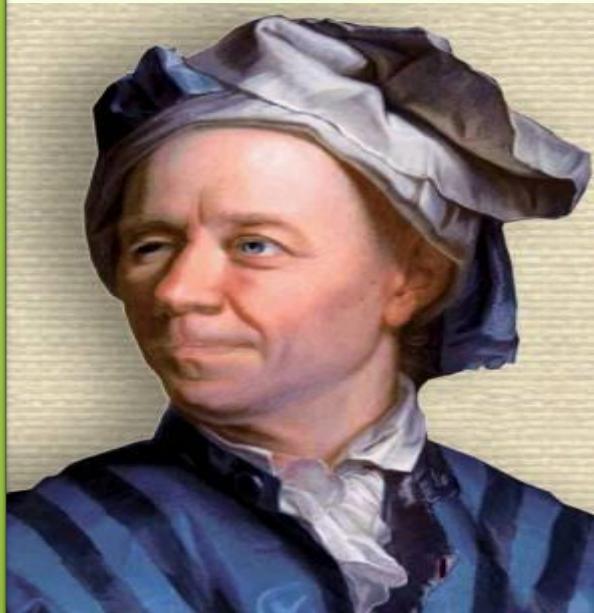


Conforme au Programme

Officiel marocain



AZIZ AFAADAS

# Mathématiques

Analyse

2<sup>e</sup>

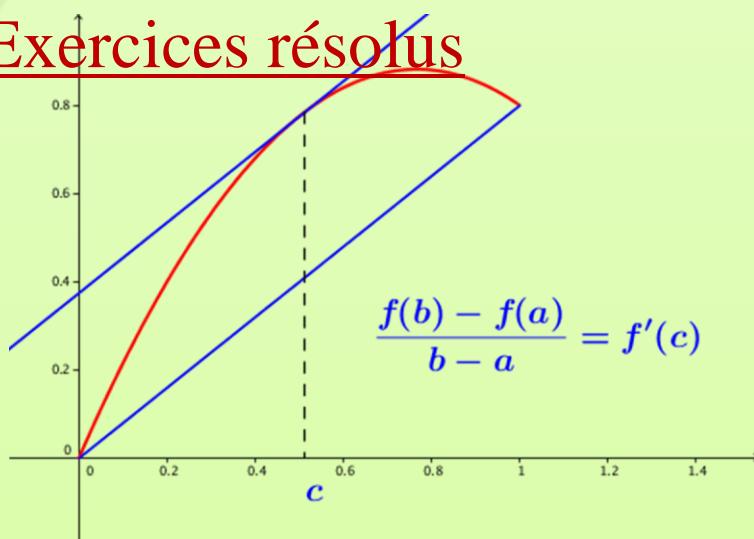
bac sciences maths A&B

Option française

Cours détaillés

Exercices résolus

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



# Mathématiques

## Analyse

2<sup>e</sup>

bac sciences maths A&B

Option française

Cours détaillés

Exercices résolus

AZIZ AFAADAS

Proffesseur d'enseignement secondaire qualifiant

Email :a .afaadas@gmail.com

# Table des matières

## Continuité et limites

Limite d'une fonction en un point	7
II) Continuité d'une fonction numérique	8
exercices résolus	20
Exercices et problèmes	

## Les suites numériques

Rappel	33
Limite d'une suite numérique	34
Suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ ; $v_n = f(u_n)$	43
Les suites adjacentes	46
Exercices résolus	49
Exercices et problèmes	53

## Dérivabilité, étude des fonctions et les fonctions primitives

	70
Dérivabilité d'une fonction numérique (rappel)	71
La fonction dérivée	72
La dérivée et variations d'une fonction	74
La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone	75
V) fonctions réciproques usuelles	78
VI) les fonctions primitives	88
VII) Etude des fonctions numériques	92
Exercices résolus	96
Exercices et problèmes	

## Fonction logarithme népérien

	129
Fonction logarithme népérien	130
Etude de la fonction $\ln$	133
Fonctions de la forme $\ln u$	137
Fonction logarithme de base $a$	139
Exercices résolus	142
Exercices et problèmes	

## Fonction exponentielle

	174
fonction exponentielle népérienne	175
Etude de la fonction exponentielle	175
Propriété de la fonction exponentielle	176
Limites et croissances comparées	179
Fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$	181

La fonction exponentielle de base a	183
Exercices résolus	
Exercices et problèmes	
<b>Théorème de rolle et accroissement finis</b>	<b>209</b>
I-Théorème de rolle	210
II) Théorème des accroissements finis (Théorème de la moyenne de Lagrange )	211
III) Inégalité des accroissemnets finis	213
Monotonie d'une fonction	215
Exercices résolus	217
Exercices et problèmes	
<b>Les équations différentielles</b>	<b>222</b>
L'équation deifferentielle de premier ordre	223
L'équation differentielle de second ordre	225
Exercices résolus	228
Exercices et problèmes	
<b>Intégration</b>	<b>234</b>
Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle	235
techniques de calcules des integrales	244
L'intégrale et l'ordre	248
Des applications du calcul intégral	252
Exercices résolus	258
Exercices et problèmes	
Formulaire	
Références	

# Dedicase

*Je dedie ce travail à mes chers parents, source de vie d'amour et d'affection*

*À mon épouse **Khadija** qui à fait preuve jusqu'à son dernier souffle, d'une détermination et d'un courage gravé à jamais dans mon cœur*

*À mes enfants **Anir et Ayoub**, je vous aime beaucoup*

*À mes frères et leurs enfants*

*À tous mes amies qui me toujours encouragé, et à qui souhaite plus de succès*

*À tous ceux que j'aime*

*A tout le monde*

## كلمة شكر

اتقدم بجزيل الشكر والعرفان للزميل **يوسف مجدول**، استاذ مادة الرياضيات  
ثانوية المعرفة بait ملول بجهة سوس ماسة، الذي تفضل بمراجعة هذا  
الكتاب

# Chapitre I

## Continuité et limites

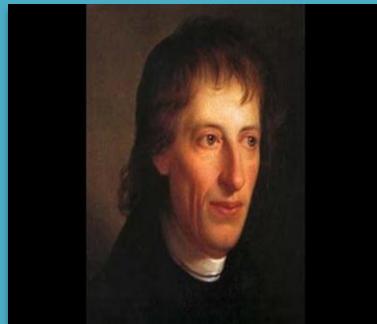
### Historique

C'est l'élaboration d'une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d'une fonction.

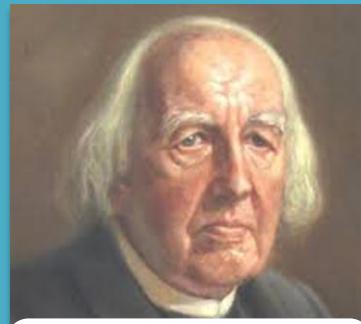
Le théorème des valeurs intermédiaires, qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.

Bolzano, cependant estime qu'une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse

(E.Hair et al,L'analyse au fil de l'histoire,2000).



*Bolzano Bernard*  
(1781-1848)



*Karl Weierstrass*  
(1815-1897)



*Leonhard Euler*  
(1707-1783)



*Friedrich gauss (1777-1855)*

## I. Limite d'une fonction en un point

### 1. Rappel

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $l$  un réel donné. On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  lorsque : «  $f(x)$  devient aussi proche de  $l$  que l'on veut lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $a$  ». On écrit alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Autrement dit :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

**Exemple :** soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

Démontrer par définition que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathbb{R})$$

$$(0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  on a

$$f(x) - 6 = 2x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(2x + 5) \text{ alors}$$

$$|f(x) - 6| = |(x - 1)(2x + 5)| \text{ soit}$$

$$I = \left[ 1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right] \text{ un intervalle de centre } 1$$

$$x \in I \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ |x - 1| < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 6 < 2x + 5 < 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 6 < 2x + 5 < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |2x + 5| < 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |2x + 5| < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |x - 1||2x + 5| < 8|x - 1| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ |x - 1||2x + 5| < 8|x - 1| \end{cases}$$

Pour que  $|f(x) - 6| < \varepsilon$  il suffit que  $\Rightarrow \begin{cases} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ 8|x - 1| < \varepsilon \end{cases}$

$$\Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{8} \text{ Alors on pose } \alpha = \inf\left(\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{8}\right)$$

Par suite  $(\forall \varepsilon > 0)\left(\exists \alpha = \inf\left(\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon}{8}\right) > 0\right)(\forall x \in \mathbb{R})$   
 $(0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon)$

### 2. L'unicité de la limite

#### Propriété

Si une fonction  $f$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}$  en un point  $a$ , cette limite est unique

**Démonstration :** supposons qu'il existe deux limites  $l_1$  et  $l_2$  tel que  $l_1 \neq l_2$  on a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon)$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_2 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha_2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon)$$

$$\text{On prend } \varepsilon = \frac{|l_2 - l_1|}{2} > 0. \quad |l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$$

$$\leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_1|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon = \frac{|l_2 - l_1|}{2} + \frac{|l_2 - l_1|}{2} = |l_1 - l_2|$$

Donc  $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$  qui est absurde donc  $l_1 = l_2$

### 3. Limites des fonctions usuelles

#### Propriété

Soit P et Q deux polynômes et  $a$  un nombre réel. On a

$$1) \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a) \quad 2) \text{ si } Q(a) \neq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad 4) \text{ si } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a \quad 6) \text{ si } a > 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

### 4. Opérations sur les limites

#### Propriété

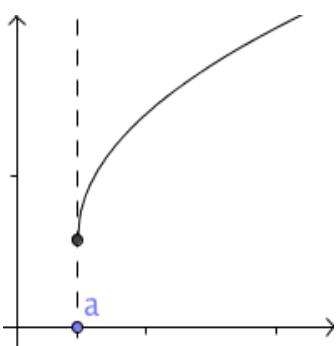
soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $a$  un nombre réel tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ . On a

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = l l' \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l' ; 3) \text{ si } l' \neq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g}(x) \right) = \frac{1}{l'} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g}(x) \right) = \frac{l}{l'}$$

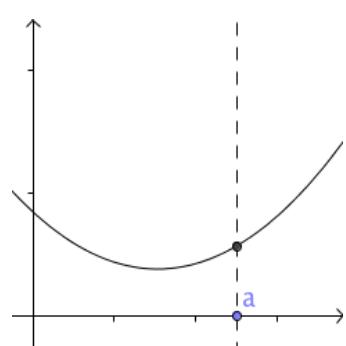
## II. Continuité d'une fonction numérique

### 1. La continuité en un point

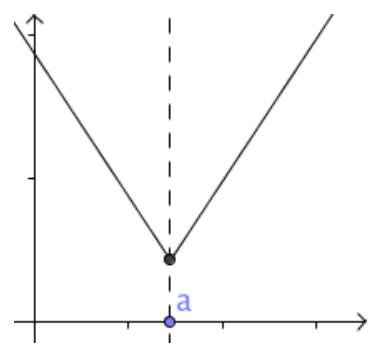
Exemples et contre-exemples :



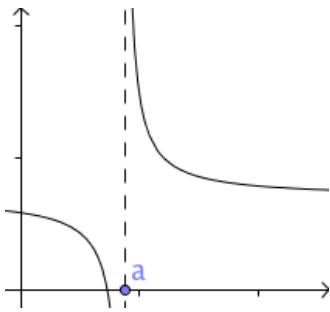
$f$  est continue en  $a$



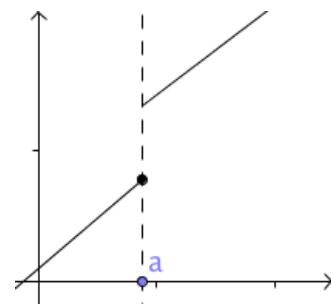
$f$  est continue en  $a$



$f$  est continue en  $a$



$f$  n'est pas continue en  $a$



$f$  n'est pas continue en  $a$

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon c -à-d il n'y a pas de saut.

