 1_B)(x) = f(1_B(x)) = f(x) \quad \forall x \in B$$

28. Montrer que pour toute application $f : A \rightarrow B$, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in A$$

29. Montrer que si $f : A \rightarrow B$ est à la fois injective et surjective, alors $f^{-1} \circ f = 1_A$ et $f \circ f^{-1} = 1_B$.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(b) = x$$

30. Montrer que si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ sont telles que $g \circ f = 1_A$, alors f est injective et g est surjective.

31. Démontrer la proposition 2.1 : Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ sont telles que $g \circ f = 1_A$ et $f \circ g = 1_B$. Alors $f^{-1} : B \rightarrow A$ existe et $g = f^{-1}$.

32. Dans quel cas la projection $\pi_{i_0} : \prod \{A_i : i \in I\} \rightarrow A_{i_0}$ est elle injective ?

33. Soit $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x/(1 - |x|)$. Montrer que f est bijective.

34. Soit R une relation d'équivalence définie sur un ensemble A non vide. L'application canonique η de A dans l'ensemble quotient A/R est définie par $\eta(a) = [a]$ où $[a]$ désigne la classe d'équivalence de l'élément a . Démontrer que η est une application surjective.
35. Soit $f : A \rightarrow B$. La relation R définie sur A par $a R a'$ ssi $f(a) = f(a')$ est une relation d'équivalence. Soit \hat{f} l'application de l'ensemble quotient A/R à valeur dans l'ensemble image $f[A]$ de f et définie par $\hat{f} : [a] \rightarrow f(a)$.
- Montrer que $\hat{f} : A/R \rightarrow f[A]$ est une bijection.
 - Montrer que $f = j \circ \hat{f} \circ \eta$, où $\eta : A \rightarrow A/R$ est l'application canonique et $j : f[A] \subset B$ est l'inclusion canonique.
- $$A \xrightarrow{\eta} A/R \xrightarrow{\hat{f}} f[A] \xrightarrow{j} B$$

FAMILLE INDEXEE

36. Soit $A_n = \{x : x \text{ est un multiple de } n\} = \{n, 2n, 3n, \dots\}$, où $n \in \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs. Calculer :
- $A_2 \cap A_7$
 - $A_6 \cap A_8$
 - $A_3 \cup A_{12}$
 - $A_3 \cap A_{12}$
 - $A_s \cup A_{st}$, où $s, t \in \mathbb{N}$
 - $A_s \cap A_{st}$, où $s, t \in \mathbb{N}$
 - Montrer que si $J \subset \mathbb{N}$ est un ensemble infini, alors $\bigcap \{A_i : i \in J\} = \emptyset$.
37. Soit $B_i = (i, i+1]$, un intervalle semi-ouvert, où $i \in \mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs. Calculer :
- $B_4 \cup B_5$
 - $B_6 \cap B_7$
 - $\bigcup_{i=4}^{20} B_i$
 - $B_s \cup B_{s+1} \cup B_{s+2}$, $s \in \mathbb{Z}$
 - $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} B_{s+i}$
 - $\bigcup_{i=0}^{15} B_{s+i}$
38. Soient $D_n = [0, 1/n]$, $S_n = (0, 1/n]$ et $T_n = [0, 1/n)$ où $n \in \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs. Calculer :
- $\bigcap \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$
 - $\bigcap \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$
 - $\bigcap \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$
39. Démontrer les lois de De Morgan : (i) $(\bigcup_i A_i)^c = \bigcap_i A_i^c$, (ii) $(\bigcap_i A_i)^c = \bigcup_i A_i^c$.
40. Soient $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ une famille d'ensemble indexée par I et J, K deux ensembles tels que $J \subset K \subset I$. Démontrer les relations d'inclusion suivantes :
- $\bigcup \{A_i : i \in J\} \subset \bigcup \{A_i : i \in K\}$
 - $\bigcap \{A_i : i \in J\} \supset \bigcap \{A_i : i \in K\}$

FONCTIONS D'ENSEMBLES ASSOCIEES A UNE APPLICATION

41. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer : (i) $f[\{-1, 0, 1\}]$, (ii) $f^{-1}[\{10, 17\}]$, (iii) $f[(-2, 2)]$, (iv) $f^{-1}[(5, 10)]$, (v) $f[\mathbb{R}]$, (vi) $f^{-1}[\mathbb{R}]$.
42. Démontrer qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est injective si et seulement si $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$, pour tout couple de sous-ensembles A et B de X .
43. Soient $f : X \rightarrow Y$ et A, B deux sous-ensembles quelconques de X . Montrer que :
- $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$,
 - $A \subset B$ entraîne $f[A] \subset f[B]$
44. Soient $f : X \rightarrow Y$ et A, B deux sous-ensembles quelconques de X . Montrer que :
- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$,
 - $A \subset B$ entraîne $f^{-1}[A] \subset f^{-1}[B]$
45. Démontrer le théorème 2.8 : Soient $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$ et $B \subset Y$. Alors
- $A \subset f^{-1} \circ f[A]$,
 - $B \supset f \circ f^{-1}[B]$

46. Soient $f: X \rightarrow Y$ une application surjective. Montrer que la fonction d'ensemble associée $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ est également surjective.
47. Démontrer qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est bijective si et seulement si pour tout sous-ensemble A de X , on a $f[A^c] = (f[A])^c$.
48. Démontrer qu'une application $f: X \rightarrow Y$ est injective si et seulement si $A = f^{-1} \circ f[A]$ pour tout sous-ensemble A de X .

ALGEBRE DES APPLICATIONS A VALEURS REELLES

49. Soit $X = \{a, b, c\}$; considérons les applications à valeurs réelles suivantes définies sur X :

$$f = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, -3 \rangle, \langle c, -1 \rangle\}, \quad g = \{\langle a, -2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

Calculer : (i) $3f$, (ii) $2f - 5g$, (iii) fg , (iv) $|f|$, (v) f^3 , (vi) $|3f - fg|$.

50. Soit A un sous-ensemble arbitraire d'un ensemble universel U . L'application à valeurs réelles $\chi_A: U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in A \\ 0 & \text{Si } x \notin A \end{cases}$$

se nomme la *fonction caractéristique* de A . Montrer que :

$$(i) \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \quad (ii) \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}, \quad (iii) \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}.$$

51. Montrer que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ vérifie l'axiome $[V_2]$ du Théorème 2.9 c'est-à-dire si $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ et $k, k' \in \mathbb{R}$, alors (i) $k \cdot (k' \cdot f) = (kk') \cdot f$, (ii) $1 \cdot f = f$

52. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, soit $\hat{k} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'application constante définie par $\hat{k}(x) = k$ pour tout $x \in X$.

(i) Montrer que la famille \mathcal{C} des applications constantes, i.e. $\mathcal{C} = \{\hat{k}: k \in \mathbb{R}\}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

(ii) Soit $\alpha: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui est définie par $\alpha(\hat{k}) = k$. Montrer que α est une bijection et que, quels que soient $k, k' \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha(\hat{k} + \hat{k}') = \alpha(\hat{k}) + \alpha(\hat{k}')$$

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

23. (i) 0, (ii) -8 , (iii) 3, (iv) -2 , (v) 9, (vi) -1
24. (i) $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$, (ii) $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$, (iii) $(f \circ f)(x) = x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 5$
25. L'application $f \circ k$ est une application constante.
26. (i) oui, (ii) non, (iii) oui, (iv) oui.
32. A_i est un singleton : $A_i = \{a_i\}$ pour tout $i \neq i_0$.
36. (i) A_{14} , (ii) A_{24} , (iii) A_3 , (iv) A_{12} , (v) A_s , (vi) A_{st}
37. (i) $(4, 6]$, (ii) \emptyset , (iii) $(4, 21]$, (iv) $(s, s+3]$, (v) $(s, s+16]$, (vi) \mathbb{R}
38. (i) $\{0\}$, (ii) \emptyset , (iii) $\{0\}$

41. (i) $\{1, 2\}$, (ii) $\{3, -3, 4, -4\}$, (iii) $(1, 5)$, (iv) $(-3, -2), (2, 3)$, (v) $\{x : x \geq 1\}$, (vi) \mathbb{R}

49. (i) $3f = \{\langle a, 6 \rangle, \langle b, -9 \rangle, \langle c, -3 \rangle\}$
(ii) $2f - 5g = \{\langle a, 14 \rangle, \langle b, -6 \rangle, \langle c, -7 \rangle\}$
(iii) $fg = \{\langle a, -4 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, -1 \rangle\}$
(iv) $|f| = \{\langle a, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$
(v) $f^3 = \{\langle a, 8 \rangle, \langle b, -27 \rangle, \langle c, -1 \rangle\}$
(vi) $|3f - fg| = \{\langle a, 10 \rangle, \langle b, 9 \rangle, \langle c, 2 \rangle\}$

CHAPITRE 3

Cardinaux et relations d'ordre

ENSEMBLES EQUIPOTENTS

Un ensemble A est dit *équipotent* à un ensemble B , ce que l'on écrit $A \sim B$, s'il existe une bijection f de A sur B . L'application f définit donc une correspondance *biunivoque* entre les ensembles A et B . On dit aussi dans cette situation que les ensembles A et B ont même *puissance*.

Un ensemble est *fini* si et seulement si il est vide ou équivalent à $\{1, 2, \dots, n\}$ pour un certain entier positif $n \in \mathbb{N}$; dans le cas contraire, on dit qu'il est *infini*. Il est clair que deux ensembles finis sont équipotents ssi ils possèdent le même nombre d'éléments. Ainsi, dans le cas d'ensembles finis, le concept d'ensembles équipotents s'identifie avec celui d'ensemble possédant le même nombre d'éléments.

Exemple 1.1 : Soient $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ et $E = \{2, 4, 6, \dots\}$. L'application $f : N \rightarrow E$ définie par $f(x) = 2x$ est une bijection; donc N est équivalent à E .

Exemple 1.2 : L'application $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(x) = x/(1 - |x|)$ est une bijection. L'intervalle ouvert $(-1, 1)$ est donc équivalent à \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels.

On observera qu'un ensemble infini peut être équivalent à l'un de ses sous-ensembles propres. Ceci est propriété générale des ensembles infinis.

Proposition 3.1 : Pour toute famille d'ensembles la relation d'équivalence $A \sim B$ est une relation d'équivalence.

\hookrightarrow réflexive, symétrique et transitive.

ENSEMBLES DENOMBRABLES

Soit $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers positifs. On dit qu'un ensemble X est *dénombrable* et a pour cardinal \aleph_0 (lire : aleph-zéro) ssi X est équivalent à N . On dit qu'un ensemble est *au plus dénombrable* ssi il est fini ou dénombrable.

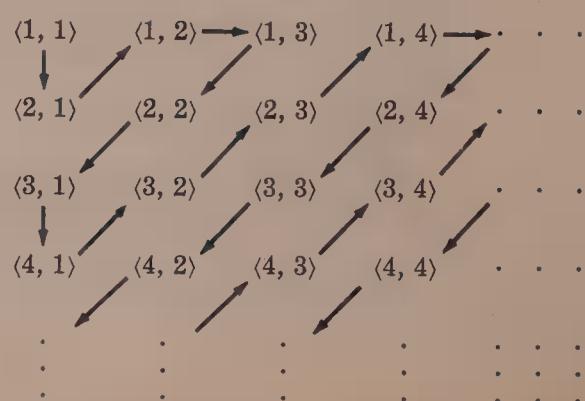
Exemple 2.1 : Une suite infinie composée d'éléments distincts

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

est dénombrable. En effet une suite est essentiellement une fonction $f(n) = a_n$ ayant pour domaine de définition N . Donc si les a_n sont distincts, la fonction f est une bijection. Ainsi, chacun des ensembles suivants est dénombrable :

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}, \quad \{1, -2, 3, -4, \dots\}, \quad \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 9, 27 \rangle, \dots, \langle n^2, n^3 \rangle, \dots\}$$

Exemple 2.2 : Représentons le produit $N \times N$ de façon suivante :



L'ensemble produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc décrit par la suite infinie d'éléments distincts :

$$\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \dots$$

(On notera que cette suite est obtenue en "suivant les flèches" du diagramme précédent.) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est donc dénombrable.

Exemple 2.3 : Soit $M = \{0, 2, 1, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tout entier positif $a \in \mathbb{N}$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $a = 2^r(2s + 1)$ où $r, s \in M$. La fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow M \times M$ qui est définie par

$$f(a) = \langle r, s \rangle$$

où r et s sont définis comme précédemment est une bijection. L'ensemble $M \times M$ est donc dénombrable. On notera que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est strictement inclus dans $M \times M$.

En ce qui concerne les ensembles dénombrables et au plus dénombrables, on notera les théorèmes suivants.

Théorème 3.2 : Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.

Théorème 3.3 : Tout sous-ensemble d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Lemme 3.4 : Soit $\{A_1, A_2, \dots\}$ une suite dénombrable d'ensembles dénombrables deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est aussi un ensemble dénombrable.

Théorème 3.5 : Soit $\{A_i : i \in I\}$ une famille au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, c'est-à-dire I est au plus dénombrable et pour tout $i \in I$, l'ensemble A_i est au plus dénombrable. Alors $\bigcup \{A_i : i \in I\}$ est au plus dénombrable.

Un ensemble qui n'est ni fini ni dénombrable est dit *non dénombrable*.

LA PUISSANCE DU CONTINU

Il existe des ensembles infinis qui sont non dénombrables. Le théorème suivant en donne un exemple particulier mais fondamental.

Théorème 3.6 : Le segment $[0, 1]$ est non dénombrable.

On dit qu'un ensemble X a la puissance du continu ou a pour cardinal c si il est équivalent au segment $[0, 1]$.

Nous montrerons, dans un problème résolu, que tout intervalle, ouvert ou fermé, a pour cardinal c . L'exemple 1.2 prouve que l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ est équivalent à \mathbb{R} . Donc,

Proposition 3.7 : Le cardinal de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} est c .

LE THEOREME DE SCHROEDER-BERNSTEIN

On écrira dans ce qui suit $A \approx B$ si A est équivalent à une partie de B c'est-à-dire

$$A \precsim B \text{ ssi } \exists B^* \subset B \text{ tel que } A \sim B^*$$

Si $A \approx B$ et $A \not\approx B$, c'est-à-dire A n'est pas équivalent à B , nous écrirons $A \prec B$.

Exemple 3.1 : Puisque \mathbb{N} est une partie de \mathbb{R} , on a $\mathbb{N} \precsim \mathbb{R}$. Or \mathbb{R} n'est pas dénombrable d'après la proposition 3.7 c'est-à-dire $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$.

Etant donné deux ensembles A et B , alors l'une au moins des assertions suivantes doit être vraie :

- (i) $A \sim B$,
- (ii) $A \prec B$ ou $B \prec A$,
- (iii) $A \precsim B$ et $B \precsim A$,
- (iv) $A \not\prec B$, $A \not\approx B$ et $B \not\prec A$

Le célèbre théorème de Schroeder-Bernstein affirme que, dans le cas (iii), A est équivalent à B .

Théorème (Schroeder-Bernstein) 3.8 : Si $A \preceq B$ et $B \preceq A$, alors $A \sim B$.

Le théorème de Schroeder-Bernstein peut être reformulé de la manière suivante :

Théorème 3.8 : Soient $X \supset Y \supset X_1$, et $X \sim X_1$. Alors $X \sim Y$.

Remarquons que le cas (iv) ci-dessus est impossible. Autrement dit,

Théorème (Trichotomie) 3.9 : Etant donné deux ensembles quelconques A et B , alors ou $A < B$, $A \sim B$ ou $B < A$.

LA NOTION DE CARDINAL

Si deux ensembles A et B sont équivalents, c'est-à-dire $A \sim B$, on dit que A et B ont le même *nombre cardinal* ou le même *cardinal*. Nous noterons $\# A$ "le nombre cardinal (ou cardinal) de A ". Ainsi

$$\#(A) = \#(B) \text{ ssi } A \sim B$$

Si $A < B$ nous dirons que le cardinal de A est *inférieur* au cardinal de B ou que le cardinal de B est *supérieur* au cardinal de A . Ainsi,

$$\#(A) < \#(B) \text{ ssi } A < B$$

Donc $\#(A) \leq \#(B)$ ssi $A \preceq B$. Cette notion permet alors de donner une deuxième reformulation du théorème de Schroeder-Bernstein :

Théorème 3.8 : Si $\#(A) \leq \#(B)$ et $\#(B) \leq \#(A)$, alors $\#(A) = \#(B)$.

Les cardinaux de chacun des ensembles

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

se notent respectivement 0, 1, 2, 3, ..., et s'appellent des cardinaux *finis*. Les cardinaux de \mathbb{N} et de $[0, 1]$, se notent

$$\aleph_0 = \#(\mathbb{N}), \quad c = \#([0, 1])$$

Nous pouvons donc écrire $0 < 1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < c$

LE THEOREME DE CANTOR ET L'HYPOTHESE DU CONTINU

Il est naturel de se demander s'il existe des cardinaux infinis autres que \aleph_0 et c . La réponse est oui. En effet étant donné un ensemble arbitraire A , le théorème de Cantor fournit un exemple d'un ensemble ayant un cardinal supérieur à celui de A .

Théorème (Cantor) 3.10 : Si A est un ensemble quelconque, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A est supérieur au cardinal de A .

Il est aussi naturel de se demander s'il existe un ensemble admettant un cardinal compris entre \aleph_0 et c . La conjecture suivante : "la réponse à cette question est non" s'appelle l'hypothèse du continu. Autrement dit,

Hypothèse du continu : Il n'existe pas d'ensemble A tel que $\aleph_0 < \#(A) < c$.

En 1963 P.J. Cohen a prouvé que l'hypothèse du continu est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles que nous avons adoptés, de la même manière que le cinquième postulat d'Euclide sur les droites parallèles est indépendant des autres postulats de la géométrie.

ENSEMBLES ORDONNÉS

équivalence : symétrique
ordre : antisymétrique.

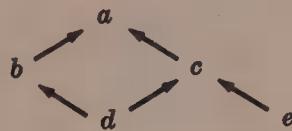
Une relation \lesssim sur un ensemble A s'appelle une *relation d'ordre* (ou *ordre*) sur A ssi, pour tout $a, b, c \in A$: (i) $a \lesssim a$; (ii) $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$ implique $a = b$; et (iii) $a \lesssim b$ et $b \lesssim c$ implique $a \lesssim c$. Un ensemble A muni d'une relation d'ordre, c'est-à-dire un couple (A, \lesssim) , s'appelle un *ensemble ordonné*.

Rappelons qu'une relation binaire est réflexive ssi (i) est vérifié, et transitive ssi (iii) est vérifié. Une relation est dite *antisymétrique* ssi (ii) est vérifié. Autrement dit, une relation d'ordre est une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple 4.1 : Pour toute famille d'ensembles l'inclusion est une relation d'ordre puisque (i) $A \subset A$ pour tout ensemble A ; (ii) $A \subset B$ et $B \subset A$ implique $A = B$; et (iii) $A \subset B$ et $B \subset C$ implique $A \subset C$.

Exemple 4.2 : Soit A un ensemble quelconque de nombres réels. La relation définie dans A par $x \leq y$ est une relation d'ordre qui s'appelle *l'ordre naturel* de A .

Exemple 4.3 : Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$. Le diagramme



permet de définir de la manière suivante une relation d'ordre sur X : $x \lesssim y$ ssi $x = y$ ou si l'on peut aller de x à y sur le diagramme dans le sens des flèches, c'est-à-dire vers le haut.

Etant donné un ensemble ordonné, si $a \lesssim b$ nous dirons que a est *inférieur* à b ou que a est *plus petit* que b et que b est *supérieur* à a ou que b est *plus grand* que a . En outre, nous écrirons $a < b$ si $a \lesssim b$ et $a \neq b$.

Soient A un ensemble ordonné et a, b deux éléments de A . On dit que a et b sont *comparables* si l'on a : $a \lesssim b$ ou $b \lesssim a$. Un ensemble ordonné A est dit *totalement ordonné* si deux éléments quelconques de A sont toujours comparables. L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels muni de l'ordre naturel $x \leq y$ est un exemple d'ensemble totalement ordonné.

Exemple 4.4 : Soient A et B deux ensembles totalement ordonnés. Alors, l'ensemble produit $A \times B$ peut être totalement ordonné comme suit :

$$(a, b) \prec (a', b') \text{ si } a < a' \text{ ou si } a = a' \text{ et } b < b'$$

Cet ordre s'appelle *l'ordre lexicographique* de $A \times B$ car il est analogue à la façon dont les mots sont rangés dans un dictionnaire.

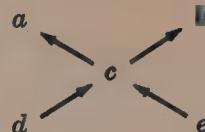
Remarque : Etant donné un ensemble A muni d'une relation d'ordre R , c'est-à-dire réflexive, antisymétrique et transitive, alors la relation réciproque R^{-1} est aussi un ordre, on dit que R^{-1} est *l'ordre réciproque* (ou *inverse*) de l'ordre R .

SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ

Soit A un sous-ensemble d'un ensemble ordonné X . L'ordre de X induit d'une manière naturelle un ordre sur A : si $a, b \in A$, on écrira $a \lesssim b$ en tant qu'éléments de A ssi $a \lesssim b$ en tant qu'éléments de X . Plus précisément, si R est un ordre sur X , alors la relation $R_A = R \cap (A \times A)$, appelée la *restriction* de R à A , est une relation d'ordre sur A . L'ensemble ordonné (A, R_A) s'appelle un *sous-ensemble (ordonné)* de l'ensemble ordonné (X, R) .

Certains sous-ensembles d'un ensemble ordonné X peuvent être effectivement totalement ordonné. De façon évidente, si X lui-même est totalement ordonné, tout sous-ensemble de X sera aussi totalement ordonné.

Exemple 5.1 : Considérons sur l'ensemble $W = \{a, b, c, d, e\}$ l'ordre défini par le diagramme

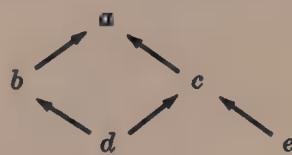


Les ensembles $\{a, c, d\}$ et $\{b, e\}$ sont des sous-ensembles totalement ordonnés ; les ensembles $\{a, b, c\}$ et $\{d, e\}$ ne sont pas des sous-ensembles totalement ordonnés.

PLUS PETIT ET PLUS GRAND ELEMENT

Soit X un ensemble ordonné. On dit qu'un élément $a_0 \in X$ est un *plus petit élément* de X ssi $a_0 \leq x$ pour tout $x \in X$. De même un élément $b_0 \in X$ est un *plus grand élément* de X ssi $x \leq b_0$ pour tout $x \in X$. On utilise également l'expression *élément minimum* (resp. *élément maximum*) comme synonyme de plus petit (resp. plus grand) élément.

Exemple 6.1 : Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ un ensemble ordonné à l'aide du diagramme



Il est clair que a est un *plus grand élément* puisque a est supérieur à tout élément de X . Par contre X n'a pas de *plus petit élément*. L'élément d n'est pas supérieur à e .

Exemple 6.2 : L'ensemble des entiers positifs \mathbb{N} , muni de l'ordre naturel, admet 1 comme *plus petit élément*. L'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, muni de l'ordre naturel n'a ni *plus petit* ni *plus grand élément*.

ELEMENTS MAXIMAUX ET ELEMENTS MINIMAUX

Soit X un ensemble ordonné. Un élément $a_0 \in X$ est dit *maximal*ssi $a_0 \leq x$ implique $x = a_0$, c'est-à-dire il n'existe aucun élément distinct de a_0 qui soit supérieur à a_0 . De façon similaire, un élément $b_0 \in X$ est dit *minimal*ssi $x \leq b_0$ implique $x = b_0$, c'est-à-dire il n'existe aucun élément distinct de b_0 qui soit inférieur à b_0 .

Exemple 7.1 : Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble ordonné, à l'aide du diagramme, de l'exemple 6.1. Les éléments d et e sont tous les deux *minimaux*. L'élément \blacksquare est *maximal*.

Exemple 7.2 : L'ensemble \mathbb{R} muni de l'ordre naturel est totalement ordonné, il n'a cependant ni *élément maximal* ni *élément minimal*.

Exemple 7.3: Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ un ensemble fini totalement ordonné. Alors A contient exactement un élément *minimal* et exactement un élément *maximal* que l'on note respectivement

$$\min \{a_1, \dots, a_m\} \quad \text{et} \quad \max \{a_1, \dots, a_m\}$$

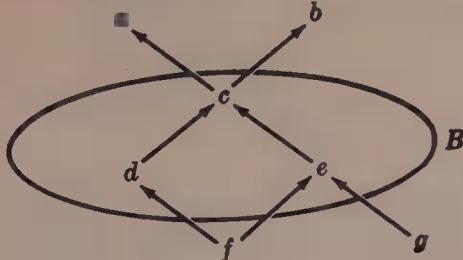
MAJORANTS ET MINORANTS

Soit A une partie d'un ensemble ordonné X . On dit que $m \in X$ est un *minorant* de A ssi $m \leq x$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire m est inférieur à tout élément de A . Si l'ensemble des minorants de A possède un plus grand élément, on dit que cet élément est la *borne inférieure* de A et on le note $\inf(A)$.

De manière analogue, on dit que $M \in X$ est un *majorant* de A ssi $x \leq M$ pour tout $x \in A$, c'est-à-dire M est supérieur à tout élément de A . Si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément, on dit que cet élément est la *borne supérieure* de A et on le note $\sup(A)$.

On dit que A est *borné supérieurement* si A admet un majorant et borné inférieurement s'il admet un minorant. Si A admet à la fois un majorant et un minorant, on dit que A est *borné*.

Exemple 8.1 : Soit $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ un ensemble ordonné à l'aide du diagramme suivant :



Soit $B = \{c, d, e\}$. Alors a, b et c sont des majorants de B , et f est l'unique minorant de B . On notera que g n'est pas un minorant de B car g et d ne sont pas comparables. En outre, $c = \sup(B)$ appartient à B , alors que $f = \inf(B)$ n'appartient pas à B .

Exemple 8.2 : Soit A un ensemble borné de nombres réels. Un théorème fondamental permet alors d'affirmer que si A est muni de l'ordre naturel, $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent.

Exemple 8.3 : soit Q l'ensemble des nombres rationnels. Posons

$$B = \{x : x \in Q, x > 0, 2 < x^2 < 3\}$$

Autrement dit, B est formé de l'ensemble des nombres rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. L'ensemble B admet une infinité de minorants et une infinité de majorants, mais $\inf(B)$ et $\sup(B)$ n'existent pas. Notons que $\sqrt{2}$ (resp. $\sqrt{3}$) n'appartient pas à Q , ce n'est donc pas un minorant (resp. un majorant) de B .

LEMME DE ZORN

Le lemme de Zorn est un des outils les plus importants des mathématiques ; il permet d'affirmer l'existence de certains éléments bien qu'il ne donne aucun procédé constructif pour trouver ces éléments.

Lemme de Zorn 3.11 : Soit X un ensemble ordonné non vide tel que tout sous-ensemble totalement ordonné admette un majorant. Alors X contient au moins un élément maximal.

Remarque. Le lemme de Zorn est équivalent à l'axiome du choix et au principe du bon ordre. La démonstration de ce fait utilise la notion d'ordinal et dépasse les limites de cet ouvrage.

PROBLEMES RESOLUS

ENSEMBLES EQUIPOTENTS, ENSEMBLES DENOMBRABLES

1. Considérons les cercles concentriques

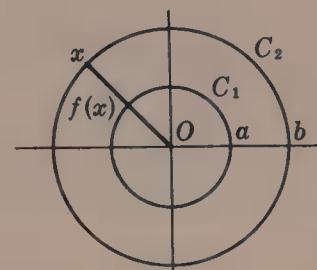
$$C_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\}, \quad C_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = b^2\}$$

où $0 < a < b$. Construire, géométriquement, une bijection entre C_1 et C_2 .

Solution :

Soit $x \in C_2$. Considérons l'application $f : C_2 \rightarrow C_1$ définie comme suit : $f(x)$ est le point d'intersection de C_1 et du rayon allant du centre de C_2 (et de C_1) au point x . (Cf. figure.)

L'application f est à la fois injective et surjective. Elle établit la correspondance biunivoque cherchée entre C_1 et C_2 .



2. Démontrer que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Solution :

Soit \mathbb{Q}^+ (resp. \mathbb{Q}^-) l'ensemble des nombres rationnels positifs (resp. l'ensemble des nombres rationnels négatifs). Il est clair que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$

Considérons la fonction $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ défini par

$$f(p/q) = \langle p, q \rangle$$

où p/q est un nombre rationnel arbitraire défini par le quotient de deux entiers positifs. La fonction f est injective ; par conséquent \mathbb{Q}^+ est équivalent à une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Or $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (cf. exemple 2.2) ; donc \mathbb{Q}^+ est aussi dénombrable. De manière analogue \mathbb{Q}^- est dénombrable. Le théorème 3.5 permet alors de conclure que la réunion de $\mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels, est aussi dénombrable.

3. Démontrer la proposition 3.1 : Pour toute famille d'ensemble, la relation d'équipotence $A \sim B$ est une relation d'équivalence. C'est-à-dire, (i) $A \sim A$ pour tout ensemble A ; (ii) si $A \sim B$ alors $B \sim A$; et (iii) si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A \sim C$.**Solution :**

(i) L'application identique $1_A : A \rightarrow A$ est une bijection ; donc $A \sim A$.

(ii) Si $A \sim B$, il existe une bijection $f : A \rightarrow B$. L'application f admet donc une application réciproque $f^{-1} : B \rightarrow A$ qui est aussi une bijection. Ainsi

$$A \sim B \text{ implique } B \sim A$$

(iii) Si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors il existe deux applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ qui sont des bijections. L'application composée $g \circ f : A \rightarrow C$ est donc aussi une bijection. Ainsi $g \circ f : A \rightarrow C$

$$A \sim B \text{ et } B \sim C \text{ implique } A \sim C$$

4. Montrer que l'ensemble P de tous les polynômes

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

à coefficients entiers, c'est-à-dire tels que a_0, a_1, \dots, a_m soient des entiers, est dénombrable.

Solution :

soit $\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ un couple quelconque d'entiers positifs. Notons P_{nm} l'ensemble des polynômes $p(x)$ de degré égal à m tels que :

$$|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_m| = n$$

Notons que l'ensemble P_{nm} est fini et que

$$P = \bigcup \{P_{nm} : \langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

P est une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrable. Comme P est un ensemble infini, P est dénombrable.

5. Une racine r d'un polynôme

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

à coefficients entiers s'appelle un *nombre algébrique*. Démontrer que l'ensemble A des nombres algébriques est dénombrable.

Solution :

Le problème précédent permet d'affirmer que l'ensemble E des équations algébriques à coefficients

entiers est dénombrable :

$$\blacksquare = \{p_1(x) = 0, p_2(x) = 0, p_3(x) = 0, \dots\}$$

Soit $A_i = \{x : x \text{ est une solution de } p_i(x) = 0\}$

Comme un polynôme de degré n admet au plus n racines, chaque ensemble A_i est fini. Donc

$$A = \bigcup \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$$

est un ensemble dénombrable.

6. Démontrer le théorème 3.2 : Tout ensemble infini X contient un sous-ensemble D qui est dénombrable.

Solution :

Soit $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$ une fonction de choix, c'est-à-dire pour toute partie non vide A de X , $f(A) \in A$. (L'axiome du choix permet d'affirmer l'existence d'une telle fonction.) Considérons la suite

$$\begin{aligned} a_1 &= f(X) \\ a_2 &= f(X \setminus \{a_1\}) \\ a_3 &= f(X \setminus \{a_1, a_2\}) \\ &\dots \\ a_n &= f(X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}) \\ &\dots \end{aligned}$$

L'ensemble X étant infini, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $X \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ est non vide. La fonction f est une fonction de choix, donc pour tout $n > 0$ et tout $i < n$, on a $a_n \neq a_i$. Les éléments $a_n \in X$ sont donc tous distincts et $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ est une partie dénombrable de X .

Essentiellement, la fonction de choix f "choisit" un élément $a_1 \in X$, puis choisit un élément a_2 parmi les éléments de X qui "restent", etc. Puisque X est infini, l'ensemble des éléments "restant" dans X après chaque étape est non vide.

7. Soit X un ensemble quelconque et $C(X)$ l'ensemble des fonctions caractéristiques de X , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : X \rightarrow \{1, 0\}$. Démontrer que l'ensemble des parties de X est équivalent à $C(X)$, i.e. $\mathcal{P}(X) \sim C(X)$.

Solution

Soit A une partie de X , i.e. $A \in \mathcal{P}(X)$. Définissons une application $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow C(X)$ par

$$f(A) = x_A = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Alors f est une bijection et donc $\mathcal{P}(X) \sim C(X)$.

8. Prouver l'assertion suivante : un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est fini ou dénombrable, c'est-à-dire au plus dénombrable.

Solution :

Soit $X = \{a_1, a_2, \dots\}$ un ensemble dénombrable quelconque et A un sous-ensemble de X . Si $A = \emptyset$, A est fini. Si $A \neq \emptyset$, soit n_1 le plus petit entier positif tel que $a_{n_1} \in A$; soit n_2 le plus petit entier positif tel que $n_2 > n_1$ et tel que $a_{n_2} \in A$; etc. Alors $A = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}$. Si l'ensemble des entiers $\{n_1, n_2, \dots\}$ est borné, l'ensemble A est fini. Dans le cas contraire A est dénombrable.

9. Démontrer le théorème 3.3 : Tout sous-ensemble d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.

Solution :

Si X est au plus dénombrable, l'ensemble X est fini ou dénombrable. Dans les deux cas, un sous-ensemble de X est au plus dénombrable.

10. Démontrer le lemme 3.4 : Soit $\{A_1, A_2, \dots\}$ une suite dénombrable d'ensembles dénombrables deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est aussi un ensemble dénombrable.

Solution :

Puisque les ensembles A_i sont dénombrables, on peut écrire :

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$$

.....

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}$$

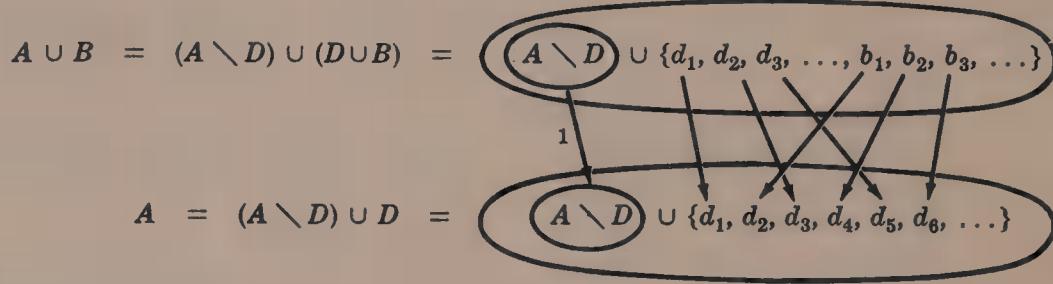
.....

Alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. Il est clair que la fonction $f : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui est définie par $f(a_{ij}) = (i, j)$ est une bijection. Par conséquent $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ est dénombrable puisque $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

11. Soient A un ensemble infini et $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ un ensemble dénombrable. On suppose A et B disjoints. Montrer que $A \cup B \sim A$.

Solution :

Puisque A est infini, A contient un sous-ensemble dénombrable $D = \{d_1, d_2, \dots\}$. Définissons une fonction $f : A \cup B \rightarrow A$ à l'aide du diagramme :



Soit de façon plus explicite

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \setminus D \\ d_{2n-1} & \text{si } x = d_n \\ d_{2n} & \text{si } x = b_n \end{cases}$$

L'application f ainsi construite est une bijection ; par conséquent $A \cup B \sim A$.

PUISANCE DU CONTINU ET CARDINAUX

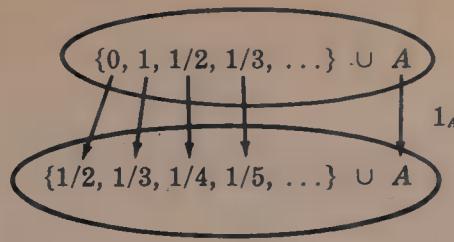
12. Montrer que les intervalles $(0, 1)$, $[0, 1]$ et $(0, 1]$ ont pour cardinal c , i.e. sont des ensembles équivalents à $[0, 1]$.

Solution :

(i) Remarquons que $[0, 1] = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \cup A$, $(0, 1) = \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup A$

$$\text{où } A = [0, 1] \setminus \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} = (0, 1) \setminus \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$$

Considérons l'application $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ définie à l'aide du diagramme suivant



Autrement dit,

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/(n+2) & \text{si } x = 1/n, n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \neq 0, 1/n, n \in \mathbb{N}, \text{ i.e. si } x \in A \end{cases}$$

Il est clair que f est une bijection. Par conséquent $[0, 1] \sim (0, 1)$.

(ii) L'application $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } x = 1/n, n \in \mathbb{N} \\ x & \text{si } x \neq 1/n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est une bijection. (Cette application est analogue à l'application construite dans la partie (i).) Donc $[0, 1] \sim [0, 1]$.

(iii) Définissons une application $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ par l'égalité $f(x) = 1 - x$. Alors f est une bijection. Donc $[0, 1] \sim (0, 1)$ et la transitivité de la relation \sim montre que $[0, 1] \sim (0, 1)$

Autrement dit $(0, 1)$, $[0, 1]$ et $(0, 1]$ ont pour cardinal c ,

13. Démontrer que chacun des intervalles suivants a la puissance du continu, c'est-à-dire a pour cardinal c : $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ et $(a, b]$. Ici $a < b$.

Solution :

Définissons quatre applications (notées ici par la même lettre f) par l'équation $f(x) = a + (b - a)x$

$$[0, 1] \xrightarrow{f} [a, b] \quad [0, 1] \xrightarrow{f} [a, b) \quad (0, 1) \xrightarrow{f} (a, b) \quad (0, 1] \xrightarrow{f} (a, b]$$

Chacune de ces applications est une bijection. Donc en utilisant le problème qui précède et la proposition 3.1, chacun des intervalles considérés est équivalent à $[0, 1]$, c'est-à-dire \blacksquare pour cardinal c .

14. Démontrer le théorème 3.6 : Le segment $A = [0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Solution :

Première méthode. Supposons le contraire ; alors

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

c'est-à-dire les éléments de A peuvent être écrits sous forme d'une suite.

Tout élément de A peut s'écrire sous une forme décimale infinie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ x_3 &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n &= 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

où $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ et où chaque nombre décimal contient un nombre infini d'éléments différents de zéro, c'est-à-dire dans le cas d'un nombre admettant deux développements décimaux, comme par

exemple,

$$1/2 = 0,5000 \dots = 0,4999 \dots$$

nous choisissons d'écrire ce nombre de telle façon que son développement décimal ne contienne qu'un nombre fini de décimales différentes de 9.

Construisons maintenant un nombre réel

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$$

appartenant à A de la façon suivante : on choisit b^1 tel que $b_1 \neq a_{11}$ et $b_1 \neq 0$, puis b_2 tel que $b^2 \neq a_{22}$ et $b_2 \neq 0$, etc.

On observera que $y \neq x_1$ puisque $b_1 \neq a_{11}$, $y \neq x_2$ puisque $b_2 \neq a_{22}$, etc., et finalement que $y \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc le nombre $y \notin A$, ce qui est impossible. Ainsi l'hypothèse faite : A est dénombrable ■ conduit à une contradiction. L'ensemble $A = [0, 1]$ est donc dénombrable.

Deuxième méthode. Supposons le contraire. Alors, comme dans la première méthode.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

Construisons maintenant une suite d'intervalles fermés de la façon suivante. Considérons les trois intervalles suivants inclus dans $A = [0, 1]$,

$$[0, \frac{1}{3}], \quad [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \quad [\frac{2}{3}, 1] \quad (1)$$

ayant chacun une longueur $\frac{1}{3}$. Le nombre x_1 ne peut appartenir à la fois aux trois intervalles. Soit $I_1 = [a_1, b_1]$ l'un des intervalles (1) qui est tel que $x_1 \notin I_1$.

Considérons maintenant les trois intervalles suivants inclus dans $I_1 = [a_1, b_1]$,

$$[a_1, a_1 + \frac{1}{9}], \quad [a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + \frac{2}{9}], \quad [a_1 + \frac{2}{9}, b_1] \quad (2)$$

ayant chacun une longueur $\frac{1}{9}$. Comme précédemment, soit I_2 l'un des intervalles (2) qui est tel que $x_2 \notin I_2$.

En poursuivant de la même façon ces opérations, nous obtenons une suite d'intervalles fermés

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \quad (3)$$

qui sont tels que $x_n \notin I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. A l'aide du théorème des intervalles fermés emboités (voir appendice A) sur la droite réelle, on voit qu'il existe un nombre réel $y \in A = [0, 1]$ tel que y appartienne à tout intervalle de (3). Mais

$$y \in A = \{x_1, x_2, \dots\} \text{ implique } y = x_{m_0} \quad \text{ou} \quad m_0 \in \mathbb{N}$$

Alors par construction $y = x_{m_0} \notin I_{m_0}$ ce qui est en contradiction avec le fait que y appartient à chacun des intervalles (3). Ainsi notre hypothèse consistant à supposer que A est un ensemble dénombrable a conduit à une contradiction. Autrement dit, A est non dénombrable.

15. Démontrer le théorème (Schroeder-Bernstein) 3.8 : Soient $X \supset Y \supset X_1$ et $X \sim X_1$. Alors $X \sim Y$.

Solution :

Puisque $X \sim X_1$, il existe une application $f: X \rightarrow X_1$ qui est une bijection. Or $X \supset Y$; donc la restriction de f à Y que nous noterons aussi f est injective. Ainsi Y est équivalent à une partie de X_1 , i.e. $Y \sim Y_1$ où

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1$$

et $f: Y \rightarrow Y_1$ est une bijection. Mais maintenant $Y \supset X_1$; en suivant le même raisonnement que précédemment, il existe un ensemble X_2 équivalent à X_1 et donc à X tel que

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2$$

et il existe une application $f: X_1 \rightarrow X_2$ qui est une bijection. Par conséquent, il existe une suite d'ensembles X_1, X_2, X_3, \dots tous équivalents et une autre suite d'ensembles Y_1, Y_2, Y_3, \dots tous équivalents, ces deux suites étant telles que :

$$X \supset Y \supset X_1 \supset Y_1 \supset X_2 \supset Y_2 \supset \dots$$

Soit

$$B = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \dots$$

Alors

$$X = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup \dots \cup B$$

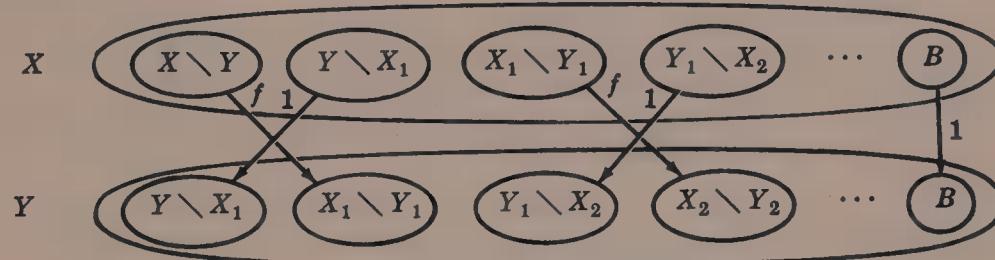
$$Y = (Y \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus Y_1) \cup (Y_1 \setminus X_2) \cup \dots \cup B$$

Notons en outre que

$$(X \setminus Y) \sim (X_1 \setminus Y_1) \sim (X_2 \setminus Y_2) \sim \dots$$

De façon explicite, l'application $f : (X_n \setminus Y_n) \rightarrow (X_{n+1} \setminus Y_{n+1})$ est une bijection.

Considérons alors l'application $g : X \rightarrow Y$ qui est définie à l'aide du diagramme suivant :



en d'autres termes

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_i \setminus Y_i \text{ ou } x \in X \setminus Y \\ x & \text{si } x \in Y_i \setminus X_i \text{ ou } x \in B \end{cases}$$

La fonction g ainsi construite est une bijection donc $X \sim Y$.

16. Démontrer le théorème (Cantor) 3.10 : Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties d'un ensemble arbitraire A est supérieur à celui de A , i.e. pour tout ensemble A , on a $\#(A) < \#(\mathcal{P}(A))$.

Solution :

L'application $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ qui assigne à chaque élément $a \in A$ le singleton $\{a\}$ i.e. $g(a) = \{a\}$ est injective ; donc $A \precsim \mathcal{P}(A)$.

Si nous prouvons que A n'a pas la même puissance que $\mathcal{P}(A)$, le théorème sera démontré. Supposons le contraire, i.e. il existe une application $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ qui est une bijection. Appelons un élément $a \in A$ un "mauvais" élément si a n'appartient pas à l'ensemble qui est son image i.e. si $a \notin f(a)$. Soit B l'ensemble des "mauvais" éléments, i.e., $B = \{x : x \in A, x \notin f(x)\}$

L'ensemble B est une partie de A , donc $B \in \mathcal{P}(A)$. Puisque l'application $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ est surjective, il existe $b \in A$ tel que $f(b) = B$. La question qui se pose est alors : b est-il "mauvais" ou "bon" ? Si $b \in B$, alors par définition de B , $b \notin f(b) = B$ ce qui est une contradiction. De manière analogue, si $b \notin B$, alors $b \in f(b) = B$ ce qui est aussi une contradiction. Donc l'hypothèse de départ : $A \sim \mathcal{P}(A)$ nous conduit à une contradiction. Par conséquent $A \sim \mathcal{P}(A)$ est faux et le théorème est vrai.

ENSEMBLES ET SOUS-ENSEMBLES ORDONNÉS

17. Soit \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs. Tout couple de nombres $a, a' \in \mathbb{N}$ peut s'écrire d'une manière unique sous la forme

$$a = 2^r(2s + 1), \quad a' = 2^{r'}(as' + 1)$$

où $r, r', s, s' \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ordonnons \mathbb{N} comme suit :

$$a < a' \text{ si } r < r' \text{ ou si } r = r' \text{ et } s < s'$$

Insérer le symbole exact, \prec ou \succ , entre chacun des couples de nombres suivants. (Ici $x \prec y$ si $y \succ x$.)

$$(i) 5 \quad 14, \quad (ii) 6 \quad 9, \quad (iii) 3 \quad 20, \quad (iv) 14 \quad 21$$

Solution :

Les éléments de \mathbb{N} peuvent être classés selon le tableau suivant :

$r \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1	3	5	7	9	11	13	15	...
1	2	6	10	14	18	22	26	30	...
2	4	12	20	28	36	44	52	60	...
:	:	:	:	:	:	:	:	:	
:	:	:	:	:	:	:	:	:	
:	:	:	:	:	:	:	:	:	

En utilisant ce tableau, on voit que si deux nombres sont sur des lignes différentes le plus petit est celui qui est sur la ligne supérieure et que si deux nombres sont sur la même ligne celui qui est à gauche est plus petit que celui qui est à droite. Par conséquent :

$$(i) 5 \prec 14, \quad (ii) 6 \succ 9, \quad (iii) 3 \prec 20, \quad (iv) 14 \succ 21$$

18. Soit $A = \{a, b, c\}$ un ensemble ordonné conformément au diagramme ci-contre. Notons \mathcal{A} la famille de tous les sous-ensembles non vides totalement ordonnés de A . Munissons \mathcal{A} de l'ordre induit par la relation d'inclusion entre ensembles. Construire le diagramme correspondant à l'ordre de \mathcal{A} .



Solution :

Les sous-ensembles totalement ordonnés de A sont : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$. Puisque \mathcal{A} est ordonné par la relation d'inclusion entre ensembles, le diagramme cherché est



19. Soit $A = \{2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} - \{1\}$, ordonnons A par la relation "x divise y". (i) déterminer les éléments minimaux de A . (ii) Déterminer les éléments maximaux de A .

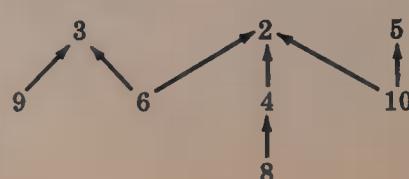
Solution :

- (i) Si $p \in A$ est un nombre premier, le seul diviseur de p est p (car $1 \notin A$) ; donc tous les nombres premiers sont des éléments minimaux. En outre, si $a \in A$ n'est pas premier, il existe $b \in A$ tel que b divise a , i.e. $b \prec a$; et donc a n'est pas minimal. Autrement dit, l'ensemble des éléments minimaux est identique à l'ensemble des nombres premiers.
- (ii) Il n'existe pas d'élément maximal car par exemple, pour tout $a \in A$, a divise $2a$.

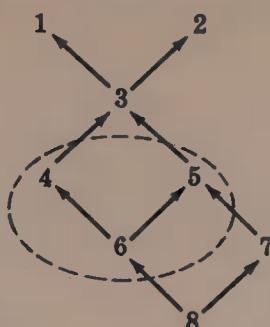
20. Soit $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ muni de la relation d'ordre "x est un multiple de y". (i) Trouver tous les éléments maximaux de B . (ii) Trouver tous les éléments minimaux de B .

Solution

Construisons le diagramme correspondant à l'ordre de B :



- (i) Les éléments maximaux sont 2, 3 et 5. (ii) Les éléments minimaux sont 6, 8, 9 et 10.
21. Soit $W = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$ ordonné comme suit :



Considérons le sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W . (i) Déterminer l'ensemble des majorants de V . (ii) Déterminer l'ensemble des minorants de V . (iii) $\sup(V)$ existe-t-il ? (iv) $\inf(V)$ existe-t-il ?

Solution :

- (i) Chaque élément de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, et seulement ces éléments, majore les éléments de V . Les majorants de V sont donc 1, 2 et 3.
- (ii) Les éléments 6 et 8 sont les seuls minorants de V ; donc $\{6, 8\}$ est l'ensemble des minorants de V .
- (iii) Puisque 3 est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de V , $\sup(V) = 3$. On notera que $3 \notin V$.
- (iv) Puisque 6 est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de V , $\inf(V) = 6$. On notera que $6 \in V$.

22. Soient \mathcal{A} une famille d'ensembles ordonnée par inclusion et \mathcal{B} une sous-famille de \mathcal{A} .
 (i) Montrer que si $A \in \mathcal{A}$ est un majorant de \mathcal{B} , alors $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} \subset A$. (ii) L'ensemble $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ est-il un majorant de \mathcal{B} ?

Solution :

- (i) Si $x \in \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$, alors $\exists B_0 \in \mathcal{B}$ t.q. $x \in B_0$. Or A est un majorant de \mathcal{B} ; donc $B_0 \subset A$ et par conséquent $x \in A$. Ainsi, $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} \subset A$.
- (ii) Bien que \mathcal{B} soit une sous-famille de \mathcal{A} , la réunion des éléments de \mathcal{B} , i.e. $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$, n'appartient pas nécessairement à \mathcal{A} . Autrement dit, $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$ est un majorant de \mathcal{B} , si et seulement si cette réunion appartient à \mathcal{A} .

APPLICATIONS DU LEMME DE ZORN

23. Soit X un ensemble ordonné. Montrer qu'il existe un sous-ensemble totalement ordonné de X qui n'est strictement inclus dans aucun autre sous-ensemble totalement ordonné de X .

Solution :

Soit \mathcal{A} la famille de tous les sous-ensembles totalement ordonnés de X . Ordonnons \mathcal{A} par inclusion. Nous voulons prouver, à l'aide du lemme de Zorn, que \mathcal{A} possède un élément maximal. Supposons que $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ soit une sous-famille totalement ordonnée de \mathcal{A} . Posons $A = \bigcup\{B_i : i \in I\}$.

Observons que $B_i \subset X$ pour tout $B_i \in \mathcal{B}$ implique $A \subset X$.

Montrons maintenant que A est totalement ordonné. Soient $a, b \in A$; alors

$$\exists B_j, B_k \in \mathcal{B} \text{ tels que } a \in B_j, b \in B_k$$

Or \mathcal{B} est totalement ordonné par la relation d'inclusion entre ensembles; donc par exemple $B_j \subset B_k$. par conséquent $a, b \in B_k$. Puisque le sous-ensemble B_k de X est totalement ordonné on a : ou $a \precsim b$ ou $b \precsim a$. Ainsi le sous-ensemble A est totalement ordonné et donc $A \in \mathcal{A}$.

Or $B_i \subset A$ pour tout $B_i \in \mathcal{B}$; et donc A est un majorant de \mathcal{B} . Puisque tout sous-ensemble totalement ordonné de \mathcal{A} possède un majorant, le lemme de Zorn permet de conclure que \mathcal{A} possède un

élément maximal, c'est-à-dire un sous-ensemble totalement ordonné de X qui n'est strictement inclus dans aucun autre sous-ensemble totalement ordonné de X .

24. Soit R une relation de A dans B , i.e. $R \subset A \times B$. Supposons que le domaine de R soit A . Démontrer qu'il existe un sous-ensemble f^* de R tel que f^* définisse une application de A dans B .

Solution :

Soit \mathcal{A} la famille de tous les sous-ensembles de R tels que tout $f \in \mathcal{A}$ définisse une application d'un sous-ensemble de A dans B . Ordonnons \mathcal{A} , par inclusion. Observons que si $f : A_1 \rightarrow B$ est un sous-ensemble de $g : A_2 \rightarrow B$ alors $A_1 \subset A_2$.

Supposons maintenant que $\mathcal{B} = \{f_i : A_i \rightarrow B\}_{i \in I}$ soit un sous-ensemble totalement ordonné de \mathcal{A} . Alors (voir problème 44) $f = \cup_i f_i$ est une application de $\cup_i A_i$ dans B . En outre, $f \subset R$. Par conséquent f est un majorant de \mathcal{B} . Donc d'après le lemme de Zorn, \mathcal{A} possède un élément maximal $f^* : A^* \rightarrow B$. Si nous montrons que $A^* = A$, le théorème sera démontré.

Supposons $A^* \neq A$. Alors $\exists a \in A$ t.q. $a \notin A^*$. Mais par hypothèse le domaine de R est A ; donc il existe un couple $(a, b) \in R$. Alors $f^* \cup \{(a, b)\}$ est une application de $A^* \cup \{a\}$ dans B , ce qui contredit le fait que f^* est un élément maximal de \mathcal{A} . Donc $A^* = A$, et le théorème est prouvé.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ENSEMBLES EQUIPOTENTS, CARDINAUX

25. Montrer que tout ensemble infini est equipotent à un sous-ensemble propre de lui-même.
26. Montrer que si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.
27. Montrer que l'ensemble des points du plan \mathbb{R}^2 ayant des coordonnées rationnelles est dénombrable.
28. Un nombre réel x est dit *transcendant* s'il n'est pas algébrique, c'est-à-dire x n'est solution d'aucune équation polynomiale

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m = 0$$

à coefficients entiers (cf. problème 5). Les nombres π et e sont des exemples de nombres transcendants.

- (i) Montrer que l'ensemble T des nombres transcendants n'est pas dénombrable.
(ii) Montrer que T a la puissance du continu, c'est-à-dire ■ pour cardinal c .

29. On définit la multiplication des cardinaux de la façon suivante :

$$\#(A) \#(B) = \#(A \times B)$$

- (i) Montrer que cette opération est bien définie, c'est-à-dire

$$\#(A) = \#(A') \text{ et } \#(B) = \#(B') \text{ implique } \#(A) \#(B) = \#(A') \#(B')$$

ou, ce qui est équivalent $A \sim A'$ et $B \sim B'$ implique $(A \times B) \sim (A' \times B')$

- (ii) Vérifier que : (a) $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$, (b) $\aleph_0 c = c$, (c) $c c = c$.

30. On définit l'addition des cardinaux de la façon suivante :

$$\#(A) + \#(B) = \#(A \times \{1\} \cup B \times \{2\})$$

- (i) Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors $\#(A) + \#(B) = \#(A \cup B)$.
(ii) Montrer que cette opération est bien définie, c'est-à-dire

$$\#(A) = \#(A') \text{ et } \#(B) = \#(B') \text{ implique } \#(A) + \#(B) = \#(A') + \#(B')$$

31. On définit l'exponentiation des cardinaux de la façon suivante :

$$\#(A)^{\#(B)} = \#(\{f : f : B \rightarrow A\})$$

- (i) Montrer que si $\#(A) = m$ et $\#(B) = n$ sont des cardinaux finis, alors

$$\#(A)^{\#(B)} = m^n$$

c'est-à-dire dans le cas de cardinaux finis, l'exponentiation correspond à l'élévation usuelle d'un nombre entier positif à une certaine puissance.

- (ii) Montrer que cette opération est bien définie, c'est-à-dire,

$$\#(A) = \#(A') \text{ et } \#(B) = \#(B') \text{ implique } \#(A)^{\#(B)} = \#(A')^{\#(B')}$$

- (iii) Démontrer que pour tout ensemble A , on a $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}$.

32. Considérons la relation d'équivalence \sim définie dans \mathbb{R} par : $x \sim y$ ssi $x - y$ est rationnel. Déterminer le cardinal de l'ensemble quotient \mathbb{R}/\sim .

33. Montrer que le cardinal de l'ensemble des applications de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} est 2^c .

34. Montrer que les deux formes du théorème de Schroeder-Bernstein 3.8 sont équivalentes :

- (i) Si $A \precsim B$ et $B \precsim A$, alors $A \sim B$.
(ii) Si $X \supset Y \supset X_1$ et $X \sim X_1$, alors $X \sim Y$.

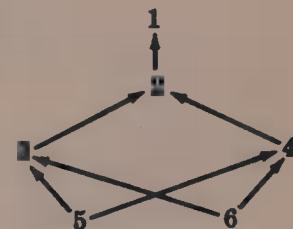
35. Démontrer le théorème 3.9 : Etant deux ensembles quelconques A et B , alors, ou $A \prec B$ ou $A \sim B$ ou $B \prec A$. (Indication : utiliser le lemme de Zorn.)

ENSEMBLES ET SOUS-ENSEMBLES ORDONNÉS

36. Soient $A = (\mathbb{N}, \leqslant)$ l'ensemble des entiers positifs muni de l'ordre naturel et $B = (\mathbb{N}, \geqslant)$ l'ensemble des entiers positifs muni de l'ordre inverse. Notons $A \times B$ l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique correspondant aux ordres définis respectivement sur A et B . Insérer le symbole exact, \prec ou \succ , entre chacun des couples de nombres suivants de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

- (i) $\langle 3, 8 \rangle ___ \langle 1, 1 \rangle$, (ii) $\langle 2, 1 \rangle ___ \langle 2, 8 \rangle$, (iii) $\langle 3, 3 \rangle ___ \langle 3, 1 \rangle$, (iv) $\langle 4, 9 \rangle ___ \langle 7, 15 \rangle$.

37. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ordonnons X à l'aide du diagramme ci-contre. Considérons le sous-ensemble $A = \{2, 3, 4\}$ de X . (i) Trouver les éléments maximaux de X . (ii) Trouver les éléments minimaux de X . (iii) Déterminer si X possède un plus petit élément. (iv) Déterminer si X possède un plus grand élément. (v) Trouver l'ensemble des majorants de A . (vi) Trouver l'ensemble des minorants de A . (vii) $\text{Sup}(A)$ existe-t-il ? (viii) $\text{Inf}(A)$ existe-t-il ?



38. Considérons l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} , muni de l'ordre naturel, et le sous-ensemble $A = \{x : x \in \mathbb{Q}, x^3 < 3\}$ de \mathbb{Q} . (i) L'ensemble A est-il borné supérieurement ? (ii) Inférieurement ? (iii) $\text{Sup}(A)$ existe-t-il ? (iv) $\text{Inf}(A)$ existe-t-il ?

39. Soient \mathbb{N} , l'ensemble des entiers positifs, muni de l'ordre "x divise y" et $A \subset \mathbb{N}$. (i) $\text{Inf}(A)$ existe-t-il ? (ii) $\text{Sup}(A)$ existe-t-il ?

40. Montrer que tout ensemble ordonné fini, possède un élément maximal.

41. Construire un ensemble ordonné possédant exactement un élément maximal mais ne possédant pas de plus grand élément.

42. Montrer que si R est un ordre sur A , alors R^{-1} est aussi un ordre sur A .

LEMME DE ZORN

43. Considérons la “démonstration” de l’assertion suivante : Il existe une partie finie de l’ensemble des entiers positifs \mathbb{N} qui n’est strictement incluse dans aucune autre partie finie de \mathbb{N} .

Démonstration. Soit \mathcal{A} la famille de tous les sous-ensembles finis de \mathbb{N} . Ordonnons \mathcal{A} par inclusion. Soit maintenant $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ une sous-famille de \mathcal{A} qui est totalement ordonné. Posons $A = \bigcup_i B_i$. Pour tout $i \in I$, on a $B_i \subset A$; par conséquent A est un majorant de \mathcal{B} .

Puisque tout sous-ensemble de \mathcal{A} qui est totalement ordonné possède un majorant, le lemme de Zorn permet d’affirmer que \mathcal{A} possède un élément maximal, c’est-à-dire une partie finie de \mathbb{N} qui n’est strictement incluse dans aucune autre partie finie de \mathbb{N} .

Question : L’assertion de départ étant trivialement fausse, déterminer le point où la démonstration qui précéde est fausse.

44. Démontrer la proposition suivante que l’on a utilisée pour résoudre le problème 24 : Soit $\{f_i : A_i \rightarrow B\}$ une famille d’applications qui est totalement ordonnée par inclusion. Alors $\bigcup_i f_i$ définit une application de $\bigcup_i A_i$ dans B .

45. Prouver que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) (Axiome du choix.) Le produit $\prod \{A_i : i \in I\}$ d’une famille non vide d’ensembles non vides est non vide.
- (ii) Soit \mathcal{A} une famille non vide de sous-ensembles disjoints non vides, alors il existe un sous-ensemble $B \subset \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ tel que l’intersection de B et de chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ soit formée d’exactement un élément.

46. Montrer que si tout sous-ensemble totalement ordonné d’un ensemble ordonné X possède un minorant, alors X possède un élément minimal.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

32. c

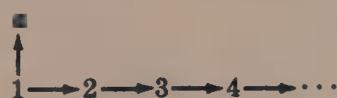
36. (i) \succeq , (ii) \succeq , (iii) \prec , (iv) \succeq

37. (i) $\{1\}$; (ii) $\{5, 6\}$; (iii) Non ; (iv) Oui, 1 ; (v) $\{1, 2\}$; (vi) $\{5, 6\}$; (vii) Oui, 2 ; (viii) Non.

38. (i) Oui, (ii) Non, (iii) Non, (iv) Non.

39. (i) $\text{Inf}(A)$ existe ssi $A \neq \emptyset$. (ii) $\text{Sup}(A)$ existe ssi A est fini.

- 41.



Ici a est maximal mais n'est pas un plus grand élément.

CHAPITRE 4

Topologie de la droite et du plan

LA DROITE NUMERIQUE REELLE

L'ensemble des *nombres réels* noté \mathbb{R} joue un rôle très important en mathématiques, particulièrement en analyse. D'ailleurs, plusieurs notions de topologie générale ont été obtenues à partir des propriétés des nombres réels. L'ensemble \mathbb{R} peut être caractérisé par le fait que cet ensemble est un *corps ordonné archimédien complet*. Ces notions sont rappelées dans l'appendice. Ici nous utiliserons la relation d'ordre pour définir la "topologie usuelle" de \mathbb{R} .

Nous admettrons que la représentation géométrique de \mathbb{R} au moyen des points de la droite est familière au lecteur. Comme dans la figure 4.1, on choisit un point appelé origine pour représenter 0 puis un autre point situé en général à la droite du premier pour représenter 1. Il existe alors une correspondance naturelle entre les points de la droite et les nombres, c'est-à-dire que chaque point représente un nombre réel unique et que chaque nombre réel est représenté par un point unique. Pour cette raison nous parlerons de la droite comme de la *droite numérique réelle* ou de l'*axe réel*. De plus nous utiliserons les mots point et nombre de façon interchangeable.

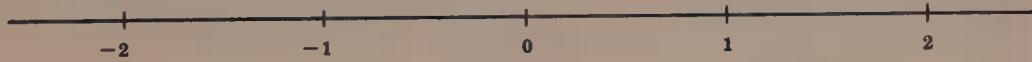


Fig. 4-1

ENSEMBLES OUVERTS DE \mathbb{R}

Soit A un ensemble de nombres réels. Un point $p \in A$ est un *point intérieur* de A ssi p appartient à un intervalle ouvert S_p contenu dans A :

$$p \in S_p \subset A$$

L'ensemble A est un *ouvert* (ou \mathcal{U} ouvert) si chacun de ses points est un point intérieur. (La signification de \mathcal{U} dans l'expression \mathcal{U} ouvert apparaîtra au chapitre suivant.)

Exemple 1.1 : Un intervalle ouvert $A = (a, b)$ est un(ensemble) ouvert, puisqu'on peut choisir $S_p = A$ pour chaque $p \in A$.

Exemple 1.2 : La droite réelle \mathbb{R} elle-même est ouverte puisque tout intervalle ouvert S_p est un sous-ensemble de \mathbb{R} , c'est-à-dire $p \in S_p \subset \mathbb{R}$.

Remarquons qu'un ensemble n'est pas ouvert ssi il existe un point de l'ensemble qui n'est pas un point intérieur.

Exemple 1.3 : l'ensemble fermé $B = [a, b]$ n'est pas un (ensemble) ouvert puisque tout intervalle contenant a ou b contient des points extérieurs à B . Ainsi les extrémités a et b ne sont pas des points intérieurs à B .

Exemple 1.4 : L'ensemble \emptyset est un ouvert puisqu'il n'y a aucun point de \emptyset qui ne soit pas un point intérieur.

Exemple 1.5 : Les intervalles infinis ouverts, c'est-à-dire les sous-ensembles de \mathbf{R} définis et notés par

$$\begin{aligned}\{x : x \in \mathbf{R}, x > a\} &= (a, \infty), & \{x : x \in \mathbf{R}, x < a\} &= (-\infty, a), \\ \{x : x \in \mathbf{R}\} &= \mathbf{R} = (-\infty, \infty)\end{aligned}$$

sont des intervalles ouverts. Par contre, les intervalles infinis fermés, c'est-à-dire les sous-ensembles de \mathbf{R} définis et notés par

$$\{x : x \in \mathbf{R}, x \geq a\} = [a, \infty), \quad \{x : x \in \mathbf{R}, x \leq a\} = (-\infty, a]$$

ne sont pas des (ensembles) ouverts puisque $a \in \mathbf{R}$ n'est ni un point intérieur de $[a, \infty)$ ni de $(-\infty, a]$.

Nous allons énoncer deux théorèmes fondamentaux au sujet des ensembles ouverts.

Théorème 4.1 : La réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts de \mathbf{R} est un ouvert.

Théorème 4.2 : L'intersection de toute famille finie d'ouverts est un ouvert.

L'exemple suivant montre qu'on ne peut pas se débarrasser de la condition de finitude du dernier théorème.

Exemple 1.6 : Considérons la famille des intervalles ouverts (et donc d'ouverts)

$$\{A_n = (-1/n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \text{i.e. } \{(-1, 1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots\}$$

Remarquons que l'intersection

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

des intervalles ouverts de la famille est constituée par le seul point 0 qui n'est pas un ouvert. En d'autres termes, une intersection quelconque d'ensembles ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

POINTS D'ACCUMULATION

Soit A un sous-ensemble de \mathbf{R} , c'est-à-dire un ensemble de nombres réels. Un point $p \in \mathbf{R}$ est un *point d'accumulation* ou un *point limite* de A ssi tout ouvert G contenant p contient un point de A distinct de p ; c'est-à-dire

$$G \text{ ouvert, } p \in G \text{ implique } A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulation de A noté A' est appelé l'*ensemble dérivé* de A .

Exemple 2.1 : Soit $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$. Le point 0 est un point d'accumulation de A puisque tout ensemble ouvert G tel que $0 \in G$ contient un intervalle ouvert $(-a_1, a_2) \subset G$ avec $-a_1 < 0 < a_2$ contenant des points de A .



Notons que le point limite 0 n'appartient pas à A . Notons également que A ne contient pas d'autre point limite; ainsi l'ensemble dérivé de A est le singleton $\{0\}$; c'est-à-dire que $A' = \{0\}$.

Exemple 2.2 : Considérons l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels. Tout nombre réel $p \in \mathbf{R}$ est un point limite de \mathbf{Q} puisque tout intervalle contient des nombres rationnels, c'est-à-dire des points de \mathbf{Q} .

Exemple 2.3 : L'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ n'a pas de point d'accumulation. En d'autres termes l'ensemble dérivé de \mathbf{Z} est l'ensemble vide \emptyset .

Remarque : Le lecteur ne doit pas confondre la notion de "point limite d'un ensemble" avec la notion différente bien que voisine de "limite d'une suite". Quelques-uns des problèmes résolus ainsi que des problèmes supplémentaires feront apparaître le rapport existant entre ces deux notions.

THEOREME DE BOLZANO-WEIERSTRASS

L'existence ou non de points d'accumulation pour différents ensembles est une question importante de topologie générale. Tous les ensembles, même infinis comme dans l'exemple 2.3, n'ont pas de point limite. Il existe cependant un cas général important où la question de savoir si l'ensemble a ou non un point d'accumulation admet une réponse positive.

Théorème (Bolzano-Weierstrass) 4.3 : soit A un ensemble infini borné de nombres réels, alors A admet au moins un point d'accumulation.

ENSEMBLES FERMES

Un sous-ensemble A de \mathbb{R} , c'est-à-dire un ensemble de nombres réels, est un (*ensemble*) fermé ssi son complémentaire A^c est un ouvert. Un (*ensemble*) fermé peut être également décrit en partant de la notion de point d'accumulation.

Théorème 4.4 : Un sous-ensemble de \mathbb{R} est fermé ssi A contient chacun de ses points d'accumulation.

Exemple 3.1 : L'intervalle fermé $[a, b]$ est fermé puisque son complémentaire $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, est ouvert comme réunion de deux intervalles infinis ouverts.

Exemple 3.2 : L'ensemble $A = \{1, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ n'est pas fermé puisque, comme on l'a vu dans l'exemple 2.1, 0 est un point limite de A qui n'appartient pas à A .

Exemple 3.3 : L'ensemble vide \emptyset et la droite \mathbb{R} tout entière sont des fermés puisque leur complémentaire, respectivement \mathbb{R} et \emptyset , sont des ouverts.

Des ensembles peuvent être ni ouverts ni fermés comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

Exemple 3.4 : Considérons l'intervalle semi-ouvert $A = (a, b]$. Notons que A n'est pas ouvert puisque $b \in A$ n'est pas un point intérieur à A et qu'il n'est pas fermé puisque $a \notin A$ mais est un point limite de A .

THEOREME DE HEINE-BOREL

L'une des propriétés les plus importantes d'un intervalle fermé borné est donnée dans le théorème suivant. On dit qu'une famille d'ensembles $\mathcal{A} = \{A_i\}$ est un recouvrement d'un ensemble A ou *recouvre* A si A est contenu dans la réunion des ensembles de la famille \mathcal{A} ; i.e. $A \subset \bigcup_i A_i$.

Théorème (de Heine-Borel) 4.5 : Soit $A = [c, d]$ un intervalle fermé borné et soit $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ une famille d'intervalles ouverts recouvrant A , i.e. $A \subset \bigcup_i G_i$, alors \mathcal{G} contient une sous famille finie $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$ qui recouvre également A , c'est-à-dire

$$A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

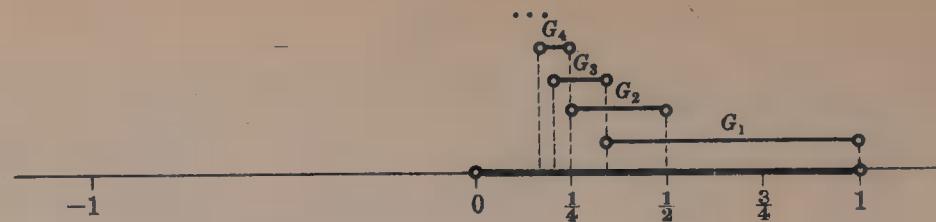
Les deux conditions d'être fermé et borné doivent être vérifiées par A pour que le théorème soit vrai. Nous allons le montrer dans les deux exemples suivants.

Exemple 4.1 : Considérons l'intervalle ouvert $A = (0, 1)$. Remarquons que la famille

$$\mathcal{G} = \left\{ G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

d'intervalles ouverts recouvre A ,

$$A \subset (\frac{1}{3}, 1) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{5}, \frac{1}{3}) \cup \dots$$

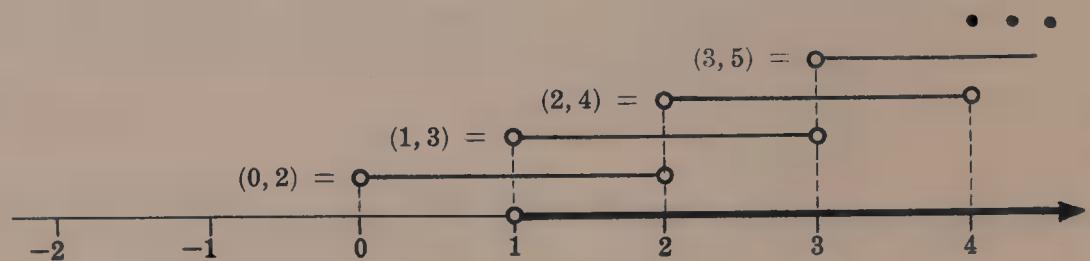


Mais il n'y a pas de sous-famille finie de G dont la réunion contienne A .

Exemple 4.2 : Considérons l'ensemble infini fermé $A = [1, \infty)$. La famille

$$G = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), \dots\}$$

d'intervalles ouverts recouvre A , mais ce n'est le cas d'aucune sous-famille finie.



SUITES

On appelle *suite*, notée

$$\langle s_1, s_2, \dots \rangle, \quad \langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle \text{ ou } \langle s_n \rangle$$

une application dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, i.e. une suite associe un point s_n à chaque entier positif $n \in \mathbb{N}$. L'image s_n ou $s(n)$ de $n \in \mathbb{N}$ est appelée le n -ième *terme* de la suite.

Exemple 5.1 : Les suites

$$\langle s_n \rangle = \langle 1, 3, 5, \dots \rangle, \quad \langle t_n \rangle = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rangle, \quad \langle u_n \rangle = \langle 1, 0, 1, 0, \dots \rangle$$

peuvent être respectivement définies par les formules

$$s(n) = 2n - 1, \quad t(n) = (-1)^n / 2^n, \quad u(n) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Une suite $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ est dite bornée si son image $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble borné.

Exemple 5.2 : Considérons les trois suites de l'exemple 5.1. L'image de $\langle s_n \rangle$ est $\{1, 3, 5, \dots\}$; ainsi $\langle s_n \rangle$ n'est pas une suite bornée. L'image de $\langle t_n \rangle$ est $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\}$ qui est borné; ainsi $\langle t_n \rangle$ est une suite bornée. L'image de $\langle u_n \rangle$ est l'ensemble fini $\{0, 1\}$ ainsi $\langle u_n \rangle$ est aussi une suite bornée.

Remarquons que $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ désigne une suite et est une application. D'autre part $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ désigne l'image de la suite et est un ensemble.

SUITES CONVERGENTES

La définition usuelle d'une suite convergente est énoncée de la façon suivante :

DEFINITION: La suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de nombres réels converge vers $b \in \mathbb{R}$, ou de façon équivalente, le nombre réel b est la limite de la suite $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ ce qui se note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow b$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier positif n_0 tel que

$$n > n_0 \text{ implique } |a_n - b| < \epsilon$$

Remarquons que $|a_n - b| < \epsilon$ signifie que $b - \epsilon < a_n < b + \epsilon$ ou, de façon équivalente, que a_n appartient à l'intervalle ouvert $(b - \epsilon, b + \epsilon)$ contenant b . De plus, puisque chaque terme au-delà du n_0 -ième se trouve à l'intérieur de l'intervalle $(b - \epsilon, b + \epsilon)$, seuls les termes précédant a_{n_0} , lesquels sont en nombre fini, peuvent se trouver en dehors de l'intervalle $(b - \epsilon, b + \epsilon)$. Ainsi on peut ré-enoncer la définition précédente de la manière suivante.

DEFINITION: La suite $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ converge vers b si tout intervalle ouvert contenant b contient *presque tous* les termes de la suite, c'est-à-dire tous sauf un nombre fini.

Exemple 6.1 : Une suite constante $\langle a_0, a_0, a_0, \dots \rangle$ telle que $\langle 1, 1, 1, \dots \rangle$ ou $\langle -3, -3, -3, \dots \rangle$ converge vers a_0 puisque chaque ouvert contenant a_0 contient tous les termes de la suite.

Exemple 6.2 : Chacune des suites

$$\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle, \quad \langle 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots \rangle, \quad \langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \rangle$$

converge vers 0 puisque tout intervalle contenant 0 contient presque tous les termes de chacune de ces suites.

Exemple 6.3 : Considérons la suite $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \dots \rangle$, i.e. la suite

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n+2)/2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 - \frac{1}{2^{(n+1)/2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Les points de cette suite sont représentés ci-dessous :



Remarquons que tout intervalle ouvert contenant 0 ou 1 contient une infinité de termes de la suite. Cependant ni 0 ni 1 ne sont limites de la suite. Remarquons cependant que 0 et 1 sont des points d'accumulation de l'*image* de la suite, c'est-à-dire de l'ensemble $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots\}$.

SOUS-SUITES

Considérons une suite $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ si $\langle i_n \rangle$ est une suite d'entiers positifs tels que $i_1 < i_2 < \dots$, alors

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots \rangle$$

est appelée une *sous-suite* de $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Exemple 7.1 : Considérons la suite $\langle a_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$. Notons que $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rangle$ est un sous-suite de $\langle a_n \rangle$ mais que $\langle \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots \rangle$ n'en est pas une puisque 1 apparaît avant $\frac{1}{2}$ dans la suite initiale.

Exemple 7.2 : Bien que la suite $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots \rangle$ de l'exemple 6.3 ne converge pas, elle possède des sous-suites convergentes telles que $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rangle$ et $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots \rangle$. Par contre, la suite $\langle 1, 3, 5, \dots \rangle$ ne possède pas de sous-suite convergente.

Comme on le voit dans l'exemple précédent, une suite peut présenter ou non des sous-suites convergentes. Il existe cependant un cas très important où cette question est tranchée de manière positive.

Théorème 4.6 : Toute suite bornée de nombres réels contient une sous-suite convergente.

SUITES DE CAUCHY

Une suite $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ de nombres réels est une *suite de Cauchy* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier positif n_0 tel que

$$n, m > n_0 \text{ implique } |a_n - a_m| < \epsilon$$

En d'autres termes, une suite est une suite de Cauchy ssi les termes de la suite se trouvent à une distance arbitrairement petite les uns des autres quand n devient grand.

Exemple 8.1 : Soit $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ une suite de Cauchy d'entiers relatifs, c'est-à-dire une suite où chaque terme appartient à $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Alors la suite doit être de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle$$

la suite est constante au-delà du n_0 -ième pour un certain n_0 . En effet si on choisit $\epsilon = \frac{1}{2}$
 $a_n, a_m \in \mathbb{Z}$ et $|a_n - a_m| < \frac{1}{2}$ implique $a_n = a_m$

Exemple 8.2 : Nous allons démontrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy. Soit $a_n \rightarrow b$ et soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que

$$n > n_0 \text{ implique } |a_n - b| < \frac{1}{2}\epsilon \quad \text{et} \quad m > n_0 \text{ implique } |a_m - b| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Par conséquent $n, m > n_0$ implique

$$|a_n - a_m| = |a_n - b + b - a_m| \leq |a_n - b| + |b - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Ainsi $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

CARACTERE COMPLET

Un ensemble A de nombres réels est dit *complet* si toute suite de Cauchy $\langle a_n \in A : n \in \mathbb{N} \rangle$ de points de A converge vers un point de A .

Exemple 9.1 : L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ des entiers relatifs est complet. En effet, comme on l'a vu dans l'exemple 8.1, une suite de Cauchy des points de \mathbb{Z} est de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle$$

laquelle converge vers le point $b \in \mathbb{Z}$.

Exemple 9.2 : L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels n'est pas complet. En effet on peut choisir une suite de nombres rationnels, tels que $\langle 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,412 ; \dots \rangle$ qui converge vers le nombre réel $\sqrt{2}$ lequel n'est pas rationnel, i.e. n'appartient pas à \mathbb{Q} .

Une propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} tout entier est que \mathbb{R} est complet. A savoir.

Théorème (de Cauchy) 4.7 : Toute suite de Cauchy de nombres réels converge vers un nombre réel.

FONCTIONS CONTINUES

La définition usuelle avec ϵ et δ d'une fonction continue est énoncée ci-dessous comme suit :

DEFINITION: Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue* en un point x_0 si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

La fonction f est une *fonction continue* si elle est continue en tout point.

Observons que $|x - x_0| < \delta$ signifie que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ou, de façon équivalente, que x appartient à l'intervalle ouvert $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. De manière analogue, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ signifie que $f(x)$ appartient à l'intervalle ouvert $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. Ainsi l'assertion

$$|x - x_0| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

est équivalente à l'assertion

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ implique } f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

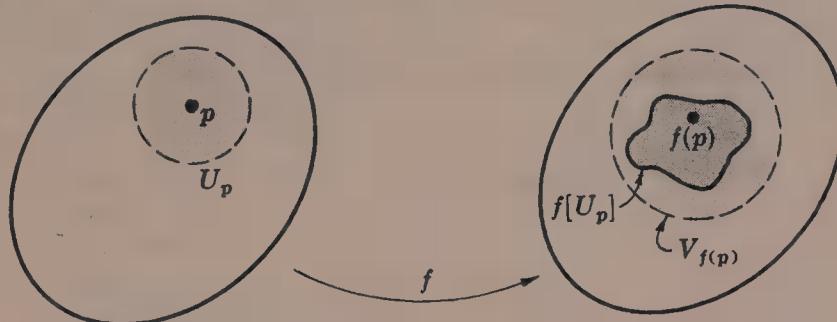
laquelle est équivalente à l'assertion

$$f[(x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \text{ est contenu dans } (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$$

Ainsi on peut ré-enoncer la définition précédente de la manière suivante.

DEFINITION : Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en un point $p \in \mathbb{R}$ si pour tout ensemble ouvert $V_{f(p)}$ contenant $f(p)$ il existe un ensemble ouvert U_p contenant p tel que $f[U_p] \subset V_{f(p)}$. La fonction f est une fonction continue si elle est continue en tout point.

Le diagramme de Venn ci-dessous peut aider à visualiser cette définition.



Une fonction continue peut être complètement caractérisée en termes d'ouverts de la façon suivante :

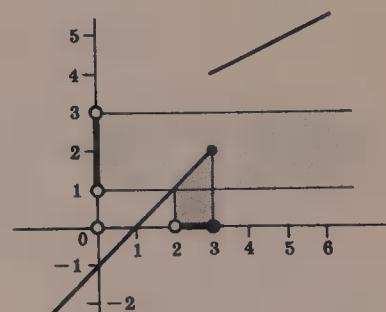
Théorème 4.8 : Une fonction est continuessi l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Remarquons que le théorème 4.8 indique également qu'une fonction n'est pas continuessi il existe un ensemble ouvert dont l'image réciproque n'est pas un ouvert.

Exemple 10.1 : Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

et représentée sur le schéma ci-contre. Notons que l'image réciproque de l'intervalle ouvert $(1, 3)$ est l'intervalle semi-ouvert $(2, 3]$ qui n'est pas un ensemble ouvert. Ainsi la fonction f n'est pas continue.



Nous allons à présent démontrer une propriété importante des fonctions continues à laquelle nous allons nous reporter ultérieurement dans cet ouvrage.

Théorème 4.9 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors la fonction prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

En d'autres termes, si y_0 est un nombre réel pour lequel $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$, alors

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x_0 \leq b \text{ et que } f(x_0) = y_0$$

On appelle ce théorème le *théorème de la valeur intermédiaire de Weierstrass*.

Remarque : Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite continue sur un sous-ensemble D de \mathbb{R} si elle est continue en chaque point de D .

TOPOLOGIE DU PLAN

On appelle *disque ouvert* D du plan \mathbb{R}^2 l'ensemble des points situés à l'intérieur d'un cercle, par exemple de centre $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ et de rayon $\delta > 0$, c'est-à-dire

$$D = \{(x, y) : (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \delta^2\} = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p, q) < \delta\}$$

Ici $d(p, q)$ désigne la distance ordinaire des deux points $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $q = \langle b_1, b_2 \rangle$ de \mathbb{R}^2 :

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Le disque ouvert joue un rôle dans la topologie du plan \mathbb{R}^2 analogue à celui que joue l'intervalle ouvert dans la topologie de la droite \mathbb{R} .

Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Un point $p \in A$ est un *point intérieur* de A ssi p appartient à un disque ouvert D_p contenu dans A :

$$p \in D_p \subset A$$

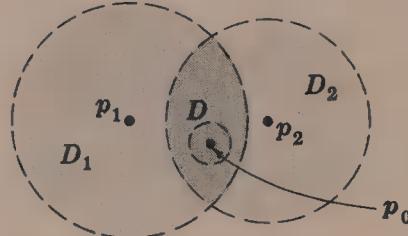
L'ensemble A est *ouvert* (ou *U ouvert*) ssi chacun de ses points est un point intérieur.

Exemple 11.1 : Il est clair qu'un disque ouvert, le plan \mathbb{R}^2 tout entier et l'ensemble vide \emptyset sont des sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^2 . Nous allons montrer à présent que l'intersection de deux disques ouverts quelconques, par exemple

$$D_1 = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_1, q) < \delta_1\} \quad \text{et} \quad D_2 = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_2, q) < \delta_2\}$$

est également un ouvert. En effet soit $p_0 \in D_1 \cap D_2$ ainsi

$$d(p_1, p_0) < \delta_1 \quad \text{et} \quad d(p_2, p_0) < \delta_2$$



$$\text{Posons } r = \min \{\delta_1 - d(p_1, p_0), \delta_2 - d(p_2, p_0)\} > 0$$

$$\text{et soit } D = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p_0, q) < \frac{1}{2}r\}$$

Alors $p_0 \in D \subset D_1 \cap D_2$, c'est-à-dire que p_0 est un point intérieur de $D_1 \cap D_2$.

Un point $p \in \mathbb{R}^2$ est un *point d'accumulation* ou un *point limite* d'un sous-ensemble A de \mathbb{R}^2 ssi tout ouvert G contenant p contient un point de A différent de p , c'est-à-dire,

$$G \subset \mathbb{R}^2 \text{ ouvert, } p \in G \text{ implique } A \cap (G \setminus \{p\}) \neq \emptyset$$

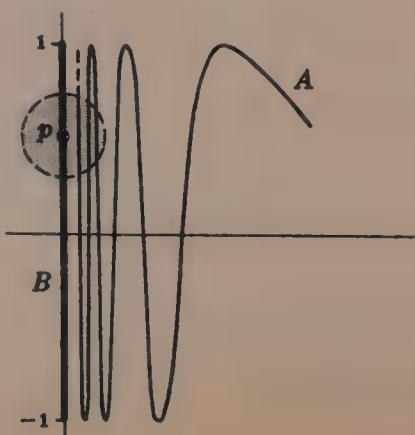
Exemple 11.2 : Considérons le sous-ensemble suivant de \mathbb{R}^2

$$A = \left\{ \langle x, y \rangle : y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\}$$

L'ensemble A est représenté sur le schéma ci-contre. Remarquons que, en allant de droite à gauche, la courbe oscille de plus en plus, c'est-à-dire que les points où la courbe coupe l'axe Ox sont de plus en plus serrés. Le point $p = \langle 0, 1/2 \rangle$ est un point limite de A puisque A coupe tout disque ouvert contenant p (ce qu'on peut voir en précisant le tracé de la courbe suffisamment). En fait, tout point de l'axe Oy situé entre -1 et 1 , c'est-à-dire tout point de l'ensemble

$$B = \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

est un point limite de A .



Un sous-ensemble A de \mathbb{R}^2 est fermé ssi son complémentaire A^c est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Une suite $\langle p_1, p_2, \dots \rangle$ de points de \mathbb{R}^2 converge vers le point $q \in \mathbb{R}^2$ ssi tout ouvert contenant q contient presque tous les termes ou points de la suite. La convergence dans le plan \mathbb{R}^2 peut être caractérisée en termes de convergence dans \mathbb{R} comme suit.

Proposition 4.10 : Considérons la suite $\langle p_1 = \langle a_1, b_1 \rangle, p_2 = \langle a_2, b_2 \rangle, \dots \rangle$ de points de \mathbb{R}^2 et le point $q = \langle a, b \rangle \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$p_n \rightarrow q \text{ si et seulement si } a_n \rightarrow a \text{ et } b_n \rightarrow b$$

Une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue en un point $p \in \mathbb{R}^2$ ssi pour tout ouvert $V_{f(p)}$ contenant $f(p)$ il existe un ouvert U_p contenant p tel que $f[U_p] \subset V_{f(p)}$.

Nous allons énoncer un certain nombre de théorèmes relatifs au plan \mathbb{R}^2 analogues aux théorèmes relatifs à la droite \mathbb{R} énoncés antérieurement dans ce même chapitre.

Théorème 4.1* : La réunion d'un nombre quelconque d'ensembles ouverts de \mathbb{R}^2 est un ouvert.

Théorème 4.2* : L'intersection de tout nombre fini d'ouverts de \mathbb{R}^2 est un ouvert.

Théorème 4.4* : Un sous-ensemble A de \mathbb{R}^2 est fermé si et seulement si A contient chacun de ses points d'accumulation.

Théorème 4.8* : Une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

PROBLEMES RESOLUS

ENSEMBLES OUVERTS, POINTS D'ACCUMULATION

1. Trouver les points d'accumulation de chacun des ensembles de nombres réels suivants :

- (i) \mathbb{N} ; (ii) $(a, b]$; (iii) \mathbb{Q}^c , ensemble des points irrationnels.

Solution :

- (i) \mathbb{N} , l'ensemble des entiers positifs, n'a pas de point d'accumulation. Car si a est un nombre réel quelconque, on peut trouver un $\delta > 0$ assez petit pour que l'intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$ ne contienne aucun point de \mathbb{N} distinct de a .
- (ii) Tout point p de l'intervalle fermé $[a, b]$ est un point limite de l'intervalle semi-ouvert $(a, b]$ puisque tout intervalle ouvert contenant $p \in [a, b]$ contient des points de $(a, b]$ autres que p .
- (iii) Tout nombre réel $p \in \mathbb{R}$ est un point limite de \mathbb{Q}^c puisque tout intervalle ouvert contenant $p \in \mathbb{R}$ contient des points de \mathbb{Q}^c , c'est-à-dire des nombres irrationnels autres que p .

2. On rappelle que A' désigne l'ensemble dérivé, c'est-à-dire l'ensemble des points limites de l'ensemble A . Trouver des ensembles A tels que (i) A et A' soient disjoints, (ii) A soit un sous-ensemble propre de A' , (iii) A' soit un sous-ensemble propre de A , (iv) $A = A'$.

Solution :

- (i) L'ensemble $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ a 0 comme seul point d'accumulation. Ainsi $A' = \{0\}$ et A et A' sont disjoints.
- (ii) Soit $A = (a, b]$, un intervalle semi-ouvert. Comme on l'a vu au problème précédent $A' = [a, b]$, l'intervalle fermé, et ainsi $A \subset A'$.
- (iii) Soit $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\}$. Alors 0 qui appartient à A est le seul point limite de A . Ainsi $A' = \{0\}$ et $A' \subset A$.
- (iv) Soit $A = [a, b]$ un intervalle fermé. Alors chaque point de A est un point limite de A et ce sont les seuls points limite. Alors $A = A' = [a, b]$.

3. Démontrer le théorème 4.1* : La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts de \mathbf{R}^2 est un ouvert.

Solution :

Soit \mathcal{A} une famille d'ouverts de \mathbf{R}^2 , soit $H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$, et soit $p \in H$. Le théorème est démontré si on arrive à montrer que p est un point intérieur à H , c'est-à-dire à démontrer qu'il existe un disque ouvert D_p contenant p tel que D_p soit contenu dans H .

$$\text{Puisque } p \in H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}, \\ \exists G_0 \in \mathcal{A} \text{ tel que } p \in G_0$$

Or G_0 est un ouvert, donc il existe un disque ouvert D_p contenant p tel que

$$p \in D_p \subset G_0$$

Puisque G_0 est un sous-ensemble de $H = \bigcup\{G : G \in \mathcal{A}\}$, D_p est également un sous-ensemble de H . Ainsi H est un ouvert.

4. Démontrer que tout ensemble ouvert G du plan \mathbf{R}^2 est réunion de disques ouverts.

Solution :

Puisque G est ouvert, pour chaque point $p \in G$ il existe un disque ouvert D_p tel que $p \in D_p \subset G$. Alors $G = \bigcup\{D_p : p \in G\}$.

5. Démontrer le théorème 4.2* : L'intersection de toute famille finie d'ouverts de \mathbf{R}^2 est un ouvert.

Solution :

Nous allons démontrer le théorème dans le cas de deux ouverts de \mathbf{R}^2 . Le théorème s'ensuit alors par récurrence.

Soient G et H deux ouverts de \mathbf{R}^2 et soit $p \in G \cap H$; alors $p \in G$ et $p \in H$. Ainsi il existe des disques ouverts D_1 et D_2 tels que

$$p \in D_1 \subset G \quad \text{et} \quad p \in D_2 \subset H$$

Alors $p \in D_1 \cap D_2 \subset G \cap H$. D'après l'exemple 11.1, l'intersection de deux disques ouverts quelconques est un ouvert ; ainsi il existe un disque ouvert D tel que

$$p \in D \subset D_1 \cap D_2 \subset G \cap H$$

Ainsi p est un point intérieur de $G \cap H$ et donc $G \cap H$ est un ouvert.

6. Démontrer que si $p \in G$ est un ouvert de \mathbf{R}^2 , alors il existe un disque ouvert D de centre p tel que $p \in D \subset G$.

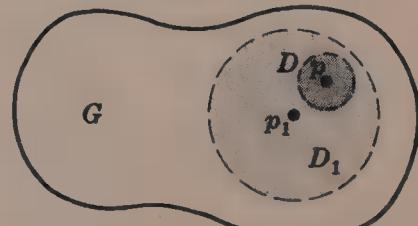
Solution :

D'après la définition d'un point intérieur, il existe un disque ouvert $D_1 = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p_1, q) < \delta\}$, de centre p_1 et rayon δ , tel que $p \in D_1 \subset G$. Ainsi $d(p_1, p) < \delta$. Posons

$$r = \delta - d(p_1, p) > 0$$

$$\text{et soit } D = \{q \in \mathbf{R}^2 : d(p, q) < \frac{1}{2}r\}$$

Alors comme il est indiqué sur le schéma, $p \in D \subset D_1 \subset G$ où D est un disque ouvert de centre p .



7. Démontrer que si p est un point d'accumulation d'un sous-ensemble A du plan \mathbf{R}^2 , alors tout ouvert contenant p contient une infinité de points de A .

Solution :

Supposons que G soit un ouvert contenant p qui ne contienne qu'un nombre fini de points de A différents de p , par exemple a_1, \dots, a_m . D'après le problème précédent, il existe un disque ouvert D_p de centre p et par exemple de rayon δ tel que $p \in D_p \subset G$. Choisissons $r > 0$ inférieur à δ et inférieur à la distance de p à l'un quelconque des points a_1, \dots, a_m ; et soit

$$D = \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p, q) < \frac{1}{2}r\}$$

Alors le disque ouvert D qui contient p ne contient pas a_1, \dots, a_m et, puisque $D \subset D_p \subset G$, il ne contient pas d'autre point de A distinct de p .

La dernière assertion contredit le fait que p est un point d'accumulation de A . Ainsi tout ouvert contenant p contient une infinité de points de A .

Remarque : La même chose est vraie de la droite réelle \mathbb{R} , c'est-à-dire que si $a \in \mathbb{R}$ est un point limite de $A \subset \mathbb{R}$ alors tout ouvert de \mathbb{R} contenant a contient une infinité de points de A .

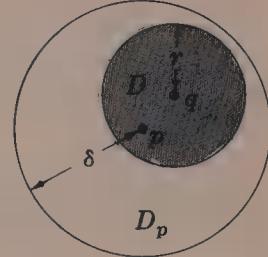
8. Considérons un disque ouvert quelconque D_p de centre $p \in \mathbb{R}^2$ et de rayon δ . Démontrer qu'il existe alors un disque ouvert D tel que (i) le centre de D ait ses coordonnées rationnelles, (ii) le rayon de D soit rationnel, et (iii) $p \in D \subset D_p$.

Solution :

Supposons que $p = (a, b)$. Alors il existe des nombres rationnels c et d tels que

$$a < c < a + \frac{1}{6}\delta \quad \text{et} \quad b < d < b + \frac{1}{6}\delta$$

Soit $q = (c, d)$. Notons que $d(p, q) < 1/3 \delta$. A présent choisissons un nombre rationnel r tel que $1/3 \delta < r < 2/3 \delta$; et soit D le disque ouvert de centre q , de coordonnées rationnelles et dont le rayon r est rationnel. Alors comme il est indiqué sur le schéma $p \in D \subset D_p$.



9. Démontrer que tout ouvert G du plan \mathbb{R}^2 est la réunion d'une famille dénombrable de disques ouverts.

Solution :

Puisque G est ouvert, pour chaque point $p \in G$ il existe un disque ouvert D_p de centre p tel que $p \in D_p \subset G$. Mais, d'après le problème précédent, pour chaque disque D_p il existe un disque ouvert E_p tel que (i) le centre de E_p ait des coordonnées rationnelles, (ii) le rayon de E_p soit rationnel, et (iii) $p \in E_p \subset D_p$. Ainsi

$$p \in E_p \subset D_p \subset G$$

Par conséquent

$$G = \bigcup \{E_p : p \in G\}$$

Le théorème s'ensuit à présent du fait qu'il n'existe qu'un ensemble dénombrable de disques ouverts de centre à coordonnées rationnelles et de rayon rationnel.

10. Démontrer le théorème (de Bolzano-Weierstrass) 4.3 : Soit A un ensemble infini borné de nombres réels. Alors A admet au moins un point d'accumulation.

Solution :

Puisque A est borné, A est un sous-ensemble d'un intervalle fermé $I_1 = [a_1, b_1]$. Divisons l'intervalle I_1 en deux en $1/2(a_1 + b_1)$. Notons que les deux sous-intervalles fermés de I_1 ,

$$[a_1, \frac{1}{2}(a_1 + b_1)] \quad \text{et} \quad [\frac{1}{2}(a_1 + b_1), b_1] \quad (1)$$

ne peuvent pas chacun ne contenir qu'un nombre fini de points de A puisque A est infini. Soit $I_2 = [a_2, b_2]$ l'un des deux intervalles de (1) qui contient un nombre infini de points de A .

A présent divisons en deux I_2 . Comme précédemment, l'un des deux sous-intervalles fermés

$$[a_2, \frac{1}{2}(a_2 + b_2)] \quad \text{et} \quad [\frac{1}{2}(a_2 + b_2), b_2]$$

doit contenir une infinité de points de A . Appelons I_3 cet intervalle.

Poursuivant ce processus on obtient une suite d'intervalles fermés emboîtés

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$$

telle que chaque intervalle I_n contienne une infinité de points de A et que

$$\lim |I_n| = 0$$

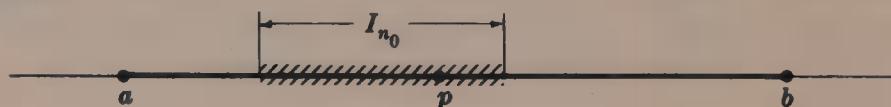
où $|I_n|$ désigne la longueur de l'intervalle I_n .

D'après la propriété des intervalles emboîtés de nombres réels (voir l'appendice A), il existe un point p commun à chaque intervalle I_n . Nous allons montrer que p est un point limite de A et alors le théorème s'ensuivra.

Soit $S_p = (a, b)$ un intervalle ouvert contenant p . Puisque $\lim |I_n| = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |I_{n_0}| < \min(p - a, b - p)$$

Alors l'intervalle I_{n_0} est un sous-ensemble de l'intervalle ouvert $S_p = (a, b)$ comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous.



Puisque I_{n_0} contient une infinité de points de A , il en est de même de l'intervalle ouvert S_p . Ainsi chaque intervalle ouvert contenant p contient des points de A autres que p , c'est-à-dire que p est un point limite de A .

ENSEMBLES FERMÉS

11. Démontrer qu'un ensemble F est ferméssi son complémentaire F^c est un ouvert.

Solution :

Notons que $(F^c)^c = F$; ainsi F est le complémentaire de F^c . Ainsi par définition F est ferméssi F^c est ouvert.

12. Démontrer que la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Solution :

Soient F_1, \dots, F_m des ensembles fermés et soit $F = F_1 \cup \dots \cup F_m$. D'après la loi de DeMorgan,

$$F^c = (F_1 \cup \dots \cup F_m)^c = F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_m^c$$

Ainsi F^c est l'intersection d'un nombre fini d'ouverts F_i^c et ainsi F^c est également un ouvert. Ainsi son complémentaire $F^{cc} = F$ est fermé.

13. Démontrer que l'intersection de toute famille de fermés est un fermé.

Solution :

Soit $\{F_i\}$ une famille de fermés et soit $F = \bigcap_i F_i$. D'après la loi de DeMorgan,

$$F^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup_i F_i^c$$

Ainsi F^c est la réunion d'ensembles ouverts et est donc un ouvert. En conséquence $F^{cc} = F$ est fermé.

14. Démontrer le théorème 4.4* : Un sous-ensemble de \mathbf{R}^2 est ferméssi il contient chacun de ses points d'accumulation.

Solution :

Supposons que p soit un point limite d'un ensemble fermé F . Alors tout disque ouvert contenant p contient des points de F autres que p . Ainsi il ne peut exister de disque ouvert D_p contenant p qui soit complètement contenu dans le complémentaire de F . En d'autres termes p n'est pas un point intérieur de F^c . Mais F^c est ouvert puisque F est fermé ; ainsi p n'appartient pas à F^c , c'est-à-dire $p \in F$.

Réciproquement, supposons qu'un ensemble A contienne chacun de ses points limite. Nous affirmons que A est fermé, ou de façon équivalente, que son complémentaire A^c est ouvert. Soit $p \in A^c$. Puisque A contient chacun de ses points limite, p n'est pas un point limite de A . Ainsi il existe au moins un disque ouvert D_p contenant p tel que D_p ne contienne aucun point de A . Ainsi $D_p \subset A^c$, et donc p est un point intérieur de A^c . Puisque chaque point $p \in A^c$ est un point intérieur, A^c est ouvert et donc A est fermé.

15. Démontrer que l'ensemble dérivé A' , c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation, d'un sous-ensemble arbitraire A de \mathbf{R}^2 est fermé.

Solution :

Soit p un point limite de A' . D'après le théorème 4.4*, le théorème est démontré si on montre que $p \in A'$, c'est-à-dire que p est aussi un point limite de A .

Soit G_p un ouvert contenant p . Puisque p est un point limite de A' , G_p contient au moins un point $q \in A'$ différent de p . Mais G_p est un ouvert contenant $q \in A'$; ainsi G_p contient des points de A (une infinité). Ainsi,

$$\exists a \in A \text{ tel que } a \neq p, a \neq q, \text{ et } a \in G_p$$

C'est-à-dire que chaque ensemble ouvert contenant p contient des points de A autres que p ; ainsi $p \in A'$.

16. Démontrer que si A est un ensemble fermé borné de nombres réels et si $\sup(A) = p$, alors $p \in A$.

Solution :

Supposons que $p \notin A$. Soit G un ouvert contenant p . Alors G contient un intervalle ouvert (b, c) contenant p , c'est-à-dire tel que $b < p < c$. Puisque $\sup(A) = p$ et que $p \notin A$,

$$\exists a \in A \text{ tel que } b < a < p < c$$

car sinon b serait un majorant de A . Ainsi $a \in (b, c) \subset G$. Ainsi chaque ouvert contenant p contient un point de A différent de p ; ainsi p est un point limite de A . Mais A est fermé ; ainsi d'après le théorème 4.4, $p \in A$.

17. Démontrer le théorème (de Heire-Borel) 4.5 :

Supposons que $I_1 = [c_1, d_1]$ soit recouvert par une famille $G = \{(a_i, b_i) : i \in I\}$ d'intervalles ouverts. Alors G contient une sous-famille finie d'intervalles qui recouvre également I_1 .

Solution :

Admettons qu'il n'y ait aucune sous-famille finie de G qui recouvre I_1 . Nous allons diviser en deux $I_1 = [c_1, d_1]$ en $\frac{1}{2}(c_1 + d_1)$ et considérer les deux intervalles fermés

$$[c_1, \frac{1}{2}(c_1 + d_1)] \quad \text{et} \quad [\frac{1}{2}(c_1 + d_1), d_1] \quad (1)$$

L'un au moins de ces deux intervalles ne peut être recouvert par une sous-famille finie de G , sinon l'intervalle I_1 tout entier pourrait être recouvert par une sous-famille finie de G . Soit $I_2 = [c_2, d_2]$ l'un des deux intervalles de (1) qui ne peut être recouvert par une sous-famille finie de G . On divise alors I_2 en deux. Comme précédemment un des deux intervalles fermés

$$[c_2, \frac{1}{2}(c_2 + d_2)] \quad \text{et} \quad [\frac{1}{2}(c_2 + d_2), d_2]$$

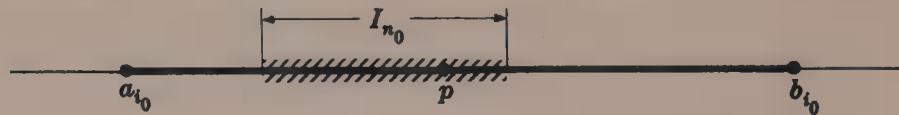
ne peut être recouvert par une sous-famille finie extraite de G . Appelons cet intervalle I_3

On poursuit ce processus et on obtient une suite d'intervalles fermés emboités $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ telle que chacun des intervalles I_n ne puisse être recouvert par une sous-famille finie extraite de G et telle que $\lim |I_n| = 0$ où $|I_n|$ désigne la longueur de l'intervalle I_n .

D'après la propriété des intervalles emboîtés des nombres réels (voir l'appendice) il existe un point p commun à tous les intervalles I_n . En particulier $p \in I_1$. Puisque \mathcal{G} est un recouvrement de I_1 , il existe un intervalle ouvert (a_{i_0}, b_{i_0}) dans \mathcal{G} qui contient p . Ainsi $a_{i_0} < p < b_{i_0}$. Puisque $\lim |I_n| = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |I_{n_0}| < \min(p - a_{i_0}, b_{i_0} - p)$$

Alors comme il est indiqué sur le schéma ci-dessous, l'intervalle I_{n_0} est un sous-ensemble de l'intervalle (a_{i_0}, b_{i_0}) de \mathcal{G} .



Mais ceci contredit le choix qui a été fait de I_{n_0} . Ainsi notre hypothèse de départ qu'aucune sous-famille finie de \mathcal{G} ne peut recouvrir I_1 est fausse et le théorème est démontré.

SUITES

18. Ecrire les six premiers termes de chacune des suites suivantes :

$$(i) \quad s(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n^2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (ii) \quad t(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 2 & \text{si } n=2 \\ t(n-1) + t(n-2) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Solution :

- (i) On a utilisé deux formules pour définir cette fonction. On reporte 1, 3 et 5 dans $s(n) = n-1$ pour obtenir $s_1 = 0$, $s_3 = 2$ et $s_5 = 4$. On reporte ensuite 2, 4 et 6 dans $s(n) = n^2$ pour obtenir $s_2 = 4$, $s_4 = 16$ et $s_6 = 36$. Ainsi nous avons $\langle 0, 4, 2, 16, 4, 36, \dots \rangle$.
- (ii) Cette fois-ci la fonction est définie par récurrence. Chaque terme au-delà du deuxième est obtenu en additionnant les deux termes précédents. Ainsi :

$$\begin{array}{ll} t_1 = 1 & t_4 = t_3 + t_2 = 3 + 2 = 5 \\ t_2 = 2 & t_5 = t_4 + t_3 = 5 + 3 = 8 \\ t_3 = t_2 + t_1 = 2 + 1 = 3 & t_6 = t_5 + t_4 = 8 + 5 = 13 \end{array}$$

Ainsi nous obtenons $\langle 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \rangle$.

19. Considérons la suite $\langle a_n = (-1)^{n-1}(2n-1) \rangle$:

$$\langle 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, \dots \rangle$$

Etablir si chacune des suites suivantes est ou non une sous-suite de $\langle a_n \rangle$.

- (i) $\langle b_n \rangle = \langle 1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \dots \rangle$
(ii) $\langle c_n \rangle = \langle 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rangle$
(iii) $\langle d_n \rangle = \langle -3, -7, -11, -15, -19, -23, \dots \rangle$

Solution :

- (i) Notons que 5 apparaît avant -3 dans $\langle b_n \rangle$ tandis que -3 apparaît avant 5 dans $\langle a_n \rangle$. Ainsi $\langle b_n \rangle$ n'est pas une sous-suite de $\langle a_n \rangle$.
- (ii) Les termes 3, 7 et 11 n'apparaissent même pas dans $\langle a_n \rangle$; ainsi $\langle c_n \rangle$ n'est pas une sous-suite de $\langle a_n \rangle$.
- (iii) La suite $\langle d_n \rangle$ est une sous-suite de $\langle a_n \rangle$ car $\langle i_n = 2n \rangle = \langle 2, 4, 6, \dots \rangle$ est une suite d'entiers positifs tels que $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$; ainsi $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$

$$\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle = \langle a_2, a_4, a_6, \dots \rangle = \langle -3, -7, -11, \dots \rangle$$

est une sous-suite de $\langle a_n \rangle$.

20. Déterminer l'image de chacune des suites

- (i) $\langle 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{5}, \dots \rangle$
(ii) $\langle 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \rangle$

(iii) $\langle 2, 4, 6, 8, 10, \dots \rangle$ **Solution :**

L'image d'une suite est l'ensemble des points images. Ainsi les images des suites sont

$$(i) \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}, \quad (ii) \{1, 0, -1\}, \quad (iii) \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

21. Démontrer que si l'image d'une suite $\langle a_n \rangle$ est finie, alors la suite possède une sous-suite convergente.**Solution :**

Si l'image $\{a_n\}$ de $\langle a_n \rangle$ est finie, alors l'un des points images, b par exemple apparaît une infinité de fois dans la suite. Ainsi $\langle b, b, b, b, \dots \rangle$ est une sous-suite de $\langle a_n \rangle$ qui converge.

22. Démontrer que si $\lim a_n = b$ et si $\lim a_n = c$, alors $b = c$.**Solution :**

Supposons que b et c soient distincts. Soit $\delta = |b - c| > 0$. Alors les intervalles ouverts $B = (b - \frac{1}{2}\delta, b + \frac{1}{2}\delta)$ et $C = (c - \frac{1}{2}\delta, c + \frac{1}{2}\delta)$ qui contiennent respectivement b et c sont disjoints. Puisque $\langle a_n \rangle$ converge vers b , B doit contenir tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Ainsi C ne peut contenir qu'un nombre fini de termes de la suite. Mais ceci contredit le fait que $\langle a_n \rangle$ converge vers c . Par conséquent b et c ne peuvent être distincts.

23. Démontrer que si l'image $\{a_n\}$ d'une suite $\langle a_n \rangle$ contient un point d'accumulation b , alors la suite $\langle a_n \rangle$ contient une sous-suite $\langle a_{i_n} \rangle$ qui converge vers b .**Solution :**

Puisque b est un point limite de $\{a_n\}$, chacun des intervalles ouverts

$$S_1 = (b - 1, b + 1), \quad S_2 = (b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}), \quad S_3 = (b - \frac{1}{3}, b + \frac{1}{3}), \quad \dots$$

contient une infinité d'éléments de $\{a_n\}$ et donc une infinité de termes de la suite $\langle a_n \rangle$. Définissons la suite $\langle a_{i_n} \rangle$ de la manière suivante :

Choisissons pour a_{i_1} un point de S_1 .

Choisissons pour a_{i_2} un point de S_2 tels que $i_2 > i_1$, i.e. tel que a_{i_2} apparaisse après a_{i_1} dans la suite $\langle a_n \rangle$.

Choisissons pour a_{i_3} un point de S_3 tel que $i_3 > i_2$.

Poursuivons de manière analogue.

Remarquons qu'on ■ toujours la possibilité de définir le terme suivant de la suite $\langle a_{i_n} \rangle$ puisqu'il y ■ une infinité de termes de la suite initiale $\langle a_n \rangle$ dans chacun des intervalles S_n .

Nous affirmons que $\langle a_{i_n} \rangle$ vérifie les conditions du théorème. Rappelons qu'on ■ choisi les termes de la suite $\langle a_{i_n} \rangle$ de telle sorte que $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$; ainsi $\langle a_{i_n} \rangle$ est une sous-suite de $\langle a_n \rangle$. Nous devons montrer que $\lim a_{i_n} = b$. Soit G un ouvert contenant b . Alors G contient un intervalle ouvert (d_1, d_2) contenant b ; ainsi $d_1 < b < d_2$. Soit $\delta = \min(b - d_1, d_2 - b) > 0$; alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1/n_0 < \delta$$

Ainsi $S_{n_0} \subset (d_1, d_2) \subset G$ et donc

$$n > n_0 \text{ implique } a_{i_n} \in S_n \subset S_{n_0} \subset (d_1, d_2) \subset G$$

Ainsi G contient presque tous les termes de la suite $\langle a_{i_n} \rangle$; c'est-à-dire, $\lim a_{i_n} = b$.

24. Démontrer le théorème 4.6 : Toute suite bornée de nombres réels contient une sous-suite convergente.

Solution :

Considérons l'image $\{a_n\}$ de la suite $\langle a_n \rangle$. Si l'image est finie, alors d'après le problème 21 la suite contient une sous-suite convergente. D'autre part, si l'image est infinie, alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, l'ensemble infini borné $\{a_n\}$ a un point d'accumulation. Mais alors, d'après le problème précédent, dans ce cas-là aussi la suite contient une sous-suite convergente.

25. Démontrer que toute suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ de nombres réels est bornée.

Solution :

Posons $\epsilon = 1$. Alors, d'après la définition d'une suite de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, m \geq n_0 \text{ implique } |a_n - a_m| < 1$$

En particulier, $m \geq n_0$ implique $|a_{n_0} - a_m| < 1$ soit $a_{n_0} - 1 < a_m < a_{n_0} + 1$

Soit

$$\alpha = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a_{n_0} + 1)$$

$$\beta = \min(a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a_{n_0} - 1)$$

Alors α est un majorant de l'ensemble image $\{a_n\}$ de la suite $\langle a_n \rangle$ et β en est un minorant. Par conséquent $\langle a_n \rangle$ est une suite bornée.

26. Soit $\langle a_n \rangle$ une suite de Cauchy. Si une sous-suite $\langle a_{i_n} \rangle$ de $\langle a_n \rangle$ converge vers un point b , alors la suite de Cauchy elle-même converge vers b .

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Nous devons trouver un entier positif n_0 tel que

$$n > n_0 \text{ implique } |a_n - b| < \epsilon$$

Puisque $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, m > n_0 \text{ implique } |a_n - a_m| < \frac{1}{2}\epsilon$$

De plus, comme la sous-suite $\langle a_{i_n} \rangle$ converge vers b ,

$$\exists i_m \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a_{i_m} - b| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Remarquons qu'on peut choisir i_m tel que $i_m > n_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} n > n_0 \text{ implique } |a_n - b| &= |a_n - a_{i_m} + a_{i_m} - b| \\ &\leq |a_n - a_{i_m}| + |a_{i_m} - b| \\ &< \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon \end{aligned}$$

Ainsi $\langle a_n \rangle$ converge vers b .

Remarquons que nous devons avoir $i_m > n_0$ pour pouvoir affirmer que $n > n_0$ implique $|a_n - a_{i_m}| < \frac{1}{2}\epsilon$.

27. Démontrer le théorème de Cauchy 4.7 : Toute suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ de nombres réels converge vers un nombre réel.

Solution :

D'après le problème 25, la suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ est bornée. Ainsi, d'après le théorème 4.6, la suite bornée $\langle a_n \rangle$ contient une sous-suite convergente $\langle a_{i_n} \rangle$. Mais, d'après le problème précédent, la suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ converge vers la même limite que sa sous-suite $\langle a_{i_n} \rangle$. En d'autres termes, la suite de Cauchy converge vers un nombre réel.

28. Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants de \mathbb{R} est complet ou non :

(i) \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs, (ii) \mathbb{Q}^c l'ensemble des nombres irrationnels.

Solution :

- (i) Soit $\langle a_n \rangle$ une suite de Cauchy d'entiers positifs. Si $\epsilon = \frac{1}{2}$, alors

$$|a_n - a_m| < \epsilon = \frac{1}{2} \text{ implique } a_n = a_m$$

Donc la suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ est de la forme $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle$ qui converge vers l'entier positif b . Ainsi \mathbb{N} est complet.

- (ii) Remarquons que chacun des intervalles ouverts

$$(-1, 1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \dots$$

contient des points irrationnels. Ainsi il existe une suite $\langle a_n \rangle$ de nombres irrationnels tels que $\langle a_n \rangle$ appartienne à l'intervalle ouvert $(-1/n, 1/n)$. La suite $\langle a_n \rangle$ est alors une suite de Cauchy de points de \mathbb{Q}^c et converge vers le nombre rationnel 0. Ainsi \mathbb{Q}^c n'est pas complet.

CONTINUITÉ

29. Démontrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante, par exemple si $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors f est continue.

Solution :

Méthode 1. La fonction f est continue ssi l'image reciproque $f^{-1}[G]$ de tout ouvert G est également un ouvert. Du fait que $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}[G] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \notin G \\ \mathbb{R} & \text{si } a \in G \end{cases}$$

pour tout ouvert G . Dans l'un ou l'autre cas, $f^{-1}[G]$ est un ouvert puisque \mathbb{R} et \emptyset sont des ensembles ouverts.

Méthode 2. Nous allons montrer que f est continue en tout point x_0 en utilisant la définition de la continuité par les ϵ et δ . Soit $\epsilon > 0$. Alors pour tout $\delta > 0$, par exemple $\delta = 1$,

$$|x - x_0| < 1 \text{ implique } |f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

ainsi f est continue.

30. Démontrer que la fonction identique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire la fonction définie par $f(x) = x$, est continue.

Solution :

Méthode 1. Soit G un ouvert quelconque. Alors $f^{-1}[G] = G$ est également un ouvert. Ainsi f est continue.

Méthode 2. Nous allons montrer que f est continue en tout point x_0 en utilisant la définition de la continuité par ϵ et δ . Soit $\epsilon > 0$. Alors choisissant $\epsilon = \delta$,

$$|x - x_0| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$$

Ainsi, f est continue.

31. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est également continue.

Solution :

Nous allons montrer que l'image réciproque $(g \circ f)^{-1}[G]$ de tout ouvert G est également un ouvert. Puisque g est continue, l'image réciproque $g^{-1}[G]$ est un ouvert. Mais puisque f est continue, l'image réciproque $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ de $g^{-1}[G]$ est aussi un ouvert. Rappelons que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

D'où

$$(g \circ f)^{-1}[G] = (f^{-1} \circ g^{-1})[G] = f^{-1}[g^{-1}[G]]$$

est un ouvert. Ainsi la fonction composée $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

32. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(q) = 0$ pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 0$ pour tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$.

Solution :

Supposons que $f(p)$ soit non nulle pour un certain réel $p \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, supposons que

$$\exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(p) = \gamma, |\gamma| > 0$$

Choisissons $\epsilon = \frac{1}{2}|\gamma|$. Puisque f est continue,

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } |x - p| < \delta \text{ implique } |f(x) - f(p)| < \epsilon = \frac{1}{2}|\gamma|$$

A présent il y a des points rationnels dans tout intervalle ouvert. En particulier,

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q \in \{x : |x - p| < \delta\}$$

ce qui implique que $|f(q) - f(p)| = |f(p)| = |\gamma| < \epsilon = \frac{1}{2}|\gamma|$

ce qui est impossible. Ainsi $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

33. Démontrer le théorème 4.8 : Une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

Solution :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue et soit V un ouvert de \mathbb{R}^2 . Nous voulons montrer que $f^{-1}[V]$ est également un ensemble ouvert. Soit $p \in f^{-1}[V]$. Alors $f(p) \in V$. D'après la définition de la continuité, il existe un ensemble ouvert U_p contenant p tel que $f[U_p] \subset V$. Ainsi (comme il est indiqué sur le schéma ci-après)

$$U_p \subset f^{-1}[f[U_p]] \subset f^{-1}[V]$$

Nous avons montré que pour tout point $p \in f^{-1}[V]$, il existe un ouvert U_p tel que

$$p \in U_p \subset f^{-1}[V]$$

Ainsi

$$f^{-1}[V] = \bigcup \{U_p : p \in f^{-1}[V]\}$$

Donc $f^{-1}[V]$ est réunion d'ouverts et est donc un ouvert.



Réiproquement, supposons que l'image réciproque de tout ouvert soit un ouvert. Nous voulons montrer que f est continue en tout point $p \in \mathbb{R}$. Soit V un ouvert contenant $f(p)$, i.e. $f(p) \in V$. Alors $f^{-1}[V]$ est un ouvert contenant p ayant la propriété que $f[f^{-1}[V]] \subset V$. Ainsi f est continue en p .

34. Donner un exemple de deux fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f et g soient chacune discontinue (non continue) en tout point et telles que leur somme $f + g$ soit continue en tout point de \mathbb{R} .

Solution :

Considérons les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 1 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont discontinues en tout point de \mathbb{R} , mais leur somme $f + g$ est la fonction constante $(f + g)(x) = 1$, laquelle est continue.

35. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue au point $p \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

- (i) si $f(p)$ est positive i.e. si $f(p) > 0$, alors il existe un intervalle ouvert S contenant p tel que f soit positive en tout point de S .
- (ii) Si $f(p)$ est négative, i.e. si $f(p) < 0$, alors il existe un intervalle ouvert S contenant p tel que f soit négative en tout point de S .

Solution :

Nous allons démontrer (i). La démonstration de (ii) est semblable et nous ne la donnerons donc pas. Supposons que $f(p) = \epsilon > 0$. Puisque f est continue en p ,

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad |x - p| < \delta \quad \text{implique} \quad |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

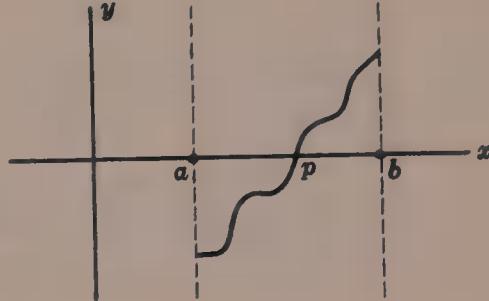
ou, de façon équivalente,

$$x \in (p - \delta, p + \delta) \quad \text{implique} \quad f(x) \in (f(p) - \epsilon, f(p) + \epsilon) = (0, 2\epsilon)$$

Ainsi pour tout point x de l'intervalle $(p - \delta, p + \delta)$, $f(x)$ est positive.

36.

Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point d'un intervalle fermé $[a, b]$ et si $f(a) < 0 < f(b)$, alors il existe un point $p \in [a, b]$ tel que $f(p) = 0$. (En d'autres termes, le graphe d'une fonction continue définie sur un intervalle fermé dont une partie se trouve au-dessous et une autre au-dessus de l'axe Ox doit couper cet axe en au moins un point, ainsi qu'il est montré sur le schéma).



Solution :

Soit A l'ensemble des points de $[a, b]$ où la fonction f est négative, c'est-à-dire

$$A = \{x : x \in [a, b], f(x) < 0\}$$

Remarquons que A est non vide puisque par exemple $a \in A$. Soit $p = \sup(A)$ la borne supérieure de A . Puisque $a \in A$, $a \leq p$; et, puisque b est un majorant de A , $p \leq b$. Ainsi p appartient à l'intervalle $[a, b]$.

Nous affirmons que $f(p) = 0$. Si $f(p) < 0$, alors, d'après le problème précédent, il existe un intervalle ouvert $(p - \delta, p + \delta)$ dans lequel f est négative, c'est-à-dire

$$(p - \delta, p + \delta) \subset A$$

Ainsi p ne peut être un majorant de A . D'autre part si $f(p) > 0$, alors il existe un intervalle $(p - \delta, p + \delta)$ dans lequel f est positive ; ainsi

$$(p - \delta, p + \delta) \cap A = \emptyset$$

ce qui implique que p ne peut être la borne supérieure de A . Ainsi $f(p)$ est nécessairement nul, c'est-à-dire $f(p) = 0$.

Remarque. Le théorème est également vrai et on le démontre de manière analogue dans le cas $f(b) < 0 < f(a)$.

37.

Démontrer le théorème (de Weierstrass) 4.9 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Alors la fonction prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Solution :

Supposons $f(a) < f(b)$ et soit y_0 un nombre réel tel que $f(a) < y_0 < f(b)$. Nous voulons démontrer qu'il existe un point p tel que $f(p) = y_0$. Considérons la fonction $g(x) = f(x) - y_0$ qui est également continue. Remarquons que $g(a) < 0 < g(b)$.

D'après le théorème précédent, il existe un point p tel que $g(p) = f(p) - y_0 = 0$. Ainsi $f(p) = y_0$.

Dans le cas où $f(b) < f(a)$ la démonstration est analogue.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ENSEMBLES OUVERTS, ENSEMBLES FERMÉS, POINTS D'ACCUMULATION

38. Démontrer que si A est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} , alors l'ensemble dérivé A' de A est vide, c'est-à-dire $A' = \emptyset$.
39. Démontrer que tout sous-ensemble fini de \mathbb{R} est fermé.
40. Démontrer que si $A \subset B$ alors $A' \subset B'$.
41. Démontrer qu'un sous-ensemble B de \mathbb{R}^2 est fermé si et seulement si $d(p, B) = 0$ implique $p \in B$, où $d(p, B) = \inf \{d(p, q) : q \in B\}$.
42. Démontrer que $A \cup A'$ est fermé pour tout ensemble A .
43. Démontrer que $A \cup A'$ est le plus petit ensemble fermé contenant A , c'est-à-dire que si F est fermé et si $A \subset F \subset A \cup A'$, alors $F = A \cup A'$.
44. Démontrer que l'ensemble des points intérieurs de tout ensemble A , noté $\text{int}(A)$ est un ensemble ouvert.
45. Démontrer que l'ensemble des points intérieurs de A est le plus grand ouvert contenu dans A , c'est-à-dire que si G est ouvert et si $\text{int}(A) \subset G \subset A$, alors $\text{int}(A) = G$.
46. Démontrer que les seuls sous-ensembles de \mathbb{R} qui sont à la fois ouverts et fermés sont \emptyset et \mathbb{R} .

SUITES

47. Démontrer que si la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers $b \in \mathbb{R}$, alors la suite $\langle |a_n - b| \rangle$ converge vers 0.
48. Démontrer que si la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers 0 et si la suite $\langle b_n \rangle$ est bornée alors la suite $\langle a_n b_n \rangle$ converge également vers 0.
49. Démontrer que si $a_n \rightarrow a$ et si $b_n \rightarrow b$ alors la suite $\langle a_n + b_n \rangle$ converge vers $a + b$.
50. Démontrer que si $a_n \rightarrow a$ et si $b_n \rightarrow b$ alors la suite $\langle a_n b_n \rangle$ converge vers ab .
51. Démontrer que si $a_n \rightarrow a$ et si $b_n \rightarrow b$ avec $b_n \neq 0$ et $b \neq 0$ alors la suite $\langle a_n/b_n \rangle$ converge vers a/b .
52. Démontrer que si la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers b , alors toute sous-suite $\langle a_{i_n} \rangle$ de $\langle a_n \rangle$ converge vers b .
53. Démontrer que si la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers b , alors soit l'image $\{a_n\}$ de la suite $\langle a_n \rangle$ est finie, soit b est un point d'accumulation de l'ensemble image $\{a_n\}$.
54. Démontrer que si la suite $\langle a_n \rangle$ d'éléments distincts est bornée et si l'ensemble image $\{a_n\}$ de $\langle a_n \rangle$ ■ exactement un point d'accumulation b , alors $\langle a_n \rangle$ converge vers b .
 (Remarque : La suite $\langle 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, \dots \rangle$ montre que la condition d'être bornée ne peut pas être supprimée.)

CONTINUITÉ

55. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite $\langle a_n \rangle$ convergeant vers a , la suite $\langle f(a_n) \rangle$ converge vers $f(a)$.
56. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue en $p \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert S contenant p tel que f soit bornée sur cet intervalle.

57. Donner un exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en tout point de l'intervalle ouvert $S = (0, 1)$ mais non bornée sur cet intervalle.
58. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point d'un intervalle fermé $A = [a, b]$, alors f est bornée sur A . (Remarque : d'après le problème précédent, le théorème n'est pas vrai si A n'est pas fermé.)
59. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues alors la somme $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, où $(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x)$.
60. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si k est un nombre réel quelconque, alors la fonction $(kf) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, où kf est définie par $(kf)(x) = k(f(x))$.
61. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ est un ensemble fermé.
62. Démontrer que la projection $\pi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, π_x étant définie par $\pi_x((a, b)) = a$.

63. Considérons les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Démontrer que g est continue en 0 mais que f n'est pas continue en 0.

64. On rappelle que tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $q = a/b$ où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ et a et b sont premiers entre eux. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 1/b & \text{si } x \text{ est rationnel, égal à } a/b \text{ comme ci-dessus} \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en tout point irrationnel mais que f est discontinue en tout point rationnel.

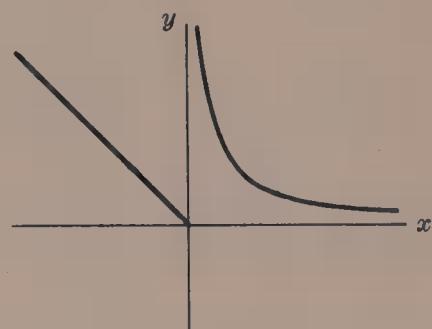
REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

57. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 1/x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est continue en tout point de \mathbb{R} sauf en 0, comme il est indiqué sur le graphe de f représenté ci-contre. Ainsi f est continue en tout point de l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Mais f n'est pas bornée sur $(0, 1)$.

58. *Indication.* Utiliser le résultat énoncé dans le problème 56 et le théorème de Heine-Borel.



CHAPITRE 5

Espaces topologiques : définitions

ESPACES TOPOLOGIQUES

Soit X un ensemble non vide. Une famille \mathcal{T} de parties de X est une *topologie* sur X ssi \mathcal{T} vérifie les axiomes suivants.

- [O₁] X et \emptyset appartiennent à \mathcal{T} .
- [O₂] La réunion d'une famille quelconque de parties de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .
- [O₃] L'intersection de deux parties quelconques de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

Les éléments de \mathcal{T} sont alors appelés *ensembles \mathcal{T} -ouverts*, ou simplement (*ensembles*) *ouverts* et, X et \mathcal{T} , ensemble, c'est-à-dire le couple (X, \mathcal{T}) est appelé un *espace topologique*.

Exemple 1.1 : Soit \mathcal{U} la famille des ensembles ouverts de nombres réels étudiée au chapitre 4. Alors \mathcal{U} est une topologie sur \mathbb{R} ; on l'appelle la *topologie usuelle* de \mathbb{R} . De manière analogue, la famille \mathcal{U} des ensembles ouverts du plan \mathbb{R}^2 est une topologie et celle-ci est aussi appelée la *topologie usuelle* de \mathbb{R}^2 . On admettra toujours que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 sont munis de leur topologie usuelle sauf mention expresse du contraire.

Exemple 1.2 : Considérons les familles suivantes de parties de $X = \{a, b, c, d, e\}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\} \\ \mathcal{T}_2 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\} \\ \mathcal{T}_3 &= \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}\end{aligned}$$

Remarquons que \mathcal{T}_1 est une topologie sur X puisqu'elle vérifie les trois axiomes requis [O₁], [O₂] et [O₃]. Mais \mathcal{T}_2 n'est pas une topologie sur X puisque la réunion

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

de deux éléments de \mathcal{T}_2 n'appartient pas à \mathcal{T}_2 , c'est-à-dire que \mathcal{T}_2 ne vérifie pas l'axiome [O₂].

De même \mathcal{T}_3 n'est pas une topologie sur X puisque l'intersection

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$$

n'appartient pas à \mathcal{T}_3 , c'est-à-dire que \mathcal{T}_3 ne vérifie pas l'axiome [O₃].

Exemple 1.3 : Désignons par \mathcal{D} la famille de toutes les parties de X . Remarquons que \mathcal{D} vérifie les axiomes d'une topologie sur X . Cette topologie s'appelle la *topologie discrète*; et X , muni de la topologie discrète, c'est-à-dire le couple (X, \mathcal{D}) , est appelé un *espace topologique discret* ou plus simplement un *espace discret*.

Exemple 1.4 : Comme on le voit d'après l'axiome [O₁], une topologie sur X doit contenir les ensembles X et \emptyset . La famille $\mathcal{J} = \{X, \emptyset\}$ constituée par X et \emptyset seuls est elle-même une topologie sur X . On l'appelle la *topologie grossière* de X ; et X muni de sa topologie grossière, c'est-à-dire (X, \mathcal{J}) , est appelé un *espace topologique grossier* ou plus simplement un *espace grossier*.

Exemple 1.5 : Considérons tous les sous-ensembles de X dont le complémentaire est fini ainsi que l'ensemble vide \emptyset . Cette famille \mathcal{T} est également une topologie sur X . On l'appelle la *topologie cofinie* ou la *T_1 -topologie* sur X . (La signification du T_1 apparaîtra dans un chapitre ultérieur.)

Exemple 1.6 : L'intersection $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ de deux topologies quelconques \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sur X est également une topologie sur X . En effet d'après [O₁], X et \emptyset appartiennent chacun à la fois à \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 ; ainsi X et \emptyset appartiennent chacun à l'intersection $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$; c'est-à-dire que $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ vérifie [O₁]. De plus si $G, H \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ alors, en particulier, $G, H \in \mathcal{T}_1$ et $G, H \in \mathcal{T}_2$. Mais puisque \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont des topologies, $G \cap H \in \mathcal{T}_1$ et $G \cap H \in \mathcal{T}_2$. Par conséquent,

$$G \cap H \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$$

En d'autres termes, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ vérifie [O₂]. De manière analogue $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ vérifie [O₃].

La proposition démontrée dans l'exemple précédent peut en fait être généralisée à un ensemble quelconque de topologies. A savoir,

Théorème 5.1 : Soit $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ une famille quelconque de topologies sur un ensemble X . Alors l'intersection $\bigcap_i \mathcal{T}_i$ est également une topologie sur X .

Dans notre dernier exemple nous allons montrer que la réunion de topologies n'est pas en général une topologie.

Exemple 1.7 : Chacune des familles

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$

est une topologie sur $X = \{a, b, c\}$. Mais la réunion

$$\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$

n'est pas une topologie sur X puisque l'axiome [O₂] n'est pas vérifié. C'est-à-dire que $\{a\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, $\{b\} \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ mais $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ n'appartient pas à $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.

Si G est un ouvert contenant un point $p \in X$, alors G est appelé un *voisinage ouvert* de p . De même, G privé de p , c'est-à-dire $G \setminus \{p\}$ est appelé *voisinage ouvert pointé* de p .

Remarque : Les axiomes [O₁], [O₂] et [O₃] sont équivalents aux deux axiomes suivants :

[O₁*] La réunion d'un nombre quelconque de parties de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

[O₂*] L'intersection de toute famille finie de parties de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

En effet [O₁*] implique que \emptyset appartient à \mathcal{T} puisque

$$\cup \{G \in \mathcal{T} : G \in \emptyset\} = \emptyset$$

c'est-à-dire que la réunion d'une famille vide d'ensembles est l'ensemble vide. De plus [O₂*] implique que X appartient à \mathcal{T} puisque

$$\cap \{G \in \mathcal{T} : G \in \emptyset\} = X$$

c'est-à-dire que l'intersection d'une famille vide de sous-ensembles de X est X lui-même.

POINTS D'ACCUMULATION

Soit X un espace topologique. Un point $p \in X$ est un *point d'accumulation* ou un *point limite* d'un sous-ensemble A de X ssi tout ouvert G contenant p contient un point de A différent de p , c'est-à-dire si

$$G \text{ ouvert, } p \in G \text{ implique } (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

L'ensemble des points d'accumulation de A , noté A' est appelé l'*ensemble dérivé* de A .

Exemple 2.1 : La famille $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

définit une topologie sur $X = \{a, b, c, d, e\}$. Considérons la partie $A = \{a, b, c\}$ de X . Remarquons que $b \in X$ est un point limite de A puisque les ouverts contenant b sont $\{b, c, d, e\}$ et X et qu'ils contiennent chacun un point de A différent de b , c'est-à-dire c . Par contre, le point $a \in X$ n'est pas un point limite de A puisque l'ensemble ouvert $\{a\}$ qui contient a ne contient pas de point de A différent de a . De manière analogue les points d et e sont des points limites de A et le point c n'est pas un point limite de A . Ainsi $A' = \{a, b, e\}$ est l'ensemble dérivé de A .

Exemple 2.2 : Soit X un espace topologique grossier, c'est-à-dire que X est \emptyset sont les seuls ouverts de X . Alors X est le seul ouvert contenant un point quelconque $p \in X$. Ainsi p est un point d'accumulation de tout sous-ensemble de X excepté l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble formé de p seul, c'est-à-dire le singleton $\{p\}$. Ainsi l'ensemble dérivé A' de tout sous-ensemble A de X est :

$$A' = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ \{p\}^c = X \setminus \{p\} & \text{si } A = \{p\} \\ X & \text{si } A \text{ contient deux points ou plus} \end{cases}$$

Remarquons que pour la topologie usuelle de la droite \mathbb{R} ou du plan \mathbb{R}^2 , la définition donnée ci-dessus d'un point d'accumulation est la même que celle qui a été donnée au chapitre 4.

ENSEMBLES FERMÉS

Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble A de X est un *ensemble fermé* ssi son complémentaire A^c est un ensemble ouvert.

Exemple 3.1 : La famille $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

définit une topologie sur $X = \{a, b, c, d, e\}$. Les fermés de X sont les sous-ensembles $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}$

c'est-à-dire les complémentaires des ouverts de X . Notons qu'il y a des sous-ensembles de X , tels que $\{b, c, d, e\}$ qui sont à la fois ouverts et fermés, et qu'il existe aussi des sous-ensembles de X tels que $\{a, b\}$ qui ne sont ni ouverts ni fermés.

Exemple 3.2 : Soit X un espace topologique discret, c'est-à-dire tout sous-ensemble de X est ouvert. Alors tout sous-ensemble de X est également fermé puisque son complémentaire est toujours ouvert. En d'autres termes, tous les sous-ensembles de X sont à la fois ouverts et fermés.

On rappelle que $A^{cc} = A$ pour tout sous-ensemble A d'un espace X . Ainsi

Proposition 5.2 : Dans un espace topologique X , un sous-ensemble A est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.

Les axiomes $[O_1]$, $[O_2]$ et $[O_3]$ d'un espace topologique ainsi que les lois de De Morgan donnent le

Théorème 5.3 : Soit X un espace topologique. Alors la famille des ensembles fermés possède les propriétés suivantes :

- (i) X et \emptyset sont des ensembles fermés.
- (ii) L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé.
- (iii) La réunion de deux fermés quelconques est un fermé.

Les ensembles fermés peuvent également être caractérisés par leurs points limites de la manière suivante :

Théorème 5.4 : Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est fermé si et seulement si A contient chacun de ses points d'accumulation.

En d'autres termes, un ensemble est fermé si et seulement si l'ensemble dérivé A' de A est un sous-ensemble de A , c'est-à-dire $A' \subset A$.

FERMETURE OU ADHERENCE D'UN ENSEMBLE

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . La *fermeture* ou *l'adhérence* de A notée

$$\bar{A} \text{ ou } A^-$$

est l'intersection de tous les ensembles fermés contenant A . En d'autres termes si $\{F_i : i \in I\}$ est la famille de tous les sous-ensembles fermés de X contenant A , alors

$$\bar{A} = \cap_i F_i$$

Remarquons d'abord que \bar{A} est un ensemble fermé comme intersection de fermés. De plus \bar{A} est le plus petit ensemble fermé contenant A , c'est-à-dire que si F est un fermé contenant A alors

$$A \subset \bar{A} \subset F$$

Ainsi un ensemble A est fermé si et seulement si $A = \bar{A}$. Nous énonçons ces résultats de manière plus formelle :

Proposition 5.5 : Soit \bar{A} l'adhérence d'un ensemble A . Alors : (i) \bar{A} est fermé ; (ii) si F est fermé et contient A , alors $A \subset \bar{A} \subset F$; et (iii) A est fermé ssi $A = \bar{A}$.

Exemple 4.1 : Considérons la topologie \mathcal{T} sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ de l'exemple 3.1 où les fermés de X sont

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}$$

$$\text{Par conséquent } \overline{\{b\}} = \{b, e\}, \quad \overline{\{a, c\}} = X, \quad \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$$

Exemple 4.2 : Soit X un espace topologique cofini, c'est-à-dire dont les ouverts sont les complémentaires des parties finies ainsi que \emptyset . Alors les ensembles fermés sont précisément les sous-ensembles finis de X ainsi que X . Ainsi si $A \subset X$ est fini, son adhérence \bar{A} est A lui-même puisque A est fermé. D'autre part si $A \subset X$ est infini alors X est le seul sous-ensemble fermé contenant A ; ainsi \bar{A} est égal à X . En résumé, pour tout sous-ensemble d'un espace cofini X ,

$$\bar{A} = \begin{cases} A & \text{si } A \text{ est fini} \\ X & \text{si } A \text{ est infini} \end{cases}$$

L'adhérence d'un ensemble peut également être complètement décrite en termes de ses points limites de la manière suivante :

Théorème 5.6 : Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Alors l'adhérence de A est la réunion de A et de l'ensemble de ses points d'accumulation, c'est-à-dire

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Un point $p \in X$ est appelé *point adhérent* de $A \subset X$ ssi p appartient à l'adhérence de A , c'est-à-dire si $p \in \bar{A}$. En vertu du théorème précédent $p \in X$ est un point adhérent à $A \subset X$ ssi $p \in A$ ou p est un point limite de A .

Exemple 4.3 : Considérons l'ensemble Q des nombres rationnels. Comme on l'a vu précédemment, pour la topologie usuelle de \mathbb{R} , tout nombre réel $r \in \mathbb{R}$ est un point limite de Q . Ainsi l'adhérence de Q est l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels tout entier, c'est-à-dire $\bar{Q} = \mathbb{R}$.

Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est dit *dense* dans $B \subset X$ si B est contenu dans l'adhérence de A , c'est-à-dire si $B \subset \overline{A}$. En particulier A est dense dans X ou est un sous-ensemble dense de X ssi $\overline{A} = X$.

Exemple 4.4 : Remarquons dans l'exemple 4.1 que

$$\overline{\{a, c\}} = X \quad \text{et} \quad \overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$$

où $X = \{a, b, c, d, e\}$. Ainsi l'ensemble $\{a, c\}$ est un sous-ensemble dense de X tandis que l'ensemble $\{b, d\}$ n'en est pas un.

Exemple 4.5 : Comme il a été indiqué dans l'exemple 4.3, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. En d'autres termes, pour la topologie usuelle, l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est dense dans \mathbb{R} .

L'opérateur "fermeture" ou adhérence, qui à chaque sous-ensemble A de X associe sa fermeture ou adhérence $\overline{A} \subset X$, vérifie les quatre propriétés de la proposition ci-dessous, appelées axiomes de fermeture de Kuratowski. En fait, ces axiomes peuvent être utilisés pour définir une topologie sur X , comme on le démontrera ultérieurement.

Proposition 5.7 : (i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; (ii) $A \subset \overline{A}$; (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; et (iv) $(A^-)^- = \overline{A}$.

INTERIEUR, EXTERIEUR, FRONTIERE

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Un point $p \in A$ est appelé *point intérieur* de A si p appartient à un ouvert G contenu dans A :

$$p \in G \subset A \quad \text{où } G \text{ est ouvert}$$

L'ensemble des points intérieurs de A noté

$$\text{int}(A), \quad \overset{\circ}{A} \quad \text{ou} \quad A^\circ$$

est appelé l'*intérieur* de A . L'intérieur de A peut également être caractérisé de la manière suivante :

Proposition 5.8 : L'intérieur d'un ensemble A est la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans A . De plus : (i) A° est ouvert ; (ii) A° est le plus grand ouvert contenu dans A , c'est-à-dire si G est un ouvert contenu dans A alors $G \subset A^\circ \subset A$; et (iii) A est ouvert ssi $A = A^\circ$.

L'*extérieur* de A , noté $\text{ext}(A)$, est l'intérieur du complémentaire de A , c'est-à-dire $\text{int}(A^c)$. La *frontière* de A noté $b(A)$ est l'ensemble des points n'appartenant ni à l'intérieur ni à l'extérieur de A . A présent on ■ une relation importante entre l'intérieur, l'extérieur et l'adhérence.

Théorème 5.9 : Soit A un sous-ensemble quelconque d'un espace topologique X . Alors l'adhérence de A est la réunion de l'intérieur et de la frontière de A c'est-à-dire $\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$.

Exemple 5.1 : Considérons les quatre intervalles $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$ et $[a, b)$ dont les extrémités sont a et b . L'intérieur de chacun est l'intervalle ouvert (a, b) et la frontière de chacun est l'ensemble des extrémités, c'est-à-dire $\{a, b\}$.

Exemple 5.2 : Considérons la topologie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

sur $X = \{a, b, c, d, e\}$, et le sous-ensemble $A = \{b, c, d\}$ de X . Les points c et d sont chacun des points intérieurs de A puisque

$$c, d \in \{c, d\} \subset A$$

où $\{c, d\}$ est un ouvert. Le point $b \in A$ n'est pas un point intérieur de A ; ainsi $\text{int}(A) = \{c, d\}$. Seul le point $a \in X$ est extérieur à A , c'est-à-dire intérieur au complémentaire $A^c = \{a, e\}$ de A ; ainsi $\text{int}(A^c) = \{a\}$. Par conséquent la frontière de A est formée des points b et e , c'est-à-dire $b(A) = \{b, e\}$.

Exemple 5.3 : Considérons l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels. Puisque tout ouvert de \mathbb{R} est formé à la fois de points rationnels et irrationnels, il n'y a pas de points intérieurs ou extérieurs à \mathbb{Q} ; ainsi $\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ et $\text{int}(\mathbb{Q}^c) = \emptyset$. Ainsi la frontière de \mathbb{Q} est l'ensemble des nombres réels tout entier, c'est-à-dire $\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est dit *non dense* ou *rare* dans X si l'intérieur de son adhérence est vide, c'est-à-dire $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

Exemple 5.4 : Considérons le sous-ensemble $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ de \mathbb{R} . Ainsi qu'il a été noté précédemment, A a exactement un point limite, 0 . Ainsi $\bar{A} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Remarquons que \bar{A} n'a pas de point intérieur ; ainsi A est rare dans \mathbb{R} .

Exemple 5.5 : Soit A l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 , c'est-à-dire

$$A = \{x : x \in \mathbb{Q}, 0 < x < 1\}.$$

Remarquons que l'intérieur de A est vide, c'est-à-dire $\text{int}(A) = \emptyset$. Mais A n'est pas rare dans \mathbb{R} car l'adhérence de A est $[0, 1]$ et ainsi

$$\text{int}(\bar{A}) = \text{int}([0, 1]) = (0, 1)$$

n'est pas vide.

VOISINAGES ET SYSTEMES DE VOISINAGES

Soit p un point d'un espace topologique X . Un sous-ensemble N de X est un *voisinage* de p ssi N contient un ouvert G contenant p : $p \in G \subset N$ où G est un ouvert.

En d'autres termes, la relation " N est un voisinage d'un point p " est synonyme de " p est un point intérieur à N ". La famille de tous les voisinages de $p \in X$ notée \mathcal{N}_p , est appelée un *système de voisinages* de p .

Exemple 6.1 : Soit a un nombre réel, c'est-à-dire $a \in \mathbb{R}$. Alors chaque intervalle fermé $[a - \delta, a + \delta]$ de centre a est un voisinage de a puisqu'il contient l'intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$ qui contient a . De manière analogue si p est un point du plan \mathbb{R}^2 alors tout disque fermé $\{q \in \mathbb{R}^2 : d(p, q) < \delta \neq 0\}$, de centre p , est un voisinage de p puisqu'il contient le disque ouvert de centre p .

Les faits les plus importants concernant le système de voisinages \mathcal{N}_p d'un point quelconque $p \in X$ sont donnés par les quatre propriétés de la proposition ci-dessous appelées axiomes des voisinages. D'ailleurs ces axiomes peuvent être utilisés pour définir une topologie sur X comme nous le montrerons par la suite.

Proposition 5.10 : (i) \mathcal{N}_p n'est pas vide et p appartient à chaque élément de la famille \mathcal{N}_p .
(ii) L'intersection de deux éléments quelconques de la famille \mathcal{N}_p appartient à \mathcal{N}_p .
(iii) Toute partie contenant un élément de la famille \mathcal{N}_p appartient à la famille \mathcal{N}_p .
(iv) Chaque élément $N \in \mathcal{N}_p$ contient un élément $G \in \mathcal{N}_p$ où G est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire $G \in \mathcal{N}_g$ pour tout $g \in G$.

SUITES CONVERGENTES

Une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de points d'un espace topologique X converge vers un point $b \in X$ ou b est la *limite* de la suite $\langle a_n \rangle$, ce qu'on note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b, \quad \lim a_n = b \quad \text{ou} \quad a_n \rightarrow b$$

ssi pour tout ouvert G contenant b il existe un entier positif $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > n_0 \text{ implique } a_n \in G$$

C'est-à-dire si G contient presque tous les termes de la suite, c'est-à-dire tous sauf un nombre fini.

Exemple 7.1 : Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de points d'un espace topologique muni de sa topologie grossière (X, \mathcal{J}) . Notons que : (i) X est le seul ouvert contenant tout point $b \in X$; et (ii) que X contient tous les termes de la suite a_n . Par conséquent la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ converge vers tout point $b \in X$.

Exemple 7.2 : Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de points d'un espace topologique discret (X, \mathcal{D}) . A présent pour tout point $b \in X$, le singleton $\{b\}$ est un ensemble ouvert contenant b . Ainsi si $a_n \rightarrow b$, l'ensemble $\{b\}$ doit contenir presque tous les termes de la suite. En d'autres termes la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers un point $b \in X$ ssi la suite est de la forme $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle$.

Exemple 7.3 : Soit \mathcal{T} la topologie sur un ensemble infini X formée de \emptyset et des complémentaires des parties au plus dénombrables (voir problème 56). Nous affirmons qu'une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de X converge vers $b \in X$ ssi la suite est également de la forme $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, b, b, b, \dots \rangle$, c'est-à-dire que l'ensemble A formé des termes de $\langle a_n \rangle$ différents de b est fini. A présent A est au plus dénombrable et donc A^c est un ouvert contenant b . Alors si $a_n \rightarrow b$, A^c contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini, et donc A est fini.

TOPOLOGIES MOINS FINE ET PLUS FINE

Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur un ensemble non vide X . Supposons que chaque sous-ensemble \mathcal{T}_1 -ouvert de X est également un sous-ensemble \mathcal{T}_2 -ouvert de X . C'est-à-dire, supposons que \mathcal{T}_1 soit une sous-famille de \mathcal{T}_2 , c'est-à-dire que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Alors nous dirons que \mathcal{T}_1 est moins fine que \mathcal{T}_2 ou que \mathcal{T}_2 est plus fine que \mathcal{T}_1 . Remarquons que la famille $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_i\}$ de toutes les topologies sur X est ordonnée par inclusion ; ainsi on écrira également

$$\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2 \text{ pour } \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$$

et nous dirons que deux topologies *ne sont pas comparables* si l'une n'est ni moins fine ni plus fine que l'autre.

Exemple 8.1 : Considérons la topologie discrète \mathcal{D} , la topologie grossière \mathcal{J} et toute autre topologie \mathcal{T} sur un ensemble quelconque X . Alors \mathcal{T} est moins fine que \mathcal{D} et \mathcal{T} est plus fine que \mathcal{J} . C'est-à-dire que $\mathcal{J} \preceq \mathcal{T} \preceq \mathcal{D}$.

Exemple 8.2 : Considérons la topologie cofinie \mathcal{T} et la topologie usuelle \mathcal{U} sur le plan \mathbb{R}^2 . Rappelons que tout sous-ensemble fini de \mathbb{R}^2 est un ensemble \mathcal{U} -fermé ; ainsi le complémentaire de tout sous-ensemble fini de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire tout élément de \mathcal{T} , est également un ensemble \mathcal{U} -ouvert. En d'autres termes, \mathcal{T} est moins fine que \mathcal{U} , c'est-à-dire $\mathcal{T} \preceq \mathcal{U}$.

SOUS-ESPACES, TOPOLOGIE INDUIITE

Soit A un sous-ensemble non vide d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . La famille \mathcal{T}_A de toutes les intersections de A avec les sous-ensembles \mathcal{T} -ouverts de X est une topologie sur A ; on l'appelle la *topologie induite* sur A par \mathcal{T} ou *topologie trace* sur A , et l'espace topologique (A, \mathcal{T}_A) est appelé un *sous-espace* de (X, \mathcal{T}) . En d'autres termes, un sous-ensemble H de A est un ensemble \mathcal{T}_A -ouvert, c'est-à-dire ouvert relativement à A , si et seulement si il existe un ensemble \mathcal{T} -ouvert G de X tel que

$$H = G \cap A$$

Exemple 9.1 : Considérons la topologie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

sur $X = \{a, b, c, d, e\}$ et le sous-ensemble $A = \{a, d, e\}$ de X . Remarquons que

$$X \cap A = A, \quad \{a\} \cap A = \{a\}, \quad \{a, c, d\} \cap A = \{a, d\}$$

$$\emptyset \cap A = \emptyset, \quad \{c, d\} \cap A = \{d\}, \quad \{b, c, d, e\} \cap A = \{d, e\}$$

Ainsi la topologie induite par \mathcal{T} sur A est

$$\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$$

Exemple 9.2 : Considérons la topologie usuelle \mathcal{U} sur \mathbb{R} et la topologie induite \mathcal{T}_A sur l'intervalle fermé $A = [3, 8]$. Notons que l'intervalle semi-ouvert $[3, 5)$ est ouvert pour la topologie induite sur A , c'est-à-dire est \mathcal{T}_A -ouvert puisque

$$[3, 5) = (2, 5) \cap A$$

où $(2, 5)$ est un sous-ensemble \mathcal{T} -ouvert de \mathbb{R} . Ainsi nous voyons qu'un ensemble peut être ouvert relativement à un sous-espace mais ni ouvert ni fermé dans l'espace tout entier.

DEFINITIONS EQUIVALENTES D'UNE TOPOLOGIE

Notre définition d'une topologie partait des axiomes des ouverts de l'espace topologique, c'est-à-dire que nous avons utilisé la notion d'ensemble ouvert comme notion première définissant une topologie. Nous allons énoncer deux théorèmes mettant en évidence d'autres méthodes pour définir une topologie sur un ensemble, utilisant comme notions premières les notions de "voisinage d'un point" et de "fermeture ou d'adhérence d'un ensemble".

Théorème 5.11 : Soit X un ensemble non vide et supposons qu'à chaque point $p \in X$ soit associée une famille \mathcal{A}_p de parties de X vérifiant les axiomes suivants :

- [A₁] \mathcal{A}_p n'est pas vide et p appartient à chaque élément de la famille \mathcal{A}_p .
- [A₂] L'intersection de deux éléments de \mathcal{A}_p appartient à \mathcal{A}_p .
- [A₃] Toute partie contenant un élément de \mathcal{A}_p appartient à \mathcal{A}_p .
- [A₄] Tout élément $N \in \mathcal{A}_p$ contient un élément $G \in \mathcal{A}_p$ tel que $G \in \mathcal{A}_g$ pour tout $g \in G$.

Alors il existe une et une seule topologie \mathcal{T} sur X telle que \mathcal{A}_p soit le système de \mathcal{T} -voisinages du point $p \in X$.

Théorème 5.12 : Soit X un ensemble non vide et soit k un opérateur qui associe à chaque sous-ensemble A de X le sous-ensemble A^k de X , vérifiant les axiomes suivants appelés les axiomes de fermeture de Kuratowski :

- [K₁] $\emptyset^k = \emptyset$
- [K₂] $A \subset A^k$
- [K₃] $(A \cup B)^k = A^k \cup B^k$
- [K₄] $(A^k)^k = A^k$

Alors il existe une topologie \mathcal{T} sur X et une seule telle que A^k soit la \mathcal{T} -adhérence ou \mathcal{T} -fermeture du sous-ensemble A de X .

PROBLEMES RESOLUS

TOPOLOGIES, ENSEMBLES OUVERTS

1. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$. Indiquer si chacune des familles suivantes de parties de X est une topologie ou non.

- (i) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
- (ii) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
- (iii) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

Solution :

(i) \mathcal{T}_1 n'est pas une topologie sur X puisque

$$\{a, b\}, \{a, c\} \in \mathcal{T}_1 \text{ mais } \{a, b\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \notin \mathcal{T}_1$$

(ii) \mathcal{T}_2 n'est pas une topologie sur X puisque

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\} \in \mathcal{T}_2 \text{ mais } \{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_2$$

(iii) \mathcal{T}_3 est une topologie sur X puisqu'elle vérifie tous les axiomes nécessaires.

2. Soit \mathcal{T} la famille formée de \mathbb{R} , \emptyset et de tous les intervalles infinis ouverts $A = (q, \infty)$, $q \in \mathbb{Q}$, ensemble des rationnels. Montrer que \mathcal{T} n'est pas une topologie sur \mathbb{R} .

Solution :

$$\text{Remarquons que } A = \bigcup \{A_q : q \in \mathbb{Q}, q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$$

est réunion de parties appartenant à \mathcal{T} , mais que $A \notin \mathcal{T}$ puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi \mathcal{T} ne vérifie pas $[O_2]$ et n'est donc pas une topologie sur \mathbb{R} .

3. Soit \mathcal{T} une topologie sur un ensemble X formée de quatre parties, c'est-à-dire de

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$$

où A et B sont deux sous-ensembles propres non vides de X . Quelles conditions doivent satisfaire A et B ?

Solution :

Puisque $A \cap B$ doit également appartenir à \mathcal{T} , il y a deux possibilités :

Cas I. $A \cap B = \emptyset$

Alors $A \cup B$ ne peut être égal ni à A ni à B ; ainsi $A \cup B = X$. Ainsi la famille $\{A, B\}$ forme une partition de X .

Cas II. $A \cap B = A$ ou $A \cap B = B$

Dans l'un ou l'autre cas l'un des ensembles est un sous-ensemble de l'autre, et les éléments de \mathcal{T} sont totalement ordonnés par inclusion : $\emptyset \subset A \subset B \subset X$ ou $\emptyset \subset B \subset A \subset X$.

4. Déterminer toutes les topologies sur $X = \{a, b, c\}$ qui comportent exactement quatre éléments.

Solution :

Chaque topologie \mathcal{T} de X qui comprenne quatre éléments est de la forme $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, A, B\}$ où A et B correspondent au cas I ou II du problème précédent.

Cas I. $\{A, B\}$ est une partition de X .

Les topologies dans ce cas sont les suivantes :

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, c\}\}, \quad \mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}\}$$

Cas II. Les éléments de \mathcal{T} sont totalement ordonnés par inclusion.

Les topologies dans ce cas sont les suivantes :

$$\mathcal{T}_4 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} \quad \mathcal{T}_7 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$\mathcal{T}_5 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\} \quad \mathcal{T}_8 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{a, c\}\}$$

$$\mathcal{T}_6 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{b, c\}\} \quad \mathcal{T}_9 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$$

5. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application d'un ensemble non vide X dans un espace topologique (Y, \mathcal{U}) . De plus, soit \mathcal{T} la famille des images réciproques des ouverts de Y :

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}[G] : G \in \mathcal{U}\}$$

Montrer que \mathcal{T} est une topologie sur X .

Solution :

Puisque \mathcal{U} est une topologie, $Y, \emptyset \in \mathcal{U}$. Or $X = f^{-1}[Y]$ et $\emptyset = f^{-1}[\emptyset]$ alors $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ et \mathcal{T} vérifie $[O_1]$.

Soit $\{A_i\}$ une famille d'ensembles de \mathcal{T} . Par définition, il existe des $G_i \in \mathcal{U}$ pour lesquels $A_i = f^{-1}[G_i]$. Or

$$\cup_i A_i = \cup_i f^{-1}[G_i] = f^{-1}[\cup_i G_i]$$

Puisque \mathcal{U} est une topologie, $\cup_i G_i \in \mathcal{U}$ ainsi $\cup_i A_i \in \mathcal{T}$, et \mathcal{T} vérifie $[O_2]$.

Enfin, soient $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Alors

$$\exists G_1, G_2 \in \mathcal{U} \text{ tels que } A_1 = f^{-1}[G_1], A_2 = f^{-1}[G_2]$$

$$\text{Or } A_1 \cap A_2 = f^{-1}[G_1] \cap f^{-1}[G_2] = f^{-1}[G_1 \cap G_2]$$

et $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}$. Ainsi $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ et $[O_3]$ est également vérifié.

6. Considérons le deuxième axiome d'une topologie \mathcal{T} sur un ensemble X :

$[O_2]$ La réunion d'une famille quelconque d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} . Montrer que $[O_2]$ peut être remplacé par l'axiome plus faible suivant :

$[O'_2]$ La réunion d'une famille quelconque de parties de $\mathcal{T} \setminus \{X, \emptyset\}$ appartient à \mathcal{T} .

En d'autres termes montrer que les axiomes $[O_1]$, $[O'_2]$ et $[O_3]$ sont équivalents aux axiomes $[O_1]$, $[O_2]$ et $[O_3]$.

Solution :

Soit \mathcal{T} une famille de parties de X vérifiant $[O_1]$, $[O'_2]$ et $[O_3]$, et soit \mathcal{A} une sous-famille de \mathcal{T} . Nous voulons montrer que \mathcal{T} vérifie également $[O_2]$, c'est-à-dire que $\cup\{E : E \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{T}$.

Cas I. $X \in \mathcal{A}$.

Alors $\cup\{E : E \in \mathcal{A}\} = X$ et donc appartient à \mathcal{T} d'après $[O_1]$.

Cas II. $X \notin \mathcal{A}$.

Alors $\cup\{E : E \in \mathcal{A}\} = \cup\{E : E \in \mathcal{A} \setminus \{X\}\}$

Mais l'ensemble vide \emptyset ne contribue par aucun élément dans une réunion d'ensembles ; ainsi

$$\cup\{E : E \in \mathcal{A}\} = \cup\{E : E \in \mathcal{A} \setminus \{X\}\} = \cup\{E : E \in \mathcal{A} \setminus \{X, \emptyset\}\} \quad (1)$$

Puisque \mathcal{A} est une sous-famille de \mathcal{T} , $\mathcal{A} \setminus \{X, \emptyset\}$ est une sous-famille de $\mathcal{T} \setminus \{X, \emptyset\}$, ainsi d'après $[O'_2]$ la réunion figurant dans (1) appartient à \mathcal{T} .

7. Démontrer que si A est un sous-ensemble d'un espace topologique X ayant la propriété que chaque point $p \in A$ appartient à un ensemble ouvert G_p contenu dans A , alors A est ouvert.

Solution :

Pour chaque point $p \in A$, $p \in G_p \subset A$. Ainsi $\cup\{G_p : p \in A\} = A$ et donc A est une réunion d'ensembles ouverts et d'après $[O_2]$ est donc un ouvert.

8. Soit \mathcal{T} une famille de sous-ensembles de X totalement ordonnée par inclusion. Montrer que \mathcal{T} vérifie $[O_3]$, c'est-à-dire que l'intersection de deux éléments quelconques de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

Solution :

Soient $A, B \in \mathcal{T}$. Puisque \mathcal{T} est totalement ordonné par inclusion,

$$\text{soit } A \cap B = A \quad \text{soit } A \cap B = B$$

Dans l'un ou l'autre cas $A \cap B \in \mathcal{T}$, et ainsi \mathcal{T} vérifie $[O_3]$.

9. Soit \mathcal{T} la famille des sous-ensembles de \mathbb{R} formée de \emptyset , \mathbb{Q} et tous les intervalles infinis ouverts $E_a = (a, \infty)$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{R} .

Solution :

Puisque \mathbb{R} et \emptyset appartiennent à \mathcal{T} , \mathcal{T} vérifie $[O_1]$. Remarquons que \mathcal{T} est totalement ordonné par inclusion ; ainsi \mathcal{T} vérifie $[O_3]$.

A présent soit \mathcal{A} une sous-famille de $\mathcal{T} \setminus \{\mathbb{R}, \emptyset\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A} = \{E_i : i \in I\}$ où I est un certain ensemble de nombres réels. Nous voulons montrer que $\cup_i E_i$ appartient à \mathcal{T} . Si I n'est pas minoré, c'est-à-dire si $\inf(I) = -\infty$, alors $\cup_i E_i = \mathbb{R}$. Si I est minoré, admettons par exemple que $\inf(I) = i_0$, alors $\cup_i E_i = (i_0, \infty) = E_{i_0}$. Dans l'un ou l'autre cas $\cup_i E_i \in \mathcal{T}$, et \mathcal{T} vérifie $[O'_2]$.

10. Soit \mathcal{T} la famille des sous-ensembles de \mathbb{N} formée de \emptyset et de toutes les parties de \mathbb{N} de la forme $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{N} .

(ii) Déterminer les ouverts contenant l'entier positif 6.

Solution :

(i) Puisque \emptyset et $E_1 = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ appartiennent à \mathcal{T} , \mathcal{T} vérifie $[O_1]$. De plus puisque \mathcal{T} est totalement ordonné par inclusion, \mathcal{T} vérifie également $[O_3]$.

A présent soit \mathcal{A} une sous-famille de $\mathcal{T} \setminus \{\mathbb{N}, \emptyset\}$ c'est-à-dire $\mathcal{A} = \{E_n : n \in I\}$ où I est un certain ensemble d'entiers positifs. Notons que I contient un plus petit entier positif n_0 et

$$\cup \{E_n : n \in I\} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} = E_{n_0}$$

qui appartient à \mathcal{T} . Ainsi \mathcal{T} vérifie $[O'_2]$ et donc \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{N} .

(ii) Puisque les ouverts non vides sont de la forme

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, les ouverts contenant l'entier positif 6 sont les suivants :

$$E_1 = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad E_4 = \{4, 5, 6, \dots\}$$

$$E_2 = \{2, 3, 4, \dots\} \quad E_5 = \{5, 6, 7, \dots\}$$

$$E_3 = \{3, 4, 5, \dots\} \quad E_6 = \{6, 7, 8, \dots\}$$

POINTS D'ACCUMULATION, ENSEMBLE DERIVE

11. Soit \mathcal{T} une topologie sur \mathbb{N} formée de \emptyset et de toutes les parties de \mathbb{N} de la forme $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ où $n \in \mathbb{N}$ comme dans le problème 10.

(i) Trouver les points d'accumulation de l'ensemble $A = \{4, 13, 28, 37\}$.

(ii) Trouver les sous-ensembles E de \mathbb{N} pour lesquels $E' = \mathbb{N}$.

Solution :

(i) Remarquons que les ouverts contenant n'importe quel point $p \in \mathbb{N}$ sont les ensembles E_i où $i \leq p$. Si $n_0 \leq 36$, alors tout ouvert contenant n_0 contient également $37 \in A$ qui est distinct de n_0 ; ainsi $n_0 \leq 36$ est un point limite de A . En revanche si $n_0 > 36$ alors l'ouvert $E_{n_0} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$ ne contient aucun point de A distinct de n_0 . Ainsi $n_0 > 36$ n'est pas un point limite de A . Par conséquent l'ensemble dérivé de A est $A' = \{1, 2, 3, \dots, 34, 35, 36\}$.

(ii) Si E est un sous-ensemble infini de \mathbb{N} , alors E n'est pas majoré. Ainsi tout ouvert contenant un point quelconque $p \in \mathbb{N}$ va contenir des points de E autres que p . Ainsi $E' = \mathbb{N}$.

En revanche, si E est fini alors E est majoré, par exemple par $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors l'ouvert E_{n_0+1} ne contient aucun point de E . Ainsi $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ n'est pas un point limite de E et donc $E' \neq \mathbb{N}$.

12. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . A quelle condition un point $p \in X$ n'est-il pas un point limite de A ?

Solution :

Le point $p \in X$ est un point limite de A ssi tout voisinage ouvert de p contient un point de A autre que p , c'est-à-dire si

$$p \in G \text{ et } G \in \mathcal{T} \text{ implique } (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

Ainsi p n'est pas un point limite de A s'il existe un ouvert G tel que

$$p \in G \text{ et } (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$$

ou, de manière équivalente,

$$p \in G \text{ et } G \cap A = \emptyset \text{ ou } G \cap A = \{p\}$$

ou, de manière équivalente, si

$$p \in G \text{ et } G \cap A \subset \{p\}$$

13. Soit A un sous-ensemble quelconque d'un espace topologique discret X . Montrer que l'ensemble dérivé A' de A est vide.

Solution :

Soit p un point quelconque de X . Rappelons que tout sous-ensemble d'un espace discret est un ouvert. Ainsi, en particulier le singleton $G = \{p\}$ est un ouvert de X . Or,

$$p \in G \text{ et } G \cap A = (\{p\} \cap A) \subset \{p\}$$

Ainsi, d'après le problème ci-dessus, $p \notin A'$ pour tout $p \in X$, c'est-à-dire que $A' = \emptyset$.

14. Considérons la topologie

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

sur $X = \{a, b, c, d, e\}$. Déterminer les ensembles dérivés de (i) $A = \{c, d, e\}$ et (ii) de $B = \{b\}$.

Solution :

(i) Notons que $\{a, b\}$ et $\{a, b, e\}$ sont des ouverts de X et que

$$a, b \in \{a, b\} \text{ et } \{a, b\} \cap A = \emptyset$$

$$e \in \{a, b, e\} \text{ et } \{a, b, e\} \cap A = \{e\}$$

Ainsi a , b et e ne sont pas des points limite de A . En revanche tout autre point de X est un point limite de A puisque tout ouvert le contenant contient également un point de A différent de celui-ci. Par conséquent $A' = \{c, d\}$.

(ii) Notons que $\{a\}$, $\{a, b\}$ et $\{a, c, d\}$ sont des ouverts de X et que

$$a \in \{a\} \text{ et } \{a\} \cap B = \emptyset$$

$$b \in \{a, b\} \text{ et } \{a, b\} \cap B = \{b\}$$

$$c, d \in \{a, c, d\} \text{ et } \{a, c, d\} \cap B = \emptyset$$

Ainsi a , b , c et d ne sont pas des points limite de $B = \{b\}$. Mais e est un point limite de B puisque les ensembles ouverts contenant e sont $\{a, b, e\}$ et X et que chacun contient le point $b \in B$ différent de e . Ainsi $B' = \{e\}$.

15. Démontrer que si A est un sous-ensemble de B , alors tout point limite de A est également un point limite de B , c'est-à-dire que $A \subset B$ implique $A' \subset B'$.

Solution :

Rappelons que $p \in A'$ ssi $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout ouvert G contenant p . Mais $B \supset A$; ainsi

$$(G \setminus \{p\}) \cap B \supset (G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

Donc $p \in A'$ implique $p \in B'$, c'est-à-dire $A' \subset B'$.

16. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur X telles que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, c'est-à-dire que tout sous-ensemble \mathcal{T}_1 -ouvert de X est également un sous-ensemble \mathcal{T}_2 -ouvert de X .
- Montrer que tout \mathcal{T}_2 -point limite de A est également un \mathcal{T}_1 -point limite de A .
 - Construire un espace dans lequel un \mathcal{T}_1 -point limite n'est pas un \mathcal{T}_2 -point limite.

Solution :

- Soit p un \mathcal{T}_2 -point limite de A ; c'est-à-dire que $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathcal{T}_2$ tel que $p \in G$. Mais $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$; ainsi, en particulier, $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathcal{T}_1$ tel que $p \in G$, c'est-à-dire que p est un \mathcal{T}_1 -point limite de A .
- Considérons la topologie usuelle \mathcal{U} et la topologie discrète \mathcal{D} sur \mathbb{R} . Notons que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ puisque \mathcal{D} contient tous les sous-ensembles de \mathbb{R} . D'après le problème 13, 0 n'est pas un \mathcal{D} -point limite de l'ensemble $A = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ puisque A' est vide. Mais 0 est un point limite de A pour la topologie usuelle de \mathbb{R} .

17. Démontrer que si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) , alors $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{Utilisant le problème 15, } A \subset A \cup B &\text{ implique } A' \subset (A \cup B)' \\ B \subset A \cup B &\text{ implique } B' \subset (A \cup B)' \end{aligned}$$

Ainsi $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$, et nous avons seulement à montrer que

$$(A \cup B)' \subset A' \cup B'$$

Admettons que $p \notin A' \cup B'$; ainsi $\exists G, H \in \mathcal{T}$ tels que

$$p \in G \text{ et } G \cap A \subset \{p\} \quad \text{et} \quad p \in H \text{ et } H \cap B \subset \{p\}$$

Or $G \cap H \in \mathcal{T}$, $p \in G \cap H$ et

$$(G \cap H) \cap (A \cup B) = (G \cap H \cap A) \cup (G \cap H \cap B) \subset (G \cap A) \cup (H \cap B) \subset \{p\} \cup \{p\} = \{p\}$$

Ainsi $p \notin (A \cup B)'$, et donc $(A \cup B)' \subset (A' \cup B')$.

ENSEMBLES FERMÉS, OPÉRATION DE FERMETURE, ENSEMBLES DENSES

18. Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

- Déterminer les sous-ensembles fermés de X .
- Déterminer quelle est l'adhérence des ensembles $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c, e\}$.
- Quels sont parmi les ensembles de (ii) ceux qui sont denses dans X ?

Solution :

- A est fermé ssi son complémentaire est ouvert. Ainsi on écrit les complémentaires de chacun des ensembles de \mathcal{T} :

$$\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{b, e\}, \{e\}, \{c, d\}$$

- L'adhérence ou la fermeture \bar{A} d'un ensemble quelconque A est l'intersection de tous les ensembles fermés qui le contiennent. Le seul sous-ensemble fermé contenant $\{a\}$ est X ; les fermés contenant $\{b\}$ sont $\{b, e\}$, $\{b, c, d, e\}$ et X ; et les fermés contenant $\{c, e\}$ sont $\{c, d, e\}$, $\{b, c, d, e\}$ et X . Ainsi

$$\{\bar{a}\} = X, \quad \{\bar{b}\} = \{b, e\}, \quad \{\bar{c, e}\} = \{c, d, e\}$$

- Un ensemble A est dense dans X ssi $\bar{A} = X$; ainsi $\{a\}$ est le seul ensemble dense.

19. Soit \mathcal{T} la topologie de \mathbb{N} formée de \emptyset et de tous les sous-ensembles de \mathbb{N} de la forme $E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ où $n \in \mathbb{N}$ comme dans le problème 10.

- (i) Déterminer les fermés de (\mathbb{N}, τ) .
(ii) Déterminer l'adhérence des ensembles $\{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$.
(iii) Déterminer les sous-ensembles de \mathbb{N} qui sont denses dans \mathbb{N} .

Solution :

- (i) Un ensemble est fermé ssi son complémentaire est ouvert. Ainsi les fermés de \mathbb{N} sont les suivants :

$$\mathbb{N}, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, \dots, m\}, \dots$$

- (ii) L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble. Ainsi

$$\overline{\{7, 24, 47, 85\}} = \{1, 2, \dots, 84, 85\}, \quad \overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

- (iii) Si un sous-ensemble A de \mathbb{N} est infini ou, ce qui est équivalent, non borné, alors $\bar{A} = \mathbb{N}$, c'est-à-dire que A est dense dans \mathbb{N} . Si A est fini alors son adhérence n'est pas égale à \mathbb{N} , c'est-à-dire que A n'est pas dense dans \mathbb{N} .

20. Soit τ la topologie de \mathbb{R} formée de \mathbb{R} , \emptyset et de tous les intervalles infinis ouverts $E_a = (a, \infty)$ où $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Déterminer les fermés de (\mathbb{R}, τ) .
(ii) Déterminer l'adhérence des ensembles $[3, 7]$, $\{7, 24, 47, 85\}$ et $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$.

Solution :

- (i) Un ensemble est fermé ssi son complémentaire est ouvert. Ainsi les fermés de (\mathbb{R}, τ) sont \emptyset , \mathbb{R} et tous les intervalles infinis fermés $E_a^c = (-\infty, a]$.

- (ii) L'adhérence d'un ensemble est le plus petit fermé contenant cet ensemble. Ainsi

$$\overline{[3, 7]} = (-\infty, 7], \quad \overline{\{7, 24, 47, 85\}} = (-\infty, 85], \quad \overline{\{3, 6, 9, 12, \dots\}} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

21. Soit X un espace topologique discret. (i) Déterminer l'adhérence de n'importe quel sous-ensemble A de X . (ii) Déterminer les sous-ensembles denses de X .

Solution :

- (i) On rappelle que dans un espace discret X tout $A \subset X$ est fermé ; ainsi $\bar{A} = A$.

- (ii) A est dense dans X ssi $\bar{A} = X$. Or $\bar{A} = A$ ainsi X est le seul sous-ensemble dense de X .

22. Soit X un espace topologique muni de la topologie grossière. (i) Déterminer les fermés de X . (ii) Déterminer l'adhérence de tout sous-ensemble A de X . (iii) Déterminer les sous-ensembles denses de X .

Solution :

- (i) On rappelle que les seuls ouverts d'un espace topologique muni de la topologie grossière sont X et \emptyset ; ainsi les fermés de X sont également X et \emptyset .

- (ii) Si $A = \emptyset$ alors $\bar{A} = \emptyset$. Si $A \neq \emptyset$ alors X est le seul sous-ensemble fermé contenant A ; ainsi $\bar{A} = X$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X$,

$$\bar{A} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset \\ X & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

- (iii) $A \subset X$ est dense dans X ssi $\bar{A} = X$; ainsi tout sous-ensemble non vide de X est dense dans X .

23. Démontrer le théorème 5.4 : Un sous-ensemble A d'un espace topologique est fermé si et seulement si il contient chacun de ses points d'accumulation, c'est-à-dire si $A' \subset A$.

Solution :

- Supposons que A soit fermé et soit $p \notin A$, c'est-à-dire $p \in A^c$. Or A^c , complémentaire d'un fermé, est ouvert ; ainsi $p \notin A'$ car A^c est un ouvert tel que

$$p \in A^c \quad \text{et} \quad A^c \cap A = \emptyset$$

Ainsi $A' \subset A$ si A est fermé.

A présent supposons que $A' \subset A$; nous allons montrer que A^c est ouvert. Soit $p \in A^c$; alors $p \notin A'$ ainsi ■ un ouvert G tel que

$$p \in G \quad \text{et} \quad (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$$

Or, $p \notin A$; d'où

$$G \cap A = (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$$

Ainsi $G \subset A^c$. Ainsi p est un point intérieur de A^c , et donc A^c est ouvert.

24. Démontrer que si F est un fermé contenant un ensemble quelconque A , alors $A' \subset F$.

Solution :

D'après le problème 15, $A \subset F$ implique $A' \subset F'$. Or $F' \subset F$, d'après le théorème 5.4 puisque F est fermé. Ainsi $A' \subset F' \subset F$ ce qui implique $A' \subset F$.

25. Démontrer que $A \cup A'$ est un fermé.

Solution :

Soit $p \in (A \cup A')^c$. Puisque $p \notin A'$, ■ un ouvert G tel que

$$p \in G \quad \text{et} \quad G \cap A = \emptyset \text{ ou } \{p\}$$

Cependant, $p \notin A$; ainsi en particulier, $G \cap A = \emptyset$.

Nous affirmons également que $G \cap A' = \emptyset$. Car si $g \in G$, alors

$$g \in G \quad \text{et} \quad G \cap A = \emptyset$$

où G est un ouvert. Ainsi $g \notin A'$ et ainsi $G \cap A' = \emptyset$. Par conséquent,

$$G \cap (A \cup A') = (G \cap A) \cup (G \cap A') = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

et donc $G \subset (A \cup A')^c$. Ainsi p est un point intérieur à $(A \cup A')^c$ qui est donc un ouvert. Ainsi $A \cup A'$ est fermé.

26. Démontrer le théorème 5.6 : $\overline{A} = A \cup A'$.

Solution :

Puisque $A \subset \overline{A}$ et que \overline{A} est fermé, $A' \subset (\overline{A})' \subset \overline{A}$ et donc $A \cup A' \subset \overline{A}$. Or $A \cup A'$ est un fermé contenant A , donc $A \subset \overline{A} \subset A \cup A'$. Ainsi $\overline{A} = A \cup A'$.

27. Démontrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Solution :

Si $A \subset B$ alors d'après le problème 15, $A' \subset B'$. Ainsi $A \cup A' \subset B \cup B'$ ou, d'après le problème précédent, $\overline{A} \subset \overline{B}$.

28. Démontrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solution :

Utilisant le problème précédent $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$; ainsi $(\overline{A} \cup \overline{B}) \subset \overline{A \cup B}$. Or, $(A \cup B) \subset (\overline{A} \cup \overline{B})$, un fermé puisque réunion de deux fermés. Alors (proposition 5.5) $(A \cup B) \subset \overline{A \cup B} \subset (\overline{A} \cup \overline{B})$ et donc $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

29. Démontrer la proposition 5.7 : (i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$; (ii) $A \subset \overline{A}$; (iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; et (iv) $(A^-)^- = A^-$.

Solution :

(i) et (iv) : \emptyset et \overline{A} sont fermés ; ainsi ils sont égaux à leur adhérence. (ii) $A \subset A \cup A' = \overline{A}$ (problème 26). (iii) Voir problème précédent.

INTERIEUR, EXTERIEUR, FRONTIERE

30. Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

- (i) Trouver les points intérieurs du sous-ensemble $A = \{a, b, c\}$ de X . (ii) Trouver les points extérieurs de A . (iii) Trouver les points frontière de A .

Solution :

- (i) Les points a et b sont des points intérieurs de A puisque

$$a, b \in \{a, b\} \subset A = \{a, b, c\}$$

où $\{a, b\}$ est un ouvert, c'est-à-dire puisque chacun de ces points appartient à un ouvert contenu dans A . Notons que c n'est pas un point intérieur de A puisque c n'appartient à aucun ouvert contenu dans A . Ainsi $\text{int}(A) = \{a, b\}$ est l'intérieur de A .

- (ii) Le complémentaire de A est $A^c = \{d, e\}$. Ni d ni e ne sont des points intérieurs de A^c puisque ni l'un ni l'autre n'appartient à un ouvert contenu dans $A^c = \{d, e\}$. Ainsi $\text{int}(A^c) = \emptyset$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de point extérieur à A .
- (iii) La frontière $b(A)$ de A est formée des points qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs à A . Ainsi $b(A) = \{c, d, e\}$.

31. Démontrer la proposition 5.8 : L'intérieur d'un ensemble A est égal à la réunion de tous les ouverts contenus dans A . De plus : (i) A° est ouvert ; (ii) A° est le plus grand ouvert contenu dans A , c'est-à-dire si G est un ouvert contenu dans A alors $G \subset A^\circ \subset A$; et (iii) A est ouvert ssi $A = A^\circ$.

Solution :

Soit $\{G_i\}$ la famille de tous les ouverts contenus dans A . Si $x \in A^\circ$, alors x appartient à un ouvert contenu dans A c'est-à-dire,

$$\exists i_0 \text{ tel que } x \in G_{i_0}$$

Ainsi $x \in \cup_i G_i$ et donc $A^\circ \subset \cup_i G_i$. Réciproquement, si $y \in \cup_i G_i$ alors $y \in G_{i_0}$ pour un certain i_0 . Ainsi $y \in A^\circ$, et $\cup_i G_i \subset A^\circ$. Par conséquent $A^\circ = \cup_i G_i$.

- (i) $A^\circ = \cup_i G_i$ est ouvert comme réunion d'ouverts.
- (ii) Si G est un ouvert contenu dans A , alors $G \in \{G_i\}$; ainsi $G \subset \cup_i G_i = A^\circ \subset A$.
- (iii) Si A est ouvert alors $A \subset A^\circ \subset A$ soit $A = A^\circ$. Si $A = A^\circ$ alors A est ouvert puisque A° est ouvert.

32. Soit A un sous-ensemble propre non vide d'un espace topologique X muni de la topologie grossière. Trouver l'intérieur, l'extérieur et la frontière de A .

Solution :

X et \emptyset sont les seuls ouverts de X . Puisque $X \neq A$, \emptyset est le seul ouvert contenu dans A ; ainsi $\text{int}(A) = \emptyset$. De façon analogue $\text{int}(A^c) = \emptyset$, c'est-à-dire l'extérieur de A est vide. Ainsi $b(A) = X$.

33. Soit \mathcal{T} la topologie sur \mathbb{R} formée de \mathbb{R} , \emptyset et de tous les intervalles infinis ouverts $E_a = (a, \infty)$ où $a \in \mathbb{R}$. Trouver l'intérieur, l'extérieur et la frontière de l'intervalle infini fermé $A = [7, \infty)$.

Solution :

Puisque l'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A , $\text{int}(A) = (7, \infty)$. Notons que $A^c = (-\infty, 7)$ ne contient pas d'autre ouvert que \emptyset ; ainsi $\text{int}(A^c) = \text{ext}(A) = \emptyset$. La frontière est formée des points qui n'appartiennent ni à $\text{int}(A)$ ni à $\text{ext}(A)$; ainsi $b(A) = (-\infty, 7]$.

34. Démontrer le théorème 5.9 : $\overline{A} = \text{int}(A) \cup b(A)$.

Solution :

Puisque $X = \text{int}(A) \cup \text{b}(A) \cup \text{ext}(A)$, $(\text{int}(A) \cup \text{b}(A))^c = \text{ext}(A)$ et il suffit de montrer que $(\bar{A})^c = \text{ext}(A)$.

Soit $p \in \text{ext}(A)$; alors \exists un ouvert G tel que

$$p \in G \subset A^c \quad \text{ce qui implique} \quad G \cap A = \emptyset.$$

Ainsi p n'est pas un point limite de A , c'est-à-dire $p \notin A'$, et $p \notin A$. Ainsi $p \notin A' \cup A = \bar{A}$. En d'autres termes $\text{ext}(A) \subset (\bar{A})^c$.

A présent supposons que $p \in (\bar{A})^c = (A \cup A')^c$. Ainsi $p \notin A'$, si bien qu'il \exists un ouvert G tel que

$$p \in G \quad \text{et} \quad (G \setminus \{p\}) \cap A = \emptyset$$

Mais on a également $p \notin A$, si bien que $G \cap A = \emptyset$ et $p \in G \subset A^c$. Ainsi $p \in \text{ext}(A)$, et $(\bar{A})^c = \text{ext}(A)$.

35. Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que l'application f qui à tout ensemble associe son intérieur, c'est-à-dire que $f(A) = \text{int}(A)$, ne commute pas avec la fonction g qui associe à chaque ensemble son adhérence, c'est-à-dire $g(A) = \bar{A}$.

Solution :

Considérons \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels, comme sous-ensemble de \mathbb{R} muni de la topologie usuelle. Rappelons (exemple 5.3) que l'intérieur de \mathbb{Q} est vide ; ainsi

$$(g \circ f)(\mathbb{Q}) = g(f(\mathbb{Q})) = g(\text{int}(\mathbb{Q})) = g(\emptyset) = \bar{\emptyset} = \emptyset$$

D'autre part, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et l'intérieur de \mathbb{R} est \mathbb{R} lui-même. Ainsi

$$(f \circ g)(\mathbb{Q}) = f(g(\mathbb{Q})) = f(\bar{\mathbb{Q}}) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Ainsi $g \circ f \neq f \circ g$, c'est-à-dire que f et g ne commutent pas.

VOISINAGES, SYSTEMES DE VOISINAGES

36. Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

Déterminer les voisinages (i) du point e , (ii) du point c .

Solution :

- (i) Un voisinage de e est un ensemble quelconque contenant un ouvert contenant e . Les ouverts contenant e sont $\{a, b, e\}$ et X . Les ensembles contenant $\{a, b, e\}$ sont $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, d, e\}$ et X ; le seul ensemble contenant X est X . Par conséquent la famille des voisinages de e , c'est-à-dire le système de voisinages de e est

$$\mathcal{N}_e = \{\{a, b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, X\}$$

- (ii) Les ouverts contenant c sont $\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ et X . Ainsi le système de voisinage de c est

$$\mathcal{N}_c = \{\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, X\}$$

37. Déterminer le système de voisinage d'un point p quelconque d'un espace topologique X muni de la topologie grossière.

Solution :

X et \emptyset sont les seuls ouverts de X ; ainsi X est le seul ouvert contenant p . De plus X est le seul ensemble contenant X . Ainsi $\mathcal{N}_p = \{X\}$.

38. Démontrer que l'intersection $N \cap M$ de deux voisinages quelconques N et M d'un point p est également un voisinage de p .

Solution :

N et M sont des voisinages de p , ainsi \exists des ouverts G, H tels que

$$p \in G \subset N \quad \text{et} \quad p \in H \subset M$$

Ainsi $p \in G \cap H \subset N \cap M$ et $G \cap H$ est ouvert, c'est-à-dire que $N \cap M$ est un voisinage de p .

39. Démontrer que tout ensemble M contenant un voisinage N d'un point p est également un voisinage de p .

Solution :

N est un voisinage de p , donc \exists un ouvert G tel que $p \in G \subset N$. Par hypothèse $N \subset M$, donc

$$p \in G \subset N \subset M \quad \text{ce qui implique} \quad p \in G \subset M$$

et donc M est un voisinage de p .

40. Indiquer si chacun des intervalles suivants est ou non un voisinage de 0 pour \mathbb{R} muni de la topologie usuelle. R. (i) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, (ii) $(-1, 0]$, (iii) $[0, \frac{1}{2})$, (iv) $(0, 1]$.

Solution :

- (i) Notons que $0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et que $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est ouvert ; ainsi $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est un voisinage de 0.
- (ii) et (iii) Tout ensemble \mathcal{U} -ouvert G contenant 0 contient un intervalle ouvert (a, b) contenant 0, c'est-à-dire que $a < 0 < b$; ainsi G contient à la fois des points plus grands et plus petits que 0. Ainsi ni $(-1, 0]$ ni $[0, \frac{1}{2})$ ne sont des voisinages de 0.
- (iv) L'intervalle $(0, 1]$ ne contient même pas 0 et n'est donc pas un voisinage de 0.

41. Démontrer qu'un ensemble G est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Solution :

Supposons que G soit ouvert ; alors chaque point $p \in G$ appartient à l'ouvert G contenu dans G . Ainsi G est un voisinage de chacun de ses points.

Réiproquement supposons que G soit voisinage de chacun de ses points. Alors pour chaque point $p \in G$, \exists un ouvert G_p tel que $p \in G_p \subset G$. Ainsi $G = \bigcup \{G_p : p \in G\}$ et est donc ouvert comme réunion d'ouverts.