Comment définir « proprement » une telle propriété ?

**Définition** Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  contenant un réel  $a$ .

-  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Remarque :**

- $f$  est continue en  $a$  si  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$
- si  $f$  est définie en un point  $a$  et  $f$  n'admet pas une limite en ce point ou la limite est infinie alors on dit que la fonction  $f$  est discontinue en  $a$ .

**Exemples :**

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$$

Montrons que  $f$  est continue en 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x - 4 = -3 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -3$  donc  $f$  est continue en 1

2. Soit  $g$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

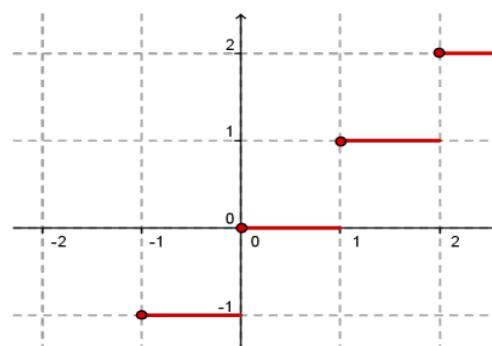
Etudions la continuité de  $g$  en 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x} \\ \text{On a} \quad &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \left( \frac{\sin(x-2)}{x-2} \right) = \frac{1}{2} = g(2) \end{aligned}$$

donc la fonction  $g$  est continue en 2

3. Soit  $h$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[-1; 2]$  par  $h(x) = E(x)$

On représente la fonction  $h$



On a  $(\forall x \in [-1; 0]) h(x) = -1$

$(\forall x \in [0; 1]) h(x) = 0$

$(\forall x \in [1; 2]) h(x) = 1 \quad h(2) = E(2) = 2$

On remarque que la courbe ( $C_h$ ) est discontinue au point 0 et 1 et 2 et par suite la fonction  $h$  est discontinue au point 0, 1 et 2

# Cours

## Exercice :

1. Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2 - x + 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est-elle continue en  $-1$  ?

2. Soit  $g$  la fonction définie par

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x + \tan 2x}{\sin 3x} & ; x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction  $g$  est-elle continue en  $0$  ?

## 2. La continuité à gauche et la continuité à droite

### Définition

- 1) Soit  $f$  la fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a - \alpha; a]$  ( $\alpha > 0$ )

On dit la fonction  $f$  est continue à gauche en  $a$  ssi  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

- 2) Soit  $f$  la fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a; a + \alpha[$  ( $\alpha > 0$ )

On dit la fonction  $f$  est continue à droite en  $a$  ssi  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

### Exemples :

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2 & ; x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1} & ; x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche de  $0$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$  donc  $f$  est continue à droite de  $0$

-  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - x^2 = 3 = f(0)$  donc  $f$  est continue à gauche de  $0$

### Propriété

$f$  est continue en  $a$  si  $f$  est continue à gauche et à droite en  $a$

### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 2x}{x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in [0, 2[ \\ f(x) = \sqrt{x + 7} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Etudions la continuité de  $f$  en  $0$  et  $2$

- Etude de la continuité en  $0$

-  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \neq f(0) \quad (f(0) = -1)$

- d'où  $f$  n'est pas continue à gauche en  $0$  et donc  $f$  n'est pas continue en  $0$ .

- Etude de la continuité en  $2$

-  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 = 2 = f(2) \Rightarrow$  donc  $f$  est continue à gauche en  $2$

-  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x + 7} = 3 = 2 = f(2) \Rightarrow$  donc  $f$  est continue à droite en  $2$

**Conclusion :**  $f$  est continue à droite et à gauche en  $2$  donc  $f$  est continue en  $2$

**Exercice :** soit  $g$  la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x ; & x \leq 1 \\ f(x) = a \frac{\sin(x-1)}{x-1} ; & x > 1 \end{cases}$$

Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $g$  soit continue en 1.

**Réponse :**  $g$  est continue en 1

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2x = 3 = g(1)$  alors

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a \sin(x-1)}{x-1} = 3 \text{ on pose}$$

$$t = x - 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a \sin(x-1)}{x-1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin t}{t} = 3$$

alors  $a = 3$

### 3. Prolongement par continuité

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert, sauf en un réel  $a$  de  $I$ .

Si  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $a$  alors la fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq a \\ l & ; x = a \end{cases}$

Est continue en  $a$ . on dit  $f$  est prolongeable par continuité en  $a$  et que  $g$  est son prolongement par continuité

**Exemples :** soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

On a  $1 \notin D_f$  et on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3$$

donc  $f$  admet un prolongement par continuité en 1 défini

$$\text{par : } g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq 1 \\ 3 & ; x = 1 \end{cases}$$

**Exercice :** donner le prolongement par continuité de  $f$  en  $a$  dans les cas suivants

$$1. \quad f(x) = \frac{x^3 - c^3}{x - c} \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} ; a = c$$

$$2. \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} ; a = 0$$

$$3. \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} ; a = 0$$

### 4. La continuité d'une fonction sur un intervalle

**Définition :**

- $f$  est continue sur  $I$  si  $f$  est continue en tout point de  $I$
- $f$  est continue sur  $]a; b[$  si  $f$  est continue en tout point de  $]a; b[$
- $f$  est continue sur  $[a; b]$  si  $f$  est continue en tout point de  $[a; b[$  et continue à droite en  $a$  et à gauche en  $b$
- $f$  est continue sur  $[a; b[$  si  $f$  est continue en tout point de  $]a; b[$  et continue à droite en  $a$ .

# Cours

## Exemples :

- Les fonctions  $x \mapsto |x|$ ,  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et plus généralement les fonctions polynômes sont continués sur  $\mathbb{R}$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \sin x$  et  $x \mapsto \cos x$  sont

continues sur  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0; +\infty[$ .
- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

## Remarque :

Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

## Exemple :

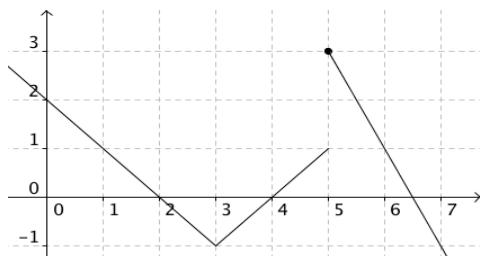
On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{pour } x < 3 \\ f(x) = x - 4 & \text{pour } 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x + 13 & \text{pour } x \geq 5 \end{cases}$$

La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ ? Les fonctions  $x \mapsto -x + 2$ ,  $x \mapsto x - 4$  et  $x \mapsto -2x + 13$  sont des fonctions polynômes donc continues sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi la fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty; 3[$ , sur  $[3; 5[$  et

sur  $[5; +\infty[$ .



Etudions alors la continuité de  $f$  en 3 et en 5 :

$$-\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x - 4) = 3 - 4 = -1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = f(3) \text{ donc la fonction } f \text{ est}$$

continue en 3.

$$-\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} (x - 4) = 5 - 4 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (-2x + 13) = -2 \times 5 + 13 = 3$$

La limite de  $f$  en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction  $f$  n'est donc pas continue en 5.

La fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty; 5[$  et sur  $[5; +\infty[$ .

## 5. Les opérations sur les fonctions continues

### Propriété

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues définies sur un intervalle  $I$ , soit un réel  $a \in I$  si les fonctions  $f$  et  $g$  sont continuées en  $a$ , alors

- La fonction  $\lambda f$  est continue en  $a$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$
- La fonction  $f + g$  est continue en  $a$
- La fonction  $f \cdot g$  est continue en  $a$
- La fonction  $\frac{f}{g}$  est continue en  $a$  si  $g(a) \neq 0$
- La fonction  $|f|$  est continue en  $a$
- Si  $f(a) > 0$  alors la fonction  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$
- Si  $f(a) = 0$  et si  $f$  définie au voisinage de  $a$  alors la fonction  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

## Cours

### Exemples :

1) Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2|x+1|-5}$$

On a  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right\}$  soit  $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$  et

$$f_2(x) = 2|x+1|-5$$

$f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme en particulier est continue sur  $D_f$

$f_2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (car c'est la somme de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ ) en particulier est continue

sur  $D_f$  et tel que  $(\forall x \in D_f) f_2(x) \neq 0$  alors la

fonction  $f = \frac{f_1}{f_2}$  est continue sur  $D_f$ .

2) Soit  $g$  la fonction définie par

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sin x$$

On montre que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$

- Comme la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$  alors la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

- La fonction  $x \mapsto \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- Et par suite la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$

### Application

1) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$

Démontrer que la fonction  $f$  est continue sur  $[2;4]$

2) Etudier la continuité de la fonction  $x \mapsto xE(x)$  sur l'intervalle  $[0;2]$

## 6. Composée de deux fonctions

### A. Continuité de la composée de deux fonctions

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contenant un réel  $a$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $f(a)$ .

Si  $f$  est continue en  $a$  et  $g$  continue en  $f(a)$  alors la fonction  $gof$  est continue en  $a$ .