42. Démontrer la proposition 5.10 : Soit \mathcal{N}_p le système de voisinages d'un point p dans un espace topologique X . Alors :

- (i) \mathcal{N}_p est non vide et p appartient à chaque élément de \mathcal{N}_p .
- (ii) L'intersection de deux éléments quelconques de \mathcal{N}_p appartient à \mathcal{N}_p .
- (iii) Tout ensemble contenant un élément de \mathcal{N}_p appartient à \mathcal{N}_p .
- (iv) Chaque élément $N \in \mathcal{N}_p$ contient un élément $G \in \mathcal{N}_p$ où G est voisinage de chacun de ses points.

Solution :

- (i) Si $N \in \mathcal{N}_p$, alors \exists un ouvert G tel que $p \in G \subset N$; ainsi $p \in N$. Notons que $X \in \mathcal{N}_p$ puisque X est un ouvert qui contient p ; ainsi $\mathcal{N}_p \neq \emptyset$.
- (ii) Démontré dans le problème 38. (iii) Démontré dans le problème 39.
- (iv) Si $N \in \mathcal{N}_p$, alors N est un voisinage de p , donc \exists un ouvert G tel que $p \in G \subset N$. Or, d'après le problème précédent, $G \in \mathcal{N}_p$ et G est un voisinage de chacun de ses points.

SOUS-ESPACES, TOPOLOGIE INDUIITE

43. Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

Déterminer les éléments de la topologie \mathcal{T}_A induite sur $A = \{a, c, e\}$.

Solution :

$\mathcal{T}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{T}\}$, donc les éléments de \mathcal{T}_A sont :

$$\begin{array}{llll} A \cap X = A & A \cap \{a\} = \{a\} & A \cap \{a, c, d\} = \{a, c\} & A \cap \{a, b, e\} = \{a, e\} \\ A \cap \emptyset = \emptyset & A \cap \{a, b\} = \{a\} & A \cap \{a, b, c, d\} = \{a, c\} & \end{array}$$

En d'autres termes, $\mathcal{T}_A = \{A, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, e\}\}$. Notons que $\{a, c\}$ n'est pas ouvert dans X , mais est ouvert relativement à A , c'est-à-dire est \mathcal{T}_A -ouvert.

44. Considérons la topologie usuelle \mathcal{U} de la droite réelle \mathbb{R} . Décrire la topologie \mathcal{U}_N induite sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers positifs.

Solution :

Remarquons que pour chaque entier positif $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\{n_0\} = \mathbb{N} \cap (n_0 - \frac{1}{2}, n_0 + \frac{1}{2})$$

et que $(n_0 - \frac{1}{2}, n_0 + \frac{1}{2})$ est \mathcal{U} -ouvert ; ainsi tout singleton $\{n_0\}$ de \mathbb{N} est ouvert relativement à \mathbb{N} . Ainsi tout sous-ensemble de \mathbb{N} est ouvert relativement à \mathbb{N} comme réunion de singletons. En d'autres termes \mathcal{U}_N est la topologie discrète sur \mathbb{N} .

45. Soit A un ensemble \mathcal{T} -ouvert de (X, \mathcal{T}) et soit $A \subset Y \subset X$. Montrer que A est également ouvert pour la topologie induite sur Y , c'est-à-dire que A est une partie \mathcal{T}_Y -ouverte de Y .

Solution :

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap G : G \in \mathcal{T}\}. \text{ Or } A \subset Y \text{ et } A \in \mathcal{T}; \text{ ainsi } A = Y \cap A \in \mathcal{T}_Y.$$

46. Considérons la topologie usuelle \mathcal{U} de la droite réelle \mathbb{R} . Déterminer si chacun des sous-ensembles suivants de $I = [0, 1]$ sont ouverts relativement à I ou non, c'est-à-dire \mathcal{T}_I ouverts : (i) $(\frac{1}{2}, 1]$, (ii) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, (iii) $(0, \frac{1}{2}]$.

Solution :

- (i) Notons que $(\frac{1}{2}, 1] = I \cap (\frac{1}{2}, 3)$ et que $(\frac{1}{2}, 3)$ est ouvert dans \mathbb{R} ; ainsi $(\frac{1}{2}, 1]$ est ouvert relativement à I .
- (ii) Puisque $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ est ouvert dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \in \mathcal{U}$, il est ouvert relativement à I d'après le problème précédent. D'ailleurs, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) = I \cap (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$.
- (iii) Puisque $(0, \frac{1}{2}]$ n'est égal à l'intersection de I avec aucun sous-ensemble \mathcal{U} -ouvert de \mathbb{R} , il n'est pas \mathcal{U}_I -ouvert.

47. Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . Montrer que la topologie induite \mathcal{T}_A est bien définie. En d'autres termes montrer que $\mathcal{T}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{T}\}$ est une topologie sur A .

Solution :

Puisque \mathcal{T} est une topologie, X et \emptyset appartiennent à \mathcal{T} . Ainsi $A \cap X = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$ appartiennent tous deux à \mathcal{T}_A , qui vérifie alors bien $[O_1]$.

A présent soit $\{H_i : i \in I\}$ une sous-famille de \mathcal{T}_A . D'après la définition même de \mathcal{T}_A , pour chaque $i \in I$, \exists un ensemble \mathcal{T} -ouvert G_i tel que $H_i = A \cap G_i$. D'après la propriété de distributivité de l'intersection par rapport à la réunion,

$$\cup_i H_i = \cup_i (A \cap G_i) = A \cap (\cup_i G_i)$$

Or $\cup_i G_i \in \mathcal{T}$ comme réunion d'ensembles \mathcal{T} -ouverts ; ainsi $\cup_i H_i \in \mathcal{T}_A$; Ainsi \mathcal{T}_A vérifie [O₂].

A présent supposons que $H_1, H_2 \in \mathcal{T}_A$. Alors $\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ tels que $H_1 = A \cap G_1$ et $H_2 = A \cap G_2$.

Or $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$ puisque \mathcal{T} est une topologie. Ainsi

$$H_1 \cap H_2 = (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = A \cap (G_1 \cap G_2)$$

appartient à \mathcal{T}_A .

Par conséquent \mathcal{T}_A vérifie [O₃] et est bien une topologie sur A .

48. Soit (X, \mathcal{T}) un sous-espace de (Y, \mathcal{T}^*) et soit (Y, \mathcal{T}^*) un sous-espace de (Z, \mathcal{T}^{**}) . Montrer que (X, \mathcal{T}) est également un sous-espace de (Z, \mathcal{T}^{**}) .

Solution :

Puisque $X \subset Y \subset Z$, (X, \mathcal{T}) est un sous-espace de (Z, \mathcal{T}^{**}) si et seulement si $\mathcal{T}_X^{**} = \mathcal{T}$. Soit $G \in \mathcal{T}$; à présent $\mathcal{T}_X^* = \mathcal{T}$, donc $\exists G^* \in \mathcal{T}_X^*$ pour lequel $G = X \cap G^*$. Or $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}_Y^{**}$, donc $\exists G^{**} \in \mathcal{T}^{**}$ tel que $G^* = Y \cap G^{**}$. Ainsi

$$G = X \cap G^* = X \cap Y \cap G^{**} = X \cap G^{**}$$

puisque $X \subset Y$; donc $G \in \mathcal{T}_X^{**}$. Par conséquent $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_X^{**}$.

A présent supposons que $G \in \mathcal{T}_X^{**}$, c'est-à-dire que $\exists H \in \mathcal{T}^{**}$ tel que $G = X \cap H$. Or $Y \in H \in \mathcal{T}_Y^{**} = \mathcal{T}^*$ donc $X \cap (Y \cap H) \in \mathcal{T}_X^* = \mathcal{T}$. Puisque

$$X \cap (Y \cap H) = X \cap H = G$$

Nous avons $G \in \mathcal{T}$. Par conséquent $\mathcal{T}_X^{**} \subset \mathcal{T}$ et le théorème est démontré.

PROBLEMES DIVERS

49. Soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble non vide X . De plus soit

$$k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

l'application identique, c'est-à-dire l'application telle que pour tout $A \subset X$, $k(A) = A$.

- (i) Vérifier que k vérifie les axiomes d'une fermeture de Kuratowski du théorème 5.12.
(ii) Déterminer la topologie induite par k sur X .

Solution :

- (i) $k(\emptyset) = \emptyset$ donc [K₁] est vérifié. $k(A \cup B) = A \cup B = k(A) \cup k(B)$ donc [K₃] est vérifié.
 $k(A) = A \supset A$, donc [K₂] est vérifié. $k(k(A)) = k(A)$, donc [K₄] est vérifié.

- (ii) Un sous-ensemble $F \subset X$ est fermé dans la topologie induite par k si et seulement si $k(F) = F$. Or $k(A) = A$ pour tout $A \subset X$, donc tout ensemble est fermé et donc k induit la topologie discrète.

50. Soit \mathcal{T} la topologie cofinie sur la droite réelle \mathbb{R} , et soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de \mathbb{R} dont les termes sont tous distincts. Montrer que $\langle a_n \rangle$ converge vers tout nombre réel $p \in \mathbb{R}$.

Solution :

Soit G un ouvert quelconque contenant $p \in \mathbb{R}$. Par définition de la topologie cofinie, G^c est un ensemble fini et ne peut donc contenir qu'un nombre fini de termes de la suite $\langle a_n \rangle$ puisque les termes sont tous distincts. Ainsi G contient presque tous les termes de la suite $\langle a_n \rangle$ et donc $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

51. Soit \mathbf{T} la famille de toutes les topologies sur un ensemble non vide X , ordonnée par inclusion. Montrer que \mathbf{T} est un treillis complet, c'est-à-dire que si \mathbf{S} est une sous-famille non vide de \mathbf{T} alors $\text{sup}(\mathbf{S})$ et $\text{inf}(\mathbf{S})$ existent.

Solution :

Soit $\mathcal{T}_1 = \cap \{ \mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathbf{S} \}$. D'après le théorème 5.1, \mathcal{T}_1 est une topologie ; ainsi $\mathcal{T}_1 \in \mathbf{T}$ et $\mathcal{T}_1 = \text{inf}(\mathbf{S})$.

A présent soit \mathbf{B} l'ensemble de tous les majorants de \mathbf{S} . Remarquons que \mathbf{B} est non vide puisque par exemple la topologie discrète \mathcal{D} sur X appartient à \mathbf{B} . Soit $\mathcal{T}_2 = \cap \{ \mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathbf{B}\}$. A nouveau d'après le théorème 5.1, \mathcal{T}_2 est une topologie sur X et de plus $\mathcal{T}_2 = \text{sup}(\mathbf{S})$.

52. Soit X un ensemble non vide, et, pour chaque point $p \in X$ soit \mathcal{A}_p la famille des sous-ensembles de X contenant p .

- (i) Vérifier que \mathcal{A}_p vérifie les axiomes des voisinages du théorème 5.11.
(ii) Trouver quelle est la topologie induite sur X .

Solution :

- (i) Puisque $p \in X$, $X \in \mathcal{A}_p$ et donc $\mathcal{A}_p \neq \emptyset$. Par hypothèse p appartient à chaque élément de \mathcal{A}_p . Ainsi [A₁] est vérifié.

Si $M, N \in \mathcal{A}_p$, alors $p \in M$ et $p \in N$, et donc $p \in M \cap N$. Ainsi $M \cap N \in \mathcal{A}_p$ et donc [A₂] est vérifié.

Si $N \in \mathcal{A}_p$ et que $N \subset M$ c'est-à-dire si $p \in N \subset M$, alors $p \in M$. Ainsi $M \in \mathcal{A}_p$ et donc [A₃] est vérifié.

Par définition de \mathcal{A}_p , tout $A \subset X$ ■ la propriété que $A \in \mathcal{A}_p$ pour chaque $p \in A$. Ainsi [A₄] est vérifié.

- (ii) Un sous-ensemble $A \subset X$ est ouvert dans la topologie induite sur X si et seulement si $A \in \mathcal{A}_p$ pour tout $p \in A$. Puisque tout sous-ensemble de X ■ cette propriété, la topologie induite sur X est la topologie discrète.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES TOPOLOGIQUES

53. Déterminer toutes les topologies possibles sur l'ensemble $X = \{a, b\}$.
54. Démontrer le théorème 5.1 : Soit $\{ \mathcal{T}_i : i \in I\}$ une famille quelconque de topologies sur un ensemble X , alors $\cap_i \mathcal{T}_i$ est également une topologie sur X .
55. Soit X un ensemble infini et soit \mathcal{T} une topologie sur X dans laquelle toutes les parties infinies de X sont ouvertes. Montrer que \mathcal{T} est la topologie discrète sur X .
56. Soit X un ensemble infini et supposons que \mathcal{T} soit formée de \emptyset ainsi que de tous les sous-ensembles de X dont les complémentaires sont au plus dénombrables.
- (i) Démontrer que (X, \mathcal{T}) est un espace topologique.
(ii) Si X est au plus dénombrable, décrire la topologie définie par \mathcal{T} .
57. Soit $\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k : k \in \mathbb{R}\}$ la famille des parties du plan \mathbb{R}^2 où
- $$G_k = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x > y + k\}$$
- (i) Démontrer que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{R}^2 .
(ii) Est-ce que \mathcal{T} est encore une topologie sur \mathbb{R}^2 si on remplace " $k \in \mathbb{R}$ " par " $k \in \mathbb{N}$ " ? par " $k \in \mathbb{Q}$ " ?
58. Démontrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ est un espace topologique, les éléments de \mathcal{T} étant \emptyset et les complémentaires des familles finies de points et de droites.
59. Soit $\{p\}$ un singleton arbitraire tel que $p \notin \mathbb{R}$; par exemple $\{\mathbb{R}\}$. De plus soit $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$ et \mathcal{T} la famille des sous-ensembles de \mathbb{R}^* formée de tous les sous-ensembles \mathcal{U} -ouverts de \mathbb{R} ainsi que des complémentaires (relativement à \mathbb{R}^*) de tous les \mathcal{U} -fermés bornés. Montrer que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{R}^* .
60. Soit $\{p\}$ un singleton arbitraire tel que $p \notin \mathbb{R}$; et soit $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$. De plus soit \mathcal{T} la famille des sous-ensembles de \mathbb{R}^* formée de toutes les parties de \mathbb{R} ainsi que des complémentaires (relativement à \mathbb{R}^*) de toutes les parties finies de \mathbb{R} . Démontrer que \mathcal{T} est une topologie sur \mathbb{R}^* .

POINTS D'ACCUMULATION, ENSEMBLES DERIVES

61. Démontrer que : $A' \cup B' = (A \cup B)'$.
62. Démontrer que si p est un point limite de l'ensemble A , alors p est égal et un point limite de $A \setminus \{p\}$.
63. Démontrer que si X est un espace topologique cofini, alors A' est fermé pour tout sous-ensemble A de X .
64. Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ où \mathcal{T} est formée par \mathbb{R}, \emptyset et tous les intervalles infinis ouverts $E_a = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Trouver l'ensemble dérivé (i) de l'intervalle $[4, 10]$; (ii) de \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs.
65. Soit \mathcal{T} la topologie de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{p\}$ définie dans le problème 59.
- Déterminer les points d'accumulation des ensembles suivants :
 - de l'intervalle ouvert (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$
 - de l'intervalle infini ouvert (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$
 - de \mathbb{R} .
 - Déterminer les sous-ensembles de \mathbb{R}^* admettant p comme point limite.
66. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur un ensemble X , \mathcal{T}_1 étant moins fine que \mathcal{T}_2 , c'est-à-dire que $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
- Montrer que tout point d'accumulation pour \mathcal{T}_2 d'un sous-ensemble A de X est également point d'accumulation pour \mathcal{T}_1 .
 - Construire un exemple dans lequel la reciproque de (i) n'est pas vérifiée.

ENSEMBLES FERMES, ADHERENCE OU FERMETURE D'UN ENSEMBLE, SOUS-ENSEMBLES DENSES

67. Construire un espace topologique non discret dans lequel les ensembles fermés sont identiques aux ensembles ouverts.
68. Démontrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Construire un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée.
69. Démontrer que $\overline{A \setminus B} \subset \overline{(A \setminus B)}$. Construire un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée.
70. Démontrer que si A est ouvert, alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
71. Démontrer que si A est un sous-ensemble dense de (X, \mathcal{T}) et B un sous-ensemble ouvert non vide de X , alors $A \cap B \neq \emptyset$.
72. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux topologies sur X , \mathcal{T}_1 étant moins fine que \mathcal{T}_2 . Montrer que l'adhérence pour \mathcal{T}_2 de tout sous-ensemble A de X est contenu dans l'adhérence pour \mathcal{T}_1 de A .
73. Montrer que tout sous-ensemble non fini d'un espace topologique infini cofini X est dense dans X .
74. Montrer que tout ouvert non vide d'un espace topologique muni de la topologie grossière X est dense dans X .

INTERIEUR, EXTERIEUR, FRONTIERE

75. Soit X un espace discret et soit $A \subset X$. Trouver (i) $\text{int}(A)$, (ii) $\text{ext}(A)$, et (iii) $b(A)$.
76. Démontrer que :
 - $b(A) \subset A$ si et seulement si A est fermé.
 - $b(A) \cap A = \emptyset$ si et seulement si A ouvert.
 - $b(A) = \emptyset$ si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé.
77. Démontrer que si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, alors $b(A \cup B) = b(A) \cup b(B)$.
78. Démontrer que : (i) $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$, (ii) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$. Construire un exemple dans lequel l'égalité en (ii) n'est pas vérifiée.
79. Démontrer que : $b(A^\circ) \subset b(A)$. Construire un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée.
80. Montrer que $\text{int}(A) \cup \text{ext}(A)$ n'est pas nécessairement dense dans un espace X . (C'est vrai si $X = \mathbb{R}$.)

81. Démontrer que si \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont deux topologies sur X , \mathcal{T}_1 étant moins fine que \mathcal{T}_2 , c'est-à-dire $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, et si $A \subset X$, alors :
- L'intérieur de A pour \mathcal{T}_1 est contenu dans l'intérieur de A pour \mathcal{T}_2 .
 - La frontière pour \mathcal{T}_2 de A est contenue dans la frontière pour \mathcal{T}_1 de A .

VOISINAGES, SYSTEMES DE VOISINAGES

82. Soit X un espace topologique cofini. Montrer que tout voisinage d'un point $p \in X$ est un ouvert.
83. Soit X un espace topologique muni de la topologie grossière. Déterminer le système de voisinages \mathcal{N}_p d'un point quelconque $p \in X$.
84. Montrer que si \mathcal{N}_p est fini, alors $\bigcap \{N : N \in \mathcal{N}_p\}$ appartient à $\overline{\mathcal{N}_p}$.

SOUSS-ESPACES, TOPOLOGIE INDUIITE

85. Montrer que tout sous-espace d'un espace discret est également discret.
86. Montrer que tout sous-espace d'un espace muni de la topologie grossière est également muni de la topologie grossière.
87. Soit (Y, \mathcal{T}_Y) un sous-espace de (X, \mathcal{T}) . Montrer que $E \subset Y$ est fermé pour \mathcal{T}_Y si et seulement si $E = Y \cap F$, où F est un fermé de X pour \mathcal{T} .
88. Soit (A, \mathcal{T}_A) un sous-espace de (X, \mathcal{T}) . Démontrer que \mathcal{T}_A est formée des éléments de \mathcal{T} contenus dans A , c'est-à-dire $\mathcal{T}_A = \{G : G \subset A, G \in \mathcal{T}\}$, si et seulement si A est un ouvert de X pour \mathcal{T} .
89. Soit (Y, \mathcal{T}_Y) un sous-espace de (X, \mathcal{T}) . Pour tout sous-ensemble A de Y , soit \bar{A} et A° l'adhérence et l'intérieur de A par rapport à \mathcal{T} et soit $(A)_Y$ et $(A^\circ)_Y$ l'adhérence et l'intérieur de A par rapport à \mathcal{T}_Y . Démontrer que (i) $(\bar{A})_Y = \bar{A} \cap Y$, (ii) $A^\circ = (A^\circ)_Y \cap Y^\circ$.
90. Soient A , B et C des sous-ensembles d'un espace topologique X avec $C \subset A \cup B$. Si A , B et $A \cup B$ sont munis de la topologie induite, démontrer que C est ouvert relativement à $A \cup B$ si et seulement si $C \cap A$ est ouvert relativement à A et si $C \cap B$ est ouvert relativement à B .

DEFINITIONS EQUIVALENTEES D'UNE TOPOLOGIE

91. Démontrer le théorème 5.11 : Soit X un ensemble non vide et supposons qu'il soit associé à chaque point $p \in X$ une famille \mathcal{A}_p de parties de X vérifiant les axiomes suivants :
- [A₁] \mathcal{A}_p n'est pas vide et p appartient à chaque élément de la famille \mathcal{A}_p .
 - [A₂] L'intersection de deux éléments quelconques de la famille \mathcal{A}_p appartient encore à \mathcal{A}_p .
 - [A₃] Tout sous-ensemble contenant un élément de la famille \mathcal{A}_p appartient à \mathcal{A}_p .
 - [A₄] Chaque élément $N \in \mathcal{A}_p$ contient un élément $G \in \mathcal{A}_p$ tel que $G \in \mathcal{A}_g$ pour tout $g \in G$.
- Alors il existe une topologie et une seule \mathcal{T} sur X telle que A est le système de voisinage pour \mathcal{T} du point $p \in X$.
92. Démontrer le théorème 5.12 : Soit X un ensemble non vide et soit $k : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ vérifiant les axiomes d'une fermeture de Kuratowski :
- $$[\mathbf{K}_1] \quad k(\emptyset) = \emptyset, \quad [\mathbf{K}_2] \quad A \subset k(A), \quad [\mathbf{K}_3] \quad k(A \cup B) = k(A) \cup k(B), \quad [\mathbf{K}_4] \quad k(k(A)) = k(A)$$
- Alors il existe une topologie et une seule \mathcal{T} sur X telle que $k(A)$ soit la fermeture ou l'adhérence pour \mathcal{T} de $A \subset X$.
93. Démontrer le théorème suivant : Soit X un ensemble non vide et soit $i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes
- $i(X) = X$,
 - $i(A) \subset A$,
 - $i(A \cup B) = i(A) \cup i(B)$,
 - $i(i(A)) = i(A)$

Alors il existe une topologie \mathcal{T} et une seule sur X telle que $i(A)$ soit l'intérieur pour \mathcal{T} de $A \subset X$.

94. Démontrer le théorème suivant : Soit X un ensemble non vide et soit \mathcal{F} une famille de parties de X ayant les propriétés suivantes :
- X et \emptyset appartiennent à \mathcal{F} .
 - L'intersection de toute famille d'éléments de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .
 - La réunion de deux éléments quelconques de \mathcal{F} appartient à \mathcal{F} .

Alors il existe une topologie \mathcal{T} et une seule sur X telle que les éléments de \mathcal{F} soient précisément les fermés pour \mathcal{T} de X .

95. Supposons qu'un voisinage d'un nombre réel $p \in \mathbb{R}$ soit un ensemble quelconque contenant p ainsi que tous les nombres rationnels d'un intervalle ouvert (a, b) tel que $a < p < b$.
- Montrer que ces voisinages vérifient bien les axiomes des voisinages et définissent donc une topologie sur la droite réelle \mathbb{R} .
 - Montrer qu'aucun ensemble de nombres irrationnels ne contient de points d'accumulation.
 - Montrer qu'aucune suite de nombres irrationnels, telle que $\langle \pi/2, \pi/3, \pi/4, \dots \rangle$, ne converge.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

53. $\{X, \emptyset\}, \{X, \{a\}, \emptyset\}, \{X, \{b\}, \emptyset\}$ et $\{X, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.
56. (ii) La topologie discrète.
64. (i) $(-\infty, 10]$ (ii) \mathbb{R}
65. (i): (1) $[a, b]$, (2) $[a, \infty) \cup \{p\}$, (3) \mathbb{R}^* . (ii) Les sous-ensembles non bornés de \mathbb{R} .
67. $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$
75. (i) A , (ii) A^c , (iii) \emptyset
80. Soit $X = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière et soit $A = \{a\}$.

CHAPITRE 6

Bases et sous-bases

BASE D'UNE TOPOLOGIE

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Une famille \mathcal{B} d'ouverts de X , c'est-à-dire $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, est une base pour la topologie \mathcal{T} ssi

(i) tout ouvert $G \in \mathcal{T}$ est réunion d'éléments de \mathcal{B} .

De manière équivalente, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de \mathcal{T} ssi

(ii) pour tout point p appartenant à un ouvert G il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $p \in B \subset G$.

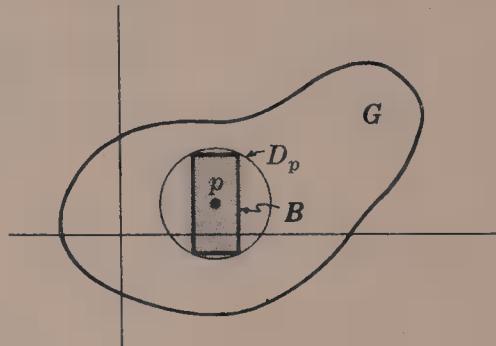
Exemple 1.1 : Les intervalles ouverts forment une base pour la topologie usuelle de la droite réelle \mathbb{R} . Car si $G \subset \mathbb{R}$ est ouvert et si $p \in G$ alors par définition, \exists un intervalle (a, b) tel que $p \in (a, b) \subset G$.

De manière analogue, les disques ouverts forment une base pour la topologie usuelle du plan \mathbb{R}^2 .

Exemple 1.2 : Les rectangles ouverts du plan \mathbb{R}^2 de côtés parallèles aux axes forment également une base \mathcal{B} pour la topologie usuelle du plan \mathbb{R}^2 . En effet soit $G \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $p \in G$. Alors il existe un disque ouvert D_p centré en p tel que $p \in D_p \subset G$. Alors tout rectangle $B \in \mathcal{B}$ dont les sommets sont sur le bord de D_p vérifie

$$p \in B \subset D_p \subset G \text{ soit } p \in B \subset G$$

ainsi qu'il est indiqué sur le schéma. En d'autres termes, \mathcal{B} vérifie la condition (ii) ci-dessus.



Exemple 1.3 : Considérons un espace discret quelconque (X, \mathcal{D}) . Alors la famille $\mathcal{B} = \{\{p\} : p \in X\}$ des singletons de X est une base pour la topologie discrète \mathcal{D} sur X . En effet chaque singleton $\{p\}$ est ouvert pour \mathcal{D} , puisque tout $A \subset X$ est ouvert pour \mathcal{D} ; de plus, tout ensemble est réunion de singletons. D'ailleurs toute autre famille \mathcal{B}^* de parties de X est une base de \mathcal{D} si et seulement si elle contient la famille \mathcal{B} , c'est-à-dire $\mathcal{B}^* \supset \mathcal{B}$.

Nous allons nous poser alors la question suivante : étant donnée une famille \mathcal{B} de parties de X , quand est-ce que la famille \mathcal{B} va être une base pour une topologie définie sur X ? Il est clair que la condition $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$ est nécessaire puisque X est ouvert pour toute topologie définie sur X . L'exemple suivant va montrer qu'on a également besoin d'autres conditions.

Exemple 1.4 : Soit $X = \{a, b, c\}$. Nous allons montrer que la famille \mathcal{B} formée de $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ ne peut être une base d'aucune topologie définie sur X . En effet $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$ seraient alors ouverts et donc leur intersection

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$$

seraient elle-même ouverte ; mais $\{b\}$ n'est pas réunion d'éléments de \mathcal{B} .

Le théorème suivant donne des conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une famille d'ensembles soit une base d'une topologie.

Théorème 6.1 : Soit \mathcal{B} une famille de parties d'un ensemble non vide X . Alors \mathcal{B} est une base d'une topologie sur X si et seulement si elle possède les deux propriétés suivantes :

- (i) $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.
- (ii) Pour tout $B, B^* \in \mathcal{B}$, $B \cap B^*$ est réunion d'éléments de \mathcal{B} , ou de manière équivalente si $p \in B \cap B^*$ alors $\exists B_p \in \mathcal{B}$ tel que $p \in B_p \subset B \cap B^*$.

Exemple 1.5 : Soit \mathcal{B} la famille des intervalles semi-ouverts de la droite réelle \mathbb{R} :

$$\mathcal{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

Il est clair que \mathbb{R} est réunion d'éléments de \mathcal{B} puisque tout nombre réel appartient à un intervalle semi-ouvert. De plus, l'intersection $(a, b] \cap (c, d]$ de deux intervalles semi-ouverts ouverts à gauche, fermés à droite est soit vide soit égale à un autre intervalle semi-ouvert ouvert à gauche, fermé à droite. Par exemple,

$$\text{si } a < c < b < d \quad \text{alors} \quad (a, b] \cap (c, d] = (c, b]$$

comme il est indiqué dans le schéma ci-dessous.



Ainsi la famille \mathcal{T} formée par les réunions d'intervalles semi-ouverts ouverts à gauche, fermés à droite, est une topologie sur \mathbb{R} , c'est-à-dire \mathcal{B} est une base d'une topologie \mathcal{T} sur \mathbb{R} . Cette topologie \mathcal{T} est appelée topologie de la *limite supérieure* sur \mathbb{R} . Remarquons que $\mathcal{T} \neq \mathcal{U}$.

De manière analogue, la famille des intervalles semi-ouverts, fermés à gauche ouverts à droite

$$\mathcal{B}^* = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

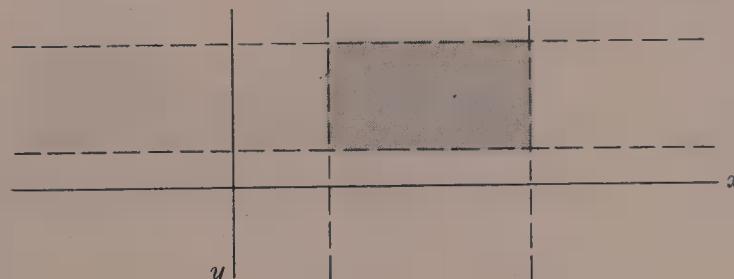
est une base pour une topologie \mathcal{T}^* sur \mathbb{R} appelée topologie de la *limite inférieure* sur \mathbb{R} .

Sous-bases

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Une famille \mathcal{S} d'ouverts de X , c'est-à-dire $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, est une *sous-base* pour une topologie \mathcal{T} sur X ssi les intersections finies d'éléments de \mathcal{S} forment une base de \mathcal{T} .

Exemple 2.1 : Remarquons que tout intervalle ouvert (a, b) de la droite \mathbb{R} est égal à l'intersection des deux intervalles infinis ouverts (a, ∞) et $(-\infty, b)$: $(a, b) = (a, \infty) \cap (-\infty, b)$. Or les intervalles ouverts forment une base pour la topologie usuelle sur \mathbb{R} : ainsi la famille \mathcal{S} de tous les intervalles infinis ouverts est une sous-base de \mathbb{R} .

Exemple 2.2 : L'intersection d'une bande infinie ouverte verticale et d'une bande infinie ouverte horizontale dans le plan est un rectangle ouvert comme on l'a représenté sur le schéma ci-dessous,



Or comme il a été noté précédemment, les rectangles ouverts constituent une base pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 . Par conséquent, la famille \mathcal{S} des bandes infinies ouvertes est une sous-base pour \mathbb{R}^2 .

TOPOLOGIE ENGENDREE PAR UNE FAMILLE D'ENSEMBLES

Soit \mathcal{A} une famille quelconque de parties d'un ensemble non vide X . Comme on l'a vu précédemment, \mathcal{A} peut ne pas être une base pour une topologie sur X . Cependant \mathcal{A} engendre toujours une topologie sur X au sens suivant :

Théorème 6.2 : Toute famille de parties \mathcal{A} d'un ensemble non vide X est une sous-base d'une topologie unique \mathcal{T} sur X ; c'est-à-dire que les intersections finies d'éléments de \mathcal{A} constituent une base pour une topologie \mathcal{T} sur X .

Exemple 3.1 : Considérons la famille suivante de parties de $X = \{a, b, c, d\}$:

$$\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}\}$$

Les intersections finies d'éléments de \mathcal{A} donnent la famille

$$\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \emptyset, X\}$$

(Notons que $X \in \mathcal{B}$ puisque, par définition, c'est l'intersection vide c'est-à-dire étendue à une famille vide d'éléments de \mathcal{A} .) Prenant les réunions des éléments de \mathcal{B} , on obtient la famille

$$\mathcal{T} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \emptyset, X, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}\}$$

laquelle est la topologie sur X engendrée par la famille \mathcal{A} .

Exemple 3.2 : Soit (X, \preceq) un ensemble totalement ordonné non vide quelconque. La topologie sur X engendrée par les parties de X de la forme

$$\{x \in X : x \prec p, p \in X\} \quad \text{ou} \quad \{x \in X : p \prec x, p \in X\}$$

est appelée la topologie de l'ordre sur X . Remarquons, d'après l'exemple 2.1, que la topologie usuelle de \mathbb{R} est en fait identique à la topologie (naturelle) de l'ordre sur \mathbb{R} .

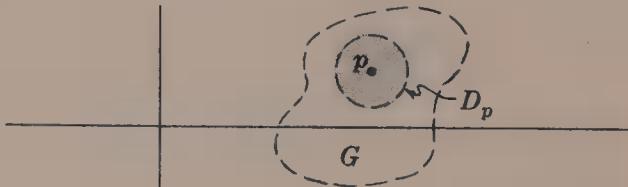
La topologie engendrée par une famille d'ensembles peut également être caractérisée de la manière suivante :

Proposition 6.3 : Soit \mathcal{A} une famille de parties d'un ensemble non vide X . Alors la topologie \mathcal{T} sur X engendrée par \mathcal{A} est l'intersection de toutes les topologies sur X qui contiennent \mathcal{A} .

BASE LOCALE

Soit p un point arbitraire d'un espace topologique X . Une famille \mathcal{B}_p d'ouverts contenant p est appelée une *base locale* en p ssi pour chaque ouvert G contenant p , $\exists G_p \in \mathcal{B}_p$ ayant la propriété que $p \in G_p \subset G$.

Exemple 4.1 : Considérons la topologie usuelle du plan \mathbb{R}^2 et un point quelconque $p \in \mathbb{R}^2$. Alors la famille \mathcal{B}_p des disques ouverts centrés en p est une base locale en p . En effet comme on l'a précédemment démontré, tout ouvert G contenant p contient également un disque ouvert D_p dont le centre est en p .



De façon analogue, la famille des intervalles ouverts $(a - \delta, a + \delta)$ de la droite \mathbb{R} , de centre $a \in \mathbb{R}$ est une base locale au point a .

Il est clair que la relation suivante entre une base "globale" d'une topologie et une base "locale" en un point est vérifiée :

Proposition 6.4 : Soit \mathcal{B} une base d'une topologie \mathcal{T} définie sur X et soit $p \in X$. Alors les éléments de la base \mathcal{B} qui contiennent p forment une base locale au point p .

Certaines notions définies précédemment en termes d'ouverts contenant un point p peuvent également être simplement définies en termes des éléments d'une base locale en p . Par exemple,

Proposition 6.5 : Un point p d'un espace topologique X est un point d'accumulation de $A \subset X$ ssi chaque élément d'une base locale \mathcal{B}_p en p contient un point de A différent de p .

Proposition 6.6 : Une suite (a_1, a_2, \dots) de points d'un espace topologique X converge vers $p \in X$ ssi chaque élément d'une base locale \mathcal{B}_p en p contient presque tous les termes de la suite.

Les trois propositions précédentes impliquent le corollaire suivant très utile.

Corollaire 6.7 : Soit \mathcal{B} une base d'une topologie \mathcal{T} définie sur X . Alors :

- (i) $p \in X$ est un point d'accumulation de $A \subset X$ ssi chaque ouvert de la base $B \in \mathcal{B}$ contenant p contient un point de A différent de p ;
- (ii) une suite (a_1, a_2, \dots) de points de X converge vers $p \in X$ ssi chaque ouvert de la base $B \in \mathcal{B}$ contenant p contient presque tous les termes de la suite.

Exemple 4.2 : Considérons la topologie de la limite inférieure \mathcal{T} sur la droite réelle \mathbb{R} qui a pour base les intervalles semi-ouverts, fermés à gauche ouverts à droite $[a, b)$, et soit $A = (0, 1)$. Notons que $G = [1, 2)$ est un ouvert pour \mathcal{T} contenant $1 \in \mathbb{R}$ pour lequel $G \cap A = \emptyset$; ainsi 1 n'est pas un point limite de A . Par contre, $0 \in \mathbb{R}$ est un point limite de A puisque n'importe quel ouvert de la base $[a, b)$ contenant 0 , c'est-à-dire pour lequel $a \leq 0 < b$, contient des points de A autres que 0 .

PROBLEMES RESOLUS

BASES

1. Montrer l'équivalence des deux définitions de la base d'une topologie, c'est-à-dire que si \mathcal{B} est une sous-famille de \mathcal{T} , alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Chaque $G \in \mathcal{T}$ est réunion d'éléments de \mathcal{B} .
 - (ii) Pour tout point p appartenant à un ouvert G , $\exists B_p \in \mathcal{B}$ tel que $p \in B_p \subset G$.

Solution :

Si $G = \bigcup_i B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$, alors chaque point $p \in G = \bigcup_i B_i$ appartient à l'un au moins des éléments B_{i_0} de la réunion ; donc

$$p \in B_{i_0} \subset \bigcup_i B_i = G$$

Réciproquement, si pour chaque $p \in G$, $\exists B_p \in \mathcal{B}$ tel que $p \in B_p \subset G$, alors

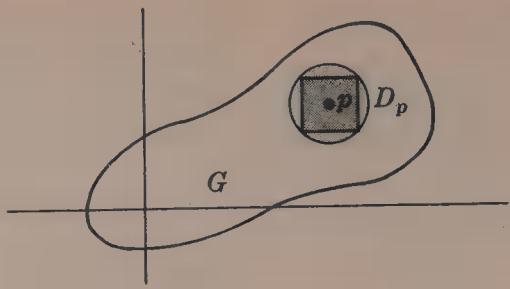
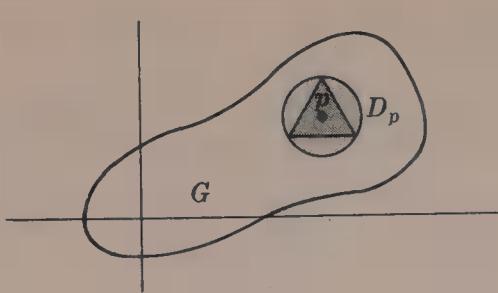
$$G = \bigcup \{B_p : p \in G\}$$

et G est réunion d'éléments de \mathcal{B} .

2. Déterminer si chacune des familles suivantes de parties du plan \mathbb{R}^2 est une base ou non pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 : (i) la famille des triangles équilatéraux ouverts ; (ii) les carrés ouverts de côtés parallèles aux axes.

Solution :

Les deux familles ci-dessus constituent une base pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 . En effet soit G un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit $p \in G$. Alors \exists un disque D_p centré en p tel que $p \in D_p \subset G$. Remarquons que soit un triangle équilatéral soit un carré peuvent être inscrits dans D_p comme on l'a montré sur les schémas ci-dessous.



Ainsi chaque famille vérifie la deuxième définition d'une base pour une topologie.

3. Soit \mathcal{B} une base d'une topologie \mathcal{T} sur X et soit \mathcal{B}^* une famille d'ouverts contenant \mathcal{B} , c'est-à-dire $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^* \subset \mathcal{T}$. Montrer que \mathcal{B}^* est également une base de \mathcal{T} .

Solution :

Soit G un ouvert de X . Puisque \mathcal{B} est une base de (X, \mathcal{T}) , G est réunion d'éléments de \mathcal{B} , c'est-à-dire $G = \bigcup_i B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$. Or $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$; ; ainsi chaque $B_i \in \mathcal{B}$ appartient aussi à \mathcal{B}^* . Ainsi G est réunion d'éléments de \mathcal{B}^* , et donc \mathcal{B}^* est également une base de (X, \mathcal{T}) .

4. Soit X un espace discret et soit \mathcal{B} la famille des singletons de X , c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\{p\} ; p \in X\}$. Montrer que toute famille \mathcal{B}^* de parties de X est une base de X si et seulement si elle contient la famille \mathcal{B} .

Solution :

Supposons que \mathcal{B}^* soit une base de X . Puisque tout singleton $\{p\}$ est ouvert dans un espace discret, $\{p\}$ doit être réunion d'éléments de \mathcal{B}^* . Or un singleton ne peut être réunion que de lui-même ou réunion de lui-même et de l'ensemble vide \emptyset . Ainsi $\{p\}$ doit être un élément de \mathcal{B}^* , ainsi, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^*$.

Réiproquement puisque \mathcal{B} est une base d'un espace discret X (voir l'exemple 1.3), toute famille contenant \mathcal{B} est également une base de X .

5. Démontrer le théorème 6.1 : Soit \mathcal{B} une famille de parties d'un ensemble non vide X . Alors \mathcal{B} est une base d'une topologie de X si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.
- (ii) Pour tout $B, B^* \in \mathcal{B}$, $B \cap B^*$ est la réunion d'éléments de \mathcal{B} , ou, de façon équivalente si $p \in B \cap B^*$ alors $\exists B_p \in \mathcal{B}$ tel que $p \in B_p \subset B \cap B^*$.

Solution :

Supposons que \mathcal{B} soit une base de la topologie \mathcal{T} définie sur X . Puisque X est ouvert, X est réunion d'éléments de \mathcal{B} . Ainsi X est réunion de tous les éléments de \mathcal{B} , c'est-à-dire $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$. De plus si $B, B^* \in \mathcal{B}$ alors en particulier B et B^* sont ouverts. Ainsi l'intersection $B \cap B^*$ est également ouverte et, puisque \mathcal{B} est une base de \mathcal{T} , elle est réunion d'éléments de \mathcal{B} . Ainsi (i) et (ii) sont vérifiées.

Réiproquement, supposons que \mathcal{B} soit une famille de parties de X qui vérifient (i) et (ii) ci-dessus. Soit \mathcal{T} la famille de toutes les parties de X qui sont réunions d'éléments de \mathcal{B} . Nous affirmons que \mathcal{T} est une topologie sur X . Remarquons que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de cette topologie.

D'après (i), $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$; ainsi $X \in \mathcal{T}$. Notons que \emptyset est réunion de la sous-famille vide de \mathcal{B} , c'est-à-dire $\emptyset = \bigcup \{B : B \in \emptyset \subset \mathcal{B}\}$; ; ainsi $\emptyset \in \mathcal{T}$, et donc \mathcal{T} vérifie [O₁].

A présent soit $\{G_i\}$ une famille d'éléments de \mathcal{T} . Par définition de \mathcal{T} , chaque G_i est réunion d'éléments de \mathcal{B} ; ; ainsi la réunion $\bigcup_i G_i$ est également réunion d'éléments de \mathcal{B} et donc appartient à \mathcal{T} . Ainsi \mathcal{T} vérifie [O₂].

Enfin supposons que $G, H \in \mathcal{T}$. Nous devons montrer que $G \cap H$ appartient également à \mathcal{T} . D'après la définition de \mathcal{T} , il existe deux sous-familles $\{B_i : i \in I\}$ et $\{B_j : j \in J\}$ de \mathcal{B} telles que $G = \bigcup_i B_i$ et que $H = \bigcup_j B_j$. Alors, d'après les propriétés de distributivité,

$$G \cap H = (\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup \{B_i \cap B_j : i \in I, j \in J\}$$

Or d'après (ii), $B_i \cap B_j$ est réunion d'éléments de \mathcal{B} ; ; ainsi $G \cap H = \bigcup \{B_i \cap B_j : i \in I, j \in J\}$ est également réunion d'éléments de \mathcal{B} et donc appartient à \mathcal{T} qui par conséquent vérifie [O₃]. Ainsi \mathcal{T} est une topologie sur X de base \mathcal{B} .

6. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}^* les bases respectives des topologies \mathcal{T} et \mathcal{T}^* définies sur un ensemble X . Supposons que chaque $B \in \mathcal{B}$ soit réunion d'éléments de \mathcal{B}^* . Montrer que \mathcal{T} est moins fine que \mathcal{T}^* , c'est-à-dire $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

Solution :

Soit G un ouvert pour \mathcal{T} . Alors G est réunion d'éléments de \mathcal{B} , c'est-à-dire $G = \bigcup_i B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$. Or, par hypothèse, chaque $B_i \in \mathcal{B}$ est réunion d'éléments de \mathcal{B}^* , et donc $G = \bigcup_i B_i$ est également réunion d'éléments de \mathcal{B}^* qui sont des ouverts pour \mathcal{T}^* . Ainsi G est également un ouvert pour \mathcal{T}^* et donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

7. Montrer que la topologie usuelle \mathcal{U} de la droite réelle \mathbb{R} est moins fine que la topologie de la limite supérieure \mathcal{T} de \mathbb{R} qui a pour base les intervalles ouverts à gauche, fermés à droite $(a, b]$.

Solution :

Notons d'abord que tout intervalle ouvert est égal à une réunion d'intervalles ouverts à gauche fermés à droite. Par exemple.

$$(a, b) = \bigcup \{(a, b - 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Puisque la famille des intervalles ouverts est une base de \mathcal{U} , d'après le problème précédent $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, c'est-à-dire tout ouvert pour \mathcal{U} est ouvert pour \mathcal{T} .

8. Considérons la topologie de la limite supérieure \mathcal{T} sur la droite \mathbb{R} qui a pour base les intervalles ouverts à gauche fermés à droite $(a, b]$. (i) Montrer que l'intervalle infini ouvert $(4, \infty)$ et l'intervalle infini fermé $(-\infty, 2]$ sont les ouverts pour \mathcal{T} . (ii) Montrer que tout intervalle infini ouvert (a, ∞) et tout intervalle infini fermé $(-\infty, b]$ sont des ouverts pour \mathcal{T} . (iii) Montrer que tout intervalle ouvert à gauche fermé à droite $(a, b]$ est à la fois ouvert et fermé pour \mathcal{T} .

Solution :

(i) Remarquons que

$(4, \infty)$	$=$	$(4, 5] \cup (4, 6] \cup (4, 7] \cup (4, 8] \cup \dots$
$(-\infty, 2]$	$=$	$(0, 2] \cup (-1, 2] \cup (-2, 2] \cup \dots$

Ainsi chacun est ouvert pour \mathcal{T} puisque chacun est réunion d'éléments de la base de \mathcal{T} .

(ii) De manière analogue

(a, ∞)	$=$	$(a, a+1] \cup (a, a+2] \cup (a, a+3] \cup \dots$
$(-\infty, b]$	$=$	$(b-1, b] \cup (b-2, b] \cup (b-3, b] \cup (b-4, b] \cup \dots$

Ainsi chacun est ouvert pour \mathcal{T} .

(iii) $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$, et les deux intervalles du deuxième membre sont ouverts, donc il en est de même de leur réunion et donc $(a, b]$ est fermé. Or $(a, b]$ appartient à la base de \mathcal{T} et donc est également ouvert.

SOUS-BASE, TOPOLOGIE ENGENDREE PAR UNE FAMILLE D'ENSEMBLES

9. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et soit $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$. Trouver quelle est la topologie sur X engendrée par \mathcal{A} .

Solution :

Déterminons d'abord la famille \mathcal{B} de toutes les intersections finies d'éléments de la famille \mathcal{A} :

$$\mathcal{B} = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$$

(Notons que $X \in \mathcal{B}$, puisque par définition X est l'intersection de la sous-famille vide d'éléments de \mathcal{A} .)
Prenant à présent les réunions d'éléments de \mathcal{B} on obtient la famille

$$\mathcal{T} = \{X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$$

qui est la topologie sur X engendrée par \mathcal{A} .

10. Déterminer la topologie \mathcal{T} sur la droite réelle \mathbf{R} engendrée par la famille \mathcal{A} des intervalles fermés $[a, a + 1]$ de longueur 1.

Solution :

Soit p un point quelconque dans \mathbf{R} . Notons que les intervalles fermés $[p - 1, p]$ et $[p, p + 1]$ appartiennent à \mathcal{A} comme étant de longueur 1. Ainsi

$$[p - 1, p] \cap [p, p + 1] = \{p\}$$

appartient à la topologie \mathcal{T} , c'est-à-dire tous les singletons $\{p\}$ sont ouverts pour \mathcal{T} , donc \mathcal{T} est la topologie discrète sur X .

11. Soit \mathcal{A} la famille des demi-plans ouverts H du plan \mathbf{R}^2 de la forme

$$H = \{\langle x, y \rangle : x < a, \text{ ou } x > a, \text{ ou } y < a, \text{ ou } y > a\}$$

(voir la figure ci-dessous.)



Trouver quelle est la topologie sur \mathbf{R}^2 engendrée par \mathcal{A} .

Solution :

Remarquons que tout rectangle ouvert $B = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ est égal à l'intersection des quatre demi-plans

$$\begin{array}{ll} H_1 = \{\langle x, y \rangle : a < x\} & H_3 = \{\langle x, y \rangle : c < y\} \\ H_2 = \{\langle x, y \rangle : x < b\} & H_4 = \{\langle x, y \rangle : y < d\} \end{array}$$

Puisque chaque $H \in \mathcal{A}$ est ouvert pour \mathcal{U} et puisque la famille de tous les rectangles ouverts B est une base pour la topologie usuelle \mathcal{U} sur \mathbf{R}^2 , la famille \mathcal{A} est une sous-base pour \mathcal{U} . C'est-à-dire que \mathcal{A} engendre la topologie usuelle du plan \mathbf{R}^2 .

12. Considérons la topologie discrète \mathcal{D} sur $X = \{a, b, c, d, e\}$. Trouver une sous-base \mathcal{S} de \mathcal{D} ne contenant aucun singleton.

Solution :

Rappelons que toute famille \mathcal{B} de parties de X est une base de la topologie discrète de \mathcal{D} sur X si elle contient tous les singletons de X . Ainsi \mathcal{S} est une sous-base de \mathcal{D} si les intersections finies d'éléments de \mathcal{S} donnent $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ et $\{e\}$. Ainsi $\mathcal{S} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}\}$ est une sous-base de \mathcal{D} .

13. Soit \mathcal{S} une sous-base d'une topologie \mathcal{T} sur X et soit A un sous-ensemble de X . Montrer que la famille $\mathcal{S}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{S}\}$ est une sous-base de la topologie induite \mathcal{T}_A sur A .

Solution :

Soit H un ouvert de A pour la topologie \mathcal{T}_A . Alors $H = A \cap G$ où G est un ouvert pour \mathcal{T} de X . Par hypothèse, \mathcal{S} est une sous-base de \mathcal{T} ; ainsi

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}}) \quad \text{où} \quad S_{i_k} \in \mathcal{S}$$

D'où

$$\begin{aligned} H &= A \cap G = A \cap [\cup_i (S_{i_1} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}})] \\ &= \cup_i [(A \cap S_{i_1}) \cap \cdots \cap (A \cap S_{i_{n_i}})] \end{aligned}$$

Ainsi H est réunion d'intersections finies d'éléments de \mathcal{S}_A et donc \mathcal{S}_A est une sous-base de T_A .

14. Montrer que tous les intervalles $(a, 1]$ et $[0, b)$, où $0 < a, b < 1$, constituent une sous-base pour la topologie induite sur l'intervalle $I = [0, 1]$ par la topologie usuelle.

Solution :

On rappelle que les intervalles infinis ouverts (a, ∞) et $(-\infty, b)$ constituent une sous-base pour la topologie usuelle de la droite réelle \mathbb{R} . Les intersections de ces intervalles infinis ouverts avec $I = [0, 1]$ sont les ensembles \emptyset , I , $(a, 1]$ et $[0, b)$ lesquels, d'après le problème précédent, constituent une sous-base de $I = [0, 1]$. Or on peut exclure l'ensemble vide \emptyset et l'espace tout entier I de toute sous-base ; ainsi les intervalles $(a, 1]$ et $[0, b)$ constituent une sous-base de I .

15. Montrer que si \mathcal{S} est une sous-base pour les topologies \mathcal{T} et \mathcal{T}^* sur X , alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Solution :

Supposons que $G \in \mathcal{T}$. Puisque \mathcal{S} est une sous-base pour \mathcal{T} , $G = \cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}})$ où $S_{i_k} \in \mathcal{S}$.

Or \mathcal{S} est également une sous-base de \mathcal{T}^* et donc $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^*$; ainsi chaque $S_{i_k} \in \mathcal{T}^*$. Puisque \mathcal{T}^* est une topologie, $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}} \in \mathcal{T}^*$ est donc $G \in \mathcal{T}^*$. Ainsi $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. De même $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$, et donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

16. Démontrer le théorème 6.2 : Toute famille \mathcal{A} de parties d'un ensemble non vide X est une sous-base pour une topologie unique sur X . C'est-à-dire que les intersections finies d'éléments de \mathcal{A} constituent une base pour une topologie \mathcal{T} sur X .

Solution :

Nous allons montrer que la famille \mathcal{B} des intersections finies d'éléments de \mathcal{A} vérifie les deux conditions du théorème 6.1 nécessaires pour qu'il s'agisse d'une base d'une topologie sur X :

- (i) $X = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.
- (ii) Pour $G, H \in \mathcal{B}$, $G \cap H$ est réunion d'éléments de \mathcal{B} .

Notons que $X \in \mathcal{B}$, puisque, par définition, X est l'intersection de la sous-famille vide d'éléments de \mathcal{A} ; ainsi

$$X = \cup \{B : B \in \mathcal{B}\}$$

De plus, si $G, H \in \mathcal{B}$, alors G et H sont des intersections finies d'éléments de \mathcal{A} . Ainsi $G \cap H$ est également une intersection finies d'éléments de \mathcal{A} et appartient donc à \mathcal{B} . Par conséquent \mathcal{B} est une base d'une topologie \mathcal{T} sur X pour laquelle \mathcal{A} est une sous-base. Le problème précédent montre que \mathcal{T} est unique.

17. Démontrer la proposition 6.3 : Soit \mathcal{A} une famille de parties d'un ensemble non vide X . Alors la topologie \mathcal{T} sur X engendrée par \mathcal{A} est égale à l'intersection de toutes les topologies sur X qui contiennent \mathcal{A} .

Solution :

Soit $\{T_i\}$ l'ensemble des topologies sur X qui contiennent \mathcal{A} , et soit $\mathcal{T}^* = \cap_i T_i$. Notons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^*$. Nous voulons montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$. Puisque \mathcal{T} est une topologie contenant \mathcal{A} , et que \mathcal{T}^* est égale à l'intersection de toutes les topologies jouissant de cette propriété, nous avons $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$.

D'autre part, supposons que $G \in \mathcal{T}$. Alors d'après la définition de \mathcal{T} ,

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_{n_i}}) \quad \text{où} \quad S_{i_k} \in \mathcal{A}$$

Or $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}^*$, ainsi chaque $S_{i_k} \in \mathcal{T}^*$. Par conséquent $S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}} \in \mathcal{T}^*$ et donc

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}}) \in \mathcal{T}^*$$

Nous avons montré que $G \in \mathcal{T}$ implique $G \in \mathcal{T}^*$; ainsi $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. Par conséquent $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

BASE LOCALE

18. Démontrer la proposition 6.5 : Un point p d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est un point d'accumulation de $A \subset X$ ssi chaque élément d'une base locale \mathcal{B}_p en p contient un point de A différent de p .

Solution :

Rappelons que $p \in X$ est un point d'accumulation de A ssi $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $G \in \mathcal{T}$ tel que $p \in G$. Or $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{T}$, donc, en particulier, $(B \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{B}_p$.

Réiproquement, supposons que $(B \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $B \in \mathcal{B}_p$, et soit G un ouvert quelconque de X contenant p . Alors $\exists B_0 \in \mathcal{B}_p$ tel que $p \in B_0 \subset G$. Mais alors

$$(G \setminus \{p\}) \cap A \supset (B_0 \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$$

Ainsi $(G \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire que p est un point d'accumulation de A .

19. Démontrer la proposition 6.6 : Une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de points d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) converge vers $p \in X$ ssi chaque élément d'une base locale \mathcal{B}_p en p contient presque tous les termes de la suite.

Solution :

On rappelle que $a_n \rightarrow p$ ssi tout ouvert $G \in \mathcal{T}$ contenant p contient presque tous les termes de la suite. Or $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{T}$, donc en particulier chaque $B \in \mathcal{B}_p$ contient presque tous les termes de la suite.

Réiproquement supposons que tout $B \in \mathcal{B}_p$ contienne presque tous les termes de la suite, et soit G un ouvert quelconque contenant p . Alors $\exists B_0 \in \mathcal{B}_p$ pour lequel $p \in B_0 \subset G$. Ainsi G contient également presque tous les termes de la suite, et donc $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

20. Montrer que tout point p d'un espace discret X admet une base locale finie.

Solution :

Notons que le singleton $\{p\}$ est un ouvert puisque toute partie d'un espace discret est un ouvert. Par conséquent la famille $\mathcal{B}_p = \{\{p\}\}$, c'est-à-dire la famille constituée par le singleton $\{p\}$ est une base locale en p puisque tout ouvert G contenant p doit contenir $\{p\}$.

21. Considérons la topologie de la limite supérieure \mathcal{T} sur la droite réelle \mathbb{R} , qui admet pour base la famille des intervalles semi-ouverts $(a, b]$. Déterminer si chacune des suites suivantes converge ou non vers 0 :

$$(i) \quad \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle \quad (ii) \quad \langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \rangle$$

Solution :

- (i) Non. Car l'ouvert pour $\mathcal{T}(-2, 0]$ contenant 0 ne contient aucun des termes de la suite.
- (ii) Oui. Car pour tout élément de la base $(a, b]$ contenant 0, c'est-à-dire pour lequel $a < 0 \leq b$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a < -1/n_0 < 0$. Ainsi $n > n_0$ implique $-1/n \in (a, b]$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

BASE D'UNE TOPOLOGIE

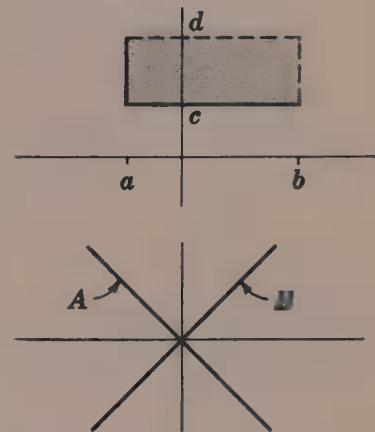
22. Démontrer que la famille des intervalles fermés $[a, b]$ où a et b sont rationnels et $a < b$ n'est pas une base d'une topologie sur la droite réelle \mathbb{R} ,

23. Montrer que la famille des intervalles fermés $[a, b]$ où a est rationnel et b irrationnel et $a < b$, est une base d'une topologie sur la droite réelle \mathbb{R} .
24. Soit \mathcal{B} une base d'une topologie \mathcal{T} sur X et soit $A \subset X$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{B}\}$ est une base de la topologie induite \mathcal{T}_A sur A .
25. Soit \mathcal{B} la famille des rectangles semi-ouverts du plan \mathbb{R}^2 représentés sur le schéma ci-contre, c'est-à-dire de la forme

$$\{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$
- (i) Montrer que \mathcal{B} est une base d'une topologie \mathcal{T} sur \mathbb{R}^2 .
- (ii) Montrer que la topologie induite \mathcal{T}_A sur la droite

$$A = \{(x, y) : x + y = 0\}$$
- est la topologie discrète sur A .
- (iii) Montrer que la topologie induite \mathcal{T}_B sur la droite

$$B = \{(x, y) : x = y\}$$
- n'est pas la topologie discrète sur B .



26. Soit \mathcal{B} une famille de parties d'un ensemble non vide X totalement ordonnée par inclusion. Montrer que \mathcal{B} est une base d'une topologie sur X si $X = \bigcup \{B : B \in \mathcal{B}\}$.
27. Montrer qu'une topologie \mathcal{T} sur X est finie si et seulement si \mathcal{T} admet une base finie.

SOUS-BASE

28. Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$. Trouver quelle est la topologie \mathcal{T} de X engendrée par $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$.
29. Déterminer quelle est la plus petite sous-base \mathcal{S} de la topologie discrète \mathcal{T} sur un ensemble non vide quelconque X .
30. Soit \mathcal{S} la famille des intervalles fermés $[a, b]$ où a et b sont rationnels, c'est-à-dire $a, b \in \mathbb{Q}$ et $a < b$. Montrer que $\mathcal{S} \cup \{\{p\} : p \in \mathbb{Q}\}$ est une base de la topologie \mathcal{T} de la droite réelle \mathbb{R} engendrée par \mathcal{S} .
31. Montrer que si \mathcal{S} est une sous-base d'une topologie \mathcal{T} sur X , alors $\mathcal{S} \setminus \{X, \emptyset\}$ est également une sous-base de \mathcal{T} .
32. Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}^* les topologies de X engendrées respectivement par \mathcal{A} et \mathcal{A}^* . Montrer que : (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ implique $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$; et (ii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^* \subset \mathcal{T}$ implique $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.
33. Soit \mathcal{S} une sous-base d'un espace topologique X et soit $G \subset X$ un ouvert contenant un point $p \in X$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'éléments de \mathcal{S} , par exemple S_1, S_2, \dots, S_m ayant la propriété que $p \in S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m \subset G$.

BASE LOCALE

34. Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique et soit \mathcal{A} une base locale pour \mathcal{T} en $p \in X$. Considérons une partie quelconque A de X telle que $p \in A \subset X$, et considérons la topologie induite \mathcal{T}_A sur A . Montrer que la famille suivante de parties de A forme une base locale pour \mathcal{T}_A en $p \in A$: $\mathcal{A}_A = \{A \cap G : G \in \mathcal{A}\}$.
35. Soit en X un espace topologique, $p \in X$, \mathcal{N}_p le système de voisinages en p et soit \mathcal{B}_p une base locale en p . Montrer que tout voisinage de p contient un élément de la base locale en p ; c'est-à-dire pour tout $N \in \mathcal{N}_p$, $\exists G \in \mathcal{B}_p$ tel que $G \subset N$.
36. Montrer que si un point p admet une base locale finie \mathcal{B}_p alors il admet également une base locale formée d'une seule partie.

37. Considérons la topologie de la limite supérieure \mathcal{T} sur la droite réelle \mathbb{R} qui admet pour base la famille des intervalles semi-ouverts $(a, b]$. Déterminer si chacune des suites suivantes converge ou non
 (i) $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$, (ii) $\langle -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \rangle$, (iii) $\langle -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$.
38. Soit \mathcal{T} la topologie sur la droite réelle \mathbb{R} engendrée par la famille \mathcal{S} des intervalles fermés $[a, b]$ où a et b sont rationnels (voir le problème 30).
 (i) Déterminer si chacune des suites suivante converge ou non
 (a) $\langle 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, \dots \rangle$, (b) $\langle \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{3}, \sqrt{2} + \frac{1}{4}, \dots \rangle$.
 (ii) Déterminer l'adhérence de chacune des parties suivantes de \mathbb{R} :
 (a) $(2, 4)$, (b) $(\sqrt{2}, 5]$, (c) $(-3, \pi)$, (d) $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.
 (iii) Montrer que tout sous-ensemble fini de \mathbb{R} est fermé pour \mathcal{T} .
39. Soit \mathcal{S} une sous-base d'un espace topologique X et soit $p \in X$.
 (i) Montrer sur un contre exemple que la famille $\mathcal{S}_p = \{S \in \mathcal{S} : p \in S\}$ n'est pas nécessairement une base locale en p .
 (ii) Montrer que les intersections finies d'éléments de \mathcal{S}_p constituent une base locale en p .
 (iii) Montrer qu'une suite $\langle a_n \rangle$ de X converge vers p si et seulement si chaque $S \in \mathcal{S}_p$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

28. $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$
37. (i) Non (ii) Oui (iii) Non.
38. (i) : (a) Non (b) Oui. (ii): (a) $(2, 4)$, (b) $[\sqrt{2}, 5]$, (c) $(-3, \pi)$, (d) A .
39. (ii) Indication : Utiliser le problème 33.

CHAPITRE 7

Continuité et homéomorphie

APPLICATIONS CONTINUES

Soient (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}^*) deux espaces topologiques. Une application f de X dans Y est continue relativement à \mathcal{T} et \mathcal{T}^* , ou simplement continue ssi l'image réciproque $f^{-1}[H]$ de tout ouvert pour \mathcal{T}^* de Y est un ouvert pour \mathcal{T} de X , c'est-à-dire, ssi

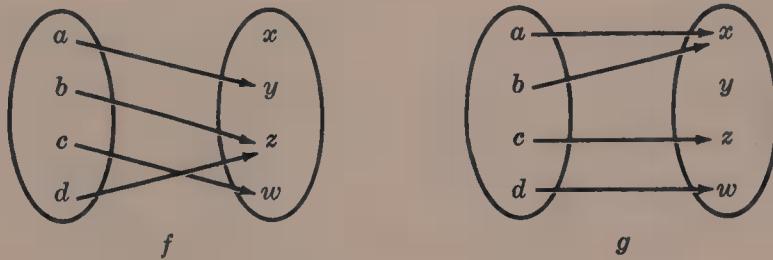
$$H \in \mathcal{T}^* \text{ implique } f^{-1}[H] \in \mathcal{T}$$

On écrira $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ pour désigner une application de X dans Y quand il y a lieu d'indiquer les topologies mises en jeu.

Exemple 1.1 : Considérons les topologies suivantes de $X = \{a, b, c, d\}$ et de $Y = \{x, y, z, w\}$:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \quad \mathcal{T}^* = \{Y, \emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z, w\}\}$$

Considérons également les applications $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ définies par les schémas ci-dessous :



L'application f est continue puisque l'image réciproque de chaque élément de la topologie \mathcal{T}^* sur Y est un élément de la topologie \mathcal{T} sur X . L'application g n'est pas continue puisque $\{y, z, w\} \in \mathcal{T}^*$, c'est-à-dire est un ouvert de Y , alors que son image réciproque $g^{-1}[\{y, z, w\}] = \{c, d\}$ n'est pas un ouvert de X , c'est-à-dire n'appartient pas à \mathcal{T} .

Exemple 1.2 : Considérons un espace discret quelconque (X, \mathcal{D}) et un espace topologique (Y, \mathcal{T}) quelconque. Alors toute application $f : X \rightarrow Y$ est continue relativement à \mathcal{D} et \mathcal{T} . Car si H est un ouvert quelconque de Y son image réciproque $f^{-1}[H]$ est un ouvert de X puisque toute partie d'un espace discret est un ouvert.

Exemple 1.3 : Soit $f : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces topologiques et soit \mathcal{B} une base de la topologie de Y . Supposons que pour tout élément $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}[B]$ soit un ouvert de X ; alors f est une application continue. En effet soit H un ouvert de Y ; alors $H = \cup_i B_i$, une réunion d'éléments de \mathcal{B} . Or

$$f^{-1}[H] = f^{-1}[\cup_i B_i] = \cup_i f^{-1}[B_i]$$

et chaque $f^{-1}[B_i]$ est ouvert par hypothèse; ainsi $f^{-1}[H]$ est réunion d'ouverts et donc un ouvert. Par conséquent f est continue.

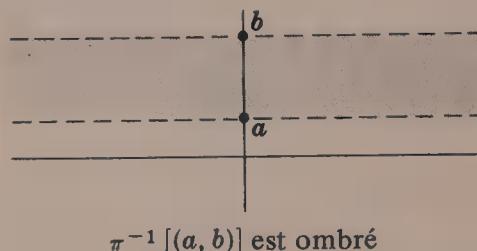
Nous allons énoncer de façon plus formelle le résultat de l'exemple précédent.

Proposition 7.1 : Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue ssi l'image réciproque de tout élément d'une base de Y est un ouvert de X .

Cette proposition peut en fait être renforcée comme suit :

Théorème 7.2 : Soit \mathcal{S} une sous-base d'un espace topologique Y . Alors une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout élément de \mathcal{S} est un ouvert de X .

Exemple 1.4 : Les projections du plan \mathbb{R}^2 sur la droite \mathbb{R} sont toutes continues relativement aux topologies usuelles. Considérons par exemple la projection $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi(x, y) = y$. Alors l'image réciproque d'un intervalle ouvert quelconque (a, b) est une bande ouverte infinie telle que représentée ci-dessous :

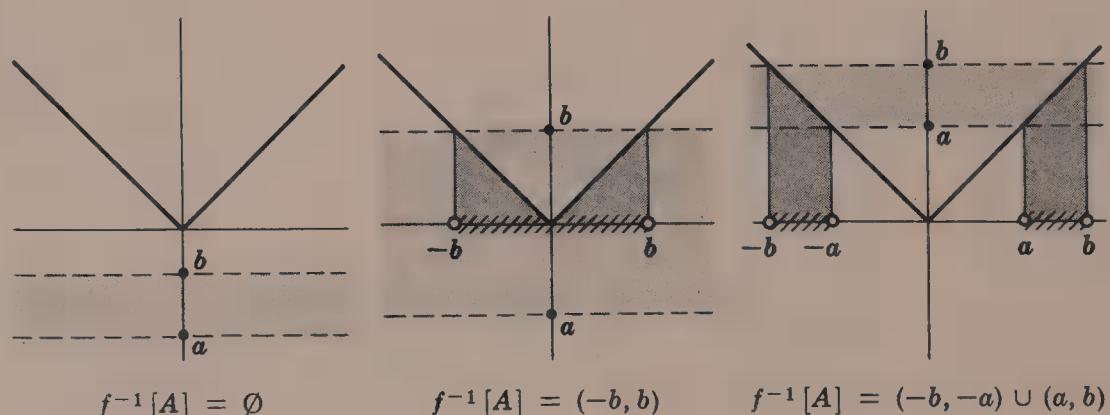


Ainsi d'après la proposition 7.1 l'image réciproque de tout ouvert de \mathbb{R} est un ouvert de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire π est continue.

Exemple 1.5 : La fonction valeur absolue sur \mathbb{R} , c'est-à-dire $f(x) = |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$ est continue. Car si $A = (a, b)$ est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , alors

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a < b \leq 0 \\ (-b, b) & \text{si } a < 0 < b \\ (-b, -a) \cup (a, b) & \text{si } 0 \leq a < b \end{cases}$$

comme on l'a représenté ci-dessous. Dans chaque cas $f^{-1}[A]$ est ouvert ; ainsi f est continue.



Les applications continues peuvent être caractérisées par leur comportement vis-à-vis des ensembles fermés, comme suit :

Théorème 7.3 : Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si les images réciproques de tout ensemble fermé de Y est un fermé de X .

APPLICATIONS CONTINUES ET PROXIMITÉ ARBITRAIRE

Soit X un espace topologique. Un point $p \in X$ est dit être *arbitrairement proche* d'un ensemble $A \subset X$ si

soit (i) $p \in A$ soit (ii) p est un point d'accumulation de A

On rappelle que $\overline{A} = A \cup A'$; ainsi l'adhérence de A est constituée précisément par les points de X qui sont arbitrairement proches de A . On rappelle également que $\overline{A} = A^\circ \cup b(A)$; ainsi p est arbitrairement proche de A si p est soit un point intérieur soit un point de la frontière de A .

Les applications continues peuvent également être caractérisées comme étant les applications qui *conservent la proximité arbitraire*, à savoir :

Théorème 7.4 : Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout $p \in X$ et tout $A \subset X$,

$$p \text{ arbitrairement proche de } A \Rightarrow f(p) \text{ arbitrairement proche de } f[A]$$

ou $p \in \bar{A} \Rightarrow f(p) \in \overline{f[A]}$

ou $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$

CONTINUITÉ EN UN POINT

La continuité telle que nous l'avons définie est une propriété globale, c'est-à-dire qu'elle impose des conditions à la manière dont une application se comporte sur l'ensemble X tout entier. Il existe également une notion locale correspondante : celle de la *continuité en un point*.

Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$ ssi l'image réciproque $f^{-1}[H]$ de tout ouvert $H \subset Y$ contenant $f(p)$ contient un ouvert $G \subset X$ contenant p ou, ce qui revient au même, ssi l'image réciproque de tout voisinage de $f(p)$ est un voisinage de p , c'est-à-dire,

$$N \in \mathcal{N}_{f(p)} \Rightarrow f^{-1}[N] \in \mathcal{N}_p$$

Remarquons que, pour la topologie usuelle sur la droite réelle \mathbb{R} , cette définition coïncide avec la définition par ϵ et δ de la continuité en un point pour les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. D'ailleurs, la relation existant entre la continuité locale et globale pour les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ demeure inchangée dans le cas général ; à savoir,

Théorème 7.5 : Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est continue en tout point de X .

CONTINUITÉ SEQUENTIELLE EN UN POINT

Une application $f : X \rightarrow Y$ est *séquentiellement continue* en un point $p \in X$ ssi pour toute suite $\langle a_n \rangle$ de X convergeant vers p , la suite $\langle f(a_n) \rangle$ converge vers $f(p)$, c'est-à-dire,

$$a_n \rightarrow p \text{ implique } f(a_n) \rightarrow f(p)$$

La continuité séquentielle et la continuité en un point sont reliées de la façon suivante :

Proposition 7.6 : Si une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$, alors elle est séquentiellement continue en p .

Remarque : La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. Considérons par exemple la topologie \mathcal{T} de la droite réelle \mathbb{R} formée de \emptyset et des complémentaires des ensembles dénombrables. Rappelons (voir l'exemple 7.3 du chapitre 5) qu'une suite $\langle a_n \rangle$ converge vers p si et seulement si elle est de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, p, p, p, \dots \rangle$$

Alors pour toute application $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^*)$,

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle f(a_1), \dots, f(a_{n_0}), f(p), f(p), f(p), \dots \rangle$$

converge vers $f(p)$. En d'autres termes, toute application définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est séquentiellement continue. Réciproquement, la fonction $f(\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ définie par $f(x) = x$, c'est-à-dire la fonction identique, n'est pas continue relativement à \mathcal{T} et \mathcal{U} puisque $f^{-1}[(0, 1)] = (0, 1)$ n'est pas un ouvert pour \mathcal{T} de \mathbb{R} .

APPLICATIONS OUVERTES ET FERMÉES

Une application continue a la propriété que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert et que l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Il est alors naturel de se proposer d'étudier les applications suivantes :

- (1) Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée une *application ouverte* si l'image de tout ouvert est un ouvert.
- (2) Une application $g : X \rightarrow Y$ est appelée une *application fermée* si l'image de tout fermé est un fermé.

En général des applications qui sont ouvertes ne sont pas nécessairement fermées et vice versa. D'ailleurs l'application de notre premier exemple est ouverte et continue mais non fermée.

Exemple 2.1 : Considérons la projection $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ du plan \mathbb{R}^2 sur l'axe Ox, c'est-à-dire $\pi(x, y) = x$. Remarquons que la projection $\pi[D]$ de tout disque ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ est un intervalle ouvert. Ainsi tout point $\pi(p)$ de l'image $\pi[G]$ d'un ouvert $G \subset \mathbb{R}^2$ appartient à un intervalle ouvert contenu dans $\pi[G]$, c'est-à-dire que $\pi[G]$ est ouvert. Par conséquent π est une application ouverte. Par ailleurs π n'est pas une application fermée, car l'ensemble $A = \{(x, y) : xy \geq 1, x > 0\}$ est fermé alors que sa projection $\pi[A] = (0, \infty)$ n'est pas fermée. (Voir les schémas ci-dessous.)



ESPACES HOMEOMORPHES

Un espace topologique (X, \mathcal{T}) est, comme on l'a vu, la donnée d'un ensemble X et d'une famille distinguée \mathcal{T} de parties de X vérifiant certains axiomes. Pour deux espaces tels que (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}^*) il existe plusieurs applications $f : X \rightarrow Y$. Nous avons préféré décider d'étudier les fonctions continues ou ouvertes ou fermées plutôt que des applications arbitraires puisque ce sont ces fonctions qui conservent certains aspects de la structure des espaces (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}^*) .

A présent, supposons qu'il existe une application bijective $f : X \rightarrow Y$. Alors, à f est associée une application bijective $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ de l'ensemble des parties de X dans l'ensemble des parties de Y . Si cette application associée fait passer de \mathcal{T} à \mathcal{T}^* , c'est-à-dire définit une correspondance biunivoque entre les ouverts de X et ceux de Y , alors les espaces (X, \mathcal{T}) et (Y, \mathcal{T}^*) sont identiques du point de vue topologique. Plus précisément :

DEFINITION : Deux espaces topologiques X et Y sont dits *homéomorphes* ou *topologiquement équivalents* s'il existe une application bijective $f : X \rightarrow Y$ telle que f et f^{-1} soient continues. La fonction f est appelée un *homéomorphisme*.

Une application f est dite *bicontinue* si f est ouverte et continue. Alors $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphismessi f est bicontinue et bijective.

Exemple 3.1 : Soit $X = (-1, 1)$. L'application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{tg} 1/2 \pi x$ est injective, surjective et continue. De plus son application réciproque f^{-1} est également continue. Ainsi la droite réelle \mathbb{R} et l'intervalle ouvert $(-1, 1)$ sont homéomorphes.

Exemple 3.2 : Soient X et Y deux espaces discrets. Alors, comme on l'a vu dans l'exemple 1.2, toutes les applications de l'un dans l'autre sont continues. Ainsi X et Y sont homéomorphesssi il existe une application bijective de l'un dans l'autre, c'est-à-diressi leur cardinal est le même.

Proposition 7.7 : La relation définie sur toute famille d'espaces topologiques par “ X est homéomorphe à Y ” est une relation d'équivalence.

Ainsi, d'après le théorème fondamental sur les relations d'équivalence, sur toute famille d'espaces topologiques, il existe une partition en classes d'espaces topologiquement équivalents.

PROPRIETES TOPOLOGIQUES

Une propriété P est dite *topologique* ou être un *invariant topologique* si toutes les fois qu'un espace topologique (X, \mathcal{T}) a la propriété P alors tout espace homéomorphe à (X, \mathcal{T}) a également la propriété P .

Exemple 4.1 : Comme on l'a vu dans l'exemple 3.1, la droite réelle \mathbb{R} est homéomorphe à l'intervalle ouvert $X = (-1, 1)$. Ainsi la *longueur* n'est pas une propriété topologique puisque X et \mathbb{R} ont des longueurs différentes, de même la *propriété d'être borné* n'est pas une propriété topologique puisque X est borné mais que \mathbb{R} ne l'est pas.

Exemple 4.2 : Soit X l'ensemble des réels positifs, c'est-à-dire $X = (0, \infty)$. La fonction $f : X \rightarrow X$ définie par $f(x) = 1/x$ est un homéomorphisme de X dans X . Remarquons que la suite

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$$

correspond par l'homéomorphisme à la suite

$$\langle f(a_n) \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$$

La suite $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy ; la suite $\langle f(a_n) \rangle$ ne l'est pas. Ainsi la propriété pour une suite d'être de Cauchy n'est pas une propriété topologique.

La plus grande partie de la topologie est consacrée à l'étude de conséquences de certaines propriétés topologiques, comme la *compacité* et la *connexité*. En fait, de façon tout à fait formelle, la topologie est l'étude des invariants topologiques. Dans l'exemple suivant, on définit la connexité et on montre que c'est une propriété topologique.

Exemple 4.3 : Un espace topologique (X, \mathcal{T}) est *non connexe* si X peut s'écrire comme la réunion de deux ouverts disjoints non vides, c'est-à-dire

$$X = G \cup H \quad \text{où} \quad G, H \in \mathcal{T}, \quad G \cap H = \emptyset \text{ mais } G, H \neq \emptyset$$

Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme, alors $X = G \cup H$ si et seulement si $Y = f[G] \cup f[H]$ et donc Y est non connexe si et seulement si il en est de même pour X .

L'espace (X, \mathcal{T}) est *connexe* si il n'est pas *non connexe*.

TOPOLOGIE INDUIITE PAR DES APPLICATIONS

Soit $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ une famille quelconque d'espaces topologiques et pour chaque Y_i supposons que soit donnée une application $f_i : X \rightarrow Y_i$ définie sur un certain ensemble non vide X . Nous allons étudier les topologies de X vis-à-vis desquelles toutes les fonctions f_i sont continues. Rappelons que f_i est continue pour une certaine topologie sur X si l'image réciproque de tout ouvert de Y_i est un ouvert de X . Ainsi nous sommes amenés à considérer la famille suivante de parties de X :

$$\mathcal{J} = \bigcup_i \{f_i^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}_i\}$$

C'est-à-dire que \mathcal{J} est constituée par les images réciproques de chaque ouvert de chaque espace Y_i . La topologie \mathcal{T} sur X engendrée par \mathcal{J} est appelée la topologie *induite* (ou *engendrée*) par les applications f_i . Les principales propriétés de \mathcal{T} sont énumérées dans le théorème suivant :

Théorème 7.8 :

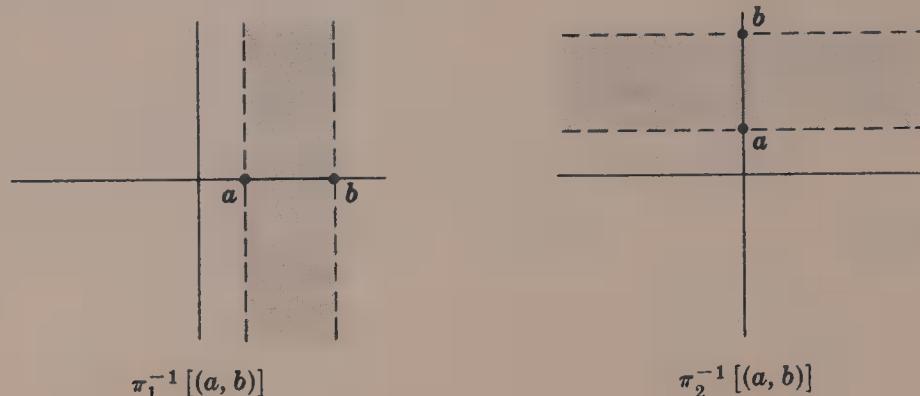
- (i) Toutes les applications f_i sont continues pour \mathcal{T} .
- (ii) \mathcal{T} est l'intersection de toutes les topologies sur X pour lesquelles les applications f_i sont continues.
- (iii) \mathcal{T} est la plus petite, c'est-à-dire la moins fine, des topologies sur X pour lesquelles les applications f_i sont continues.
- (iv) \mathcal{J} est une sous-base pour la topologie \mathcal{T} .

Nous appellerons \mathcal{S} la sous-base de définition de la topologie engendrée par les applications f_i , c'est-à-dire la topologie la moins fine sur X pour laquelle les fonctions f_i soient continues.

Exemple 5.1 : Soient π_1 et π_2 les projections du plan \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} , c'est-à-dire

$$\pi_1(x, y) = x \quad \text{et} \quad \pi_2(x, y) = y$$

Remarquons que, comme on l'a représenté ci-dessous, l'image réciproque d'un intervalle ouvert (a, b) de \mathbb{R} est une bande ouverte infinie de \mathbb{R}^2 .



Rappelons que ces bandes ouvertes infinies constituent une sous-base pour la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 . Par conséquent la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 est la plus petite topologie de \mathbb{R}^2 pour laquelle les projections π_1 et π_2 soient continues.

PROBLEMES RESOLUS

APPLICATIONS CONTINUES

1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application constante, admettons que $f(x) = p \in Y$ pour tout $x \in X$. Démontrer que f est continue pour toute topologie \mathcal{T} sur X et pour toute topologie \mathcal{T}^* sur Y .

Solution :

Nous devons montrer que l'image réciproque de tout ouvert pour \mathcal{T}^* de Y est un ouvert pour \mathcal{T} de X . Soit $H \in \mathcal{T}^*$. A présent $f(x) = p$ pour tout $x \in X$, donc

$$f^{-1}[H] = \begin{cases} X & \text{si } p \in H \\ \emptyset & \text{si } p \notin H \end{cases}$$

Dans l'un ou l'autre cas $f^{-1}[H]$ est un ouvert de X puisque X et \emptyset appartiennent à toutes les topologies \mathcal{T} sur X .

2. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application quelconque. Démontrer que si (Y, \mathcal{J}) est un espace topologique muni de la topologie grossière $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{J})$ est continue pour toute \mathcal{T} .

Solution :

Nous voulons montrer que l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X . Puisque (Y, \mathcal{J}) est un espace topologique muni de la topologie grossière, Y et \emptyset sont les seuls ouverts de Y . Or

$$f^{-1}[Y] = X, \quad f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$$

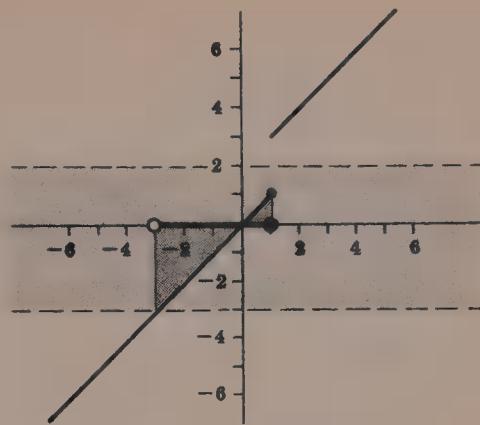
et X et \emptyset appartiennent à toutes les topologies \mathcal{T} sur X . Donc f est continue pour toute \mathcal{T} .

3. Soit \mathcal{U} la topologie usuelle de la droite réelle \mathbb{R} et soit \mathcal{T} la topologie de la limite supérieure sur \mathbb{R} , laquelle est engendrée par les intervalles semi-ouverts $(a, b]$. De plus soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(Voir le schéma ci-contre)

- (i) Montrer que f n'est pas continue relativement à \mathcal{U} et à \mathcal{U} .
(ii) Montrer que f est continue relativement à \mathcal{T} et à \mathcal{T}



Solution :

- (i) Soit $A = (-3, 2)$. Alors $f^{-1}[A] = (-3, 1]$. A présent $A \in \mathcal{U}$ tandis que $f^{-1}[A] \notin \mathcal{U}$, donc f n'est pas continue relativement à \mathcal{U} et à \mathcal{U} .
(ii) Soit $A = (a, b]$. Alors

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} (a, b] & \text{si } a < b \leq 1 \\ (a, 1] & \text{si } a < 1 < b \leq 3 \\ (a, b-2] & \text{si } a < 1 < 3 < b \\ \emptyset & \text{si } 1 \leq a < b \leq 3 \\ (1, b-2] & \text{si } 1 \leq a < 3 < b \\ (a-2, b-2] & \text{si } 3 \leq a < b \end{cases}$$

Dans chaque cas, $f^{-1}[A]$ est un ouvert pour \mathcal{T} . Ainsi f est continue relativement à \mathcal{T} et à \mathcal{T} .

4. Supposons qu'une application $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ ne soit pas continue relativement à \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . Montrer que si \mathcal{T}_1^* est une topologie sur X moins fine que \mathcal{T}_1 et que si \mathcal{T}_2^* est une topologie de Y plus fine que \mathcal{T}_2 , c'est-à-dire $\mathcal{T}_1^* \subset \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2^*$, alors f n'est pas non plus continue relativement à \mathcal{T}_1^* et \mathcal{T}_2^* .

Solution :

Puisque $f : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ n'est pas continue,

$$\exists G \in \mathcal{T}_2 \text{ pour lequel } f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1$$

A présent $\mathcal{T}_1^* \subset \mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2^*$. Ainsi $G \in \mathcal{T}_2$ implique $G \in \mathcal{T}_2^*$ et $f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1$ implique $f^{-1}[G] \notin \mathcal{T}_1^*$. Ainsi f n'est pas continue relativement à \mathcal{T}_1^* et \mathcal{T}_2^* .

5. Montrer que l'application identique $i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^*)$ est continue si et seulement si \mathcal{T} est plus fine que \mathcal{T}^* , c'est-à-dire $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$.

Solution :

Par définition, i est continue relativement à \mathcal{T} et \mathcal{T}^* si et seulement si

$$G \in \mathcal{T}^* \Rightarrow i^{-1}[G] \in \mathcal{T}$$

Or $i^{-1}[G] = G$, donc i est continue relativement à \mathcal{T} et \mathcal{T}^* si et seulement si

$$G \in \mathcal{T}^* \Rightarrow G \in \mathcal{T}$$

c'est-à-dire si $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$.

6. Démontrer le théorème 7.2 : Soit $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ et soit \mathcal{S} une sous-base de la topologie \mathcal{T}^* de Y . Alors f est continue si et seulement si l'image réciproque de tous les éléments de la sous-base \mathcal{S} sont des ouverts de X , c'est-à-dire $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$.

Solution :

Supposons que $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$ pour tout $S \in \mathcal{S}$. Nous voulons montrer que f est continue, c'est-à-dire $G \in \mathcal{T}^*$ implique $f^{-1}[G] \in \mathcal{T}$. Soit $G \in \mathcal{T}^*$. Par définition d'une sous-base

$$G = \cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}}) \quad \text{où} \quad S_{i_k} \in \mathcal{S}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } f^{-1}[G] &= f^{-1}[\cup_i (S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}})] = \cup_i f^{-1}[S_{i_1} \cap \dots \cap S_{i_{n_i}}] \\ &= \cup_i (f^{-1}[S_{i_1}] \cap \dots \cap f^{-1}[S_{i_{n_i}}]) \end{aligned}$$

Or $S_{i_k} \in \mathcal{S}$ implique $f^{-1}[S_{i_k}] \in \mathcal{T}$. Ainsi $f^{-1}[G] \in \mathcal{T}$ puisqu'il est réunion d'intersections finies d'ouverts. Par conséquent f est continue.

Réciproquement, si f est continue alors l'image réciproque de tout ouvert y compris ceux de \mathcal{S} sont des ouverts.

7. Soit f une application d'un espace topologique X dans l'intervalle unité $[0, 1]$. Montrer que si $f^{-1}[(a, 1)]$ et $f^{-1}[[0, b]]$ sont des ouverts de X pour tout $0 < a, b < 1$, alors f est continue.

Solution :

Rappelons que les intervalles $(a, 1]$ et $[0, b)$ constituent une sous-base pour l'intervalle $I = [0, 1]$. Ainsi f est continue d'après le problème précédent, c'est-à-dire d'après le théorème 7.2.

8. Soient les applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. Démontrer que l'application composée $g \circ f : X \rightarrow Z$ est également continue.

Solution :

Soit G un ouvert de Z . Alors $g^{-1}[G]$ est un ouvert de Y puisque g est continue. Or f est également continue, alors $f^{-1}[g^{-1}[G]]$ est un ouvert de X . A présent

$$(g \circ f)^{-1}[G] = f^{-1}[g^{-1}[G]]$$

Ainsi $(g \circ f)^{-1}[G]$ est un ouvert de X pour tout ouvert G de Z , c'est-à-dire que $g \circ f$ est continue.

9. Soient $\{\mathcal{T}_i\}$ une famille de topologies définies sur un ensemble X . Si une application $f : X \rightarrow Y$ est continue pour chaque \mathcal{T}_i , démontrer que f est continue pour la topologie intersection des \mathcal{T}_i : $\mathcal{T} = \cap_i \mathcal{T}_i$.

Solution :

Soit G un ouvert de Y . Alors, par hypothèse, $f^{-1}[G]$ appartient à chaque \mathcal{T}_i . Ainsi $f^{-1}[G]$ appartient à l'intersection, c'est-à-dire $f^{-1}[G] \in \cap_i \mathcal{T}_i = \mathcal{T}$, et donc f est continue pour \mathcal{T} .

10. Démontrer le théorème 7.3 : Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X .

Solution :

Supposons que $f : X \rightarrow Y$ soit continue, et soit F un fermé de Y . Alors F^c est ouvert, et donc $f^{-1}[F^c]$ est un ouvert de X . Or $f^{-1}[F^c] = (f^{-1}[F])^c$ donc $f^{-1}[F]$ est fermé.

Réciproquement, supposons que le fait que F soit un fermé de Y implique que $f^{-1}[F]$ soit fermé dans X . Soit G un ouvert de Y . Alors G^c est fermé dans Y et donc $f^{-1}[G^c] = (f^{-1}[G])^c$ est un fermé de X . Par conséquent $f^{-1}[G]$ est un ouvert et donc f est continue.

11. Démontrer le théorème 7.4 : Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour toute partie $A \subset X$, $f[A] \subset \overline{f[A]}$.

Solution :

Supposons que $f : X \rightarrow Y$ soit continue. A présent $f[A] \subset \overline{f[A]}$ donc

$$A \subset f^{-1}[f[A]] \subset f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

Or $\overline{f[A]}$ est fermé et donc $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ est également fermé ; d'où

$$A \subset \bar{A} \subset f^{-1}[\overline{f[A]}]$$

et donc

$$f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]} = f[f^{-1}[\overline{f[A]}]]$$

Réciproquement, supposons que $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$ pour tout $A \subset X$ et soit F un fermé de Y . Posons $A = f^{-1}[F]$; nous désirons montrer que A est également fermé ou, ce qui est équivalent, que $\bar{A} = A$. A présent

$$f[\bar{A}] = f[\overline{f^{-1}[F]}] \subset \overline{f[f^{-1}[F]]} = \bar{F} = F$$

D'où

$$\bar{A} \subset f^{-1}[f[\bar{A}]] \subset f^{-1}[F] = A$$

Or $A \subset \bar{A}$, donc $\bar{A} = A$ et f est continue.

12. Soit f continue $f : (X, T) \rightarrow (Y, T^*)$. Démontrer que $f_A : (A, T_A) \rightarrow (Y, T^*)$ est continue, où $A \subset X$ et f_A est la restriction de f à A .

Solution :

Observons que $f_A^{-1}[G] = A \cap f^{-1}[G]$ pour tout $G \subset Y$.

Soit $G \in T^*$. Alors $f^{-1}[G] \in T$, et donc $A \cap f^{-1}[G] \in T_A$ d'après la définition de la topologie induite. Ainsi $A \cap f^{-1}[G] = f_A^{-1}[G] \in T_A$, donc f_A est continue.

CONTINUITÉ EN UN POINT

13. A quelle condition une application $f : X \rightarrow Y$ n'est-elle pas continue en un point $p \in X$?

Solution :

Une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$ ssi, pour tout ouvert $H \subset Y$ contenant $f(p)$, $f^{-1}[H]$ contient un ouvert contenant p . Ainsi f n'est pas continue en $p \in X$ s'il existe au moins un ouvert $H \subset Y$ contenant $f(p)$ tel que $f^{-1}[H]$ ne contienne pas d'ouvert contenant p .

De manière équivalente, $f : X \rightarrow Y$ n'est pas continue en $p \in X$ ssi \exists un voisinage N de $f(p)$ tel que $f^{-1}[N]$ ne soit pas un voisinage de p .

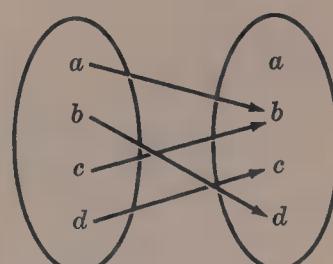
14. Considérons la topologie suivante définie sur $X = \{a, b, c, d\}$:

$$T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$$

Soit l'application $f : X \rightarrow X$ définie par le schéma ci-dessous.

(i) Montrer que f n'est pas continue en c .

(ii) Montrer que f est continue en d .



Solution :

- (i) Remarquons que $\{a, b\}$ est un ouvert contenant $f(c) = b$ et que $f^{-1}[\{a, b\}] = \{a, c\}$. Ainsi f n'est pas continue en c puisqu'il n'existe aucun ouvert contenant c contenu dans $\{a, c\}$.
- (ii) Les seuls ouverts contenant $f(d) = c$ sont $\{b, c, d\}$ et X . Notons que $f^{-1}[\{b, c, d\}] = X$ et que $f^{-1}[X] = X$. Ainsi f est continue en d puisque l'image réciproque de chaque ouvert contenant $f(d)$ est un ouvert contenant d .

15. Supposons qu'un singleton $\{p\}$ soit un ouvert d'un espace topologique X . Montrer que pour tout espace topologique Y et pour toute application $f : X \rightarrow Y$, f est continue en $p \in X$.

Solution :

Soit $H \subset Y$ un ouvert contenant $f(p)$. Or

$$f(p) \in H \Rightarrow p \in f^{-1}[H] \Rightarrow \{p\} \subset f^{-1}[H]$$

Ainsi f est continue en p .

16. Démontrer que si $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$, la restriction de f à un sous-ensemble contenant p est également continue en p . Plus précisément, soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) tel que $p \in A \subset X$ et soit $f_A : A \rightarrow Y$ la restriction de $f : X \rightarrow Y$ à A . Alors si f est continue pour \mathcal{T} en p , f_A est continue pour \mathcal{T}_A en p , où \mathcal{T}_A est la topologie induite par \mathcal{T} sur A .

Solution :

Soit $H \subset Y$ un ouvert contenant $f(p)$. Puisque f est continue en p ,

$$\exists G \in \mathcal{T} \text{ tel que } p \in G \subset f^{-1}[H]$$

et donc

$$p \in A \cap G \subset A \cap f^{-1}[H] = f_A^{-1}[H]$$

Or, par définition de la topologie induite, $A \cap G \in \mathcal{T}_A$; ainsi f_A est continue en p pour \mathcal{T}_A .

17. Démontrer le théorème 7.5 : Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors une application $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si elle est continue en tout point $p \in X$.

Solution :

Supposons que f soit continue et soit $H \subset Y$ un ouvert contenant $f(p)$. Mais alors $p \in f^{-1}[H]$ et $f^{-1}[H]$ est un ouvert. Ainsi f est continue en p .

A présent, supposons que f soit continue en tout point $p \in X$, et soit $H \subset Y$ un ouvert. Pour tout $p \in f^{-1}[H]$, il existe un ouvert $G_p \subset X$ tel que $p \in G_p \subset f^{-1}[H]$. Ainsi $f^{-1}[H] = \bigcup \{G_p : p \in f^{-1}[H]\}$ réunion d'ouverts. Par conséquent, $f^{-1}[H]$ est un ouvert et donc f est continue.

18. Démontrer la proposition 7.6 : Si une application $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$, alors elle est séquentiellement continue en p , c'est-à-dire $a_n \rightarrow p \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(p)$.

Solution :

Nous devons montrer que tout voisinage N de $f(p)$ contient presque tous les termes de la suite $\langle f(a_1), f(a_2), \dots \rangle$.

Soit N un voisinage de $f(p)$. Par hypothèse, f est continue en p ; ainsi $M = f^{-1}[N]$ est un voisinage de p . Si la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers p , alors M contient presque tous les termes de la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$, c'est-à-dire $a_n \in M$ pour presque tout $n \in N$. Or

$$a_n \in M \Rightarrow f(a_n) \in f[M] = f[f^{-1}[N]] = N$$

Ainsi $f(a_n) \in N$ pour presque tout $n \in N$, et donc la suite $\langle f(a_n) \rangle$ converge vers $f(p)$. Par conséquent f est séquentiellement continue en p .

APPLICATIONS OUVERTES ET FERMEES, HOMEOMORPHISMES

19. Donner un exemple d'une application réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f soit continue et fermée mais non ouverte.

Solution :

Soit f une application constante, admettons que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f[A] = \{1\}$ pour tout $A \subset \mathbb{R}$. Ainsi f est une application fermée et n'est pas une application ouverte. De plus f est continue.

20. Soit l'application réelle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas ouverte.

Solution :

Soit $A = (-1, 1)$ un ensemble ouvert. Notons que $f(A) = [0, 1]$, qui n'est pas un ouvert ; ainsi f n'est pas une application ouverte.

21. Soit \mathcal{B} une base d'un espace topologique X . Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ a la propriété que $f[B]$ est un ouvert pour tout $B \in \mathcal{B}$, alors f est une application ouverte.

Solution :

Nous voulons montrer que l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y . Soit $G \subset X$ un ouvert. D'après la définition d'une base, $G = \bigcup_i B_i$ où $B_i \in \mathcal{B}$. A présent $f[G] = f[\bigcup_i B_i] = \bigcup_i f[B_i]$. Par hypothèse, chaque $f[B_i]$ est un ouvert de Y et donc $f[G]$, qui est réunion d'ouverts, est également un ouvert de Y ; ainsi f est une application ouverte.

22. Montrer que l'intervalle fermé $A = [a, b]$ est homéomorphe à l'intervalle unité $I = [0, 1]$.

Solution :

L'application linéaire affine $f : I \rightarrow A$ définie par $f(x) = (b - a)x + a$ est bijective et bicontinue. Ainsi f est un homéomorphisme.

23. Montrer que l'aire n'est pas une propriété topologique.

Solution :

Le disque ouvert $D = \{(r, \theta) : r < 1\}$ de rayon 1 est homéomorphe au disque ouvert $D^* = \{(r, \theta) : r < 2\}$ de rayon 2. D'ailleurs, l'application $f : D \rightarrow D^*$ définie par $f(r, \theta) = (2r, \theta)$ est un homéomorphisme. Ici (r, θ) désignent les coordonnées polaires d'un point du plan \mathbb{R}^2 .

24. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ une application injective et ouverte, soit $A \subset X$ et supposons que $f[A] = B$. Montrer que l'application $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (B, \mathcal{T}_B^*)$ est également injective et ouverte. Ici f_A désigne la restriction de f à A , et \mathcal{T}_A et \mathcal{T}_B^* désignent les topologies induites.

Solution :

Si f est injective, alors toute restriction de f est également injective, ainsi nous n'avons plus qu'à montrer que f_A est ouverte.

Soit $H \subset A$ un ouvert pour \mathcal{T}_A . Alors par définition de la topologie induite, $H = A \cap G$ avec $G \in \mathcal{T}$. Puisque f est injective, $f[A \cap G] = f[A] \cap f[G]$ et donc

$$f_A[H] = f[H] = f[A \cap G] = f[A] \cap f[G] = B \cap f[G]$$

Puisque f est ouverte et que $G \in \mathcal{T}$, $f[G] \in \mathcal{T}^*$. Ainsi $B \cap f[G] \in \mathcal{T}_B^*$ et donc $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (B, \mathcal{T}_B^*)$ est ouverte.

25. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ un homéomorphisme et soit (A, \mathcal{T}_A) un sous-espace quelconque de (X, \mathcal{T}) . Montrer que $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (B, \mathcal{T}_B^*)$ est également un homéomorphisme où f_A est la restriction de f à A , $f[A] = B$, et \mathcal{T}_B^* est la topologie induite sur B .

Solution :

Puisque f est bijective, $f_A : A \rightarrow B$, où $B = f[A]$, est également bijective. Ainsi nous avons seulement à montrer que f_A est bicontinue, i.e. ouverte et continue. D'après le problème précédent, f_A est ouverte. De plus, la restriction de toute application continue est également continue ; ainsi $f_A : (A, \mathcal{T}_A) \rightarrow (B, \mathcal{T}_B^*)$ est un homéomorphisme.

26. Démontrer que tout intervalle $A = (a, b)$ est connexe comme sous espace de la droite réelle \mathbb{R} . (Voir à l'exemple 4.3 la définition de la connexité.)

Solution :

Supposons que A soit non connexe. Alors il existe deux ouverts $G, H \subset R$ tels que $A \cap G$ et $A \cap H$ soient disjoints non vides et vérifient $(A \cap G) \cup (A \cap H) = A$. Définissons l'application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ par

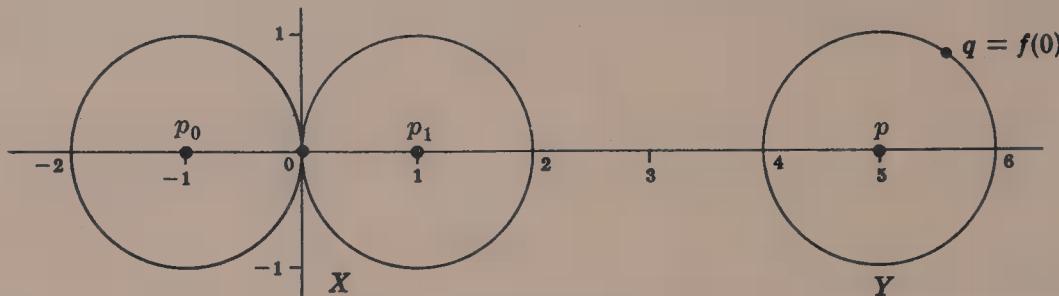
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \cap G \\ 0 & \text{si } x \in A \cap H \end{cases}$$

Alors f est continue, car l'image réciproque de tout ouvert est soit $A \cap G$, $A \cap H$, \emptyset soit A et donc est un ouvert. Mais alors le théorème de la valeur intermédiaire s'applique, donc $\exists x_0 \in A$ tel que $f(x_0) = 1/2$. Mais ceci est impossible, donc A est connexe.

27. Montrer que les sous-ensembles suivants du plan \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes, les topologies étant les topologies induites par la topologie usuelle :

$$X = \{x : d(x, p_0) = 1 \text{ soit } d(x, p_1) = 1; \quad p_0 = \langle 0, -1 \rangle, \quad p_1 = \langle 0, 1 \rangle\}$$

$$Y = \{x : d(x, p) = 1, \quad p = \langle 0, 5 \rangle\}$$



Solution :

Supposons qu'il existe un homéomorphisme $f : X \rightarrow Y$ et soit $q = f(0)$, $X^* = X \setminus \{0\}$, et $Y^* = Y \setminus \{q\}$. Alors $f : X^* \rightarrow Y^*$ est également un homéomorphisme relativement aux topologies induites (voir le problème 25).

Nous allons montrer que Y^* est connexe. En effet si $q = \langle 5 + \cos \theta_0, \sin \theta_0 \rangle$ alors l'application $g : (0, 2\pi) \rightarrow Y^*$ définie par $g(\theta) = \langle 5 + \cos(\theta_0 + \theta), \sin(\theta_0 + \theta) \rangle$

est un homéomorphisme. Mais l'intervalle $(0, 2\pi)$ est connexe donc Y^* est également connexe.

Par ailleurs, X^* n'est pas connexe ; car les ensembles

$$G = \{(x, y) : x > 0\} \quad \text{et} \quad H = \{(x, y) : x < 0\}$$

sont tous deux ouverts dans \mathbb{R}^2 , donc $G^* = X^* \cap G$ et $H^* = X^* \cap H$ sont des ouverts de X^* . De plus G^* et H^* sont disjoints non vides et vérifient $G^* \cup H^* = X^*$. Puisque la connexité est une propriété topologique, X^* n'est pas homéomorphe à Y^* et donc il ne peut exister de telle application f .

TOPOLOGIE ENGENDREE PAR DES APPLICATIONS

28. Soit $\{f_i : X \rightarrow (Y_i, T_i)\}$ une famille d'applications constantes d'un ensemble arbitraire X dans les espaces topologiques (Y_i, T_i) . Déterminer la topologie la moins fine pour laquelle les applications f_i sont continues.

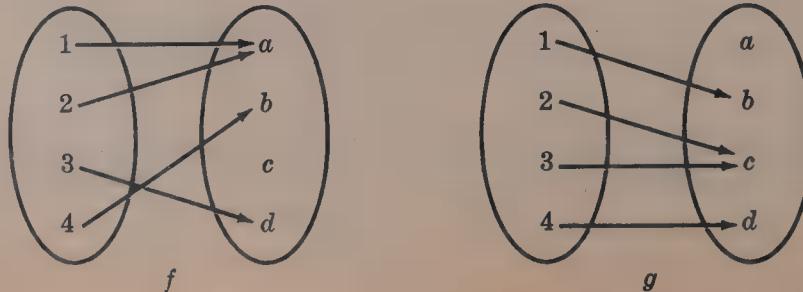
Solution :

Rappelons (voir le problème 1) qu'une application constante $f : X \rightarrow Y$ est continue pour toute topologie de X . Ainsi toutes les applications constantes f_i sont continues pour la topologie grossière $\{X, \emptyset\}$ de X . Puisque la topologie grossière $\{X, \emptyset\}$ sur X sur la topologie la moins fine de X , c'est aussi la topologie la moins fine de X pour laquelle les applications constantes sont continues.

29. Considérons la topologie suivante sur $Y = \{a, b, c, d\}$:

$$T = \{Y, \emptyset, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}\}$$

Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et soient les applications $f : X \rightarrow (Y, T)$ et $g : X \rightarrow (Y, T)$ définies par



Trouver la sous-base de définition \mathcal{S} de la topologie \mathcal{T}^* sur X engendrée par f et g , i.e. la topologie la moins fine pour laquelle f et g soient continues.

Solution :

$$\text{Rappelons que } \mathcal{S} = \{f^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}\} \cup \{g^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}\}$$

c'est-à-dire que \mathcal{S} est formée des images réciproques par f et g des ouverts de Y . Ainsi

$$\mathcal{S} = \{X, \emptyset, \{1, 2, 4\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$$

30. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbb{R} engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$, et soit \mathcal{T}^* la topologie sur \mathbb{R} engendrée par la famille des applications linéaires affines

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \text{ définies par } f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

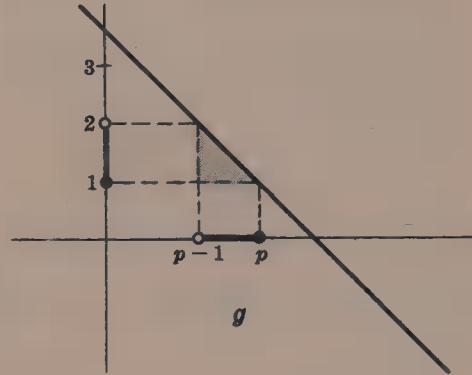
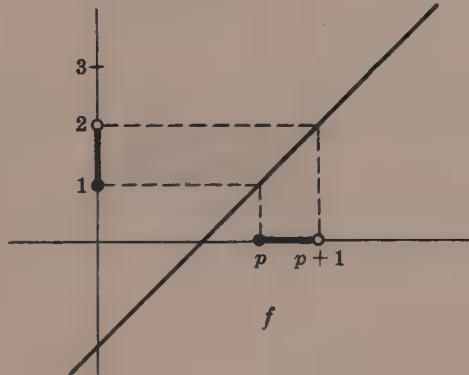
Montrer que \mathcal{T}^* est la topologie discrète sur \mathbb{R} .

Solution :

Nous voulons montrer que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, le singleton $\{p\}$ est un ouvert pour \mathcal{T}^* . Considérons l'ouvert pour \mathcal{T} , $A = [1, 2]$ et les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ définies par

$$f(x) = x - p + 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -x - p + 1$$

représentées ci-dessous.



A présent $A \in \mathcal{T}$ implique

$$f^{-1}[A] = [p, p+1] \quad \text{et} \quad g^{-1}[A] = (p-1, p]$$

appartiennent à la sous base de définition de la topologie \mathcal{T}^* . Ainsi l'intersection

$$(p-1, p] \cap [p, p+1] = \{p\}$$

appartient à \mathcal{T}^* , et donc \mathcal{T}^* est la topologie discrète sur \mathbb{R} .

31. Démontrer le théorème 7.9 : Soit $\{f_i: X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ une famille d'applications définies sur un ensemble arbitraire non vide X , soit

$$\mathcal{S} = \bigcup_i \{f_i^{-1}[H] : H \in \mathcal{T}_i\}$$

et soit \mathcal{T} la topologie sur X engendrée par \mathcal{S} . alors :

- (i) Toutes les applications f_i sont continues pour \mathcal{T} .
- (ii) Si \mathcal{T}^* est l'intersection de toutes les topologies sur X pour lesquelles les applications f_i sont continues, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.
- (iii) \mathcal{T} est la topologie la moins fine sur X pour laquelle les applications f_i soient continues.
- (iv) \mathcal{S} est une sous-base de \mathcal{T} .

Solution :

- (i) Pour toute application $f_i: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)$, si $H \in \mathcal{T}_i$ alors $f_i^{-1}[H] \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Ainsi toutes les f_i sont continues pour \mathcal{T} .

- (ii) D'après le problème 9, toutes les applications f_i sont également continues pour \mathcal{T}^* ; ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^*$ et, puisque \mathcal{T} est la topologie engendrée par \mathcal{S} , $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$. Réciproquement, \mathcal{T} est l'une des topologies pour lesquelles les f_i sont continues ; ainsi $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.
- (iii) Est conséquence de (ii).
- (iv) Est conséquence du fait que toute famille d'ensembles est une sous-base de la topologie qu'elle engendre.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

APPLICATIONS CONTINUES

32. Démontrer que $f : X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f^{-1}[A^\circ] \subset (f^{-1}[A])^\circ$ pour tout $A \subset X$.
33. Soient X et Y deux espaces topologiques avec $X = E \cup F$. Soient $f : E \rightarrow Y$ et $g : F \rightarrow Y$, avec $f = g$ sur $E \cap F$ continues pour les topologies induites. Notons que $h = f \cup g$ est une application de X dans Y . (i) Montrer sur un exemple que h n'est pas nécessairement continue. (ii) Démontrer que si E et F sont tous les deux ouverts, alors h est continue. (iii) Démontrer que si E et F sont tous les deux fermés, alors h est continue.
34. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue. Montrer que $f : X \rightarrow f[X]$ est également continue, où $f[X]$ est muni de la topologie induite.
35. Soit X un espace topologique et soit $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique d'une partie A de X . Montrer que χ_A est continue en $p \in X$ si et seulement si p n'est pas un point de la frontière de A . (On rappelle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \in A^c$.)
36. Considérons la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle. Montrer que si toute application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors X est un espace discret.

APPLICATIONS OUVERTES ET FERMÉES

37. Soit $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$. Démontrer les propositions suivantes :
 - (i) f est fermée si et seulement si $\overline{f[A]} \subset f[\overline{A}]$ pour tout $A \subset X$;
 - (ii) f est ouverte si et seulement si $f[A^\circ] \subset (f[A])^\circ$ pour tout $A \subset X$.
38. Montrer que l'application $f : (0, \infty) \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ est continue mais ni ouverte ni fermée, $(0, \infty)$ et $[-1, 1]$ étant munis des topologies induites par la topologie usuelle.
39. Démontrer que si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ est ouverte et surjective, et si \mathcal{B} est une base de \mathcal{T} , alors $\{f[B] : B \in \mathcal{B}\}$ est une base de \mathcal{T}^* .
40. Donner un exemple d'une application $f : X \rightarrow Y$ et d'une partie $A \subset X$ telle que f soit ouverte mais que f_A , la restriction de f à A , ne soit pas ouverte.

HOMEOMORPHISMES, PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES

41. Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications continues. Montrer que si $g \circ f : X \rightarrow Z$ est un homéomorphisme, alors le fait que g soit injective (ou que f soit surjective) implique que f et g soient des homéomorphismes.
42. Montrer que chacune des propriétés suivantes est une propriété topologique : (i) être un point d'accumulation, (ii) être intérieur, (iii) être frontière, (iv) être dense, et (v) être un voisinage.
43. Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est un homéophormisphe et si $A \subset X$ a la propriété que $A \cap A' = \emptyset$, alors $f[A] \cap (f[A])' = \emptyset$. (Un sous-ensemble $A \subset X$ ayant la propriété que $A \cap A' = \emptyset$ est dit isolé. La propriété d'être isolé est ainsi une propriété topologique.)

TOPOLOGIE ENGENDREE PAR DES APPLICATIONS

44. Considérons la topologie suivante sur $Y = \{a, b, c, d\}$: $\mathcal{T} = \{Y, \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}\}$. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ définies comme suit :
- $$f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle, \langle 4, b \rangle, \langle 5, d \rangle\}, \quad g = \{\langle 1, c \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, d \rangle, \langle 4, a \rangle, \langle 5, c \rangle\}$$
- Trouver la sous-base de définition de la topologie sur X engendrée par f et g .
45. Soit $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$. Montrer que si \mathcal{S} est la sous-base de définition de la topologie \mathcal{T} engendrée par l'application f , alors $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.
46. Soient $\{f_i : X \rightarrow (Y_i, \mathcal{T}_i)\}$ une famille de l'application définies sur un ensemble arbitraire X et soit \mathcal{S}_i une sous-base de la topologie \mathcal{T}_i sur Y_i . Démontrer que la famille $\mathcal{S}^* = \bigcup_i \{f_i^{-1}[S] : S \in \mathcal{S}_i\}$ a les propriétés suivantes : (i) \mathcal{S}^* est une sous-famille de la sous-base de définition \mathcal{S} de la topologie \mathcal{T} sur X engendrée par les applications f_i ; (ii) \mathcal{S}^* est également une sous-base de \mathcal{T} .
47. Montrer que la topologie la moins fine sur la droite réelle \mathbf{R} pour laquelle les applications linéaires affines
- $$f : \mathbf{R} \rightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{U}) \text{ définies par } f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbf{R}$$
- sont continues est également la topologie usuelle \mathcal{U} .

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

33. (i) Soit $X = (0, 2)$ et soit $E = (0, 1)$ et $F = [1, 2)$. Alors $f(x) = 1$ et $g(x) = 2$ sont toutes les deux continues mais $h = f \cup g$ n'est pas continue.
44. $\{X, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}\}$
45. *Indication.* Montrer que \mathcal{S} est une topologie.

CHAPITRE 8

Espaces métriques et normés

DISTANCES

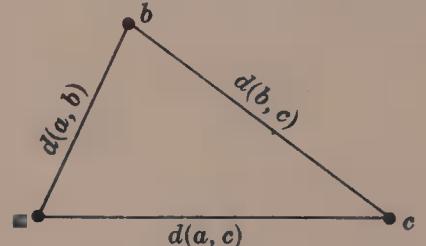
Soit X un ensemble non vide. Une fonction à valeurs réelle d définie sur $X \times X$, c'est-à-dire sur les couples d'éléments de X , est appelée une *distance* ou une *métrique* sur X ssi elle vérifie, pour tout $a, b, c \in X$, les axiomes suivants :

- [M₁] $d(a, b) \geq 0$ et $d(a, a) = 0$.
- [M₂] (Symétrie) $d(a, b) = d(b, a)$.
- [M₃] (Inégalité triangulaire) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.
- [M₄] Si $a \neq b$ alors $d(a, b) > 0$.

Le nombre réel $d(a, b)$ est appelé la *distance* de a à b .

Remarquons que [M₁] implique que la distance de deux points n'est jamais négative, et que la distance d'un point à lui-même est nulle. L'axiome [M₂] affirme que la distance d'un point a à un point b est la même que la distance de b à a ; ainsi on parle de la distance de deux points a et b .

[M₃] est appelé l'inégalité triangulaire, car si a , b et c sont des points du plan \mathbb{R}^2 comme on l'a représenté ci-contre, alors [M₃] affirme que la longueur $d(a, c)$ d'un des côtés du triangle est inférieure ou égale à la somme $d(a, b) + d(b, c)$ des longueurs des deux autres. Le dernier axiome [M₄] affirme que la distance de deux points distincts est positive.



Nous allons à présent donner quelques exemples de distances. Qu'elles vérifient effectivement les axiomes nécessaires sera vérifié ultérieurement.

Exemple 1.1 : L'application d définie par $d(a, b) = |a - b|$, où a et b sont des nombres réels, est une distance et est appelée la *distance usuelle* de la droite réelle \mathbb{R} . De plus, l'application d définie par

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

où $p = (a_1, a_2)$ et $q = (b_1, b_2)$ sont des points du plan \mathbb{R}^2 , est une distance appelée *distance usuelle* de \mathbb{R}^2 . Nous admettrons que \mathbb{R} et \mathbb{R}^2 sont munis de leur distance usuelle sauf mention expresse du contraire.

Exemple 1.2 : Soit X un ensemble quelconque non vide et soit d l'application définie par

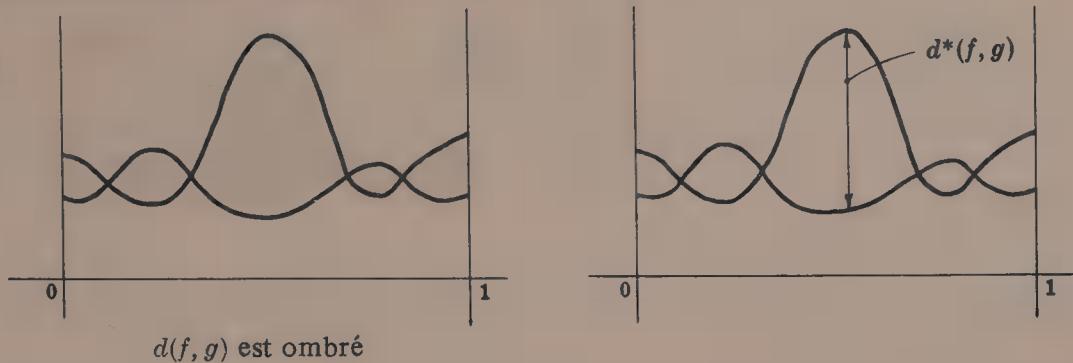
$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Alors d est une distance sur X . Cette distance est d'ailleurs appelée la *distance triviale* sur X .

Exemple 1.3 : Soit $C[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$. On définit une distance sur l'ensemble $C[0, 1]$ de la manière suivante :

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Ici $d(f, g)$ est précisément l'aire de la région comprise entre les graphes des fonctions comme on l'a représenté ci-dessous.



Exemple 1.4 : A nouveau, désignons par $C[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$. On définit une autre distance sur $C[0, 1]$ de la manière suivante :

$$d^*(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

Ici $d^*(f, g)$ est précisément la longueur du plus grand intervalle vertical compris entre les graphes des deux fonctions comme on l'a représenté ci-dessus.

Exemple 1.5 : Soient $p = \langle a_1, a_2 \rangle$ et $q = \langle b_1, b_2 \rangle$ deux points arbitraires du plan \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire deux couples de nombres réels. Les applications d_1 et d_2 définies par

$$d_1(p, q) = \max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|), \quad d_2(p, q) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

sont deux distances distinctes sur \mathbb{R}^2 .

Une application ρ vérifiant $[M_1]$, $[M_2]$ et $[M_3]$, c'est-à-dire non pas nécessairement $[M_4]$, est appelée une *pseudo-distance* ou *pseudo-métrique*. Plusieurs résultats vrais pour les distances sont encore vrais pour les pseudo-distances.

DISTANCES D'ENSEMBLES, DIAMETRES

Soit d une distance définie sur un ensemble X . La distance d'un point $p \in X$ et d'une partie non vide A de X est notée $d(p, A)$ et définie par

$$d(p, A) = \inf \{d(p, a) : a \in A\}$$

c'est-à-dire la borne inférieure des distances de p aux points de A . La distance de deux parties non vides A et B de X est notée $d(A, B)$ et définie par

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

c'est-à-dire la borne inférieure des distances des points de A aux points de B .

Le *diamètre* d'une partie non vide A de X est noté $d(A)$ et est défini par

$$d(A) = \sup \{d(a, a') : a, a' \in A\}$$

c'est-à-dire la borne supérieure des distances des points de A . Si le diamètre de A est fini, c'est-à-dire $d(A) < \infty$, alors A est dite *bornée*; sinon, c'est-à-dire $d(A) = \infty$, alors A est dite non bornée.

Exemple 2.1 : Soit d la distance triviale définie sur un ensemble non vide X . Alors pour $p \in X$ et $A, B \subset X$,

$$d(p, A) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin A \\ 0 & \text{si } p \in A \end{cases}, \quad d(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap B = \emptyset \\ 0 & \text{si } A \cap B \neq \emptyset \end{cases}$$

Exemple 2.2 : Considérons les intervalles suivants de la droite réelle \mathbb{R} : $A = [0, 1], B = (1, 2]$.

Si d désigne la métrique usuelle de \mathbb{R} , alors $d(A, B) = 0$. Par ailleurs, si d^* désigne la métrique triviale de \mathbb{R} , alors $d(A, B) = 1$ puisque A et B sont disjoints.

Il est clair que la proposition suivante découle des définitions ci-dessus.

Proposition 8.1 : Soient A et B deux parties non vides de X et soit $p \in X$. Alors :

- (i) $d(p, A), d(A, B)$ et $d(A)$ sont des réels non négatifs.
- (ii) Si $p \in A$ alors $d(p, A) = 0$.

(iii) Si $A \cap B$ est non vide, alors $d(A, B) = 0$.

(iv) Si A est fini, alors $d(A) < \infty$, c'est-à-dire A est borné.

Remarquons que les réciproques de (ii), (iii) et (iv) ne sont pas vraies.

Pour l'ensemble vide on adopte les conventions suivantes :

$$d(p, \emptyset) = \infty, \quad d(A, \emptyset) = d(\emptyset, A) = \infty, \quad d(\emptyset) = -\infty$$

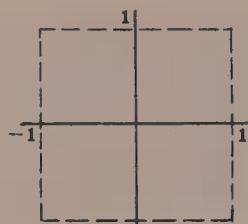
BOULES OUVERTES

Soit d une distance définie sur X . Pour tout point $p \in X$ et tout réel $\delta > 0$, $S_d(p, \delta)$ ou plus simplement $S(p, \delta)$ désigne l'ensemble des points situés à une distance moindre que δ de p :

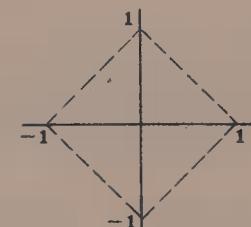
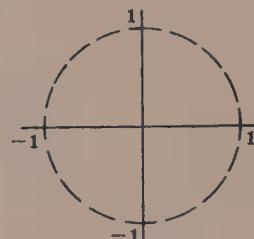
$$S(p, \delta) = \{x : d(p, x) < \delta\}$$

Nous appelons $S(p, \delta)$ la *boule ouverte*, ou plus simplement la *boule*, de centre p et rayon δ . On l'appelle également *sphère* ou *voisinage sphérique*.

Exemple 3.1 : Considérons le point $p = \langle 0, 0 \rangle$ du plan \mathbb{R}^2 , et le réel $\delta = 1$. Si d est la distance usuelle de \mathbb{R}^2 , alors $S_d(p, \delta)$ est le disque unité ouvert représenté ci-dessous. D'autre part, si d_1 et d_2 sont les distances de \mathbb{R}^2 définies dans l'exemple 1.5, alors $S_{d_1}(p, \delta)$ et $S_{d_2}(p, \delta)$ sont les parties de \mathbb{R}^2 représentées ci-dessous.



$S_{d_1}(p, \delta)$ est ombré



$S_{d_2}(p, \delta)$ est ombré

Exemple 3.2 : Soit d la distance triviale définie sur un ensemble X et soit $p \in X$. On rappelle que la distance de p à tout autre point de X vaut exactement 1. Ainsi

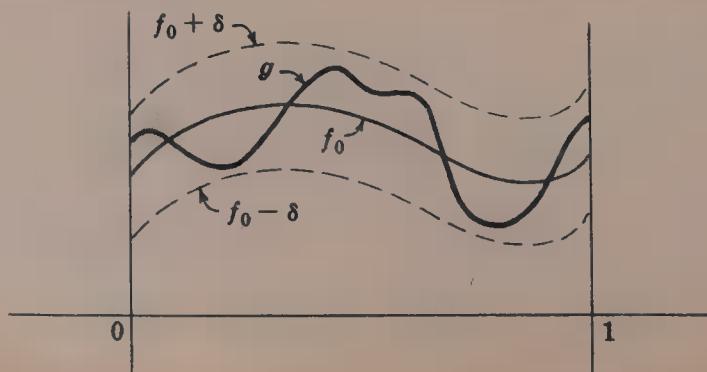
$$S(p, \delta) = \begin{cases} X & \text{si } \delta > 1 \\ \{p\} & \text{si } \delta \leq 1 \end{cases}$$

Exemple 3.3 : Soit d la distance usuelle de la droite \mathbb{R} , c'est-à-dire $d(a, b) = |a - b|$. Alors la boule ouverte $S(p, \delta)$ est égale à l'intervalle ouvert $(p - \delta, p + \delta)$.

Exemple 3.4 : Soit d la distance définie sur la famille $C[0, 1]$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, définie par

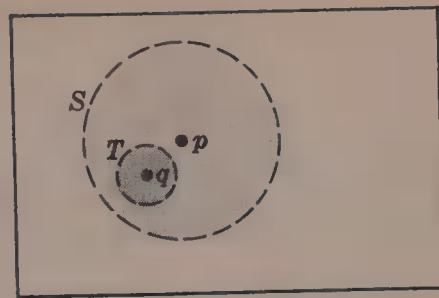
$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

(voir l'exemple 1.4). Etant donné δ et une fonction $f_0 \in C[0, 1]$, alors la boule ouverte $S(f_0, \delta)$ est formée des fonctions continues g dont le graphe se trouve dans l'aire limitée par les graphes de $f_0 - \delta$ et $f_0 + \delta$, comme on l'a représenté sur le schéma ci-dessous :



Une des propriétés les plus importantes des boules ouvertes dans un espace métrique est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 8.2 : Soit S une boule ouverte de centre p et de rayon δ . Alors, pour tout point $q \in S$, il existe une boule ouverte T centrée en q telle que T soit contenue dans S . (Voir le diagramme de Venn ci-contre.)



TOPOLOGIES INDUITES PAR UNE METRIQUE, ESPACES METRIQUES

En général, l'intersection de deux boules ouvertes n'est pas nécessairement une boule ouverte. Cependant, nous allons montrer que tout point de l'intersection de deux boules ouvertes appartient à une boule ouverte contenue dans l'intersection. A savoir,

Lemme 8.3 : Soient S_1 et S_2 deux boules ouvertes et soit $p \in S_1 \cap S_2$. Alors il existe une boule ouverte S_p de centre p telle que $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

Ainsi en vertu du théorème 6.1, nous avons le

Théorème 8.4 : La famille des boules ouvertes d'un ensemble X muni de la distance d est une base d'une topologie sur X .

DEFINITION: Soit d une distance définie sur un ensemble non vide X . La topologie \mathcal{T} sur X , engendrée par la famille des boules ouvertes de X , est appelée la *topologie métrique* (ou la topologie *induite par la métrique d*). De plus, l'ensemble X , ainsi que la topologie \mathcal{T} induite par la distance d , est appelé un *espace métrique* et est noté (X, d) .

Ainsi un espace métrique est un espace topologique dans lequel la topologie est induite par une distance. Par conséquent, toutes les notions définies pour les espaces topologiques sont également valables pour les espaces métriques. Par exemple, nous pouvons parler d'ouverts, de fermés, de voisinages, de points d'accumulation, d'adhérence, etc., pour un espace métrique.

Exemple 4.1 : Si d est la distance usuelle de la droite réelle \mathbb{R} , c'est-à-dire $d(a, b) = |a - b|$, alors les boules ouvertes de \mathbb{R} sont précisément les intervalles ouverts finis bornés. Ainsi la distance usuelle de \mathbb{R} induit la topologie usuelle de \mathbb{R} . De manière analogue la distance usuelle du plan \mathbb{R}^2 induit la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 .

Exemple 4.2 : Soit d la distance triviale définie sur un ensemble X . Notons que pour tout point $p \in X$, $S(p, 1/2) = \{p\}$. Ainsi tout singleton est ouvert et donc tout ensemble est ouvert. En d'autres termes, la distance triviale induit sur X la topologie discrète.

Exemple 4.3 : Soit (X, d) un espace métrique et soit Y une partie non vide de X . La restriction de l'application d aux points situés dans la partie Y , également notée d , est une distance sur Y . Nous dirons que (Y, d) est un *sous-espace métrique* de (X, d) . D'ailleurs (Y, d) est un sous-espace de (X, d) , c'est-à-dire est muni de la topologie induite.

Il est habituel d'utiliser la même lettre, X par exemple, pour désigner à la fois l'espace métrique et l'ensemble sous-jacent sur lequel la métrique est définie.

PROPRIETES DES TOPOLOGIES INDUITES PAR UNE METRIQUE

Puisque la topologie d'un espace métrique X provient de sa métrique, on pourrait penser, à juste titre, que les propriétés topologiques de X sont reliées à ses propriétés métriques. Par exemple,

Théorème 8.5 : Soit p un point d'un espace métrique X . Alors la famille dénombrable de boules ouvertes $\{S(p, 1), S(p, 1/2), S(p, 1/3), \dots\}$ est une base locale en p .

Théorème 8.6 : La fermeture ou l'adhérence \overline{A} d'une partie A d'un espace métrique X est l'ensemble des points dont la distance à A est nulle, c'est-à-dire $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.

Remarquons que l'axiome $[M_4]$ implique que le seul point situé à une distance nulle d'un singleton $\{p\}$ est le point p lui-même, c'est-à-dire,

$$d(x, \{p\}) = 0 \text{ implique } x = p$$

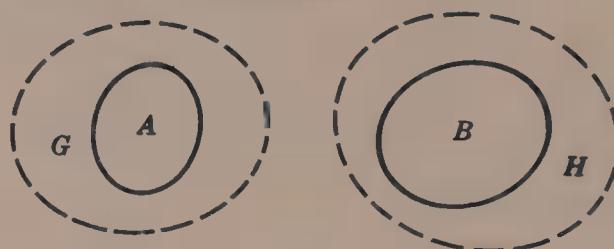
Ainsi, d'après le théorème précédent, les singletons $\{p\}$ d'un espace métrique sont fermés. Par conséquent les réunions finies de singletons, c'est-à-dire les ensembles finis, sont également des fermés. Nous allons énoncer ce résultat de manière plus formelle :

Corollaire 8.7 : Dans un espace métrique, les ensembles finis sont fermés.

Ainsi, nous voyons qu'un espace métrique possède certaines propriétés topologiques qui n'ont pas lieu dans l'espace topologique le plus général.

Suit à présent une propriété importante de "séparation" dans les espaces métriques.

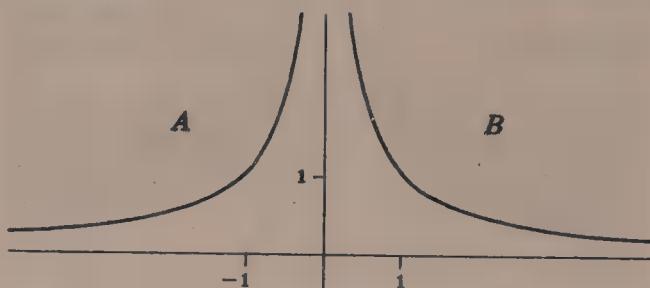
Théorème 8.8 (Axiome de séparation) : Soient A et B deux parties fermées disjointes d'un espace métrique X . Alors il existe deux ouverts disjoints G et H tels que $A \subset G$ et $B \subset H$. (Voir le diagramme de Venn ci-dessous.)



On pourrait s'attendre, d'après le théorème ci-dessus, à ce que la distance de deux fermés disjoints soit strictement positive. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas.

Exemple 5.1 : Considérons les ensembles suivants du plan \mathbb{R}^2 , représentés ci-dessous :

$$A = \{(x, y) : xy \geq -1, x < 0\}, \quad B = \{(x, y) : xy \geq 1, x > 0\}$$

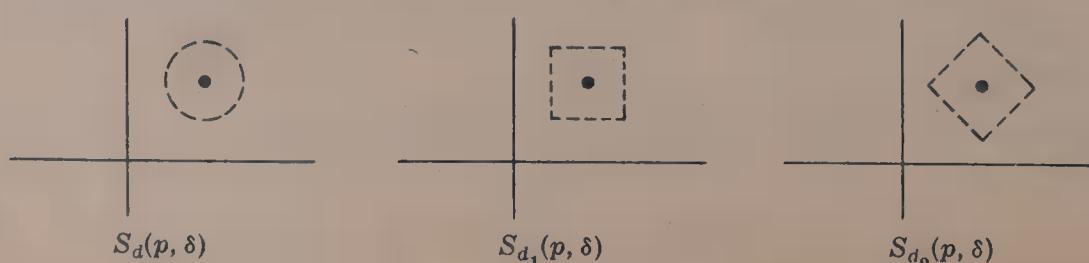


Remarquons que A et B sont tous deux fermés et disjoints. Cependant $d(A, B) = 0$.

METRIQUES OU DISTANCES EQUIVALENTEES

Deux métriques d et d^* définies sur un ensemble X sont dites équivalentes si elles induisent la même topologie sur X , c'est-à-dire si les boules ouvertes pour d et les boules ouvertes pour d^* sont des bases de la même topologie sur X .

Exemple 6.1 : La distance usuelle d et les distances d_1 et d_2 définies dans l'exemple 1.5 induisent toutes la même topologie sur le plan \mathbb{R}^2 puisque la famille des boules ouvertes de chacune des métriques (représentées ci-dessous) est une base de la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 .



Ainsi les métriques sont équivalentes.

Exemple 6.2 : Considérons la distance d définie sur un ensemble non vide X par

$$d(a, b) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

Remarquons que $s_d(p, 1) = \{p\}$; ainsi les singletons sont ouverts et d induit la topologie discrète sur X . Par conséquent d est équivalente à la distance triviale définie sur X laquelle induit également la topologie discrète.

Il est clair que la proposition suivante découle de la définition ci-dessus.

Proposition 8.9 : La relation “ d est équivalente à d^* ” est une relation d'équivalence dans toute famille de distances définies sur un ensemble X .

PROBLEME DE METRISABILITE

Etant donné un espace topologique quelconque (X, \mathcal{T}) il est naturel de se poser la question de savoir s'il existe ou non une distance d sur X qui induise la topologie \mathcal{T} . L'espace topologique (X, \mathcal{T}) est dit *métrisable* s'il existe une telle distance.

Exemple 7.1 : Tout espace discret (X, \mathcal{D}) est métrisable puisque la distance triviale de X induit la topologie discrète \mathcal{D} .

Exemple 7.2 : Considérons l'espace topologique $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, la droite réelle munie de sa topologie usuelle \mathcal{U} . Remarquons que $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ est métrisable puisque la métrique usuelle de \mathbb{R} induit la topologie usuelle de \mathbb{R} . De même, le plan \mathbb{R}^2 muni de la topologie usuelle est métrisable.

Exemple 7.3 : Un espace muni de la topologie grossière (X, \mathcal{J}) , où X comprend plus d'un point, n'est pas métrisable. En effet X et \emptyset sont les seuls fermés d'un espace muni de la topologie grossière (X, \mathcal{J}) . Or d'après le corollaire 8.7, tous les ensembles finis d'un espace métrique sont fermés. Ainsi X et \emptyset ne peuvent être les seuls fermés d'une topologie sur X induite par une métrique. Par conséquent (X, \mathcal{J}) n'est pas métrisable.

Le *problème de la métrisabilité* en topologie consiste à trouver les conditions topologiques nécessaires et suffisantes pour qu'un espace topologique soit métrisable. Une solution importante mais partielle a été apportée à ce problème par Urysohn en 1924 comme résultat du célèbre lemme d'Urysohn. Ce n'est qu'en 1950 qu'une solution complète de ce problème a été donnée indépendamment par plusieurs mathématiciens. Nous démontrerons les résultats d'Urysohn ultérieurement. La résolution complète du problème de métrisabilité dépasse le cadre de cet ouvrage, aussi renvoie-t-on le lecteur au traité classique de Kelley, *Topologie générale*.

ESPACES METRIQUES ISOMETRIQUES

Un espace métrique (X, d) est isométrique à un espace métrique (Y, e) ssi il existe une bijection $f : X \rightarrow Y$ qui conserve les distances, c'est-à-dire pour tout $p, q \in X$,

$$d(p, q) = e(f(p), f(q))$$

Remarquons que la relation “ (X, d) est isométrique à (Y, e) ” est une relation d'équivalence dans toute famille d'espaces métriques. De plus,

Théorème 8.10 : Si l'espace métrique (X, d) est isométrique à (Y, e) , alors (X, d) est également homéomorphe à (Y, e) .

L'exemple suivant montre que la réciproque du théorème ci-dessus n'est pas vraie, c'est-à-dire deux espaces métriques peuvent être homeomorphes sans être isométriques.

Exemple 8.1 : Soit d la distance triviale sur un ensemble X et soit e la distance définie sur un ensemble Y par

$$e(a, b) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

Admettons que X et Y aient le même cardinal supérieur à un. Alors (X, d) et (Y, e) ne sont pas isométriques puisque les distances de deux points dans chaque espace sont différentes. Mais, à la fois d et e induisent la topologie discrète et deux espaces discrets de même cardinal sont homéomorphes ; ainsi (X, d) et (Y, e) sont homéomorphes.

ESPACE EUCLIDIEN DE DIMENSION m

Rappelons que \mathbf{R}^m désigne l'ensemble produit de m exemplaires de l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels, c'est-à-dire est formé des m -uples $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ de nombres réels. L'application d définie par

$$d(p, q) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_m - b_m)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |a_i - b_i|^2}$$

ou $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ est une distance appelée *distance euclidienne* de \mathbf{R}^m . Nous admettrons que \mathbf{R}^m est muni de cette distance sauf mention expresse du contraire. L'espace métrique \mathbf{R}^m muni de la distance euclidienne est appelé *l'espace euclidien de dimension m* et sera également désigné par E^m .

Théorème 8.11 : L'espace euclidien de dimension m est un espace métrique.

Remarquons que l'espace euclidien de dimension 1 est précisément la droite réelle \mathbf{R} munie de la distance usuelle, et que l'espace euclidien de dimension 2 est le plan \mathbf{R}^2 muni de la distance usuelle.

ESPACE DE HILBERT

La famille des suites infinies réelles

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle \text{ telles que } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

c'est-à-dire telles que la série $a_1^2 + a_2^2 + \dots$ converge, est noté \mathbf{R}^∞ .

Exemple 9.1 : Considérons les suites

$$p = \langle 1, 1, 1, \dots \rangle \quad \text{et} \quad q = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \rangle$$

Puisque $1^2 + 1^2 + \dots$ ne converge pas, p n'est pas un point de \mathbf{R}^∞ . Par contre, la série $1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + \dots$ converge, ainsi q est un point de \mathbf{R}^∞ .

A présent soient $p = \langle a_n \rangle$ et $q = \langle b_n \rangle$ appartenant à \mathbf{R}^∞ . L'application d définie par

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2}$$

est une distance appelée la métrique de l_2 définie sur \mathbf{R}^∞ . On admettra que \mathbf{R}^∞ est muni de cette distance sauf mention expresse du contraire. L'espace métrique constitué par \mathbf{R}^∞ muni de la métrique de l_2 est appelé *l'espace de Hilbert* ou *l'espace l_2* et sera aussi noté H . Nous énonçons plus formellement :

Théorème 8.12 : L'espace de Hilbert (ou l'espace l_2) est un espace métrique.

Exemple 9.2 : Soit H_m le sous-espace de l'espace de Hilbert H formé des suites de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

Remarquons que H_m est isométrique et donc homéomorphe à l'espace euclidien de dimension m dans l'identification naturelle

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \leftrightarrow \langle a_1, \dots, a_m, 0, 0, 0, \dots \rangle$$

L'espace de Hilbert présente deux phénomènes (qui ne se présentent pas dans l'espace euclidien de dimension m) décrits dans les exemples ci-dessous :

Exemple 9.3 : Considérons la suite $\langle p_n \rangle$ de points de l'espace de Hilbert où $p_k = \langle a_{ik}, a_{ik}, \dots \rangle$ est défini par $a_{ik} = \delta_{ik}$: c'est-à-dire $a_{ik} = 1$ si $i = k$ et $a_{ik} = 0$ si $i \neq k$. Remarquons, comme on l'a décrit ci-dessous, que la projection $\langle \pi_i(p_n) \rangle$ de $\langle p_n \rangle$ sur chaque espace coordonnée converge vers 0 :

$$\begin{aligned} p_1 &= \langle 1, 0, 0, 0, \dots \rangle \\ p_2 &= \langle 0, 1, 0, 0, \dots \rangle \\ p_3 &= \langle 0, 0, 1, 0, \dots \rangle \\ p_4 &= \langle 0, 0, 0, 1, \dots \rangle \\ &\vdots && \vdots \\ &\vdots && \vdots \\ &\downarrow && \downarrow \\ \mathbf{0} &= \langle 0, 0, 0, 0, \dots \rangle \end{aligned}$$

Or la suite $\langle p_n \rangle$ ne converge pas vers 0 puisque $d(p_k, 0) = 1$ pour tout $k \in N$; d'ailleurs $\langle p_n \rangle$ ne présente pas de sous-suite convergente.

Exemple 9.4 : Soit H^* le sous-espace propre de H formé des points de H dont la première coordonnée est nulle. Remarquons que l'application $f: H \rightarrow H^*$ définie par $f(\langle a_1, a_2, \dots \rangle) = \langle 0, a_1, a_2, \dots \rangle$ est bijective et conserve les distances. Ainsi l'espace de Hilbert est isométrique à un de ses sous-espaces propres.

CONVERGENCE ET CONTINUITÉ DANS LES ESPACES MÉTRIQUES

Les définitions suivantes de la convergence et de la continuité dans les espaces métriques sont fréquemment utilisées. Remarquons leur ressemblance avec les définitions usuelles faisant intervenir ϵ et δ .

Définition : La suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de points d'un espace métrique (X, d) converge vers $b \in X$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que

$$n > n_0 \quad d(a_n, b) < \epsilon$$

Définition : Soient (X, d) et (Y, d^*) deux espaces métriques. Une application f de X dans Y est continue en $p \in X$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d(p, x) < \delta \quad d^*(f(p), f(x)) < \epsilon$$

Les définitions ci-dessus sont équivalentes aux définitions de la convergence et de la continuité (dans la topologie induite par la métrique) données pour les espaces topologiques en général.

ESPACES NORMES

Soit V un espace vectoriel réel, c'est-à-dire que V , muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire réel, vérifie les axiomes $[V_1]$, $[V_2]$ et $[V_3]$ du chapitre 2, p.24. Une application qui associe à chaque vecteur $v \in V$ le réel $\|v\|$ est une *norme* sur V ssi elle vérifie pour tout $v, w \in V$ et $k \in \mathbb{R}$ les axiomes suivants :

$$[N_1] \quad \|v\| \geq 0 \quad \text{et} \quad \|v\| = 0 \quad \text{ssi} \quad v = 0.$$

$$[N_2] \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

$$[N_3] \quad \|kv\| = |k| \|v\|.$$

Un espace vectoriel V muni d'une norme est appelé un *espace vectoriel normé* ou simplement un *espace normé*. Le réel $\|v\|$ est appelé la norme du vecteur v .

Théorème 8.13 : Soit V un espace vectoriel normé. L'application d définie par

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

où $v, w \in V$ est une distance appelée *distance induite* par la norme de V . Ainsi tout espace vectoriel normé est un espace métrique et donc un espace topologique.

Exemple 18.1 : L'espace produit \mathbb{R}^m est un espace vectoriel pour l'addition définie par

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle + \langle b_1, \dots, b_m \rangle = \langle a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m \rangle$$

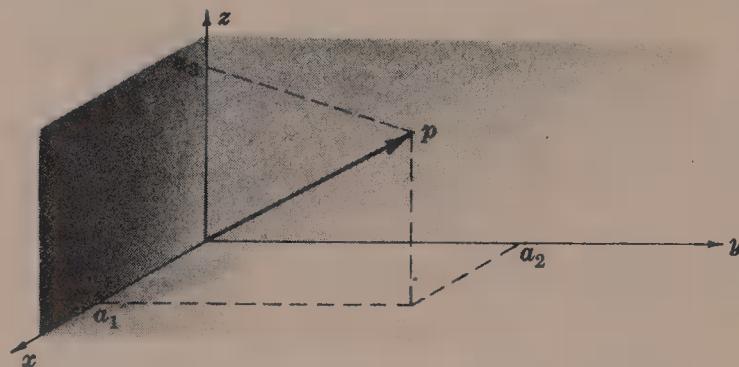
et pour la multiplication par un scalaire définie par

$$k \langle a_1, \dots, a_m \rangle = \langle k a_1, \dots, k a_m \rangle$$

L'application définie sur \mathbb{R}^m par

$$\| \langle a_1, \dots, a_m \rangle \| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2} = \sqrt{\sum a_i^2} = \sqrt{\sum |a_i|^2}$$

est une norme appelée la *norme euclidienne* de \mathbb{R}^m . Notons que la norme euclidienne de \mathbb{R}^m induit la distance euclidienne de \mathbb{R}^m . Si $p = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ est un point de \mathbb{R}^3 , alors $\| p \|$ correspond précisément à la "longueur" du segment orienté (ou vecteur) mené de l'origine au point p ainsi qu'on l'a représenté ci-dessous



Exemple 10.2 : Les deux applications suivantes sont également des normes de l'espace vectoriel normé \mathbb{R}^m :

$$\| \langle a_1, \dots, a_m \rangle \| = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|)$$

$$\| \langle a_1, \dots, a_m \rangle \| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|$$

Soit $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications à valeurs réelles définies sur un ensemble non vide X . Rappelons (voir le théorème 2.9) que $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel où l'addition vectorielle de la multiplication par un scalaire sont définies de la manière suivante :

$$(f + g)(x) \equiv f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (kf)(x) \equiv k f(x)$$

Nous allons fréquemment avoir à étudier des familles de fonctions ayant un certain nombre d'autres propriétés telles que : être bornées, continues, etc. Nous utiliserons le résultat suivant d'algèbre linéaire :

Proposition 8.14 : Soit $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ possédant les deux propriétés suivantes :

- (i) Si $f, g \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$, alors la somme $f + g \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$.
- (ii) Si $f \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$, alors le produit par un scalaire $kf \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ est lui-même un espace vectoriel.

Exemple 10.3 : L'ensemble $C[0, 1]$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $I = [0, 1]$ est un espace vectoriel puisque les sommes et les produits par un scalaire de fonctions continues sont continues. L'application sur $C[0, 1]$ définie par

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

est une norme qui induit la distance sur $C[0, 1]$ définie dans l'exemple 1.3.

Exemple 10.4 : L'application définie sur l'espace vectoriel $C[0, 1]$ par

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$$

est également une norme. Cette norme induit la distance sur $C[0, 1]$ définie dans l'exemple 1.4.

Exemple 10.5 : Soit $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ des applications bornées $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel puisque la somme et le produit par un scalaire de fonctions bornées est également bornée. L'application définie sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ par

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

est une norme.

Exemple 10.6 : Nous allons montrer ultérieurement que l'ensemble \mathbb{R}^∞ des suites réelles $\langle a_n \rangle$ telle que $\sum |a_n|^2 < \infty$ est un espace vectoriel. L'application définie sur \mathbb{R}^∞ par

$$\|\langle a_n \rangle\| = \sqrt{\sum |a_n|^2}$$

est une norme appelée norme de l_2 sur \mathbb{R}^∞ . Remarquons que cette norme induit la métrique l_2 sur l'espace de Hilbert.

PROBLEMES RESOLUS

DISTANCES

- Montrer que dans la définition d'une distance, l'axiome $[M_3]$ peut être remplacé par l'axiome (plus faible) suivant :
 $[M_3^*]$ Si $a, b, c \in X$ sont distincts alors $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Solution :

Supposons que $a = b$. Alors

$$d(a, c) = d(b, c) = d(b, b) + d(b, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Si $b = c$, le raisonnement est le même. Enfin, supposons $a = c$; alors

$$d(a, c) = 0 \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Ainsi l'inégalité triangulaire découle de $[M_1]$ si les points a, b et c ne sont pas tous distincts.

- Montrer que la distance triviale définie sur un ensemble X est une distance, c'est-à-dire que l'application d définie par

$$d(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

vérifie $[M_1], [M_2], [M_3^*]$ et $[M_4]$.

Solution :

Soient $a, b \in X$. Alors $d(a, b) = 1$ ou $d(a, b) = 0$. Dans l'un ou l'autre cas $d(a, b) \geq 0$. De plus si $a = b$, d'après la définition de d , $d(a, b) = 0$. Ainsi d vérifie $[M_1]$.

Soient $a, b \in X$. Si $a \neq b$ alors $b \neq a$. Ainsi $d(a, b) = 1$ et $d(b, a) = 1$. Par conséquent $d(a, b) = d(b, a)$. Par ailleurs, si $a = b$, alors $b = a$, et donc $d(a, b) = 0 = d(b, a)$. Ainsi d vérifie $[M_2]$.

A présent soient $a, b, c \in X$ trois points distincts. Alors $d(a, c) = 1$, $d(a, b) = 1$ et $d(b, c) = 1$. Ainsi

$$d(a, c) = 1 \leq 1 + 1 = d(a, b) + d(b, c)$$

et d vérifie $[M_3^*]$.

Enfin soient $a, b \in X$ et $a \neq b$. Alors $d(a, b) = 1$. Ainsi $d(a, b) \neq 0$ et d vérifie $[M_4]$.

3. Soit d une distance sur un ensemble non vide X . Montrer que l'application e définie par

$$e(a, b) = \min(1, d(a, b))$$

où $a, b \in X$ est également une distance sur X .

Solution :

Soient $a, b \in X$. Puisque d est une distance $d(a, b)$ est non négative. Ainsi $e(a, b)$ qui est soit égale à 1 soit égale à $d(a, b)$ est également non négative. De plus, si $a = b$ alors

$$e(a, b) = \min(1, d(a, b)) = \min(1, 0) = 0$$

Ainsi e vérifie $[M_1]$.

A présent, soient $a, b \in X$. Par définition $e(a, b) = d(a, b)$ ou $e(a, b) = 1$. Supposons que $e(a, b) = d(a, b)$, alors $d(a, b) < 1$. Puisque d est une distance $d(a, b) = d(b, a) < 1$. Par conséquent,

$$e(b, a) = d(b, a) = d(a, b) = e(a, b)$$

Par ailleurs supposons que $e(a, b) = 1$; alors $d(a, b) \geq 1$. Ainsi $d(b, a) = d(a, b) \geq 1$. Par conséquent,

$$e(b, a) = 1 = e(a, b)$$

Dans l'un ou l'autre cas e vérifie $[M_2]$.

A présent soient $a, b, c \in X$. Nous voulons démontrer l'inégalité triangulaire

$$e(a, c) \leq e(a, b) + e(b, c)$$

Remarquons que $e(a, c) = \min(1, d(a, c)) \leq 1$. Ainsi si $e(a, b) = 1$ ou $e(b, c) = 1$, l'inégalité triangulaire est vérifiée. Mais si, à la fois $e(a, b) < 1$ et $e(b, c) < 1$ alors $e(a, b) = d(a, b)$ et $e(b, c) = d(b, c)$. Par conséquent,

$$e(a, c) = \min(1, d(a, c)) \leq d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) = e(a, b) + e(b, c)$$

Ainsi, dans tous les cas, l'inégalité triangulaire est vérifiée. Ainsi e vérifie $[M_3]$.

Enfin, soient $a, b \in X$ et $a \neq b$. Alors $d(a, b) \neq 0$. Ainsi $e(a, b) = \min(1, d(a, b))$ est également non nulle. Ainsi e vérifie $[M_4]$.

4. Soit d une distance définie sur un ensemble non vide X . Montrer que l'application e définie par

$$e(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$$

où $a, b \in X$ est également une distance sur X .

Solution :

Puisque d est une distance, il est clair que e vérifie $[M_1]$, $[M_2]$ et $[M_4]$. Ainsi nous avons seulement besoin de montrer que e vérifie $[M_3]$, l'inégalité triangulaire. Soient $a, b, c \in X$; alors

$$\frac{d(a, b)}{1 + d(a, b) + d(b, c)} \leq \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)} = e(a, b)$$

et

$$\frac{d(b, c)}{1 + d(a, b) + d(b, c)} \leq \frac{d(b, c)}{1 + d(b, c)} = e(b, c)$$

Puisque d est une distance, $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. Ainsi

$$\begin{aligned} e(a, c) &= \frac{d(a, c)}{1 + d(a, c)} \leq \frac{d(a, b) + d(b, c)}{1 + d(a, b) + d(b, c)} \\ &= \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b) + d(b, c)} + \frac{d(b, c)}{1 + d(a, b) + d(b, c)} \leq e(a, b) + e(b, c) \end{aligned}$$

BOULES OUVERTES

5. Démontrer le lemme 8.2 : Soit S une boule ouverte de centre p et de rayon δ , c'est-à-dire $S = S(p, \delta)$. Alors, pour tout point $q \in S$, il existe une boule ouverte T centrée en q telle que T soit contenue dans S .

Solution :

On a $d(p, q) < \delta$ puisque $q \in S = S(p, \delta)$. Ainsi

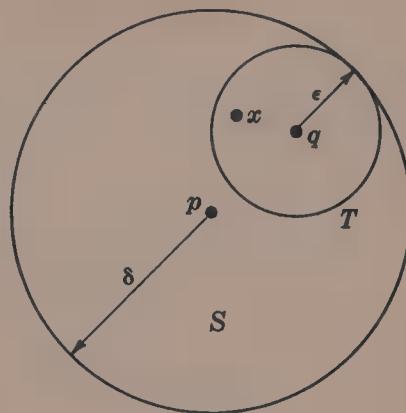
$$\epsilon = \delta - d(q, p) > 0$$

Nous disons que la boule ouverte $T = S(q, \epsilon)$ de centre q et rayon ϵ est contenue dans S .

Soit $x \in T = S(q, \epsilon)$. Alors $d(x, q) < \epsilon = \delta - d(q, p)$. Donc par l'inégalité triangulaire

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) < [\delta - d(q, p)] + d(q, p) = \delta$$

Ainsi $x \in S = S(p, \delta)$ puisque la distance à p est inférieure à δ . Ainsi $x \in T$ implique $x \in S$, c'est-à-dire T est un sous-ensemble de S (comme on l'a représenté dans le diagramme de Venn ci-contre.)



6. Soient δ_1 et δ_2 deux réels tels que $0 < \delta_1 \leq \delta_2$. Montrer que la boule ouverte $S(p, \delta_1)$ est contenue dans la boule ouverte $S(p, \delta_2)$.

Solution :

Soit $x \in S(p, \delta_1)$. Alors $d(x, p) < \delta_1 \leq \delta_2$. Ainsi $x \in S(p, \delta_2)$ et donc $S(p, \delta_1) \subset S(p, \delta_2)$.

7. Montrer que si S et T sont deux boules ouvertes de même centre, alors l'une est contenue dans l'autre.

Solution :

Supposons que $S = S(p, \delta_1)$ et $T = S(p, \delta_2)$, c'est-à-dire S et T ont même centre p et ont pour rayons respectifs δ_1 et δ_2 . Or, soit $\delta_1 \leq \delta_2$, soit $\delta_2 \leq \delta_1$. Ainsi d'après le problème précédent, soit $S \subset T$ soit $T \subset S$.

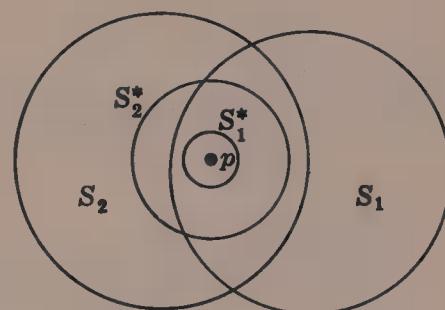
8. Démontrer le lemme 8.3 : Soient S_1 et S_2 deux boules ouvertes et soit $p \in S_1 \cap S_2$. Alors il existe une boule ouverte S_p de centre p telle que $p \in S_p \subset S_1 \cap S_2$.

Solution :

Puisque $p \in S_1$ et que S_1 est une boule ouverte, il existe, d'après le lemme 8.2, une boule ouverte S_1^* de centre p telle que $p \in S_1^* \subset S_1$. De même, il existe une boule ouverte S_2^* de centre p telle que $p \in S_2^* \subset S_2$. À présent, S_1^* et S_2^* sont toutes les deux de centre p ; donc, d'après le problème 7, l'une d'entre elles, admettons que ce soit S_1^* , est contenue dans l'autre. Ainsi nous avons

$$p \in S_1^* \subset S_1 \quad \text{et} \quad p \in S_1^* \subset S_2^* \subset S_2$$

Par conséquent $p \in S_1^* \subset S_1 \cap S_2$. Ainsi on peut prendre $S_p = S_1^*$. (Voir le schéma ci-dessous.)



TOPOLOGIE INDUIITE PAR UNE DISTANCE OU MÉTRIQUE

9. Soit X un espace métrique et soit \mathcal{D}_p la famille des boules ouvertes de centre $p \in X$. Démontrer que \mathcal{D}_p est une base locale en p .

Solution :

Soit G un ouvert de X contenant p . Puisque les boules ouvertes de X forment une base pour la topologie induite par la distance, \exists une boule ouverte S telle que $p \in S \subset G$. Or d'après le lemme 8.2, \exists une boule ouverte $S_p \in \mathcal{D}_p$, c'est-à-dire de centre p , telle que $p \in S_p \subset S \subset G$. Ainsi \mathcal{D}_p est une base locale en p .

10. Démontrer le théorème 8.5 : Soit X un espace métrique. Alors la famille dénombrable de boules ouvertes

$$\mathcal{Z} = \{S(p, 1), S(p, \frac{1}{2}), S(p, \frac{1}{3}), \dots\}$$

de centre $p \in X$, est une base locale en p .

Solution :

Soit G un ouvert de X contenant p . D'après le problème précédent, \exists une boule ouverte $S(p, \delta)$ de centre p telle que $p \in S(p, \delta) \subset G$. Puisque $\delta > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ telle que } 1/n_0 < \delta$$

Par conséquent, $p \in S(p, 1/n_0) \subset S(p, \delta) \subset G$ où $S(p, 1/n_0) \in \mathcal{Z}$. Ainsi \mathcal{Z} est une base locale en p .

11. Démontrer le théorème 8.6 : L'adhérence \bar{A} d'une partie A d'un espace métrique X est égale à l'ensemble des points dont la distance à A est nulle : $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.

Solution :

Supposons que $d(p, A) = 0$. Alors toute boule ouverte de centre p , et donc tout ouvert G contenant p , contient également au moins un point de A . Ainsi $p \in A$ ou p est un point limite de A , et donc $p \in \bar{A}$.

Réciproquement, supposons que $d(p, A) = \epsilon > 0$. Alors la boule ouverte $S(p, \frac{1}{2}\epsilon)$ de centre p ne contient aucun point de A . Ainsi p appartient à l'extérieur de A et donc $p \notin \bar{A}$. Par conséquent, $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.

12. Démontrer qu'une partie F d'un espace métrique X est fermée si et seulement si $\{x : d(x, F) = 0\} \subset \bar{F}$.

Solution :

Cela découle directement du problème 11 et du fait qu'un ensemble est fermé ssi il est égal à son adhérence.

13. Si F est une partie fermée d'un espace métrique X et si $p \in X$ n'appartient pas à F , c'est-à-dire $p \notin F$, alors $d(p, F) \neq 0$.

Solution :

Si $d(p, F) = 0$ et si F est fermée, alors d'après le problème 12, $p \in F$. Or par hypothèse $p \notin F$; donc $d(p, F) \neq 0$.

14. Démontrer le théorème 8.8 : Soient A et B deux parties disjointes fermées d'un espace métrique X . Alors, il existe deux ouverts disjoints G et H tel que $A \subset G$ et $B \subset H$.

Solution :

Si A ou B sont vides, admettons que $A = \emptyset$, alors \emptyset et X sont des ouverts disjoints tels que $A \subset \emptyset$ et $B \subset X$. Ainsi nous pouvons supposer que A et B sont non vides.

Soit $a \in A$. Puisque A et B sont disjointes, $a \notin B$. Or B est fermé ; ainsi d'après le problème précédent, $d(a, B) = \delta_a > 0$. De même si $b \in B$, alors $d(b, A) = \delta_b > 0$. Posons

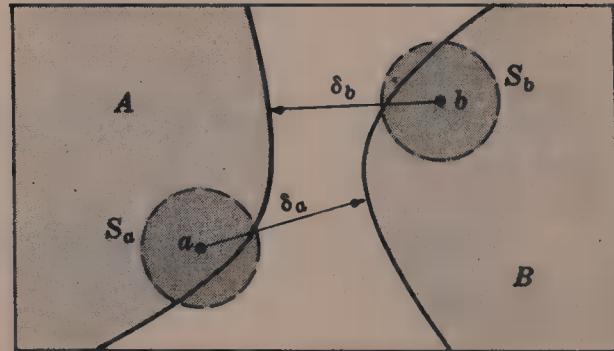
$$S_a = S(a, \frac{1}{2}\delta_a) \quad \text{et} \quad S_b = S(b, \frac{1}{2}\delta_b)$$

alors $a \in S_a$ et $b \in S_b$. (Voir le diagramme de Venn ci-contre.)

Nous disons que les ensembles

$$G = \bigcup \{S_a : a \in A\} \quad \text{et} \quad H = \bigcup \{S_b : b \in B\}$$

vérifient les conditions du théorème. A présent G et H sont ouvert puisqu'ils sont formés chacun par la réunion de boules ouvertes. De plus $a \in S_a$ implique $A \subset G$ et $b \in S_b$ implique $B \subset H$. Nous devons montrer que $G \cap H = \emptyset$.



Supposons que $G \cap H \neq \emptyset$, par exemple que $p \in G \cap H$. Alors

$$\exists a_0 \in A, b_0 \in B \text{ telle que } p \in S_{a_0}, p \in S_{b_0}$$

Soit $d(a_0, b_0) = \epsilon > 0$. Alors $d(a_0, B) = \delta_{a_0} \leq \epsilon$ et $d(b_0, A) = \delta_{b_0} \leq \epsilon$. Or $p \in S_{a_0}$ et $p \in S_{b_0}$, donc

$$d(a_0, p) < \frac{1}{3}\delta_{a_0} \quad \text{et} \quad d(p, b_0) < \frac{1}{3}\delta_{b_0}$$

D'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(a_0, b_0) = \dots \leq d(a_0, p) + d(p, b_0) < \frac{1}{3}\delta_{a_0} + \frac{1}{3}\delta_{b_0} \leq \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$$

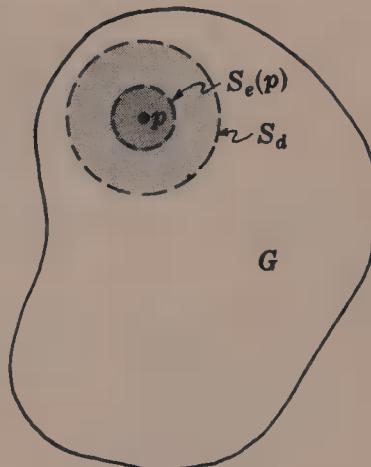
ce qui est impossible. Ainsi G et H sont disjoints et le théorème est démonté.

DISTANCES EQUIVALENTEES

15. Soient d et e deux distances définies sur un ensemble X telles que pour toute boule ouverte pour d , S_d de centre $p \in X$ il existe une boule ouverte pour e , S_e de centre p également, telle que $S_e \subset S_d$. Montrer que la topologie \mathcal{T}_d induite par d est moins fine (plus petite) que la topologie \mathcal{T}_e induite par e c'est-à-dire $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.

Solution :

Soit $G \in \mathcal{T}_d$. Nous voulons montrer que G est également un ouvert pour e . Soit $p \in G$. Puisque G est un ouvert pour d , il existe une boule ouverte pour d , S_d de centre p telle que $p \in S_d \subset G$. Par hypothèse, il existe une boule ouverte pour e , $S_e(p)$ de centre p telle que $p \in S_e(p) \subset S_d \subset G$. Par conséquent, $G = \bigcup \{S_e(p) : p \in G\}$. Ainsi G est réunion de boules ouvertes pour e et donc est ouvert pour e . Ainsi $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$.



16. Soient d et e deux distances sur un ensemble X telles que, pour toute boule ouverte pour d , S_d de centre $p \in X$, il existe une boule ouverte pour e , S_e de centre p telle que $S_e \subset S_p$, et pour toute boule ouverte pour e , S_e^* de centre $p \in X$, il existe une boule ouverte pour d , S_d^* telle que $S_d^* \subset S_e^*$. Montrer que d et e sont des distances équivalentes, c'est-à-dire qu'elles induisent la même topologie sur X .

Solution :

D'après le problème 15, la topologie \mathcal{T}_d induite par d est moins fine que la topologie \mathcal{T}_e induite par e , c'est-à-dire $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_e$. Également, d'après le problème 15, $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$. Donc $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_e$.

17. Montrer que la distance usuelle d du plan \mathbb{R}^2 est équivalente aux distances d_1 et d_2 de \mathbb{R}^2 définies dans l'exemple 1.5.

Solution :

Remarquons qu'on peut inscrire un carré dans un cercle comme on l'a représenté sur la fig. (a) ci-dessous, et qu'on peut inscrire un cercle dans un carré comme on l'a représenté dans la fig. (b). A présent les points de l'intérieur d'un cercle constituent une boule ouverte pour d et les points de l'intérieur d'un carré forment une boule ouverte pour d_1 , donc les distances d et d_1 sont équivalentes d'après le problème 16.

En outre on peut inscrire un "losange" dans un cercle comme on l'a montré sur la fig. (c) et on peut inscrire un cercle dans un "losange" comme on l'a montré sur la fig. (d). Puisque les points de l'intérieur d'un "losange" constituent une boule pour d_2 , les distances d et d_2 sont équivalentes d'après le problème 16.

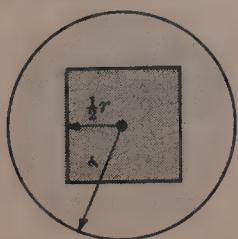


Fig. (a)

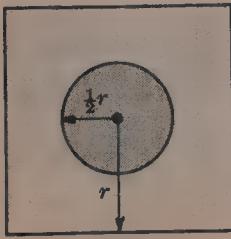


Fig. (b)

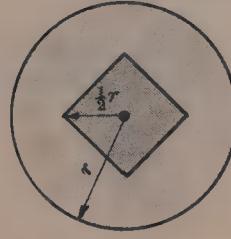


Fig. (c)

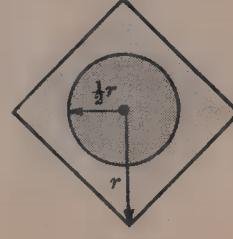


Fig. (d)

18. Soit $\mathcal{C}[0, 1]$ la famille des fonctions continues réelles définies sur $I = [0, 1]$. Considérons les distances d et e définies sur $\mathcal{C}[0, 1]$ par

$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in I\}, \quad e(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

(voir l'exemple 1.3 et l'exemple 1.4). Montrer que la topologie \mathcal{T}_d induite par d n'est pas moins fine que la topologie \mathcal{T}_e induite par e c'est-à-dire $\mathcal{T}_d \not\subset \mathcal{T}_e$.

Solution :

Soit p la fonction constante $p(x) = 2$ et soit $\epsilon = 1$. Alors la boule $S_d(p, \epsilon)$ est constituée par les fonctions g dont le graphe se trouve entre les fonctions $p - 1$ et $p + 1$, c'est-à-dire que $1 < g(x) < 3$ pour tout $x \in I$.



Il suffit de montrer que $S_d(p, \epsilon)$ ne contient pas de boule ouverte pour e de centre p ; c'est-à-dire pour tout $\delta > 0$, $S_e(p, \delta) \not\subset S_d(p, \epsilon)$. Soit $\delta > 0$. Considérons la fonction q formée de segments de droite joignant les points $(0, 4)$ et $(\frac{1}{2}\delta, 2)$, et $(\frac{1}{2}\delta, 2)$ et $(1, 2)$, c'est-à-dire définie par

$$g(x) = \begin{cases} (-4x/\delta) + 4 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}\delta \\ 2 & \text{si } \frac{1}{2}\delta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(voir le schéma ci-dessous). Remarquons que l'aire "comprise" entre p et q est égale à $\frac{1}{2}\delta$, c'est-à-dire $e(p, q) = \frac{1}{2}\delta$. Alors $q \in S_e(p, \delta)$. Mais $d(p, q) = 2$; donc $q \notin S_d(p, \epsilon)$. Ainsi $S_e(p, \delta) \not\subset S_d(p, \epsilon)$ pour tout $\delta > 0$. Ainsi $\mathcal{T}_d \not\subset \mathcal{T}_e$.

19. Soit $\mathcal{C}[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle fermé $X = [a, b]$. Considérons les distances d et e définies sur $\mathcal{C}[a, b]$ par

$$d(f, g) = \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in X\}, \quad e(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Montrer que la topologie \mathcal{T}_e induite par e est moins fine que la topologie \mathcal{T}_d induite par d , c'est-à-dire $\mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_d$.

Solution :

Soit $S_e(p, \epsilon)$ une boule ouverte pour e quelconque de $\mathcal{C}[a, b]$ de centre $p \in \mathcal{C}[a, b]$. soit $\delta = \epsilon/(b-a)$. En vertu du problème 15, il suffit de montrer que $S_d(p, \delta)$, la boule ouverte pour d de centre p et rayon δ , est contenue dans $S_e(p, \epsilon)$, c'est-à-dire $S_d(p, \delta) \subset S_e(p, \epsilon)$.

Soit $f \in S_d(p, \delta)$; alors $\sup \{|p(x) - f(x)|\} < \delta = \epsilon/(b-a)$

Ainsi

$$e(p, f) = \int_a^b |p(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup \{|p(x) - f(x)|\} dx < \int_a^b \epsilon/(b-a) dx = \epsilon$$

Donc $f \in S_e(p, \epsilon)$ et donc ainsi $S_d(p, \delta) \subset S_e(p, \epsilon)$.

ESPACES NORMES

20. Démontrer le théorème 8.13 : L'application d définie par $d(v, w) = \|v - w\|$ où v et w sont des vecteurs d'un espace vectoriel normé V , est une distance sur V .

Solution :

Notons que, d'après $[N_1]$,

$$d(v, w) = \|v - w\| \geq 0 \quad \text{et} \quad d(v, v) = \|v - v\| = \|0\| = 0$$

Ainsi d vérifie [M₁]. De plus, d'après [N₃],

$$d(v, w) = \|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \|w - v\| = \|w - v\| = d(w, v)$$

Ainsi d vérifie [M₂]. D'après [N₂], $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ pour tout $v, w \in V$. Par conséquent, si $a, b, c \in V$, reportant $v = a - b$ et $w = b - c$, nous obtenons

$$\|a - c\| = \|(a - b) + (b - c)\| = \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| = \|a - b\| + \|b - c\|$$

c'est-à-dire $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$. Ainsi d vérifie [M₃].

Enfin, si $v \neq w$, alors $v - w \neq 0$; ainsi d'après [N₁], $d(v, w) = \|v - w\| > 0$. Alors d vérifie [N₄].

21. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tout couple de points $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ de R^m ,

$$\sum_{i=1}^m |a_i b_i| \leq \|p\| \|q\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m |a_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m |b_i|^2}$$

où $\|p\|$ est la norme euclidienne.

Solution :

Si $p = 0$ ou $q = 0$, alors l'inégalité se réduit à $0 \leq 0$ et est donc vérifiée. Ainsi nous avons seulement à considérer le cas où $p \neq 0$ et $q \neq 0$, c'est-à-dire où $\|p\| \neq 0$ et $\|q\| \neq 0$.

A présent pour tous nombres réels $x, y \in R$, $0 \leq (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, ou, ce qui revient au-même,

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (1)$$

Puisque x et y sont des nombres réels arbitraires, nous pouvons prendre $x = |a_i|/\|p\|$ et $y = |b_i|/\|q\|$ dans (1). Ainsi pour tout i ,

$$2 \frac{|a_i|}{\|p\|} \frac{|b_i|}{\|q\|} \leq \frac{|a_i|^2}{\|p\|^2} + \frac{|b_i|^2}{\|q\|^2} \quad (2)$$

Or d'après la définition de la norme euclidienne, $\sum |a_i|^2 = \|p\|^2$ et $\sum |b_i|^2 = \|q\|^2$. Donc, sommant (2) par rapport à i est utilisant $|a_i b_i| = |a_i| |b_i|$, nous obtenons

$$2 \frac{\sum_{i=1}^m |a_i b_i|}{\|p\| \|q\|} \leq \frac{\sum_{i=1}^m |a_i|^2}{\|p\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^m |b_i|^2}{\|q\|^2} = \frac{\|p\|^2}{\|p\|^2} + \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 2$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sum_{i=1}^m |a_i b_i|}{\|p\| \|q\|} \leq 1$$

Multipliant les deux membres par $\|p\| \|q\|$, on obtient l'inégalité cherchée.

22. Démontrer l'inégalité de Minkowski : Pour tout couple de points $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ de R^m ,

$$\|p + q\| \leq \|p\| + \|q\| \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{\sum |a_i + b_i|^2} \leq \sqrt{\sum |a_i|^2} + \sqrt{\sum |b_i|^2}$$

Solution :

Si $\|p + q\| = 0$, il est clair que l'inégalité a lieu. Ainsi nous avons seulement à considérer le cas où $\|p + q\| \neq 0$.

Remarquons que, pour des nombres réels quelconques $a_i, b_i \in R$ nous avons $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$. Donc

$$\begin{aligned} \|p + q\|^2 &= \sum |a_i + b_i|^2 = \sum |a_i + b_i| |a_i + b_i| \\ &\leq \sum |a_i + b_i| (|a_i| + |b_i|) \\ &= \sum |a_i + b_i| |a_i| + \sum |a_i + b_i| |b_i| \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum |a_i + b_i| |a_i| \leq \|p + q\| \|p\| \quad \text{et} \quad \sum |a_i + b_i| |b_i| \leq \|p + q\| \|q\|$$

Alors $\|p + q\|^2 \leq \|p + q\| \|p\| + \|p + q\| \|q\| = \|p + q\| (\|p\| + \|q\|)$

Puisque l'on considère le cas $\|p + q\| \neq 0$, nous pouvons diviser par $\|p + q\|$; ce qui donne le résultat cherché.

23. Démontrer que la norme euclidienne

$$\|p\| = \sqrt{\sum |a_i|^2} \quad \text{ou} \quad p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \in \mathbf{R}^m$$

vérifie les axiomes d'une norme $[N_1]$, $[N_2]$ et $[N_3]$.

Solution :

$[N_1]$ découle des propriétés des nombres réels et $[N_2]$ est l'inégalité de Minkowski qui a été démontrée au problème précédent. Ainsi nous avons seulement à montrer que $[N_3]$ est vérifié. Or, pour tout vecteur $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et tout nombre réel $k \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \|kp\| &= \|k\langle a_1, \dots, a_m \rangle\| = \|\langle ka_1, \dots, ka_m \rangle\| \\ &= \sqrt{\sum |ka_i|^2} = \sqrt{\sum |k|^2 |a_i|^2} = \sqrt{|k|^2 \sum |a_i|^2} \\ &= \sqrt{|k|^2} \sqrt{\sum |a_i|^2} = |k| \sqrt{\sum |a_i|^2} = |k| \|p\| \end{aligned}$$

Ainsi $[N_3]$ est également vérifié.

24. Démontrer le théorème 8.11 : L'espace euclidien de dimension m est un espace métrique, c'est-à-dire la distance euclidienne sur \mathbf{R}^m vérifie les axiomes $[M_1]$ à $[M_4]$.

Solution :

Utiliser le problème 23 et le fait que la distance euclidienne sur \mathbf{R}^m est induite par la norme euclidienne sur \mathbf{R}^m .

25. Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite convergente de nombres réels ayant la propriété que $a_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\lim a_n \leq b$.

Solution :

Supposons que $\lim a_n = a > b$ et posons $\epsilon = a - b > 0$. Puisque $a_n \rightarrow a$,

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ tel que } a - a_{n_0} \leq |a - a_{n_0}| < \epsilon = a - b$$

Ainsi $-a_{n_0} < -b$ et donc $b < a_{n_0}$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, $\lim a_n \leq b$.

26. Démontrer l'inégalité de Minkowski pour des sommes infinies : Si $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in \mathbf{R}^\infty$, alors

$$\|\langle a_n + b_n \rangle\| \leq \|\langle a_n \rangle\| + \|\langle b_n \rangle\| \quad \text{i.e.} \quad \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}$$

Solution :

D'après l'inégalité de Minkowski pour les sommes finies,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2}$$

Puisque l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$, d'après le problème précédent, elle est aussi vérifiée à la limite.

27. Montrer que la norme de l_2 sur \mathbf{R}^∞ , c'est-à-dire $\|\langle a_n \rangle\| = \sqrt{\sum |a_n|^2}$ vérifie les axiomes d'une norme $[N_1]$, $[N_2]$ et $[N_3]$.

Solution :

La démonstration est semblable à celle du problème 23, et la norme euclidienne vérifie les axiomes [N₁], [N₂] et [N₃].

28. Démontrer le théorème 8.12 : L'espace de Hilbert (ou espace l_2) est un espace métrique.

Solution :

Utiliser le problème 27 et le fait que la métrique l_2 sur \mathbb{R}^∞ est induite par la norme de l_2 .

29. Soient a et b deux nombres réels ayant la propriété que $a \leq b + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Montrer que $a \leq b$.

Solution :

Supposons que $a > b$. Alors $a = b + \delta$ avec $\delta > 0$. Posons $\epsilon = \frac{1}{2}\delta$. A présent $a > b + \frac{1}{2}\delta = b + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse ; donc $a \leq b$.

30. Soit $I = [0, 1]$. Montrer que $\|f\| = \sup \{|f(x)|\}$ est une norme sur $C[0, 1]$.

Solution :

Rappelons qu'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé est bornée ; donc $\|f\|$ est bien définie. Puisque $|f(x)| \geq 0$ pour tout $x \in I$, $\|f\| \geq 0$; de plus $\|f\| = 0$ ssi $|f(x)| = 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire ssi $f = 0$. Ainsi [N₁] est vérifié.

Soit $\epsilon > 0$. Alors $\exists x_0 \in I$ tel que

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup \{|f(x) + g(x)|\} \leq |f(x_0) + g(x_0)| + \epsilon \\ &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| + \epsilon \\ &\leq \sup \{|f(x)|\} + \sup \{|g(x)|\} + \epsilon \\ &= \|f\| + \|g\| + \epsilon \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le problème 29, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ et [N₂] est vérifié.

A présent soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \|kf\| &= \sup \{|(kf)(x)|\} = \sup \{|k f(x)|\} = \sup \{|k| |f(x)|\} \\ &= |k| \sup \{|f(x)|\} = |k| \|f\| \end{aligned}$$

et [N₃] est vérifié.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

DISTANCES

31. Soit $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications bornées d'un ensemble X arbitraire dans un espace métrique (Y, d) . Montrer que l'application e est une distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$.

$$e(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

32. Soient respectivement d_1, \dots, d_m des distances sur X_1, \dots, X_m . Montrer que les applications suivantes sont des distances sur l'espace produit $X = \prod_i X_i$:

$$d(p, q) = \max \{d_1(a_1, b_1), \dots, d_m(a_m, b_m)\}, \quad e(p, q) = d_1(a_1, b_1) + \dots + d_m(a_m, b_m)$$

Ici $p = (a_1, \dots, a_m)$, $q = (b_1, \dots, b_m) \in X = \prod_i X_i$.

33. Soit $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ la droite réelle achevée et soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = x/(1 + |x|)$ si $x \in \mathbb{R}$, $f(\infty) = 1$ et $f(-\infty) = -1$. Montrer que l'application suivante est une distance sur \mathbb{R}^* : $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

34. Soit \mathbb{R}^+ l'ensemble des réels positifs, et soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que (i) $f(0) = 0$, (ii) $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, et (iii) $x < y$ implique $f(x) < f(y)$. Montrer que si d est une distance sur un ensemble quelconque X , l'application composé $f \circ d$ est également une distance sur X .

35. Soit ρ une pseudo-métrique définie sur un ensemble X . Soit \sim la relation définie sur X par

$$a \sim b \quad \text{ssi} \quad \rho(a, b) = 0$$

- (i) Montrer que \sim est une relation d'équivalence dans X .
(ii) Montrer que l'application suivante est une distance sur l'espace quotient $X/\sim = \{[a] : a \in X\}$: $d([a], [b]) = \rho(a, b)$. Ici $[a]$ désigne la classe d'équivalence de $a \in X$.

36. Soit $\mathcal{R}[0, 1]$ l'ensembles des fonctions intégrables (au sens de Riemann) définies sur $[0, 1]$. Montrer que l'application suivante est une pseudo-métrique sur $\mathcal{R}[0, 1]$:

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Démontrer sur un contre-exemple que ρ n'est pas une distance.

37. Montrer qu'une application d est une distance sur un ensemble X ssi elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) $d(a, b) = 0$ ssi $a = b$; (ii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

DISTANCE DE DEUX ENSEMBLES, DIAMETRE

38. Donner un exemple de deux fermés A et B de \mathbb{R} tels que

$$d(A, B) = 0 \quad \text{mais} \quad A \cap B = \emptyset$$

39. Soit d une distance définie sur X . Montrer que pour toutes parties $A, B \subset X$:

- (i) $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + d(A, B)$ et (ii) $d(\bar{A}) = d(A)$.

40. Soit d une distance définie sur X et soit A une partie arbitraire de X . Montrer que l'application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, A)$ est continue.

41. Considérons l'application $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $d((a, b)) = |a - b|$ (c'est-à-dire la distance usuelle de \mathbb{R}). Montrer que d est continue pour les topologies usuelles de la droite \mathbb{R} et du plan \mathbb{R}^2 .

42. Soit A une partie quelconque d'un espace métrique X . Montrer que $d(A) = d(\bar{A})$.

TOPOLOGIE INDUIITE PAR UNE DISTANCE

43. Soit (A, d) un sous-espace métrique de (X, d) . Montrer que (A, d) est également un sous-espace topologique de (X, d) , c'est-à-dire la restriction de d à A définit la topologie induite sur A .

44. Démontrer que si l'espace topologique (X, τ) est homéomorphe à un espace métrique (Y, d) , alors (X, τ) est métrisable.

45. Démontrer le théorème 8.10 : Si (X, d) est isométrique à (Y, e) , alors (X, d) est également homéomorphe à (Y, e) .

46. Donner un exemple montrant que l'adhérence d'une boule ouverte

$$S(p, \delta) = \{x : d(p, x) < \delta\}$$

n'est pas nécessairement "la boule fermée"

$$\overline{S}(p, \delta) = \{x : d(p, x) \leq \delta\}$$

47. Montrer qu'une boule fermée $\overline{S}(p, \delta) = \{x : d(p, x) \leq \delta\}$ est un fermé.

48. Démontrer que la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ converge vers le point p de l'espace métrique X si et seulement si la suite des nombres réels $\langle d(a_1, p), d(a_2, p), \dots \rangle$ converge vers $0 \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\lim a_n = b$ ssi $\lim d(a_n, p) = 0$.

49. Démontrer que si $\lim a_n = p$ et $\lim b_n = q$ dans un espace métrique X , alors la suite de nombres réels $\langle d(a_1, b_1), d(a_2, b_2), \dots \rangle$ converge vers $d(p, q) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\lim d(a_n, b_n) = d(\lim a_n, \lim b_n)$.

DISTANCES EQUIVALENTEES

50. Soit d une distance définie sur X . Démontrer que la distance suivante est équivalente à $d : e(a, b) = \min \{1, d(a, b)\}$.

51. Soit d une distance sur X . Montrer que la distance suivante est équivalente à $d : e(a, b) = \frac{d(a, b)}{1 + d(a, b)}$

52. Soient d et e deux distances sur X . Supposons que $\exists k, k' \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $a, b \in X$,

$$d(a, b) \leq k e(a, b) \quad \text{et} \quad e(a, b) \leq k' d(a, b)$$

Montrer que d et e sont des distances équivalentes.

ESPACE EUCLIDIEN DE DIMENSION m , ESPACE DE HILBERT

53. Soient $p_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m} \rangle, p_2 = \langle a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m} \rangle, \dots$ des points de l'espace euclidien de dimension m . Monter que $p_n \rightarrow q = \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$ si et seulement si pour $k = 1, \dots, m$ $\langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots \rangle$ converge vers b_k ; c'est-à-dire ssi la projection $\langle \pi_k(p_n) \rangle$ converge vers $\pi_k(q)$ dans chaque espace coordonnée.

54. Monter que si G est un ouvert d'un espace de Hilbert H , alors $\exists p = \langle a_n \rangle \in G$ tel que $a_1 \neq 0$.

55. Soit H^* le sous-espace propre de l'espace de Hilbert H comprenant les points de H dont la première coordonnée est nulle. (i) Montrer que H^* est fermé. (ii) Montrer que H^* est non dense ou rare dans H , c'est-à-dire $\text{int } \overline{(H^*)} = \emptyset$.

56. Soient $p_1 = \langle a_{11}, a_{12}, \dots \rangle, p_2 = \langle a_{21}, a_{22}, \dots \rangle, \dots$ des points de \mathbb{R}^∞ et supposons que la suite des nombres réels $\langle \pi_k(p_n) \rangle = \langle a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots \rangle$ converge vers $b_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 (i) Montrer que $q = \langle b_1, b_2, \dots \rangle$ appartient à \mathbb{R}^∞ .
 (ii) Montrer que la suite $\langle p_1, p_2, \dots \rangle$ converge vers q .

CUBE DE HILBERT

57. L'ensemble I des suites réelles $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ telles que $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est appelé le *cube de Hilbert*.
 (i) Montrer que I est une partie de \mathbb{R}^∞ .
 (ii) Montrer que I est un fermé borné de \mathbb{R}^∞ .

ESPACES NORMES

58. Soit $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications réelles bornées $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur un ensemble non vide X . Montrer que $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

59. Deux normes $\|\dots\|_1$ et $\|\dots\|_2$, définies sur un espace vectoriel X sont équivalentes ssi elles induisent sur X des distances équivalentes, c'est-à-dire ssi elles déterminent sur X la même topologie. Montrer que $\|\dots\|_1$ est équivalente à $\|\dots\|_2$ si et seulement si $\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in X$,
- $$a_1 \|x\|_1 < \|x\|_2 < b_1 \|x\|_1 \quad \text{et} \quad a_2 \|x\|_2 < \|x\|_1 < b_2 \|x\|_2$$

60. Soient $\|\dots\|$ la norme euclidienne et soit d la distance euclidienne induite par celle-ci sur le plan \mathbb{R}^2 . Considérons l'application e définie par

$$e(p, q) = \begin{cases} \|p\| + \|q\| & \text{si } \|p\| \neq \|q\| \\ d(p, q) & \text{si } \|p\| = \|q\| \end{cases}$$

- (i) Montrer que e est une distance sur \mathbb{R}^2 .
 (ii) Déterminer une boule ouverte dans l'espace métrique (\mathbb{R}^2, e) .

61. Montrer que $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$ est une norme sur $C[0, 1]$.

62. Soit X un espace normé. Montrer que l'application $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|$ est continue.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

36. La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

est intégrable (au sens de Riemann), c'est-à-dire appartient à $\mathcal{R}(0, 1)$. La fonction nulle $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire $g(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ appartient également à $\mathcal{R}[0, 1]$. Or $\rho(f, g) = 0$ et $f \neq g$. Ainsi ρ n'est pas une distance puisqu'elle ne vérifie pas [M_4].

38. Prenons $A = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ et $B = \{2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, \dots\}$.

46. Soit d la distance triviale sur un ensemble X contenant plus d'un point. Alors pour tout $p \in X$,

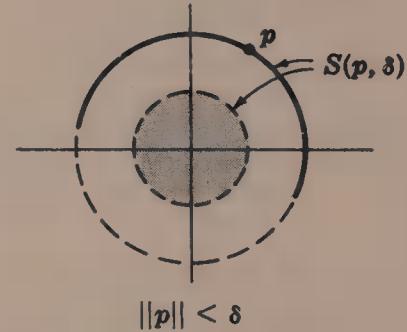
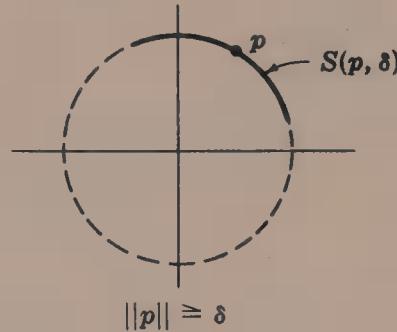
$$\begin{aligned} S(p, 1) &= \{x : d(p, x) < 1\} = \{p\} \\ \overline{S(p, 1)} &= \{x : d(p, x) \leq 1\} = X \end{aligned}$$

Or d induit la topologie discrète sur X et donc toute partie de X est à la fois ouverte et fermée. Ainsi

$$\overline{S(p, 1)} = \{p\} = \{p\} \neq \overline{S(p, 1)}$$

58. *Indication.* La démonstration est semblable à celle du problème 30.