#### Démonstration :

Soit  $\varepsilon > 0$ , montrons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in I$

$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |gof(x) - gof(a)| < \varepsilon$$

$g$  est continue en  $f(a)$  donc il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $y \in J$

$$|y-f(a)| < \beta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon \quad (*)$$

$f$  est continue en  $a$  donc il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in I$

$$|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta \quad (**)$$

soit  $x \in I$  tel que  $|x-a| < \alpha$  alors d'après  $(**)$   $|f(x) - f(a)| < \beta$  Et d'après  $(*)$   $|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$

(en prenant  $y = f(x)$ )

ou encore  $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ . CQFD

# Cours

## Consequence :

Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur un intervalle } I \\ g \text{ continue sur un intervalle } J \Rightarrow gof \text{ continue sur } I \\ f(I) \subset J \end{cases}$$

**Remarque :** si  $J = \mathbb{R}$  alors la troisième condition devient inutile

## Exemples :

1. Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$$
 on montre que la

fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

Comme les fonctions

$f_1 : x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$  et  $f_2 : x \mapsto \cos x$   
sont continues sur  $\mathbb{R}$

Et  $(f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R})$  alors la fonction  $f = f_2 \circ f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \sin(x^2 - 3x).$$

Montrer que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $f(x) = x^2 - 3x$ . On a :

$$h(x) = \sin(f(x)) = (\sin \circ f)(x)$$
 donc  $h = \sin \circ f$

La fonction  $f$  est une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction sinus est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La composée de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Exercice :

Soit  $F$  la fonction définie sur  $]0; 2[$  par :  $F(x) = \tan\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)$

Montrer que  $f$  est continue sur  $]0; 2[$

## Solution :

Posons  $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{2}$  et  $g(x) = \tan x$

On a : pour tout  $x \in I = ]0; 2[$

$$\begin{aligned} F(x) &= \tan(f(x)) = g(f(x)) \\ &= (g \circ f)(x) \Rightarrow F = g \circ f \end{aligned}$$

- $f$  est continue sur  $]0; 2[$  (restriction d'une fonction polynomiale)

•  $g$  est continue sur  $J = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$x \in I = ]0; 2[ \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \in J$$

Donc  $f(I) \subset J$

Les trois conditions sont réalisées donc  $F = g \circ f$  est continue sur  $]0; 2[$

## B. Composée d'une fonction continue et d'une fonction admet une limite

## Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $I = ]a-r; a+r[$  ( $r > 0$ ) et  $g$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $J$  de centre  $l$  tel que  $f(I) \subset J$

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $g$  continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$

## Démonstration :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $a \notin I$  donc  $f$  admet un prolongement par continuité  $f_1$  en  $a$  ( $f_1(a) = l$ )

Comme  $g$  est continue en  $l$  alors la fonction  $g \circ f_1$  est continue en  $a$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f_1)(x) = g(f_1(a))$  c-à-d  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(l)$

**Remarque :** la propriété précédente reste valable à gauche et à droite en  $a$  et en  $+\infty$  et  $-\infty$  avec remplacement de l'intervalle  $I$  par un intervalle convenable

## Exemple :

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\right)$$

On calcul  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\text{On a la fonction } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + 1 = 2$$

et on a la fonction  $x \mapsto \cos x$  est continue en 2

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \cos(2)$$

## Application :

calculer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^3 \quad ; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(\frac{\pi \sin x}{3x}\right) \quad ; \quad 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$$

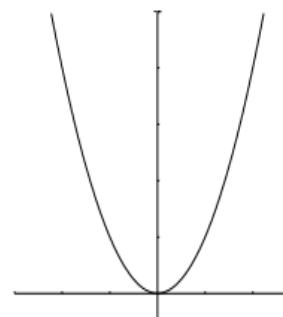
## C. Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue

### ❖ Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue

**Exemple :** on considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^2$

On a  $f([-1; 1]) = [-1; 1]$  ;  $f([0; 1]) = [0; 1]$

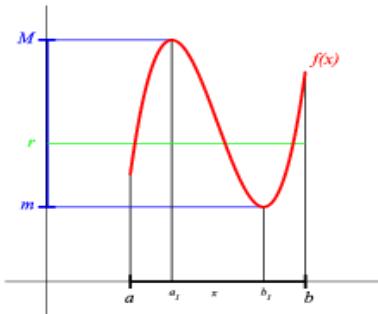
$f(-1; 1] = [0; 1]$  ;  $f([-1, 1]) = [0; 1]$  ;  $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty[$



## Propriété

Si une fonction numérique  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors son image par  $f$  est aussi un intervalle.

- 1) Si une fonction  $f$  est continue sur un segment  $[a;b]$ , alors son image par  $f$  est le segment  $[m;M]$  où  $m$  et  $M$  sont, respectivement, les valeurs minimale et maximale de  $f$  sur le segment  $[a;b]$ .



## Autrement dit

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment

## Remarques :

- si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ , alors  $I$  et  $f(I)$  sont des intervalles, mais ils ne sont pas nécessairement de même type.
- «  $f$  est une fonction continue sur le segment  $[a;b]$  » est une condition suffisante pour que l'image du segment  $[a;b]$  par la fonction  $f$  soit, aussi, un segment ; mais cette condition n'est pas nécessaire car on peut avoir l'image d'un segment  $[a;b]$  par une fonction non continue est un segment.

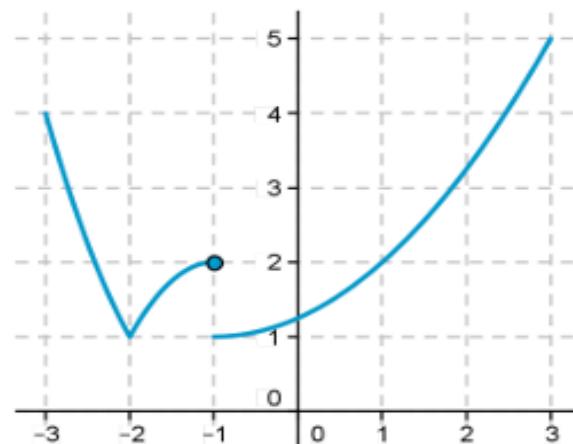
## Exemple :

On a :  $f$  est continue sur l'intervalle sur  $[-3;-1]$  et  $]-1;3]$

$$f([-3;-1]) = [1;4] \text{ et } f(]-1;3]) = ]-1;5]$$

On a, aussi  $f$  n'est pas continue sur le segment  $[-2;1]$  et on a

$$f([-2;1]) = [1;2]$$



Courbe de la fonction  $f$

## Cours

- ❖ Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

### Propriété

Soit  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,

Le tableau suivant détermine  $f(I)$ , selon le sens de monotonie de  $f$  et le type d'intervalle  $I$

L'intervalle $I$	Si $f$ est une fonction	
	Strictement croissante sur $I$ , alors $f(I)$ est égal à	Strictement décroissante sur $I$ , alors $f(I)$ est égal à
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a;b]$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]a;b[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a;+\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a;+\infty[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$]-\infty;a]$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$]-\infty;a[$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$]-\infty;+\infty[ = \mathbb{R}$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

**Exemple :** soit  $f$  la fonction numérique à variable réelle, définie par  $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$  on a  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$  et  $f$

continue sur  $D_f = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$  ( car c'est une fonction rationnelle) et on a  $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2} > 0$  donc  $f$  est

strictement croissante sur  $]-\infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$  et on a  $f([2; +\infty[) = ]-\infty; 1[$  et  $f([-\infty; -3]) = \left]1; \frac{6}{5}\right]$

### Application :

- Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = x^2 - 2x + 3$

Déterminer les images des intervalles suivants :  $I = ]-\infty; 0]$  ;  $J = [1; 2]$  ;  $K = [-1; 2]$

# Cours

2. Soit  $a$  un nombre réel. On considère la fonction  $f$  suivante  $f(x) = \frac{ax+1}{x-3}$

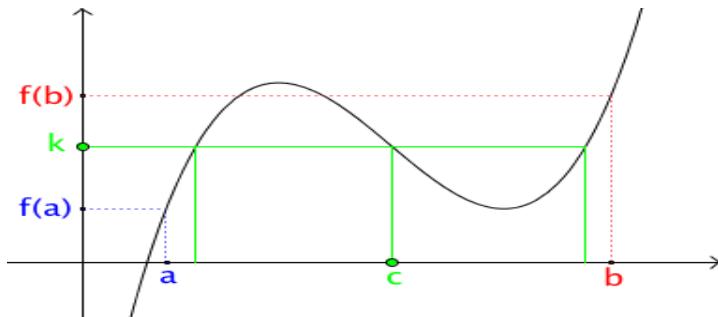
Déterminer  $a$  sachant que  $f([3;4]) = [9; +\infty[$

## D. Théorème des Valeurs intermédiaires

### Propriété

On considère la fonction  $f$  définie et continue sur un intervalle  $[a ; b]$ .

Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$ .



### Démonstration :

Comme  $f$  est continue sur  $[a ; b]$  alors il existe deux nombres réel  $M$  et  $m$  tel que  $f([a ; b]) = [m ; M]$  comme  $f(a)$  et  $f(b)$  appartiennent à  $[m ; M]$  (supposons que  $f(a) \leq f(b)$ ) donc  $[f(a); f(b)] \subset [m; M]$  c.-à-d  $[f(a); f(b)] \subset f([a;b])$  Donc pour tout  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  ( c.-à-d.  $k \in f([a;b])$  )

Il existe au moins un réel  $c$  de  $[a ; b]$  tel que  $f(c) = k$

### Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a ; b]$ .

### Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction  $f$  est strictement monotone sur l'intervalle  $[a ; b]$  alors le réel  $c$  est unique.
- si  $f(a) \times f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $]a, b[$ . Si de plus  $f$  est strictement monotone sur I, alors c'est unique.

**Exemple :** On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 10x + 14$

On a  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car c'est une fonction polynôme donc est continue sur  $[1; 3]$

On a  $f(1)=5$  et  $f(3)=11$ . Le nombre 8 est compris entre  $f(1)$  et  $f(3)$  alors l'équation  $f(x)=8$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[1; 3]$

## Application :

- 1) On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = 1 - x + \sin x$

Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet au moins une solution sur l'intervalle  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

- 2) On considère la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

Montrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$

## Exercices résolus

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,1]$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} & \text{si } x \in ]0,1[ \\ f(0) = f(1) = \frac{1}{\pi} & \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  sur  $[0,1]$

Rappel :  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ ssi

- $f$  est continue à droite en  $a$
- $f$  est continue à gauche en  $b$
- $f$  est continue sur  $]a, b[$

❖ Etudions la continuité de  $f$  en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(\pi x)} \cdot (1-x) = \frac{1}{\pi} = f(0) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est continue à droite en 0

❖ Etudions la continuité de  $f$  à gauche en 1

on pose

$t = x - 1$  donc  $x = t + 1$

$$x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow t \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x(1-x)}{\sin(\pi x)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(t+1)(1-(t+1))}{\sin(\pi(t+1))} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t(1-t)}{\sin(\pi t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t(1-t)}{\sin(\pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t(1-t)}{\pi t} = \frac{1}{\pi} = f(1)$$

### Correction

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(t+1)}{\sin(\pi t + \pi)} \cdot (-t) = \frac{1}{\pi} = f(1)$$

Donc  $f$  est continue à gauche en 1.

❖ Etudions la continuité de  $f$  en  $]0,1[$

On la fonction  $x \mapsto x(x-1)$  est une fonction polynôme donc est continue sur IR en particulier est continue sur  $]0,1[$

la fonction  $x \mapsto \sin(\pi x)$  est continue sur IR en particulier est continue sur  $]0,1[$

et on a ( $\forall x \in IR$ )  $x \in ]0,1[ \Rightarrow 0 < x < 1$

$$\Rightarrow 0 < \pi x < \pi$$

$$\Rightarrow 0 < \sin(\pi x) < 1$$

Donc  $\forall x \in ]0,1[ \sin(\pi x) \neq 0$  et par suite  $f$  est continue sur  $]0,1[$  car c'est le quotient de deux fonctions continues sur  $]0,1[$

Conclusion :  $f$  est continue sur  $[0,1]$

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  en  $x_1 = \sqrt{2}$
- 3) Etudier la continuité de  $f$  sur IR

### Correction

1) On étudier la continuité de  $f$  en  $x_0 = 2$

Il suffit de donner l'expression de  $f(x)$  sur les deux

intervalles  $[1,2[$  et  $]2,3[$

On  $D_f = IR$  et  $f(2) = 2$ .

- Pour tout  $x$  de  $[1,2[$  on a  $f(x) = 1 + (x-1)^2$

$$\text{car } (E(x) = 1)$$

$$\text{et par suite } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + (x-1)^2 = 2 = f(2)$$

donc la fonction est continue à gauche en 2

- Pour tout  $x$  de  $[2,3[$  on a  $f(x) = 2 + (x-2)^2$

car  $(E(x) = 2)$

$$\text{et par suite } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 + (x-2)^2 = 2 = f(2)$$

donc la fonction est continue à droite en 2

comme la fonction  $f$  est continue à droite et à gauche en 2

alors la fonction  $f$  est continue en 2

2) Etudions la continuité de  $f$  en  $x_1 = \sqrt{2}$

## Exercices résolus

Comme les deux fonctions  $g: x \mapsto E(x)$  et  $h: x \mapsto x$  sont continués en  $x_1 = \sqrt{2}$  alors la fonction

$f = g + (h - g)^2$  est continue en  $x_1 = \sqrt{2}$

3) On étudier la continuité de f sur IR

• Comme les deux fonctions  $g: x \mapsto E(x)$  et  $h: x \mapsto x$  sont continuées sur tout intervalle inclus dans  $(IR - \mathbb{Z})$

Alors la fonction  $f = g + (h - g)^2$  est continue sur tout intervalle inclus dans  $(IR - \mathbb{Z})$

- On étudie la continuité de f en tout point de  $\mathbb{Z}$

Soit k un élément de  $\mathbb{Z}$  on a  $f(k) = k$  et par suite

$$(\forall x \in [k-1, k]) f(x) = k-1 + (x-k+1)^2$$

(car  $E(x) = k-1$ )

Donc  $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = k = f(k)$  et par suite f est continue à gauche en k

$$(\forall x \in [k, k+1]) f(x) = k + (x-k)^2$$

(car  $E(x) = k$ )

Donc  $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = k = f(k)$  et par suite f est continue à droite en k

Comme f est continue à gauche et à droite en k alors f est continue en k. et par suite f est continue sur IR.

### Exercice 3

Soit f la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}}$

- 1) Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de f
- 2) Calculer les limites suivantes  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Démontrer que f est admet un prolongement par continuité en  $x_0 = 1$  à déterminer

### Correction

- 1) On détermine  $D_f$

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x - \sqrt{x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \end{aligned}$$

Et par suite  $D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$

- 2) On calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Soit  $x \in ]1, +\infty[$  on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = \frac{x \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

On calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \sqrt{x} = 0^-$

Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

- 3) on a  $1 \notin D_f$ . Soit x un élément de  $D_f$  on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{x})}{x^2 - x} \\ &= \frac{(2x - 1 - x^2)(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x)(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{-(x-1)^2(x + \sqrt{x})}{x(x-1)(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{-(x-1)(x + \sqrt{x})}{x(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2})} \end{aligned}$$

Et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x + \sqrt{x})}{x(\sqrt{2x} + \sqrt{1+x^2})} = 0$$

Donc la fonction f est prolongeable par continuité en 1

Soit g ce prolongement on a :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \\ g(1) = 0 \end{cases}$$

## Exercices résolus

### Exercice 4

Soit  $f$  une fonction définie de IR de  $]-\infty, 1[$  et  $g$  une fonction définie de IR vers  $]1, +\infty[$ , tels que  $f$  et  $g$  sont continués sur IR et que  $(\exists (x_1, x_2) \in IR^{*+2} / x_1 < x_2 \text{ et } f(x_1) = x_1 \text{ et } g(x_2) = x_2)$   
Démontrer  $(\exists x_3 \in ]x_1, x_2[ / f(x_3) \cdot g(x_3) = x_3)$

### Correction

On considère la fonction  $h$  définie par :

$$(\forall x \in IR) h(x) = f(x) \cdot g(x) - x$$

- On a la fonction  $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$  est continue sur IR car c'est le produit de deux fonctions continues sur IR.

Et par suite la fonction  $h$  est continue sur IR car c'est la somme de deux fonctions continues sur IR

- On a  $h(x_1) = f(x_1) \cdot g(x_1) - x_1 = x_1(g(x_1) - 1)$

$$\text{Et } h(x_2) = f(x_2) \cdot g(x_2) - x_2 = x_2(f(x_2) - 1)$$

Et par suite  $h(x_1) > 0$  puis on a

$$f: IR \rightarrow ]-\infty, 1[ \text{ donc } f(x_2) - 1 < 0 \text{ et } x_2 > 0 \text{ et}$$

par suite  $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ . Et comme  $h$  est continue sur IR donc elle continue sur le segment  $[x_1, x_2]$  et d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$(\exists x_3 \in ]x_1, x_2[ / h(x_3) = 0)$$

$$\text{C à d } (\exists x_3 \in ]x_1, x_2[ / f(x_3) \cdot g(x_3) - x_3 = 0)$$

$$\text{C à d } (\exists x_3 \in ]x_1, x_2[ / f(x_3) \cdot g(x_3) = x_3)$$

### Exercice 5

Soient  $\beta$  et  $\lambda$  deux éléments de  $IR^{*+}$  et  $f$  une fonction définie et continue sur l'intervalle  $[0,1]$  tel que  $f(1) \neq f(0)$

Démontrer que  $\exists x_0 \in ]0,1[ : \lambda f(0) + \beta f(1) = (\lambda + \beta)f(x_0)$

### Correction

On considère la fonction  $g$  définie  $[0,1]$  par

$$\forall x \in [0,1] g(x) = (\lambda + \beta)f(x) - \lambda f(0) - \beta f(1)$$

On a  $g(0) = \beta(f(0) - f(1))$  et

$$g(1) = \lambda(f(1) - f(0))$$

Donc  $g(1) \cdot g(0) = -\lambda\beta(f(0) - f(1))^2$  et on a  
d'après les données  $f(1) \neq f(0)$  et  $\lambda > 0$  et  $\beta > 0$

Donc  $g(1) \cdot g(0) < 0$

Et on a  $g$  est continue sur  $[0,1]$  car c'est la somme de deux fonctions continues sur  $[0,1]$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists x_0 \in ]0,1[ : g(x_0) = 0$$

$$\exists x_0 \in ]0,1[ : \lambda f(0) + \beta f(1) = (\lambda + \beta)f(x_0)$$

### Exercice 6

$f$  est une fonction définie et continue sur IR et on suppose que  $\exists a \in IR / fof(a) = a$

Démontrer que  $\exists c \in IR / f(c) = c$

### Correction

On considère la fonction  $g$  définie sur IR par

$$g(x) = f(x) - x$$

on a  $g$  est continue sur IR car c'est la somme de deux fonctions continues sur IR et on a  $g(a) = f(a) - a$  et

$$g(f(a)) = fof(a) - f(a) = a - f(a)$$

Et par suite  $g(f(a)) \cdot g(a) = -(a - f(a))^2$

Si  $f(a) = a$  on prend  $c = a$

Si  $f(a) \neq a$  alors  $g$  est continue sur l'intervalle des extrémités  $a$  et  $f(a)$  et on a  $g(f(a)) \cdot g(a) < 0$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists c \in IR / g(c) = 0$$

$$\text{C à d } \exists c \in IR / f(c) = c$$

### Exercice 7

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |(x) - f(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)|$

1. Montrer que la fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique.
2. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, |(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin(x) - \sin(x + 2\pi)| = 0$

Ce qui équivaut à ce que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + 2\pi)$ ,

$f$  est  $2\pi$  périodique.

2. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

Première méthode

$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$  Car

la fonction sin est une fonction continue. Cela entraîne

que pour tout  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow$

$|(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$  Cela montre que la

fonction  $f$  est continue en  $x_0$ , ceci étant vrai pour tout

$x_0 \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Deuxième méthode

Pour montrer que  $f$  est continue en un  $x_0 \in \mathbb{R}$

quelconque.  $0 \leq |(x) - f(x_0)| \leq |\sin(x) - \sin(x_0)|$  Donc

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)|$$

$$\leq \lim_{x \rightarrow x_0} |\sin(x) - \sin(x_0)| = 0$$

Car sin est continue en  $x_0$

$$\text{On en déduit que } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$$

$$\text{Ce qui est équivalent à } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Autrement que  $f$  est continue en  $x_0$  quelconque, et

donc sur  $\mathbb{R}$

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{(2-x)^2} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x - 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{|x-1|}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{7x} ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + \cos(2x)}{\cos(3x) + 3\cos(4x)} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\cos(x)}{1 - \sqrt{2}\sin(x)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$$

$$10) \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$$

$$11) \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x - 1} + mx \text{ avec } m \in IR$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) ; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{\sqrt{x+1} - 3}$$

### Exercice 2

Soit f une fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$

1) Déterminer  $D_f$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$

### Exercice 3

Soit f une fonction définie par  $f(x) = (x+1) \tan\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Déterminer  $D_f$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

### Exercice 4

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{mx^3 + (m-2)x^2 + (m-1)x + m - 3}{x(x-2)(x-3)}$$

Avec  $m \in IR$

1) Déterminer  $D_f$

2) Etudier selon les valeurs de m les limites de f aux bornes de  $D_f$ .

### Exercice 5

Determiner les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{x-a}} \text{ avec } a \in IR_+^*$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x^4 - x^3} - x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}$$

### Exercice 6

En utilisant les propriétés d'ordre et les critères des limites, calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 - \sqrt{|x|} \sin\left(\frac{4}{x}\right) \right) ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} + \left( \cos \frac{1}{x} \right)^5 \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \cos x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \sin^2\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-3} \sin(x^7); \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)\sqrt{x-5}}{2 + \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}$$

### Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^5 - x^4 + x^3 + 3}{x+1}; & x \neq -1 \\ f(-1) = 12 \end{cases}$$

Démontrer que f est continue en -1

### Exercice 8

Déterminer la valeur de a pour que f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}; & x \neq \frac{\pi}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \end{cases}$$

soit continue en  $\frac{\pi}{2}$

### Exercice 9

Déterminer le réel m pour que la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 - 2ax - a^2; & x \leq a \\ f(x) = \frac{m}{x-a} \sin(x^2 - a^2) + a; & x > a \end{cases}$$

Soit continue en a (avec a un réel non nul).

### Exercice 10

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction f

## Exercices et problèmes

définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2}; & x < 1 \\ f(1) = \frac{2+c}{a} \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1}; & x > 1 \end{cases}$$

Soit continue en 1

### Exercice 11

Soit  $n$  un entier naturel non nul

Soit  $f_n$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2}; & x < 2 \\ f_n(x) = \frac{3x+b}{4}; & x > 2 \end{cases}$$

Tels que  $a, b$  des réels. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f_n$  soit continue en 2.

### Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$  et justifier la continuité de  $f$  en tout réel de cet ensemble de définition

$$x \mapsto |x^2 - x - 3| ; \quad x \mapsto x + 1\sqrt{x^2 + 1}$$

$$x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} ; \quad x \mapsto (|x+1|-2)^5$$

$$x \mapsto \frac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4} ; \quad x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x + 1}$$

### Exercice 13

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; & x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$$

avec  $a \in \mathbb{R}$

Déterminer  $a$  pour que la fonction  $f$  soit continue en 1.

### Exercice 14

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{8x+1}}{2(x-1)} + \frac{3|x|}{1-x^2}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2) La fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 1

### Exercice 15

Démontrer que la fonction  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  dans chacun des cas suivants et définir ce prolongement :

$$1) f(x) = \frac{2x^{17} - 17x + 15}{x-1} ; \quad x_0 = 1$$

$$2) f(x) = \frac{3\tan x - 2\sin x}{x} ; \quad x_0 = 0$$

$$3) f(x) = \frac{x^n - a^n}{x-a} ; \quad x_0 = a \text{ tel que } a \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$4) f(x) = \frac{x^{p+1} - (p+1)x + p}{(x-1)^2} ; \quad x_0 = 1 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

$$5) f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x} - a}{\tan x} ; \quad x_0 = 0; \quad a \in \mathbb{R}_+^*$$

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-1}} ; & x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(x) = x^2 - 3x + 2 ; & x \in ]-1, 1[ \end{cases}$$

$$1) \text{ Calculer } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

2) La fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 1

### Exercice 17

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2}$$

1)  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0.

2) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| < \frac{1}{x^2}$  puis déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

### Exercice 18

1) Démontrer que la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{(5-x)^2} \left( 1 - \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \right)$$

Est prolongeable par continuité en 5 et définir cet prolongement.

## Exercices et problèmes

### Exercice 19

Soit f la fonction définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par

$$f(x) = \frac{(1 - \tan x)^2}{\cos 2x}$$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{4}$

### Exercice 20

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + 6} & ; \quad x \geq 1 \\ f(x) = \frac{1}{x^2 - x} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & ; \quad x < 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en 1
- 2) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?.

### Exercice 21

Calculer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{2019}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{\cos x})}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{3\cos^2 x - 2\cos x - 5}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\pi \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}\right)$$

### Exercice 22

Soit f la fonction définie sur  $]-5; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et deduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$
- 2) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)$

### Exercice 23

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x + 2}; & x \geq -2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - |x^3|}{x + 2} & ; \quad x < -2 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f en -2
- 2) Etudier la continuité de f sur  $]-2; +\infty[$  et  $]-\infty; -2[$
- 3) La fonction f est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 24

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} & si \quad x \in ]-\infty; -1] \cup [-1; +\infty[ \\ f(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x^2} & si \quad -1 < x < 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1
- 2) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles  $]-\infty; -1]; [-1; 1[; [-1; +\infty[$ .

### Exercice 25

Soit f la fonction définie par

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + 6x^2 - 6x - 8}{x - 2}$$

- 1) Preciser l'ensemble de définition de f .
- 2) Determiner  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- 3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

### Exercice 26

Dire dans chacun des cas suivants, si la fonction f admet un prolongement par continuité en a

- 1)  $f: x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}, a = 0$
- 2)  $f: x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}, a = -1$
- 3)  $f: x \mapsto \frac{\sin x + 3x}{x}, a = 0$

### Exercice 27

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x||x - 2|}{x^2(x^2 - x - 2)} & si \quad x \neq 2 \\ \frac{1}{3} & ; \quad si \quad x = 2 \end{cases}$$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Etudier les limites de f en -1,  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- 3) La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0?

## Exercices et problèmes

### Exercice 28

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$$

- 1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(\sin x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(1 - \cos x)$

### Exercice 29

Dans chacun des cas suivants ;à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la limite en 0 de f

- 1)  $f: x \mapsto x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$  ; 2)  $f: x \mapsto 1 + x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)$
- 3)  $f: x \mapsto \frac{1}{x} + \sin\left(\frac{2}{x}\right)$

### Exercice 30

Dans chacun des cas suivants ;à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la limite en  $-\infty$  et en  $+\infty$  de f

- 1)  $f: x \mapsto \frac{1 + \cos x}{x}$  ; 2)  $f: x \mapsto \frac{1 + \cos x}{\sqrt{|x|}}$
- 3)  $f: x \mapsto \frac{x + x \cos x}{x^4 + x^2 + 3}$

### Exercice 31

- 1) Montrer que pour tout réel x,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \sin x} \leq 1$$

- 2) En déduire le comportement en  $+\infty$  des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{2 - \sin x} \text{ et } x \mapsto \frac{x + \sin x}{2 - \sin x}$$

### Exercice 32

Soit f la fonction définie par

$$f: x \mapsto \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$$

- 1) Trouver un réel M > 0 tel que  $|xf(x)| \leq M$ , pour tout réel x.
- 2) En déduire la limite de f en  $+\infty$  et  $-\infty$

### Exercice 33

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

- 1a) montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) \geq \frac{1}{x}$
- b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

- 2) a) montrer que pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) \leq \frac{1}{x}$
- b) en déduire  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

### Exercice 34

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f

- 1)  $f: x \mapsto \frac{x + 1}{x - 2}$  ;  $I = ]2, +\infty[$
- 2)  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$  ;  $I = ]-\infty; 0]$
- 3)  $f: x \mapsto \frac{1}{\sin x}$  ;  $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$
- 4)  $f: x \mapsto \tan(\pi x)$  ;  $I = \left]-\frac{1}{2}, 0\right]$

### Exercice 35

Soit la fonction  $f: x \mapsto x^3 + 10x - 1$

- 1) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) a) montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[0, 1]$   
b) donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.

### Exercice 36

Soit la fonction  $f: x \mapsto x^3 + 10x - 1$

- 1) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal .
- 2) Vérifier graphiquement que la courbe f coupe l'axe des abscisses en trois points  $M_1$  et  $M_2$  et  $M_3$  dont les abscisses seront notées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  avec  $x_1 < x_2 < x_3$
- 3) Montrer que  $x_1$  appartient à l'intervalle  $[-4; -3]$
- 4) Donner pour  $x_2$  et  $x_3$  un encadrement par deux entiers consécutifs.
- 5) Discuter suivant les valeurs de réel k, le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$ .
- 6) Donner le nombre de solutions de l'équation  $|f(x)| = 1$ .

### Exercice 37

- 1) On considère la fonction h définie par

$$h \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$$

- a) Montrer que h est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

## Exercices et problèmes

- b) Determiner  $h([0, +\infty[)$
- c) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet dans  $[2, 3]$  une unique solution  $\alpha$ .
- d) Determiner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
- 2) Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} + 1$$

### Exercice 38

On considère la fonction  $f: x \mapsto \cos x - x$

- 1) Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0, \frac{\pi}{2}]$
- 3) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près

### Exercice 39

Soit  $f$  une fonction continue de  $[0; 1]$  sur  $[0; 1]$

On pose  $g(x) = f(x) - x$

- 1) Quel est le signe de  $g(0)$  et  $g(1)$
- 2) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$ .

### Application

Montrer que l'équation  $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$ .

### Exercice 40

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f: x \mapsto \frac{x^3}{x+1}$

- 1) Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I = \left[-\frac{2}{3}, -1\right[$ .
- 2) Déterminer l'image de l'intervalle  $I$  par la fonction  $f$
- 3) Déduire que l'équation  $f(x) = 10$  admet une unique solution dans  $I$ .

### Exercice 41

Démontrer que l'équation  $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$  admet au moins une solution sur l'intervalle  $[2, 3]$ .

### Exercice 42

Déterminer dans chacun des cas suivants l'ensemble de définition de  $f$  puis étudier la continuité de  $f$  sur tout intervalle dans son ensemble de définition :

- 1)  $f(x) = -5x^3 + 7x^2 - 5$
- 2)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{(x+2)(x-1)(2x-3)}$
- 3)  $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x-1}\right)$  ; 4)  $f(x) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$
- 5)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 6}}{(x-1)(x^2 + 1)}$  ; 6)  $f(x) = \frac{2x-4}{\tan(\pi x)}$

### Exercice 43

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = m \end{cases}$$

- 1) Étudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$ .
- 2) Déterminer  $m$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$

### Exercice 44

Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x-1| - 1}$$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
- 2) Étudier la continuité de  $f$  sur les intervalles  $]-\infty; 0[$ ,  $]0; 2[$  et  $]2; +\infty[$ .
- 3) Démontrer qu'il existe une fonction  $g$  continue sur  $\mathbb{R}$  tel que  $\forall x \in D_f, g(x) = f(x)$

### Exercice 45

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x(x-1)}$$

Étudier la continuité de  $f$  sur chaque intervalle de son ensemble de définition

## Exercices et problèmes

### Exercice 46

Soit f une fonction définie par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Déterminer l'image des intervalles suivants par f :

$$I = ]0; +\infty[ ; J = ]0; 1[ \text{ et } K = ]-\infty; -1[$$

### Exercice 47

1) Vérifier que la fonction suivante est continue sur IR

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3; & x < 2 \\ f(x) = x^2 - 3; & x \geq 2 \end{cases}$$

2) Déterminer  $f([-2,4])$ ,  $f(-\infty; 1])$

### Exercice 48

Démontrer que l'équation  $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$

admet une unique solution sur  $]-\infty, \frac{1}{2}]$

### Exercice 49

Démontrer que l'équation  $x^3 - 2x^2 - 1 = 0$  admet trois solutions sur IR (à déterminer l'intervalle de chaque solution)

### Exercice 50

Soit n de  $IN^*$  calculer en fonction de n

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)}{(2 - x)^n - 1}$$

### Exercice 51

On considère les deux fonctions f et g suivantes définies sur  $IR_+^*$  par :

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 \sqrt{1 + x^4 \sqrt{1 + x^8 \sqrt{1 + x^{16}}}}} \text{ et}$$

$$g(x) = \sqrt{1 + x \sqrt{1 + x^3 \sqrt{1 + x^6 \sqrt{1 + x^{12}}}}}$$

Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$

### Exercice 52

Soient n de  $IN^*$  et  $F_n$  la fonction définie par

$$F_n(x) = \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \dots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F_n(x)$

**Exercice 53** : Calculer les deux limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \dots \cos nx}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos^2 x \dots \cos^n nx}{x^2}$$

### Exercice 54

Déterminer pour tout n de  $IN^*$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nx}{\sqrt{1 + \cos nx}}$$

### Exercice 55

f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et  $x_0 \in I$  tel que f est bornée sur I et discontinue en  $x_0$  et g continue en  $x_0$

Démontrer que fg soit continue en  $x_0$  si et seulement si  $g(x_0) = 0$ .