60. (ii) Si $\|p\| \geq \delta$, alors $S(p, \delta)$ est un arc du cercle $\{x : \|x\| = \|p\|\}$. Si $\|p\| \leq \delta$, alors $S(p, \delta)$ est formée des points intérieurs au cercle $\{x : \|x\| = \delta - \|p\|\}$ et des points situés sur un arc du cercle $\{x : \|x\| = \|p\|\}$.



$$\begin{aligned} 61. \quad \|f + g\| &= \int_0^1 |f(x) + g(x)| dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|) dx \\ &= \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |g(x)| dx = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

CHAPITRE 9

Dénombrabilité

ESPACES VERIFIANT LE PREMIER AXIOME DE DENOMBRABILITE

On appelle ainsi un espace topologique X vérifiant l'axiome suivant, dit *premier axiome de dénombrabilité*.

[C₁] Pour tout point $p \in X$ il existe un ensemble au plus dénombrable \mathcal{B}_p d'ouverts contenant p , tel que tout ouvert G contenant p contient un élément de \mathcal{B}_p .

En d'autres termes, un espace topologique X vérifie le premier axiome de dénombrabilité ssi il existe une base locale dénombrable en tout point $p \in X$. Remarquons que [C₁] est une propriété *locale* d'un espace topologique X , c'est-à-dire il ne dépend que des propriétés de voisinages arbitraires du point $p \in X$.

Exemple 1.1 : Soit X un espace métrique et soit $p \in X$. On rappelle que la famille dénombrable de boules ouvertes $\{S(p, 1), S(p, \frac{1}{2}), S(p, \frac{1}{3}), \dots\}$ de centre p est une base locale en p . Ainsi tout espace métrique vérifie le premier axiome de dénombrabilité.

Exemple 1.2 : Soit X un espace discret quelconque. A présent le singleton $\{p\}$ est ouvert et est contenu dans tout ouvert G contenant $p \in X$. Ainsi tout espace discret vérifie [C₁].

Les espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité possèdent la propriété suivante, laquelle a d'ailleurs été démontrée dans le cas particulier de la droite réelle \mathbb{R} .

Théorème 9.1 : Une application définie sur un espace X vérifiant le premier axiome de dénombrabilité est continue en $p \in X$ ssi et seulement si elle est séquentiellement continue en p .

En d'autres termes, si X vérifie [C₁], alors $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$ ssi pour toute suite $\langle a_n \rangle$ convergeant vers p dans X , la suite $\langle f(a_n) \rangle$ converge vers $f(p)$ dans Y , c'est-à-dire,

$$a_n \rightarrow p \quad \text{implique} \quad f(a_n) \rightarrow f(p)$$

Remarque : Soit \mathcal{B}_p une base locale au plus dénombrable au point $p \in X$. Alors nous pouvons indexer les éléments de \mathcal{B}_p par \mathbb{N} , c'est-à-dire on peut écrire $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$. (On autorisera les répétitions dans le cas où \mathcal{B}_p est fini.) Si, de plus, $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$, alors on appelle \mathcal{B}_p une *base locale emboîtée* en p . Nous allons montrer dans un des problèmes résolus qu'on peut toujours construire une base locale emboîtée à partir d'une base locale au plus dénombrable.

ESPACES VERIFIANT LE DEUXIÈME AXIOME DE DENOMBRABILITE

On appelle ainsi un espace topologique (X, T) vérifiant l'axiome suivant, dit *deuxième axiome de dénombrabilité*.

[C₂] Il existe une base au plus dénombrable \mathcal{B} pour la topologie T .

Remarquons que le deuxième axiome de dénombrabilité est une propriété globale plutôt que locale d'un espace topologique.

Exemple 2.1 : L'ensemble \mathcal{B} des intervalles ouverts (a, b) d'extrémités rationnelles, c'est-à-dire $a, b \in \mathbb{Q}$, est au plus dénombrable et est une base pour la topologie usuelle de la droite réelle \mathbb{R} . Ainsi \mathbb{R} est un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, c'est-à-dire \mathbb{R} vérifie $[C_2]$.

Exemple 2.2 : Considérons la topologie discrète \mathcal{D} sur la droite réelle \mathbb{R} . On rappelle qu'une famille \mathcal{B} est une base pour la topologie discrète si et seulement si elle contient les singletons. Or \mathbb{R} , et donc l'ensemble des singletons $\{p\}$ de \mathbb{R} , est non dénombrable. Ainsi $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ ne vérifie pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

A présent, si \mathcal{B} est une base au plus dénombrable d'un espace X et si \mathcal{B}_p est formé des éléments de \mathcal{B} contenant le point $p \in X$, alors \mathcal{B}_p est une base locale au plus dénombrable en p . En d'autres termes,

Proposition 9.2 : Un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité vérifie également le premier axiome de dénombrabilité.

Par contre, la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie discrète ne vérifie pas $[C_2]$ d'après l'exemple 2.2, mais vérifie $[C_1]$ d'après l'exemple 1.2. Ainsi on voit que la réciproque de la proposition 9.2 n'est pas vraie.

THEOREMES DE LINDELÖF

Il est commode d'introduire la terminologie suivante. Soit $A \subset X$ et soit \mathcal{A} une famille de parties de X telle que

$$A \subset \bigcup\{E : E \in \mathcal{A}\}$$

Alors \mathcal{A} s'appelle un *recouvrement* de A et on dit que \mathcal{A} recouvre A . Si chaque élément de \mathcal{A} est un ouvert de X , alors \mathcal{A} s'appelle un *recouvrement ouvert* de A . De plus, si \mathcal{A} contient une sous-famille au plus dénombrable (ou finie) qui est également un recouvrement de A , alors on dit qu'on peut *extraire* de \mathcal{A} un *recouvrement dénombrable* (ou *fini*) ou que \mathcal{A} contient un *sous-recouvrement* au plus dénombrable (ou fini).

Les traits marquants relatifs aux espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité sont contenus dans les deux théorèmes suivants dus à Lindelöf :

Théorème 9.3 : Soit A une partie quelconque d'un espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Alors, de tout recouvrement ouvert de A , on peut extraire un sous-recouvrement au plus dénombrable.

Théorème 9.4 : Soit X un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, alors de toute base \mathcal{B} de X on peut extraire une base au plus dénombrable de X .

Le théorème précédent permet de motiver la définition d'un espace de Lindelöf. Un espace topologique X est appelé un *espace de Lindelöf* si de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement au plus dénombrable. Ainsi tout espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est un espace de Lindelöf.

ESPACES SEPARABLES

Un espace topologique X est dit *séparable* s'il vérifie l'axiome suivant.

[S] X contient une partie au plus dénombrable dense.

En d'autres termes, X est séparable ssi il existe une partie finie ou dénombrable A de X telle que l'adhérence de A est l'espace tout entier, c'est-à-dire $\overline{A} = X$.

Exemple 3.1 : La droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle est un espace séparable puisque l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est dénombrable et dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemple 3.2 : Considérons la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie discrète \mathcal{D} . On rappelle que toute partie de \mathbb{R} est à la fois ouverte pour \mathcal{D} et fermée pour \mathcal{D} ; ainsi la seule partie de \mathbb{R} qui soit dense pour \mathcal{D} dans \mathbb{R} est \mathbb{R} elle-même. Mais \mathbb{R} n'est pas un ensemble dénombrable; ainsi $(\mathbb{R}, \mathcal{D})$ n'est pas un espace séparable.

Nous allons à présent montrer que tout espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est également séparable. A savoir,

Proposition 9.5 : Si X vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, alors X est séparable.

La droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie engendrée par les intervalles semi-ouvertes $[a, b)$ est un exemple classique d'espace séparable ne vérifiant pas le deuxième axiome de dénombrabilité. Ainsi la réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie en général. On a cependant le cas particulier suivant.

Théorème 9.6 : Tout espace métrique séparable vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.

Exemple 3.3 : Soit $C[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}$$

D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, pour toute fonction $f \in C[0, 1]$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme p à coefficients rationnels tel que

$$\|f - p\| < \epsilon \text{ c'est-à-dire } |f(x) - p(x)| < \epsilon \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$

Ainsi l'ensemble \mathcal{P} de tous les polynômes de ce type est dense dans $C[0, 1]$. Or \mathcal{P} est un ensemble dénombrable; ainsi $C[0, 1]$ est séparable et, d'après le théorème 9.6, vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.

Dans notre dernier exemple nous allons montrer qu'une espace métrique n'est pas nécessairement séparable.

Exemple 3.4 : Considérons la distance e définie dans le plan \mathbb{R}^2 par

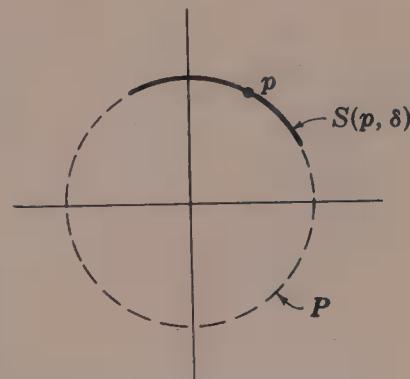
$$e(p, q) = \begin{cases} \|p\| + \|q\| & \text{si } \|p\| \neq \|q\| \\ d(p, q) & \text{si } \|p\| = \|q\| \end{cases}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 et d la distance usuelle induite par cette norme (voir le problème 60, chapitre 8).

Rappelons que si $p \neq \langle 0, 0 \rangle$ et si $\delta < \|p\|$, alors la boule ouverte pour e , $S(p, \delta)$ n'est formée que des points sur le cercle

$$P = \{x : \|x\| = \|p\|\}$$

et donc p ne peut être un point d'accumulation d'une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ que si A contient des points du cercle P . Or il y a une infinité non dénombrable de cercles de centre $\langle 0, 0 \rangle$, ainsi $A \subset \mathbb{R}^2$ ne peut être dense dans \mathbb{R}^2 que si elle est non dénombrable. Ainsi l'espace métrique (\mathbb{R}^2, e) n'est pas séparable.



PROPRIÉTÉS HEREDITAIRES

Une propriété P d'un espace topologique X est dite héréditaire ssi tout sous-espace de X possède également cette propriété P . Nous allons montrer que tout sous-espace d'un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité vérifie cet axiome et que, tout sous-espace d'un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, vérifie aussi cet axiome. En d'autres termes, les propriétés $[C_1]$ et $[C_2]$ sont toutes les deux héréditaires. Par contre, nous montre-

rons sur un contre-exemple qu'un sous-espace d'un espace séparable n'est pas nécessairement séparable, c'est-à-dire que la séparabilité n'est pas héréditaire.

Nous concluons par le schéma suivant, qui donne les seules relations existant entre les trois axiomes de ce chapitre :

$$\text{ séparable} \leftarrow \begin{matrix} \text{ vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité} \\ \rightarrow \text{ vérifiant le premier axiome de dénombrabilité} \end{matrix}$$

Ici la flèche désigne l'implication ainsi qu'on l'a énoncé dans les propositions 9.2 et 9.5.

PROBLEMES RESOLUS

ESPACES VERIFIANT LE PREMIER AXIOME DE DENOMBRABILITE

1. Montrer que tout sous-espace (Y, \mathcal{T}_Y) d'un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité vérifie également cet axiome.

Solution :

Soit $p \in Y$. Puisque $Y \subset X$, $p \in X$. Par hypothèse, (X, \mathcal{T}) vérifie le premier axiome de dénombrabilité, donc \exists une base locale pour \mathcal{T} au plus dénombrable $\mathcal{B}_p = \{B_p : n \in \mathbb{N}\}$ en p . D'après un problème précédent, $\mathcal{B}_p^* = \{Y \cap B_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base locale pour \mathcal{T}_Y en p . Puisque \mathcal{B}_p^* est au plus dénombrable, (Y, \mathcal{T}_Y) vérifie $[C_1]$.

2. Soit $\mathcal{B}_p = \{G_1, G_2, \dots\}$ une base locale au plus dénombrable en $p \in X$. Montrer que :
- (i) Il existe une base locale en p emboîtée.
 - (ii) Si X vérifie $[C_1]$ alors il existe une base locale emboîtée, en tout $p \in X$.

Solution :

- (i) Posons $B_1 = G_1, B_2 = G_1 \cap G_2, \dots, B_n = G_1 \cap \dots \cap G_n, \dots$

Alors $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ et chaque B_k est un ouvert et contient p . De plus, si G est un ouvert contenant p , alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad B_{n_0} \subset G_{n_0} \subset G$$

Par conséquent, $\{B_1, B_2, \dots\}$ est une base locale en p , emboîtée.

- (ii) Si X vérifie $[C_1]$ et si $p \in X$, alors \exists une base locale en p au plus dénombrable d'après $[C_1]$ et, d'après (i), il existe une base locale emboîtée, en p .

3. Soit $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$ une base locale en $p \in X$, emboîtée, et soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite telle que $a_1 \in B_1, a_2 \in B_2, \dots$. Montrer que $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

Solution :

Soit G un ouvert contenant p . Puisque \mathcal{B}_p est une base locale en p ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad B_{n_0} \subset G$$

Or \mathcal{B}_p est emboîtée ; ainsi $n > n_0$ implique $a_n \in B_{n_0} \subset G$, et donc $a_n \rightarrow p$.

4. Soit \mathcal{T} la topologie cofinie de la droite réelle \mathbb{R} , c'est-à-dire \mathcal{T} contient \emptyset et les complémentaires des parties finies. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ne vérifie pas le premier axiome de dénombrabilité.

Solution :

Supposons que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ vérifie $[C_1]$. Alors $1 \in \mathbb{R}$ possède une base locale au plus dénombrable $\mathcal{B}_1 = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puisque chaque B_n est un ouvert pour \mathcal{T} , son complémentaire B_n^c est fermé pour \mathcal{T} et donc fini. Par conséquent, $A = \bigcup \{B_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ est une réunion au plus dénombrable d'ensembles finis et est donc au plus dénombrable. Or \mathbb{R} n'est pas dénombrable ; ainsi il existe un point $p \in \mathbb{R}$ différent de 1 qui n'appartient pas à A , c'est-à-dire $p \in A^c$.

A présent, d'après les lois de De Morgan, nous avons

$$p \in A^c = (\bigcup \{B_n^c : n \in \mathbb{N}\})^c = \bigcap \{B_n^{cc} : n \in \mathbb{N}\} = \bigcap \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Ainsi $p \in B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $\{p\}^c$ est un ouvert pour T puisque c'est le complémentaire d'un ensemble fini, et $\{p\}^c$ contient 1 puisque p est différent de 1. Puisque \mathcal{B}_1 est une base locale, il existe un élément $B_{n_0} \in \mathcal{B}_1$ tel que $B_{n_0} \subset \{p\}^c$. Ainsi $p \notin B_{n_0}$. Mais ceci contredit l'assertion que $p \in B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'hypothèse initiale que (R, T) vérifie le premier axiome de dénombrabilité est fausse.

5. Démontrer le théorème 9.1 : Soit X un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Alors $f : X \rightarrow Y$ est continue en $p \in X$ si et seulement si elle est séquentiellement continue en p .

Solution :

Il suffit de montrer que si f est séquentiellement continue en p alors f est continue en p puisque la réciproque a été démontrée pour un espace topologique arbitraire. Nous allons en fait démontrer l'assertion contraposée : Si f n'est pas continue en p alors f n'est pas séquentiellement continue en p .

Soit $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$ une base locale en p , emboîtée, et supposons que f ne soit pas continue en p . Alors il existe un ouvert H de Y tel que

$$f(p) \in H \quad \text{mais} \quad B_n \not\subseteq f^{-1}[H] \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists a_n \in B_n \quad \text{tel que} \quad a_n \notin f^{-1}[H] \quad \text{ce qui implique} \quad f(a_n) \notin H$$

A présent d'après un problème précédent, la suite $\langle a_n \rangle$ converge vers p ; mais la suite $\langle f(a_n) \rangle$ ne converge pas vers $f(p)$, puisque l'ouvert H contenant $f(p)$ ne contient aucun des termes de la suite. Par conséquent, f n'est pas séquentiellement continue en p .

ESPACES VERIFIANT LE DEUXIÈME AXIOME DE DENOMBRABILITÉ

6. Montrer que le plan \mathbb{R}^2 , munie de la topologie usuelle, vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.

Solution :

Soit \mathcal{B} l'ensemble des disques ouverts de \mathbb{R}^2 de rayon rationnel et de centre à coordonnées rationnelles. Alors \mathcal{B} est un ensemble dénombrable et, de plus, est une base de la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 . Ainsi \mathbb{R}^2 est un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité.

7. Montrer que tout sous-espace d'un espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité vérifie cet axiome.

Solution :

Soit $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ une base au plus dénombrable de l'espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, et soit Y un sous-espace de X . D'après un problème précédent, $\mathcal{B}_y = \{Y \cap B_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base de Y . Puisque \mathcal{B}_y est au plus dénombrable, Y vérifie [C₂].

8. Démontrer le théorème (de Lindelöf) 9.3 : Soit A une partie quelconque d'un espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Si \mathcal{G} est un recouvrement ouvert de A , alors on peut extraire de \mathcal{G} un sous-recouvrement au plus dénombrable.

Solution :

Soit \mathcal{B} une base au plus dénombrable de X . Puisque $A \subseteq \bigcup \{G : G \in \mathcal{G}\}$, peut tout $p \in A$, $\exists G_p \in \mathcal{G}$ tel que $p \in G_p$. Puisque \mathcal{B} est une base de X , pour tout $p \in A$,

$$\exists B_p \in \mathcal{B} \quad \text{tel que} \quad p \in B_p \subseteq G_p$$

Ainsi $A \subset \bigcup \{B_p : p \in A\}$. Or $\{B_p : p \in A\} \subset \mathcal{B}$, donc est au plus dénombrable ; ainsi

$$\{B_p : p \in A\} = \{B_n : n \in N\}$$

où N est un ensemble au plus dénombrable d'indices. Pour chaque $n \in N$ choisissons un ensemble $G_n \subset G$ tel que $B_n \subset G_n$. Alors

$$A \subset \bigcup \{B_n : n \in N\} \subset \bigcup \{G_n : n \in N\}$$

et donc $\{G_n : n \in N\}$ est un sous-recouvrement au plus dénombrable extrait de G .

9. Démontrer le théorème (de Lindelöf) 9.4 : Soit G une base d'un espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Alors, on peut extraire de G une base au plus dénombrable de X .

Solution :

Puisque X vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, X a une base au plus dénombrable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in N\}$. Puisque G est également une base de X , pour chaque $n \in N$,

$$B_n = \bigcup \{G : G \in G_n\} \quad \text{avec } G_n \subset G$$

Ainsi G_n est un recouvrement ouvert de B_n et, d'après le théorème précédent, on peut en extraire un sous-recouvrement à plus dénombrable G_n^* , c'est-à-dire, pour chaque $n \in N$,

$$B_n = \bigcup \{G : G \in G_n^*\} \quad \text{avec } G_n^* \subset G \quad \text{et } G_n^* \text{ au plus dénombrable}$$

Or

$$G^* = \{G : G \in G_n^*, n \in N\}$$

est une base de X puisque \mathcal{B} en est une. De plus, $G^* \subset G$ et G^* est au plus dénombrable.

SEPARABILITE

10. Soit T la topologie cofinie sur un ensemble quelconque X . Montrer que (X, T) est séparable, c'est-à-dire contient un sous-ensemble dense au plus dénombrable.

Solution :

Si X est lui-même au plus dénombrable, il est clair que X est un sous-ensemble dense de (X, T) . Maintenant supposons que X ne soit pas au plus dénombrable. Alors X contient un sous-ensemble A dénombrable. Rappelons que les ensembles fermés pour T sont les ensembles finis et X ; ainsi d'adhérence de l'ensemble infini A est égale à l'espace tout entier X , c'est-à-dire $\overline{A} = X$. Or A est dénombrable ; ainsi (X, T) est séparable.

11. Montrer qu'un espace discret X est séparable si et seulement si X est au plus dénombrable.

Solution :

Rappelons que toute partie d'un espace discret X est à la fois ouverte et fermée. Ainsi le seul sous-ensemble dense de X est X lui-même. Ainsi X contient un sous-ensemble dense au plus dénombrable ssi X est au plus dénombrable, c'est-à-dire X est séparable ssi X est au plus dénombrable.

12. Démontrer la proposition 9.5 : Si X vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, alors X est séparable.

Solution :

Puisque X vérifie [C₂], X a une base au plus dénombrable $\mathcal{B} = \{B_n : n \in N\}$. Pour chaque $n \in N$, choisissons un point $a_n \in B_n$. Alors l'ensemble $A = \{a_n : n \in N\}$ est également au plus dénombrable. Nous allons montrer que $\overline{A} = X$ ou, ce qui revient au même, que chaque point $p \in A^c$, complémentaire de A , est un point d'accumulation de A .

Soit G un ouvert contenant p . Alors G contient au moins un ensemble $B_{n_0} \in \mathcal{B}$. Ainsi $a_{n_0} \in B_{n_0} \subset G$. A présent a_{n_0} est différent de p puisque $p \in A^c$ et que $a_{n_0} \in A$. Par conséquent, p est un point d'accumulation de A puisque tout ouvert G contenant p contient également un point de A différent de p .

13. Soit \mathcal{T} la topologie du plan \mathbf{R}^2 engendrée par les rectangles semi-ouverts

$$[a, b) \times [c, d) = \{\langle x, y \rangle : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$

Montrer que $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ est séparable.

Solution :

Il existe toujours des nombres rationnels x_0 et y_0 tels que $a < x_0 < b$ et $c < y_0 < d$, ainsi le rectangle ouvert ci-dessus contient le point $p = \langle x_0, y_0 \rangle$ de coordonnées rationnelles. Ainsi l'ensemble $A = Q \times Q$ formé des points de \mathbf{R}^2 de coordonnées rationnelles est dense dans \mathbf{R}^2 . Mais A est un ensemble dénombrable ; ainsi $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ est séparable.

14. Montrer sur un contre-exemple qu'un sous-espace d'un espace séparable n'est pas nécessairement séparable, c'est-à-dire que la séparabilité n'est pas une propriété héréditaire.

Solution :

Considérons l'espace topologique séparable $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ du problème précédent. Rappelons (voir problème 25 du chapitre 6) que la topologie induite \mathcal{T}_y sur la droite $Y = \{\langle x, y \rangle : x + y = 0\}$ est la topologie discrète puisque chaque singleton $\{p\}$ de Y est ouvert pour \mathcal{T}_y . Or un espace infini non dénombrable discret n'est pas séparable. Ainsi la séparabilité de $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ n'est pas héritée par le sous-espace (Y, \mathcal{T}_y) .

15. Soit $S(p, \epsilon)$ une boule ouverte d'un espace métrique X et soit $d(p, a) < \frac{1}{3}\epsilon$. Montrer que si $\frac{1}{3}\epsilon < \delta < \frac{2}{3}\epsilon$, alors

$$p \in S(a, \delta) \subset S(p, \epsilon)$$

Solution :

$d(p, a) < \frac{1}{3}\epsilon < \delta$, donc $p \in S(a, \delta)$. Par conséquent, nous n'avons plus qu'à montrer que $S(a, \delta) \subset S(p, \epsilon)$.

Soit $x \in S(a, \delta)$. Alors $d(a, x) < \delta$ et, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(p, x) \leq d(p, a) + d(a, x) < \frac{1}{3}\epsilon + \delta < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{2}{3}\epsilon = \epsilon$$

Ainsi $x \in S(p, \epsilon)$, soit $S(a, \delta) \subset S(p, \epsilon)$.

16. Démontrer le théorème 9.6 : Soit X un espace métrique séparable. Alors X vérifie $[C_2]$, c'est-à-dire X contient une base dénombrable.

Solution :

Puisque X est séparable, X contient un sous-ensemble dense A au plus dénombrable. Soit \mathcal{B} l'ensemble des boules ouvertes de centre appartenant à A et de rayon rationnel, c'est-à-dire

$$\mathcal{B} = \{S(a, \delta) : a \in A, \delta \in Q\}$$

Notons que \mathcal{B} est un ensemble au plus dénombrable. Nous disons que \mathcal{B} est une base pour la topologie de X , c'est-à-dire pour tout ouvert $G \subset X$ et tout point $p \in G$,

$$\exists S(a, \delta) \in \mathcal{B} \quad \text{tel que} \quad p \in S(a, \delta) \subset G$$

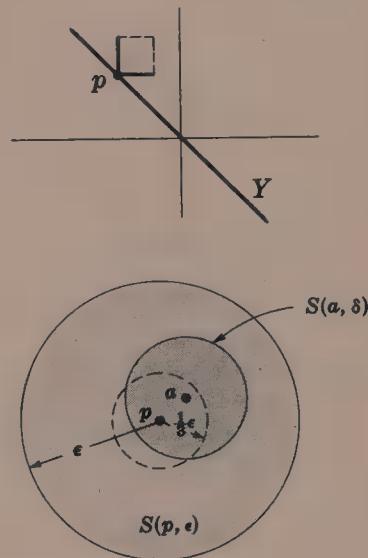
Puisque $p \in G$, \exists une boule ouverte $S(p, \epsilon)$ de centre p telle que $p \in S(p, \epsilon) \subset G$. Puisque A est dense dans X ,

$$\exists a_0 \in A \quad \text{tel que} \quad d(p, a_0) < \frac{1}{3}\epsilon$$

Soit δ_0 un nombre rationnel tel que $\frac{1}{3}\epsilon < \delta_0 < \frac{2}{3}\epsilon$. Alors, d'après le problème précédent,

$$p \in S(a_0, \delta_0) \subset S(p, \epsilon) \subset G$$

Or $S(a_0, \delta_0) \in \mathcal{B}$, et donc \mathcal{B} est une base au plus dénombrable pour la topologie de X .



PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES VERIFIANT LE PREMIER AXIOME DE DENOMBRABILITE

17. Montrer que la propriété de vérifier le premier axiome de dénombrabilité est une propriété topologique.
18. Soit $\mathcal{B}_p = \{B_1, B_2, \dots\}$ une base locale en $p \in X$, emboîtée. Montrer que toute sous-suite $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots\}$ de \mathcal{B}_p est également une base locale en p , emboîtée.
19. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbb{R} , engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ vérifie $[C_1]$ en exhibant une base locale au plus dénombrable, en tout point $p \in \mathbb{R}$.
20. Soit \mathcal{T} la topologie du plan \mathbb{R}^2 , engendrée par les rectangles semi-ouverts

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$
 Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ vérifie $[C_1]$ en exhibant une base locale au plus dénombrable, en tout point $p \in \mathbb{R}^2$.
21. Soit \mathcal{T} et \mathcal{T}^* deux topologies sur X , \mathcal{T} étant moins fine que \mathcal{T}^* , c'est-à-dire $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
 - Montrer que (X, \mathcal{T}^*) peut vérifier le premier axiome de dénombrabilité sans que (X, \mathcal{T}) le fasse.
 - Montrer que (X, \mathcal{T}) peut vérifier le premier axiome de dénombrabilité sans que (X, \mathcal{T}^*) le fasse.

ESPACES VERIFIANT LE DEUXIEME AXIOME DE DENOMBRABILITE

22. Montrer que la propriété consistant à vérifier le deuxième axiome de dénombrabilité est une propriété topologique.
23. Montrer que si X ■ une sous-base au plus dénombrable, alors X vérifie $[C_2]$.
24. Exhiber une base au plus dénombrable pour l'espace euclidien de dimension m .
25. Soit \mathcal{A} une famille quelconque d'ouverts disjoints d'un espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Montrer que \mathcal{A} est une famille dénombrable.
26. Soit A un sous-ensemble non dénombrable d'un espace X vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité. Montrer que A a au moins un point d'accumulation.
27. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbb{R} engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ne vérifie pas $[C_2]$.
28. Montrer que l'espace l_2 (l'espace de Hilbert) vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité.

ESPACES SEPARABLES

29. Montrer que la propriété d'être séparable est une propriété topologique.
30. Montrer que l'espace euclidien de dimension m est séparable.
31. Montrer que l'espace l_2 (l'espace de Hilbert) est séparable.
32. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle ■ engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$, montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est séparable.
33. Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}^* deux topologies de X , telles que \mathcal{T} soit moins fine que \mathcal{T}^* , c'est-à-dire $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.
 - Montrer que si (X, \mathcal{T}^*) est séparable, alors (X, \mathcal{T}) est également séparable.
 - Montrer sur un contre-exemple que la réciproque de (i) n'est pas vraie.

34. Soit $C[0, 1]$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ de norme

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Montrer que $C[0, 1]$ est séparable et vérifie donc le deuxième axiome de dénombrabilité.

ESPACES DE LINDELÖF

35. Montrer que l'image par une application continue d'un espace de Lindelöf est également un espace de Lindelöf.
36. Soit A une partie fermée d'un espace de Lindelöf X . Montrer que A , munie de la topologie induite, est également un espace de Lindelöf.
37. Montrer qu'un espace discret X est un espace de Lindelöf si et seulement si X est un espace au plus dénombrable.
38. Soit \mathcal{T} la topologie du plan \mathbb{R}^2 engendrée par les rectangles semi-ouverts

$$[a, b) \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$

Rappelons (voir le problème 11) que \mathcal{T} induit la topologie discrète sur la droite $Y = \{(x, y) : x + y = 1\}$. Montrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ n'est pas un espace de Lindelöf et qu'ainsi $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ est un espace séparable vérifiant le premier axiome de dénombrabilité qui ne vérifie pas le deuxième axiome de dénombrabilité.

CHAPITRE 10

Axiomes de séparation

INTRODUCTION

Plusieurs propriétés d'un espace topologique X dépendent de la distribution des ouverts dans l'espace. En gros, un espace a plus de chance d'être séparable, ou de vérifier le premier ou le deuxième axiome de dénombrabilité, s'il y a "peu" d'ouverts ; d'autre part, une application arbitraire de X dans un espace topologique quelconque a plus de chance d'être continue ou une suite d'avoir une limite unique si l'espace a "beaucoup" d'ouverts.

Les *axiomes de séparation* d'Alexandroff et de Hopf, étudiés dans ce chapitre, postulent l'existence de "suffisamment" d'ouverts.

ESPACES T_1

Un espace topologique X est dit espace T_1 ssi il vérifie l'axiome suivant :

[T_1] Etant donnés deux points distincts $a, b \in X$, chacun appartient à un ouvert qui ne contient pas l'autre.

En d'autres termes, il existe deux ouverts G et H tels que

$$a \in G, b \notin G \quad \text{et} \quad b \in H, a \notin H$$

Les ouverts G et H ne sont pas nécessairement disjoints.

Notre prochain théorème donne une caractérisation très simple des espaces T_1 .

Théorème 10.1 : Un espace topologique X est un espace T_1 si et seulement si tout singleton $\{p\}$ de X est fermé.

Puisque les réunions finies de fermés sont des fermés, le théorème ci-dessous implique le :

Corollaire 10.2 : (X, \mathcal{T}) est un espace T_1 si et seulement si \mathcal{T} contient la topologie cofinie sur X .

Exemple 1.1 : Tout espace métrique X est un espace T_1 puisque nous avons démontré que les sous-ensembles finis de X sont des fermés.

Exemple 1.2 : Considérons la topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ sur l'ensemble $X = \{a, b\}$. Remarquons que X est le seul ouvert contenant b , mais il contient également a . Ainsi (X, \mathcal{T}) ne vérifie pas [T_1], c'est-à-dire (X, \mathcal{T}) n'est pas un espace T_1 . Notons que le singleton $\{a\}$ n'est pas fermé puisque son complémentaire $\{a\}^c = \{b\}$ n'est pas ouvert.

Exemple 1.3 : La topologie cofinie sur X est la topologie la moins fine sur X pour laquelle (X, \mathcal{T}) est un espace T_1 (corollaire 10.2). Ainsi la topologie cofinie est également appelée la *topologie T_1* .

ESPACES SEPARES OU DE HAUSDORFF

Un espace topologique X est un *espace séparé* ou *de Hausdorff* ou *espace T_2* , ssi il vérifie l'axiome suivant :

[T₂] Deux points distincts $a, b \in X$ appartiennent respectivement à deux ouverts disjoints.

En d'autres termes, il existe deux ouverts G et H tels que

$$a \in G, \quad b \in H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

Remarquons qu'un espace séparé est toujours un espace T_1 .

Exemple 2.1 : Nous allons montrer que tout espace métrique X est séparé.

Soient $a, b \in X$ deux points distincts ; ainsi d'après [M₄] $d(a, b) = \epsilon > 0$. Considérons les boules ouvertes $G = S(a, \frac{1}{3}\epsilon)$ et $H = S(b, \frac{1}{3}\epsilon)$ centrées respectivement en a et b . Nous affirmons que G et H sont disjointes. En effet si $p \in G \cap H$, alors $d(a, p) < \frac{1}{3}\epsilon$ et $d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon$ d'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(a, b) \leq d(a, p) + d(p, b) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon$$

Mais ceci contredit le fait que $d(a, b) = \epsilon$. Ainsi G et H sont disjointes, c'est-à-dire a et b appartiennent respectivement aux boules ouvertes disjointes G et H . Par conséquent X est un espace séparé.

Nous allons énoncer formellement le résultat de l'exemple précédent, à savoir :

Théorème 10.3 : Tout espace métrique est un espace séparé.

Exemple 2.2 : Soit τ la topologie cofinie, c'est-à-dire la topologie T_1 sur la droite réelle \mathbb{R} . Nous allons montrer que (\mathbb{R}, τ) n'est pas séparé. Soient G et H deux ouverts non vides quelconques pour τ . À présent G et H sont infinis comme complémentaires de parties finies. Si $G \cap H = \emptyset$, alors G , qui est infini, serait contenu dans le complémentaire de H qui est fini ; ainsi G et H ne sont pas disjointes. Par conséquent, il n'existe pas deux points distincts de \mathbb{R} appartenant respectivement à des ouverts de τ disjointes. Ainsi un espace T_1 n'est pas nécessairement séparé.

Comme on l'a noté précédemment une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de points d'un espace topologique X pouvait en général converger vers plus d'un point de X . Ceci ne peut se produire si X est séparé.

Théorème 10.4 : Si X est un espace topologique séparé, alors toute suite convergente dans X a une limite unique.

La réciproque du théorème ci-dessus n'est vraie que si on ajoute des conditions supplémentaires.

Théorème 10.5 : Soit X un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Alors X est séparé si et seulement si toute suite convergente a une limite unique.

Remarque : La notion de suite a été étendue à celle de *réseau* (suite de Moore-Smith) et à celle de *filtre* avec les résultats suivants :

Théorème 10.4A : X est un espace séparé si et seulement si tout réseau convergent de X a une limite unique.

Théorème 10.4B : X est un espace séparé si et seulement si tout filtre convergent de X a une limite unique.

Les définitions d'un réseau et d'un filtre ainsi que les démonstrations des théorèmes ci-dessus dépassent le cadre de cet ouvrage.

ESPACES REGULIERS

Un espace topologique X est *régulier* ssi il vérifie l'axiome suivant :

[R] Si F est un fermé de X et si $p \in X$ n'appartient pas à F , alors il existe deux ouverts disjoints G et H tels que $F \subset G$ et $p \in H$.

Un espace régulier n'est pas nécessairement un espace T_1 , comme on le voit sur l'exemple suivant.

Exemple 3.1 : Considerons la topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ sur l'ensemble $X = \{a, b, c\}$. Remarquons que les fermés de X sont également $X, \emptyset, \{a\}$ et $\{b, c\}$ et que (X, \mathcal{T}) vérifie [R]. Par contre, (X, \mathcal{T}) n'est pas un espace T_1 puisqu'il y a des ensembles finis, par exemple $\{b\}$, qui ne sont pas fermés.

Un espace régulier X qui vérifie l'axiome de séparation $[T_1]$, c'est-à-dire un espace T_1 régulier, est appelé un *espace T_3* .

Exemple 3.2 : Soit X un espace T_3 . Alors X est également un espace séparé, c'est-à-dire un espace T_2 . En effet, soient $a, b \in X$ deux points distincts. Puisque X est un espace T_1 , $\{a\}$ est un ensemble fermé ; et, puisque a et b sont distincts, $b \notin \{a\}$. Par conséquent, d'après [R], il existe des ouverts disjoints G et H tels que $\{a\} \subset G$ et $b \in H$. Ainsi a et b appartiennent respectivement à des ouverts G et H disjoints.

ESPACES NORMAUX

Un espace topologique X est normal ssi X vérifie l'axiome suivant :

- [N] Si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de X , alors il existe des ouverts disjoints G et H tels que $F_1 \subset G$ et $F_2 \subset H$.

Un espace normal peut également être caractérisé de la manière suivant :

Théorème 10.6 : Un espace topologique X est normal si et seulement si pour tout fermé F et tout ouvert H contenant F il existe un ouvert G tel que $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

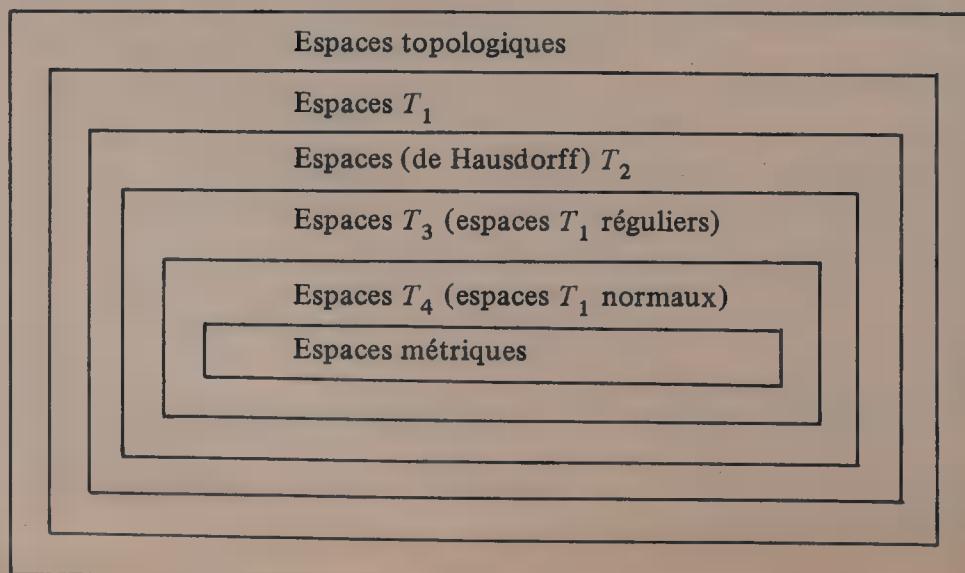
Exemple 4.1 : Tout espace métrique est normal en vertu du théorème de séparation 8.8.

Exemple 4.2 : Considérons la topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ sur l'ensemble $X = \{a, b, c\}$. Remarquons que les fermés sont $X, \emptyset, \{b, c\}, \{a, c\}$ et $\{c\}$. Si F_1 et F_2 sont des fermés joints de (X, \mathcal{T}) , alors l'un d'entre eux, admettons que ce soit F_1 , doit être l'ensemble vide \emptyset . Ainsi \emptyset et X sont des ouverts disjoints et $F_1 \subset \emptyset, F_2 \subset X$. En d'autres termes, (X, \mathcal{T}) est un espace normal. Par contre, (X, \mathcal{T}) n'est pas un espace T_1 puisque le singleton $\{a\}$ n'est pas fermé. En outre (X, \mathcal{T}) n'est pas un espace régulier puisque $a \notin \{c\}$ et que le seul ouvert contenant le fermé $\{c\}$ est X qui contient également a .

Un espace normal X qui vérifie également l'axiome de séparation $[T_1]$, c'est-à-dire un espace T_1 normal, est appelé un *espace T_4* .

Exemple 4.3 : Soit X un espace T_4 . Alors X est également un espace T_1 régulier, c'est-à-dire un espace T_3 . En effet, supposons que F soit un fermé de X et que $p \in X$ n'appartienne pas à F . D'après $[T_1]$, $\{p\}$ est fermé ; et puisque F et $\{p\}$ sont disjoints, d'après [N], il existe deux ouverts disjoints G et H tels que $F \subset G$ et que $p \in \{p\} \subset H$.

A présent un espace métrique est à la fois un espace normal et un espace T_1 , c'est-à-dire un espace T_4 . Le schéma suivant représente les différents rapports existant entre les espaces étudiés dans ce chapitre.



LEMME D'URYSOHN ET THEOREME DE METRISABILITE

Suit le résultat classique d'Urysohn.

Théorème (lemme d'Urysohn) 10.7 : Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace normal X . Alors il existe une fonction continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$f[F_1] = \{0\} \quad \text{et} \quad f[F_2] = \{1\}$$

Une des conséquences importantes du lemme d'Urysohn est une résolution partielle du problème de métrisabilité étudié dans le chapitre 8. A savoir,

Théorème de métrisabilité d'Urysohn 10.8 : Tout espace normal T_1 vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est métrisable.

D'ailleurs, nous allons démontrer que tout espace T_1 normal vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est homéomorphe à une partie du cube de Hilbert dans \mathbb{R}^∞ .

APPLICATIONS SEPARANT LES POINTS

Soit $\mathcal{A} = \{f_i : i \in I\}$ une famille d'applications d'un ensemble X dans un ensemble Y . La famille d'applications \mathcal{A} est dite séparer les points ssi pour tout couple de points distincts $a, b \in X$ il existe une application f de \mathcal{A} telle que $f(a) \neq f(b)$.

Exemple 5.1 : Considérons la famille d'applications à valeurs réelles

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin 2x, f_3(x) = \sin 3x, \dots\}$$

définies sur \mathbb{R} . Remarquons que, pour toute application $f_n \in \mathcal{A}$, $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$. Ainsi la famille \mathcal{A} ne sépare pas les points.

Exemple 5.2 : Soit $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ la famille des applications continues sur un espace topologique X . Nous allons montrer que si $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sépare les points, alors X est un espace séparé. Soient $a, b \in X$ deux points distincts. Par hypothèse, il existe une application continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(a) \neq f(b)$. Or \mathbb{R} est un espace séparé ; ainsi il existe deux ouverts disjoints G et H de \mathbb{R} contenant respectivement $f(a)$ et $f(b)$. Par conséquent, les images réciproques $f^{-1}[G]$ et $f^{-1}[H]$ sont disjointes, ouvertes, et contiennent respectivement a et b . En d'autres termes, X est un espace séparé.

Nous allons énoncer formellement le résultat de l'exemple précédent :

Proposition 10.9 : Si l'ensemble $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ des applications continues sur un espace topologique X sépare les points, alors X est un espace séparé.

ESPACES COMPLETEMENT REGULIERS

Un espace topologique X est complètement régulier ssi il vérifie l'axiome suivant :

[CR] Si F est un fermé de X et si $p \in X$ n'appartient pas à F , alors il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(p) = 0$ et $f[F] = \{1\}$.

Nous montrerons ultérieurement la

Proposition 10.10 : Un espace complètement régulier est également régulier.

Un espace complètement régulier X qui vérifie également $[T_1]$, c'est-à-dire un espace T_1 complètement régulier est appelé un *espace de Tychonoff*. En vertu du lemme d'Urysohn, un espace T_4 est un espace de Tychonoff et, d'après la proposition 10.10, un espace de Tychonoff est un espace T_3 . Ainsi un espace de Tychonoff, c'est-à-dire un espace T_1 complètement régulier, est quelquefois appelé un espace $T_{3 1/2}$.

Une propriété importante des espaces de Tychonoff est la suivante :

Théorème 10.11 : L'ensemble $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ des applications réelles définies sur un espace T_1 complètement régulier X sépare les points.

PROBLEMES RESOLUS

ESPACES T_1

- Démontrer le théorème 10.1 : Un espace topologique X est un espace T_1 si et seulement si tout singleton de X est fermé.

Solution :

Supposons que X soit un espace T_1 et que $p \in X$. Nous allons montrer que $\{p\}^c$ est ouvert. Soit $x \in \{p\}^c$. Alors $x \neq p$, et donc d'après [T₁]

$$\exists \text{ un ouvert } G_x \text{ tel que } x \in G_x \text{ et que } p \notin G_x$$

Ainsi $x \in G_x \subset \{p\}^c$ et donc $\{p\}^c = \bigcup \{G_x : x \in \{p\}^c\}$. Par conséquent, $\{p\}^c$, réunion d'ouverts, est un ouvert et $\{p\}$ est fermé.

Réciproquement, supposons que $\{p\}$ soit fermé pour tout $p \in X$. Soient $a, b \in X$ avec $a \neq b$. A présent $a \neq b \Rightarrow b \in \{a\}^c$; ainsi $\{a\}^c$ est un ouvert contenant b mais ne contenant pas a . De même $\{b\}^c$ est un ouvert contenant a mais ne contenant pas b . Par conséquent X est un espace T_1 .

- Montrer que la propriété d'être un espace T_1 est héréditaire, i.e. tout sous-espace d'un espace T_1 est également un espace T_1 .

Solution :

Soit (X, τ) un espace T_1 et soit (Y, τ_Y) un sous-espace de (X, τ) . Nous allons montrer que tout singleton $\{p\}$ de Y est un fermé pour τ_Y ou, ce qui revient au même, que $Y \setminus \{p\}$ est ouvert pour τ_Y . Puisque (X, τ) est un espace T_1 , $X \setminus \{p\}$ est ouvert pour τ . Or

$$p \in Y \subset X \Rightarrow Y \cap (X \setminus \{p\}) = Y \setminus \{p\}$$

Ainsi, d'après la définition d'un sous-espace, $Y \setminus \{p\}$ est un ouvert pour τ_Y . Ainsi (Y, τ_Y) est également un espace T_1 .

- Montrer qu'une partie finie d'un espace T_1 , X n'a pas de point d'accumulation.

Solution :

Supposons que $A \subset X$ ait n éléments, admettons que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Puisque A est finie, elle est fermée et contient donc tous ses points d'accumulation. Or $\{a_2, \dots, a_n\}$ est également finie et donc fermée. Par conséquent, le complémentaire $\{a_2, \dots, a_n\}^c$ de $\{a_2, \dots, a_n\}$ est ouvert, contient a_1 et ne contient aucun point de A différent de a_1 . Ainsi a_1 n'est pas un point d'accumulation de A . De même, aucun autre point de A n'est un point d'accumulation de A et donc A n'a pas de point d'accumulation.

- Montrer que tout espace T_1 fini X est un espace discret.

Solution :

Tout sous-ensemble de X est fini et donc fermé. Ainsi tout sous-ensemble de X est également ouvert, c'est-à-dire X est un espace discret.

- Soit X un espace T_1 . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $p \in X$ est un point d'accumulation de A .
- (ii) Tout ouvert contenant p contient une infinité de points de A .

Solution :

D'après la définition d'un point d'accumulation d'un ensemble, (ii) \Rightarrow (i) ; ainsi nous n'avons qu'à démontrer que (i) \Rightarrow (ii).

Supposons que G soit un ouvert contenant p et ne contenant qu'un nombre fini de points de A différents de p ; par exemple

$$B = (G \setminus \{p\}) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

À présent B , comme sous-ensemble fini d'un espace T_1 , est un fermé et donc B^c est un ouvert. Posons $H = G \cap B^c$. Alors H est un ouvert, $p \in H$ et H ne contient aucun point de A différent de p . Ainsi p n'est pas un point d'accumulation de A et donc (i) \Rightarrow (ii).

6. Soit X un espace T_1 et soit \mathcal{B}_p une base locale en $p \in X$. Montrer que si $q \in X$ est distinct de p , alors il existe un élément de \mathcal{B}_p ne contenant pas q .

Solution :

Puisque $p \neq q$ et que X vérifie [T₁], \exists un ouvert $G \subset X$ contenant p mais ne contenant pas q . À présent \mathcal{B}_p est une base locale en p , ainsi G contient un certain $B \in \mathcal{B}_p$ et B non plus ne contient pas q .

7. Soit X un espace T_1 vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Montrer que si $p \in X$ est un point d'accumulation de $A \subset X$, alors il existe une suite de points distincts de A convergeant vers p .

Solution :

Soit $\mathcal{B} = \{B_n\}$ une base locale en p , emboîtée. Posons $B_{i_1} = B_1$. Puisque p est un point limite de A , B_{i_1} contient un point $a_1 \in A$ différent de p . D'après le problème précédent

$$\exists B_{i_2} \in \mathcal{B} \quad \text{tel que} \quad a_1 \notin B_{i_2}$$

De même, B_{i_2} contient un point $a_2 \in A$ différent de p , et, puisque $a_1 \notin B_{i_2}$ différent de a_1 . À nouveau, d'après le problème précédent, $\exists B_{i_3} \in \mathcal{B} \quad \text{tel que} \quad a_2 \notin B_{i_3}$

En outre,

$$a_2 \in B_{i_2}, a_2 \notin B_{i_3} \Rightarrow B_{i_2} \supset B_{i_3}$$

Continuant de la sorte nous obtenons une sous-suite $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots\}$ de \mathcal{B} et une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de termes distincts appartenant à A tels que $a_1 \in B_{i_1}, a_2 \in B_{i_2}, \dots$. Or $\{B_{i_n}\}$ est également une base locale en p , emboîtée ; ainsi $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

ESPACES SEPARES

8. Montrer que la propriété d'être séparé est héréditaire, c'est-à-dire tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.

Solution :

Soit (X, τ) un espace séparé et soit (Y, τ_Y) un sous-espace de (X, τ) . De plus, soient $a, b \in Y \subset X$ tels que $a \neq b$. Par hypothèse (X, τ) est séparé ; donc

$$\exists G, H \in \tau \quad \text{tel que} \quad a \in G, b \in H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

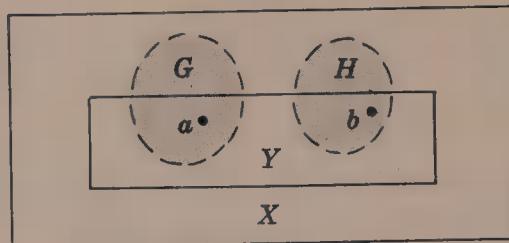
D'après la définition d'un sous-espace, $Y \cap G$ et $Y \cap H$ sont des ouverts pour τ_Y . En outre,

$$a \in G, a \in Y \Rightarrow a \in Y \cap G$$

$$b \in H, b \in Y \Rightarrow b \in Y \cap H$$

$$G \cap H = \emptyset \Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = Y \cap (G \cap H) = Y \cap \emptyset = \emptyset$$

(ainsi qu'il est représenté sur le schéma ci-dessous). Par conséquent, (Y, τ_y) est également séparé.



9. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbf{R} engendrée par les intervalles semi-ouverts $(a, b]$. Montrer que $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ est séparé.

Solution :

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq b$, admettons que $a < b$. Choisissons $G = (a - 1, a]$ et $H = (a, b]$. Alors

$$G, H \in \mathcal{T}, \quad a \in G, \quad b \in H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

Ainsi $(\mathbf{R}, \mathcal{T})$ est séparé.

10. Démontrer le théorème 10.4 : Soit X un espace séparé. Alors toute suite convergente de X a une limite unique.

Solution :

Supposons que $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ converge vers a et b et supposons $a \neq b$. Puisque X est séparé, il existe des ouverts G et H tels que

$$a \in G, \quad b \in H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

Par hypothèses, $\langle a_n \rangle$ converge vers a ; donc

$$\exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \quad \text{implique} \quad a_n \in G$$

c'est-à-dire G contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Or G et H sont disjoints ; ainsi H ne peut contenir que les termes de la suite n'appartenant pas à G et il n'y en a qu'un nombre fini. Par conséquent, $\langle a_n \rangle$ ne peut converger vers b . Mais ceci est contraire à l'hypothèse, donc $a = b$.

11. Démontrer le théorème 10.5 : Soit X un espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité. Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) X est séparé. (ii) Toute suite convergente a une limite unique.

Solution :

D'après le problème précédent, (i) \Rightarrow (ii) ; ainsi nous n'avons plus qu'à montrer que (ii) \Rightarrow (i). Supposons que X ne soit pas séparé. Alors $\exists a, b \in X, a \neq b$ avec la propriété que tout ouvert contenant a a une intersection non vide avec tout ouvert contenant b .

A présent soient $\{G_n\}$ et $\{H_n\}$ des bases locales respectivement en a et b qui soient emboîtées. Alors $G_n \cap H_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\exists \langle a_1, a_2, \dots \rangle \quad \text{tels que} \quad a_1 \in G_1 \cap H_1, \quad a_2 \in G_2 \cap H_2, \quad \dots$$

Par conséquent, $\langle a_n \rangle$ converge à la fois vers a et vers b . En d'autres termes (ii) \Rightarrow (i).

ESPACES NORMAUX ET LEMME D'URYSOHN

12. Démontrer le théorème 10.6 : Soit X un espace topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes : (i) X est normal. (ii) Si H est un ouvert contenant un fermé F , alors il existe un ouvert G tel que $F \subset G \subset \overline{G} \subset H$.

Solution :

(i) \Rightarrow (ii). Soit $F \subset H$ avec F fermé et H ouvert. Alors H^c est fermé et $F \cap H^c = \emptyset$. Or X est normal ; d'où

\exists deux ouverts G et G^* , tel que $F \subset G$, $H^c \subset G^*$ et $G \cap G^* = \emptyset$

Or $G \cap G^* = \emptyset \Rightarrow G \subset G^{*c}$ et $H^c \subset G^* \Rightarrow G^{*c} \subset H$

De plus G^{*c} est fermé ; d'où $F \subset G \subset \overline{G} \subset G^{*c} \subset H$.

(ii) \Rightarrow (i). Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Alors $F_1 \subset F_2^c$ et F_2^c est ouvert. D'après (ii),

\exists un ouvert G tel que $F_1 \subset G \subset \overline{G} \subset F_2^c$

Or $\overline{G} \subset F_2^c \Rightarrow F_2 \subset \overline{G}^c$ et $G \subset \overline{G} \Rightarrow G \cap \overline{G}^c = \emptyset$

De plus \overline{G}^c est un ouvert. Ainsi $F_1 \subset G$ et $F_2 \subset \overline{G}^c$, G , \overline{G}^c étant des ouverts disjoints ; ainsi X est normal.

13. Soit \mathcal{B} une base d'un espace T_1 normal. Montrer que pour chaque $G_i \in \mathcal{B}$ et tout point $p \in G_i$, il existe un élément $G_j \in \mathcal{B}$ tel que $p \in G_j \subset G_i$.

Solution :

Puisque X est un espace T_1 , $\{p\}$ est fermé ; ainsi G_i est un ouvert contenant le fermé $\{p\}$. D'après le théorème 10.6,

\exists un ouvert G tel que $\{p\} \subset G \subset \overline{G} \subset G_i$

Puisque $p \in G$, il existe un élément G_j de la base \mathcal{B} tel que $p \in G_j \subset G$; ainsi $p \in \overline{G_j} \subset \overline{G} \subset G_i$; où $p \in \overline{G_j} \subset G_i$.

14. Soit D l'ensemble des fractions diadiques (fractions dont le dénominateur est une puissance de 2) de l'intervalle unité $[0, 1]$, c'est-à-dire,

$$D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{15}{16}, \dots \right\}$$

Montrer que D est dense dans $[0, 1]$.

Solution :

Pour montrer que $\overline{D} = [0, 1]$, il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$ centré en un point $a \in [0, 1]$ contient un point de D . Remarquons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ ainsi, il existe une puissance de 2, $q = 2^{n_0}$ telle que $0 < 1/q < \delta$. Considérons les intervalles

$$\left[0, \frac{1}{q} \right], \left[\frac{1}{q}, \frac{2}{q} \right], \left[\frac{2}{q}, \frac{3}{q} \right], \dots, \left[\frac{q-2}{q}, \frac{q-1}{q} \right], \left[\frac{q-1}{q}, 1 \right]$$

Puisque $[0, 1]$ est égal à la réunion des intervalles ci-dessus, l'un d'entre eux, admettons par exemple que ce soit $\left[\frac{m}{q}, \frac{m+1}{q} \right]$ contient a , c'est-à-dire $\frac{m}{q} \leq a \leq \frac{m+1}{q}$. Or $\frac{1}{q} < \delta$; d'où

$$a - \delta < \frac{m}{q} \leq a < a + \delta$$

En d'autres termes, l'intervalle ouvert $(a - \delta, a + \delta)$ contient le point m/q qui appartient à D . Alors D est dense dans $[0, 1]$.

15. Démontrer le théorème (lemme d'Urysohn) 10.7 : Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace normal X . Alors il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f[F_1] = \{0\}$ et $f[F_2] = \{1\}$.

Solution :

Par hypothèse, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$; ainsi $F_1 \subset F_2^c$. En particulier, puisque F_1 est un ensemble fermé, F_2^c est un ouvert contenant le fermé F_1 . D'après le théorème 10.4, il existe un ouvert $G_{1/2}$ tel que

$$F_1 \subset G_{1/2} \subset \bar{G}_{1/2} \subset F_2^c$$

Remarquons que $\bar{G}_{1/2}$ est un ouvert contenant l'ensemble fermé F_1 , et que F_2^c est un ouvert contenant l'ensemble fermé $\bar{G}_{1/2}$. Ainsi, d'après le théorème 10.4, il existe des ouverts $G_{1/4}$ et $G_{3/4}$ tels que

$$F_1 \subset G_{1/4} \subset \bar{G}_{1/4} \subset G_{1/2} \subset \bar{G}_{1/2} \subset G_{3/4} \subset \bar{G}_{3/4} \subset F_2^c$$

Nous continuons ainsi et nous obtenons pour chaque $t \in D$, où D est l'ensemble des fractions diadiques de $[0, 1]$, un ouvert G_t ayant la propriété que si $t_1, t_2 \in D$ et si $t_1 < t_2$ alors $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$.

Définissons l'application f sur X de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{t : x \in G_t\} & \text{si } x \notin F_2 \\ 1 & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$, c'est-à-dire f applique X dans $[0, 1]$. Remarquons également que $F_1 \subset G_t$ pour tout $t \in D$; ainsi $f[F_1] = \{0\}$. En outre, par définition, $f[F_2] = 1$. Par conséquent, la seule chose qu'il nous reste à démontrer est que f est continue.

A présent f est continue si les images réciproques des ensembles $[0, a)$ et $(b, 1]$ sont des ouverts de X (voir le problème 7, chapitre 7). Nous affirmons que

$$f^{-1}[[0, a]] = \bigcup \{G_t : t < a\} \quad (1)$$

$$f^{-1}[(b, 1]] = \bigcup \{\bar{G}_t^c : t > b\} \quad (2)$$

Alors chacun est une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

Nous allons d'abord démontrer (1). Soit $x \in f^{-1}[[0, a]]$. Alors $f(x) \in [0, a)$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) < a$. Puisque D est dense dans $[0, 1]$, il existe $t_x \in D$ tel que $f(x) < t_x < a$. En d'autres termes,

$$f(x) = \inf \{t : x \in G_t\} < t_x < a$$

Par conséquent, $x \in G_{t_x}$ où $t_x < a$. Ainsi $x \in \bigcup \{G_t : t < a\}$. Nous venons donc de montrer que tout élément de $f^{-1}[[0, a]]$ appartient également à $\bigcup \{G_t : t < a\}$, c'est-à-dire,

$$f^{-1}[[0, a]] \subset \bigcup \{G_t : t < a\}$$

Réciproquement, supposons que $y \in \bigcup \{G_t : t < a\}$. Alors $\exists t_y \in D$ tel que $t_y < a$ et que $y \in G_{t_y}$. Donc

$$f(y) = \inf \{t : y \in G_t\} \leq t_y < a$$

Ainsi y appartient également à $f^{-1}[[0, a]]$. En d'autres termes,

$$\bigcup \{G_t : t < a\} \subset f^{-1}[[0, a]]$$

Les deux résultats ci-dessus impliquent (1).

Nous allons à présent démontrer (2). Soit $x \in f^{-1}[(b, 1]]$. Alors $f(x) \in (b, 1]$, c'est-à-dire $b < f(x) \leq 1$. Puisque D est dense dans $[0, 1]$, il existe $t_1, t_2 \in D$ tels que $b < t_1 < t_2 < f(x)$. En d'autres termes,

$$f(x) = \inf \{t : x \in G_t\} > t_2$$

Ainsi $x \notin G_{t_2}$. Remarquons que $t_1 < t_2$ implique que $\bar{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$. Ainsi x n'appartient pas à \bar{G}_{t_1} non plus. Par conséquent, $x \in \bar{G}_{t_1}^c$ où $t_1 > b$; ainsi $x \in \bigcup \{\bar{G}_t^c : t > b\}$. Par conséquent,

$$f^{-1}[(b, 1]] \subset \bigcup \{\bar{G}_t^c : t > b\}$$

Réciproquement, soit $y \in \bigcup \{\bar{G}_t^c : t > b\}$. Alors il existe $t_y \in D$ tel que $t_y > b$ et $y \in \bar{G}_{t_y}^c$; ainsi y n'appartient pas à \bar{G}_{t_y} . Or $t < t_y$ implique $G_t \subset G_{t_y} \subset \bar{G}_{t_y}$; ainsi $y \notin G_t$ pour tout t inférieur à t_y . Par conséquent,

$$f(y) = \inf \{t : y \in G_t\} \geq t_y > b$$

Ainsi $y \in f^{-1}((b, 1])$. En d'autres termes,

$$\bigcup \{\bar{G}_t^c : t > b\} \subset f^{-1}[(b, 1]]$$

les deux résultats ci-dessus impliquent (2). Ainsi f est continue et le lemme d'Urysohn est démontré.

16. Démontrer le théorème de métrisabilité d'Urysohn 10.8 : Tout espace T_1 normal vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, X , est métrisable. (D'ailleurs X est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert I de \mathbb{R}^∞).

Solution :

Si X est fini, alors X est un espace discret et donc X est homéomorphe à tout sous-ensemble de H ayant le même nombre de points. Si X est infini alors X ■ une base dénombrable $\mathcal{B} = \{G_1, G_2, G_3, \dots\}$ dont aucun des éléments n'est égal à X lui-même.

D'après un problème précédent, pour chaque G_i de \mathcal{B} il existe un G_j de \mathcal{B} tel que $\bar{G}_j \subset G_i$. L'ensemble de ces couples $\langle G_j, G_i \rangle$, où $\bar{G}_j \subset G_i$, est dénombrable ; ainsi nous pouvons les noter P_1, P_2, \dots où $P_n = \langle G_{j_n}, G_{i_n} \rangle$. Remarquons que $\bar{G}_{j_n} \subset G_{i_n}$ implique que \bar{G}_{j_n} et $G_{i_n}^c$ sont des fermés disjoints de X . Ainsi, d'après le lemme d'Urysohn, il existe une application $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f_n[\bar{G}_{j_n}] = \{0\}$ et $f_n[G_{i_n}^c] = \{1\}$.

A présent, définissons l'application $f : X \rightarrow \mathbf{I}$ de la manière suivante :

$$f(x) = \left\langle \frac{f_1(x)}{2}, \frac{f_2(x)}{2^2}, \frac{f_3(x)}{2^3}, \dots \right\rangle$$

Remarquons que, pour tout $n \in N$, $0 \leq f_n(x) \leq 1$ implique $\left| \frac{f_n(x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{n}$; ainsi $f(x)$ est un point du cube de Hilbert I. (On rappelle que $\mathbf{I} = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq 1/n\}$, voir page 143.)

Nous allons à présent montrer que f est bijective. Soient x et y deux points distincts de X . Puisque X est un espace T_1 il existe un élément G_i de la base \mathcal{B} tel que $x \in G_i$ mais que $y \notin G_i$. D'après un problème précédent, il existe un couple $P_m = \langle G_j, G_i \rangle$ tel que $x \in \bar{G}_j \subset G_i$. Par définition, $f_m(x) = 0$ puisque $x \in \bar{G}_j$ et $f_m(y) = 1$ puisque $y \notin G_i$, c'est-à-dire $y \in G_i^c$. Ainsi $f(x) \neq f(y)$ puisque ils diffèrent par la m -ième coordonnée. Ainsi f est bijective.

Nous allons, à présent, démontrer que f est continue. Soit $\epsilon > 0$. Remarquons que f est continue en $p \in X$ s'il existe un voisinage ouvert G de p tel que $x \in G$ implique $\|f(x) - f(p)\| < \epsilon$ où, ce qui revient au même, $\|f(x) - f(p)\|^2 < \epsilon^2$. Rappelons que

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}}$$

En outre, puisque les valeurs de f_n appartiennent à $[0, 1]$, $(|f_n(x) - f_n(p)|^2)/2^{2n} \leq 1/2^{2n}$. Notons que $\sum_n 1/2^{2n}$ converge ; ainsi il existe un $n_0 = n_0(\epsilon)$ indépendant de x et p , tel que

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} + \frac{\epsilon^2}{2}$$

A présent chaque fonction $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ est continue ; ainsi il existe un voisinage ouvert G_n de p tel que $x \in G_n$ implique $|f_n(x) - f_n(p)|^2 < \epsilon^2/2^{2n}$. Soit $G = G_1 \cap \dots \cap G_{n_0}$. Puisque G est égal à une intersection finie de voisinage ouverts de p , G est également un voisinage ouvert de p . En outre si $x \in G$, alors

$$\|f(x) - f(p)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(p)|^2}{2^{2n}} < n_0 \left(\frac{\epsilon^2}{2^{2n_0}} \right) + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2$$

Ainsi f est continue.

A présent soit Y l'image de f , c'est-à-dire $Y = f[X] \subset \mathbf{I}$. Nous voulons démontrer que $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est également continue. Remarquons que la continuité dans Y est équivalente à la continuité séquentielle ; ainsi f^{-1} est continue en $f(p) \in Y$ si pour toute suite $\langle f(y_n) \rangle$ convergente vers $f(p)$, la suite $\langle y_n \rangle$ converge vers p .

Supposons que f^{-1} ne soit pas continue, c'est-à-dire supposons que $\langle y_n \rangle$ ne converge pas vers p . Alors il existe un voisinage ouvert G de p tel que G ne contienne pas un nombre infini de termes de $\langle y_n \rangle$. Ainsi nous pouvons choisir une sous-suite $\langle x_n \rangle$ de $\langle y_n \rangle$ telles que tous les termes de $\langle x_n \rangle$ se trouvent à l'extérieur de G . Puisque $p \in G$, il existe un élément G_i de la base \mathcal{B} tel que $p \in G_i \subset G$. En outre, d'après un problème précédent, il existe un couple $P_m = \langle G_j, G_i \rangle$ tel que $p \in \overline{G}_j \subset G_i \subset G$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin G$; ainsi $x_n \in G_i^c$. Par conséquent, $f_m(p) = 0$ et $f_m(x_n) = 1$. Alors $|f_m(x_n) - f_m(p)|^2 = 1$ et

$$\|f(x_n) - f(p)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(x_n) - f_k(p)|^2}{2^{2k}} \geq \frac{1}{2^{2m}}$$

En d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_n) - f(p)\| > 1/2^m$. Donc la suite $\langle f(x_n) \rangle$ ne converge pas vers $f(p)$. Mais ceci contredit le fait que toute sous-suite de $\langle f(y_n) \rangle$ devrait également converger vers $f(p)$. Ainsi f^{-1} est continue. Ainsi f est un homéomorphisme et X est homéomorphe à un sous-ensemble du cube de Hilbert. Par conséquent X est métrisable.

ESPACES REGULIERS ET COMPLÈTEMENT REGULIERS

17. Démontrer la proposition 10.10 : Un espace complètement régulier X est également régulier.

Solution :

Soit F un fermé de X et supposons que $p \in X$ n'appartienne pas à F . Par hypothèse, X est complètement régulier ; ainsi il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(p) = 0$ et $f[F] = \{1\}$. Or R et son sous-espace $[0, 1]$ sont des espaces séparés ; ainsi il existe des ouverts disjoints G et H contenant respectivement 0 et 1. Par conséquent, leurs images réciproques $f^{-1}[G]$ et $f^{-1}[H]$ sont disjointes, ouvertes et contiennent respectivement p et F . En d'autres termes, X est également régulier.

18. Démontrer le théorème 10.11 : L'ensemble $C(X, R)$ des applications définies sur un espace T_1 complètement régulier X , sépare les points.

Solution :

Soient a et b deux points distincts de X . Puisque X est un espace T_1 , $\{b\}$ est un fermé. De plus, puisque a et b sont distincts, $a \notin \{b\}$. Par hypothèse X est complètement régulier, ainsi il existe une application à valeurs réelles continue f définie sur X telle que $f(a) = 0$ et $f[\{b\}] = \{1\}$. Par conséquent, $f(a) \neq f(b)$.

19. Soit (Y, τ_Y) un sous-espace de (X, τ) , soit $p \in Y$ et $A \subseteq Y \subset X$. Montrer que si p n'appartient pas à l'adhérence de A pour τ_Y , alors $p \notin \overline{A}$, l'adhérence de A pour τ .

Solution :

D'après une propriété des sous-espaces (voir problème 89, chapitre 5),

$$\text{l'adhérence pour } \tau_Y \text{ de } A = Y \cap \overline{A}$$

Or $p \in Y$ et $p \notin$ l'adhérence pour τ_Y de A ; ainsi $p \notin \overline{A}$. (Remarquons que, en particulier, si F est un fermé pour τ_Y de Y et si $p \notin F$, alors $p \notin \overline{F}$.)

20. Montrer que la propriété d'être un espace régulier est héréditaire, c'est-à-dire tout sous-espace d'un espace régulier est régulier.

Solution :

Soit (X, τ) un espace régulier et soit (Y, τ_Y) un sous-espace de (X, τ) . De plus soit $p \in Y$ et soit F un fermé pour τ_Y de Y tel que $p \notin F$. A présent, d'après le problème 19, $p \notin \overline{F}$, l'adhérence pour τ de F . Par hypothèse, (X, τ) est régulier ; ainsi

$$\exists G, H \in \tau \quad \text{tels que} \quad \overline{F} \subset G, p \in H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

Or $Y \cap G$ et $Y \cap H$ sont ouverts pour \mathcal{T}_Y dans Y et

$$\begin{aligned} F \subset Y, F \subset \bar{F} \subset G &\Rightarrow F \subset Y \cap G \\ p \in Y, p \in H &\Rightarrow p \in Y \cap H \\ G \cap H = \emptyset &\Rightarrow (Y \cap G) \cap (Y \cap H) = \emptyset \end{aligned}$$

Par conséquent, (Y, \mathcal{T}_Y) est également régulier.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES T_1

21. Montrer que la propriété d'être un espace T_1 est une propriété topologique.
22. Montrer, sur un contre-exemple, que l'image d'un espace T_1 dans une application continue n'est pas nécessairement T_1 .
23. Soit (X, \mathcal{T}) un espace T_1 et soit $\mathcal{T} \preceq \mathcal{T}^*$. Montrer que (X, \mathcal{T}^*) est également un espace T_1 .
24. Démontrer que X est un espace T_1 si et seulement si tout $p \in X$ est égal à l'intersection de tous les ouverts qui le contiennent, c'est-à-dire $\{p\} = \bigcap\{G : G \text{ ouvert}, p \in G\}$.
25. Un espace topologique X est appelé espace T_0 s'il vérifie l'axiome suivant :
 [T₀] Pour tout couple de points distincts de X , il existe un ouvert contenant l'un des points mais pas l'autre.
 - (i) Donner un exemple d'espace T_0 qui n'est pas un espace T_1 .
 - (ii) Montrer que tout espace T_1 est également un espace T_0 .
26. Soit X un espace T_1 contenant au moins deux points. Montrer que si \mathcal{B} est une base de X , alors $\mathcal{B} \setminus \{X\}$ est également une base de X .

ESPACES SEPARÉS

27. Montrer que la propriété d'être un espace séparé est une propriété topologique.
28. Soit (X, \mathcal{T}) un espace séparé et soit $\mathcal{T} \preceq \mathcal{T}^*$. Montrer que (X, \mathcal{T}^*) est également un espace séparé.
29. Montrer que si a_1, \dots, a_m sont des points distincts d'un espace séparé X , alors il existe une famille disjointe $\{G_1, \dots, G_m\}$ d'ouverts de X tels que $a_1 \in G_1, \dots, a_m \in G_m$.
30. Soit X un espace séparé infini. Démontrer qu'il existe une famille disjointe infinie d'ouverts de X .
31. Démontrer que si $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ sont deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace séparé Y , alors $A = \{x : f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X .

ESPACES NORMAUX

32. Montrer que la propriété d'être un espace normal est une propriété topologique.
33. Soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbb{R} engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est un espace normal.
34. Soit \mathcal{T} la topologie du plan \mathbb{R}^2 engendrée par les rectangles semi-ouverts

$$[a, b) \times [c, d) = \{\langle x, y \rangle : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$

En outre, soit A l'ensemble des points de la droite $Y = \{\langle x, y \rangle : x + y = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ de coordonnées rationnelles et soit $B = Y \setminus A$.

- (i) Montrer que A et B sont des fermés de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.
- (ii) Montrer qu'il n'existe pas deux ouverts pour \mathcal{T} , G et H de \mathbb{R}^2 disjoints tels que $A \subset G$ et $B \subset H$ et que donc $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ n'est pas normal.

35. Soit A un fermé d'un espace T_1 normal. Montrer que A , muni de la topologie induite, est également un espace T_1 normal.
36. Soit X un ensemble ordonné et soit \mathcal{T} la topologie de l'ordre sur X , c'est-à-dire, \mathcal{T} est engendrée par les parties de la forme $\{x : x < a\}$ et $\{x : x > a\}$. Montrer que (X, \mathcal{T}) est un espace normal.
37. Soit X un espace normal. Démontrer que X est régulier si et seulement si X est complètement régulier.

LEMME D'URYSOHN

38. Démontrer que si pour deux fermés disjoints quelconques F_1 et F_2 d'un espace topologique X , il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f[F_1] = \{0\}$ et $f[F_2] = \{1\}$, alors X est un espace normal. (Noter que ceci constitue la réciproque du lemme d'Urysohn.)
39. Démontrer la généralisation suivante du lemme d'Urysohn : Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace normal X . Alors il existe une application continue $f : X \rightarrow [a, b]$ telle que $f[F_1] = \{a\}$ et $f[F_2] = \{b\}$.
40. Démontrer le théorème d'extension de Tietze : Soit F un fermé d'un espace normal X et soit $f : F \rightarrow [a, b]$ une application réelle continue. Alors f a une extension continue $f^* : X \rightarrow [a, b]$.
41. Démontrer le lemme d'Urysohn en utilisant le théorème d'extension de Tietze.

ESPACES REGULIERS ET COMPLETEMENT REGULIERS

42. Montrer que la propriété d'être un espace régulier est une propriété topologique.
43. Montrer que la propriété d'être complètement régulier est une propriété topologique.
44. Montrer que la propriété d'être un espace complètement régulier est héréditaire, c'est-à-dire que tout sous-espace d'un espace complètement régulier est également un espace complètement régulier.
45. Soit X un espace de Lindelöf régulier. Démontrer que X est normal.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

25. (i) Soit $X = \{a, b\}$ et $\mathcal{T} = \{X, \{a\}, \emptyset\}$.

CHAPITRE 11

Compacité

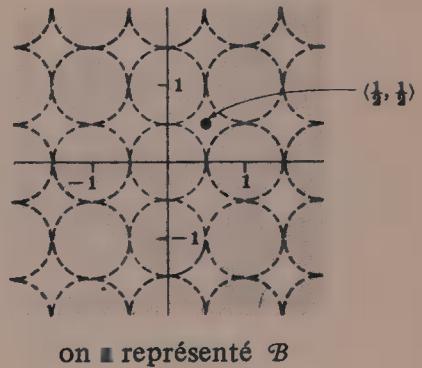
RECOUVREMENTS

Soit $\mathcal{A} = \{G_i\}$ une famille de parties de X telle que $A \subset \cup_i G_i$, pour un certain $A \subset X$. Rappelons que \mathcal{A} est alors appelée un *recouvrement* de A et un *recouvrement ouvert* si chacun des G_i est ouvert. En outre, si une sous-famille finie de \mathcal{A} est également un recouvrement de A , c'est-à-dire si

$$\exists G_{i_1}, \dots, G_{i_m} \in \mathcal{A} \quad \text{tels que} \quad A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

alors on dit qu'on peut *extraire de \mathcal{A} un sous-recouvrement fini* ou que \mathcal{A} contient un *sous-recouvrement fini*.

Exemple 1.1 : Considérons la famille $\mathcal{A} = \{D_p : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ où D_p est le disque ouvert du plan \mathbb{R}^2 de rayon 1 et de centre $p = (m, n)$, m et n étant des entiers relatifs. Alors \mathcal{A} est un recouvrement de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire tout point de \mathbb{R}^2 appartient à l'un au moins des éléments de \mathcal{A} . Par contre, la famille des disques ouverts $\mathcal{B} = \{D_p^* : p \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$ où D_p^* a pour centre p et pour rayon $\frac{1}{2}$ ne constitue pas un recouvrement de \mathbb{R}^2 . Par exemple, le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ n'appartient à aucun élément de \mathcal{B} , comme on l'a indiqué sur la figure.



Exemple 1.2 : Considérons le théorème classique,

Théorème de Heine-Borel : Soit $A = [a, b]$ un intervalle fermé borné et soit $\{G_i\}$ une famille d'ouverts telle que $A \subset \cup_i G_i$. Alors, on peut choisir dans la famille un nombre fini d'ouverts, admettons par exemple que \blacksquare soient G_{i_1}, \dots, G_{i_m} tels que $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$.

En vertu de la terminologie précédente, on peut ré-enoncer le théorème de Heine-Borel de la manière suivante :

Théorème de Heine-Borel : De tout recouvrement ouvert d'un intervalle fermé borné $A = [a, b]$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

ENSEMBLES COMPACTS

La notion de *compacité* est sans aucun doute motivée par la propriété de l'intervalle fermé borné telle qu'elle a été énoncée dans le théorème classique de Heine-Borel. A savoir :

Définition : Une partie A d'un espace topologique X est *compacte* si de tout recouvrement ouvert de A , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

En d'autres termes, si A est compacte et $A \subset \cup_i G_i$, où les G_i sont des ouverts, alors on peut choisir un nombre fini d'ouverts, admettons que ce soient G_{i_1}, \dots, G_{i_m} , de sorte que $A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$.

Exemple 2.1 : D'après le théorème de Heine-Borel, tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de la droite réelle \mathbb{R} est compact.

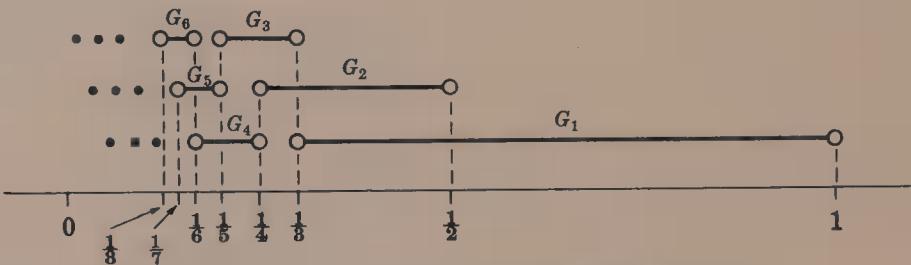
Exemple 2.2 : Soit A une partie finie quelconque d'un espace topologique X , par exemple $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Alors A est nécessairement compacte. En effet si $\mathcal{G} = \{G_i\}$ est un recouvrement ouvert de A , alors chaque point de A appartient à l'un des éléments de \mathcal{G} , par exemple $a_1 \in G_{i_1}, \dots, a_m \in G_{i_m}$. Par conséquent, $A \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$.

Puisque un ensemble A est compact ssi tout recouvrement ouvert de A contient un sous-recouvrement fini, il nous suffit d'exhiber un recouvrement ouvert de A dont aucun sous-recouvrement n'est fini pour montrer que A n'est pas compact.

Exemple 2.3 : L'intervalle ouvert $A = (0, 1)$ de la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle n'est pas compact. Considérons par exemple la famille des intervalles ouverts

$$\mathcal{G} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 1 \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4} \right), \dots \right\}$$

remarquons que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ où $G_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n} \right)$; ainsi \mathcal{G} est un recouvrement ouvert de A .



Mais \mathcal{G} ne contient pas de sous-recouvrement fini. En effet, soit

$$\mathcal{G}^* = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$$

une sous-famille finie quelconque de \mathcal{G} . Si $\epsilon = \min(a_1, \dots, a_m)$ alors $\epsilon > 0$ et

$$(a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_m, b_m) \subset (\epsilon, 1)$$

Or $(0, \epsilon]$ et $(\epsilon, 1)$ sont disjoints ; ainsi \mathcal{G}^* n'est pas un recouvrement de A , et donc A n'est pas compact.

Exemple 2.4 : Nous allons montrer que l'image par une application continue d'un compact est également un compact, c'est-à-dire si la fonction $f: X \rightarrow Y$ est continue et si A est un compact de X alors son image $f[A]$ est un compact de Y . En effet supposons que $\mathcal{G} = \{G_i\}$ soit un recouvrement ouvert de $f[A]$, c'est-à-dire $f[A] \subset \bigcup_i G_i$. Alors

$$A \subset f^{-1}[f[A]] \subset f^{-1}\left[\bigcup_i G_i\right] = \bigcup_i f^{-1}[G_i]$$

Ainsi $\mathcal{H} = \{f^{-1}[G_i]\}$ est un recouvrement de A . A présent f est continue et chaque G_i est un ouvert, donc $f^{-1}[G_i]$ est également ouvert. En d'autre termes, \mathcal{H} est un recouvrement ouvert de A . Or A est compact, donc on peut extraire de \mathcal{H} un sous-recouvrement fini, admettons par exemple que

$$A \subset f^{-1}[G_{i_1}] \cup \dots \cup f^{-1}[G_{i_m}]$$

Par conséquent

$$f[A] \subset f[f^{-1}[G_{i_1}] \cup \dots \cup f^{-1}[G_{i_m}]] \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

Ainsi $f[A]$ est compact.

Nous allons énoncer formellement le résultat de l'exemple 2.4 :

Théorème 11.1 : L'image d'un compact par une application continue est un compact.

La compacité est une propriété absolue d'un ensemble. À savoir,

Théorème 11.2 : Soit A une partie d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . Alors A est compacte pour \mathcal{T} si et seulement si A est compacte pour la topologie induite \mathcal{T}_A sur A .

Par conséquent, on peut souvent limiter notre étude de la compacité aux espaces topologiques qui sont eux-mêmes compacts, c'est-à-dire aux *espaces compacts*.

SOUS-ENSEMBLES D'ESPACES COMPACTS

Un sous-ensemble d'un espace compact n'est pas nécessairement compact. Par exemple, l'intervalle unité fermé $[0, 1]$ est compact d'après le théorème de Heine-Borel mais l'intervalle ouvert $(0, 1)$ est un sous-ensemble de $[0, 1]$ et, d'après l'exemple 2.3 ci-dessus, il n'est pas compact. Nous avons cependant le théorème suivant :

Théorème 11.3 : Soit F un sous-ensemble fermé d'un ensemble compact X . Alors F est également compact.

Démonstration : Soit $\mathcal{G} = \{G_i\}$ un recouvrement ouvert de F , c'est-à-dire $F \subset \bigcup_i G_i$. Alors $X = (\bigcup_i G_i) \cup F^c$, c'est-à-dire que $\mathcal{G}^* = \{G_i\} \cup \{F^c\}$ est un recouvrement de X . Or F^c est ouvert puisque F est fermé, ainsi \mathcal{G}^* est un recouvrement ouvert de X . Par hypothèse, X est compact, donc on peut extraire de \mathcal{G}^* un sous-recouvrement fini de X , admettons que ce soit par exemple

$$X = G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m} \cup F^c, \quad G_{i_k} \in \mathcal{G}$$

Or F et F^c sont disjoints ; d'où

$$F \subset G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_m}, \quad G_{i_k} \in \mathcal{G}$$

Nous venons de montrer que tout recouvrement ouvert $\mathcal{G} = \{G_i\}$ de F contient un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire que F est compact.

PROPRIETE D'INTERSECTION FINIE

Une famille $\{A_i\}$ d'ensembles est dite avoir la propriété d'*intersection finie* si toute sous-famille finie $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$ a une intersection non vide, c'est-à-dire $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$.

Exemple 3.1 : Considérons la famille suivante d'intervalles ouverts :

$$\mathcal{A} = \{(0, 1), (0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{3}), (0, \frac{1}{4}), \dots\}$$

À présent \mathcal{A} a la propriété d'intersection finie car

$$(0, a_1) \cap (0, a_2) \cap \cdots \cap (0, a_m) = (0, b)$$

où $b = \min(a_1, \dots, a_m) > 0$. Remarquons que \mathcal{A} elle-même a une intersection vide.

Exemple 3.2 : Considérons la famille suivante d'intervalles infinis fermés.

$$\mathcal{B} = \{\dots, (-\infty, -2], (-\infty, -1], (-\infty, 0], (-\infty, 1], (-\infty, 2], \dots\}$$

Notons que \mathcal{B} a une intersection vide, c'est-à-dire $\bigcap \{B_n : n \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ où $B_n = (-\infty, n]$. Mais toute sous-famille finie de \mathcal{B} a une intersection non vide. En d'autres termes, \mathcal{B} possède la propriété d'intersection finie.

Avec la terminologie ci-dessus nous pouvons énoncer la notion de compacité en termes de fermés d'un espace topologique.

Théorème 11.4 : Un espace topologique X est compact si et seulement si toute famille $\{F_i\}$ de fermés de X possédant la propriété d'intersection finie a elle-même une intersection non vide.

COMPACITE ET ESPACES SEPARES

Ici nous allons relier la notion de compacité à la propriété de séparation des espaces de Hausdorff.

Théorème 11.5 : Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.

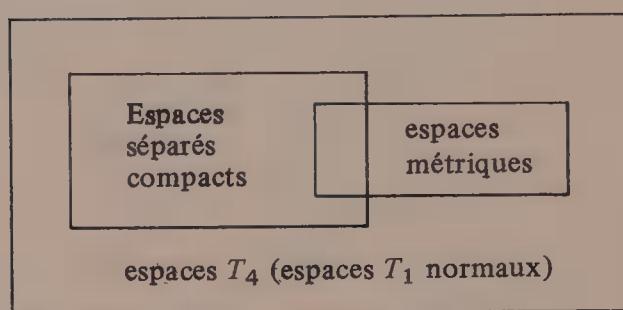
Le théorème ci-dessus n'est pas vrai en général par exemple, les ensembles finis sont toujours compacts et cependant il existe des espaces topologiques dont les parties finies ne sont pas toutes fermées.

Théorème 11.6 : Soient A et B deux parties compactes disjointes d'un espace séparé X . Alors il existe des ouverts disjoints G et H tels que $A \subset G$ et $B \subset H$.

En particulier, supposons que X soit à la fois séparé et compact et que F_1 et F_2 soient deux parties fermées disjointes de X . D'après le théorème 11.3, F_1 et F_2 sont compactes et, d'après le théorème 11.6, F_1 et F_2 sont contenues respectivement dans des ouverts disjoints. En d'autres termes,

Corollaire 11.7 : Tout espace séparé compact est normal.

Ainsi les espaces métriques et les espaces séparés compacts sont tous deux contenus dans la famille des espaces T_4 , c'est-à-dire des espaces T_1 normaux

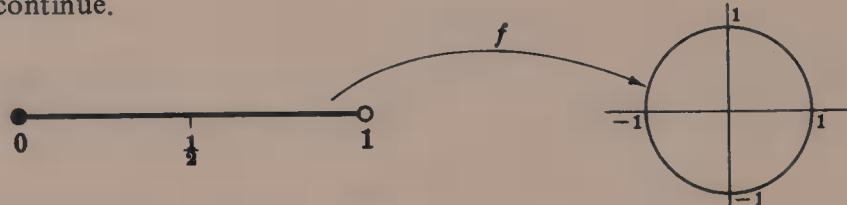


Le théorème suivant joue un rôle très important en géométrie.

Théorème 11.8 : Soit f une application injective continue d'un espace compact X dans un espace séparé Y . Alors X et $f[X]$ sont homéomorphes.

L'exemple suivant montre que le théorème ci-dessus n'est pas vrai en général.

Exemple 4.1 : Soit f l'application de l'intervalle semi-ouvert $X = [0, 1)$ dans le plan \mathbb{R}^2 , défini par $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Remarquons que f applique X sur le cercle unité et que f est injective continue.



Mais l'intervalle semi-ouvert $[0, 1)$ n'est pas homéomorphe au cercle. En effet, si par exemple on retire de X le point $t = \frac{1}{2}$, X n'est plus connexe ; mais si on enlève un point quelconque au cercle, celui-ci demeure connexe. La raison pour laquelle le théorème 11.8 ne s'applique pas dans ce cas est que X n'est pas compact.

Exemple 4.2 : Soit f une application injective continue de l'intervalle $I = [0, 1]$ dans l'espace euclidien de dimension n , \mathbb{R}^n . Remarquons que I est compact d'après le théorème de Heine-Borel et que \mathbb{R}^n est un espace métrique et donc séparé. En vertu du théorème 11.8, I et $f[I]$ sont homéomorphes.

ESPACES SEQUENTIELLEMENT COMPACTS

Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est *séquentiellement compact* ssi toute suite de A contient une sous-suite qui converge vers un point de A .

Exemple 5.1 : Soit A un sous-ensemble fini d'un espace topologique X . Alors A est nécessairement séquentiellement compact. Car si $\langle s_1, s_2, \dots \rangle$ est une suite de A , alors au moins un des éléments de A , par exemple a_0 , doit apparaître une infinité de fois dans la suite. Ainsi $\langle a_0, a_0, a_0, \dots \rangle$ est une sous-suite de $\langle s_n \rangle$, elle converge et de plus converge vers le point a_0 appartenant à A .

Exemple 5.2 : L'intervalle ouvert $A = (0, 1)$ de la droite réelle \mathbf{R} munie de la topologie usuelle n'est pas séquentiellement compact. Considérons par exemple la suite $\langle s_n \rangle = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$ de A . Remarquons que $\langle s_n \rangle$ converge vers 0 et que donc toute sous-suite converge également vers 0. Or 0 n'appartient pas à A . En d'autres termes la suite $\langle s_n \rangle$ de A ne contient pas de sous-suite convergeant vers un point de A , c'est-à-dire A n'est pas séquentiellement compact.

En général il existe des ensembles compacts qui ne sont pas séquentiellement compacts et vice versa, bien que dans les espaces métriques, comme nous allons le montrer ultérieurement, il y ait équivalence entre les deux notions.

Remarque : Historiquement le terme *bicomptact* était utilisé pour désigner un ensemble compact et le terme compact était utilisé pour désigner un ensemble séquentiellement compact.

ENSEMBLES POSSEZANT LA PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Un sous ensemble A d'un espace topologique X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass ssi tout sous-ensemble infini B de A a un point d'accumulation dans A . Cette définition a sans aucun doute été motivée par le théorème classique de Bolzano-Weierstrass.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : Tout ensemble infini borné de nombres réels a un point d'accumulation.

Exemple 6.1 : Tout intervalle fermé borné $A = [a, b]$ possède la propriété de Bolzano-Weierstrass. En effet si B est un sous-ensemble infini de A , alors B est également borné et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, B a un point d'accumulation p . En outre puisque A est fermé, le point d'accumulation p de B appartient à A , c'est-à-dire A possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Exemple 6.2 : L'intervalle ouvert $A = (0, 1)$ ne possède pas la propriété de Bolzano-Weierstrass. En effet, considérons le sous-ensemble infini $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ de $A = (0, 1)$. Remarquons que B a exactement un point limite 0 lequel n'appartient pas à A . Ainsi A ne possède pas la propriété de Bolzano-Weierstrass..

La relation générale existante entre les ensembles compacts, séquentiellement compacts et possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass est donnée par le schéma et le théorème suivants.

compact \rightarrow ensemble possédant la propriété de
Bolzano-Weierstrass \leftarrow séquentiellement compact

Théorème 11.9 : Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Si A est compact ou séquentiellement compact, alors A possède également la propriété de Bolzano-Weierstrass.

L'exemple suivant montre qu'aucune des deux flèches du schéma ci-dessus ne peut être renversée.

Exemple 6.3 : Soit \mathcal{T} la topologie définie sur \mathbf{N} , l'ensemble des entiers positifs, engendrée par les ensembles suivants .

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots$$

Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , et supposons que $n_0 \in A$. Si n_0 est impair, alors $n_0 + 1$ est un point limite de A ; et si n_0 est pair, $n_0 - 1$ est un point limite de A . Dans l'un ou l'autre cas A ■ un point d'accumulation. Par conséquent, (\mathbb{N}, τ) possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Par contre, (\mathbb{N}, τ) n'est pas compact puisque

$$\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots\}$$

est un recouvrement ouvert de \mathbb{N} ne contenant pas de sous-recouvrement fini. En outre, (\mathbb{N}, τ) n'est pas séquentiellement compact puisque la suite $\langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ ne contient pas de sous-suite convergente.

ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

Un espace topologique X est *localement compact* ssi tout point de X admet un voisinage compact.

Exemple 7.1 : Considérons la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle. Remarquons que chaque point $p \in \mathbb{R}$ est intérieur à un intervalle fermé, par exemple $[p - \delta, p + \delta]$, et qu'un intervalle fermé est compact d'après le théorème de Heine-Borel. Ainsi \mathbb{R} est un espace localement compact. Par contre, \mathbb{R} n'est pas un espace compact ; par exemple, la famille

$$\mathcal{A} = \{\dots, (-3, -1), (-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), \dots\}$$

est un recouvrement ouvert de \mathbb{R} qui ne contient pas de sous-recouvrement fini.

Ainsi nous voyons, d'après l'exemple ci-dessus, qu'un espace localement compact n'est pas nécessairement compact. Par contre, puisque un espace topologique est toujours voisinage de chacun de ses points, la réciproque est vraie. C'est-à-dire,

Proposition 11.10 : Tout espace compact est localement compact.

COMPACTIFICATION

Un espace topologique X est dit *immédiatement dans* un espace topologique Y si X est homéomorphe à un sous-espace de Y . En outre, si Y est un espace compact alors Y est appelé un *compactifié* de X . Il est fréquent que la compactification d'un espace X soit réalisée en adjoignant un point, ou plus, à X et en définissant ensuite une topologie convenable sur l'ensemble agrandi de telle sorte que l'espace agrandi soit compact et contienne X comme sous-espace.

Exemple 8.1 : Considérons la droite réelle ■ munie de la topologie usuelle \mathcal{U} . Nous allons adjoindre à \mathbb{R} deux nouveaux points désignés par ∞ et $-\infty$ et nous allons appeler l'espace agrandi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ la *droite réelle achevée*. La relation d'ordre de \mathbb{R} peut être étendue à \mathbb{R}^* en définissant $-\infty < ■ < \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. La famille des sous-ensembles de \mathbb{R}^* de la forme

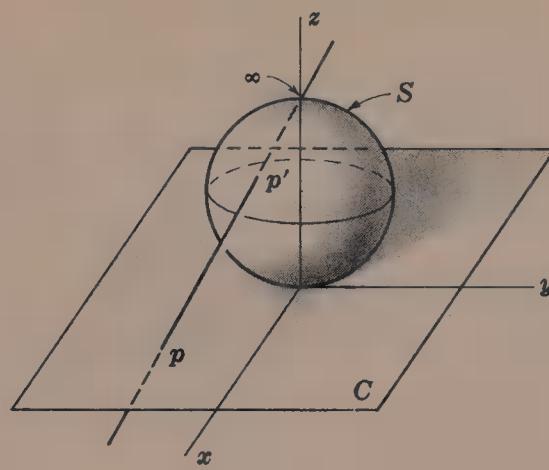
$$(a, b) = \{x : a < x < b\}, \quad (a, \infty] = \{x : a < x\} \quad \text{et} \quad [-\infty, a) = \{x : x < a\}$$

est une base d'une topologie \mathcal{U}^* définie ■ \mathbb{R}^* . En outre $(\mathbb{R}^*, \mathcal{U}^*)$ est un espace compact qui contient $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ comme sous-espace, et ainsi est un compactifié de $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$.

On rappelle que la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle et homéomorphe à tout intervalle (a, b) de nombres réels. On peut de même montrer que l'espace ci-dessus $(\mathbb{R}^*, \mathcal{U}^*)$ est homéomorphe à un intervalle fermé $[a, b]$ quelconque, lequel est compact d'après le théorème classique de Heine-Borel.

Exemple 8.2 : Soit C le plan $\langle x, y \rangle$ de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 et soit S la sphère de centre $\langle 0, 0, 1 \rangle$ située sur l'axe z , et de rayon 1. La droite passant par le "pôle nord" $\infty = \langle 0, 0, 2 \rangle \in S$ et par un point $p \in C$ quelconque coupe la sphère S en exactement un point p' distinct de ∞ , comme on l'a montré sur la figure.

Soit $f : C \rightarrow S$ l'application définie par $f(p) = p'$. Alors f est en fait un homéomorphisme du plan C , lequel n'est pas compact, dans le sous-ensemble $S \setminus \{\infty\}$ de la sphère S , laquelle est compacte. Ainsi S est une compactifiée de C .



A présent soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique quelconque. Nous allons définir le *procédé de compactification d'Alexandrov* de (X, \mathcal{T}) et nous noterons le compactifié ainsi obtenu $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$. Ici:

- (1) $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ où ∞ , appelé *point à l'infini*, est distinct et tout autre point de X .
- (2) \mathcal{T}_∞ est formée par les ensembles suivants :
 - (i) les éléments de la topologie \mathcal{T} sur X ,
 - (ii) les complémentaires dans X_∞ des parties fermées compactes de X .

Nous allons énoncer de façon formelle la :

Proposition 11.11 : La famille d'ensembles ci-dessus, \mathcal{T}_∞ , est une topologie sur X_∞ et $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est une compactification de (X, \mathcal{T}) .

En général, l'espace $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ peut ne pas posséder de propriétés semblables à celles de l'espace initial. Il existe cependant un rapport important entre les deux espaces, à savoir,

Théorème 11.12 : Si (X, \mathcal{T}) est un espace localement compact séparé, alors $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est un espace compact séparé.

Utilisant le lemme d'Urysohn, nous obtenons un résultat important utilisé en théorie de la mesure et en théorie de l'intégration :

Corollaire 11.13 : Soit E un sous-ensemble compact d'un espace localement compact séparé X qui soit contenu dans un ouvert $G \neq X$. Alors il existe une application continue $f : X \rightarrow [0, 1]$ telle que $f[E] = \{0\}$ et que $f[G^c] = \{1\}$.

COMPACITE DANS LES ESPACES METRIQUES

La compacité dans les espaces métriques peut être caractérisée par le théorème suivant :

Théorème 11.14 : Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X . Alors les assertions suivantes sont équivalentes : (i) A est compact, (ii) A possède la propriété de Bolzano-Weierstrass, et (iii) A est séquentiellement compact.

Historiquement, les espaces métriques ont été étudiés avant les espaces topologiques ; ainsi le théorème ci-dessus donne la raison principale pour laquelle les termes compact et séquentiellement compact sont quelquefois utilisés comme synonymes.

La démonstration du théorème ci-dessus nécessite l'introduction de deux notions métriques auxiliaires qui sont intéressantes pour elles-mêmes : celle d'*ensemble précompact* et celle de *nombre de Lebesgue* pour un recouvrement.

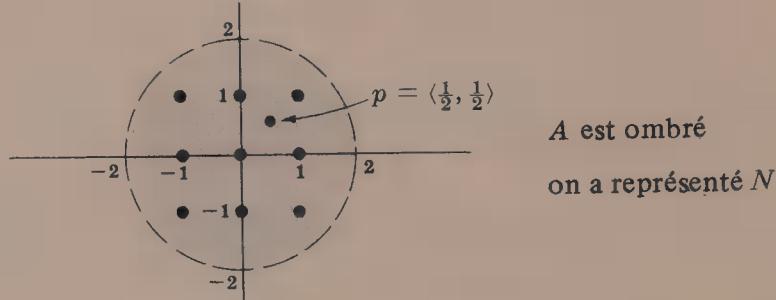
ENSEMBLES PRECOMPACTS

Soit A une partie d'un espace métrique X et soit $\epsilon > 0$. Un ensemble fini de points $N = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ est appelé un *réseau de maille ϵ* pour A si, pour tout point $p \in A$ il existe un $e_{i_0} \in N$ tel que $d(p, e_{i_0}) < \epsilon$.

Exemple 9.1 : Soit $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$, c'est-à-dire A est le disque ouvert, centré à l'origine, et de rayon 2. Si $\epsilon = 3/2$, alors l'ensemble

$$N = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1)\}$$

un réseau de maille ϵ pour A . Par contre, si $\epsilon = \frac{1}{2}$, alors N n'est pas un réseau de maille ϵ pour A . Par exemple, $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ appartient à A mais la distance de p à tout point de N est supérieure à $\frac{1}{2}$.



Rappelons que le *diamètre* de A , $d(A)$ est défini par $d(A) = \sup \{d(a, a') : a, a' \in A\}$ et que A est borné si $d(A) < \infty$.

DEFINITION: Une partie A d'un espace métrique X est *précompacte* si A possède un réseau de maille ϵ pour tout $\epsilon > 0$.

Un ensemble précompact peut également être décrit de la manière suivante :

Proposition 11.15 : Un ensemble A est précompact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une décomposition de A en un nombre fini d'ensembles, chacun de diamètre inférieur à ϵ .

Nous allons d'abord montrer qu'un ensemble borné n'est pas nécessairement précompact.

Exemple 9.2 : Soit A le sous-ensemble de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire de l'espace l_2 formé des points suivant :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \dots)$$

...

...

...

Remarquons que $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ si $i = j$. Ainsi A est borné ; d'ailleurs,

$$d(A) = \sup \{d(e_i, e_j) : e_i, e_j \in A\} = \sqrt{2}$$

Par contre, A n'est pas précompact. Car si $\epsilon = \frac{1}{2}$, les seuls sous-ensembles non vides de A de diamètre inférieur à ϵ sont les singletons, c'est-à-dire les ensembles formés d'un seul point. Par conséquent, l'ensemble infini A ne peut être décomposé en un nombre fini de sous-ensembles disjoints de diamètre inférieur à $\frac{1}{2}$.

La réciproque de l'assertion précédente est cependant vraie, à savoir,

Proposition 11.16 : Un ensemble précompact est borné.

Une des relations existant entre la compacité et la précompacité est la suivante :

Lemme 11.17 : Les ensembles séquentiellement compacts sont précompacts;

NOMBRE DE LEBESGUE D'UN RECOUVREMENT

Soit $\mathcal{A} = \{G_i\}$ un recouvrement d'une partie A d'un espace métrique X . Un nombre réel $\delta > 0$ est appelé un *nombre de Lebesgue* pour le recouvrement si, pour tout sous-ensemble B de A de diamètre inférieur à δ , il existe un élément du recouvrement qui contient B .

Une des relations existant entre la compacité et la notion de nombre de Lebesgue pour un recouvrement est la suivante :

Lemme (de Lebesgue) 11.18 : Tout recouvrement ouvert d'une partie séquentiellement compacte d'un espace métrique ■ un nombre de Lebesgue (positif).

PROBLEMES RESOLUS

ESPACES COMPACTS

1. Soit \mathcal{T} la topologie cofinie, engendrée par les complémentaires des parties finies d'un ensemble X quelconque. Montrer que (X, \mathcal{T}) est un espace compact.

Solution :

Soit $\mathcal{G} = \{G_i\}$ un recouvrement ouvert quelconque de X . Choisissons $G_0 \in \mathcal{G}$. Puisque \mathcal{T} est la topologie engendrée par les complémentaires des parties finies de X , G_0^c est un ensemble fini, ainsi par exemple $G_0^c = \{a_1, \dots, a_m\}$. Puisque \mathcal{G} est un recouvrement de X ,

$$\text{pour chaque } a_k \in G_0^c \quad \exists G_{i_k} \in \mathcal{G} \text{ tel que } a_k \in G_{i_k}$$

Ainsi $G_0^c \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$ et $X = G_0 \cup G_0^c = G_0 \cup \dots \cup G_{i_m}$. Ainsi X est compact.

2. Montrer qu'un sous-ensemble infini quelconque A d'un espace topologique X discret n'est pas compact.

Solution :

Rappelons que A n'est pas compact si on peut mettre en évidence un recouvrement ouvert de A n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Considérons la famille $\mathcal{A} = \{\{a\} : a \in A\}$ des singletons de A . Remarquons que : (i) \mathcal{A} est un recouvrement de A ; d'ailleurs $A = \bigcup \{\{a\} : a \in A\}$, (ii) \mathcal{A} est un recouvrement ouvert de A puisque tous les sous-ensembles d'un espace discret sont des ouverts. (iii) Aucune sous-famille propre de \mathcal{A} n'est un recouvrement de A . (iv) \mathcal{A} est infinie puisque A est infini. Par conséquent, le recouvrement ouvert \mathcal{A} de A ne contient aucun sous-recouvrement fini, ainsi A n'est pas compact.

Puisque les ensembles finis sont toujours compacts nous avons également démontré qu'un sous-ensemble d'un espace discret est compact si et seulement si il est fini.

3. Démontrer le théorème 11.2 : Soit A une partie d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est compacte pour \mathcal{T} .
- (ii) A est compacte pour la topologie induite sur A , \mathcal{T}_A .

Solution :

- (i) \Rightarrow (ii) : Soit $\{G_i\}$ un recouvrement de A ouvert pour \mathcal{T}_A . D'après la définition de la topologie induite,

$$\exists H_i \in \mathcal{T} \quad \text{tel que} \quad G_i = A \cap H_i \subset H_i$$

d'où

$$A \subset \bigcup_i G_i \subset \bigcup_i H_i$$

et donc $\{H_i\}$ est un recouvrement de A ouvert pour \mathcal{T} . D'après (i), A est un compact pour \mathcal{T} ; ainsi $\{H_i\}$ contient un sous-recouvrement fini, par exemple

$$A \subset H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}, \quad H_{i_k} \in \{H_i\}$$

Mais alors,

$$A \subset A \cap (H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}) = (A \cap H_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{i_m}) = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

Ainsi $\{G_i\}$ contient un sous-recouvrement fini $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$ et (A, \mathcal{T}_A) est compact.

(ii) \Rightarrow (i) : Soit $\{H_i\}$ un recouvrement de A ouvert pour \mathcal{T} . Posons $G_i = A \cap H_i$; alors

$$A \subset \bigcup_i H_i \Rightarrow A \subset A \cap (\bigcup_i H_i) = \bigcup_i (A \cap H_i) = \bigcup_i G_i$$

Or $G_i \in \mathcal{T}_A$, donc $\{G_i\}$ est un recouvrement de A ouvert pour \mathcal{T}_A . Par hypothèse, A est compact pour \mathcal{T}_A ; ainsi $\{G_i\}$ contient un sous-recouvrement fini $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$. Par conséquent,

$$A \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m} = (A \cap H_{i_1}) \cup \dots \cup (A \cap H_{i_m}) = A \cap (H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}) \subset H_{i_1} \cup \dots \cup H_{i_m}$$

Ainsi on peut extraire de $\{H_i\}$ un sous-recouvrement fini $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_m}\}$ et donc A est compact pour \mathcal{T} .

4. Soit (Y, \mathcal{T}^*) un sous-espace de (X, \mathcal{T}) et soit $A \subset Y \subset X$. Montrer que A est compact pour \mathcal{T} si et seulement si A est compact pour \mathcal{T}^* .

Solution :

Soit \mathcal{T}_A et \mathcal{T}_A^* les topologies induites sur A . Alors, d'après le problème, A est compact pour \mathcal{T} ou \mathcal{T}^* si et seulement si A est compact pour \mathcal{T}_A ou pour \mathcal{T}_A^* ; or $\mathcal{T}_A = \mathcal{T}_A^*$.

5. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est compact.

(ii) Pour toute famille $\{F_i\}$ de fermés de X , $\bigcap_i F_i = \emptyset$ implique que $\{F_i\}$ contient une sous-famille finie $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_m}\}$ telle que $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset$.

Solution :

(i) \Rightarrow (ii) : Supposons $\bigcap_i F_i = \emptyset$. Alors, d'après les lois de De Morgan,

$$X = \emptyset^c = (\bigcap_i F_i)^c = \bigcup_i F_i^c$$

ainsi $\{F_i^c\}$ est un recouvrement ouvert de X puisque chaque F_i est un fermé. Or, par hypothèse, X est compact ; d'où

$$\exists F_{i_1}^c, \dots, F_{i_m}^c \in \{F_i^c\} \quad \text{tel que} \quad X = F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_m}^c$$

Ainsi, d'après les lois de De Morgan,

$$\emptyset = X^c = (F_{i_1}^c \cup \dots \cup F_{i_m}^c)^c = F_{i_1}^{cc} \cap \dots \cap F_{i_m}^{cc} = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m}$$

et nous avons montré que (i) \Rightarrow (ii).

(ii) \Rightarrow (i) : Soit $\{G_i\}$ un recouvrement ouvert de X , c'est-à-dire $X = \bigcup_i G_i$. D'après les lois de De Morgan,

$$\emptyset = X^c = (\bigcup_i G_i)^c = \bigcap_i G_i^c$$

Puisque chaque G_i est ouvert, $\{G_i^c\}$ est une famille de fermés, qui d'après ce qui précède, ■ une intersection vide. Ainsi par hypothèse,

$$\exists G_{i_1}^c, \dots, G_{i_m}^c \in \{G_i^c\} \quad \text{tel que} \quad G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c = \emptyset$$

D'où, d'après les lois de De Morgan,

$$X = \emptyset^c = (G_{i_1}^c \cap \dots \cap G_{i_m}^c)^c = G_{i_1}^{cc} \cup \dots \cup G_{i_m}^{cc} = G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

Par conséquent, X est compact et donc (ii) \Rightarrow (i).

6. Démontrer le théorème 11.4 : Un espace topologique X est compact si et seulement si toute famille de fermés $\{F_i\}$ de X possédant la propriété de l'intersection finie a elle-même une intersection non vide.

Solution :

En utilisant le problème précédent, il suffit de montrer que les assertions suivantes sont équivalentes, où $\{F_i\}$ est une famille quelconque de fermés de X :

- (i) $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} \neq \emptyset \quad \forall i_1, \dots, i_m \Rightarrow \cap_i F_i \neq \emptyset$
- (ii) $\cap_i F_i = \emptyset \Rightarrow \exists i_1, \dots, i_m \text{ t.q. } F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_m} = \emptyset$

Or ces assertions sont les contraposées l'une de l'autre.

COMPACITE ET ESPACES SEPARES

7. Démontrer que si A est une partie compacte d'un espace séparé X et que si $p \in X \setminus A$, alors

$$\exists \text{ des ouverts } G, H \quad \text{tels que} \quad p \in G, A \subset H, G \cap H = \emptyset$$

Solution :

Soit $a \in A$. Puisque $p \notin A$, $p \neq a$. Par hypothèse, X est un espace séparé ; ainsi

$$\exists \text{ deux ouverts } G_a, H_a \quad \text{tels que} \quad p \in G_a, a \in H_a, G_a \cap H_a = \emptyset$$

Ainsi $A \subset \bigcup \{H_a : a \in A\}$, c'est-à-dire $\{H_a : a \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A . Or A est compact donc

$$\exists H_{a_1}, \dots, H_{a_m} \in \{H_a\} \quad \text{tels que} \quad A \subset H_{a_1} \cup \dots \cup H_{a_m}$$

A présent soit $H = H_{a_1} \cup \dots \cup H_{a_m}$ et $G = G_{a_1} \cap \dots \cap G_{a_m}$. H et G sont ouverts étant respectivement réunion et intersection finie d'ouverts. En outre, $A \subset H$ et $p \in G$ puisque p appartient à chaque G_{a_i} séparément.

Enfin, nous affirmons que $G \cap H = \emptyset$. Notons d'abord que $G_{a_i} \cap H_{a_j} = \emptyset$ implique que $G \cap H_{a_j} = \emptyset$. Ainsi, d'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion,

$$G \cap H = G \cap (H_{a_1} \cup \dots \cup H_{a_m}) = (G \cap H_{a_1}) \cup \dots \cup (G \cap H_{a_m}) = \emptyset \cup \dots \cup \emptyset = \emptyset$$

Et la démonstration est achevée.

8. Soit A une partie compacte d'un espace séparé X . Montrer que si $p \notin A$, alors il existe un ouvert G tel que $p \in G \subset A^c$.

Solution :

D'après le problème 7, il existe des ouverts G et H tels que $p \in G$, $A \subset H$ et $G \cap H = \emptyset$. Ainsi $G \cap A = \emptyset$ et $p \in G \subset A^c$.

9. Démontrer le théorème 11.5 : Soit A une partie compacte d'un espace séparé X . Alors A est fermée.

Solution :

Nous allons démontrer, ce qui revient au même, que A^c est ouverte. Soit $p \in A^c$, c'est-à-dire $p \notin A$. Alors, d'après le problème 8, il existe un ouvert G_p tel que $p \in G_p \subset A^c$. Ainsi $A^c = \bigcup \{G_p : p \in A^c\}$.

Ainsi A^c est ouverte comme réunion d'ouverts, c'est-à-dire que A est fermée.

10. Démontrer le théorème 11.6 : Soient A et B deux parties compactes disjointes d'un espace séparé X . Alors il existe deux ouverts disjoints G et H tels que $A \subset G$ et $B \subset H$.

Solution :

Soit $a \in A$. Alors $a \notin B$, puisque A et B sont disjointes. Par hypothèse, B est compacte ; ainsi, d'après le problème 7, il existe des ouverts G_a et H_a tels que

$$a \in G_a, \quad B \subset H_a \quad \text{et} \quad G_a \cap H_a = \emptyset$$

Puisque $a \in G_a$, $\{G_a : a \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A . Puisque A est compacte, on peut extraire un nombre fini de ces ouverts par exemple G_{a_1}, \dots, G_{a_m} , de telle sorte que $A \subset G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_m}$. En outre, $B \subset H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_m}$ puisque B est contenu dans chacun séparément.

A présent soit $G = G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_m}$ et $H = H_{a_1} \cap \dots \cap H_{a_m}$. Remarquons, d'après ce qui précède, que $A \subset G$ et que $B \subset H$. De plus, G et H sont ouverts comme union et intersection finie respectives d'ouverts. Le théorème est démontré si nous montrons que G et H sont disjoints. Remarquons d'abord que pour chaque i , $G_{a_i} \cap H_{a_i} = \emptyset$ implique $G_{a_i} \cap H = \emptyset$. Ainsi, d'après la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion,

$$G \cap H = (G_{a_1} \cup \dots \cup G_{a_m}) \cap H = (G_{a_1} \cap H) \cup \dots \cup (G_{a_m} \cap H) = \emptyset \cup \dots \cup \emptyset = \emptyset$$

Ainsi le théorème est démontré.

11. Démontrer le théorème 11.8 : Soit f une application continue injective d'un espace compact X dans un espace séparé Y . Alors X et $f[X]$ sont homéomorphes.

Solution :

$f: X \rightarrow f[X]$ est surjective et, par hypothèse, injective et continue, ainsi $f^{-1}: f[X] \rightarrow X$ existe. Nous devons montrer que f^{-1} est continue. Rappelons que f^{-1} est continue si pour tout fermé F de X , $(f^{-1})^{-1}[F] = f[F]$ est un fermé de $f[X]$. D'après le théorème 11.3, le sous-ensemble fermé F de l'espace compact X est également compact. Puisque f est continue, $f[F]$ est un sous-ensemble compact de $f[X]$. Or le sous-espace $f[X]$ de l'espace séparé Y est également un espace séparé ; ainsi, d'après le théorème 11.5, $f[F]$ est fermé. Par conséquent, f^{-1} est continue donc $f: X \rightarrow f[X]$ est un homéomorphisme et X et $f[X]$ sont homéomorphes.

12. Soit (X, \mathcal{T}) compact et soit (X, \mathcal{T}^*) séparé. Montrer que si $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

Solution :

Considérons l'application $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^*)$ définie par $f(x) = x$, c'est-à-dire l'application identique de X . A présent f est bijective. De plus f est continue puisque $\mathcal{T}^* \subset \mathcal{T}$. Ainsi, d'après le problème précédent, f est un homéomorphisme et donc $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

ESPACES SEQUENTIELLEMENT COMPACTS ET ESPACES POSSEDANT LA PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASS

13. Montrer que l'image par une application continue d'un ensemble séquentiellement compact est séquentiellement compacte.

Solution :

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue et soit A un sous-ensemble séquentiellement compact de X . Nous voulons montrer que $f[A]$ est un sous-ensemble séquentiellement compact de Y . Soit $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$ une suite de $f[A]$. Alors

$$\exists a_1, a_2, \dots \in A \quad \text{tels que} \quad f(a_n) = b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Or A est séquentiellement compact, donc la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ contient une sous-suite $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ qui converge vers un point $a_0 \in A$. A présent f est continue et donc séquentiellement continue donc

$$\langle f(a_{i_1}), f(a_{i_2}), \dots \rangle = \langle b_{i_1}, b_{i_2}, \dots \rangle \text{ converge vers } f(a_0) \in f[A]$$

Ainsi $f[A]$ est séquentiellement compact.

14. Soit \mathcal{T} la topologie sur X formée de \emptyset et des complémentaires des parties au plus dénombrables de X . Montrer qu'aucun sous-ensemble infini de X n'est séquentiellement compact.

Solution :

Rappelons (exemple 7.3 page 80) que toute suite de (X, \mathcal{T}) converge ssi elle est de la forme

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, p, p, p, \dots \rangle$$

c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang. Ainsi, si A est un sous-ensemble infini de X , il existe une suite $\langle b_n \rangle$ de A ayant des termes tous distincts. Ainsi $\langle b_n \rangle$ ne contient aucune sous-suite convergente et A n'est pas séquentiellement compact.

15. Montrer que : (i) l'image par une application continue d'un espace possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass ne possède pas nécessairement cette propriété ; (ii) qu'un fermé d'un espace possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass est également un espace possédant cette propriété.

Solution :

- (i) Soit $X = (\mathbb{N}, \mathcal{T})$ où \mathcal{T} est la topologie définie sur les entiers positifs \mathbb{N} , engendrée par les ensembles $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}, \dots$. D'après l'exemple 6.3, X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit $Y = (\mathbb{N}, \mathcal{D})$ où \mathcal{D} est la topologie discrète sur \mathbb{N} . A présent Y ne possède pas la propriété de Bolzano-Weierstrass. Par contre, l'application $f: X \rightarrow Y$ qui applique $2n$ et $2n - 1$ sur n pour $n \in \mathbb{N}$ est continue et applique l'ensemble X possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass dans l'espace Y ne la possédant pas.
- (ii) Supposons que X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass et supposons que F soit un fermé de X . Soit A un sous-ensemble infini de F . Puisque $F \subset X$, A est également un sous-ensemble infini de X . Par hypothèse, X est un espace possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass ; alors A a un point d'accumulation $p \in X$. Puisque $A \subset F$, p est également un point d'accumulation de F . Or F est fermé et donc contient ses points d'accumulation ; ainsi $p \in F$. Nous avons montré que tout sous-ensemble infini A de F ■ un point d'accumulation $p \in F$, c'est-à-dire que F possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

16. Démontrer que si X est compact, alors X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Solution :

Soit A un sous-ensemble de X n'ayant pas de point d'accumulation dans X . Alors chaque point $p \in X$ appartient à un ouvert G_p contenant au plus un point de A . Remarquons que la famille $\{G_p : p \in X\}$ est un recouvrement ouvert du compact X et donc qu'elle contient un sous-recouvrement fini, par exemple $\{G_{p_1}, \dots, G_{p_m}\}$.

Ainsi

$$A \subset X \subset G_{p_1} \cup \dots \cup G_{p_m}$$

Mais chaque G_{p_i} contient au plus un point de A ; ainsi A , sous-ensemble de $G_{p_1} \cup \dots \cup G_{p_m}$, contient au plus m points, c'est-à-dire A est fini. Par conséquent tout sous-ensemble infini de X contient un point d'accumulation dans X , c'est-à-dire X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

17. Démontrer que si X est séquentiellement compact, alors X possède également la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Solution :

Soit A un sous-ensemble infini de X . Alors il existe une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de A ayant ses termes tous distincts. Puisque X est séquentiellement compact, la suite $\langle a_n \rangle$ contient une sous-suite $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ (à termes également tous distincts) qui converge vers un point $p \in X$. Ainsi tout voisinage ouvert de p contient une infinité de termes de la sous-suite convergente $\langle a_{i_n} \rangle$. Or les termes sont distincts donc tout voisinage ouvert de p contient une infinité de points de A . Par conséquent $p \in X$ est un point d'accumulation de A . En d'autres termes, X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Remarque : Noter que les résultats des problèmes 16 et 17 impliquent le théorème 11.9.

18. Démontrer que si $A \subset X$ est séquentiellement compact alors, de tout recouvrement au plus dénombrable ouvert de A , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Solution :

On peut admettre que A est infini parce que, sinon, la démonstration est triviale. Nous allons démontrer la proposition contraposée, c'est-à-dire supposons que \exists un recouvrement ouvert dénombrable $\{G_i : i \in \mathbb{N}\}$ n'admettant pas de sous-recouvrement fini. Nous allons définir une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de la manière suivante.

Soit n_1 le plus petit entier positif tel que $A \cap G_{n_1} \neq \emptyset$. Choisissons $a_1 \in A \cap G_{n_1}$. Soit n_2 le plus petit entier positif supérieur à n_1 tel que $A \cap G_{n_2} \neq \emptyset$. Choisissons

$$a_2 \in (A \cap G_{n_2}) \setminus (A \cap G_{n_1})$$

Un tel point existe toujours, sinon G_{n_1} recouvre A . Continuant de cette façon, nous obtenons une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ ayant la propriété que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$a_i \in A \cap G_{n_i}, \quad a_i \notin \cup_{j=1}^{i-1} (A \cap G_{n_j}) \quad \text{et} \quad n_i > n_{i-1}$$

Nous affirmons que $\langle a_i \rangle$ n'a pas de sous-suite convergente dans A . Soit $p \in A$. Alors

$$\blacksquare G_{i_0} \in \{G_i\} \quad \text{tel que} \quad p \in G_{i_0}$$

A présent $A \cap G_{i_0} \neq \emptyset$ puisque $p \in A \cap G_{i_0}$; ainsi

$$\blacksquare j_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad G_{n_{j_0}} = G_{i_0}$$

Mais, d'après le choix de la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$

$$i > j_0 \Rightarrow a_i \notin G_{i_0}$$

Par conséquent puisque G_{i_0} est un ouvert contenant p , aucune sous-suite de $\langle a_i \rangle$ ne converge vers p . Or p a été choisi arbitrairement, ainsi A n'est pas séquentiellement compact.

COMPACITE DANS LES ESPACES METRIQUES

19. Démontrer le lemme 11.17 : Soit A un sous-ensemble séquentiellement compact d'un espace métrique X . Alors A est précompact.

Solution :

Nous allons montrer la proposition contraposée, c'est-à-dire si A n'est pas précompact, alors A n'est pas séquentiellement compact. Si A n'est pas précompact, alors il existe un $\epsilon > 0$ tel que A ne possède aucun réseau (fini) de maille ϵ . Soit $a_1 \in A$. Alors il existe un point $a_2 \in A$ tel que $d(a_1, a_2) \geq \epsilon$, car sinon $\{a_1\}$ serait un réseau de maille ϵ pour A . De même, il existe un point $a_3 \in A$ tel que $d(a_1, a_3) \geq \epsilon$ et que $d(a_2, a_3) \geq \epsilon$, car sinon $\{a_1, a_2\}$ serait un réseau de maille ϵ pour A . Poursuivant de cette façon, nous obtenons une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ ayant la propriété que $d(a_i, a_j) \geq \epsilon$ pour $i \neq j$. Ainsi la suite $\langle a_n \rangle$ ne peut contenir aucune sous-suite convergente. En d'autres termes, A n'est pas séquentiellement compact.

20. Démontrer le lemme (de Lebesgue) 11.18 : Soit $\mathcal{A} = \{G_i\}$ un recouvrement ouvert d'un espace séquentiellement compact A . Alors \mathcal{A} ■ un nombre de Lebesgue (positif).

Solution :

Supposons que \mathcal{A} n'ait pas de nombre de Lebesgue (positif). Alors pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$ il existe un sous-ensemble B_n de A ayant la propriété que

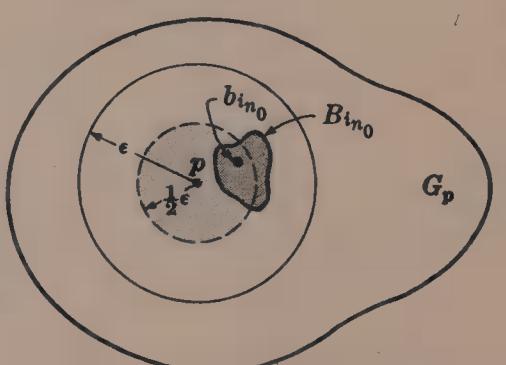
$$0 < d(B_n) < 1/n \quad \text{et} \quad B_n \not\subset G_i \text{ pour tout } G_i \text{ de } \mathcal{A}$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ choisissons un point $b_n \in B_n$. Puisque A est séquentiellement compact, la suite $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$ contient une sous-suite $\langle b_{i_1}, b_{i_2}, \dots \rangle$ qui converge vers un point $p \in A$.

Puisque $p \in A$, p appartient à un ouvert G_p du recouvrement. Ainsi il existe une boule ouverte $S(p, \epsilon)$ de centre p et rayon ϵ , telle que $p \in S(p, \epsilon) \subset G_p$. Puisque $\langle b_{i_n} \rangle$ converge vers p , il existe un entier positif i_{n_0} tel que

$$d(p, b_{i_{n_0}}) < \frac{1}{2}\epsilon, \quad b_{i_{n_0}} \in B_{i_{n_0}} \quad \text{et} \quad d(B_{i_{n_0}}, S(p, \epsilon)) < \frac{1}{2}\epsilon$$

Utilisant l'inégalité triangulaire nous obtenons $B_{i_{n_0}} \subset S(p, \epsilon) \subset G_p$. Or ceci contredit le fait que $B_{i_{n_0}} \not\subset G_i$ pour tout G_i du recouvrement \mathcal{A} . Par conséquent \mathcal{A} possède un nombre de Lebesgue strictement positif.



$B_{i_{n_0}}$ ■ été ombré

21. Démontrer que si A est un sous-ensemble d'un espace métrique possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass, alors A est séquentiellement compact.

Solution :

Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de A . Si l'ensemble $B = \{a_1, a_2, \dots\}$ est fini, alors l'un des points, par exemple a_{i_0} , vérifie $a_{i_0} = a_j$ pour une infinité d'indices $j \in \mathbb{N}$. Ainsi $\langle a_{i_0}, a_{i_0}, \dots \rangle$ est une sous-suite de $\langle a_n \rangle$ qui converge vers le point a_{i_0} de A .

Maintenant, supposons que $B = \{a_1, a_2, \dots\}$ soit infini. Par hypothèse, A possède la propriété de Bolzano-Weierstrass. Ainsi le sous-ensemble infini B de A contient un point d'accumulation p dans A . Or X est un espace métrique, donc on peut choisir une sous-suite $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ de la suite $\langle a_n \rangle$ qui converge vers le point p de A . En d'autres termes, A est séquentiellement compact.

22. Démontrer le théorème 11.14 : Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X . Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) A est compact, (ii) A possède la propriété de Bolzano-Weierstrass, et (iii) A est séquentiellement compact.

Solution :

Rappelons (voir le théorème 11.8) que (i) implique (ii) dans tout espace topologique ; ainsi il en de même pour un espace métrique. Dans le problème précédent nous avons montré que (ii) implique (iii). Par conséquent, le théorème est démontré et nous montrons que (iii) implique (i).

Soit A séquentiellement compact et soit $\mathcal{A} = \{G_i\}$ un recouvrement ouvert de A . Nous voulons montrer que A est compact, c'est-à-dire que \mathcal{A} contient un sous-recouvrement fini. Par hypothèse, A est séquentiellement compact, d'où, d'après le lemme 11.18, le recouvrement \mathcal{A} ■ un nombre de Lebesgue $\delta > 0$. En outre, d'après le lemme 11.17, A est précompact. Ainsi il existe une décomposition de A ■ un nombre fini de parties B_1, \dots, B_m , telles que $d(B_i) < \delta$. Or δ est un nombre de Lebesgue pour \mathcal{A} ; ainsi il existe des ouverts G_{i_1}, \dots, G_{i_m} tels que

$$B_1 \subset G_{i_1}, \dots, B_m \subset G_{i_m}$$

Par conséquent

$$A \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \subset G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

Ainsi \mathcal{A} contient un sous-recouvrement fini $\{G_{i_1}, \dots, G_{i_m}\}$, c'est-à-dire A est compact.

23. Soit A un sous-ensemble compact d'un espace métrique (X, d) . Montrer que pour tout $B \subset X$ il y a un point $p \in A$ tel que $d(p, B) = d(A, B)$.

Solution :

Soit $d(A, B) = \epsilon$. Puisque $d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$,

$$\blacksquare a_n \in A, b_n \in B \quad \text{tels que} \quad \blacksquare \leq d(a_n, b_n) < \epsilon + 1/n$$

A présent A est compact et donc séquentiellement compact ; ainsi la suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ ■ une sous-suite qui converge vers un point $p \in A$. Nous affirmons que $d(p, B) = d(A, B) = \epsilon$.

Supposons que $d(p, B) > \epsilon$, c'est-à-dire par exemple que $d(p, B) = \epsilon + \delta$ où $\delta > 0$. Puisque une sous-suite de $\langle a_n \rangle$ converge vers p ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(p, a_{n_0}) < \frac{1}{2}\delta \quad \text{et} \quad d(a_{n_0}, b_{n_0}) < \epsilon + 1/n_0 < \epsilon + \frac{1}{2}\delta$$

Alors

$$d(p, a_{n_0}) + d(a_{n_0}, b_{n_0}) < \frac{1}{2}\delta + \epsilon + \frac{1}{2}\delta = \epsilon + \delta = d(p, B) \leq d(p, b_{n_0})$$

Mais ceci contredit l'inégalité triangulaire ; ainsi $d(p, B) = d(A, B)$.

24. Soit A un sous-ensemble compact d'un espace métrique (X, d) et soit B un fermé de X tel que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $d(A, B) > 0$.

Solution :

Supposons que $d(A, B) = 0$. Alors, d'après le problème précédent,

$$\exists p \in A \quad \text{tel que} \quad d(p, B) = d(A, B) = 0$$

Or B est fermé et donc contient tous les points dont la distance à B est nulle. Ainsi $p \in B$ et donc $p \in A \cap B$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse ; ainsi $d(A, B) > 0$.

25. Démontrer que si f est une application continue d'un espace métrique compact (X, d) dans un espace métrique (Y, d^*) , alors f est *uniformément continue*, c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d^*(f(x), f(y)) < \epsilon$$

(Remarque : la continuité uniforme est une propriété plus restrictive que la continuité, en ce que le δ ci-dessus ne dépend que du ϵ et non en plus du point particulier choisi.)

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue, pour tout point $p \in X$ il existe une boule ouverte $S(p, \delta_p)$ telle que

$$x \in S(p, \delta_p) \Rightarrow f(x) \in S(f(p), \frac{1}{2}\epsilon)$$

Remarquons que la famille $\mathcal{A} = \{S(p, \delta_p) : p \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X . Par hypothèse, X est compact et donc également séquentiellement compact. Donc le recouvrement \mathcal{A} possède un nombre de Lebesgue non nul $\delta > 0$.

A présent soient $x, y \in X$ avec $d(x, y) < \delta$. Or $d(x, y) = d\{x, y\} < \delta$ implique que $\{x, y\}$ est contenu dans un élément $S(p_0, \delta_{p_0})$ du recouvrement \mathcal{A} . A présent

$$x, y \in S(p_0, \delta_{p_0}) \Rightarrow f(x), f(y) \in S(f(p_0), \frac{1}{2}\epsilon)$$

Or la boule $S(f(p_0), \frac{1}{2}\epsilon)$ pour diamètre ϵ . Par conséquent,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d^*(f(x), f(y)) < \epsilon$$

En d'autres termes, f est uniformément continue.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES COMPACTS

26. Démontrer que si E est compact et F fermé, alors $E \cap F$ est compact.
27. Soient A_1, \dots, A_m des parties compactes d'un espace topologique X . Montre que $A_1 \cup \dots \cup A_m$ est également compacte.
28. Montrer que la compacité est une propriété topologique.
29. Démontrer la proposition 11.11 : La famille \mathcal{T}_∞ est une topologie sur X_∞ et $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est une compactification de (X, \mathcal{T}) . (Ici $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est la compactification d'Alexandrov de (X, \mathcal{T}) .)
30. Démontrer le théorème 11.12 : Si (X, \mathcal{T}) est un espace séparé localement compact, alors $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ est un espace compact séparé.

ESPACES SEQUENTIELLEMENT COMPACTS ET ESPACES POSSEDANT LA PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASS

31. Montrer que la compacité séquentielle est une propriété topologique.
32. Démontrer qu'une partie fermée d'un espace séquentiellement compact est séquentiellement compacte.
33. Montrer que la propriété de Bolzano-Weierstrass est une propriété topologique.
34. Supposons que (X, \mathcal{T}) possède la propriété de Bolzano-Weierstrass et que $\mathcal{T}^* \leq \mathcal{T}$. Montrer que (X, \mathcal{T}^*) possède également la propriété de Bolzano-Weierstrass.

35. Démontrer que si X est un espace topologique tel que de tout recouvrement ouvert au plus dénombrable de X on puisse extraire un sous-recouvrement fini, alors X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.
36. Démontrer que si X est un espace T_1 , alors X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass si et seulement si de tout recouvrement ouvert au plus dénombrable de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.
37. Démontrer que si X est un espace T_1 vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, alors X est compact si et seulement si X possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

ESPACES PRECOMPACTS

38. Démontrer la proposition 11.15 : Un ensemble A est précompact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une décomposition de A en un nombre fini de parties chacune de diamètre inférieur à ϵ .
39. Démontrer la proposition 11.16 : Un espace précompact est borné.
40. Montrer que toute partie d'un espace précompact est précompacte.
41. Montrer que si A est précompact il en est de même de \bar{A} .
42. Démontrer qu'un espace métrique précompact est séparable.

COMPACITE ET ESPACES METRIQUES

43. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace métrique X est fermée bornée.
44. Démontrer que si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue d'un espace compact X dans un espace métrique Y , alors $f[X]$ est une partie bornée de Y .
45. Démontrer qu'une partie A de la droite réelle R est compacte si et seulement si elle est fermée bornée.
46. Démontrer que si A est une partie compacte d'un espace métrique X , alors l'ensemble dérivé A' de A est compact.
47. Démontrer que le cube de Hilbert $I = \{\langle a_n \rangle : 0 \leq a_n \leq 1/n\}$ est un sous-ensemble compact de R^∞ .
48. Démontrer que si A et B sont des parties compactes d'un espace métrique X , alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = d(A, B)$.

ESPACES LOCALEMENT COMPACTS

49. Montrer que la locale compacité est une propriété topologique.
50. Montrer que tout espace discret est localement compact.
51. Montrer que tout ensemble muni de la topologie grossière est localement compact.
52. Montrer que le plan R^2 muni de la topologie usuelle est localement compact.
53. Démontrer que si A est un fermé d'un espace localement compact (X, \mathcal{T}) , alors A muni de la topologie induite est localement compact.

CHAPITRE 12

Espaces produits

TOPOLOGIE PRODUIT

Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille quelconque d'ensembles et soit X le produit cartésien de ces ensembles, c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Notons que X est formé des points $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ où $a_i \in X_i$. Rappelons que pour tout $j_0 \in I$ nous avons défini la *projection* π_{j_0} de l'espace produit X sur l'espace coordonné X_{j_0} , c'est-à-dire $\pi_{j_0} : X \rightarrow X_{j_0}$ par

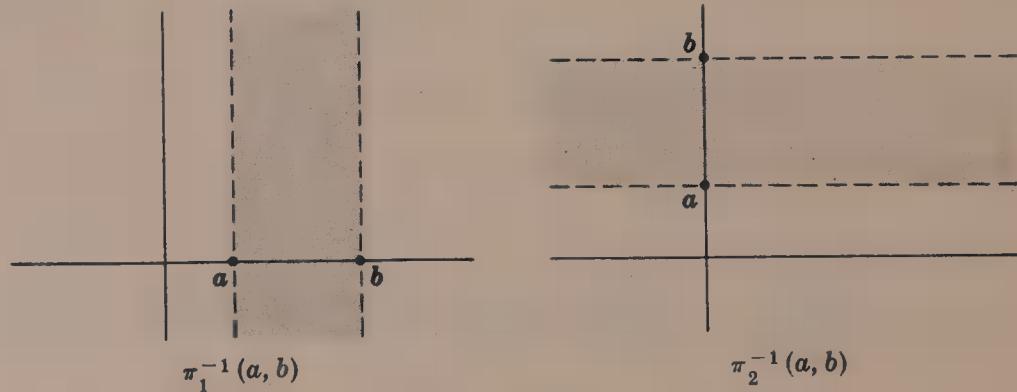
$$\pi_{j_0}(\langle a_i : i \in I \rangle) = a_{j_0}$$

Ce sont ces projections qu'on utilise pour définir la topologie produit.

DEFINITION: Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}$ une famille d'espaces topologiques et soit X le produit des ensembles X_i , c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. La topologie la moins fine \mathcal{T} sur X pour laquelle toutes les projections $\pi_i : X \rightarrow X_i$ sont continues est appelée la *topologie produit* (ou de Tychonoff). L'ensemble produit X muni de la topologie produit, c'est-à-dire (X, \mathcal{T}) , est appelé l'*espace topologique produit* ou plus simplement l'*espace produit*.

En d'autres termes, la *topologie produit* \mathcal{T} sur l'ensemble produit $X = \prod_i X_i$ est la topologie engendrée par les projections (voir au chapitre 7).

Exemple 1.1 : Considérons le plan cartésien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Rappelons que les images réciproques $\pi_1^{-1}(a, b)$ et $\pi_2^{-1}(a, b)$ sont des bandes ouvertes infinies qui constituent une sous base de la topologie usuelle de \mathbb{R}^2

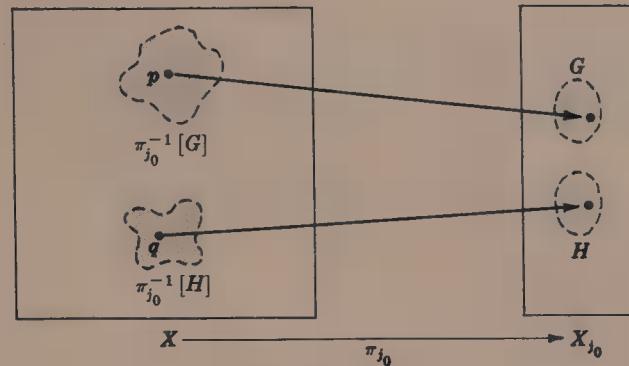


Ainsi la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 est la topologie engendrée par les projections de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

En vertu de la définition ci-dessus nous pouvons énoncer le résultat de l'exemple 1.1 sous la forme suivante :

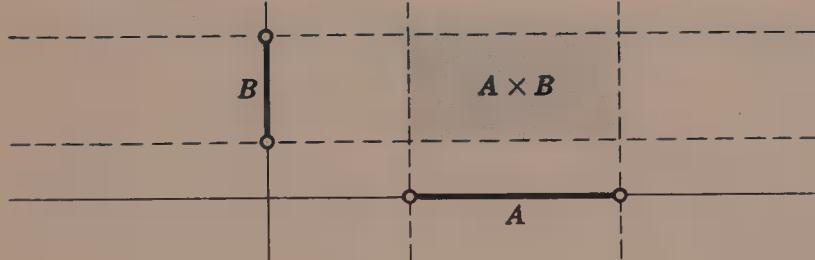
Théorème 12.1 : La topologie usuelle de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est la topologie produit.

Exemple 1.2 : Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille d'espaces séparés et soit X l'espace produit, c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Nous allons montrer que X est également un espace séparé. Soit $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ et $q = \langle b_i : i \in I \rangle$ deux points distincts de X . Alors p et q diffèrent en au moins un espace coordonné, par exemple X_{j_0} , c'est-à-dire $a_{j_0} \neq b_{j_0}$. Par hypothèse X_{j_0} est séparé ; ainsi il existe deux ouverts disjoints G et H de X_{j_0} tels que $a_{j_0} \in G$ et $b_{j_0} \in H$. D'après la définition de l'espace produit, la projection $\pi_{j_0} : X \rightarrow X_{j_0}$ est continue. Par conséquent $\pi_{j_0}^{-1}[G]$ et $\pi_{j_0}^{-1}[H]$ sont des ouverts disjoints de X contenant respectivement p et q . Ainsi X est également un espace séparé.



BASE DE LA TOPOLOGIE PRODUIT POUR UN PRODUIT FINI

Le produit cartésien $A \times B$ de deux intervalles ouverts finis A et B est un rectangle ouvert de \mathbb{R}^2 comme on l'a représenté ci-dessous.



Comme on l'a noté précédemment, les rectangles ouverts constituent une base de la topologie usuelle de \mathbb{R}^2 laquelle est également la topologie produit sur \mathbb{R}^2 . La même proposition est vraie pour toute topologie produit définie par un produit fini. A savoir,

Proposition 12.2 : Soient X_1, \dots, X_m une famille finie d'espaces topologiques et soit X l'espace produit, c'est-à-dire $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Alors les sous-ensembles suivants de l'espace produit X ,

$$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_m$$

où G_i est un ouvert de X_i , forment une base de la topologie produit définie sur X .

Comme nous le verrons au paragraphe suivant, la proposition précédente n'est pas vraie pour un produit infini.

SOUS-BASE ET BASE DE DEFINITION DE LA TOPOLOGIE PRODUIT

Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques et soit X l'espace produit, c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Si G_{j_0} est un ouvert de l'espace coordonné X_{j_0} , alors $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ est formé des points $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ de X tels que $\pi_{j_0}(p) \in G_{j_0}$. En d'autres termes

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \prod_{i \neq j_0} \{X_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}$$

En particulier, si on a affaire à une famille dénombrable d'espaces topologiques, par exemple $\{X_1, X_2, \dots\}$, alors l'espace produit

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots$$

est formé par les suites

$$p = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle \quad \text{où} \quad a_n \in X_n$$

et, de plus,

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = X_1 \times \dots \times X_{j_0-1} \times G_{j_0} \times X_{j_0+1} \times \dots$$

Par définition, la topologie produit sur X est la plus "petite" c'est-à-dire la moins fine des topologies sur X pour lesquelles les projections soient continues, c'est-à-dire la topologie engendrée par les projections. Par conséquent, les images réciproques d'ouverts des espaces coordonnées constituent une sous-base de la topologie produit (théorème 7.8). A savoir,

Théorème 12.3 : La famille des parties d'un espace produit $X = \prod_i X_i$ de la forme

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \prod \{X_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}$$

où G_{j_0} est un ouvert de l'espace coordonné X_{j_0} , est une sous-base et est appelée la *sous-base de définition* de la topologie produit.

En outre, puisque les intersections finies des éléments de la sous-base constituent une base de la topologie, nous avons également le

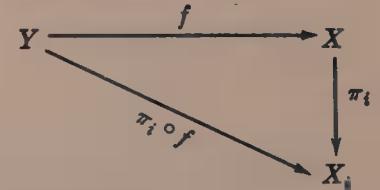
Théorème 12.4 : La famille des parties d'un espace produit $X = \prod_i X_i$ de la forme

$$\pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \dots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}] = \prod \{X_i : i \neq j_1, \dots, j_m\} \times G_{j_1} \times \dots \times G_{j_m}$$

à G_{j_k} est un ouvert de l'espace coordonné X_{j_k} , est une base et est appelée la *base de définition* de la topologie produit.

Utilisant les propriétés ci-dessus nous pouvons démontrer les faits essentiels suivants concernant les espaces produits.

Théorème 12.5 : Une application f d'un espace topologique Y dans un espace produit $X = \prod_i X_i$ est continue si et seulement si, pour toute projection π_i , l'application composée $\pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ est également continue



Théorème 12.6 : Toute projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$ sur un espace produit $X = \prod_i X_i$ est à la fois ouverte et continue, c'est-à-dire bicontinue.

Théorème 12.7 : Une suite p_1, p_2, \dots de points d'un espace produit $X = \prod_i X_i$ converge vers le point q de X si et seulement si, pour chaque projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$, la suite $\pi_i(p_1), \pi_i(p_2), \dots$ converge vers $\pi_i(q)$ dans l'espace coordonné X_i .

En d'autres termes, si $p_1 = \langle q_{1_i} \rangle, p_2 = \langle a_{2_i} \rangle, \dots$ et $q = \langle b_i \rangle$ sont des points d'un espace produit $X = \prod_i X_i$, alors

$$p_n \rightarrow q \text{ dans } X \quad \text{ssi} \quad a_{n_i} \rightarrow b_i \quad \text{dans tout espace coordonné } X_i$$

EXAMPLE D'UN ESPACE PRODUIT

Désignons par R_i un exemplaire de \mathbb{R} , ensemble des nombres réels muni de la topologie usuelle, indexé par l'intervalle unité fermé $I = [0, 1]$. Considérons l'espace produit $X = \prod_i \{R_i : i \in I\}$. Nous pouvons représenter X graphiquement comme sur la figure ci-après. Ici l'axe horizontal représente l'ensemble d'indices $I = [0, 1]$ et chaque droite verticale passant par un point de I , par exemple j_0 , représente l'espace coordonné R_{j_0} . Considérons un élément $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ de l'espace produit X . Remarquons que p associe à chaque nombre $i \in I$ le

nombre réel a_i , c'est-à-dire p est une application à valeurs réelles définie sur l'ensemble d'indices $I = [0, 1]$. En d'autres termes, l'espace produit X est la famille de toutes les applications à valeurs réelles définies sur I , c'est-à-dire

$$X = \{p : p : I \rightarrow \mathbf{R}\}$$

Quelques éléments de X ont également été représentés sur la figure.

Nous allons maintenant décrire l'un des éléments de la sous-base de définition \mathcal{S} de la topologie produit sur X . On rappelle que \mathcal{S} est constituée sur les ensembles de X de la forme

$$\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}] = \prod_{i \neq j_0} \{R_i : i \neq j_0\} \times G_{j_0}$$

où G_{j_0} est un ouvert de l'espace coordonné R_{j_0} . Supposons que G_{j_0} soit l'intervalle ouvert $(1, 2)$. Alors $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ est formé par les points $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ de X tels que $a_{j_0} \in G_{j_0} = (1, 2)$, c'est-à-dire des applications $p : I \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $1 < p(j_0) < 2$. Graphiquement, $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$ est formé par toutes les applications dont le graphe passe par l'intervalle $G_{j_0} = (1, 2)$ situé sur la droite verticale représentant l'espace coordonné R_{j_0} , comme on l'a représenté sur le schéma ci-contre.

Enfin, nous allons décrire l'un des ouverts, B , de la base de définition de la topologie produit sur X . On rappelle que B est égal à l'intersection d'un nombre fini d'éléments de la sous-base de définition \mathcal{S} de la topologie produit, par exemple,

$$\begin{aligned} B &= \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \pi_{j_2}^{-1}[G_{j_2}] \cap \pi_{j_3}^{-1}[G_{j_3}] \\ &= \prod_{i \neq j_1, j_2, j_3} \{R_i : i \neq j_1, j_2, j_3\} \times G_{j_1} \times G_{j_2} \times G_{j_3} \end{aligned}$$

Graphiquement, on voit que B est formé des applications dont le graphe passe par les ouverts G_{j_1} , G_{j_2} et G_{j_3} situés sur les droites verticales représentant les espaces coordonnées R_{j_1} , R_{j_2} et R_{j_3} . Quelques éléments de B ont été représentés sur le schéma ci-contre.

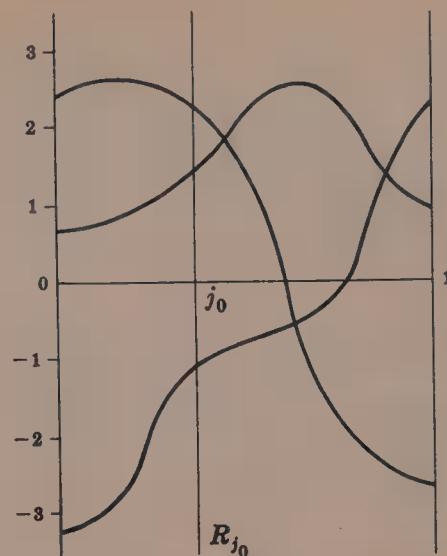
Considérons la proposition suivante.

Proposition 12.8 : Soit $\{(X_i, T_i)\}$ une famille d'espaces topologiques et soit X le produit des ensembles X_i , c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Alors les sous-ensembles de X de la forme

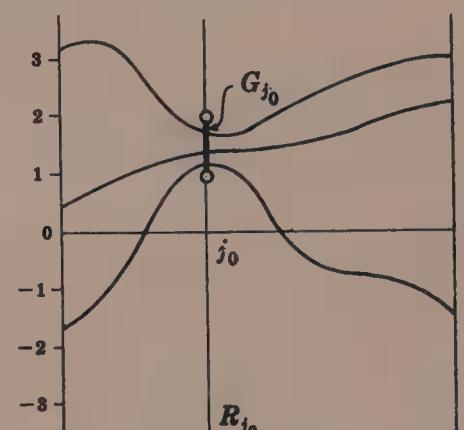
$$\prod_{i \in I} \{G_i : i \in I\}$$

où G_i est un ouvert de l'espace coordonné X_i , constituent une base d'une topologie sur l'ensemble produit X .

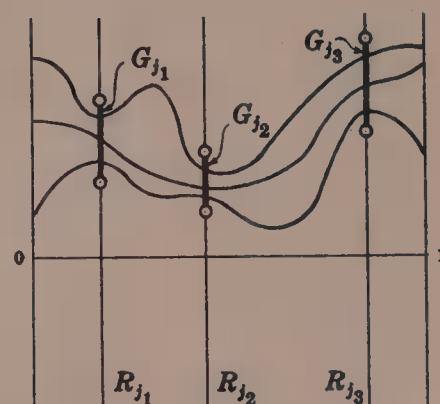
Remarque : La topologie sur l'ensemble produit $X = \prod_i X_i$ apparaissant dans la proposition 12.8 n'est pas toujours identique à la topologie produit sur X telle qu'elle a été définie dans ce chapitre. D'autre part, la proposition 12.2 montre que les deux topologies coïncident dans le cas de la topologie produit définie par un produit fini. Historiquement la topologie de la proposition 12.8 est apparue et a été étudiée en premier. On doit à Tychonoff, la définition de la topologie produit (de Tychonoff) et la démonstration grâce à elle d'un des théorèmes les plus importants et les plus utilisés de la topologie, le théorème de Tychonoff sur le produit de compacts. C'est à cause de ce théorème que la topologie produit est considérée comme la "bonne" topologie de l'ensemble produit.



Eléments de X



Eléments de $\pi_{j_0}^{-1}[G_{j_0}]$



Eléments de B

THEOREME DE TYCHONOFF SUR LE PRODUIT DE COMPACTS

Une propriété P d'un espace topologique est dite invariante par passage au produit si un espace produit $X = \prod_i X_i$ possède P chaque fois que les espaces coordonnées X_i possèdent P . Par exemple, la propriété P d'être un espace séparé est invariante par passage au produit puisque, en vertu de l'exemple 1.2, le produit d'espaces séparés est également un espace séparé. Le célèbre théorème de Tychonoff sur les produits d'espaces compacts affirme que la compacité est également une propriété invariante par passage au produit :

Théorème (de Tychonoff) 12.9 : Le produit d'espace compacts est compact.

La démonstration du théorème 12.9 donnée dans les problèmes résolus est fondée sur le lemme suivant de théorie des ensembles ; la démonstration de ce lemme nécessite le lemme de Zorn. Cela n'est pas trop surprenant du fait qu'on a pu montrer que le théorème de Tychonoff est en fait équivalent au lemme de Zorn.

Lemme 12.10 : Soit \mathcal{A} une famille de parties d'un ensemble X possédant la propriété de l'intersection finie. Considérons la classe P de toutes les familles contenant \mathcal{A} et qui possèdent la propriété de l'intersection finie. Alors P , ordonnée par inclusion, contient un élément maximal \mathcal{M} .

Rappelons (voir au chapitre 11) qu'une famille $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ possède la propriété de l'intersection finie si toute sous-famille finie de \mathcal{A} , par exemple $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_m}\}$, a une intersection non vide, c'est-à-dire $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \neq \emptyset$.

PRODUITS D'ESPACES METRIQUES

Soit $\{(X_i, d_i)\}$ une famille d'espaces métriques et soit X le produit des ensembles X_i , c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Puisque les espaces métriques (X_i, d_i) sont également des espaces topologiques, on peut parler de la topologie produit sur X . Par ailleurs, il est naturel de se demander s'il est possible ou non de définir une distance d sur l'ensemble produit X de telle sorte que la topologie sur X induite par la distance d soit identique à cette topologie produit. Les deux propositions suivantes donnent une réponse positive à cette question dans le cas d'une famille finie ou dénombrable d'espaces métriques. Les distances données sont en aucune manière uniques.

Proposition 12.11 : Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ des espaces métriques et soit $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ deux points arbitraires de l'ensemble produit $X = \prod_{i=1}^m X_i$. Alors chacune des applications définies par les formules suivantes est une distance sur l'ensemble produit X :

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \sqrt{d_1(a_1, b_1)^2 + \dots + d_m(a_m, b_m)^2} \\ d(p, q) &= \max \{d_1(a_1, b_1), \dots, d_m(a_m, b_m)\} \\ d(p, q) &= d_1(a_1, b_1) + \dots + d_m(a_m, b_m) \end{aligned}$$

En outre, la topologie sur X induite par chacune des distances ci-dessus est la topologie produit.

Proposition 12.12 : Soit $\{(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots\}$ une famille dénombrable d'espaces métriques et soient $p = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ et $q = \langle b_1, b_2, \dots \rangle$ deux points arbitraires de l'ensemble produit $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Alors l'application d définie par

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(a_n, b_n)}{1 + d_n(a_n, b_n)}$$

est une distance sur l'ensemble produit X et la topologie induite par d est la topologie produit.

ENSEMBLE DE CANTOR

Nous allons à présent construire un ensemble T de nombres réels, appelé l'*ensemble de Cantor*, qui a des propriétés remarquables. Divisons en trois l'intervalle unité fermé $I = [0, 1]$ aux points $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ et ensuite enlevons l'intervalle ouvert $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ appelé "le tiers du milieu". Désignons par T_1 les points restants de I , c'est-à-dire,

$$T_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

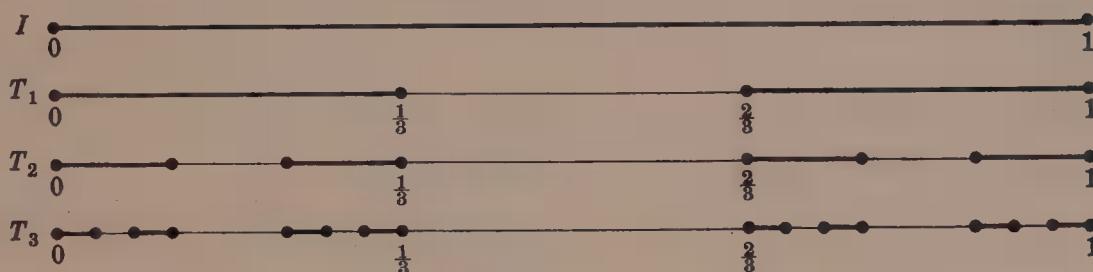
Nous allons à présent diviser en trois chacun des deux segments de T_1 en $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ et $\frac{7}{9}, \frac{8}{9}$ et ensuite enlever le "tiers du milieu" de chacun des deux segments, c'est-à-dire $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ et $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Désignons par T_2 les points restants de T_1 , c'est-à-dire,

$$T_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Si on continue ainsi nous obtenons une suite décroissante d'ensembles

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$$

où T_m est formé des points de T_{m-1} n'appartenant pas aux "tiers du milieu", comme on l'a représenté.



Remarquons que T_m est formé de 2^m intervalles fermés disjoints et, si on les numérote à la suite de gauche à droite, on peut parler des intervalles pairs ou impairs constituant T_m .

L'ensemble de Cantor T est égal à l'intersection de ces ensembles, c'est-à-dire $T = \cap \{T_i : i \in \mathbb{N}\}$.

PROPRIETES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

Nous allons définir une application f sur l'ensemble de Cantor T de la manière suivante :

$$f(x) = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$$

où

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ appartient à un intervalle impair de } T_m \\ 2 & \text{si } x \text{ appartient à un intervalle pair de } T_m \end{cases}$$

La suite précédente correspond précisément à un développement en base 3 de x , c'est-à-dire

$$x = a_1 \left(\frac{1}{3} \right) + a_2 \left(\frac{1}{9} \right) + a_3 \left(\frac{1}{27} \right) + \dots + a_m \left(\frac{1}{3^m} \right) + \dots$$

Considérons maintenant un espace discret à deux éléments, par exemple $A = \{0, 2\}$, et désignons par A_n un exemplaire de A indexé par $i \in \mathbb{N}$ ensemble des entiers positifs.

Proposition 12.13 : L'ensemble de Cantor T est homéomorphe à l'espace produit

$$X = \prod \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$$

En particulier l'application $f : T \rightarrow X$ définie ci-dessus est un homéomorphisme.

Remarque : L'ensemble de Cantor T possède les propriétés intéressantes suivantes :

- (1) T n'est pas dénombrable. Car T est équivalent à l'ensemble des suites $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ où $a_i = 0$ ou 2 , dont le cardinal est $2^{\aleph_0} = c$.
- (2) T est de "mesure" nulle. Car la mesure du complémentaire de T par rapport à $I = [0, 1]$, c'est-à-dire de la réunion des tiers du milieu, est égale à

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = 1$$

Mais la mesure de $I = [0, 1]$ est également 1 . Ainsi la mesure de T est nulle.

PROBLEMES RESOLUS

ESPACES PRODUITS

1. Considérons la topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$ sur $X = \{a, b, c\}$ et la topologie $\mathcal{T}^* = \{Y, \emptyset, \{u\}\}$ sur $Y = \{u, v\}$.
 - (i) Déterminer la sous-base \mathcal{S} de définition de la topologie produit sur $X \times Y$.
 - (ii) Déterminer la base \mathcal{B} de définition de la topologie produit sur $X \times Y$.

Solution :

Notons d'abord que $X \times Y = \{\langle a, u \rangle, \langle a, v \rangle, \langle b, u \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, u \rangle, \langle c, v \rangle\}$

est l'ensemble produit sur lequel la topologie produit est définie.

- (i) La sous-base de définition \mathcal{S} est la famille des images réciproques $\pi_x^{-1}[G]$ et $\pi_y^{-1}[H]$ où G est un ouvert de X et H est un ouvert de Y . Effectuant les calculs, on a

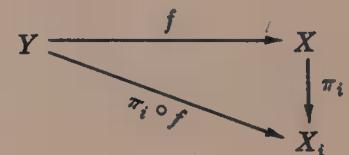
$$\begin{aligned} \pi_x^{-1}[X] &= \pi_y^{-1}[Y] = X \times Y \\ \pi_x^{-1}[\emptyset] &= \pi_y^{-1}[\emptyset] = \emptyset \\ \pi_x^{-1}[\{a\}] &= \{\langle a, u \rangle, \langle a, v \rangle\} \\ \pi_x^{-1}[\{b, c\}] &= \{\langle b, u \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, u \rangle, \langle c, v \rangle\} \\ \pi_y^{-1}[\{u\}] &= \{\langle a, u \rangle, \langle b, u \rangle, \langle c, u \rangle\} \end{aligned}$$

Ainsi la sous-base de définition \mathcal{S} est formée des parties de $X \times Y$ ci-dessus.

- (ii) La base de définition \mathcal{B} est constituée par les intersections finies des éléments de la sous-base de définition \mathcal{S} . C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{ &X \times Y, \emptyset, \{\langle a, u \rangle\}, \{\langle b, u \rangle, \langle c, u \rangle\}, \{\langle a, u \rangle, \langle a, v \rangle\}, \\ &\{\langle b, u \rangle, \langle b, v \rangle, \langle c, u \rangle, \langle c, v \rangle\}, \{\langle a, u \rangle, \langle b, u \rangle, \langle c, u \rangle\} \} \end{aligned}$$

2. Démontrer le théorème 12.5 : Une application $f : X \rightarrow Y$ d'un espace topologique Y dans un espace produit $X = \prod_i X_i$ est continue si et seulement si, pour toute projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$, la composée $\pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ est continue.



Solution :

D'après la définition de l'espace produit, les projections sont continues. Donc si f est continue, alors $\pi_i \circ f$, composée de deux applications continues, est également continue.

Réciproquement, supposons que chacune des applications composées $\pi_i \circ f : Y \rightarrow X_i$ soit continue. Soit G un ouvert de X_i . Alors, d'après la continuité de $\pi_i \circ f$,

$$(\pi_i \circ f)^{-1}[G] = f^{-1}[\pi_i^{-1}[G]]$$

est un ouvert de Y . Mais la famille des ensembles de la forme

$$\pi_i^{-1}[G], \text{ où } G \text{ est un ouvert de } X_i$$

est la sous-base de définition de la topologie produit sur X . Puisque leurs images réciproques par f sont des ouverts de Y , f est une application continue d'après le théorème 7.2.

3. Soit B un élément de la base de définition d'un espace produit $X = \prod_i X_i$. Montrer que la projection de B sur tout espace coordonné est un ouvert.

Solution :

Puisque B appartient à la base de définition de X ,

$$B = \prod \{X_i : i \neq j_1, \dots, j_m\} \times G_{j_1} \times \cdots \times G_{j_m}$$

où G_{j_k} est un ouvert de X_{j_k} . Donc, pour toute projection $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$,

$$\pi_\alpha(B) = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \alpha \neq j_1, \dots, j_m \\ G_\alpha & \text{si } \alpha \in \{j_1, \dots, j_m\} \end{cases}$$

Dans l'un ou l'autre cas $\pi_\alpha(B)$ est un ouvert.

4. Démontrer le théorème 12.6 : Toute projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$ sur un espace produit $X = \prod_i X_i$ est à la fois ouverte et continue, c'est-à-dire bicontinue.

Solution :

D'après la définition de l'espace produit, les projections sont continues. Ainsi il nous suffit de montrer qu'elles sont ouvertes.

Soit G un ouvert de l'espace produit $X = \prod_i X_i$. Pour tout point $p \in G$ il existe un élément B de la base de définition de la topologie produit tel que $p \in B \subset G$. Ainsi, pour toute projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$,

$$\pi_i(p) \in \pi_i[B] \subset \pi_i[G]$$

D'après le problème précédent, $\pi_i[B]$ est un ouvert. En d'autres termes, tout point $\pi_i(p)$ de $\pi_i[G]$ appartient à un ouvert $\pi_i[B]$ qui est contenu dans $\pi_i[G]$. Ainsi $\pi_i[G]$ est un ouvert.

5. Démontrer le théorème 12.7 : Une suite p_1, p_2, \dots de points d'un espace produit $X = \prod_i X_i$ converge vers le point $q \in X$ si et seulement si, pour toute projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$, la suite $\pi_i(p_1), \pi_i(p_2), \dots$ converge vers $\pi_i(q)$ dans l'espace coordonné X_i .

Solution :

Supposons que $p_n \rightarrow q$. Alors, puisque toutes les projections sont continues, $\pi_i(p_n) \rightarrow \pi_i(q)$.

Réiproquement, supposons que $\pi_i(p_n) \rightarrow \pi_i(q)$ pour toute projection π_i . Afin de démontrer que $p_n \rightarrow q$, il suffit de montrer que si B est un élément de la base de définition de l'espace produit $X = \prod_i X_i$ contenant le point $q \in X$, alors,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow p_n \in B$$

D'après la définition de la base de définition de l'espace produit $X = \prod_i X_i$,

$$B = \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}]$$

où G_{j_k} est un ouvert de l'espace coordonné X_{j_k} . Rappelons que $q \in B$; ainsi $\pi_{j_1}(q) \in \pi_{j_1}[B] = G_{j_1}, \dots, \pi_{j_m}(q) \in \pi_{j_m}[B] = G_{j_m}$. Par hypothèse, $\pi_{j_1}(p_n) \rightarrow \pi_{j_1}(q)$. Ainsi, pour chaque $i = 1, \dots, m$,

$$\exists n_i \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_i \Rightarrow \pi_{j_i}(p_n) \in G_{j_i} \Rightarrow p_n \in \pi_{j_i}^{-1}[G_{j_i}]$$

Soit $n_0 = \max(n_1, \dots, n_m)$. Alors

$$n > n_0 \Rightarrow p_n \in \pi_{j_1}^{-1}[G_{j_1}] \cap \cdots \cap \pi_{j_m}^{-1}[G_{j_m}] = B$$

Par conséquent, $p_n \rightarrow q$.

THEOREME DE TYCHONOFF

6. Démontrer le lemme 12.10 : Soit \mathcal{A} une famille de parties d'un ensemble X possédant la propriété de l'intersection finie. Considérons la classe \mathbf{P} des familles contenant \mathcal{A} et qui possèdent aussi la propriété de l'intersection finie. Alors \mathbf{P} , ordonnée par inclusion, contient un élément maximal \mathcal{M} .

Solution :

Soit $\mathbf{T} = \{\mathcal{B}_i\}$ une sous-famille totalement ordonnée de \mathbf{P} , et soit $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$. Nous allons montrer que \mathcal{B} appartient à \mathbf{P} , c'est-à-dire que \mathcal{B} est une famille de parties de X contenant \mathcal{A} et qui possède aussi la propriété de l'intersection finie. Il s'ensuivra alors que \mathcal{B} est un majorant de \mathbf{T} et donc, par le lemme de Zorn, que \mathbf{P} contient un élément maximal \mathcal{M} .

Il est clair que $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$ est une famille de parties contenant \mathcal{A} puisqu'il en est ainsi pour chaque \mathcal{B}_i . Pour montrer que \mathcal{B} possède la propriété de l'intersection finie, soit $\{A_1, \dots, A_m\}$ une sous-famille finie quelconque de \mathcal{B} . Or $\mathcal{B} = \cup_i \mathcal{B}_i$; d'où

$$\exists \mathcal{B}_{i_1}, \dots, \mathcal{B}_{i_m} \in \mathbf{T} \quad \text{tels que} \quad A_1 \in \mathcal{B}_{i_1}, \dots, A_m \in \mathcal{B}_{i_m}$$

Rappelons que \mathbf{T} est totalement ordonnée ; ainsi l'une des familles, par exemple $\mathcal{B}_{i_{j_0}}$, contient tous les ensembles A_i et, de plus, puisqu'elle possède la propriété de l'intersection finie,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$$

Nous venons de montrer que toute sous-famille finie $\{A_1, \dots, A_m\}$ de \mathcal{B} a une intersection non vide, c'est-à-dire que \mathcal{B} possède la propriété de l'intersection finie. Par conséquent, \mathcal{B} appartient à \mathbf{P} .

7. Démontrer que l'élément maximal \mathcal{M} du lemme 12.10 possède les propriétés suivantes :
- (i) Toute partie contenant un élément de \mathcal{M} appartient également à \mathcal{M} .
 - (ii) L'intersection d'un nombre fini d'éléments de \mathcal{M} appartient également à \mathcal{M} .
 - (iii) Si $A \cap M \neq \emptyset$ pour tout $M \in \mathcal{M}$, alors A appartient à \mathcal{M} .

Solution :

Nous allons seulement démontrer (ii) ici. Les démonstrations de (i) et (iii) sont laissées au lecteur comme problèmes supplémentaires.

- (ii) Nous allons démontrer que l'intersection de deux parties quelconques $A, B \in \mathcal{M}$ appartient également à \mathcal{M} . Le théorème s'ensuivra alors par récurrence. Soit $C = A \cap B$. Si nous montrons que $\mathcal{M} \cup \{C\}$ ■ la propriété d'intersection finie, alors $\mathcal{M} \cup \{C\}$ va appartenir à \mathbf{P} et, puisque \mathcal{M} est maximal dans \mathbf{P} , $\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{C\}$. Ainsi C appartiendra à \mathcal{M} , ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ une sous-famille finie de $\mathcal{M} \cup \{C\}$. Il y ■ deux cas à envisager :

Cas I. C n'appartient pas à $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{M} \cup \{C\}$. Alors $\{A_1, \dots, A_m\}$ est une sous-famille finie de \mathcal{M} seul. Or \mathcal{M} possède la propriété de l'intersection finie ; ainsi $A_1 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$.

Cas II. C appartient à $\{A_1, \dots, A_m\}$, par exemple $C = A_1$. Alors

$$A_1 \cap \dots \cap A_m = C \cap A_2 \cap \dots \cap A_m = A \cap B \cap A_2 \cap \dots \cap A_m \neq \emptyset$$

puisque $A, B, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}$.

Dans l'un ou l'autre cas, $\{A_1, \dots, A_m\}$ ■ une intersection non vide. Ainsi $\mathcal{M} \cup \{C\} \in \mathbf{P}$ et pour les raisons indiquées ci-dessus, $C \in \mathcal{M}$.

8. Démontrer le théorème (de Tychonoff) 12.9 : Soit $\{A_i : i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques compacts. Alors l'espace produit $X = \prod \{A_i : i \in I\}$ est également compact.

Solution :

Soit $\mathcal{A} = \{F_j\}$ une famille de fermés de X possédant la propriété de l'intersection finie. Le théorème est démontré si nous montrons que \mathcal{A} ■ une intersection non vide, c'est-à-dire,

$$\exists p \in X \quad \text{tel que} \quad p \in F_j \quad \text{pour tout} \quad F_j \in \mathcal{A}$$

Soit $\mathcal{M} = \{M_k : k \in K\}$ une famille maximale contenant \mathcal{A} et possédant la propriété de l'intersection finie (voir le lemme 12.10). Définissons $\overline{\mathcal{M}} = \{\overline{M}_k : k \in K\}$. Remarquons que

$$F_j \in \mathcal{A} \Rightarrow F_j = \bar{F}_j \quad \text{et} \quad F_j \in \mathcal{M} \Rightarrow F_j \in \overline{\mathcal{M}}$$

Ainsi, si nous démontrons que $\overline{\mathcal{M}}$ ■ une intersection non vide, alors \mathcal{A} aura également une intersection non vide. En d'autres termes, la démonstration est achevée si

$$\exists p \in X \quad \text{tel que} \quad p \in \overline{M}_k \quad \text{pour tout} \quad k \in K$$

ou, ce qui revient au même,

$$\exists p \in X \quad \text{tel que} \quad p \in B \Rightarrow B \cap M_k \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad k \in K \quad (1)$$

où B est un élément de la base de définition de la topologie produit sur $X = \prod_i A_i$, puisque alors p est un point d'accumulation de chacun des ensembles M_k et donc contenu dans \overline{M}_k .

Rappelons que $\mathcal{M} = \{M_k : k \in K\}$ ■ la propriété d'intersection finie ; ainsi pour chaque projection $\pi_i : X \rightarrow A_i$, la famille

$$\{\pi_i[M_k] : k \in K\}$$

de parties de l'espace coordonné A_i ■ aussi la propriété de l'intersection finie. Ainsi la famille des adhérences

$$\overline{\{\pi_i[M_k] : k \in K\}}$$

est une famille de fermés de A_i ayant la propriété de l'intersection finie. Par hypothèse, A_i est compact ; ainsi $\overline{\{\pi_i[M_k] : k \in K\}}$ a une intersection non vide, c'est-à-dire,

$$\exists a_i \in A_i \quad \text{tel que} \quad a_i \in \overline{\{\pi_i[M_k] : k \in K\}} \quad \text{pour tout} \quad k \in K$$

ou, de manière équivalente

$$\exists a_i \in A_i \quad \text{tel que} \quad a_i \in G_i \Rightarrow G_i \cap \pi_i[M_k] \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad k \in K \quad (2)$$

où G_i est un ouvert quelconque de l'espace coordonné A_i .

Définissons $p = \langle a_i : i \in I \rangle$. Nous voulons montrer que p vérifie la condition (1). On a $p \in B$ où B est un élément de la base de définition de la topologie produit sur $X = \prod_i A_i$, c'est-à-dire,

$$B = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \dots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$$

où G_{i_α} est un ouvert de A_{i_α} .

Remarquons que $p \in B$ implique que $\pi_{i_1}(p) = a_{i_1}$ appartient à $\pi_{i_1}[B] = G_{i_1}$. Ainsi, d'après (2) ci-dessus,

$$G_{i_1} \cap \pi_{i_1}[M_k] \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad k \in K$$

ce qui implique que

$$\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap M_k = (\prod_{i \neq i_1} \{A_i : i \neq i_1\} \times G_{i_1}) \cap M_k \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad M_k \in \mathcal{M}$$

D'après la propriété (iii) de \mathcal{M} , énoncée dans le problème précédent, $\pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}]$ appartient à \mathcal{M} . De manière analogue, $\pi_{i_2}^{-1}[G_{i_2}], \dots, \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}]$ appartient également à \mathcal{M} . Mais \mathcal{M} possède la propriété de l'intersection finie ; donc

$$B \cap M_k = \pi_{i_1}^{-1}[G_{i_1}] \cap \dots \cap \pi_{i_m}^{-1}[G_{i_m}] \cap M_k \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad k \in K$$

Ainsi (1) est vérifiée et le théorème est démontré.

ENSEMBLE DE CANTOR

9. Montrer que l'ensemble de Cantor est un fermé de \mathbf{R} .

Solution :

Rappelons que T_m est la réunion de 2^m intervalles fermés. Ainsi T_m , réunion de fermés en nombre fini, est également fermé. Or $T = \bigcap \{T_i : i \in \mathbf{N}\}$; ainsi T est fermé comme intersection de fermés.

10. Montrer que T est compact.

Solution :

Puisque T est un ensemble fermé borné de nombres réels, c'est un compact.

11. Soit $X = \prod \{A_i : i \in N\}$ où $A_i = \{0, 2\}$ muni de la topologie discrète. Montrer que X est compact.

Solution :

Remarquons que A_i est compact puisque fini. Donc, d'après le théorème de Tychonoff, $X = \prod_i A_i$ est également compact.

12. Soit $X = \prod \{A_i : i \in N\}$ où $A_i = \{0, 2\}$ muni de la topologie discrète.

- (i) Démontrer que l'application $f : X \rightarrow T$ définie par

$$f(\langle a_1, a_2, \dots \rangle) = a_1\left(\frac{1}{3}\right) + a_2\left(\frac{1}{9}\right) + a_3\left(\frac{1}{27}\right) + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(\frac{1}{3}\right)^i$$

est continue.

- (ii) Démontrer que X est homéomorphe à T .

Solution :

- (i) Soit $p = \langle a_1, a_2, \dots \rangle \in X$ et soit $\epsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un ouvert B de X contenant p tel que

$$x \in B \text{ implique } |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

Notons que $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i$ converge. Ainsi

$$\exists n_0 \in N \text{ tel que } \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i < \epsilon$$

Considérons le sous-ensemble

$$B = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \dots \times \{a_{n_0}\} \times A_{n_0+1} \times A_{n_0+2} \times \dots$$

de X . Remarquons que $p \in B$ et que B est un élément de la base de définition de la topologie produit sur $X = \prod_i A_i$ et donc est un ouvert. De plus,

$$x = \langle a_1, \dots, a_{n_0}, b_{n_0+1}, b_{n_0+2}, \dots \rangle \in B$$

implique

$$|f(x) - f(p)| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} (b_i - a_i)\left(\frac{1}{3}\right)^i \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i < \epsilon$$

Ainsi f est continue.

- (ii) L'application $f : X \rightarrow T$ est une application bijective de l'espace compact X dans l'espace métrique T . D'après le théorème 11.8, f est un homéomorphisme.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES PRODUITS

13. Montrer que la propriété d'être un espace T_1 est invariante par passage au produit, c'est-à-dire que le produit d'espaces T_1 est un espace T_1 .
14. Montrer que la propriété d'être un espace régulier est invariante par passage au produit.
15. Montrer que la propriété d'être un espace complètement régulier est invariante par passage au produit.
16. Démontrer que si $p = \langle a_i : i \in I \rangle$ est un point quelconque d'un espace produit $X = \prod \{X_i : i \in I\}$, alors pour tout $j_0 \in I$,

$$X_{j_0} \times \prod \{a_i : i \neq j_0\} \text{ est homéomorphe à } X_{j_0}$$

(Dans le cas particulier de l'espace euclidien de dimension 3, \mathbf{R}^3 , ce théorème permet d'affirmer que la droite, par exemple

$$Y = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \mathbf{R}_3 = \{(a_1, a_2, x) : x \in \mathbf{R}\}$$

passant par $p = (a_1, a_2, a_3)$, est homéomorphe à \mathbf{R} .) Voir la figure (a).

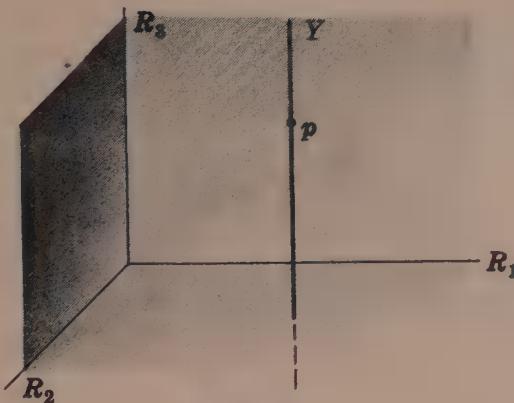


Fig. (a)

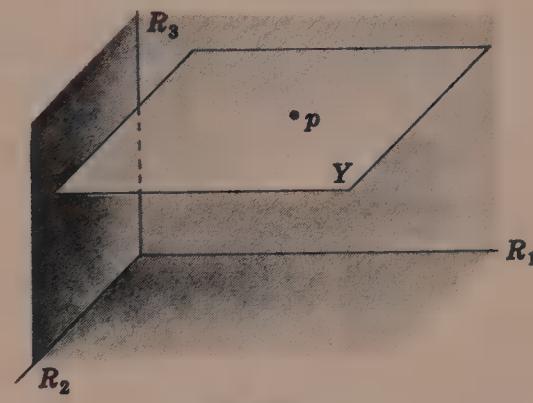


Fig. (b)

17. Démontrer que si $p = (a_i : i \in I)$ est un point quelconque d'un espace produit $X = \prod_i \{X_i : i \in I\}$, alors pour tout $j_0 \in I$,

$$\{a_{j_0}\} \times \prod_i \{X_i : i \neq j_0\} \text{ est homéomorphe à } \prod_i \{X_i : i \neq j_0\}$$

(Dans le cas particulier de \mathbf{R}^3 , espace euclidien de dimension 3, ce théorème permet d'affirmer que le plan, par exemple

$$Y = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \times \{a_3\} = \{(x, y, a_3) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

passant par $p = (a_1, a_2, a_3)$, est homéomorphe à $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.) Voir figure (b).

18. Démontrer la réciproque du théorème de Tychonoff, c'est-à-dire si un espace produit $X = \prod_i X_i$ est compact, alors chacun des espaces coordonnées X_i est également compact.

19. Soit A un sous-ensemble d'un espace produit $X = \prod_i \{X_i : i \in I\}$ et soit $\pi_{i_A} : A \rightarrow X_i$ la restriction de la projection $\pi_i : X \rightarrow X_i$ à A . Démontrer que la topologie induite sur A est la topologie la moins fine de celles pour lesquelles les applications π_{i_A} sont continues.

20. (i) Démontrer qu'un produit au plus dénombrable d'espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité vérifie également cet axiome.
(ii) Montrer qu'un produit arbitraire d'espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité ne vérifie pas nécessairement cet axiome.

21. Montrer qu'un espace produit $X = \prod_i X_i$ défini par un produit non dénombrable n'est pas métrisable (sauf si tous les espaces coordonnées sauf un ensemble au plus dénombrable d'entre eux sont des singulaires).

22. (i) Démontrer qu'un produit au plus dénombrable d'espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité vérifie également cet axiome.
(ii) Montrer qu'un produit arbitraire d'espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité ne vérifie pas nécessairement cet axiome.

23. Soit A_i un sous-ensemble arbitraire d'un espace topologique X_i ; ainsi $\prod_i A_i$ est un sous-ensemble de l'espace produit $X = \prod_i X_i$. Démontrer que (i) $\prod_i \bar{A}_i = \overline{\prod_i A_i}$, (ii) $\prod_i A_i^\circ \supset (\prod_i A_i)^\circ$. Donner un exemple montrant que dans (ii) l'égalité n'est pas vraie en général.

24. Soit A_i un sous-espace arbitraire de X_i . Montrer que la topologie produit sur $\prod_i A_i$ est égale à la topologie induite sur $\prod_i A_i$, comme sous-ensemble de $\prod_i X_i$, par la topologie de l'espace produit.

TOPOLOGIES ARBITRAIRES SUR DES ENSEMBLES PRODUITS

25. Démontrer la proposition 12.8 : Soit $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ une famille d'espaces topologiques et soit X le produit des ensembles X_i , c'est-à-dire $X = \prod_i X_i$. Alors les sous-ensembles de X de la forme $\prod_i G_i$, où G_i est un ouvert de l'espace coordonné X_i , constituent une base d'une topologie \mathcal{T} sur l'espace produit X .
26. Montrer que la topologie produit sur un ensemble produit $X = \prod_i X_i$ est moins fine que la topologie sur X définie au problème précédent (proposition 12.8).
27. Donner un exemple d'une topologie \mathcal{T} sur un ensemble produit $X = \prod_i X_i$ qui soit moins fine que la topologie produit sur X .
28. Soit \mathcal{T} la topologie sur un ensemble produit $X = \prod_i X_i$ définie au problème 25 (proposition 12.8). Montrer que (X, \mathcal{T}) est discrète si chacun des espaces coordonnées X_i est discret.

PRODUITS FINIS

29. Démontrer la proposition 12.2 : Les sous-ensembles d'un espace produit $X = X_1 \times \dots \times X_m$ de la forme $G_1 \times \dots \times G_m$, où G_i est un ouvert de X_i , constituent une base de la topologie produit sur X .
30. Démontrer que si \mathcal{B} est une base de X et si \mathcal{B}^* est une base de Y , alors $\{G \times H : G \in \mathcal{B}, H \in \mathcal{B}^*\}$ est une base de l'espace produit $X \times Y$.
31. Démontrer que si \mathcal{B}_a est une base locale en $a \in X$ et si \mathcal{B}_b est une base locale en $b \in Y$, alors $\{G \times H : G \in \mathcal{B}_a, H \in \mathcal{B}_b\}$ est une base locale en $p = \langle a, b \rangle \in X \times Y$.
32. Démontrer que le produit de deux espaces vérifiant le premier axiome de dénombrabilité est un espace du même type.
33. Démontrer que le produit de deux espaces vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité est un espace du même type.
34. Démontrer que le produit de deux espaces séparables est séparable.
35. Démontrer que le produit de deux espaces compacts est compact (sans utiliser le lemme de Zorn ou équivalents).
36. Soit \mathcal{B}^* la topologie du plan \mathbb{R}^2 engendrée par les rectangles semi-ouverts

$$[a, b) \times [c, d) = \{\langle x, y \rangle : a \leq x < b, c \leq y < d\}$$

En outre, soit \mathcal{T} la topologie de la droite réelle \mathbb{R} engendrée par les intervalles semi-ouverts $[a, b)$. Démontrer que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^*)$ est le produit de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ par elle-même.

37. Montrer sur un contre-exemple que le produit de deux espaces normaux n'est pas nécessairement normal.
38. Soit $A \subset X$ et $B \subset Y$ et donc $A \times B \subset X \times Y$. Démontrer que
- $$(i) \quad \bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B} \quad (ii) \quad A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$$
- (On rappelle – voir problème 23 – que l'égalité n'a pas lieu en général.)
39. Soit $f : X \rightarrow Y$ et $F : X \rightarrow X \times Y$ définie par $F(x) = \langle x, f(x) \rangle$. Démontrer que f est continue si et seulement si F est un homéomorphisme de X sur $F[X]$. (Rappelons que $F[X]$ est appelé le graphe de f .)
40. Soit X un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $f : X \times X \rightarrow X$ définie par $f(\langle p, q \rangle) = p + q$ est continue.

41. Soit X un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Montrer que l'application $f: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ définie par $f(k, p) = kp$ est continue.

ESPACES METRIQUES PRODUITS

42. Démontrer que tout sous-ensemble fermé borné de R^m , l'espace euclidien de dimension m , est compact.
43. Démontrer la proposition 12.11 : Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ des espaces métriques et soient $p = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ et $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$ des points arbitraires de l'ensemble produit $X = \prod_{i=1}^m X_i$. Alors chacune des applications suivantes définit une distance sur X :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad d(p, q) &= \sqrt{d_1(a_1, b_1)^2 + \dots + d_m(a_m, b_m)^2} \\ \text{(ii)} \quad d(p, q) &= \max \{d_1(a_1, b_1), \dots, d_m(a_m, b_m)\} \\ \text{(iii)} \quad d(p, q) &= d_1(a_1, b_1) + \dots + d_m(a_m, b_m) \end{aligned}$$

En outre, la topologie sur X induite par chacune des distances ci-dessus est la topologie produit.

44. Démontrer la proposition 12.12 : Soit $\{(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots\}$ une famille dénombrable d'espaces métriques et soient $p = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$ et $q = \langle b_1, b_2, \dots \rangle$ deux points arbitraires de l'ensemble produit $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Alors l'application d définie par

$$d(p, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(a_n, b_n)}{1 + d_n(a_n, b_n)}$$

est une distance sur X et la topologie induite par d est la topologie produit.

CHAPITRE 13

Connexité

ENSEMBLES SEPARES

Deux parties A et B d'un espace topologique X sont dites *séparées* si (i) A et B sont disjointes et (ii) aucune ne contient de point d'accumulation de l'autre. En d'autres termes A et B sont séparées si

$$A \cap \bar{B} = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{A} \cap B = \emptyset$$

Exemple 1.1 : Considérons les intervalles suivants de la droite réelle \mathbf{R} :

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 2) \quad \text{et} \quad C = [2, 3)$$

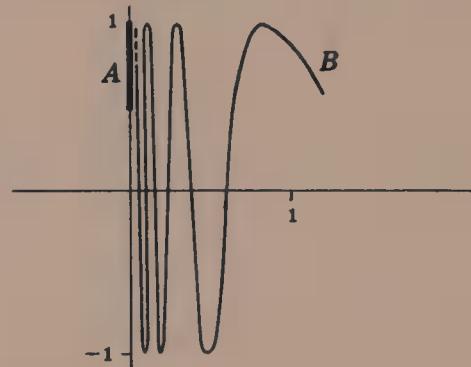
A présent A et B sont séparés puisque $\bar{A} = [0, 1]$ et $\bar{B} = [1, 2]$ donc $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap B$ sont vides. Par contre, B et C ne sont pas séparés puisque $2 \in C$ est un point limite de B ; ainsi

$$\bar{B} \cap C = [1, 2] \cap [2, 3) = \{2\} \neq \emptyset$$

Exemple 1.2 : Considérons les sous-ensembles suivants du plan \mathbf{R}^2 :

$$A = \{(0, y) : \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\}$$



A présent chaque point de A est un point d'accumulation de B ; ainsi A et B ne sont pas des ensembles séparés.

ENSEMBLES CONNEXES

DEFINITION : Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est *non connexe* s'il existe deux ouverts G et H de X tels que $A \cap G$ et $A \cap H$ soient des ensembles non vides et la réunion soit égale à A . Dans ce cas $G \cup H$ est appelé une "*décomposition*" de A . Un ensemble est *connexe* s'il n'est pas *non connexe*.

Remarquons que

$$A = (A \cap G) \cup (A \cap H) \quad \text{si} \quad A \subset G \cup H$$

et

$$\emptyset = (A \cap G) \cap (A \cap H) \quad \text{si} \quad G \cap H \subset A^c$$

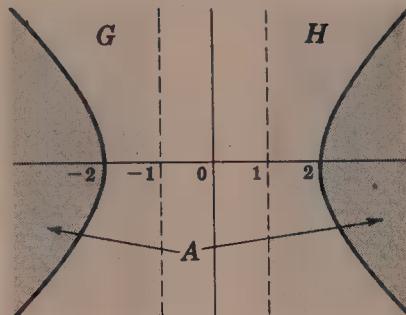
Donc $G \cup H$ est une "décomposition" de A si et seulement si

$$A \cap G \neq \emptyset, \quad A \cap H \neq \emptyset, \quad A \subset G \cup H, \quad \text{et} \quad G \cap H \subset A^c$$

Notons que l'ensemble vide \emptyset et le singleton $\{p\}$ sont toujours connexes.

Exemple 2.1 : Le sous-ensemble suivant du plan \mathbf{R}^2 est non connexe

$$A = \{(x, y) : x^2 - y^2 \geq 4\}$$



Car les deux demi-plans

$$G = \{(x, y) : x < -1\} \quad \text{et} \quad H = \{(x, y) : x > 1\}$$

constituent une "décomposition" de A comme on l'a montré sur le schéma ci-dessus.

Exemple 2.2 : Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{c\}\}$$

A présent $A = \{a, d, e\}$ n'est pas connexe. Car considérons $G = \{a, b, c\}$ et $H = \{c, d, e\}$; alors $A \cap G = \{a\}$ et $A \cap H = \{d, e\}$ sont deux ensembles disjoints non vides dont la réunion est égale à A . (Remarquons que G et H ne sont pas disjoints.)

La relation fondamentale existant entre la connexité et la séparation est la suivante :

Théorème 13.1 : Un ensemble est connexe si et seulement s'il n'est pas réunion de deux ensembles séparés non vides.

La proposition suivante est très utile.

Proposition 13.2 : Si A et B sont des ensembles connexes qui ne sont pas séparés, alors $A \cup B$ est connexe.

Exemple 2.3 : Soient A et B les parties du plan \mathbf{R}^2 définies et utilisées dans l'exemple 1.2. Nous montrerons plus loin que A et B sont chacune connexes. Or A et B ne sont pas séparées ; ainsi, d'après la proposition précédente, $A \cup B$ est un ensemble connexe.

ESPACES CONNEXES

La connexité, comme la compacité, est une propriété absolue d'un ensemble ; à savoir :

Théorème 13.3 : Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) . Alors A est connexe pour \mathcal{T} si et seulement si A est connexe pour la topologie induite \mathcal{T}_A sur A .

Par conséquent, nous pourrons souvent limiter notre étude de la connexité à ceux des espaces topologiques qui sont eux-mêmes connexes, c'est-à-dire aux *espaces connexes*

Exemple 3.1 : Soit X un espace topologique qui n'est pas connexe et soit $G \cup H$ une "décomposition" de X ; alors

$$X = (X \cap G) \cup (X \cap H) \quad \text{et} \quad (X \cap G) \cap (X \cap H) = \emptyset$$

Or $X \cap G = G$ et $X \cap H = H$, ainsi X est non connexe si et seulement si il existe deux ouverts disjoints G et H tels que

$$X = G \cup H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

En vertu de l'étude faite à l'exemple ci-dessus, on peut donner une caractérisation simple des espaces connexes.