### Exercice 56

Déterminer toutes les fonctions f continues sur IR tel que

$$\begin{cases} f(2009) = 2009^{2008} \\ \forall (x; t) \in IR^2 \quad f(x + t) = f(x) + f(t) \end{cases}$$

### Exercice 57

Soit f une fonction définie sur IR telle que

$$\forall (x; y) \in IR^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Démontrer que si f est continue en 0 ; alors est continue sur IR

### Exercice 58

Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x} - 1$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .

3) Démontrer que :

$$\exists (\alpha; \beta) \in IR^2 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right];$$

$$\alpha x \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$$

4) Démontrer que

$$\exists c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] ; \sqrt{1 + \frac{1}{c}} - \sqrt{c^2 + 2c} = c$$

**Exercice 59** Soit f la fonction définie par

## Exercices et problèmes

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{2x-x^2} \right)$$

- 1) Determiner  $D_f$  et demontrer que f est continue sur  $D_f$   
2) Demontrer que

$$\exists (\alpha; \beta) \in IR^2 \forall x \in \left[ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right]; 2\alpha < \sqrt{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt{x^2 + 2x} \leq \beta x$$

- 3) Demontrer que f est une bijection de  $[0; 1]$  vers  $[0; 1]$

- 4) Soit  $[a; b] \subset [0; 1]$  demontrer que :

$$\exists c \in [a; b] f(c) = \frac{a-c}{a-2b+c}$$

### Exercice 60

f est une fonction definie sur  $[0; 1]$  telle que  $f([0; 1]) \subset [0; 1]$  et f continue sur  $[0; 1]$   
demontrer que  $\exists c \in [0; 1] f(c) = c$

### Exercice 61

$f: [a; b] \rightarrow [a; b]$  Continue sur  $[a; b]$   
Demontrer f admet un point fixe

### Exercice 62

Soit f une fonction continue sur  $IR$  telle que

$$(\forall x \in IR) f(x) \neq x$$

Demontrer que l'équation  $f \circ f(x) = x$  n'admet pas  
aucune solution sur  $IR$ .

### Exercice 63

Soit f une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  
 $f(0) = f(1)$

Demontrer qu'il existe un reel c de  $]0; 1[$  tel que

$$f(c) = \frac{1-c}{1+c}$$

### Exercice 64

Soit f une fonction continue sur  $[a; b]$  tel que  
 $f(a) = f(b)$   
Demontrer que l'équation  $f(x) = f\left(x + \frac{b-a}{2}\right)$   
admet au moins une solution sur  $[a; b]$ .

### Exercice 65

Soit  $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  continue sur  $[a; b]$

Demontrer que  $\forall n \in IN^* \exists c_n \in [0; 1] f(c_n) = c_n^n$

### Exercice 66

Soient f et g deux fonctions definies de  $[0; 1]$  vers  $[0; 1]$

telles que  $\begin{cases} f \text{ et } g \text{ continues sur } [0; 1] \\ f([0; 1]) = [0; 1] \end{cases}$

Demontrer que  $\exists x_0 \in [0; 1] f(x_0) = g(x_0)$

### Exercice 67

Soient f et g deux fonctions continues sur  $[0; 1]$  telles que :  $(f(0) - g(0))(f(1) - g(1)) \leq 0$

Demontrer qu'il existe un réel c de  $[0; 1]$  tel que

$$f(c) = g(c)$$

### Exercice 68

Soit  $(a; b) \in IR^2$  tels que  $a < b$  et  $0 < ab$ .

$f: [a; b] \rightarrow [a; b]$  continue sur  $[a; b]$

Demontrer que  $\exists c \in [a; b] cf(c) = ab$

### Exercice 69

Soit f une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(a) < ab$  et  $b^2 < f(b)$

Demontrer qu'il existe un reel  $\alpha$  tel que  $\alpha \in [a; b]$  et  $f(\alpha) = \alpha b$ .

### Exercice 70

Soit f une fonction de  $[0; 1]$  vers  $[0; 1]$  telle que f est continue sur  $[0; 1]$ .

Demontrer que  $\exists c \in ]0; 1[ f(c) + f(1-c) = 2c$

### Exercice 71

g est une fonction continue sur  $[0; 1]$ . Demontrer que

$$\exists \lambda \in ]0; 1[ g(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda}$$

### Exercice 72

f est g deux fonction continues sur  $[0; 1]$  telles que

$$g(0) = f(1) = 1 \text{ et } f(0) = g(1) = 0$$

Demontrer que :  $\exists c \in ]0; 1[ f(c) = 2007g(c)$

### Exercice 73

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux reels strictement positifs

Et soit f une fonction continue sur  $[0; 1]$  tel que

## Exercices et problèmes

$f(0) \neq f(1)$ . Demontrer que  
 $\exists c \in [0; 1] \quad \alpha f(0) + \beta f(1) = (\alpha + \beta)f(c)$

### Exercice 74

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . et soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . demontrer que

$$\exists c \in ]a; b[ \quad f(c) = \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}$$

### Exercice 75

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$  et  $f$  une application de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$

a) On suppose que pour tout  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$  on a :  $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

En déduire qu'il existe  $x \in [a, b]$ , tel que  $f(x) = x$ .

b) On suppose maintenant que pour tout

$(x, y) \in [a, b] \times [a, b] \quad x \neq y$  on a :

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique  $x \in [a, b]$ , tel que

$$f(x) = x$$

### Exercice 76

Montrer que toute fonction polynôme de  $IR$  dans  $IR$  de degré impair, s'annule en au moins un point .

### Exercice 77

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a ; b]$  .

Montrer qu'il existe

$$c \in [a, b] \text{ tel que } 2f(a) + 3f(b) = 5f(c)$$

### Exercice 78

Soient  $f$  et  $g$  et  $h$  trois fonctions continues sur un intervalle  $I$  telles que  $(\forall x \in I) \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Montrer que si chacune des deux fonctions  $g$  et  $h$  admet un point fixe dans  $I$  alors  $f$  en admet un aussi .

### Exercice 79

Soient  $f, g : [a ; b] \rightarrow IR$  continues . on suppose que

$$\forall x \in [a ; b] \quad f(x) > g(x) > 0$$

Montrer qu'il existe  $k > 1$  tel que  $f > kg$

### Exercice 80

Soit  $f$  croissante sur  $[a, b]$  telle que

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

### Exercice 81

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  tel que  $a < b$

Et soit  $n \in IN^*$ . et soient  $x_1; x_2, \dots; et x_n$  des éléments de  $[a; b]$ . Demontrer que :

$$(\exists c \in [a; b]);$$

$$f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$$

### Exercice 82

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  et  $f(1) = f(0)$

Soit  $n$  de  $IN$  et  $n \geq 2$ , on considère la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; 1 - \frac{1}{n}]$  par :

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

1) Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right)$

2) Demontrer que  $\exists x_0 \in [0; 1] \quad f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$

### Exercice 83

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $IR_+$  tel que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Demontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution sur  $IR_+$

### Exercice 84

$f$  et  $g$  deux fonctions continues sur même intervalle  $I$

tels que  $(\forall x \in I) \quad (f(x))^2 = (g(x))^2$

Demontrer que  $(\forall x \in I) \quad f(x) = g(x)$

ou  $(\forall x \in I) \quad f(x) = -g(x)$

# Chapitre 2

## Les suites numériques

### Histoire

Dans son traité d'arithmétique, As-Sawawal (1172) écrit : “ Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. que ce celle là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, là différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagé, indéfiniment. c'est pourquoi il devient possible de trouver continument une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment ”.

(R.Rashed,entre Arithmétique et algèbre,1984).

**As-smawal : Ibn Yahya al-Maghribi al-Samaw'al** est un mathématicien et médecin de

langue arabe né à Bagdad vers 1130 et mort à Maragha vers 1180

أجزاء مثبات أليوف أليوف أليوف	٥
أجزاء أليوف أليوف أليوف	٦
أجزاء مثبات أليوف أليوف أليوف	٧
أجزاء مثبات أليوف أليوف أليوف	٨
أجزاء أليوف أليوف	٩
أجزاء مثبات أليوف أليوف	١٠
أجزاء مثبات أليوف أليوف	١١
أجزاء مثبات أليوف أليوف	١٢
أجزاء أليوف أليوف	١٣
أجزاء مثبات أليوف	١٤
أجزاء مثبات أليوف	١٥
أجزاء أليوف	١٦
أجزاء المثبات	١٧
أجزاء العصائرات	١٨
مرتبة الأعداد	١٩
مرتبة العصائرات	٢٠
مرتبة المثبات	٢١
مرتبة العصائرات	٢٢
مرتبة المثبات	٢٣
مرتبة الأليوف	٢٤
مرتبة مثبات الأليوف	٢٥
مرتبة أليوف الأليوف	٢٦
مرتبة مثبات أليوف أليوف	٢٧
مرتبة مثبات أليوف أليوف	٢٨
مرتبة أليوف أليوف أليوف	٢٩
مرتبة مثبات أليوف أليوف	٣٠
مرتبة أليوف أليوف أليوف	٣١

Tableau d'As-samawal

## I. Rappel

### 1) Suites majorées, minorées, bornées

#### Définition

- La suite  $(u_n)$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq M$ .
- La suite  $(u_n)$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq m$ .
- La suite  $(u_n)$  est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

#### Exemples :

- Les suites de terme général  $\cos(n)$  ou  $(-1)^n$  sont bornées.
- La suite de terme général  $n^2$  est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ . Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est majorée par 3.

- Initialisation :

$$u_0 = 2 < 3$$

La propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que la propriété soit vraie :  $u_k \leq 3$ .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k+1$  :  $u_{k+1} \leq 3$ .

On a :  $u_k \leq 3$  donc  $\frac{1}{3}u_k \leq \frac{3}{3} = 1$  et donc  $\frac{1}{3}u_k + 2 \leq 1 + 2 = 3$ . On a donc :  $u_{k+1} \leq 3$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $u_n \leq 3$ .

### 2) Monotonie d'une suite

#### Propriété

Soit  $(u_n)$  une suite numérique

- Si  $u_{n+1} > u_n$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $u_{n+1} < u_n$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

## 3) Suite arithmétique suite géométrique

### a) Suite arithmétique

#### Définition

Une suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique s'il existe un nombre  $r$  tel que pour tout entier  $n$ , on a :

$u_{n+1} = u_n + r$ . Le nombre  $r$  est appelé raison de la suite.

#### Propriété

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_p$ .

Pour tout entier naturel  $n \geq p$ , on a :  $u_{n+1} = u_p + (n - p)r$ .

$$\text{Et } u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}$$

### b) Suite géométrique

#### Définition

Une suite  $(u_n)$  est une suite géométrique s'il existe un nombre

$q$  tel que pour tout entier  $n$ , on a :  $u_{n+1} = qu_n$ .

Le nombre  $q$  est appelé raison de la suite.

#### Propriété

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_p$ .