Théorème 13.4 : Un espace topologique X est connexe si et seulement si (i) X n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides ; ou, de manière équivalente, (ii) X et \emptyset sont les seules parties de X qui soient à la fois ouvertes et fermées.

Exemple 3.2 : Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

A présent X n'est pas connexe ; car $\{a\}$ et $\{b, c, d, e\}$ sont complémentaires et donc à la fois ouverts et fermés. En d'autres termes,

$$X = \{a\} \cup \{b, c, d, e\}$$

est une décomposition de X . Remarquons que la topologie induite sur le sous-ensemble $A = \{b, d, e\}$ est $\{\emptyset, \{d\}\}$. Par conséquent A est connexe puisque \emptyset et $\{d\}$ sont les seuls sous-ensembles de A qui sont à la fois ouverts et fermés pour la topologie induite.

Exemple 3.3 : La droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie usuelle est un espace connexe puisque \mathbb{R} et \emptyset sont les seuls sous-ensembles de \mathbb{R} qui sont à la fois ouverts et fermés.

Exemple 3.4 : Soit f une application continue d'un espace connexe X dans un espace topologique Y . Ainsi $f : X \rightarrow f[X]$ est continue (où $f[X]$ est muni de la topologie induite).

Nous allons montrer que $f[X]$ est connexe. Supposons $f[X]$ non connexe ; supposons que G et H forment une décomposition de $f[X]$. Alors

$$f[X] = G \cup H \quad \text{et} \quad G \cap H = \emptyset$$

$$\text{et donc} \quad X = f^{-1}[G] \cup f^{-1}[H] \quad \text{et} \quad f^{-1}[G] \cap f^{-1}[H] = \emptyset$$

Puisque f est continue, $f^{-1}[G]$ et $f^{-1}[H]$ sont des ouverts de X et forment donc une décomposition de X , ce qui est impossible. Ainsi, si X est connexe, il en est de même de $f[X]$.

Nous allons énoncer le résultat de l'exemple précédent sous forme d'un théorème :

Théorème 13.5 : L'image d'un ensemble connexe par une application continue est connexe.

Exemple 3.5 : Soit X un espace non connexe ; supposons que $G \cup H$ soit une décomposition de X .

Alors l'application $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in G \\ 1 & \text{si } x \in H \end{cases}$ est une application continue de X dans l'espace discret $Y = \{0, 1\}$.

D'autre part, d'après le théorème 13.5, l'image par une application continue d'un espace connexe X ne peut être égale à l'espace non connexe discret $Y = \{0, 1\}$. En d'autre termes,

Lemme 13.6 : Un espace topologique X est connexe si et seulement si les seules applications continues de X dans $Y = \{0, 1\}$ sont les applications constantes $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

CONNEXITE SUR LA DROITE REELLE

Les ensembles connexes de nombres réels peuvent être simplement décrits de la manière suivante :

Théorème 13.7 : Un sous-ensemble E de la droite réelle \mathbb{R} contenant au moins deux points est connexe si et seulement si E est un intervalle.

On rappelle que les intervalles de la droite réelle \mathbf{R} sont de la forme suivante :

$(a, b), (a, b], [a, b), [a, b]$, pour les intervalles finis

$(-\infty, a), (-\infty, a], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty)$, pour les intervalles infinis

Un intervalle E peut être caractérisé par la propriété suivante :

$$a, b \in E, a < x < b \Rightarrow x \in E$$

Puisque l'image par une application continue d'un espace connexe est connexe nous obtenons la généralisation suivante du théorème de la valeur intermédiaire de Weierstrass (voir page 59 théorème 4.9) :

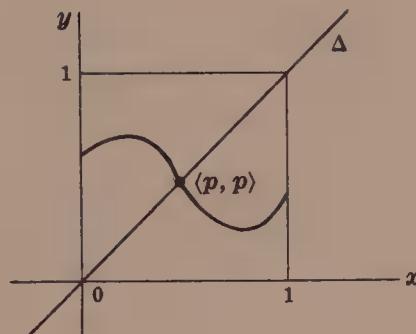
Théorème 13.8 : Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une application réelle continue définie sur un espace connexe X . Alors f admet comme valeur chaque nombre compris entre deux quelconques de ses valeurs.

Exemple 4.1 : Une application intéressante de la théorie de la connexité est constituée par le théorème "du point fixe" suivant. Soit $I = [0, 1]$ et soit $f : I \rightarrow I$ continue, alors $\exists p \in I$ tel que $f(p) = p$.

Ce théorème peut s'interpréter géométriquement. Notons d'abord que le graphe de $f : I \rightarrow I$ se trouve dans le carré unité

$$I^2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Le théorème affirme alors que le graphe de f , qui relie un point situé sur le bord gauche du carré à un point situé sur son bord droit, doit couper la diagonale Δ , par exemple, au point p , ainsi qu'on l'a représenté sur le schéma.



COMPOSANTES CONNEXES

Une *composante connexe* E d'un espace topologique X est un sous-ensemble connexe maximal de X , c'est-à-dire que E est connexe et que E n'est pas un sous-ensemble propre d'aucun connexe de X . Il est clair que E est non vide. Les faits les plus importants concernant les composantes connexes d'un espace sont contenus dans le théorème suivant.

Théorème 13.9 : Les composantes connexes d'un espace topologique X forment une partition de X , c'est-à-dire elles sont disjointes et leur réunion est X . Tout sous-ensemble connexe de X est contenu dans une composante connexe.

Ainsi chaque point $p \in X$ appartient à une composante connexe unique appelée la *composante connexe de p* .

Exemple 5.1 : Si X est connexe alors X n'a qu'une seule composante : X lui-même.

Exemple 5.2 : Considérons la topologie suivante sur $X = \{a, b, c, d, e\}$:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

Les composantes connexes de X sont $\{a\}$ et $\{b, c, d, e\}$. Toute autre partie connexe de X , comme $\{b, d, e\}$ (voir l'exemple 3.2), est incluse dans l'une des composantes connexes.

L'assertion de l'exemple 5.1 est utilisée pour montrer que la connexité est invariante par passage au produit ; c'est-à-dire que

Théorème 13.10 : Le produit d'espaces connexes est connexe.

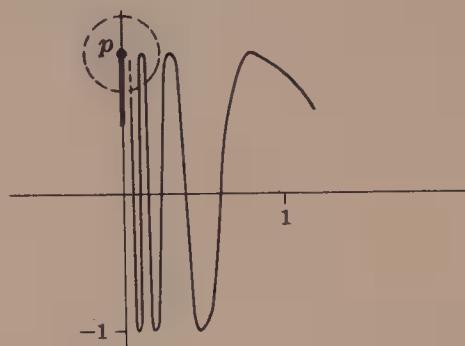
Corollaire 13.11 : L'espace euclidien de dimension m , \mathbf{R}^m est connexe.

ESPACES LOCALEMENT CONNEXES

Un espace topologique X est dit *localement connexe en $p \in X$* si tout ouvert contenant p contient un ouvert connexe contenant p , c'est-à-dire si les ouverts connexes contenant p forment une base locale en p . X est dit *localement connexe* s'il est localement connexe en chacun de ses points ou, de manière équivalente, si les ouverts connexes de X forment une base de X .

Exemple 6.1 : Tout espace discret X est localement connexe. En effet si $p \in X$ alors $\{p\}$ est un ouvert connexe contenant p qui est contenu dans tout ouvert contenant p . Notons que X n'est pas connexe si X contient plus d'un point.

Exemple 6.2 : Soient A et B les sous-ensembles du plan \mathbf{R}^2 de l'exemple 1.2. A présent $A \cup B$ est connexe. Mais $A \cup B$ n'est pas localement connexe en $p = (0, 1)$. Par exemple, le disque ouvert de centre p et de rayon $\frac{1}{4}$ ne contient aucun voisinage connexe de p .



CHEMINS

Soit $I = [0, 1]$ l'intervalle unité fermé. Un *chemin* allant d'un point a à un point b dans un espace topologique X est une application continue $f : I \rightarrow X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. Ici a s'appelle l'*origine* et b l'*extrémité* du chemin.

Exemple 7.1 : Pour tout $p \in X$ l'application constante $e_p : I \rightarrow X$ définie par $e_p(s) = p$ est continue et donc est un chemin. On l'appelle le *chemin constant en p* .

Exemple 7.2 : Soit $f : I \rightarrow X$ un chemin allant de a à b . Alors l'application $f : I \rightarrow X$ définie par $f(s) = f(1 - s)$ est un chemin allant de b à a .

Exemple 7.3 : Soit $f : I \rightarrow X$ un chemin allant de a à b et soit $g : I \rightarrow X$ un chemin allant de b à c . Alors la juxtaposition des deux chemins f et g notée $f \cdot g$ est l'application $f * g : I \rightarrow X$ définie par

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

laquelle est un chemin allant de a à c obtenue en suivant le chemin f de a à b et ensuite le chemin g de b à c .

ENSEMBLES CONNEXES PAR ARCS

Un sous-ensemble E d'un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour deux points quelconques $a, b \in E$ il existe un chemin $f : I \rightarrow X$ allant de a à b tout entier contenu dans E , c'est-à-dire, $f[I] \subset E$. Les sous-ensembles connexes par arcs maximaux de X , appelés *composantes connexes par arcs* constituent une partition de X . La relation existante entre la connexité et la connexité par arcs est donnée ci-dessous :

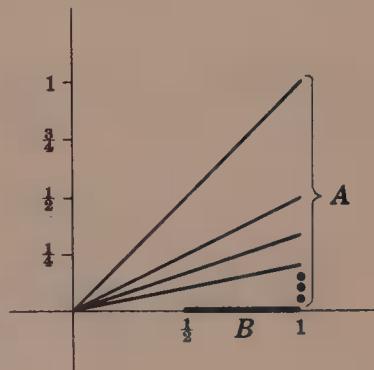
Théorème 13.12 : Les ensembles connexes par arcs sont connexes.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 8.1 : Considérons les sous-ensembles suivants du plan \mathbf{R}^2 :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = x/n, n \in \mathbf{N}\} \\ B &= \{(x, 0) : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$

Ici A est formé des points des segments joignant l'origine $(0, 0)$ aux points $(1, 1/n)$, $n \in \mathbf{N}$; et B est formé des points de l'axe Ox situés entre $\frac{1}{2}$ et 1. À présent A et B sont tous les deux connexes par arcs, et donc également connexes. En outre A et B ne sont pas séparés parce que chaque $p \in B$ est un point limite de A ; et donc $A \cup B$ est connexe. Mais $A \cup B$ n'est pas connexe par arcs ; d'ailleurs il n'existe aucun chemin allant d'un point quelconque de A à un point quelconque de B .



Exemple 8.2 : Soient A et B les sous-ensembles du plan \mathbf{R}^2 définis dans l'exemple 1.2. À présent A et B sont les images par des applications continues d'intervalles et sont donc connexes. En outre A et B ne sont pas des ensembles séparés et donc $A \cup B$ est connexe. Mais $A \cup B$ n'est pas connexe par arcs ; en effet, il n'existe aucun chemin d'un point de A à un point de B .

La topologie du plan \mathbf{R}^2 constitue une partie essentielle de la théorie des fonctions de la variable complexe. Dans cette théorie un *domaine* est défini comme étant un ouvert connexe du plan. Le théorème suivant y joue un rôle important.

Théorème 13.13. Un ouvert connexe du plan \mathbf{R}^2 est connexe par arcs.

CHEMINS HOMOTOPES

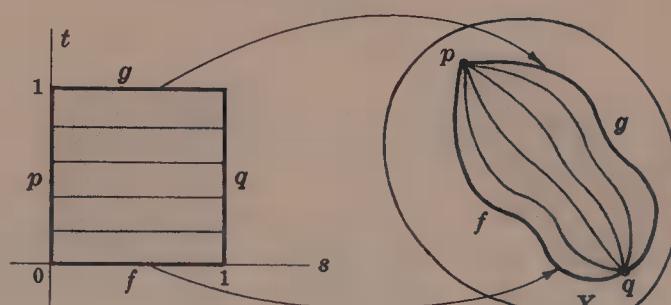
Soit $f : I \rightarrow X$ et $g : I \rightarrow X$ deux chemins de même point initial $p \in X$ et de même extrémité $q \in X$. Alors f est dit *homotope* à g , ce qui s'écrit $f \cong g$ s'il existe une application continue

$$H : I^2 \rightarrow X$$

telle que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) & H(0, t) &= p \\ H(s, 1) &= g(s) & H(1, t) &= q \end{aligned}$$

comme on l'a représenté sur le schéma ci-contre. On dit alors que le chemin f peut-être déformé continûment dans g . L'application H est appelée une *homotopie* de f sur g .



Exemple 9.1 : Soit X l'ensemble des points situés entre deux cercles concentriques (appelé *couronne*). Alors les chemins f et g du schéma de gauche ci-dessous sont homotopes tandis que les chemins f' et g' du schéma de droite ne sont pas homotopes.



Exemple 9.2 : Soit $f : I \rightarrow X$ un chemin quelconque, alors $f \simeq f$, c'est-à-dire f est homotope à lui-même. En effet l'application $H : I^2 \rightarrow X$ définie par

$$H(s, t) = f(s)$$

est une homotopie de f sur f .

Exemple 9.3 : Soit $f \simeq g$ et soit par exemple $H : I^2 \rightarrow X$ une homotopie de f sur g . Alors l'application $\hat{H} : I^2 \rightarrow X$, définie par

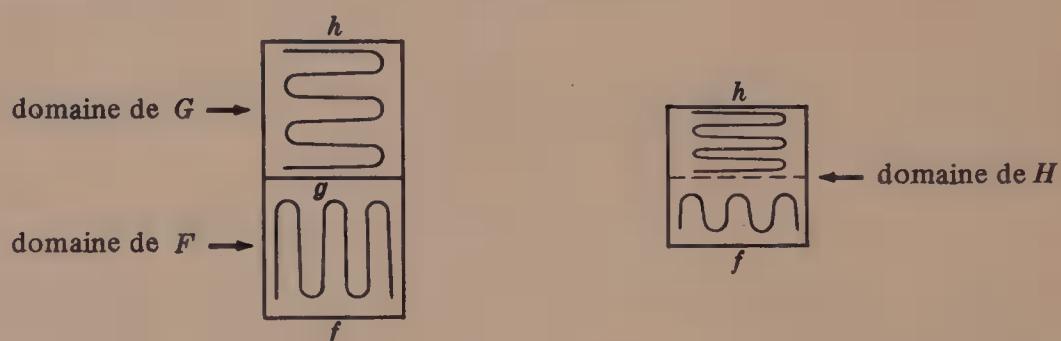
$$\hat{H}(s, t) = H(s, 1 - t)$$

est une homotopie de g sur f , et donc $g \simeq f$.

Exemple 9.4 : Soient $f \simeq g$ et $g \simeq h$; supposons par exemple que $F : I^2 \rightarrow X$ soit une homotopie de f sur g et que $G : I^2 \rightarrow X$ soit une homotopie de g sur h . L'application $H : I^2 \rightarrow X$ définie par

$$H(s, t) = \begin{cases} F(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie de f sur h et donc $f \simeq h$. L'homotopie H peut être interprétée géométriquement comme une compression des domaines de F et G en un seul carré.

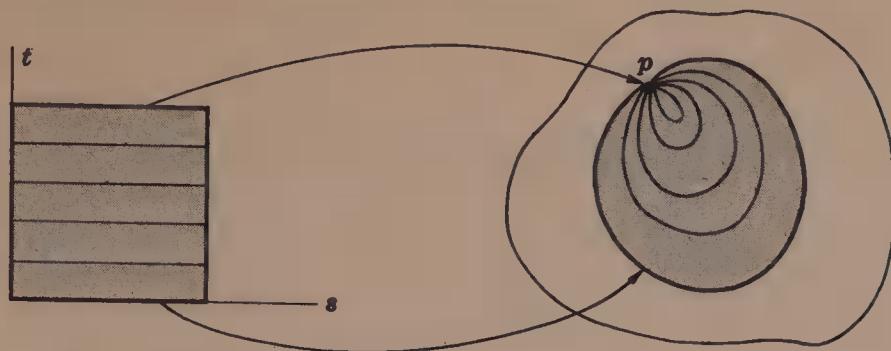


Les trois relations précédentes impliquent la proposition suivante :

Proposition 13.14 : La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins allant de a à b .

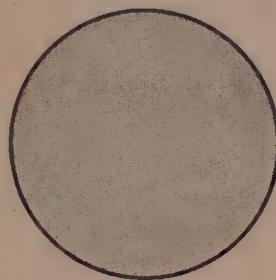
ESPACES SIMPLEMENT CONNEXES

Un chemin $f : I \rightarrow X$ dont l'origine coïncide avec l'extrémité, par exemple $f(0) = f(1) = p$, est appelé un *chemin fermé* en $p \in X$. En particulier le chemin constant $e_p : I \rightarrow X$ défini par $e_p(s) = p$ est un chemin fermé en p . Un chemin fermé $f : I \rightarrow X$ qu'on peut déformer continûment en un point est dit homotope à 0.

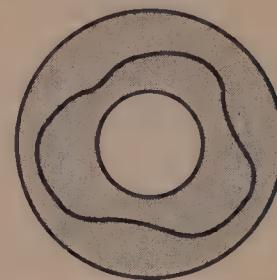


Un espace topologique est dit *simplement connexe* ssi tout chemin fermé de X est homotope à 0.

Exemple 10.1 : Un disque ouvert du plan \mathbb{R}^2 est simplement connexe tandis qu'une couronne n'est pas simplement connexe puisqu'il existe des courbes fermées, comme on en ■ représenté sur le schéma qu'on ne peut déformer continûment en un point.



simplement connexe



non simplement connexe

PROBLEMES RESOLUS

ENSEMBLES SEPARES

1. Montrer que si A et B sont deux ensembles séparés non vides, alors $A \cup B$ n'est pas connexe.

Solution :

Puisque A et B sont séparés, $A \cap \bar{B} = \emptyset$ et $\bar{A} \cap B = \emptyset$. Soit $G = \bar{B}^c$ et $H = \bar{A}^c$. Alors G et H sont ouverts et

$$(A \cup B) \cap G = A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap H = B$$

sont deux ensembles disjoints non vides dont la réunion est égale à $A \cup B$. Ainsi G et H constituent une décomposition de $A \cup B$ et donc $A \cup B$ est non connexe.

2. Soit $G \cup H$ une décomposition de A . Montrer que $A \cap G$ et $A \cap H$ sont des ensembles séparés.

Solution :

$A \cap G$ et $A \cap H$ sont disjoints ; ainsi il nous suffit de montrer qu'aucun des deux ne contient de point d'accumulation de l'autre. Soit p un point d'accumulation de $A \cap G$ et supposons que $p \in A \cap H$. Alors H est un ouvert contenant p et donc H contient un point de $A \cap G$ distinct de p , c'est-à-dire $(A \cap G) \cap H \neq \emptyset$. Or

$$(A \cap G) \cap (A \cap H) = \emptyset = (A \cap G) \cap H$$

Par conséquent $p \notin A \cap H$.

De même, si p est un point d'accumulation de $A \cap H$, alors $p \notin A \cap G$. Ainsi $A \cap G$ et $A \cap H$ sont deux ensembles séparés.

3. Démontrer le théorème 13.1 : Un ensemble A est connexe si et seulement si A n'est pas égal à la réunion de deux ensembles séparés non vides.

Solution :

Nous allons montrer, ce qui revient au même, que A est non connexe si et seulement si A est égal à la réunion de deux ensembles séparés non vides. Supposons que A soit non connexe et soit $G \cup H$ une décomposition de A . Alors A est réunion de deux ensembles non vides $A \cap G$ et $A \cap H$ qui sont, d'après le problème précédent, séparés. Réciproquement, si A est égal à la réunion de deux ensembles séparés non vides, alors A est non connexe d'après le problème 1.

ENSEMBLES CONNEXES

4. Soit $G \cup H$ une décomposition de A et soit B un sous-ensemble connexe de A . Montrer que soit $B \cap H = \emptyset$ soit $B \cap G = \emptyset$, et donc soit $B \subset G$ soit $B \subset H$.

Solution :

$B \subset A$, donc

$$A \subset G \cup H \Rightarrow B \subset G \cup H \quad \text{et} \quad G \cap H \subset A^c \Rightarrow G \cap H \subset B^c$$

Ainsi, si à la fois $B \cap G$ et $B \cap H$ sont non vides, alors $G \cup H$ est une décomposition de B . Mais B est connexe ; d'où la conclusion.

5. Démontrer la proposition 13.2 : Si A et B sont des ensembles connexes qui ne sont pas séparés, alors $A \cup B$ est connexe.

Solution :

Supposons $A \cup B$ non connexe et supposons que $G \cup H$ soit une décomposition de $A \cup B$. Puisque A est un sous-ensemble connexe de $A \cup B$, soit $A \subset G$ soit $A \subset H$ d'après le problème précédent. De même soit $B \subset G$ soit $B \subset H$.

A présent si $A \subset G$ et $B \subset H$ (ou si $B \subset G$ et $A \subset H$) alors, d'après le problème 2,

$$(A \cup B) \cap G = A \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap H = B$$

sont des ensembles séparés. Or ceci est contraire à l'hypothèse, d'où, soit $A \cup B \subset G$ soit $A \cup B \subset H$, et donc $G \cup H$ n'est pas une décomposition de $A \cup B$. En d'autres termes, $A \cup B$ est connexe.

6. Démontrer que si $\mathcal{A} = \{A_i\}$ est une famille de sous-ensembles connexes de X tels que deux éléments quelconques de \mathcal{A} ne soient pas séparés. Alors $B = \bigcup_i A_i$ est connexe.

Solution :

Supposons que B ne soit pas connexe et soit $G \cup H$ une décomposition de B . A présent chaque $A_i \in \mathcal{A}$ est connexe et donc (problème 4) est contenu soit dans G soit dans H et disjoint de l'autre ensemble G ou H . En outre, deux éléments quelconques $A_{i_1}, A_{i_2} \in \mathcal{A}$ ne sont pas séparés et donc, d'après la proposition 13.2, $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ est connexe ; alors $A_{i_1} \cup A_{i_2}$ est contenu dans G ou H et disjoint de l'autre. Par conséquent tous les éléments de \mathcal{A} , et donc $B = \bigcup_i A_i$, doit être contenu soit dans G soit dans H et disjoint de l'autre. Mais ceci contredit le fait que $G \cup H$ est une décomposition de B ; ainsi B est connexe.

7. Démontrer que si $\mathcal{A} = \{A_i\}$ est une famille de sous-ensembles connexes de X d'intersection non vide, alors $B = \bigcup_i A_i$ est connexe.

Solution :

Puisque $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, deux éléments quelconques de \mathcal{A} ne sont pas disjoints et donc ne sont pas séparés ; d'où, d'après le problème précédent, $B = \bigcup_i A_i$ est connexe.

8. Soit A un sous-ensemble connexe de X et soit $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe et donc en particulier que \overline{A} est connexe.

Solution :

Supposons B non connexe et supposons que $G \cup H$ soit une décomposition de B . A présent A est un sous-ensemble connexe de B et donc, d'après le problème 4, soit $A \cap H = \emptyset$ soit $A \cap G = \emptyset$; supposons par exemple que $A \cap H = \emptyset$. Alors H^c est un fermé contenant A et donc $A \subset B \subset \overline{A} \subset H^c$. Par conséquent, $B \cap H = \emptyset$. Mais ceci contredit le fait que $G \cup H$ est une décomposition de B ; ainsi B est connexe.

ESPACES CONNEXES

9. Soit X un espace topologique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- X est non connexe.
 - Il existe un sous-ensemble propre de X qui est à la fois ouvert et fermé.

Solution :

- \Rightarrow (ii) : Supposons que $X = G \cup H$ où G et H sont des ouverts non vides. Alors G est un sous-ensemble propre de X et puisque $G = H^c$, G est à la fois ouvert et fermé.
- (ii) \Rightarrow (i) : Supposons que A soit un sous-ensemble propre non vide de X qui soit à la fois ouvert et fermé. Alors A^c est également non vide et ouvert et $X = A \cup A^c$. Par conséquent X est non connexe.

10. Démontrer le théorème 13.3 : Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X, \mathcal{T}) et soit \mathcal{T}_A la topologie induite sur A . Alors A est connexe pour \mathcal{T} si et seulement si A est connexe pour \mathcal{T}_A .

Solution :

Supposons que A soit non connexe, $G \cup H$ étant une décomposition de A pour \mathcal{T} . A présent $G, H \in \mathcal{T}$ et donc $A \cap G, A \cap H \in \mathcal{T}_A$. Par conséquent, $A \cap G$ et $A \cap H$ forment une décomposition pour \mathcal{T}_A de A ; ainsi A est non connexe pour \mathcal{T}_A .

Réciproquement, supposons que A soit non connexe pour \mathcal{T}_A , soit par exemple G^* et H^* une décomposition de A pour \mathcal{T}_A . Alors $G^*, H^* \in \mathcal{T}_A$ et donc

$$\exists G, H \in \mathcal{T} \quad \text{tels que} \quad G^* = A \cap G \quad \text{et} \quad H^* = A \cap H$$

$$\text{Or} \quad A \cap G^* = A \cap A \cap G = A \cap G \quad \text{et} \quad A \cap H^* = A \cap A \cap H = A \cap H$$

Ainsi $G \cup H$ est une décomposition pour \mathcal{T} de A et donc A est non connexe pour \mathcal{T} .

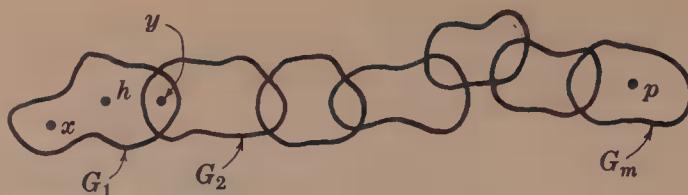
11. Soient $p, q \in X$. Les sous-ensembles A_1, \dots, A_m de X sont dits former une *chaîne simple (finie)* joignant p à q si A_1 (et A_1 seul) contient p , A_m (et A_m seul) contient q et si $A_i \cap A_j = \emptyset$ ssi $|i - j| > 1$.

Démontrer que si X est connexe et que si \mathcal{A} est un recouvrement ouvert de X , alors deux points quelconques de X peuvent être reliés par une chaîne simple formée d'éléments de \mathcal{A} .

Solution :

Soit p un point quelconque de X et soit H l'ensemble des points de X pouvant être reliés à p par une chaîne simple formée d'éléments de \mathcal{A} . A présent $H \neq \emptyset$ puisque $p \in H$. Nous affirmons que H est à la fois ouvert et fermé et donc que $H = X$ puisque X est connexe.

Soit $h \in H$. Alors $\exists G_1, \dots, G_m \in \mathcal{A}$ formant une chaîne simple reliant h à p . Mais si $x \in G_1 \setminus G_2$ alors G_1, \dots, G_m forment une chaîne simple reliant x à p ; et si $y \in G_1 \cap G_2$ alors G_2, \dots, G_m forment une chaîne simple reliant y à p , ainsi qu'on l'a représenté sur le schéma ci-dessous.



Ainsi \$G_1\$ est un sous-ensemble de \$H\$, c'est-à-dire \$h \in G_1 \subset H\$. Ainsi \$H\$ est voisinage de chacun de ses points et donc \$H\$ est ouvert.

A présent soit \$g \in H^c\$. Puisque \$\mathcal{A}\$ est un recouvrement de \$X\$, \$\exists G \in \mathcal{A}\$ tel que \$g \in G\$, et \$G\$ est ouvert. Si \$G \cap H \neq \emptyset\$, \$\exists h \in G \cap H \subset H\$ et donc \$\exists G_1, \dots, G_m \in \mathcal{A}\$ formant une chaîne simple reliant \$h\$ à \$p\$. Mais alors : soit \$G, G_k, \dots, G_m\$, où on considère le \$k\$ maximum pour lequel \$G\$ coupe \$G_k\$, soit \$G_1, \dots, G_m\$ forment une chaîne simple reliant \$g\$ à \$p\$ et donc \$g \in H\$ ce qui constitue une contradiction. Ainsi \$G \cap H = \emptyset\$ et donc \$g \in G \subset H^c\$. Ainsi \$H^c\$ est un ouvert et donc \$H^{cc} = H\$ est fermé.

12. Démontrer le théorème 13.7 : Soit \$E\$ un sous-ensemble de la droite réelle \$\mathbf{R}\$ contenant au moins deux points. Alors \$E\$ est connexe si et seulement si \$E\$ est un intervalle.

Solution :

Supposons que \$E\$ ne soit pas un intervalle ; alors

$$\exists a, b \in E, p \notin E \quad \text{tels que} \quad a < p < b$$

Posons \$G = (-\infty, p)\$ et \$H = (p, \infty)\$. Alors \$a \in G\$ et \$b \in H\$ et donc \$E \cap G\$ et \$E \cap H\$ sont deux ensembles disjoints non vides dont la réunion est égale à \$E\$. Ainsi \$E\$ est non connexe.

A présent supposons que \$E\$ soit un intervalle et en outre supposons que \$E\$ soit non connexe ; supposons que \$G\$ et \$H\$ forment une décomposition de \$E\$. Posons \$A = E \cap G\$ et \$B = E \cap H\$; alors \$E = A \cup B\$. A présent \$A\$ et \$B\$ sont non vides ; par exemple \$a \in A, b \in B, a < b\$ et \$p = \sup \{A \cap [a, b]\}\$. Puisque \$[a, b]\$ est un fermé, \$p \in [a, b]\$ et ainsi \$p \in E\$.

Supposons que \$p \in A = E \cap G\$. Alors \$p < b\$ et \$p \in G\$. Puisque \$G\$ est un ouvert

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad p + \delta \in G \quad \text{et} \quad p + \delta < b$$

Ainsi \$p + \delta \in E\$ et donc \$p + \delta \in A\$. Mais ceci est contradictoire avec la définition de \$p\$, c'est-à-dire \$p = \sup \{A \cap [a, b]\}\$. Donc \$p \notin A\$.

Par ailleurs supposons que \$p \in B = E \cap H\$. Alors en particulier \$p \in H\$. Puisque \$H\$ est un ouvert,

$$\exists \delta^* > 0 \quad \text{tel que} \quad [p - \delta^*, p] \subset H \quad \text{et} \quad a < p - \delta^*$$

Ainsi \$[p - \delta^*, p] \subset E\$ et donc \$[p - \delta^*, p] \subset B\$. Par conséquent \$[p - \delta^*, p] \cap A = \emptyset\$. Mais alors \$p - \delta^*\$ est un majorant de \$A \cap [a, b]\$, ce qui est impossible puisque \$p = \sup \{A \cap [a, b]\}\$. Ainsi \$p \notin B\$. Mais ceci est contradictoire avec le fait que \$p \in E\$ et donc \$E\$ est connexe.

13. Démontrer (voir l'exemple 4.1) que si \$I = [0, 1]\$ et si \$f : I \rightarrow I\$ est continue, alors \$\exists p \in I\$ tel que \$f(p) = p\$.

Solution :

Si \$f(0) = 0\$ ou \$f(1) = 1\$ le théorème est démontré ; ainsi on peut admettre que \$f(0) > 0\$ et que \$f(1) < 1\$. Puisque \$f\$ est continue le graphe de l'application \$f\$:

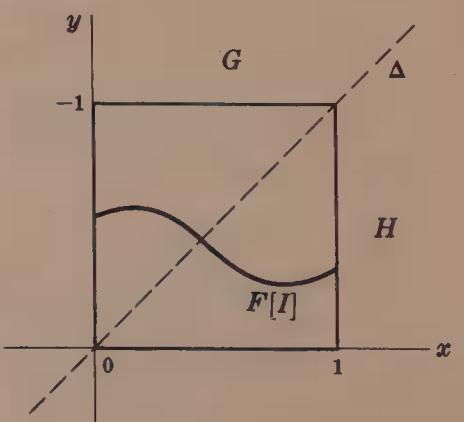
$$F : I \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{défini par} \quad F(x) = (x, f(x))$$

est également continu.

Posons \$G = \{(x, y) : x < y\}\$, \$H = \{(x, y) : y < x\}\$; alors \$(0, f(0)) \in G\$, \$(1, f(1)) \in H\$. Ainsi si \$F[I]\$ ne contient pas de point de la diagonale

$$\Delta = \{(x, y) : x = y\} = \mathbf{R}^2 \setminus (G \cup H)$$

alors \$G \cup H\$ est une décomposition de \$F[I]\$. Mais ceci est contradictoire avec le fait que \$F[I]\$, image par une application continue d'un ensemble connexe, est connexe ; ainsi \$F[I]\$ contient un point \$(p, p) \in \Delta\$ et donc \$f(p) = p\$.



COMPOSANTES CONNEXES

14. Montrer qu'une composante connexe quelconque E est fermée.

Solution :

E est connexe et donc, d'après le problème 6, \bar{E} est connexe, $E \subset \bar{E}$. Or E étant une composante annexe, est un ensemble connexe maximal ; ainsi $E = \bar{E}$ et donc E est fermé.

15. Démontrer que si $p \in X$, si $\mathcal{A}_p = \{A_i\}$ est la famille des sous-ensembles connexes de X contenant p , et, en outre si $C_p = \bigcup_i A_i$, alors (i) C_p est connexe. (ii) Si B est un sous-ensemble connexe de X contenant p , alors $B \subset C_p$. (iii) C_p est un sous-ensemble connexe de X , c'est-à-dire une composante connexe.

Solution :

- (i) Puisque chaque $A_i \in \mathcal{A}_p$ contient p , $p \in \bigcap_i A_i$ et donc, d'après le problème 7, $C_p = \bigcup_i A_i$ est connexe.
- (ii) Si B est un sous-ensemble connexe de X contenant p , alors $B \in \mathcal{A}_p$ et donc $B \subset C_p = \bigcup \{A_i : A_i \in \mathcal{A}_p\}$.
- (iii) Soit $C_p \subset D$, où D est connexe. Alors $p \in D$ et donc, d'après (ii), $D \subset C_p$, c'est-à-dire $C_p = D$. Donc C_p est une composante connexe.

16. Démontrer le théorème 13.9 : Les composantes connexes de X formant une partition de X . Tout sous-ensemble connexe de X est contenu dans une composante connexe.

Solution :

Considérons la famille $\mathcal{C} = \{C_p : p \in X\}$ où C_p est défini comme dans le problème précédent. Nous affirmons que \mathcal{C} est formée des composantes connexes de X . D'après le problème précédent, chaque $C_p \in \mathcal{C}$ est une composante connexe. Réciproquement, si D est une composante connexe, alors D contient un point $p_0 \in D$ et donc $D \subset C_{p_0}$. Or D est une composante connexe ; ainsi $D = C_{p_0}$.

Nous allons à présent montrer que \mathcal{C} est une partition de X . Il est clair que $X = \bigcup \{C_p : p \in X\}$; Ainsi nous n'avons plus qu'à montrer que des composantes connexes distinctes sont disjointes, ou, ce qui revient au même, si $C_p \cap C_q \neq \emptyset$, alors $C_p = C_q$. Soit $a \in C_p \cap C_q$. Alors $C_p \subset C_a$ et $C_q \subset C_a$ puisque C_p et C_q sont des ensembles connexes contenant a . Mais C_p et C_q sont des composantes connexes, d'où $C_p = C_q = C_a$.

Enfin si E est un sous-ensemble connexe non vide de X , alors E contient un point $p_0 \in E$ et donc $E \subset C_{p_0}$ d'après le problème précédent. Si $E = \emptyset$, alors E est contenu dans toutes les composantes connexes.

17. Démontrer que si X et Y sont des espaces connexes, alors $X \times Y$ est connexe. Ainsi un produit fini d'espaces connexes est connexe.

Solution :

Soit $p = \langle x_1, y_1 \rangle$ et $q = \langle x_2, y_2 \rangle$ deux points quelconques de $X \times Y$. A présent $\{x_1\} \times Y$ est homéomorphe à Y et est donc connexe. De même $X \times \{y_2\}$ est connexe.

Or $\{x_1\} \times Y \cap X \times \{y_2\} = \{\langle x_1, y_2 \rangle\}$; d'où $\{x_1\} \times Y \cup X \times \{y_2\}$ est connexe. Par conséquent, p et q appartiennent à la même composante connexe. Or p et q ont été pris arbitraires ; ainsi $X \times Y$ n'a qu'une seule composante connexe et est donc connexe.

18. Démontrer le théorème 13.10 : le produit d'espaces connexes est connexe, c'est-à-dire la connexité est une propriété invariante par passage au produit.

Solution :

Soit $\{X_i : i \in I\}$ une famille d'espaces connexes et soit $X = \prod_i X_i$ l'espace produit. En outre soit $p = \langle a_i : i \in I \rangle \in X$ et soit $E \subset X$ la composante connexe de p . Nous affirmons que tout point $x = \langle x_i : i \in I \rangle \in X$ appartient à l'adhérence de E et donc appartient à E puisque E est fermée. A présent soit

$$G = \prod \{X_i : i \neq i_1, \dots, i_m\} \times G_{i_1} \times \dots \times G_{i_m}$$

un ouvert de base quelconque contenant $x \in X$. A présent

$$H = \prod \{\{a_i\} : i \neq i_1, \dots, i_m\} \times X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m}$$

est isomorphe à $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_m}$ et donc connexe. En outre $p \in H$ et donc H est un sous-ensemble de E , composante connexe de p . Or $G \cap H$ est non vide ; donc G contient un point de E . Par conséquent, $x \in \bar{E} = E$. Ainsi X n'a qu'une seule composante connexe et est donc connexe.

ENSEMBLES CONNEXES PAR ARCS

19. Soit $f: I \rightarrow X$ un chemin quelconque dans X . Montrer que $f[I]$, l'image de f , est connexe.

Solution :

$I = [0, 1]$ est connexe et f est continue ; ainsi, d'après le théorème 13.5, $f[I]$ est connexe.

20. Démontrer que l'image par une application continue d'un ensemble connexe par arcs est connexe par arcs.

Solution :

Soit $E \subset X$ un ensemble connexe par arcs et soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Nous affirmons que $f[E]$ est connexe par arcs. En effet, soient $p, q \in f[E]$. Alors $\exists p^*, q^* \in E$ tels que $f(p^*) = p$ et $f(q^*) = q$. Mais E est connexe par arcs donc

$$\exists \text{ un chemin } g: I \rightarrow X \quad \text{tel que} \quad g(0) = p^*, \quad g(1) = q^* \quad \text{et} \quad g[I] \subset E$$

A présent la composée d'applications continues est continue et donc $f \circ g: I \rightarrow Y$ est continue. En outre

$$f \circ g(0) = f(p^*) = p, \quad f \circ g(1) = f(q^*) = q \quad \text{et} \quad f \circ g[I] = f[g[I]] \subset f[E]$$

Ainsi $f[E]$ est connexe par arcs.

21. Démontrer le théorème 13.12 : Tout ensemble A connexe par arcs est connexe.

Solution :

Si A est vide, alors A est connexe. Supposons A non vide et $p \in A$. A présent A est connexe par arcs et donc pour chaque $a \in A$ il existe un chemin $f_a: I \rightarrow A$ allant de p à a . En outre

$$a \in f_a[I] \subset A \quad \text{et donc} \quad A = \bigcup \{f_a[I] : a \in A\}$$

Or $p \in f_a[I]$ pour tout $a \in A$; donc $\bigcap \{f_a[I] : a \in A\}$ est non vide. De plus chaque $f_a[I]$ est connexe et donc, d'après le problème 7, A est connexe.

22. Démontrer que si \mathcal{A} est une famille de sous-ensembles connexes par arcs de X d'intersection non vide, alors $B = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ est connexe par arcs.

Solution :

Soient $a, b \in B$. Alors

$$\exists A_a, A_b \in \mathcal{A} \quad \text{tels que} \quad a \in A_a, \quad b \in A_b$$

A présent \mathcal{A} est d'intersection non vide ; par exemple $p \in \bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\}$. Alors $p \in A_a$ et, puisque A_a est connexe par arcs, il existe un chemin $f: I \rightarrow A_a \subset B$ allant de a à p . De même, il existe un chemin $g: I \rightarrow A_b \subset B$ allant de p à b . La juxtaposition des deux chemins (voir l'exemple 7.3) est un chemin allant de a à b contenu dans B . Ainsi B est connexe par arcs.

23. Montrer qu'un disque ouvert D du plan \mathbb{R}^2 est connexe par arcs.

Solution :

Soient $p = \langle a_1, b_1 \rangle, q = \langle a_2, b_2 \rangle \in D$. L'application $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = \langle a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1) \rangle$$

est un chemin allant de p à q qui est contenu dans D . (Géométriquement, $f[I]$ est le segment de droite reliant p et q .) Ainsi D est connexe par arcs.

24. Démontrer le théorème 13.13 : Soit E un ouvert connexe non vide du plan \mathbb{R}^2 , alors E est connexe par arcs.

Solution :

Méthode 1.

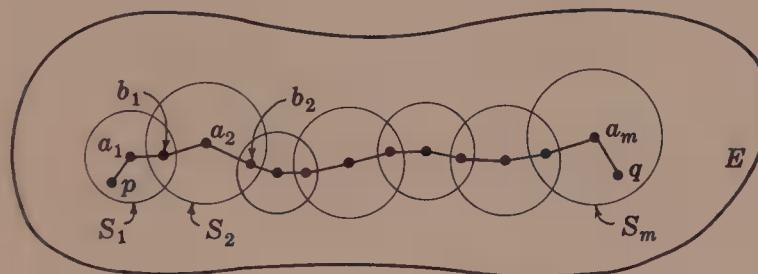
Soit $p \in E$ et soit G l'ensemble des points de E pouvant être reliés à p par un chemin tout entier contenu dans E . Nous affirmons que G est ouvert. En effet soit $q \in G \subset E$. A présent E est ouvert et donc \exists un disque ouvert D de centre q tel que $q \in D \subset E$. Or D est connexe par arcs ; ainsi chaque point $x \in D$ peut être relié à q qui peut lui-même être relié à p . Ainsi chaque point $x \in D$ peut être relié à p et, donc, $q \in D \subset G$. Par conséquent G est ouvert.

A présent, posons $H = E \setminus G$, c'est-à-dire H est formé des points de E ne pouvant être reliés à p par un chemin tout entier contenu dans E . Nous affirmons que H est ouvert. En effet soit $q^* \in H \subset E$. Puisque E est ouvert \exists un disque ouvert D^* de centre q^* tel que $q^* \in D^* \subset E$. Puisque D^* est connexe par arcs, chaque $x \in D^*$ ne peut être relié à p par un chemin tout entier contenu dans E et, donc, $q^* \in D^* \subset H$. Ainsi H est ouvert.

Or E est connexe et donc E ne peut être la réunion de deux ouverts disjoints non vides. Ainsi $H = \emptyset$, et donc $E = G$ est connexe par arcs.

Méthode 2.

Puisque E est ouvert, E est réunion de disques ouverts. Or E est connexe ; ainsi d'après le théorème 11, \exists des disques ouverts $S_1, \dots, S_m \subset E$ formant une chaîne simple reliant tout $p \in E$ à tout $q \in E$. Soit a_i le centre de S_i et soit $b_i \in S_i \cap S_{i+1}$. Alors la ligne polygonale reliant p à a_1 , a_1 à b_1 , b_1 à a_2 , etc., est contenue dans la réunion des disques et donc dans E . Ainsi E est connexe par arcs.



ESPACES TOTALEMENT DISCONTINUS

25. Un espace topologique X est dit *totalement discontinu* si pour deux points $p, q \in X$ quelconques, il existe une décomposition $G \cup H$ de X avec $p \in G$ et $q \in H$. Montrer que la droite réelle \mathbb{R} munie de la topologie \mathcal{T} engendrée par les intervalles semi-ouverts $(a, b]$ est totalement discontinu.

Solution :

Soient $p, q \in \mathbb{R}$; supposons par exemple que $p < q$. Alors $G = (-\infty, p]$ et $H = (p, \infty)$ sont deux ouverts disjoints dont la réunion est \mathbb{R} , c'est-à-dire $G \cup H$ est une décomposition de \mathbb{R} . Or $p \in G$ et $q \in H$; ainsi $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ est totalement discontinu.

26. Montrer que l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels muni de la topologie usuelle induite est totalement discontinu.

Solution :

Soient $p, q \in \mathbb{Q}$; supposons par exemple que $p < q$. A présent il existe un irrationnel a tel que $p < a < q$.

Posons $G = \{x \in Q : x < a\}$ et $H = \{x \in Q : x > a\}$. Alors $G \cup H$ est une décomposition de Q , $p \in G$ et $q \in H$. Ainsi Q est totalement discontinu.

27. Démontrer que les composantes connexes d'un espace totalement discontinu X sont des singletons.

Solution :

Soit E une composante connexe de X et supposons que $p, q \in E$ avec $p \neq q$. Puisque X est totalement discontinu, il existe une décomposition $G \cup H$ de X telle que $p \in G$ et $q \in H$. Par conséquent, $E \cap G$ et $E \cap H$ sont non vides et donc $G \cup H$ est une décomposition de E . Mais cela est contradictoire avec le fait que E est une composante connexe et donc connexe. Ainsi E n'est formé que d'un point.

ESPACES LOCALEMENT CONNEXES

28. Démontrer que si E est une composante connexe d'un espace localement connexe X , alors E est un ouvert.

Solution :

Soit $p \in E$. Puisque X est localement connexe, p appartient à au moins un ouvert connexe G_p . Mais E est la composante connexe de p ; ainsi

$$p \in G_p \subset E \quad \text{et donc} \quad E = \bigcup \{G_p : p \in E\}$$

Donc E est un ouvert comme réunion d'ouverts.

29. Démontrer que si X et Y sont localement connexes, alors $X \times Y$ est localement connexe.

Solution :

X est localement connexe ssi X possède une base \mathcal{B} formée d'ensembles connexes. De même Y possède une base \mathcal{B}^* formée également d'ensembles connexes. Or $X \times Y$ est un produit fini ; ainsi

$$\{G \times H : G \in \mathcal{B}, H \in \mathcal{B}^*\}$$

est une base de l'espace produit $X \times Y$. A présent chaque $G \times H$ est connexe puisque G et H sont connexes. En d'autres termes, $X \times Y$ possède une base formée d'ensembles connexes et donc $X \times Y$ est localement connexe.

30. Démontrer que si $\{X_i\}$ est une famille d'espaces localement connexes, alors l'espace produit $X = \prod_i X_i$ est localement connexe.

Solution :

Soit G un ouvert de X contenant $p = (a_i : i \in I) \in X$. Alors il existe un élément de la base de définition

$$B = G_{i_1} \times \cdots \times G_{i_m} \times \prod \{X_i : i \neq i_1, \dots, i_m\}$$

tel que $p \in B \subset G$ et donc $a_{i_k} \in G_{i_k}$. A présent chaque espace coordonné est localement connexe et donc il existe des ouverts connexes $H_{i_k} \subset X_{i_k}$ tels que

$$a_{i_1} \in H_{i_1} \subset G_{i_1}, \dots, a_{i_m} \in H_{i_m} \subset G_{i_m}$$

Posons

$$H = H_{i_1} \times \cdots \times H_{i_m} \times \prod \{X_i : i \neq i_1, \dots, i_m\}$$

Puisque chaque X_i est connexe et que chaque H_{i_k} est connexe, H est également connexe. De plus H est ouvert et $p \in H \subset B \subset G$. Par conséquent, X est localement connexe.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ENSEMBLES CONNEXES

31. Montrer que si (X, \mathcal{T}) est connexe et si $\mathcal{T}^* \lesssim \mathcal{T}$, alors (X, \mathcal{T}^*) est connexe.
32. Montrer que si (X, \mathcal{T}) est non connexe et si $\mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}^*$, alors (X, \mathcal{T}^*) est non connexe.
33. Montrer que tout espace topologique muni de la topologie grossière est connexe.
34. Montrer sur un contre-exemple que la connexité n'est pas une propriété héréditaire.
35. Démontrer que si A_1, A_2, \dots est une suite d'ensembles connexes tels que A_1 et A_2 ne soient pas séparés, que A_2 et A_3 ne soient pas séparés etc., alors $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ est connexe.
36. Démontrer que si E est un sous-ensemble connexe d'un espace T_1 contenant plus d'un élément, alors E est infini.
37. Démontrer qu'un espace topologique X est connexe si et seulement si tout sous-ensemble propre non vide de X a une frontière non vide.

COMPOSANTES CONNEXES

38. Déterminer quelles sont les composantes connexes d'un espace discret.
39. Déterminer quelles sont les composantes connexes d'un espace cofini.
40. Montrer que deux composantes connexes quelconques sont séparées.
41. Démontrer que si X ■ un nombre fini de composantes connexes alors chaque composante connexe est à la fois ouverte et fermée.
42. Démontrer que si E est un sous-ensemble connexe non vide de X qui est à la fois ouvert et fermé, alors E est une composante connexe.
43. Démontrer que si E est une composante connexe de Y et si $f : X \rightarrow Y$ est continue, alors $f^{-1}[E]$ est une réunion de composantes connexes de X .
44. Démontrer que si X est un espace compact et si les composantes connexes de X sont ouvertes, alors il n'y en ■ qu'un nombre fini.

ENSEMBLES CONNEXES PAR ARCS

45. Montrer qu'un espace muni de la topologie grossière est connexe par arcs.
46. Démontrer que les composantes connexes par arcs forment une partition de X .
47. Démontrer que toute composante connexe de X peut se décomposer en composantes connexes par arcs, celles-ci formant alors une partition de cette composante connexe.

PROBLEMES DIVERS

48. Montrer qu'un espace muni de la topologie grossière est simplement connexe..
49. Montrer qu'un espace totalement discontinu est séparé.

50. Démontrer que si G est un ouvert d'un espace localement connexe X , alors G est localement connexe.
51. Soit $A = \{a, b\}$ muni de la topologie discrète et soit $I = [0, 1]$. Montrer que l'espace produit $X = \prod \{A_i : A_i = A, i \in I\}$ n'est pas localement connexe. Donc que la locale connexité n'est pas invariante par passage au produit.
52. Montrer que la propriété d'être "simplement connexe" est une propriété topologique.
53. Démontrer que si X est localement connexe, alors X est connexe si et seulement si il existe une chaîne simple d'ensembles connexes reliant deux points quelconques de X .

CHAPITRE 14

Espaces métriques complets

SUITES DE CAUCHY

Soit X un espace métrique. Une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de X est une *suite de Cauchy* ssi pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Ainsi, dans le cas où X est un espace normé, $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy ssi pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m > n_0 \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \epsilon$$

Exemple 1.1 : Soit $\langle a_n \rangle$ une suite convergente ; supposons par exemple que $a_n \rightarrow p$. Alors $\langle a_n \rangle$ est nécessairement une suite de Cauchy puisque pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(a_n, p) < \frac{1}{2}\epsilon$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(a_m, p) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

En d'autres termes, $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

Nous allons énoncer le résultat de l'exemple 1.1 sous forme d'une proposition.

Proposition 14.1 : Toute suite convergente d'un espace métrique est une suite de Cauchy.

La réciproque de la proposition 14.1 n'est pas vraie, comme on peut le voir d'après l'exemple suivant :

Exemple 1.2 : Soit $X = (0, 1)$ muni de la distance usuelle. Alors $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$ est une suite de X qui est de Cauchy mais qui ne converge pas dans X .

Exemple 1.3 : Soit d la distance triviale sur un ensemble X quelconque et soit $\langle a_n \rangle$ une suite de Cauchy dans (X, d) . On rappelle que d est définie par

$$d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Soit $\epsilon = \frac{1}{2}$. Alors, puisque $\langle a_n \rangle$ est de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = a_m$$

En d'autres termes, $\langle a_n \rangle$ est de la forme $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, p, p, p, \dots \rangle$, c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang.

Exemple 1.4 : Soit $\langle p_1, p_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy dans l'espace euclidien de dimension m , \mathbb{R}^m ; supposons par exemple que

$$p_1 = \langle a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(m)} \rangle, \quad p_2 = \langle a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(m)} \rangle, \quad \dots$$

projections de $\langle p_n \rangle$ sur chacun des m espaces coordonnées, c'est-à-dire,

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots \rangle, \quad \dots, \quad \langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, a_3^{(m)}, \dots \rangle \tag{1}$$

sont des suites de Cauchy de \mathbb{R} car, soit $\epsilon > 0$. Puisque $\langle p_n \rangle$ est de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$r, s > n_0 \Rightarrow d(p_r, p_s)^2 = |a_r^{(1)} - a_s^{(1)}|^2 + \dots + |a_r^{(m)} - a_s^{(m)}|^2 < \epsilon^2$$

D'où en particulier,

$$r, s > n_0 \Rightarrow |a_r^{(1)} - a_s^{(1)}|^2 < \epsilon^2, \dots, |a_r^{(m)} - a_s^{(m)}|^2 < \epsilon^2$$

En d'autres termes, chacune des m suites de (1) est une suite de Cauchy.

ESPACES METRIQUES COMPLETS

DEFINITION: Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X converge vers un point $p \in X$.

Exemple 2.1 : D'après le théorème fondamental de Cauchy (voir p. 58), la droite réelle \mathbb{R} munie de la distance usuelle est complète.

Exemple 2.2 : Soit d la distance triviale sur un ensemble X quelconque. A présent (voir l'exemple 1.3), une suite $\langle a_n \rangle$ de X est de Cauchy ssi elle est de la forme $\langle a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, p, p, p, \dots \rangle$ laquelle, c'est clair, converge vers $p \in X$. Ainsi tout espace métrique muni de la distance triviale est complet.

Exemple 2.3 : L'intervalle unité ouvert $X = (0, 1)$ muni de la distance usuelle n'est pas complet puisque (voir l'exemple 1.2) la suite $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$ de X est bien de Cauchy mais ne converge pas vers un point de X .

Remarque : Les exemples 2.1 et 2.3 montrent que la propriété d'être complet n'est pas une propriété topologique ; en effet \mathbb{R} est homéomorphe à $(0, 1)$ bien que \mathbb{R} soit complet et que $(0, 1)$ ne le soit pas.

Exemple 2.4 : L'espace euclidien \mathbb{R}^m de dimension m est complet. En effet, soit $\langle p_1, p_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de \mathbb{R}^m où

$$p_1 = \langle a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(m)} \rangle, \quad p_2 = \langle a_2^{(1)}, \dots, a_2^{(m)} \rangle, \quad \dots$$

Alors (voir l'exemple 1.4) les projections de $\langle p_n \rangle$ dans les m espaces coordonnées sont de Cauchy ; et puisque \mathbb{R} est complet, elles convergent :

$$\langle a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \dots \rangle \rightarrow b_1, \quad \dots, \quad \langle a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \dots \rangle \rightarrow b_m$$

Ainsi $\langle p_n \rangle$ converge vers un point $q = \langle b_1, \dots, b_m \rangle \in \mathbb{R}^m$, puisque chacune des m projections converge vers la projection de q (voir page , théorème 12.7).

PRINCIPE DES FERMES EMBOITES

On rappelle que le diamètre d'un sous-ensemble A d'un espace métrique X noté $d(A)$ est défini par $d(A) = \sup \{d(a, a') : a, a' \in A\}$ et qu'une suite d'ensembles A_1, A_2, \dots , est dite emboîtée si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$

Le théorème suivant donne une caractérisation des espaces métriques complets analogue au théorème des intervalles emboîtés pour les nombres réels.

Théorème 14.2 : Un espace métrique X est complet si et seulement si toute suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro ■ une intersection non vide.

En d'autres termes, si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sont des ensembles fermés non vides d'un espace métrique complet X tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$, alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \neq \emptyset$; et vice versa.

Les exemples suivants montrent que les conditions $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ et le fait que les A_i soient des fermés sont toutes les deux nécessaires dans le théorème 14.2.

Exemple 3.1 : Soit X la droite réelle \mathbb{R} et soient $A_n = [n, \infty)$. A présent X est complet, les A_n sont fermés, et $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Mais $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ est vide. Remarquons que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) \neq 0$.

Exemple 3.2 : Soit X la droite réelle \mathbb{R} et soit $A_n = (0, 1/n]$. A présent X est complet, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$. Mais $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est vide. Remarquons que les A_n ne sont pas fermés.

ESPACES COMPLETS ET APPLICATIONS CONTRACTANTES

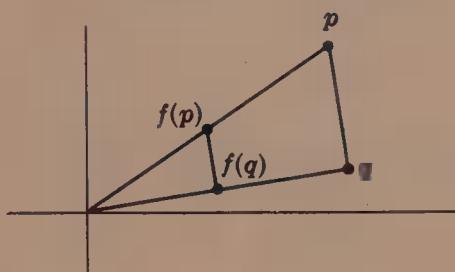
Soit X un espace métrique. Une application $f : X \rightarrow X$ est dite *contractante* s'il existe un nombre réel α , $0 \leq \alpha < 1$ tel que pour tout $p, q \in X$,

$$d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q) < d(p, q)$$

Ainsi, dans une application contractante, la distance des images de deux points quelconques est inférieure à la distance des deux points.

Exemple 4.1 : Soit f l'application définie sur l'espace euclidien \mathbb{R}^2 de dimension 2, c'est-à-dire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(p) = \frac{1}{2}p$. Alors f est contractante car

$$\begin{aligned} d(f(p), f(q)) &= \|f(p) - f(q)\| = \|\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q\| \\ &= \frac{1}{2}\|p - q\| = \frac{1}{2}d(p, q) \end{aligned}$$



Si X est un espace métrique complet, alors on a le théorème "du point fixe" suivant lequel ■ beaucoup d'applications en analyse.

Théorème 14.3 : Si f est une application contractante dans un espace métrique complet, alors il existe un point unique $p \in X$ tel que $f(p) = p$.

COMPLETIONS

Un espace métrique X^* est dit *complété* d'un espace métrique X si X^* est complet et si X est isométrique à un sous-ensemble dense de X^* .

Exemple 5.1 : L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est un complété de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels puisque ■ est complet et que \mathbb{Q} est un sous-ensemble dense de \mathbb{R} .

Nous allons à présent esquisser une construction particulière d'un complété d'un espace-métrique arbitraire X . Désignons par $C[X]$ l'ensemble des suites de Cauchy de X et soit \sim la relation dans $C[X]$ définie par

$$\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$$

Ainsi par " \sim " nous allons identifier les suites de Cauchy qui "devraient" avoir la même "limite".

Lemme 14.4 : La relation \sim est une relation d'équivalence dans $C[X]$.

Désignons à présent par X^* l'ensemble quotient $C[X]/\sim$; c'est-à-dire X^* est formé des classes d'équivalence $[\langle a_n \rangle]$ de suites de Cauchy $\langle a_n \rangle \in C[X]$. Soit e l'application définie par

$$e([\langle a_n \rangle], [\langle b_n \rangle]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n)$$

où $[\langle a_n \rangle], [\langle b_n \rangle] \in X^*$.

Lemme 14.5 : L'application e est bien définie, c'est-à-dire $\langle a_n \rangle \sim \langle a_n^* \rangle$ et $\langle b_n \rangle \sim \langle b_n^* \rangle$ impliquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n^*, b_n^*).$$

En d'autres termes, e ne dépend pas de la suite de Cauchy particulière choisie pour représenter une classe d'équivalence. En outre,

Lemme 14.6 : L'application e est une distance sur X^* .

A présent, pour chaque $p \in X$, la suite $\langle p, p, p, \dots \rangle \in C[X]$, c'est-à-dire est de Cauchy. Posons

$$\hat{p} = [\langle p, p, \dots \rangle] \quad \text{et} \quad \hat{X} = \{\hat{p} : p \in X\}$$

Alors X est une partie de X^* .

Lemme 14.7 : X est isométrique à \hat{X} , et \hat{X} est dense dans X^* .

Lemme 14.8 : Toute suite de Cauchy dans X^* converge et donc X^* est un complété de X .

Enfin nous allons montrer le

Lemme 14.9 : Si Y^* est un complété quelconque de X , alors Y^* est isométrique à X^* .

Les lemmes précédents impliquent le résultat fondamental suivant.

Théorème 14.10 : Tout espace métrique X a un complété et tous les complétés de X sont isométriques.

En d'autres termes, à une isométrie près, le complété d'un espace métrique est unique.

THEOREME DE BAIRE

On rappelle qu'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est un ensemble *non dense* ou *rare* dans X ssi l'intérieur de l'adhérence de A est vide :

$$\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$$

Exemple 6.1 : L'ensemble \mathbf{Z} des entiers relatifs est une partie non dense de la droite réelle \mathbf{R} . En effet \mathbf{Z} est fermé, c'est-à-dire $\mathbf{Z} = \bar{\mathbf{Z}}$ et d'intérieur vide ; ainsi

$$\text{int}(\bar{\mathbf{Z}}) = \text{int}(\mathbf{Z}) = \emptyset$$

de même, toute partie finie de \mathbf{R} est non dense dans \mathbf{R} .

Par contre, l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels n'est pas non dense dans \mathbf{R} puisque l'adhérence de \mathbf{Q} est égale à \mathbf{R} et donc

$$\text{int}(\bar{\mathbf{Q}}) = \text{int}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \neq \emptyset$$

Un espace topologique X est dit de *première catégorie* (ou *maigre*) si X est la réunion au plus dénombrable d'ensembles non denses de X . Sinon X est dit de *deuxième catégorie* (ou *non maigre*).

Exemple 6.2 : L'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels est de première catégorie puisque les singletones $\{p\}$ de \mathbf{Q} sont non denses dans \mathbf{Q} et que \mathbf{Q} est réunion dénombrable de singletones.

En vertu du théorème de Baire qui suit, la droite réelle \mathbf{R} est de deuxième catégorie.

Théorème (de Baire) 14.11 : Tout espace métrique complet X est de deuxième catégorie.

ESPACES COMPLETS ET COMPACITE

Soit A une partie d'un espace métrique. A présent A est compacte ssi A est séquentiellement compacte, c'est-à-dire ssi toute suite $\langle a_n \rangle$ de A présente une sous-suite convergente

$\langle a_{i_n} \rangle$. Mais, d'après l'exemple 1.1, $\langle a_{i_n} \rangle$ est une suite de Cauchy. Ainsi il est raisonnable de s'attendre à ce que la notion d'espace complet soit relié à la notion de compacité ainsi qu'à la notion qui lui est liée : celle de précompacité.

Nous allons annoncer deux de ces relations :

Théorème 14.12 : Un espace métrique X est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

Théorème 14.13 : Soit X un espace métrique complet. Alors $A \subset X$ est compact si et seulement si A est fermé et précompact.

CONSTRUCTION DES NOMBRES REELS

Les nombres réels peuvent être construits à partir des nombres rationnels par la méthode indiquée dans ce chapitre. Plus particulièrement, soit \mathbf{Q} l'ensemble des nombres rationnels et soit \mathbf{R} l'ensemble des classes d'équivalence de suites de Cauchy dans \mathbf{Q} :

$$\mathbf{R} = \{[\langle a_n \rangle] : \langle a_n \rangle \text{ est une suite de Cauchy dans } \mathbf{Q}\}$$

A présent \mathbf{R} muni de la distance appropriée est un espace métrique complet.

Remarque : Soit X un espace vectoriel normé. La construction de ce chapitre nous donne un espace métrique complet X^* . On peut alors définir les opérations suivantes d'addition vectorielle, de multiplication par un scalaire et de calcul de la norme dans X^* , si bien que X^* est en fait un espace vectoriel normé complet, appelé *espace de Banach* :

$$(i) \quad [\langle a_n \rangle] + [\langle b_n \rangle] \equiv [\langle a_n + b_n \rangle] \quad (ii) \quad k [\langle a_n \rangle] \equiv [\langle ka_n \rangle] \quad (iii) \quad \|[\langle a_n \rangle]\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$$

PROBLEMES RESOLUS

SUITES DE CAUCHY

1. Montrer que toute suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ d'un espace métrique X est précompacte (et ainsi également bornée).

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer qu'il existe une décomposition de $\{a_n\}$ en un nombre fini de parties, chacune de diamètre inférieur à ϵ . Puisque $\langle a_n \rangle$ est de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Par conséquent, $B = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots\}$ est de diamètre au plus égal à ϵ . Ainsi $\{a_1\}, \dots, \{a_{n_0}\}$, B est une décomposition finie de $\{a_n\}$ en parties de diamètre inférieur à ϵ , et donc $\langle a_n \rangle$ est précompacte.

2. Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite dans un espace métrique X , et soient

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}, \quad A_2 = \{a_2, a_3, \dots\}, \quad A_3 = \{a_3, a_4, \dots\}, \quad \dots$$

Montrer que $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy si et seulement si les diamètres des A_n tendent vers zéro, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$.

Solution :

Supposons que $\langle a_n \rangle$ soit une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m > n_0 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Par conséquent, $n > n_0 \Rightarrow d(A_n) < \epsilon$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$

Réiproquement, supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(a_{n_0+1}) < \epsilon$$

$$\text{D'où} \quad n, m > n_0 \Rightarrow a_n, a_m \in A_{n_0+1} \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

et donc $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

3. Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy dans X et soit $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ une sous-suite de $\langle a_n \rangle$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$.

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m > n_0 - 1 \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

A présent $i_{n_0} \geq n_0 > n_0 - 1$ et donc $d(a_{n_0}, a_{i_{n_0}}) < \epsilon$. En d'autre termes, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$.

4. Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de X et soit $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ une sous-suite de $\langle a_n \rangle$ convergeant vers $p \in X$. Montrer que $\langle a_n \rangle$ converge également vers p .

Solution :

D'après l'inégalité triangulaire, $d(a_n, p) \leq d(a_n, a_{i_n}) + d(a_{i_n}, p)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_{i_n}) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_{i_n}, p)$$

Puisque $a_{i_n} \rightarrow p$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{i_n}, p) = 0$ et, d'après le problème précédent, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_{i_n}) = 0$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, p) = 0 \quad \text{et donc} \quad a_n \rightarrow p$$

5. Soit $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy d'un espace métrique X et soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de X telle que $d(a_n, b_n) < 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $\langle a_n \rangle$ est également une suite de Cauchy de X .

(ii) Montrer que $\langle a_n \rangle$ converge par exemple vers $p \in X$ si et seulement si $\langle b_n \rangle$ converge vers p .

Solution :

(i) Par l'inégalité triangulaire,

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n) + d(b_n, a_n)$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $1/n_1 < \epsilon/3$. Ainsi

$$n, m > n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + d(b_m, b_n) + \epsilon/3$$

Par hypothèse, $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$ est une suite de Cauchy ; d'où

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n, m > n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \epsilon/3$$

Posons $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, alors

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Ainsi $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

(ii) D'après l'inégalité triangulaire $d(b_n, p) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, p)$; ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, p)$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$. Ainsi si $a_n \rightarrow p$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, p) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, p) = 0$ et

donc $\langle a_n \rangle$ converge également vers p .

De même, si $b_n \rightarrow p$, alors $a_n \rightarrow p$.

ESPACES COMPLETS

6. Démontrer le théorème 14.2 : Les propositions suivantes sont équivalentes : (i) X est un espace métrique complet. (ii) Toute suite emboîtée de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro ■ une intersection non vide.

Solution :

$$(i) \Rightarrow (ii) :$$

Soient $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ des fermés non vides de X tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$. Nous voulons montrer que $\cap_n A_n \neq \emptyset$. Puisque chaque A_i est non vide, on peut construire une suite

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle \text{ telle que } a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots$$

Nous affirmons que $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(A_{n_0}) < \epsilon$$

Or les A_i non emboîtés ; donc

$$n, m > n_0 \Rightarrow A_n, A_m \subset A_{n_0} \Rightarrow a_n, a_m \in A_{n_0} \Rightarrow d(a_n, a_m) < \epsilon$$

Ainsi $\langle a_n \rangle$ est de Cauchy.

A présent X est complet et donc $\langle a_n \rangle$ converge vers $p \in X$ par exemple. Nous affirmons que $p \in \cap_n A_n$. Supposons le contraire, c'est-à-dire supposons que

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \notin A_k$$

Puisque A_k est fermé, la distance de p à A_k est non nulle ; par exemple $d(p, a_k) = \delta > 0$. Alors A_k et la boule ouverte $S = S(p, \frac{1}{2}\delta)$ sont disjoints. Ainsi

$$n > k \Rightarrow a_n \in A_k \Rightarrow a_n \notin S(p, \frac{1}{2}\delta)$$

Or ceci est impossible puisque $a_n \rightarrow p$. En d'autres termes, $p \in \cap_n A_n$ et donc $\cap_n A_n$ est non vide.

$$(ii) \Rightarrow (i) :$$

Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de X . Nous voulons montrer que $\langle a_n \rangle$ converge. Posons

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}, A_2 = \{a_2, a_3, \dots\}, \dots$$

c'est-à-dire $A_k = \{a_n : n \geq k\}$. Alors $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ et, d'après le problème 2, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$. En

outre, puisque $d(\bar{A}) = d(A)$, où \bar{A} désigne l'adhérence de A , $\bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \dots$ est une suite de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro. Donc, par hypothèse, $\cap_n \bar{A}_n \neq \emptyset$; par exemple $p \in \cap_n \bar{A}_n$. Nous affirmons que la suite de Cauchy $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\bar{A}_n) = 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(\bar{A}_{n_0}) < \epsilon$$

et donc

$$n > n_0 \Rightarrow a_n, p \in \bar{A}_{n_0} \Rightarrow d(a_n, p) < \epsilon$$

En d'autres termes, $\langle a_n \rangle$ converge vers p .

7. Soit X un espace métrique et soit $f : X \rightarrow X$ une application contractante, c'est-à-dire il existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$ tel que pour tout $p, q \in X$, $d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q)$. Montrer que f est continue.

Solutions :

Nous allons montrer que f est continue en chaque point $x_0 \in X$. Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$d(x, x_0) < \epsilon \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \alpha d(x, x_0) \leq \alpha \epsilon < \epsilon$$

et donc f est continue.

8. Démontrer le théorème 14.3 : Soit f une application contractante dans un espace métrique complet X , supposons par exemple que

$$d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b), \quad 0 < \alpha < 1$$

Alors il existe un point et un seul $p \in X$ tel que $f(p) = p$.

Solution :

Soit a_0 un point quelconque de X . Posons

$$a_1 = f(a_0), \quad a_2 = f(a_1) = f^2(a_0), \quad \dots, \quad a_n = f(a_{n-1}) = f^n(a_0), \quad \dots$$

Nous affirmons que $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ est une suite de Cauchy. Notons d'abord que

$$\begin{aligned} d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) &\leq \alpha d(f^{s+t-1}(a_0), f^{t-1}(a_0)) \leq \dots \leq \alpha^t d(f^s(a_0), a_0) \\ &\leq \alpha^t [d(a_0, f(a_0)) + d(f(a_0), f^2(a_0)) + \dots + d(f^{s-1}(a_0), f^s(a_0))] \end{aligned}$$

Or $d(f^{i+1}(a_0), f^i(a_0)) \leq \alpha^i d(f(a_0), a_0)$ et donc

$$\begin{aligned} d(f^{s+t}(a_0), f^t(a_0)) &\leq \alpha^t d(f(a_0), a_0) (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{s-1}) \\ &\leq \alpha^t d(f(a_0), a_0) [1/(1 - \alpha)] \end{aligned}$$

puisque $(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{s-1}) \leq 1/(1 - \alpha)$.

A présent soit $\epsilon > 0$ et posons

$$\delta = \begin{cases} \epsilon(1 - \alpha) & \text{si } d(f(a_0), a_0) = 0 \\ \epsilon(1 - \alpha)/d(f(a_0), a_0) & \text{si } d(f(a_0), a_0) \neq 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha < 1$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \alpha^{n_0} < \delta$$

Ainsi si $r \geq s > n_0$,

$$d(a_s, a_r) \leq \alpha^s [1/(1 - \alpha)] d(f(a_0), a_0) < \delta [1/(1 - \alpha)] d(f(a_0), a_0) \leq \epsilon$$

et donc $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

A présent X est complet et donc $\langle a_n \rangle$ converge par exemple vers $p \in X$. Nous affirmons que $f(p) = p$. En effet, f est continue et donc séquentiellement continue et donc

$$f(p) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = p$$

Enfin, nous allons montrer que p est unique. Supposons que $f(p) = p$ et que $f(q) = q$; alors

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq \alpha d(p, q)$$

Or $\alpha < 1$; ainsi $d(p, q) = 0$, c'est-à-dire $p = q$.

COMPLETIONS

9. Montrer que $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ si et seulement si elles sont toutes les deux des sous-suite d'une suite de Cauchy $\langle c_n \rangle$.

Solution :

Supposons que $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$. Définissons $\langle c_n \rangle$ par

$$c_n = \begin{cases} a_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_{\frac{n}{2}(n+1)} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $\langle c_n \rangle = \langle b_1, a_1, b_2, a_2, \dots \rangle$. Nous affirmons que c_n est une suite de Cauchy. En effet soit $\epsilon > 0$; à présent

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad m, n > n_1 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad m, n > n_2 \Rightarrow d(b_m, b_n) < \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_3 \Rightarrow d(a_n, b_n) < \frac{1}{2}\epsilon$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Nous affirmons que

$$m, n > 2n_0 \Rightarrow d(c_m, c_n) < \epsilon$$

Notons que

$$m > 2n_0 \Rightarrow \frac{1}{2}m > n_1, n_2; \frac{1}{2}(m+1) > n_2, n_3$$

Ainsi

$$m, n \text{ pair} \Rightarrow c_m = a_{\frac{1}{2}m}, c_n = a_{\frac{1}{2}n} \Rightarrow d(c_m, c_n) < \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

$$m, n \text{ impair} \Rightarrow c_m = b_{\frac{1}{2}(m+1)}, c_n = b_{\frac{1}{2}(n+1)} \Rightarrow d(c_m, c_n) < \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

$$m \text{ pair, } n \text{ impair} \Rightarrow c_m = a_{\frac{1}{2}m}, c_n = b_{\frac{1}{2}(n+1)} \Rightarrow$$

$$d(c_m, c_n) \leq d(a_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}m}) + d(b_{\frac{1}{2}m}, b_{\frac{1}{2}(n+1)}) < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

et donc $\langle c_n \rangle$ est une suite de Cauchy.

Réiproquement, s'il existe une suite de Cauchy $\langle c_n \rangle$ pour laquelle $\langle a_n \rangle = \langle c_{j_n} \rangle$ et $\langle b_n \rangle = \langle c_{k_n} \rangle$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(c_{j_n}, c_{k_n}) = 0$$

puisque $\langle c_n \rangle$ est de Cauchy et que $n \rightarrow \infty$ implique $j_n, k_n \rightarrow \infty$.

10. Démontrer le lemme 14.5 : L'application e est bien définie ; c'est-à-dire $\langle a_n \rangle \sim \langle a_n^* \rangle$ et $\langle b_n \rangle \sim \langle b_n^* \rangle$ implique $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n^*, b_n^*)$.

Solution :

Posons $r = \lim d(a_n, b_n)$ et $r^* = \lim d(a_n^*, b_n^*)$ et soit $\epsilon > 0$. Notons que

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, a_n^*) + d(a_n^*, b_n^*) + d(b_n^*, b_n)$$

A présent

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_1 \Rightarrow d(a_n, a_n^*) < \epsilon/3$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_2 \Rightarrow d(b_n, b_n^*) < \epsilon/3$$

$$\exists n_3 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_3 \Rightarrow |d(a_n^*, b_n^*) - r^*| < \epsilon/3$$

Par conséquent, si $n > \max(n_1, n_2, n_3)$ alors

$$d(a_n, b_n) < r^* + \epsilon \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = r \leq r^* + \epsilon$$

Mais cette inégalité est valable pour tout $\epsilon > 0$; ainsi $r \leq r^*$. De même on montre que $r^* \leq r$; ainsi $r = r^*$.

11. Soit $\langle a_n \rangle$ une suite de Cauchy de X . Montrer que $\alpha = [\langle a_n \rangle] \in X^*$ est la limite de la suite $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots \rangle$ de \hat{X} . (Ici $\hat{X} = \{\hat{p} = [\langle p, p, p, \dots \rangle] : p \in X\}$.)

Solution :

Puisque $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy de X ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e(\hat{a}_m, \alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(a_m, a_n) = 0$$

Par conséquent, $\langle \hat{a}_n \rangle \rightarrow \alpha$.

12. Démontrer le lemme 14.7 : X est isométrique à \hat{X} , et \hat{X} est dense dans X^* .

Solution :

Pour tout $p, q \in X$,

$$e(\hat{p}, \hat{q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(p, q) = d(p, q)$$

et donc X est isométrique à \hat{X} . Nous allons montrer que \hat{X} est dense dans X^* en démontrant que tout point de X^* est la limite d'une suite de \hat{X} . Soit $\alpha = [\langle a_1, a_2, \dots \rangle]$ un point arbitraire de X^* . Alors $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy de X et donc, d'après le problème précédent, α est égale à la limite de la suite $\langle \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots \rangle$ de \hat{X} . Ainsi \hat{X} est dense dans X^* .

13. Démontrer le lemme 14.8 : Toute suite de Cauchy dans (X^*, e) converge et donc (X^*, e) est un complété de X .

Solution :

Soit $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de X^* . Puisque \hat{X} est dense dans X^* , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \hat{\alpha}_n \in \hat{X} \quad \text{tel que} \quad e(\hat{\alpha}_n, \alpha_n) < 1/n$$

Alors (d'après le problème 5) $\langle \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots \rangle$ est également une suite de Cauchy et, d'après le problème 12, $\langle \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots \rangle$ converge vers $\beta = [\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle] \in X^*$. Ainsi (problème 5) $\langle \alpha_n \rangle$ converge également vers β et donc (X^*, e) est complet.

14. Démontrer le lemme 14.9 : Si Y^* est un complété de X , alors Y^* est isométrique à X^* .

Solution :

Nous pouvons admettre que X est un sous-espace de Y^* . Ainsi pour tout $p \in Y^*$, il existe une suite $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ de X convergente vers p ; et, en particulier, $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy. Soit $f : Y^* \rightarrow X^*$ définie par

$$f(p) = [\langle a_1, a_2, \dots \rangle]$$

A présent si $\langle a_1^*, a_2^*, \dots \rangle \in X$ converge également vers p , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a_n^*) = 0 \quad \text{et donc} \quad [\langle a_n \rangle] = [\langle a_n^* \rangle]$$

En d'autres termes, f est bien définie.

En outre, f est surjective. En effet si $[\langle b_1, b_2, \dots \rangle] \in X^*$ alors $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$ est une suite de Cauchy de $X \subset Y^*$ et, puisque Y^* est complet, $\langle b_n \rangle$ converge, par exemple, vers $q \in Y^*$. Par conséquent $f(q) = [\langle b_n \rangle]$.

A présent soient $p, q \in Y^*$ avec par exemple $\langle a_n \rangle$ et $\langle b_n \rangle$ dans X convergeant respectivement vers p et q . Alors

$$e(f(p), f(q)) = e([\langle a_n \rangle], [\langle b_n \rangle]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = d(p, q)$$

Par conséquent, f est une isométrie de Y^* sur X^* .

THEOREME DE BAIRE

15. Soit N un sous-ensemble non dense de X . Montrer que \bar{N}^c est dense dans X .

Solution :

Supposons que \bar{N}^c ne soit pas dense dans X , c'est-à-dire $\exists p \in X$ et un ouvert G tel que

$$p \in G \quad \text{et} \quad G \cap \bar{N}^c = \emptyset$$

Alors $p \in G \subset \bar{N}$ et donc $p \in \text{int}(\bar{N})$. Mais ceci est impossible puisque N est non dense dans X , c'est-à-dire $\text{int}(\bar{N}) = \emptyset$. Donc \bar{N}^c est dense dans X .

16. Soit G un ouvert d'un espace métrique X et soit N un ensemble non dense de X . Montrer qu'il existe $p \in X$ et $\delta > 0$ tel que $S(p, \delta) \subset G$ et que $S(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

Solution :

Posons $H = G \cap \bar{N}^c$. Alors $H \subset G$ et $H \cap N = \emptyset$. En outre H est non vide puisque G est ouvert et que \bar{N}^c est dense dans X ; supposons par exemple que $p \in H$. Mais H est ouvert puisque G et \bar{N}^c sont ouverts ; ainsi $\exists \delta > 0$ tel que $S(p, \delta) \subset H$. Par conséquent, $S(p, \delta) \subset G$ et $S(p, \delta) \cap N = \emptyset$.

17. Démontrer le théorème 14.11 : Tout espace métrique complet est de deuxième catégorie.

Solution :

Soit $M \subset X$ et soit M de première catégorie. Nous voulons montrer que $M \neq X$, c'est-à-dire qu'il $\exists p \in X$ tel que $p \notin M$. Puisque M est de première catégorie, $M = N_1 \cup N_2 \cup \dots$ où chaque N_i est non dense dans X .

Puisque N_1 est non dense dans X , $\exists a_1 \in X$ et $\delta_1 > 0$ tel que $S(a_1, \delta_1) \cap N_1 = \emptyset$. Posons $\epsilon_1 = \delta_1/2$. Alors

$$\overline{S(a_1, \epsilon_1)} \cap N_1 = \emptyset$$

A présent $S(a_1, \epsilon_1)$ est ouvert et N_2 est non dense dans X et donc, d'après le problème 16,

$$\exists a_2 \in X \quad \text{et} \quad \delta_2 > 0 \quad \text{tel que} \quad S(a_2, \delta_2) \subset S(a_1, \epsilon_1) \subset \overline{S(a_1, \epsilon_1)} \quad \text{et} \quad S(a_2, \delta_2) \cap N_2 = \emptyset$$

Posons $\epsilon_2 = \delta_2/2 \leq \epsilon_1/2 = \delta_1/4$. Alors

$$\overline{S(a_2, \epsilon_2)} \subset \overline{S(a_1, \epsilon_1)} \quad \text{et} \quad \overline{S(a_2, \epsilon_2)} \cap N_2 = \emptyset$$

Continuant ainsi on obtient une suite de fermés emboîtés

$$\overline{S(a_1, \epsilon_1)} \supset \overline{S(a_2, \epsilon_2)} \supset \overline{S(a_3, \epsilon_3)} \supset \dots$$

telle que pour tout $n \in N$, $\overline{S(a_n, \epsilon_n)} \cap N_n = \emptyset$ et $\epsilon_n \leq \delta_1/2^n$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_1/2^n = 0$ et donc, d'après le théorème 14.2,

$$\exists p \in X \quad \text{tel que} \quad p \in \cap_{n=1}^{\infty} \overline{S(a_n, \epsilon_n)}$$

De plus, pour tout $n \in N$, $p \notin N_n$ et donc $p \notin M$.

ESPACES COMPLETS ET COMPACITE

18. Démontrer que tout espace métrique compact X est complet.

Solution :

Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de X . A présent X est compact et donc séquentiellement compact ; ainsi $\langle a_n \rangle$ contient une sous-suite $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ qui converge par exemple vers $p \in X$. Or (problème 4) $\langle a_n \rangle$ converge également vers p . Ainsi X est complet.

19. Soit E un sous-ensemble précompact d'un espace métrique X . Montrer que toute suite $\langle a_n \rangle$ de E contient une sous-suite de Cauchy.

Solution :

Puisque E est précompact on peut décomposer E en un nombre fini de parties de diamètre inférieur à $\epsilon_1 = 1$. L'une de ces parties, appelons-la A_1 , doit contenir une infinité de termes de la suite ; ainsi

$$\exists i_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad a_{i_1} \in A_1$$

A présent A_1 est précompact et peut donc être décomposé en un nombre fini de parties de diamètre inférieur à $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$. De même, l'une de ces parties, appelons-la A_2 , doit contenir une infinité de termes de la suite ; ainsi

$$\exists i_2 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad i_2 > i_1 \quad \text{et} \quad a_{i_2} \in A_2$$

De plus, $A_2 \subset A_1$.

On continue ainsi et on obtient une suite d'ensembles emboîtés

$$E \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \quad \text{avec} \quad d(A_n) < 1/n$$

et une sous-suite $\langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots \rangle$ de $\langle a_n \rangle$ avec $a_{i_n} \in A_n$. Nous affirmons que $\langle a_{i_n} \rangle$ est une suite de Cauchy. En effet, soit $\epsilon > 0$; alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad 1/n_0 < \epsilon \quad \text{et donc} \quad d(A_{n_0}) < \epsilon$$

Donc $i_n, i_m > i_{n_0} \Rightarrow a_{i_n}, a_{i_m} \in A_{n_0} \Rightarrow d(a_{i_m}, a_{i_n}) < \epsilon$

20. Démontrer le théorème 14.12 : Un espace métrique X est compact si et seulement si X est précompact et complet.

Solution :

Supposons que X soit compact. Alors, d'après le problème 15, X est complet et, d'après le lemme 11.17 page 174, X est précompact.

Réciprocement, supposons que X soit précompact et complet. Soit $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$ une suite de X . Alors, d'après le problème précédent, $\langle a_n \rangle$ contient une sous-suite qui est de Cauchy, laquelle converge puisque X est complet. Ainsi X est séquentiellement compact et donc compact.

21. Démontrer le théorème 14.13 : Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique complet X . Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) A est compact, (ii) A est fermé et précompact.

Solution :

Si A est compact, alors d'après le théorème 11.5 et le lemme 11.17, il est fermé et précompact.

Réciprocement, supposons que A soit fermé et précompact. A présent un fermé d'un espace complet est complet et donc A est complet et précompact. Ainsi, d'après le problème précédent, A est compact.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

22. Soit (X, d) un espace métrique et soit e la distance sur X définie par $e(a, b) = \min \{1, d(a, b)\}$. Montrer que $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy de (X, d) si et seulement si $\langle a_n \rangle$ est une suite de Cauchy dans (X, e) .
23. Montrer que tout espace métrique fini est complet.
24. Démontrer que tout sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.
25. Montrer que l'espace de Hilbert (l'espace l_2) est complet.
26. Démontrer que si $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ est l'ensemble des applications réelles bornées définies sur X muni de la norme

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$$

Alors $\mathcal{B}(X, \mathbf{R})$ est complet.

27. Démontrer qu'un espace métrique X est complet si et seulement si tout sous-ensemble précompact infini de X ■ un point d'accumulation.
28. Montrer que la réunion au plus dénombrable d'ensembles de la première catégorie est de première catégorie.
29. Montrer qu'un espace métrique X est précompact si et seulement si toute suite de X contient une sous-suite de Cauchy.
30. Montrer que si X est isométrique à Y et si X est complet, alors Y est complet.

PROBLEMES DIVERS

31. Démontrer que tout espace vectoriel normé X peut être plongé dans un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet. (*Indication* : voir la remarque de la page 219).

CHAPITRE 15

Espaces de fonctions

ESPACES DE FONCTIONS

Soient X et Y deux ensembles arbitraires et soit $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y . Tout sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y)$ muni d'une topologie est appelé un *espace de fonctions*.

On peut identifier $\mathcal{F}(X, Y)$ à un ensemble produit de la manière suivante : Désignons par Y_x un exemplaire de Y indexé par $x \in X$ et désignons par F le produit des ensembles Y_x , c'est-à-dire,

$$F = \prod \{Y_x : x \in X\}$$

Rappelons que F est formé des points $p = \langle a_x : x \in X \rangle$ qui font correspondre à chaque $x \in X$ l'élément $a_x \in Y_x = Y$, c'est-à-dire F est formé des applications de X dans Y et donc $F = \mathcal{F}(X, Y)$.

A présent pour chaque élément $x \in X$, l'application e_x de l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, Y)$ dans Y définie par

$$e_x(f) = f(x)$$

est appelé l'application *valeur en x* . (Ici f est une application quelconque de $\mathcal{F}(X, Y)$, c'est-à-dire $f : X \rightarrow Y$.) Par notre identification de $\mathcal{F}(X, Y)$ avec F , l'application valeur en x , e_x , est précisément l'application projection π_x de F dans l'espace coordonné $Y_x = Y$.

Exemple 1.1 : Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications à valeurs réelles définies sur $I = [0, 1]$ et soient $f, g, h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ les applications

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x + 1, \quad h(x) = \sin \pi x$$

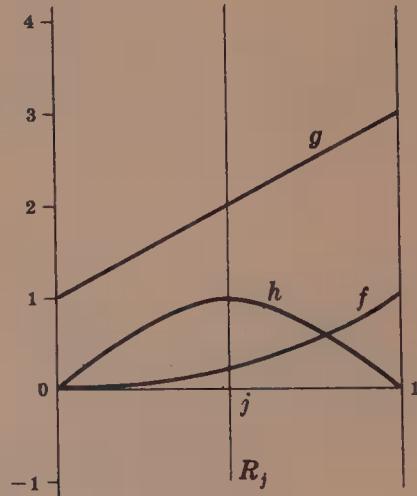
Considérons l'application valeur en j , $e_j : \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ en par exemple $j = \frac{1}{2}$. Alors

$$e_j(f) = f(j) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$e_j(g) = g(j) = g(\frac{1}{2}) = 2$$

$$e_j(h) = h(j) = h(\frac{1}{2}) = 1$$

Graphiquement, $e_j(f)$, $e_j(g)$ et $e_j(h)$ sont les points où les graphes de f , g et h coupent la droite verticale R_j passant par $x = j$.



TOPOLOGIE DEFINIE PAR UN POINT ET UN OUVERT

Soit X un ensemble arbitraire et soit Y un espace topologique. Nous allons d'abord étudier la topologie produit \mathcal{T} sur $\mathcal{F}(X, Y)$ où on identifie $\mathcal{F}(X, Y)$ avec l'ensemble produit $F = \prod \{Y_x : x \in X\}$ comme ci-dessus. Rappelons que la sous-base de définitions de la topologie produit sur F est formée des sous-ensembles de F de la forme

$$\pi_{x_0}^{-1}[G] = \{f : \pi_{x_0}(f) \in G\}$$

où $x_0 \in X$ et G est un ouvert de l'espace coordonné $Y_{x_0} = Y$. Or $\pi_{x_0}(f) = e_{x_0}(f) = f(x_0)$, où e_{x_0} est l'application valeur en $x_0 \in X$. Ainsi la sous-base de définitions de la topologie produit \mathcal{T} sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est formée de tous les sous-ensembles de $\mathcal{F}(X, Y)$ de la forme

$\{f : f(x_0) \in G\}$, c'est-à-dire des applications qui envoient un point arbitraire $x_0 \in X$ dans un ouvert arbitraire G de Y . On appelle cette topologie produit sur $\mathcal{F}(X, Y)$, pour des raisons évidentes, la *topologie définie par un point et un ouvert*.

Par ailleurs, on peut définir la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ comme étant la topologie la moins fine sur $\mathcal{F}(X, Y)$ pour laquelle les applications “valeur en $xe_x : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow Y$ soient continues. Cette définition correspond directement à la définition de la topologie produit.

Exemple 2.1 : Soit \mathcal{T} la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ où $I = [0, 1]$. Comme ci-dessus, les éléments de la sous-base de définition de \mathcal{T} sont de la forme

$$\{f : f(j_0) \in G\}$$

où $j_0 \in I$ et G est un ouvert de \mathbb{R} . Graphiquement, les éléments de la sous-base ci-dessus sont formés des applications dont le graphe passe par l'ouvert G situé sur la droite réelle verticale passant par le point j_0 de l'axe horizontal. Rappelons que celui-ci est identique à l'élément de la sous-base de l'espace produit.

$$X = \prod \{R_i : i \in I\}$$

représenté au chapitre 12 page 187.

Exemple 2.2 : Si A est un sous-ensemble d'un espace produit $\prod \{X_i : i \in I\}$, alors A est un sous-ensemble du produit de ses projections, c'est-à-dire

$$A \subset \prod \{\pi_i[A] : i \in I\}$$

(comme on l'a montré sur le schéma).

Ainsi $A \subset \prod \{\overline{\pi_i[A]} : i \in I\}$ où $\overline{\pi_i[A]}$ est l'adhérence de $\pi_i[A]$. Par conséquent, si $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, Y)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y)$ alors

$$\mathcal{A} \subset \prod \{\overline{\pi_x[\mathcal{A}]} : x \in X\} = \prod \{\overline{e_x[\mathcal{A}]} : x \in X\}$$

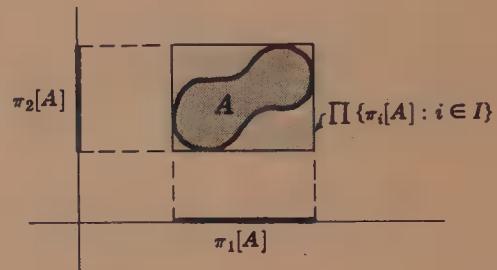
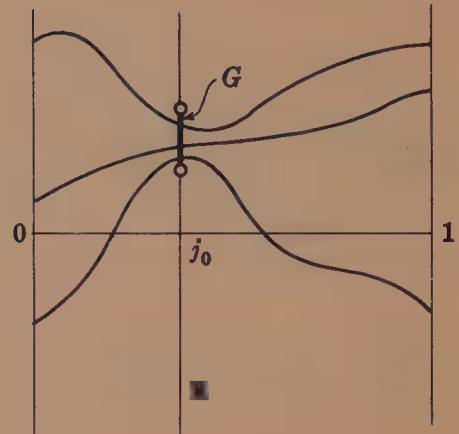
et $\overline{e_x[\mathcal{A}]} = \overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$. D'après le théorème de Tychonoff, si $\overline{\{f(x) : x \in X\}}$ est compact pour tout $x \in X$, alors $\prod \{\overline{\pi_x[\mathcal{A}]} : x \in X\}$ est un sous-ensemble compact de l'espace produit $\prod \{Y_x : x \in X\}$.

On rappelle qu'un sous-ensemble fermé d'un compact est compact. Ainsi le résultat de l'exemple 2.2 implique le

Théorème 15.1 : Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y)$. Alors \mathcal{A} est compact pour la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ si (i) \mathcal{A} est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{F}(X, Y)$ et (ii) pour tout $x \in X$, $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$ est un compact de Y .

Dans le cas où Y est séparé, on a le résultat plus fort suivant :

Théorème 15.2 : Soit Y un espace séparé et soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(X, Y)$. Alors \mathcal{A} est compact pour la topologie définie par un point et un ouvert si et seulement si \mathcal{A} est fermé et si pour tout $x \in X$, $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}}$ est compact.



CONVERGENCE SIMPLE

Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications d'un ensemble arbitraire X dans un espace topologique Y . La suite $\langle f_n \rangle$ est dite *converger simplement* vers une application $g : X \rightarrow Y$ si pour tout $x_0 \in X$,

$\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \dots \rangle$ converge vers $g(x_0)$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g(x_0)$

En particulier, si Y est un espace métrique, alors $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g ssi pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x_0 \in X$,

$$\exists n_0 = n_0(x_0, \epsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x_0), g(x_0)) < \epsilon$$

Notons que n_0 dépend de ϵ et également du point x_0 .

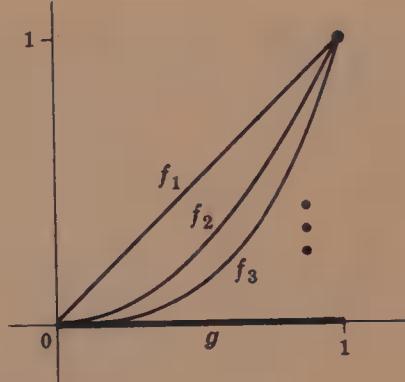
Exemple 3.1 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite d'applications de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R} définies par

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots$$

Alors $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers l'application $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Remarquons que la fonction limite g n'est pas continue bien que chacune des fonctions f_i soit continue.



La notion de convergence simple est reliée à la topologie définie par un point et un ouvert de la manière suivante :

Théorème 15.3 : Une suite d'applications $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ de $\mathcal{F}(X, Y)$ converge vers $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ pour la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ si et seulement si $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g .

En vertu du théorème ci-dessus, la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est également appelée la *topologie de la convergence simple*.