Pour tout entier naturel  $n \geq p$ , on a :

$$\text{I. } u_n = u_p (q)^{n-p}$$

$$\text{II. } u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1$$

$$\text{III. } u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p (n - p + 1) \text{ si } q = 1$$

## II. Limite d'une suite numérique

### 1) Limite infinie

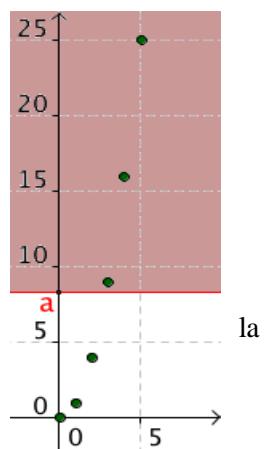
#### Exemple :

La suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = n^2$  a pour limite  $+\infty$ .

En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que

l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel  $a$  quelconque, l'intervalle  $[a; +\infty[$  contient tous les termes de suite à partir d'un certain rang.



# Cours

## Définition

On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si tout intervalle  $[a; +\infty[$ ,

$a$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $-\infty$  si tout intervalle  $]-\infty; b[$ ,  $b$  réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

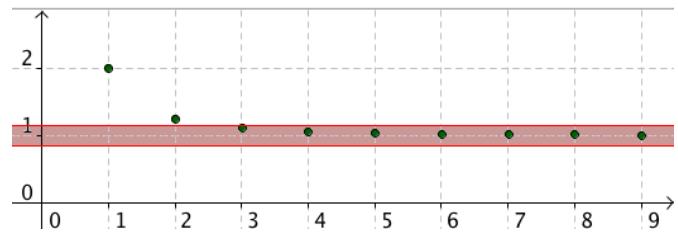
## 2) Limite finie

**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n^2} \text{ a pour limite } 1.$$

En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



**Définition** On dit que la suite  $(u_n)$  admet pour limite  $l$  si tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l . C- \text{à-d } (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(u_n \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[)$$

Une telle suite est dite convergente

**Définition** Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente

**Exemple :** soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite définie par

$$u_n = \frac{3n - 1}{n + 1} \text{ on montre que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

Soit  $\varepsilon$  un élément de  $\mathbb{R}_+^*$  existe il un entier naturel  $N$

tel que  $(\forall n \geq N)(u_n \in ]3 - \varepsilon; 3 + \varepsilon[)$

$$u_n \in ]3 - \varepsilon; 3 + \varepsilon[ \Leftrightarrow -\varepsilon < u_n - 3 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n + 1} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{n + 1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} - 1 < n$$

Posons  $N = E\left(\left|\frac{3}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1 ; N \in \mathbb{N}$  donc pour

tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :

$$(\forall n \geq N) \Rightarrow N > \left| \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right| \text{ car } (x \leq |x|) \text{ donc d'après}$$

le raisonnement par équivalences successives on a

$$(\forall n \geq N) u_n \in ]3 - \varepsilon; 3 + \varepsilon[$$

## Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

# Cours

Par exemple, la suite de terme général  $(-1)^n$  prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

## 3) Limites des suites usuelles

### Propriété

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

**Démonstration de**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle ouvert  $] -a ; a [$ ,  $a$  réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout  $n$ , tel que :  $n > \frac{1}{a}$ , on a :  $0 < \frac{1}{n} < a$  et donc  $\frac{1}{n} \in ] -a ; a [$ . Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes

de la suite appartiennent à l'intervalle  $] -a ; a [$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

### Propriété

Si  $(u_n)$  est une suite convergente alors sa limite est unique

### Propriété

Si  $(u_n)$  est une suite convergente alors elle est bornée c-à-d  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$

**Démonstration :** soit  $(u_n)$  est une suite convergente vers un réel  $l$

Soit  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  alors  $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) u_n \in \left[ l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2} \right]$

on considère l'ensemble  $A = \left\{ |u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|, \left| l - \frac{1}{2} \right|, \left| l + \frac{1}{2} \right| \right\}$  et soit  $M$  le plus grand élément de  $A$  alors

$\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$  alors  $(u_n)$  est bornée

## 4) Opérations sur les limites

### a) Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

\* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n)$  ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

D'après la règle sur la limite d'une somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty$$

## b) Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) =$	$l l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3)$  ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) = 1$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3) = +\infty$  D'après la règle sur la limite d'une produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (n^2 + 3) = +\infty$$

## c) Limite d'un quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$l$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l' \neq 0$		$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$  ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty \text{ et donc}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 - 3) = -\infty$  D'après la règle sur la limite

$$\text{d'un quotient : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3} = 0$$

**Remarque :** Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture : " $\infty - \infty$ ", " $0 \times \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " et " $\frac{0}{0}$ ".

## Application :

Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3\sqrt{n})$  ; b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n}$  ; c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3}$  ; d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

## Correction

a) on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$n - 3\sqrt{n} = n \left( 1 - \frac{3\sqrt{n}}{n} \right) = n \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = 1$  donc par limite d'un

produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( 1 - \frac{3}{\sqrt{n}} \right) = +\infty$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3\sqrt{n}) = +\infty$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n^2 + 4) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n^2 + 3n) = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2 \times \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{n^2}}{n^2 \times \frac{4 + \frac{3}{n}}{n}} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 5 + \frac{4}{n^2} \right) = 5$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 4 + \frac{3}{n} \right) = 4$  donc par

limite d'un quotient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{4}$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}$ .

c) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{3n^2 + n}{n + 3} = \frac{n^2 \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{n}}{n + 3} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{n} \right) = 3$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{3}{n} \right) = 1$  donc par

limite d'un quotient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1 + \frac{3}{n}} = 3$

Et donc par limite d'un produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = +\infty$ .

Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} = +\infty$ .

d) Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}},$$

on a multiplié par l'expression conjuguée.

$$= \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

Or par limite d'une somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty$  et

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$ .

Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) = 0$ .

## 5) Limites et ordre

### Propriété

Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite convergente tel que :  $(\forall n \geq n_0) u_n > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$  c.-à-d

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow l \geq 0$$

## Démonstration :

Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $(\forall n \geq n_0) u_n > 0$  on montre que  $l \geq 0$

Supposons que  $l < 0$  et  $\varepsilon = -\frac{l}{2}$  alors  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \left( u_n \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[ = \left] \frac{3l}{2}; \frac{l}{2} \right[ \right)$

Posons  $N' = \sup(N; n_0)$  alors  $u_n < \frac{l}{2}$  et  $u_n > 0 (\forall n \geq N')$  alors  $0 < \frac{l}{2}$  impossible car  $l < 0$

Donc d'après le raisonnement par absurdement  $l \geq 0$ .

### Propriété

Si  $(u_n)$  est une suite convergente vers un réel  $l$  tel que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < a$  alors  $l \leq a$

c-à-d  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \in \mathbb{R} \\ u_n < a \end{cases} \Rightarrow l \leq a$

### Propriété

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes tels que . Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

c-à-d  $\begin{cases} (\forall n \geq n_0): u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'$

## 6) Critères de convergence

### a) Convergences des suites monotones

#### Propriété

Soit  $(u_n)$  une suite croissante définie sur  $\mathbb{N}$ .

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  alors la suite  $(u_n)$  est majorée par  $l$ .

#### Démonstration :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un entier  $p$ , tel que  $u_p > l$  . »

- L'intervalle ouvert  $]l - 1; u_p[$  contient  $l$ .

Or, par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . Donc l'intervalle  $]l - 1; u_p[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang (1).

- Comme  $(u_n)$  est croissante :  $u_n \geq u_p$  pour  $n > p$  .

Donc si  $n > p$  , alors  $u_n \notin ]l - 1; u_p[$  (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $u_p > l$

Et donc la suite  $(u_n)$  est majorée par  $l$ .

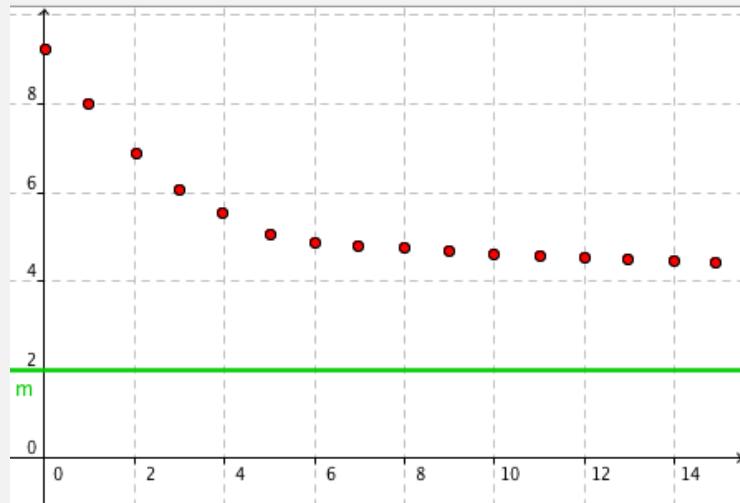
#### Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

## Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



## Exemple :

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

- On a démontré dans le paragraphe I. que la suite  $(u_n)$

est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite  $(u_n)$  est majorée par 3.

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente.

## Corollaire :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers  $+\infty$ .
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers  $-\infty$ .

## Démonstration :

1) Soit un réel  $a$ .

Comme  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe un entier  $p$  tel que  $u_p > a$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante donc pour tout  $n > p$ , on a  $u_n \geq u_p$ .

Donc pour tout  $n > p$ , on a  $u_n > a$ .

Et donc à partir d'un certain rang  $p$ , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle  $]a; +\infty[$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

2) Démonstration analogue.

## Exemple :

- On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = u_n + n^2$  et  $u_0 = 1$  on démontre que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$   
on ne peut tout entier naturel  $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$  donc  $(u_n)$  est croissante
- On démontre que  $(u_n)$  est non majorée

On suppose que  $(u_n)$  est majorée donc il existe un nombre réel  $l$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$   
Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  est contradictoire à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$  donc  $(u_n)$  est non majorée et par suite  $(u_n)$  est croissante et non majorée alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

## Application

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  et  $a_0 > 0$   
démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

## Théorème des gendarmes :

Soient  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites définies sur  $\mathbb{N}$  et  $l$  un nombre réel.

Si, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  (les gendarmes) se resserrent autour de la suite  $(v_n)$  à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

## Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant  $l$ .

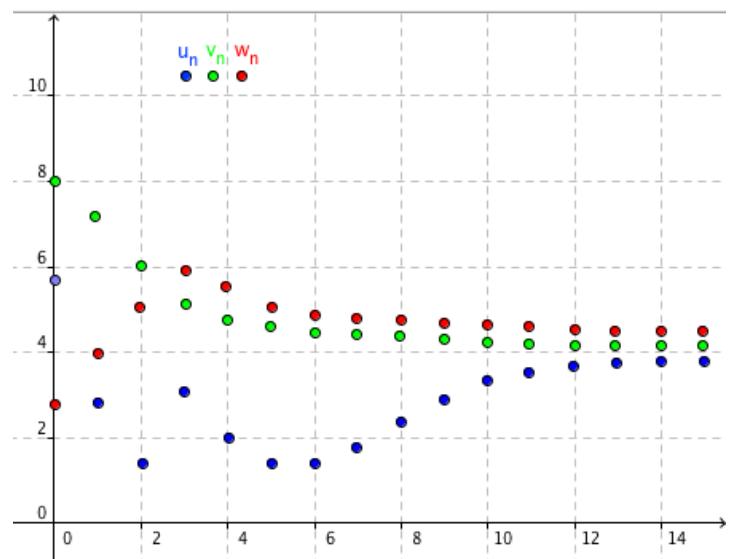
-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_1$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_2$ .