Remarque : Rappelons que la métrisabilité n'est pas invariante par passage au produit infini ; donc la topologie de la convergences simple d'applications à valeurs réelles définies sur $[0, 1]$ n'est pas une topologie induite par une distance. La théorie des espaces topologiques comme généralisation des espaces métriques a été d'abord motivée par l'étude de la convergence simple des fonctions.

CONVERGENCE UNIFORME

Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications d'un ensemble arbitraire X dans un espace métrique (Y, d) . Alors $\langle f_n \rangle$ est dite *converger uniformément* vers une application $g : X \rightarrow Y$ si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \forall x \in X$$

En particulier, $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g ; c'est-à-dire que la convergence uniforme implique la convergence simple. Remarquons que le n_0 ne dépend que de ϵ tandis que dans la convergence simple le n_0 dépend à la fois de ϵ et du point x .

Dans le cas où X est un espace topologique, nous avons le résultat classique suivant :

Préposition 15.4 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications continues d'un espace topologique X dans un espace métrique Y . Si $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers $g : X \rightarrow Y$, alors g est continue.

Exemple 4.1 : Soient f_1, f_2, \dots les applications continues suivantes de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R} :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, \dots$$

A présent, d'après l'exemple 3.1, $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

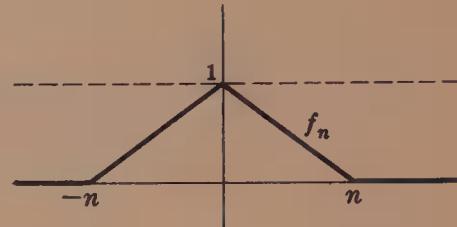
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Puisque g n'est pas continue, f_n ne converge pas uniformément vers g .

Exemple 4.2 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de fonctions suivantes de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

A présent $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction constante $g(x) = 1$. Mais $\langle f_n \rangle$ ne converge pas uniformément vers g . En effet, soit $\epsilon = \frac{1}{2}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f_n(x_0) = 0$ et donc $|f_n(x_0) - g(x_0)| = 1 > \epsilon$.



Désignons par $\mathcal{B}(X, Y)$ l'ensemble des applications bornées d'un ensemble arbitraire X dans un espace métrique (Y, d) et soit e la distance sur $\mathcal{B}(X, Y)$ définie par

$$e(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

Cette distance ■ la propriété suivante :

Théorème 15.5 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications de $\mathcal{B}(X, Y)$. Alors f_n converge vers $g \in \mathcal{B}(X, Y)$ pour la distance e si et seulement si $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g .

En vertu du théorème précédent, la topologie induite sur $\mathcal{B}(X, Y)$ par la distance ci-dessus est appelée la *topologie de la convergence uniforme*.

Remarque : La notion de convergence uniforme définie dans le cas d'un espace métrique Y ne peut être étendue à un espace topologique plus général. Cependant, la notion de convergence uniforme peut-être étendue à une famille d'espaces appelés *espaces uniformes* qui sont intermédiaires entre les espaces topologiques et les espaces métriques.

L'ESPACE DE FONCTIONS $\mathcal{C}[0, 1]$

L'espace vectoriel $\mathcal{C}[0, 1]$ des fonctions continues de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme définie par

$$\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in I\}$$

est l'un des espaces de fonctions les plus importants de l'analyse. Notons que la norme ci-dessus induit la topologie de la convergence uniforme.

Puisque $I = [0, 1]$ est compact, chaque $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ est *uniformément continue* ; c'est-à-dire,

Proposition 15.6 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad |x_0 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$$

La continuité uniforme (comme la convergence uniforme) est plus forte que la continuité en ce sens que δ ne dépend que de ϵ et non du point particulier choisi.

Il s'ensuit l'une des conséquences de la proposition 15.4 :

Théorème 15.7 : $\mathcal{C}[0, 1]$ est un espace vectoriel normé complet.

Nous utiliserons le théorème de Baire sur les espaces métriques complets pour démontrer le résultat intéressant suivant :

Proposition 15.8 : Il existe une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est dérivable nulle part.

Remarque : Tous les résultats démontrés ici pour $C[0, 1]$ sont également vrais pour l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

FONCTIONS UNIFORMEMENT BORNEES

En essayant d'établir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que des sous-ensembles d'espaces de fonctions soient compacts on est amené à considérer la notion de fonctions *uniformément bornées* et de *fonctions équicontinues* qui sont intéressantes en elles-mêmes.

Un ensemble de fonctions à valeurs réelles $\mathcal{A} = \{f_i : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ définies sur un ensemble arbitraire X est dit *uniformément borné* si

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad |f(x)| \leq M, \forall f \in \mathcal{A}, \forall x \in X$$

C'est-à-dire que chaque application $f \in \mathcal{A}$ est bornée et il existe une borne valable pour toutes les applications.

En particulier si $\mathcal{A} \subset C[0, 1]$, alors le fait d'être uniformément borné est équivalent à

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \|f\| \leq M, \forall f \in \mathcal{A}$$

ou encore, \mathcal{A} est un sous-ensemble borné de $C[0, 1]$.

Exemple 5.1 : Soit \mathcal{A} le sous-ensemble suivant de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin 2x, \dots\}$$

Alors \mathcal{A} est uniformément borné. En effet soit $M = 1$; alors, pour toute $f \in \mathcal{A}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. Voir la figure (a) ci-dessous.

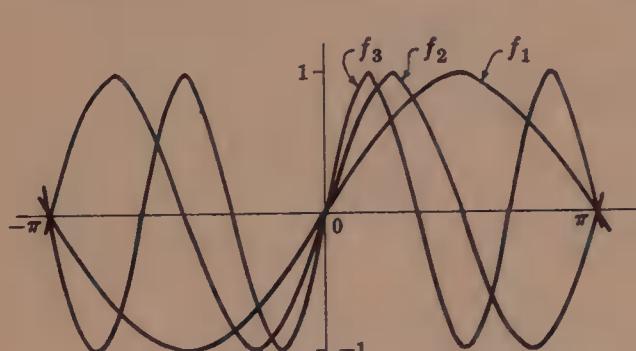


Fig. (a)

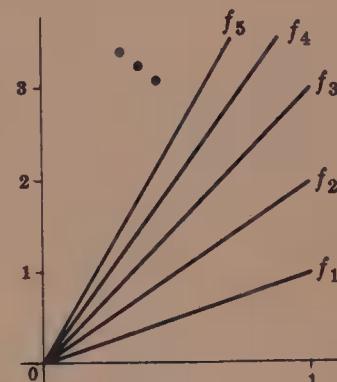


Fig. (b)

Exemple 5.2 : Soit $\mathcal{A} \subset C[0, 1]$ défini comme suit (voir la figure (b) ci-dessus) :

$$\mathcal{A} = \{f_1(x) = x, f_2(x) = 2x, f_3(x) = 3x, \dots\}$$

Bien que chaque fonction de $C[0, 1]$, et donc en particulier de \mathcal{A} , soit bornée, \mathcal{A} n'est pas uniformément borné. En effet si M est un réel quelconque aussi grand qu'on veut, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > M$ et donc $f_{n_0}(1) = n_0 > M$.

EQUICONTINUITÉ, THEOREME D'ASCOLI

Une famille d'applications à valeurs réelles $\mathcal{A} = \{f_i : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ définies sur un espace métrique arbitraire X est dite *équicontinue* si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x_0, x_1) < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon, \forall f \in \mathcal{A}$$

Notons que δ ne dépend que de ϵ et non des points ou de l'application particulière choisie. Il est clair que chaque application $f \in \mathcal{A}$ est uniformément continue.

Théorème (d'Ascoli) 15.9 : Soit \mathcal{A} un sous-ensemble fermé de l'espace de fonctions $C[0, 1]$. Alors \mathcal{A} est compact si et seulement si \mathcal{A} est uniformément borné et équicontinu.

TOPOLOGIE DEFINIE PAR UN COMPACT ET UN OUVERT

Soient X et Y deux ensembles arbitraires et soient $A \subset X$ et $B \subset Y$. Nous écrirons $F(A, B)$ pour désigner l'ensemble des applications de X dans Y appliquant A dans B :

$$F(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(X, Y) : f[A] \subset B\}$$

Exemple 6.1 : Soit \mathcal{S} la sous-base de définition de la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$. On rappelle que les éléments de \mathcal{S} sont de la forme

$$\{f \in \mathcal{F}(X, Y) : f(x) \in G\}, \text{ où } x \in X, G \text{ est un ouvert de } Y$$

Suivant la notation ci-dessus, on peut désigner cet ensemble par $F(x, G)$ et on peut définir \mathcal{S} par

$$\mathcal{S} = \{F(x, G) : x \in X, G \subset Y \text{ ouvert}\}$$

A présent, soient X et Y des espaces topologiques et soit \mathcal{A} la famille des sous-ensembles compacts de X et \mathcal{G} celle des ouverts de Y . La topologie \mathcal{T} sur $\mathcal{F}(X, Y)$ engendrée par

$$\mathcal{S} = \{F(A, G) : A \in \mathcal{A}, G \in \mathcal{G}\}$$

est appelée la topologie *définie par un compact et un ouvert* ou la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{F}(X, Y)$, et \mathcal{S} est la sous-base de définition de \mathcal{T} .

Puisque les singletons de X sont compacts, \mathcal{S} contient les éléments de la sous-base de définition de la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$. Ainsi :

Théorème 15.10 : La topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est moins fine que la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{F}(X, Y)$.

Rappelons que la topologie définie par un point et un ouvert est la topologie la moins fine pour laquelle les applications valeur en x soient continues. Ainsi,

Corollaire 15.11 : Les applications valeur en x $e_x : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow Y$ sont continues pour la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{F}(X, Y)$.

TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE UNIFORME COMPACTE

Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications d'un espace topologique X dans un espace métrique (Y, d) . La suite $\langle f_n \rangle$ est dite *converger uniformément sur tout compact* vers $g : X \rightarrow Y$ si pour tout compact $E \subset X$ et tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 = n_0(E, \epsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \quad \forall x \in E$$

En d'autres termes, $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers g ssi pour tout compact $E \subset X$, les restrictions de $\langle f_n \rangle$ à E convergent uniformément vers la restriction de g à E , c'est-à-dire,

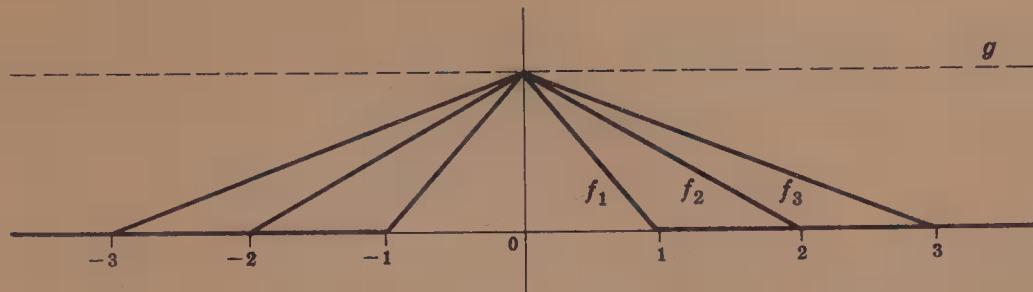
$$\langle f_1|_E, f_2|_E, \dots \rangle \text{ converge uniformément vers } g|_E$$

A présent la convergence uniforme implique la convergence uniforme sur tout compact et, puisque les singletons sont compacts, la convergence uniforme sur tout compact implique la convergence simple.

Exemple 7.1 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

A présent $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction constante $g(x) = 1$ mais $\langle f_n \rangle$ ne converge pas uniformément vers g (voir l'exemple 4.2). Cependant, puisque tout compact E de \mathbb{R} est borné, $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers g .



Théorème 15.12 : Soit $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues d'un espace topologique X dans un espace métrique (Y, d) . Alors une suite d'applications $\langle f_n \rangle$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ converge vers $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ pour la topologie compacte ouverte si et seulement si $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers g .

En vertu du théorème précédent, la topologie compacte-ouverte est également appelée la *topologie de la convergence uniforme sur tout compact ou de la convergence uniforme compacte*.

FONCTIONNELLES SUR LES ESPACES NORMES

Soit X un espace vectoriel normé (sur \mathbb{R}). Une application à valeurs réelles f de domaine X , c'est-à-dire $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, est appelée une *fonctionnelle*.

DEFINITION: Une fonctionnelle f sur X est *linéaire* si

$$(i) \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in X, \quad \text{et} \quad (ii) \quad f(kx) = k[f(x)], \quad \forall x \in X, \quad k \in \mathbb{R}$$

Une fonctionnelle linéaire f sur X est *bornée* si

$$\exists M > 0 \quad \text{tel que} \quad |f(x)| \leq M \|x\|, \quad \forall x \in X$$

Ici M s'appelle une *borne* pour f .

Exemple 8.1 : Soit X l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $[a, b]$ muni de la norme $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}$, c'est-à-dire $X = \mathcal{C}[a, b]$. Soit $\mathbf{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbf{I}(f) = \int_a^b f(t) dt$$

Alors \mathbf{I} est une fonctionnelle linéaire, en effet,

$$\mathbf{I}(f+g) = \int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt = \mathbf{I}(f) + \mathbf{I}(g)$$

$$\mathbf{I}(kf) = \int_a^b (kf)(t) dt = \int_a^b k[f(t)] dt = k \int_a^b f(t) dt = k \mathbf{I}(f)$$

En outre, $M = b - a$ est une borne pour \mathbf{I} puisque

$$\mathbf{I}(f) = \int_a^b f(t) dt \leq M \sup \{|f(t)|\} = M \|f\|$$

Proposition 15.13 : Soient f et g deux fonctionnelles linéaires bornées sur X et soit $k \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$ et $k \cdot f$ sont également des fonctionnelles linéaires bornées sur X .

Ainsi (d'après la proposition 8.14, page 132) la famille X^* des fonctionnelles linéaires bornées sur X est un espace vectoriel.

Proposition 15.14 : L'application suivante sur X^* est une norme :

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|/\|x\| : x \neq 0\}$$

Remarquons que si M est une borne pour f , c'est-à-dire $|f(x)| \leq M \|x\|$, $\forall x \in X$, alors en particulier pour $x \neq 0$, $|f(x)|/\|x\| \leq M$ et donc $\|f\| \leq M$. D'ailleurs, $\|f\|$ aurait pu être définie de manière équivalente par

$$\|f\| = \inf \{M : M \text{ est une borne pour } f\}$$

Remarque : L'espace vectoriel normé des fonctionnelles linéaires bornées sur X est appelé l'*espace dual* de X .

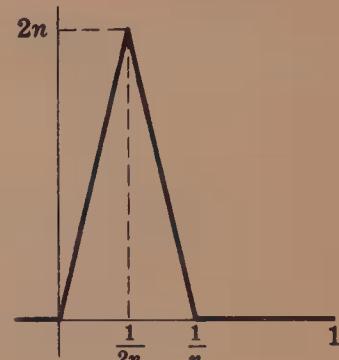
PROBLEMES RESOLUS

CONVERGENCE SIMPLE, TOPOLOGIE DEFINIE PAR UN POINT ET UN OUVERT

1. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ où $I = [0, 1]$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2n \\ -4n^2x + 4n & \text{si } 1/2n < x < 1/n \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction constante $g(x) = 0$.



Solution :

On ■ $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = g(0) = 0$. Par ailleurs si $x_0 > 0$, alors

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1/n_0 < x_0$; d'où

$$n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g(x_0) = 0$$

Ainsi $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction nulle.

Remarquons que

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad \text{et que} \quad \int_0^1 g(x) dx = 0$$

Ainsi, dans ce cas, la limite des intégrales n'est pas égale à l'intégrale de la limite, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

2. Soit $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies sur $I = [0, 1]$ muni de la norme

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$

Donner un exemple d'une suite $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ des $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telle que $f_n \rightarrow g$ pour la norme ci-dessus mais telle que $\langle f_n \rangle$ ne converge pas simplement vers g .

Solution :

Soit $\langle f_n \rangle$ définie par $f_n(x) = x^n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0$$

Ainsi $\langle f_n \rangle$ converge vers la fonction nulle $g(x) = 0$ pour la norme ci-dessus. Par contre $\langle f_n \rangle$ converge simplement (voir l'exemple 3.1) vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ et $0 \leq x < 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Notons que $f \neq g$.

3. Montrer que si Y est T_1 , T_2 , régulier ou connexe, alors $\mathcal{F}(X, Y)$ muni de la topologie définie par un point et un ouvert possède la même propriété.

Solution :

Puisque la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est la topologie produit, $\mathcal{F}(X, Y)$ hérite de toute propriété de Y invariante par passage au produit. D'après des résultats antérieurs, les propriétés ci-dessus sont invariantes par passage au produit.

4. Démontrer le théorème 15.2 : Soit Y un espace séparé et soit \mathcal{A} un sous-ensemble de $\mathcal{F}(X, Y)$ muni de la topologie définie par un point et un ouvert. Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (ii) \mathcal{A} est compact. (ii) \mathcal{A} est fermé et $\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ est compact dans Y pour tout $x \in X$.

Solution :

D'après le théorème 15.1 (ii) \Rightarrow (i) et donc nous n'avons plus qu'à montrer que (i) \Rightarrow (ii). Puisque Y est séparé et que le fait d'être T_2 est invariant par passage au produit, $\mathcal{F}(X, Y)$ est également séparé. A présent d'après le théorème 11.5 un sous-ensemble compact d'un espace séparé est fermé ; ainsi \mathcal{A} est fermé. En outre, chacune des applications "valeurs" $e_x : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow Y$ est continue pour la topologie définie par un point et un ouvert ; ainsi pour tout $x \in X$,

$$e_x[\mathcal{A}] = \{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$$

est un compact de Y et, puisque Y est séparé, un fermé. En d'autres termes, $\overline{\{f(x) : f \in \mathcal{A}\}} = \{f(x) : f \in \mathcal{A}\}$ est compact.

5. Démontrer le théorème 15.3 : Soit \mathcal{T} la topologie définie par un point et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ et soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de $\mathcal{F}(X, Y)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $\langle f_n \rangle$ converge vers $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ pour \mathcal{T} . (ii) $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g .

Solution :

Méthode 1.

Identifions $\mathcal{F}(X, Y)$ à l'ensemble produit $F = \prod \{Y_x : x \in X\}$ et \mathcal{T} à la topologie produit. Alors, d'après le théorème 12.7, la suite $\langle f_n \rangle$ de F converge vers $g \in F$ si et seulement si pour toute projection π_x ,

$$\langle \pi_x(f_n) \rangle = \langle e_x(f_n) \rangle = \langle f_n(x) \rangle \text{ converge vers } \pi_x(g) = e_x(g) = g(x)$$

En d'autres termes $f_n \rightarrow g$ pour \mathcal{T} ssi $\lim f_n(x) = g(x)$, $\forall x \in X$

c'est-à-dire ssi $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g .

Méthode 2.

(i) \Rightarrow (ii) : Soit x_0 un point arbitraire de X et soit G un ouvert de Y contenant $g(x_0)$, c'est-à-dire $g(x_0) \in G$. Alors

$$g \in F(x_0, G) = \{f \in \mathcal{F}(X, Y) : f(x_0) \in G\}$$

et donc $F(x_0, G)$ est un ouvert pour \mathcal{T} de $\mathcal{F}(X, Y)$ contenant g . D'après (i), $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour \mathcal{T} ; ainsi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_0 \Rightarrow f_n \in F(x_0, G)$$

par conséquent $n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) \in G \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g(x_0)$

Or x était arbitraire ; ainsi $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g .

(ii) \Rightarrow (i) : Soit $F(x_0, G) = \{f : f(x_0) \in G\}$ un élément quelconque de la sous-base de définition de \mathcal{T} contenant g . Alors $g(x_0) \in G$. D'après (ii), $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g ; ainsi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_0 \Rightarrow f_n(x_0) \in G$$

et donc

$$n > n_0 \Rightarrow f_n \in F(x_0, G) \Rightarrow \langle f_n \rangle \text{ converge pour } \mathcal{T} \text{ vers } g$$

CONVERGENCE UNIFORME

6. Démontrer la proposition 15.4 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite d'applications continues d'un espace topologique X dans un espace métrique Y et supposons que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers $g : X \rightarrow Y$. Alors g est continue.

Solution :

Soit $x_0 \in X$ et soit $\epsilon > 0$. Alors g est continue en x_0 si \exists un ouvert $G \subset X$ contenant x_0 tel que

$$x \in G \Rightarrow d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$$

A présent $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g , et donc

$$\exists m \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad d(f_m(x), g(x)) < \frac{1}{3}\epsilon, \quad \forall x \in X$$

D'où, d'après l'inégalité triangulaire,

$$d(g(x), g(x_0)) = d(g(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), g(x_0)) < d(f_m(x), f_m(x_0)) + \frac{2}{3}\epsilon$$

Puisque f_m est continue \exists un ouvert $G \subset X$ contenant x_0 tel que

$$x \in G \Rightarrow d(f_m(x), f_m(x_0)) < \frac{1}{3}\epsilon \quad \text{et donc} \quad x \in G \Rightarrow d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$$

Ainsi g est continue.

7. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de fonctions réelles continues définies sur $[a, b]$ convergeant uniformément vers $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

Remarquons (problème 1) que cette proposition n'est pas vraie dans le cas de la convergence simple.

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Nous devons montrer que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| < \epsilon$$

A présent $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| < \epsilon/(b-a), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, si } n > n_0, \quad \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - g(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - g(x)| dx \\ &< \int_a^b \epsilon/(b-a) dx = \epsilon \end{aligned}$$

8. Démontrer le théorème 15.5 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de $\mathcal{B}(X, Y)$ muni de la distance

$$e(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) $\langle f_n \rangle$ converge vers $g \in \mathcal{F}(X, Y)$ pour e . (ii) $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g .

Solution :

(i) \Rightarrow (ii) : Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour e ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow e(f_n, g) < \epsilon$$

Ainsi

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) \leq \sup \{d(f_n(x), g(x)) : x \in X\} = e(f_n, g) < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

c'est-à-dire que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g .

(ii) \Rightarrow (i) : Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) < \epsilon/2, \quad \forall x \in X$$

Ainsi

$$n > n_0 \Rightarrow \sup \{d(f_n(x), g(x)) : x \in X\} \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

c'est-à-dire que $n > n_0$ implique $e(f_n, g) < \epsilon$ et donc $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour e .

ESPACE DE FONCTIONS $C[0, 1]$

9. Démontrer la proposition 15.6 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $I = [0, 1]$. Alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

c'est-à-dire f est uniformément continue.

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue pour tout $p \in I$,

$$\exists \delta_p > 0 \text{ tel que } |x - p| < \delta_p \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \frac{1}{2}\epsilon \quad (1)$$

Pour chaque $p \in I$, posons $S_p = I \cap (p - \frac{1}{2}\delta_p, p + \frac{1}{2}\delta_p)$. Alors $\{S_p : p \in I\}$ est un recouvrement de I , et, puisque I est compact, un nombre fini de S_p recouvre également I ; par exemple $I = S_{p_1} \cup \dots \cup S_{p_m}$. Posons

$$\delta = \frac{1}{2} \min (\delta_{p_1}, \dots, \delta_{p_m})$$

Supposons que $|x - y| < \delta$. Alors $x \in S_{p_k}$ pour un certain k , et donc $|x - p_k| < \frac{1}{2}\delta_{p_k} < \delta_{p_k}$ et

$$|y - p_k| \leq |y - x| + |x - p_k| < \delta + \frac{1}{2}\delta_{p_k} = \frac{1}{2}\delta_{p_k} + \frac{1}{2}\delta_{p_k} = \delta_{p_k}$$

Ainsi d'après (1), $|f(x) - f(p_k)| < \frac{1}{2}\epsilon$ et $|f(y) - f(p_k)| < \frac{1}{2}\epsilon$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(p_k)| + |f(p_k) - f(y)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

10. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de $C[0, 1]$. Montrer que pour tout $x_0 \in I = [0, 1]$, $\langle f_1(x_0), f_2(x_0), \dots \rangle$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} .

Solution :

Soit $x_0 \in I$ et soit $\epsilon > 0$. Puisque $\langle f_n \rangle$ est de Cauchy, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} m, n > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| &= \sup \{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in I\} < \epsilon \\ \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| &< \epsilon \end{aligned}$$

Ainsi $\langle f_n(x_0) \rangle$ est une suite de Cauchy.

11. Démontrer le théorème 15.7 : $C[0, 1]$ est un espace vectoriel normé complet.

Solution :

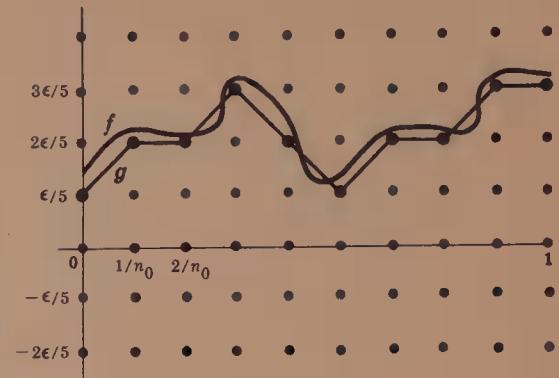
Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de Cauchy de $C[0, 1]$. Alors, pour tout $x_0 \in I$, $\langle f(x_0) \rangle$ est une suite de Cauchy de \mathbb{R} et, puisque \mathbb{R} est complet, elle converge. Définissons $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Alors (voir au problème 32) $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g . Mais, d'après la propositions 15.4, g est continue, c'est-à-dire $g \in C[0, 1]$; ainsi $C[0, 1]$ est complet.

12. Soit $f \in C[0, 1]$ et soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et des points

$$\begin{aligned} p_0 &= (0, \epsilon k_0/5), \dots, \\ p_i &= (i/n_0, \epsilon k_i/5), \dots, \\ p_{n_0} &= (1, \epsilon k_{n_0}/5) \end{aligned}$$

où k_0, \dots, k_{n_0} sont des entiers tels que si g est un arc polygonal reliant les p_i , alors $\|f - g\| < \epsilon$ (voir le schéma ci-contre). En d'autres termes, les fonctions linéaires par morceaux (ou polygonales) sont denses dans $C[0, 1]$.



Solution :

f est uniformément continue dans $[0, 1]$ et donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad |a - b| \leq 1/n_0 \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \epsilon/5 \quad (1)$$

Considérons le sous-ensemble suivant de $I \times \mathbb{R}$:

$$A = \{(x, y) : x = i/n_0, y = k\epsilon/5 \quad \text{où} \quad i = 0, \dots, n_0; k \in \mathbb{Z}\}$$

choisissons $p_i = (x_i, y_i) \in A$ tel que $y_i \leq f(x_i) < y_i + \epsilon/5$

Alors $|f(x_i) - g(x_i)| = |f(x_i) - y_i| < \epsilon/5$ et par (1), $|f(x_i) - f(x_{i+1})| < \epsilon/5$

comme on l'a représenté sur le schéma ci-dessus.

Remarquons que

$$|g(x_i) - g(x_{i+1})| \leq |g(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - g(x_{i+1})| < \epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 = 3\epsilon/5$$

Puisque g est linéaire entre x_i et x_{i+1} ,

$$x_i \leq z \leq x_{i+1} \Rightarrow |g(x_i) - g(z)| \leq |g(x_i) - g(x_{i+1})| < 3\epsilon/5$$

A présent pour tout point $z \in I$, $\exists x_k$ vérifiant $x_k \leq z \leq x_{k+1}$. D'où

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - f(x_k)| + |f(x_k) - g(x_k)| + |g(x_k) - g(z)| < \epsilon/5 + \epsilon/5 + 3\epsilon/5 = \epsilon$$

Mais z était un point arbitraire dans I ; d'où $\|f - g\| < \epsilon$.

13. Soit m un nombre entier positif arbitraire et soit $A_m \subset C[0, 1]$ formé des fonctions f ayant la propriété que

$$\exists x_0 \in \left[0, 1 - \frac{1}{m}\right] \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$$

Montrer que A_m est un fermé de $C[0, 1]$. (Remarquer que toute fonction de f de $C[0, 1]$ qui est dérivable en un point appartient à un certain A_m pour m assez grand.)

Solution :

Soit $g \in \overline{A}_m$. Nous voulons montrer que $g \in A_m$, c'est-à-dire $\overline{A}_m = A_m$. Puisque $g \in \overline{A}_m$, il existe une suite (f_1, f_2, \dots) dans A_m convergeant vers g . A présent pour chaque f_i il existe un point x_i tel que

$$x_i \in \left[0, 1 - \frac{1}{m}\right] \quad \text{et} \quad \left| \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x_i)}{h} \right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right) \quad (1)$$

Or $\langle x_n \rangle$ est une suite d'un compact $\left[0, 1 - \frac{1}{m}\right]$ et a donc une sous-suite $\langle x_{i_n} \rangle$ laquelle converge vers par exemple $x_0 \in \left[0, 1 - \frac{1}{m}\right]$.

A présent $f_n \rightarrow g$ implique $f_{i_n} \rightarrow g$ et donc (Problème 30), passant à la limite dans (1), il vient

$$\left| \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right| \leq m, \quad \forall h \in \left(0, \frac{1}{m}\right)$$

Ainsi $g \in A_m$ et A_m est fermé.

14. Soit $A_m \subset C[0, 1]$ défini comme au problème 13. Montrer que A_m est non dense ou rare dans $C[0, 1]$.

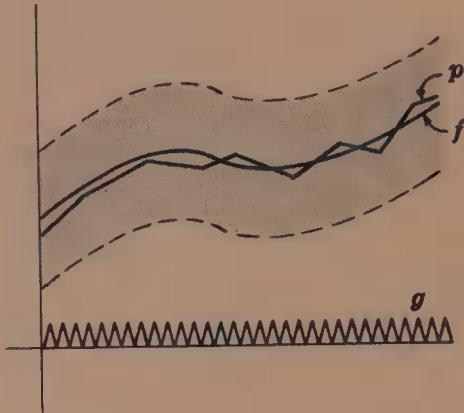
Solution :

A_m est non dense ou rare dans $C[0, 1]$ ssi $\text{int}(\bar{A}_m) = \text{int}(A_m) = \emptyset$. Soit $S = S(f, \delta)$ une boule ouverte quelconque de $C[0, 1]$. Nous affirmons que S contient un point n'appartenant pas à A_m et donc que $\text{int}(\bar{A}_m) = \emptyset$.

D'après le problème 12, il existe un arc polygonal $p \in C[0, 1]$ tel que $\|f - p\| < \frac{1}{2}\delta$. Soit g une fonction en dents de scie d'amplitude inférieure à $\frac{1}{2}\delta$ et de pente suffisamment grande (Problème 33). Alors la fonction $h = p + g$ appartient à $C[0, 1]$ mais n'appartient pas à A_m . En outre,

$$\|f - h\| \leq \|f - p\| + \|g\| < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta$$

ainsi $h \in S$ et la démonstration est achevée.



15. Soit $A_m \subset C[0, 1]$ défini comme au problème 13. Montrer que $C[0, 1] \neq \cup_{m=1}^{\infty} A_m$.

Solution :

Puisque A_m est non dense dans $C[0, 1]$, $B = \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ est de première catégorie, ou maigre. Mais, d'après le théorème de Baire sur la catégorie, $C[0, 1]$ comme espace complet est de deuxième catégorie. Ainsi $C[0, 1] \neq B$.

16. Démontrer la proposition 15.8 : Il existe une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est dérivable nulle part.

Solution :

Soit $f \in C[0, 1]$ admettant une dérivée en x_0 par exemple et supposons que $|f'(x_0)| = t$. Alors

$$\exists \epsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq t + 1, \quad \forall h \in (-\epsilon, \epsilon)$$

A présent choisissons $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t + 1 \leq m_0$ et que $1/m_0 < \epsilon$. Alors $f \in A_{m_0}$. Ainsi $\cup_{m=1}^{\infty} A_m$ contient toutes les fonctions dérivables en un point de I .

Mais d'après le problème précédent, $C[0, 1] \neq \cup_{m=1}^{\infty} A_m$ et donc il existe une fonction dans $C[0, 1]$ qui n'est nulle part dérivable.

17. Démontrer le théorème (d'Ascoli) 15.9 : Soit \mathcal{A} un sous-ensemble fermé de $C[0, 1]$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes : (i) \mathcal{A} est compact. (ii) \mathcal{A} est uniformément borné et équicontinu.

Solution :

(i) \Rightarrow (ii) : Puisque \mathcal{A} est compact c'est un sous-ensemble borné de $C[0, 1]$ et donc uniformément borné comme ensemble de fonctions. A présent il nous reste à montrer que \mathcal{A} est équicontinu.

Soit $\epsilon > 0$. Puisque \mathcal{A} est compact il possède un réseau de maille ϵ fini, par exemple $\mathcal{B} = \{f_1, \dots, f_t\}$. Ainsi pour tout $f \in \mathcal{A}$,

$$\exists f_{i_0} \in \mathcal{B} \quad \text{tel que} \quad \|f - f_{i_0}\| = \sup \{|f(x) - f_{i_0}(x)| : x \in I\} \leq \epsilon/3$$

Donc, pour tout $x, y \in I = [0, 1]$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{i_0}(x) + f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y) + f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{i_0}(x)| + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + |f_{i_0}(y) - f(y)| \\ &\leq \epsilon/3 + |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + \epsilon/3 = |f_{i_0}(x) - f_{i_0}(y)| + 2\epsilon/3 \end{aligned}$$

A présent chaque $f_i \in \mathcal{B}$ est uniformément continue et donc

$$\exists \delta_i > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon/3$$

Posons $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_t\}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{A}$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f_{i_0}(x) + f_{i_0}(y)| + 2\epsilon/3 < \epsilon/3 + 2\epsilon/3 = \epsilon$$

Ainsi \mathcal{A} est équicontinu.

(ii) \Rightarrow (i) : Puisque \mathcal{A} est un sous-ensemble fermé de l'espace complet $C[0, 1]$, nous avons seulement à montrer que \mathcal{A} est précompact. Soit $\epsilon > 0$. Puisque \mathcal{A} est équicontinu,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a - b| < 1/n_0 \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \epsilon/5, \forall f \in \mathcal{A}$$

A présent pour chaque $f \in \mathcal{A}$, nous pouvons construire, d'après le problème 12, un arc polygonal p_f tel que $\|f - p_f\| < \epsilon$ et que p_f relie des points appartenant à

$$A = \{(x, y) : x = 0, 1/n_0, 2/n_0, \dots, 1; y = ne/5, n \in \mathbb{Z}\}$$

Nous affirmons que $\mathcal{B} = \{p_f : f \in \mathcal{A}\}$ est fini et donc un réseau de maille ϵ fini pour \mathcal{A} .

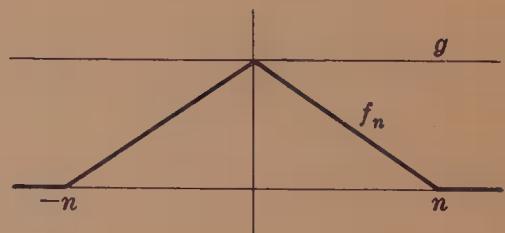
A présent \mathcal{A} est uniformément borné et donc \mathcal{B} est également uniformément borné. Ainsi il n'y a qu'un nombre fini des points de A qui apparaîtront dans les arcs polygonaux de \mathcal{B} . Ainsi il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'arcs dans \mathcal{B} . Ainsi \mathcal{B} est un réseau, de maille ϵ , fini, pour \mathcal{A} , et donc \mathcal{A} est précompact.

CONVERGENCE UNIFORME COMPACTE

18. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}|x| & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

Montrer que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante $g(x) = 1$.



Solution :

Soit E un sous-ensemble compact de \mathbb{R} et soit $0 < \epsilon < 1$. Puisque E est compact, il est borné ; par exemple $E \subset (-M, M)$ pour $M > 0$. A présent

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n_0 > M/\epsilon, \text{ ou, } M/n_0 < \epsilon$$

Donc

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| = \frac{1}{n}|x| < M/n_0 < \epsilon, \forall x \in E$$

Ainsi $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g sur E .

19. Montrer que si Y est séparé, alors la topologie définie par un compact et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$ est également séparée.

Solution :

Méthode 1. Soit $f, g \in \mathcal{F}(X, Y)$ avec $f \neq g$. Alors $\exists p \in X$ tel que $f(p) \neq g(p)$. A présent Y est séparé, donc \exists deux ouverts G et H de Y tels que $f(p) \in G$, $g(p) \in H$ et que $G \cap H = \emptyset$. Ainsi,

$$f \in F(p, G), \quad g \in F(p, H) \quad \text{et} \quad F(p, G) \cap F(p, H) = \emptyset$$

Or le singleton $\{p\}$ est compact et donc $F(p, G)$ et $F(p, H)$ appartiennent à la topologie définie par un compact et un ouvert sur $\mathcal{F}(X, Y)$. Par conséquent, $\mathcal{F}(X, Y)$ est séparée.

Méthode 2. La topologie définie par un compact et un ouvert est plus fine que la topologie définie par un point et un ouvert laquelle est séparée puisque la propriété d'être T_2 est une propriété invariante par passage au produit. Ainsi la topologie définie par un compact et un ouvert est également séparée.

20. Démontrer le théorème 15.12 : Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite dans $C(X, Y)$, ensemble des applications continues d'un espace topologique X dans un espace métrique (Y, d) . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers $g \in C(X, Y)$.
- (ii) $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour la topologie définie par un compact et un ouvert T sur $C(X, Y)$.

Solution :

- (i) \Rightarrow (ii) :

Soit $F(E, G)$ un élément ouvert de la sous-base de T contenant g ; ainsi $g[E] \subset G$, où E est un compact et G un ouvert. Puisque g est continue, $g[E]$ est compact. En outre $g[E] \cap G^c = \emptyset$ et donc (voir page 181) la distance du compact $g[E]$ au fermé G^c est strictement positive ; par exemple $d(g[E], G^c) = \epsilon > 0$. Puisque $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers g ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \quad \forall x \in E$$

Donc

$$d(f_n(x), g[E]) \leq d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \quad \forall x \in E$$

et donc, pour tout $x \in E$, $f_n(x) \notin G^c$. En d'autres termes,

$$n > n_0 \Rightarrow f_n[E] \subset G \Rightarrow f_n \in F(E, G)$$

Par conséquent, $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour la topologie définie par un compact et un ouvert T .

- (ii) \Rightarrow (i) :

Soit E un compact de X et soit $\epsilon > 0$. Nous voulons montrer que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur E vers g , c'est-à-dire

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) < \epsilon, \quad \forall x \in E$$

Puisque E est compact et g continue, $g[E]$ est compact. Soit $\mathcal{B} = \{p_1, \dots, p_t\}$ un réseau fini de maille $\epsilon/3$ pour $g[E]$. Considérons les boules ouvertes

$$S_1 = S(p_1, \epsilon/3), \dots, S_t = S(p_t, \epsilon/3) \quad \text{et} \quad G_1 = S(p_1, 2\epsilon/3), \dots, G_t = S(p_t, 2\epsilon/3)$$

Ainsi $\bar{S}_1 \subset G_1, \dots, \bar{S}_t \subset G_t$. En outre, puisque \mathcal{B} est un réseau de maille $\epsilon/3$ pour $g[E]$,

$$g[E] \subset \bar{S}_1 \cup \dots \cup \bar{S}_t \quad \text{et donc} \quad E \subset g^{-1}[\bar{S}_1] \cup \dots \cup g^{-1}[\bar{S}_t]$$

A présent posons $E_i = E \cap g^{-1}[\bar{S}_i]$ et donc $E = E_1 \cup \dots \cup E_t$ et $g[E_i] \subset \bar{S}_i \subset G_i$

Nous affirmons que les E_i sont des compacts. En effet, g est continue et ainsi $g^{-1}[\bar{S}_i]$, image réciproque d'un fermé, est un fermé ; ainsi $E_i = E \cap g^{-1}[\bar{S}_i]$, intersection d'un compact et d'un fermé est compact.

A présent $g[E_i] \subset G_i$ et donc les $F(E_i, G_i)$ sont des ouverts pour T de $\mathcal{F}(X, Y)$ contenant g ; ainsi $\bigcap_{i=1}^t F(E_i, G_i)$ est également un ouvert pour T contenant g . Or $\langle f_n \rangle$ converge vers g pour T ; ainsi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > n_0 \Rightarrow f_n \in \bigcap_{i=1}^t F(E_i, G_i) \Rightarrow f_n[E_i] \subset G_i, \dots, f_n[E_t] \subset G_t$$

A présent soit $x \in E$. Alors $x \in E_{i_0}$ et donc pour $n > n_0$,

$$f_n(x) \in f_n[E_{i_0}] \subset G_{i_0} \Rightarrow d(f_n(x), p_{i_0}) < 2\epsilon/3$$

et

$$g(x) \in g[E_{i_0}] \subset \bar{S}_{i_0} \Rightarrow d(g(x), p_{i_0}) \leq \epsilon/3$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$n > n_0 \Rightarrow d(f_n(x), g(x)) \leq d(f_n(x), p_{i_0}) + d(p_{i_0}, g(x)) < 2\epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \quad \forall x \in E$$

FONCTIONNELLES SUR LES ESPACES NORMES

21. Montrer que si f est une fonctionnelle linéaire sur X , alors $f(0) = 0$.

Solution :

Puisque f est linéaire et que $0 + 0 = 0$,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

Additionnant $-f(0)$ au deux membres, il vient $f(0) = 0$.

22. Montrer qu'une fonctionnelle linéaire bornée f sur X est uniformément continue.

Solution :

Soit M une borne de f et soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \epsilon/M$. Alors

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq M \|x - y\| < \epsilon$$

23. Démontrer la proposition 15.13 : Soient f et g deux fonctionnelles linéaires bornées sur X et soit $c \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et $c \cdot f$ sont également des fonctionnelles linéaires bornées sur X .

Solution :

Soient M et M^* des bornes pour f et g respectivement. Alors

$$(f + g)(x + y) = f(x + y) + g(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f + g)(x) + (f + g)(y)$$

$$(f + g)(kx) = f(kx) + g(kx) = k f(x) + k g(x) = k[f(x) + g(x)] = k(f + g)(x)$$

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M \|x\| + M^* \|x\| = (M + M^*) \|x\|$$

Ainsi $f + g$ est une fonctionnelle linéaire bornée.

$$\text{En outre } (c \cdot f)(x + y) = c f(x + y) = c [f(x) + f(y)] = c f(x) + c f(y) = (c \cdot f)(x) + (c \cdot f)(y)$$

$$(c \cdot f)(kx) = c f(kx) = c k f(x) = k c f(x) = k(c \cdot f)(x)$$

$$|(c \cdot f)(x)| = |c f(x)| = |c| |f(x)| \leq |c| (M \|x\|) = (|c| M) \|x\|$$

et donc $c \cdot f$ est une fonctionnelle linéaire bornée.

24. Démontrer la proposition 15.14 : L'application suivante sur X^* est une norme :

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|/\|x\| : x \neq 0\}$$

Solution :

Si $f = 0$ alors $f(x) = 0$, $\forall x \in X$ et donc $\|f\| = \sup \{0\} = 0$. Si $f \neq 0$, alors $\exists x_0 \neq 0$ tel que $f(x_0) \neq 0$, et donc

$$\|f\| = \sup \{|f(x)|/\|x\|\} \geq |f(x_0)|/\|x_0\| > 0$$

Ainsi l'axiome $[N_1]$ (voir page) est vérifié.

$$\begin{aligned} \text{A présent } \|k \cdot f\| &= \sup \{|(k \cdot f)(x)|/\|x\|\} = \sup \{|k f(x)|/\|x\|\} \\ &= \sup \{|k| |f(x)|/\|x\|\} = |k| \sup \{|f(x)|/\|x\|\} = |k| \|f\| \end{aligned}$$

Ainsi l'axiome $[N_2]$ est vérifié.

En outre,

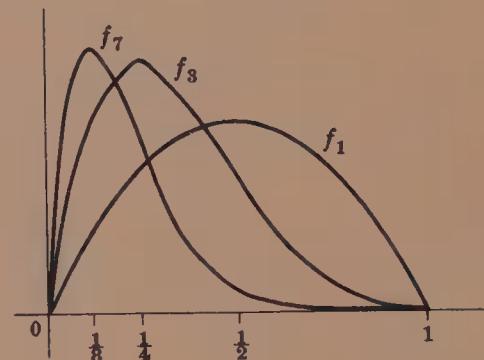
$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup \{|f(x) + g(x)|/\|x\|\} \leq \sup \{(|f(x)| + |g(x)|)/\|x\|\} \\ &\leq \sup \{|f(x)|/\|x\|\} + \sup \{|g(x)|/\|x\|\} = \|f\| + \|g\| \end{aligned}$$

et donc l'axiome $[N_3]$ est vérifié.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

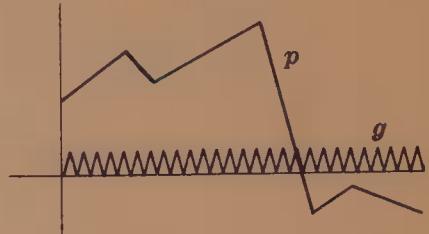
CONVERGENCE D'UNE SUITE DE FONCTIONS

25. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de fonctions à valeurs réelles de domaine $I = [0, 1]$ définie par $f_n(x) = x^n/n$.
- Montrer que $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction constante $g(x) = 0$, c'est-à-dire pour tout $x \in I$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.
 - Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \neq \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$
26. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de fonctions dérivables de domaine $[a, b]$ convergeant uniformément vers g . Démontrer que :
- $$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$
- (Remarquer que, d'après le problème précédent, ce résultat ne tient pas dans le cas de la convergence simple.)
27. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par
- $$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - x^2} & \text{si } |x| < n \\ 0 & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$
- Montrer que $\langle f_n \rangle$ ne converge pas uniformément vers la fonction constante $g(x) = 1$.
 - Démontrer que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante $g(x) = 1$.
28. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de fonctions de domaine $I = [0, 1]$ définies par $f_n(x) = nx(1-x)^n$.
- Montrer que $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers la fonction constante $g(x) = 0$.
 - Montrer que $\langle f_n \rangle$ ne converge pas uniformément vers $g(x) = 0$.
 - Démontrer que dans ce cas,
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right] dx$$
29. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ la suite de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f_n(x) = \frac{n+1}{n} x$.
- Montrer que $\langle f_n \rangle$ converge uniformément sur tout compact vers la fonction $g(x) = x$.
 - Montrer que $\langle f_n \rangle$ ne converge pas uniformément vers $g(x) = x$.
30. Soit $\langle f_1, f_2, \dots \rangle$ une suite de fonctions intégrables (au sens de Riemann) définies sur $I = [0, 1]$. La suite $\langle f_n \rangle$ est dite *converger en moyenne quadratique* vers la fonction g si
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x) - g(x)|^2 dx = 0$$
- Montrer que si f converge uniformément vers g , alors $\langle f_n \rangle$ converge en moyenne quadratique vers g .
 - Montrer sur un contre-exemple que la convergence en moyenne quadratique n'implique pas nécessairement la convergence simple.



L'ESPACE DE FONCTIONS $C[0, 1]$

31. Montrer que $C[a, b]$ est isométrique et donc homéomorphe à $C[0, 1]$.
32. Démontrer que si $\langle f_n \rangle$ converge vers g dans $C[0, 1]$ et si $x_n \rightarrow x_0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = g(x_0)$.
33. Soit p un arc polygonal dans $C[0, 1]$ et soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe une fonction en dents de scie g d'amplitude inférieure à $\frac{1}{2}\delta$, c'est-à-dire $\|g\| < \frac{1}{2}\delta$, telle que $p + g$ n'appartienne pas à A_m (voir problème 14).
34. Soit $\langle f_n \rangle$ une suite de Cauchy dans $C[0, 1]$ et supposons que $\langle f_n \rangle$ converge simplement vers g . Alors $\langle f_n \rangle$ converge uniformément vers g .



CONTINUITÉ UNIFORME

35. Montrer que $f(x) = 1/x$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle ouvert $(0, 1)$.
36. Définir la continuité uniforme pour une application $f : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces métriques arbitraires.
37. Démontrer que si f est une application continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y , alors f est uniformément continue.

FONCTIONNELLES SUR LES ESPACES NORMÉS

38. Soit f une fonctionnelle linéaire bornée sur un espace normé X . Montrer que
- $$\sup \{|f(x)| / \|x\| : x \neq 0\} = \inf \{M : M \text{ est une borne pour } f\}$$
39. Montrer que si f est une fonctionnelle linéaire continue sur X alors f est bornée.
40. Démontrer que le dual X^* d'un espace normé quelconque X est complet.

APPENDICE

Propriétés des nombres réels

AXIOMES DE CORPS

L'ensemble des nombres réels noté \mathbb{R} joue un rôle très important en mathématiques et en analyse en particulier. D'ailleurs plusieurs notions de topologie ont été obtenues par abstraction à partir des propriétés des nombres réels. L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels peut être caractérisé comme étant un corps ordonné archimédien complet. Dans cet appendice on étudie la relation d'ordre de \mathbb{R} qu'on utilise pour définir la topologie usuelle de \mathbb{R} (voir au chapitre 4). Nous allons à présent énoncer les axiomes de corps de \mathbb{R} qui, ainsi que leurs conséquences, sont supposés vérifiés dans toute la suite.

DEFINITION: Un ensemble F de deux éléments ou plus, muni de deux lois de composition internes appelées addition ($+$) et multiplication (\cdot) est un corps s'il vérifie les axiomes suivants :

- [A₁] L'addition est interne : $a, b \in F \Rightarrow a + b \in F$
- [A₂] L'addition est associative : $a, b, c \in F \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$
- [A₃] L'addition a un élément neutre : $\exists 0 \in F$ tel que $0 + a = a + 0 = a, \forall a \in F$
- [A₄] Existence d'un opposé : $a \in F \Rightarrow \exists -a \in F$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
- [A₅] Commutativité de l'addition : $a, b \in F \Rightarrow a + b = b + a$
- [M₁] La multiplication est interne : $a, b \in F \Rightarrow a \cdot b \in F$
- [M₂] Associativité de la multiplication : $a, b, c \in F \Rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- [M₃] Existence d'un élément neutre pour la multiplication : $\exists 1 \in F, 1 \neq 0$ tel que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in F$
- [M₄] Existence d'un inverse : $a \in F, a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in F$ tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
- [M₅] Commutativité de la multiplication : $a, b \in F \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
- [D₁] Distributivité à gauche : $a, b, c \in F \Rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- [D₂] Distributivité à droite : $a, b, c \in F \Rightarrow (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Ici \exists ■ lit “il existe”, \forall se lit “pour tout” et \Rightarrow se lit “implique”.

Les propriétés algébriques suivantes des nombres réels découlent directement des axiomes de corps.

Proposition A.1 : Soit F un corps, alors :

- (i) Les éléments neutres 0 et 1 sont uniques.
- (ii) Les lois suivantes de régularité sont vérifiées :
 - (1) $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$ (2) $a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0 \Rightarrow b = c$

(iii) Les symétriques — a et a^{-1} sont uniques.

(iv) Pour tout $a, b \in F$,

$$(1) \quad a \cdot 0 = 0, \quad (2) \quad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b), \quad (3) \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

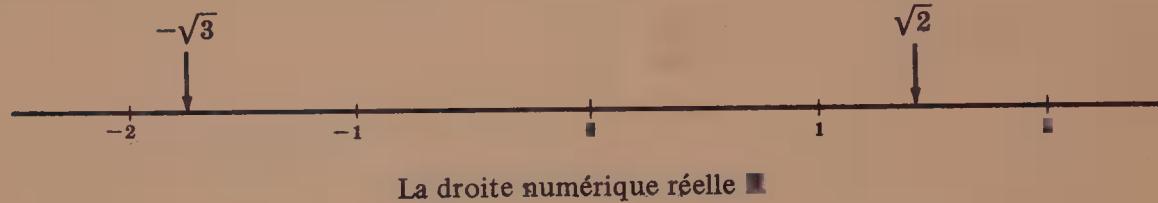
La soustraction et la division (par un élément non nul) sont définies, dans un corps, comme suit :

$$b - a \equiv b + (-a) \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} \equiv b \cdot a^{-1}$$

Remarque : Un ensemble non vide muni de deux lois de composition vérifiant tous les axiomes d'un corps sauf éventuellement $[M_3]$, $[M_4]$ et $[M_5]$ est appelé un anneau. L'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs muni de l'addition et de la multiplication, par exemple, est un anneau mais non un corps.

LA DROITE REELLE

Nous admettons que la représentation géométrique de \mathbb{R} au moyen de points de la droite est familière au lecteur comme on l'a représenté sur la figure ci-dessous. Remarquons qu'un point appelé l'origine ■ a été choisi pour représenter zéro et qu'un autre point, en général situé à droite du précédent, a été choisi pour représenter 1. Alors il existe une manière naturelle de faire correspondre aux points de la droite les nombres réels, c'est-à-dire chaque point représente un nombre réel unique et chaque nombre réel est représenté par un point unique. Pour cette raison on appelle \mathbb{R} la *droite numérique réelle* et nous utiliserons indifféremment les mots point et nombre.



La droite numérique réelle ■

SOUS-ENSEMBLES DE \mathbb{R}

Les symboles \mathbb{Z} et \mathbb{N} désignent les sous-ensembles suivants de \mathbb{R} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Les éléments de \mathbb{Z} sont appelés *entiers relatifs* et les éléments de \mathbb{N} *entiers positifs ou naturels*.

Le symbole \mathbb{Q} désigne les *nombres rationnels*. Les nombres rationnels sont les nombres réels pouvant s'exprimer comme quotients de deux entiers relatifs pourvu que le dénominateur ne soit pas nul :

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x = p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

A présent chaque entier relatif est également un nombre rationnel puisque par exemple $-5 = 5/-1$; ainsi \mathbb{Z} est un sous-ensemble de \mathbb{Q} . D'ailleurs on a la hiérarchie d'ensembles suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les *nombres irrationnels* sont les nombres réels qui ne sont pas rationnels ; ainsi \mathbb{Q}^c , le complémentaire (dans \mathbb{R}) de l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels, désigne l'ensemble des nombres irrationnels.

NOMBRES POSITIFS

Les nombres réels situés à droite de 0 sur la droite réelle \mathbb{R} , c'est-à-dire du même côté que 1, sont les *nombres positifs* ; les nombres situés à gauche de 0 sont les *nombres négatifs*. Les axiomes suivants caractérisent complètement l'ensemble des nombres positifs :

- [P₁] Si $a \in \mathbb{R}$, alors une seule des assertions suivantes est vraie : a est positif ; $a = 0$; $-a$ est positif.
- [P₂] Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont positifs, alors leur somme $a + b$ et leur produit $a \cdot b$ sont également positifs.

Il s'ensuit que a est positif si et seulement si $-a$ est négatif.

Exemple 1.1 : Nous allons montrer, en n'utilisant que [P₁] et [P₂], que le nombre réel 1 est positif. D'après [P₁], soit 1, soit -1 , est positif. Admettons que -1 soit positif donc, d'après [P₂], le produit $(-1)(-1) = 1$ est également positif. Mais ceci contredit [P₁] qui affirme que 1 et -1 ne peuvent être tous les deux positifs. Ainsi l'hypothèse que -1 est positif est fausse et 1 est positif.

Exemple 1.2 : Le nombre réel -2 est négatif. En effet, d'après l'exemple 1.1, 1 est positif et donc d'après [P₂] la somme $1 + 1 = 2$ est positive. Donc d'après [P₁], -2 n'est pas positif, c'est-à-dire -2 est négatif.

Exemple 1.3 : Nous allons montrer que le produit $a \cdot b$ d'un nombre positif a par un nombre négatif b est négatif. En effet si b est négatif, d'après [P₁], $-b$ est positif et donc, par [P₂], le produit $a \cdot (-b)$ est également positif. Mais $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Ainsi $-(a \cdot b)$ est positif et donc, par [P₁], $a \cdot b$ est négatif.

ORDRE

Nous allons définir une relation d'ordre dans \mathbb{R} en utilisant la notion de positivité.

DEFINITION: Le nombre réel a est *inférieur* au nombre réel b , ce qui s'écrit $a < b$ si la différence $b - a$ est positive.

Géométriquement, si $a < b$, alors le point a sur la droite réelle se trouve à gauche du point b .

La notation suivante est également utilisée :

$b > a$, se lit b est supérieur à a ,	signifie $a < b$
$a \leq b$, se lit a est inférieur ou égal à b ,	signifie $a < b$ ou $a = b$
$b \geq a$, se lit b est supérieur ou égal à a ,	signifie $a \leq b$

Exemple 2.1 : $2 < 5$; $-6 \leq -3$; $4 \leq 4$; $5 > -8$

Exemple 2.2 : Un nombre réel x est positifssi $x > 0$, et x est négatifsifi $x < 0$.

Exemple 2.3 : La notation $2 < x < 7$ signifie $2 < x$ et aussi $x < 7$; ainsi x se trouve entre 2 et 7 sur la droite réelle.

Les axiomes [P₁] et [P₂] qui définissent les nombres réels positifs sont utilisés pour démontrer le théorème suivant.

Théorème A.2 : Soient a, b et c des nombres réels. Alors :

- (i) soit $a < b$, $a = b$ soit $b < a$;
- (ii) si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$;
- (iii) si $a < b$, alors $a + c < b + c$;
- (iv) si $a < b$ et c est positif, alors $ac < bc$; et
- (v) si $a < b$ et c est négatif, alors $ac > bc$.

Corollaire A.3 : L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est totalement ordonné par la relation $a \leq b$.

VALEUR ABSOLUE

La valeur absolue d'un nombre réel x , notée $|x|$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarquons que la valeur absolue d'un nombre quelconque n'est jamais négative, c'est-à-dire $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'un point de vue géométrique, la valeur absolue de x est la distance du point x de la droite réelle à l'origine, c'est-à-dire au point 0. En outre, la distance de deux points quelconques $a, b \in \mathbb{R}$ est $|a - b| = |b - a|$.

Exemple 3.1 : $|-2| = 2$, $|7| = 7$, $|-\pi| = \pi$, $|-{\sqrt{2}}| = {\sqrt{2}}$

Exemple 3.2 : $|3 - 8| = |-5| = 5$ et $|8 - 3| = |5| = 5$

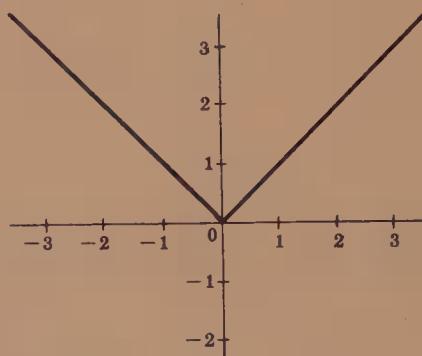
Exemple 3.3 : L'assertion $|x| < 5$ peut s'interpréter comme devant signifier que la distance de x à l'origine est inférieure à 5 ; ainsi x doit se trouver entre -5 et 5 sur la droite réelle, en d'autres termes

$$|x| < 5 \quad \text{et} \quad -5 < x < 5$$

ont la même signification et il en est de même de

$$|x| \leq 5 \quad \text{et} \quad -5 \leq x \leq 5$$

Le graphe de la fonction $f(x) = |x|$, c'est-à-dire la fonction valeur absolue, se trouve entièrement situé dans le demi-plan supérieur puisque $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (voir le schéma ci-dessous).



Graphe de $f(x) = |x|$

Les principaux faits concernant la fonction valeur absolue sont les suivants :

Proposition A.4 : Soient a, b et c des nombres réels. Alors :

- (i) $|a| \geq 0$, et $|a| = 0$ ssi $a = 0$;
- (ii) $|ab| = |a||b|$;
- (iii) $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- (iv) $|a - b| \geq ||a| - |b||$; et
- (v) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

AXIOME DE LA BORNE SUPERIEURE

Au chapitre 14, nous avons étudié la notion d'espace complet dans le cadre des espaces métriques les plus généraux. Pour la droite réelle \mathbb{R} , on peut utiliser la définition : \mathbb{R} est *complet* signifie que \mathbb{R} vérifie l'axiome suivant :

[LUB] (Axiome de la borne supérieure) : Si A est un ensemble de nombres réels majoré, alors A admet une borne supérieure, c'est-à-dire $\sup(A)$ existe.

Exemple 4.1 : L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure. En effet soit

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0, q^2 < 2\}$$

c'est-à-dire A est formé par les rationnels positifs inférieurs à $\sqrt{2}$. A présent A est majoré, par exemple 5 est un majorant de A . Mais A n'a pas de borne supérieure, c'est-à-dire il n'existe pas de nombre rationnel m tel que $m = \sup(A)$. Remarquer que m ne peut être égal à $\sqrt{2}$ puisque $\sqrt{2}$ n'appartient pas à \mathbb{Q} .

Nous allons utiliser l'axiome de la borne supérieure pour montrer que \mathbb{R} est ordonné et archimédiens.

Théorème (Axiome d'Archimède) A.5 : L'ensemble $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ des entiers positifs n'est pas majoré.

En d'autres termes, il n'existe pas de nombre réel supérieur à tout nombre entier positif. Une des conséquences de ce théorème est le :

Corollaire A.6 : Il existe un nombre rationnel entre deux nombres réels distincts.

PROPRIÉTÉ DES INTERVALLES EMBOÎTES

La propriété des intervalles emboîtés de \mathbb{R} contenue dans le théorème suivant est une conséquence importante de l'axiome de la borne supérieure, c'est-à-dire du caractère complet de \mathbb{R} .

Théorème (Propriété des intervalles emboîtés) A.7 : Soit $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, ... une suite d'intervalles fermés (bornés) emboîtés, c'est-à-dire $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Alors, il existe au moins un point commun à tous les intervalles, c'est-à-dire

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$$

Il est nécessaire que les intervalles du théorème soient fermés et bornés, sans quoi le théorème n'est pas vrai comme on le voit dans les deux exemples suivants.

Exemple 5.1 : Soient A_1, A_2, \dots la suite suivante d'intervalles semi-ouverts :

$$A_1 = (0, 1], A_2 = (0, 1/2], \dots, A_k = (0, 1/k], \dots$$

A présent la suite d'intervalles est emboîtée, c'est-à-dire chaque intervalle contient l'intervalle suivant : $A_1 \supset A_2 \supset \dots$. Mais l'intersection des intervalles est vide, c'est-à-dire,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \dots = \emptyset$$

Ainsi il n'existe pas de point commun à tous les intervalles.

Exemple 5.2 : Soit A_1, A_2, \dots la suite suivante d'intervalles fermés infinis :

$$A_1 = [1, \infty), A_2 = [2, \infty), \dots, A_k = [k, \infty), \dots$$

A présent $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, c'est-à-dire la suite d'intervalles est emboîtée. Mais il n'existe aucun point commun à tous les intervalles, c'est-à-dire,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \cap \dots = \emptyset$$

PROBLEMES RESOLUS

AXIOMES DE CORPS

1. Démontrer la proposition A.1 (iv) : Pour tout $a, b \in F$,

$$(1) \ a0 = 0, \quad (2) \ a(-b) = (-a)b = -ab, \quad (3) \ (-a)(-b) = ab$$

Solution :

- (1) $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Additionnons $-a0$ aux deux membres, il vient $0 = a0$.
- (2) $0 = a0 = a(b + (-b)) = ab + a(-b)$. Ainsi $a(-b)$ est l'opposé de ab , c'est-à-dire $a(-b) = -ab$. De même, $(-a)b = -ab$.
- (3) $0 = (-a)0 = (-a)(b + (-b)) = (-a)b + (-a)(-b) = -ab + (-a)(-b)$. Additionnant ab aux deux nombres, il vient $ab = (-a)(-b)$.

2. Montrer que la multiplication est distributive par rapport à la soustraction dans un corps F , c'est-à-dire $a(b - c) = ab - ac$.

Solution :
$$a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$$

3. Montrer qu'un corps F n'a pas de diviseur de zéro, c'est-à-dire $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Solution :

Supposons que $ab = 0$ et que $a \neq 0$. Alors a^{-1} existe et donc $b = 1b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0$.

INEGALITES ET NOMBRES POSITIFS

4. Réécrire les expressions de sorte que x seul se trouve compris entre les signes d'inégalité :

$$(i) 3 < 2x - 5 < 7, \quad (ii) -7 < -2x + 3 < 5$$

Solution :

On utilise le théorème A.2 ;

- (i) D'après (iii), on peut ajouter 5 à chaque membre de $3 < 2x - 5 < 7$; on obtient ainsi $8 < 2x < 12$. D'après (iv), on peut multiplier chaque membres par $\frac{1}{2}$ et il vient $4 < x < 6$.
- (ii) Ajoutons -3 à chaque membre pour obtenir $-10 < -2x < 2$. D'après (v), on peut multiplier chaque membre par $-\frac{1}{2}$ et renverser le sens des inégalités pour obtenir $-1 < x < 5$.

5. Démontrer que $\frac{1}{2}$ est un nombre positif.

Solution :

D'après $[P_1]$, soit $-\frac{1}{2}$ est positif soit $\frac{1}{2}$ est positif. Supposons que $-\frac{1}{2}$ soit positif, alors par $[P_2]$, $(-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2}) = -1$ est également positif. Mais, d'après l'exemple 1.1, 1 est positif et non -1 . Ainsi nous avons une contradiction et donc $\frac{1}{2}$ est positif.

6. Démontrer le théorème A.2 (ii) : Si $a < b$ et $b < c$, alors $a < c$.

Solution :

Par définition $a < b$ signifie que $b - a$ est positif ; et $b < c$ signifie que $c - b$ est positif mais alors, par $[P_2]$, la somme $(b - a) + (c - b) = c - a$ est positive et donc, d'après la définition, $a < c$.

7. Démontrer le théorème A.2 (v) : Si $a < b$ et si c est négatif, alors $ac > bc$.

Solution :

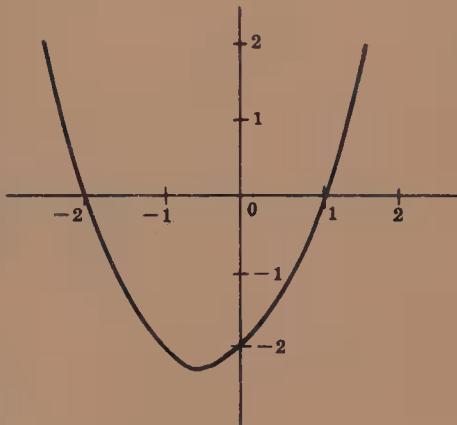
Par définition, $a < b$ signifie que $b - a$ est positif. Par [P₁], si c est négatif $-c$ est positif et donc par [P₂], le produit $(b - a)(-c) = ac - bc$ est également positif. Ainsi par définition, $bc < ac$, ou, ce qui revient au même, $ac > bc$.

8. Trouver tous les nombres réels x tels que $(x - 1)(x + 2) < 0$.

Solution :

On doit trouver toutes les valeurs de x telles que $y = (x - 1)(x + 2)$ soit négatif. Puisque le produit de deux nombres est négatifssi l'un est négatif et l'autre positif, y est négatif si (i) $x - 1 < 0$ et $x + 2 > 0$ ou (ii) $x - 1 > 0$ et $x + 2 < 0$. Si $x - 1 > 0$ et $x + 2 < 0$, alors $x > 1$ et $x < -2$, ce qui est impossible. Ainsi y est négatifssi $x - 1 < 0$ et $x + 2 > 0$, c'est-à-dire si $x < 1$ et $x > -2$, c'est-à-dire si $-2 < x < 1$.

Remarquons que le graphe de $x = (x - 1)(x + 2)$ coupe l'axe Ox en $x = 1$ et $x = -2$ comme on l'a montré ci-contre. De plus, le graphe se trouve en dessous de l'axe Ox ssi y est négatif, c'est-à-diressi $-2 < x < 1$.



VALEUR ABSOLUE

9. Calculer : (i) $|1 - 3| + |-7|$, (ii) $|-1 - 4| - 3 - |3 - 5|$, (iii) $||-2| - |-6||$.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad |1 - 3| + |-7| &= |-2| + |-7| = 2 + 7 = 9 \\ \text{(ii)} \quad |-1 - 4| - 3 - |3 - 5| &= |-5| - 3 - |-2| = 5 - 3 - 2 = 0 \\ \text{(iii)} \quad ||-2| - |-6|| &= |2 - 6| = |-4| = 4 \end{aligned}$$

10. Réécrire, sans utiliser le signe valeur absolue. (i) $|x - 2| < 5$, (ii) $|2x + 3| < 7$.

Solution :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad -5 < x - 2 < 5 &\text{ ou } -3 < x < 7 \\ \text{(ii)} \quad -7 < 2x + 3 < 7 &\text{ ou } -10 < 2x < 4 \text{ ou } -5 < x < 2 \end{aligned}$$

11. Réécrire en utilisant le signe valeur absolue : (i) $-2 < x < 6$, (ii) $4 < x < 10$.

Solution :

Réécrire d'abord les inégalités de telle sorte qu'un nombre et son opposé apparaissent aux deux extrémités de l'inégalité :

- Ajouter -2 aux deux membres de $-2 < x < 6$ pour obtenir $-4 < x - 2 < 4$ qui équivaut à $|x - 2| < 4$.
- Ajouter -7 aux deux membres de $4 < x < 10$ pour obtenir $-3 < x - 7 < 3$ qui équivaut à $|x - 7| < 3$.

12. Démontrer la proposition A.4 (iii) : $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Solution :

Méthode 1.

Puisque $|a| = \pm a$, $-|a| \leq a \leq |a|$; et également, $-|b| \leq b \leq |b|$, alors, ajoutant

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$|a + b| \leq ||a| + |b|| = |a| + |b|$$

Donc $|a + b| \leq |a| + |b| = |a| + |b|$

Puisque $|a| + |b| \geq 0$.

Méthode 2.

$ab \leq |ab| = |a||b|$ implique $2ab \leq 2|a||b|$ et donc

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Mais $\sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$ et donc, en prenant la racine carrée de l'expression ci-dessus, $|a+b| \leq |a| + |b|$.

13. Démontrer la proposition A.4 (v) : $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$.

Solution :

$$|a-c| = |(a-b) + (b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$$

AXIOME DE LA BORNE SUPERIEURE

14. Démontrer l'axiome d'Archimède A.5 : Le sous-ensemble $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ de R n'est pas majoré.

Solution :

Supposons que N soit majoré. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\sup(N)$ existe, par exemple $b = \sup(N)$. Alors $b - 1$ n'est pas un majorant de N et donc

$$\exists n_0 \in N \quad \text{tel que} \quad b - 1 < n_0 \quad \text{soit} \quad b < n_0 + 1$$

Mais $n_0 \in N$ implique que $n_0 + 1 \in N$ et donc b n'est pas un majorant de N , ce qui est une contradiction. Ainsi N n'est pas majoré.

15. Soient a et b deux nombres réels positifs. Alors il existe un entier positif $n_0 \in N$ tel que $b < n_0 a$. En d'autres termes, il existe un multiple de a qui est supérieur à b .

Solution :

Supposons que n_0 n'existe pas, c'est-à-dire que $na < b$ pour tout $n \in N$. Alors, puisque a est positif, $n < b/a$ pour tout $n \in N$ et donc b/a est un majorant de N . Ceci contredit le théorème A.5 (Problème 14), et donc n_0 existe bien.

16. Démontrer que si a est un nombre positif, c'est-à-dire $0 < a$, alors il existe un entier positif $n_0 \in N$ tel que $0 < 1/n_0 < a$.

Solution :

Supposons que n_0 n'existe pas, c'est-à-dire $a \leq 1/n$ pour tout $n \in N$. Alors multipliant les deux membres par le nombre positif n/a , il vient $n \leq 1/a$ pour tout $n \in N$. Ainsi N est majoré par $1/a$ ce qui est impossible. Par conséquent n_0 existe bien.

17. Démontrer le corollaire A.6 : Il existe un rationnel q entre deux réels distincts a et b .

Solution :

L'un des deux réels, a par exemple, est inférieur à l'autre, c'est-à-dire $a < b$. Si a est négatif et b positif alors le rationnel 0 est compris entre eux, c'est-à-dire $a < 0 < b$. Nous allons donc démontrer le corollaire dans le cas où a et b sont tous les deux positifs ; dans le cas où a et b sont tous les deux négatifs, on procède de façon analogue et le cas où a ou b est nul est traité dans le problème 16.

A présent $a < b$ signifie que $b - a$ est positif et donc, d'après le problème précédent,

$$\exists n_0 \in N \quad \text{tel que} \quad 0 < 1/n_0 < b - a \quad \text{soit} \quad a + (1/n_0) < b$$

Nous affirmons qu'il existe un multiple entier de $1/n_0$ qui se trouve entre a et b . Notrons que $1/n_0 < b$ puisque $1/n_0 < a + (1/n_0) < b$. D'après le problème 15, il existe un multiple de $1/n_0$ qui soit supérieur à b . Soit m_0 le plus petit entier positif tel que $m_0/n_0 \geq b$; ainsi $(m_0 - 1)/n_0 < b$. Nous affirmons que

$$a < \frac{m_0 - 1}{n_0} < b$$

Sinon $\frac{m_0 - 1}{n_0} \leq a$ et donc $\frac{m_0 - 1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{m_0}{n_0} \leq a + \frac{1}{n_0} < b$

ce qui contredit la définition de m_0 . Ainsi $m_0 - 1/n_0$ est un rationnel situé entre a et b .

PROPRIETE DES INTERVALLES EMBOITES

18. Démontrer le théorème A.7 (Propriété des intervalles emboités) : Soit $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$ une suite d'intervalles fermés (bornés) emboités, c'est-à-dire $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Alors il existe au moins un point commun à tous les intervalles.

Solution :

$I_1 \supset I_2 \supset \dots$ implique que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$. Nous affirmons que

$$a_m < b_n \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N}$$

en effet, $m > n$ implique $a_m < b_m \leq b_n$ et $m \leq n$ implique $a_m \leq a_n < b_n$. Ainsi chaque b_n est une majorante de l'ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ des extrémités gauches. D'après l'axiome de la borne supérieure de \mathbb{R} , $\sup(A)$ existe ; par exemple, $p = \sup(A)$. A présent $p \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque chaque b_n est un majorant de A et que p est la borne supérieure. En outre, $a_n \leq p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque p est un majorant de $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Mais

$$a_n \leq p \leq b_n \Rightarrow p \in I_n = [a_n, b_n]$$

Ainsi p est commun à tous les intervalles.

19. Supposons dans le problème précédent que les longueurs des intervalles tendent vers zéro, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Montrer qu'il existe alors un seul point commun à tous les intervalles. Rappelons que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ signifie que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n > n_0 \Rightarrow (b_n - a_n) < \epsilon$$

Solution :

Supposons que p_1 et p_2 appartiennent à tous les intervalles. Si $p_1 \neq p_2$ alors $|p_1 - p_2| = \delta > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, il existe un intervalle $I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$ tel que la longueur de I_{n_0} soit inférieure à la distance $|p_1 - p_2| = \delta$ de p_1 à p_2 . Par conséquent p_1 et p_2 ne peuvent tous deux appartenir à I_{n_0} , ce qui est une contradiction. Ainsi $p_1 = p_2$, c'est-à-dire tous les intervalles ne peuvent avoir qu'un seul point commun.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

AXIOMES DE CORPS

20. Montrer que la loi de distributivité à droite [D_2] est une conséquence de la loi de distributivité à gauche [D_1] et de la commutativité [M_S].
21. Montrer que l'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels muni de l'addition et la multiplication est un corps.

22. Montrer que l'ensemble suivant A de nombres réels muni de l'addition et de la multiplication est un corps
- $$A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \text{ rationnel}\}$$

23. Montrer que l'ensemble $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ des entiers pairs muni de l'addition et de la multiplication vérifie tous les axiomes d'un corps sauf $[M_3]$, $[M_4]$ et $[M_5]$, c'est-à-dire est un anneau.

INEGALITES ET NOMBRES POSITIFS

24. Réécrire les inégalités suivantes de sorte que x seul se trouve entre les signes d'inégalité.
 (i) $4 < -2x < 10$, (ii) $-1 < 2x - 3 < 5$, (iii) $-3 < 5 - 2x < 7$.
25. Démontrer que le produit de deux nombres négatifs est positif.
26. Démontrer le théorème A.2(iii) : Si $a < b$ alors $a + c < b + c$.
27. Démontrer le théorème A.2(iv) : Si $a < b$ et si c est positif alors $ac < bc$.
28. Démontrer le corollaire A.3 : L'ensemble \mathbb{R} est totalement ordonné par la relation $a \leq b$.
29. Démontrer que si $a < b$ et si c est positif alors : (i) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$, (ii) $\frac{c}{b} < \frac{c}{a}$.
30. Démontrer que $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$. Plus généralement démontrer que
 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$.
31. Démontrer que si a et b sont deux réels tels que $a < b + \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, alors $a \leq b$.
32. Trouver toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles : (i) $x^3 + x^2 - 6x > 0$, (ii) $(x - 1)(x + 3)^2 \leq 0$.

VALEUR ABSOLUE

33. Calculer : (i) $|-2| + |1 - 4|$, (ii) $|3 - 8| - |1 - 9|$, (iii) $||-4| - |2 - 7||$.
34. Réécrire en utilisant le signe valeur absolue : (i) $-3 < x < 9$, (ii) $2 \leq x \leq 8$, (iii) $-7 < x < -1$.
35. Démontrer : (i) $|-a| = |a|$, (ii) $a^2 = |a|^2$, (iii) $|a| = \sqrt{a^2}$, (iv) $|x| < a$ ssi $-a < x < a$.
36. Démontrer la proposition A.4 (ii) : $|ab| = |a| |b|$.
37. Démontrer la proposition A.4 (iv) : $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

AXIOME DE LA BORNE SUPERIEURE

38. Démontrer que si A est un ensemble de réels minoré alors A admet une borne inférieure, c'est-à-dire $\inf(A)$ existe.
39. Démontrer que : (i) Si $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 < 2$; alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $(x + 1/n)^2 < 2$.
 (ii) Si $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 > 2$; alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $(x - 1/n)^2 > 2$.
40. Démontrer qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a^2 = 2$.
41. Démontrer qu'entre deux nombres réels positifs il existe un nombre de la forme r^2 où r est rationnel.
42. Démontrer qu'entre deux réels il y a un irrationnel.

REPONSES AUX PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

24. (i) $-5 < x < -2$ (ii) $1 < x < 4$ (iii) $-1 < x < 4$

32. (i) $-3 < x < 0$ ou $x > 2$, i.e. $x \in (-3, 0) \cup (2, \infty)$ (ii) $x \leq 1$

33. (i) 5 (ii) -3 (iii) 1

34. (i) $|x - 3| < 6$ (ii) $|x - 5| \leq 3$ (iii) $|x + 4| < 3$

Index

- Absolue, propriété, 168
Absolue, valeur, 248
Accumulation, point d', 54, 60, 75
Achevée, droite réelle, 171
Adhérence, 77
Adhérent, point, 77
Aleph-zéro, 36
Alexandrov, compactification d', 172
Algèbre,
 de fonctions à valeurs réelles, 24
 des ensembles, 4
Algébriques, nombres, 42
Anneau, 246
Anti-symétrique, relation, 39
Application, 19
 à valeurs réelles, 19
Arbitraire, proximité, 110
Archimète, axiome d', 249, 252
Archimédien, corps, 249, 252
Arcs, connexe par, 203
Ascoli, théorème d', 231, 239
Axiome du choix, 41
Axiomes d'un corps, 245
- Baire, théorème de, 218, 224
Banach, espace de, 219
Base,
 d'une topologie, 98
 locale, 100
Bicompat, 170
Bicontinue, fonction, 112
Bijection, 20
Binaire, relation, 5
Bolzano-Weierstrass, théorème de, 44, 62, 171
Borne, inférieure, 40
Borne, supérieure, 40
 axiome de la, 248
Borné(e),
 ensemble, 40, 124
 fonction, 24
 uniformément, 231
- Cantor,
 ensemble de, 189
 théorème de, 38, 46
Caractéristique, fonction, 34
Cardinal, 38
 nombre 38, 49
Cartésien,
 plan, 4
 produit, 21
Catégorie, 224
Cauchy, suite de, 57, 215
Cauchy-Schwarz, inégalité de, 139
Chemins, 202
Classe, 2
Co-domaine, 19
Cofinie, topologie, 74
Collection, 2
Compacité, 167
- Compact,
 ensemble, 167
 espace, 169
 localement, 172
 séquentiellement, 170
 vérifiant la propriété de Bolzano-Weierstrass, 171
Compacte-ouverte, topologie, 221
Compactification, 172
Complémentaire, 3
Complet, caractère, 58, 216, 248
Complété, 217
Complètement régulier, espace, 157
Composante connexe, 201
Composition,
 des applications, 20
 des relations, 19
Connexe
 ensemble, 113, 198
 espace, 199
 localement, 202
 par arcs, 203
 simplement, 204
Constante, fonction, 19
Continu, 37
Continuité
 d'une fonction, 58, 60, 109
 en un point, 58, 111, 131
 uniforme, 182
Contractante, application, 217
Convergence,
 simple, 228
 uniforme, 229
 uniforme sur tout compact, 234
Convergente, suite, 56, 60, 80, 131
Coordonné, ensemble, 21
Corps, axiomes de, 245
- Décomposition, 200
Définition,
 base de, 184
 sous-base de, 113, 184
De Morgan, lois de, 4, 22
Dénombrable, 36
Dense, 77
Dérivé,
 ensemble, 75
 point, 75
Deuxième,
 axiome de dénombrabilité, 145
 catégorie, 224
 espace vérifiant le deuxième axiome de dénombrabilité, 145
Diamètre, 125
Différence d'ensembles, 3
Discret, espace topologique, 74
Disjoints, ensembles, 3
Distance, 124, 125
Distances équivalentes, 128

- Domaine, 200
 d'une application, 19
 d'une relation, 5
 Droite numérique réelle, 53, 218, 246
 Dual, espace, 233
- Egalité,
 d'ensembles, 1
 de fonctions, 13
- Elément, 1
- Emboîtée, base locale, 145
- Emboîtés, propriété des intervalles, 249, 253
- Ensemble, 1, 4
- Ensemble,
 compact, 167
 complet, 217
 connexe, 113, 198
 de Cantor, 189
 dénombrable, 36
 dense, 77
 dérivé, 75
 de parties, 3
 d'indices, 21
 fini, 1, 36
 maigre, 224
 non-connexe, 198
 non-dense, 78
 ordonné, 39
 précompact, 174
 totalement discontinu, 208
 totalement ordonné, 39
- Ensemble de fonctions, 19
- Ensemble vide, 2
- Ensembles, fonction d', 22
- Entiers, 226
- Equicontinuité, 231
- Équivalence,
 classe d', 6
 relation d', 6
- Équivalence, topologique, 112
- Équivalentes, distances, 127
- Équivalents, ensembles, 36
- Espace,
 complètement régulier, 157
 compact, 169
 connexe, 199
 connexe par arcs, 203
 de fonctions, 19
 de Hausdorff, 145
 de Lindelöf, 146, 152
 de Tychonoff, 157
 euclidien, 24
 localement compact, 172
 localement connexe, 202
 métrique, 127
 normal, 156
 normé, 131
 possédant la propriété de Bolzano-Weierstrass, 171
 régulier, 155
 séquentiellement compact, 170
 simplement connexe, 204
 topologique, 74
 vectoriel, 24
- Espace,
 T_0 , 165
 T_1 , 154
 T_2 , 154
 T_3 , 156
 $T_{3\frac{1}{2}}$, 157
 T_4 , 156
- Euclidien(ne),
 distance, 130
 espace, 24
 norme, 132
- Extension d'une fonction, 20
- Extérieur, 78
- Extrémité, 202
- Famille, 2
- Fermé(e),
 chemin, 202
 ensemble, 55, 60, 76
 fonction, 111
 intervalle, 1
- Fermeture, 76
- Filtre, 155
- Finesse, d'une topologie, 80
- Finie, propriété de l'intersection, 168
- Finis, ensembles, 1, 36
- Fonction, 19
 caractéristique, 34
 d'ensemble, 22
 projection, 21
 valeur en un point, 227
- Fonctions, espaces de, 227
- Fonctionnelles, 233
- Frontière, 78
- Graphe, 19
- Grossière, topologie, 74
- Hausdorff, espace de, 145
- Heine-Borel, théorème de, 55, 64, 166
- Héréditaire, propriété, 147
- Hilbert,
 cube de, 143
 espace de, 130
- Homéomorphes, espaces, 112
- Homéomorphisme, 112
- Homotopes, 203
- Homotopie, 203
- Identique,
 fonction, 20
 relation, 6
- Image, 19, 22
 d'une fonction, 19
 d'une relation, 5
- Immergé, 172
- Inclusion, 32
- Indexés, ensembles, 21
- Induite,
 distance, 141
 topologie, 127
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, 138
- Inférieure, borne, 40
- Infimum (inf), 40

- Infinis, ensembles, 1, 36
- Injection, 20
- Intérieur,
 - d'un ensemble, 78
 - fonction, 110
 - point, 53, 59, 77
- Intersection, 3, 21
- Intervalles, 1, 198
- Inverse,
 - fonction, 20
 - image, 22
 - relation, 5
- Irrationnels, nombres, 246
- Isométrie, 129
- Kuratowski, axiomes de fermeture de, 80
- \mathbb{L}_2 , espace, 130
- \mathbb{L}_2 , métrique, 130
- \mathbb{L}_2 , norme, 131
- Lebesgue, nombre de, 175
- Lexicographique, ordre, 39
- Limite,
 - d'une suite, 56, 80
 - point, 54, 59, 75
- Limite inférieure, topologie de la, 99
- Limite supérieure, topologie de la, 99
- Lindelöf,
 - espace de, 146, 150
 - théorèmes de, 146, 149
- Locale, base, 100
- Localement,
 - compact, 172
 - connexe, 202
- Majorant, 40
- Maximal, élément, 40
- Maigre, 218
- Métrique, 124
 - espace, 127
 - produit d'espaces, 188
 - sous-espace, 127
 - topologie, 127
- Métrisable, 128
- Métrisabilité, problème de la, 129
- Minimal, élément, 40
- Minkowski, inégalité de, 140
- Minorant, 40
- Moins fine, topologie, 80
- N, entiers positifs, 2, 246
- Naturel,
 - entier, 246
 - ordre, 39
- Négatifs, nombres, 246
- Non-dénombrable, 37
- Non-dense, 78
- Normal, espace, 156
- Normé, 131
- Normé, espace, 131
- Ordre,
 - de la droite, 247
 - inverse, 39
 - lexicographique, 39
- naturel, 39
- partiel, 39
- topologie de l', 100
- total, 39
- Ordonné,
 - couple, 5
 - linéairement, 39
 - sous-ensemble, 39
 - totalement, 39
- Origine, 202
- Ouvert(e),
 - boule, 126
 - disque, 60
 - ensemble, 53, 60, 73
 - fonction, 111
 - intervalle, 1
 - recouvrement, 167
 - voisinage, 79
- Parties, ensemble des parties d'un ensemble, 3
- Partition, 7
- Plan, 4
- Plus faible topologie, 80
- Plus fine topologie, 80
- Plus grand élément, 40
- Plus grande topologie, 80
- Plus petit élément, 40
- Plus petite topologie, 80
- Point,
 - adhérent, 78
 - d'accumulation, 75
 - frontière, 78
 - intérieur, 53, 60, 77
 - limite, 54, 60, 75
- Point et un ouvert, topologie définie par un 227
- Positifs,
 - entiers, 246
 - nombres, 246
- Précompact, ensemble, 174
- Premier(e)
 - axiome de dénombrabilité, 145
 - catégorie, 224
 - élément, 40
 - espace vérifiant le premier axiome de dénombrabilité, 145
- Presque tous, 56
- Proximité arbitraire, 110
- Produit,
 - cartésien, 23
 - de fonctions, 20
 - d'espaces métriques, 188
 - ensemble, 4
 - espace, 184
 - propriété invariante par passage au, 188
 - topologie, 184
- Projection, 21
- Propre, sous-ensemble, 2
- Pseudo-distance, 124
- Puissance,
 - du continu, 37
- Q, nombres rationnels, 2, 246
- Quotient, ensemble, 6
- R, nombres réels, 2, 245

- R^m , espace euclidien de dimension m, 130
 R^∞ , espace l_2 , 130
Rare, 224
Rationnels, nombres, 246
Réiproche,
fonction, 20
image, 22
relation, 5
Recouvrement, 55, 167
Réelle, droite, 53, 246
Réelles, fonction à valeurs, 19, 23
Réels, nombres, 245
Réflexive, relation, 6
Relation, 5
Relative, topologie, 80
Restriction, d'une application, 20
Réunion, 3, 21
- Schroeder- Bernstein, théorème de, 37
Séparable, 146
Séparation, axiomes de, 154
Séparés, ensembles, 198
Séquentiellement,
compact, 170
continue, 111
Simple, convergence, 228
Simplement connexe, 204
Sous-base, 99
Sous-ensemble, 2
Sous-espace (topologique), 80
Sous-suite, 57
Suite, 36, 56
convergente, 56, 61, 80
de Cauchy, 58, 215
d'ensembles, 21
Supremum (sup), 40
Surjective, fonction, 20
Symétrique, relation, 6
- Ternaire, ensemble, 189
Topologie, 74
de la convergence compacte, 233
de la convergence simple, 229
de la convergence uniforme, 230
- Topologique,
espace, 74
fonction, 112
propriété, 112
sous-espace, 80
Topologiquement équivalent, 112
Totalement,
discontinu, 208
ordonné, ensemble, 39
Transcendants, nombres, 51
Transitive, relation, 6
Triangulaire, relation, 124
Triviale, distance, 124
Tychonoff,
espace de, 157
théorème de, 188, 192
topologie de, 187
- Uniforme,
continuité, 180
convergence, 229
convergence, sur tout compact, 232
Uniformément, borné, 231
Universel, ensemble, 2
Urysohn,
lemme d', 157, 164
théorème de métrisabilité d' 157, 162
Usuelle,
distance, des nombres réels, 125
topologie des nombres réels, 74
- Valeur, fonction, 227
Valeurs réelles, fonction à, 19, 23
Vecteurs, 24
Vectoriels, espaces, 24
Venn, diagramme de, 3
Vide, ensemble, 2
Voisinage, 77
- Weierstrass, théorème de la valeur intermédiaire
de, 59, 71
- Z, entiers relatifs, 2, 246
Zorn, lemme de, 41

Index des Symboles

(X, T)	espace topologique, 74	$\text{ext}(A)$	extérieur de A , 78
(X, d)	espace métrique, 127	e_x	valeur en x , 227
$\ \cdot\ $	norme, 131	$\mathcal{F}(X, Y)$	ensemble des applications de X dans Y , 227
\preceq	moins fine que, 80	$F(A, B)$	ensemble des applications de A dans B , 231
\Rightarrow	implique, 7	ssi	si et seulement si
\exists	il existe, 7	$\inf(A)$	infimum de A , 38
\forall	pour tout, 7	$\text{int}(A)$	intérieur de A , 78
\setminus	(par exemple $A \setminus B$), différence, 3	\mathbb{N}	ensemble des entiers positifs, 2, 246
A'	ensemble dérivé de A , 75	\mathcal{N}_p	système de voisinages de p , 78
\bar{A} ou A^-	fermeture de A , 76	$\mathcal{P}(A)$	ensemble des parties de A , 3
$\overset{\circ}{A}$ ou A°	intérieur de A , 78	\mathbb{Q}	ensemble des rationnels, 2, 246
A^c	complémentaire de A , 3	\mathbb{R}	ensemble des réels 2, 245
$\prod \{A_i : i \in I\}$ ou $\prod_{i \in I} A_i$ ou $\prod_i A_i$	produit cartésien, 21	\mathbb{R}^m	espace euclidien de dimension m , 130
π_i	ième projection, 21	\mathbb{R}^∞	espace l_2 , 130
$\langle \dots, \dots \rangle$	couple 5	$S(p, \delta)$	boule ouverte, 126
\emptyset	ensemble vide, 2	t.q.	telle que, 7
$\text{b}(A)$	frontière de A , 78	$\sup(A)$	supremum de A , 40
$C[0, 1]$	fonctions continues sur $[0, 1]$, 124, 230	T	topologie, 74
$d(A)$	diamètre de A , 125	T_A	topologie induite sur A , 80
$d(a, b)$	distance de a à b , 124	\mathcal{U}	topologie usuelle, 74
\mathcal{D}	topologie discrète, 74	\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs 2, 246

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN

Publications scientifiques et littéraires

05002 GAP — Tél.: 92.51.35.23

Dépôt légal : 581 — Octobre 1987

Dépôt initial : 1981

Dans la même collection :

ABOTT/ VAN NESS AYRES	Thermodynamique Algèbre moderne Calcul différentiel et intégral Equations différentielles Mathématiques de base Matrices Trigonométrie Physique appliquée Technique comptable de base Technique comptable approfondie Systèmes asservis, 2 vol. Macroéconomique Circuits électriques Electromagnétisme Physique moderne Mécanique des fluides et hydraulique Chimie analytique Programmation Basic Programmation Pascal Optique Électronique, 2 vol. Statistiques de la gestion Géométrie analytique Algèbre linéaire Mathématiques pour informaticiens Probabilités Structure des données Topologie Traitement de l'information	LIPSCHUTZ/POE LOWENBERG MEISLICH et coll. METZ NASH NEWCOMER PLASTOCK ROSENBERG SALVATORE SALVATORE/DIULIO SCHEID SPIEGEL STANSFIELD TOKHEIM VAN DER MERWE WITTIG	Programmation Fortran Circuits électroniques Chimie organique Chimie physique, 2 vol. Résistance des matériaux Programmation en Cobol structuré Infographie Chimie générale Économétrie et statistique appliquées Économie internationale Microéconomie Principes d'économie Analyse numérique Introduction à l'informatique Analyse Analyse de Fourier Analyse vectorielle Formules et tables de mathématiques Mécanique générale Probabilités et statistique Statistique Transformées de Laplace Variables complexes Génétique Les microprocesseurs, 2 vol. Techniques numériques Physique générale Introduction à la psychologie
BEISER CASHIN/LERNER			
CASHIN/FELDMAN/ LERNER DI STEFANO et coll. DIULIO EDMINISTER			
GAUTREAU/SAVIN GILES			
GORDUS GOTTFRIED			
HECHT KAUFMAN/WILSON KAZMIER KINDLE LIPSCHUTZ			
LIPSCHUTZ/LIPSCHUTZ			

Ces ouvrages sont traduits et adaptés (unités métriques, S.I.) de la série "Schaum's Outline", qui compte plus de 100 titres publiés en anglais, dont :

PROJECTIVE GEOMETRY
GROUP THEORY
ELECTRONIC COMMUNICATION
COMPUTERS AND PROGRAMMING
REINFORCED CONCRETE DESIGN
MACHINE DESIGN
DESCRIPTIVE GEOMETRY
BASIC EQUATIONS OF ENGINEERING
BASIC ELECTRICAL ENGINEERING
DIFFERENTIAL GEOMETRY
SET THEORY AND RELATED TOPICS
FINITE MATHEMATICS
DISCRETE MATHEMATICS
CONTINUUM MECHANICS
ENGINEERING MECHANICS
BOOLEAN ALGEBRA

ADVANCED STRUCTURAL ANALYSIS
STATE SPACE AND LINEAR SYSTEMS
HEAT TRANSFER
PLANE GEOMETRY
MATHEMATICS OF FINANCE
TECHNICAL MATHEMATICS
MECHANICAL VIBRATIONS
OPERATIONS RESEARCH
REAL VARIABLES
PHYSICS FOR ENGINEERING & SCIENCE
COLLEGE ALGEBRA
STRUCTURAL
LAGRANGIAN
THEORETICAL
ADVANCED M
FINITE DIFFER

Pour tous renseignements concernant ces ouvrages, s'adresser à :
McGraw-Hill, 28 Rue Beaubien, 75014 Paris
McGraw-Hill/Ryerson Limitée, Montréal, Canada



ISBN France 2-7042-102