- A partir d'un certain rang, que l'on note  $n_3$ , on a  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .

- Ainsi pour tout  $n \geq \max(n_1; n_2; n_3)$ , l'intervalle I contient tous les termes de la suite  $(v_n)$ .

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$



**Exemple :** Déterminer une limite par encadrement

Déterminer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin n}{n} \right)$

On a :  $-1 \leq \sin n \leq 1$  donc  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc d'après le

théorème des gendarmes  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin n}{n} \right) = 1$

## Propriété

soit  $q$  un nombre réel on a :

$q$	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	<i>pas de limite</i>	0	1	$+\infty$

## Démonstration dans le cas $q > 1$

Prérequis : Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $(1+a)^n \geq 1+na$  (*inégalité de Bernoulli*),

On suppose que  $q > 1$ , alors on peut poser  $q = a + 1$  avec  $a > 0$ .

$$q^n = (1+a)^n \geq 1+na.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+na) = +\infty$  car  $a > 0$ .

Donc d'après le théorème de comparaison  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ .

**Exemples :** La suite de terme général  $-5 \times 4^n$  a pour

limite  $-\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ .

Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n)$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right)$

a)  $(-2)^n$  est une suite géométrique de raison -2 et  $-2 \leq -1$ .

Donc  $(-2)^n$  ne possède pas de limite.

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$  n'existe pas.

b)  $2^n - 3^n = 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$  car  $\left( \frac{2}{3} \right)^n$  est une suite géométrique

de raison  $\frac{2}{3}$  et  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -1$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  car  $3^n$  est une suite géométrique de raison 3 et  $3 > 1$ .

Donc par limite d'un produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n) = -\infty$ .

## Cours

c) On reconnaît les  $n$  premiers termes d'une suite

géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme 1.

$$\text{Donc } 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

$$= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$  comme limite d'une suite

géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2.$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2.$$

### Propriété

Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}^*$

1. Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

2. Si  $\alpha < 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

## III. Suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ ; $v_n = f(u_n)$

### 1) Suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$

A) Conjecturer limite d'une suite à partir d'une courbe

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2+u_n}{u_n}; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $f(x) = \frac{x+2}{x}$

On a  $u_{n+1} = f(u_n)$  on représente la courbe de  $f$  (voir le figure)

La représentation graphique de la suite nous permet de conjecturer que la suite  $(u_n)$  est convergente vers 2 et que 2 est la solution de l'équation  $f(x) = x$

B) Vérification de la conjecture

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

On a  $(\forall n \in \mathbb{N}): v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1}$

$$= \frac{\frac{2+u_n}{u_n} - 2}{\frac{2+u_n}{u_n} + 1} = -\frac{1}{2} \left( \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \right)$$

## Cours

$= -\frac{1}{2}v_n$  donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de

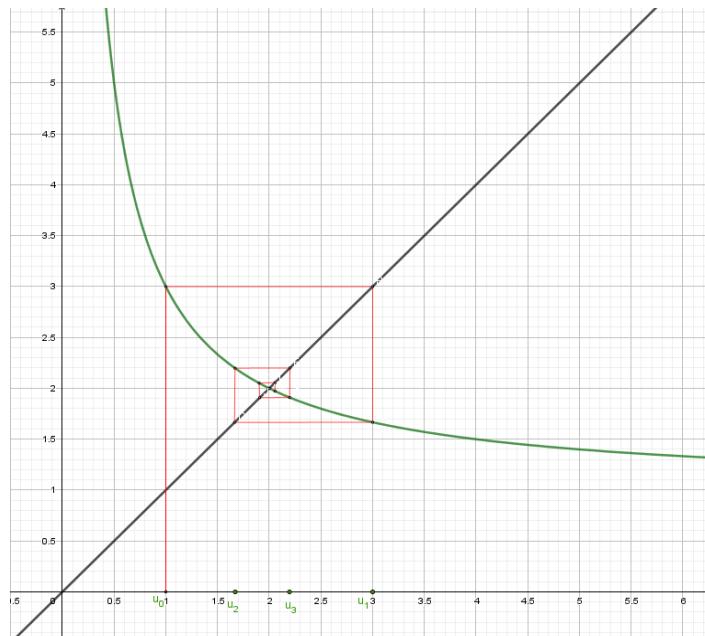
raison  $-\frac{1}{2}$  et de son premier terme  $v_0 = -\frac{1}{2}$  donc

$$v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} \text{ comme } (\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

donc  $u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$  et par suite

$$u_n = \frac{2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}} \text{ comme } -1 < \frac{-1}{2} < 1 \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$



### Application :

Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - 1 ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $f(I) \subset I$

Et soit  $(u_n)$  une suite définie par la relation :  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 \in I$

Si  $(u_n)$  est convergente et sa limite est  $l$  alors  $l$  est la solution de l'équation  $f(x) = x$

### Démonstration :

$(u_n)$  est convergente alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Comme  $f$  est continue en  $l$  alors  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in I)(0 < |x - l| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(l)| < \varepsilon)$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  alors  $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |u_n - l| < \alpha$  il est facile

à démontrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I$  on a  $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) |f(u_n) - f(l)| < \varepsilon$  donc

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)(|f(u_n) - f(l)| < \varepsilon)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$  alors  $f(l) = l$  est par suite  $l$  est la solution de l'équation  $f(x) = x$

**Exemple :** soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

on étudie la convergence de la suite  $(u_n)$

on considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0;1]$  par

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

- La fonction  $f$  est continue et croissante sur  $I$  donc :

$$f(I) = [f(0); f(1)] = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right] \text{ donc } f(I) \subset I$$

- On montre que  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

Pour  $n=0$  on a  $u_0 = 1$  donc  $0 \leq u_0 \leq 1$  la

relation est vraie

Supposons qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que

$$0 \leq u_n \leq 1$$

Et montrons que  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a  $0 \leq u_n \leq 1$  donc  $u_n \in I$  donc

$f(u_n) \in f(I)$  comme  $f(I) \subset I$  alors  $u_{n+1} \in I$

c-à-d  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  donc d'après la récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$$

- On étudie la monotonie de  $(u_n)$

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$  on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} - u_n \\ &= \left( \frac{1+u_n}{2} - u_n^2 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n} \right) \\ &= \left( \frac{1+u_n - 2u_n^2}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n} \right) \\ &= \left( -\frac{(2u_n + 1)(u_n - 1)}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n} \right) \end{aligned}$$

Comme  $0 \leq u_n \leq 1$  alors  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  donc

$(u_n)$  est croissante

Et par suite on a  $(u_n)$  est majorée et croissante donc elle est convergente et sa limite est  $l$  vérifie  $f(l) = l$  et  $0 \leq l \leq 1$

On a

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+l}{2}} = l \Leftrightarrow 2l^2 - l - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{-1}{2} \text{ ou } l = 1 \text{ comme}$$

$$0 \leq l \leq 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

## Application :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1. Soit  $I = [0; \frac{1}{4}]$  démontrer que  $f(I) \subset I$

2. a) Démontrer que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4} (\forall n \in \mathbb{N})$ .

b) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

d) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

## 2) Suite de type $v_n = f(u_n)$

### Propriété

Si la suite  $(u_n)$  est convergente et sa limite est  $l$  et  $f$  une fonction continue en  $l$  alors la suite  $(v_n) = (f(u_n))$  est convergente et sa limite est  $f(l)$

Autrement dit  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \\ f \text{ est continue en } l \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

### Exemples :

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = \sqrt{\frac{4n^2 + 1}{n^2 + 2}}$

Possons  $u_n = \frac{4n^2 + 1}{n^2 + 2}$  alors  $v_n = f(u_n)$  avec

$$f(x) = \sqrt{x}. \text{ On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 + 1}{n^2 + 2} = 4$$

Et comme  $f$  est continue en 4 alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(4) = \sqrt{4} = 2$$

**Application :** déterminer limites des suites suivantes définies par :

$$1) \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi + 1}{4n - 2}\right) \quad ; \quad 2) \quad v_n = \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 3}}} ; \quad 3) \quad w_n = \sin\left(\frac{\pi}{n + 2}\right)$$

## IV. Les suites adjacentes

### Propriété

On dit que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$$

### Exemples :

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par  $u_n = \frac{1}{n}$  et  $v_n = \frac{-5}{n}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{n} = 0$  et  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

**Application :** Démontrer que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes

$$1) \quad u_n = -\frac{1}{n+2} \text{ et } v_n = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad 2) \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

### Propriété

Si les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes alors elles sont convergentes et ont même limite

### Démonstration :

Supposons que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

$(v_n)$  sont

## Cours

- On démontre que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq v_n$

Posons  $(\forall n \in \mathbb{N}) w_n = v_n - u_n$ .

On étudie la monotonie de  $(w_n)$

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$  on a  $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$

$$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Comme  $(u_n)$  est croissante alors  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  et  $(v_n)$  est décroissante alors  $v_{n+1} - v_n \leq 0$

Et par suite  $w_{n+1} - w_n \leq 0$  alors  $(w_n)$  est décroissante et tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$  alors  $w_n \geq 0$  donc  $0 \leq v_n - u_n$

et par suite  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq v_n$

On a  $(u_n)$  est croissante alors  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_0 \leq u_n$

Et  $(v_n)$  est décroissante alors  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n \leq v_0$  alors comme  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq v_n$

Alors  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$  et la suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_0$  alors les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes.

- Soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  on montre que  $l = l'$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = l - l'$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$  alors  $l - l' = 0$  alors  $l = l'$ .

**Remarque :**

Si les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes telle que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante alors :

- $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \leq v_n$
- $(u_n)$  est majorée par  $v_0$
- $(v_n)$  est minorée par  $u_0$

## Exemple :

1) Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

On démontre que les suites ont même limite

- On a  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$   
donc  $(u_n)$  est croissante
- On a  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3} < 0 \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)$  est décroissante

- On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes donc elles sont convergentes et ont même limite

## Exercices résolus

### Exercice 1

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$

1/a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq U_n \leq 4$

b) Montrer que  $U$  est strictement croissante

c) Déduire que  $U$  est convergente et calculer sa limite

2/a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $0 \leq 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

b) Déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) Retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3/ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Montrer que  $0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b) Déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### Correction

1/a) Soit  $P : \forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq U_n \leq 4$

- Pour  $n = 0$  on a :  $0 \leq U_0 = 0 \leq 4$  d'où  $P$  est vraie
- soit  $n \in \mathbb{N}$  ; Supposons que :  $0 \leq U_n \leq 4$  et Montrons que  $0 \leq U_{n+1} \leq 4$ .

$$\text{on a : } 0 \leq U_n \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 3U_n \leq 12$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 16$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4} \leq \sqrt{3U_n + 4} \leq \sqrt{16}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 4$$

Cl :  $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq U_n \leq 4$

b)

$$\begin{aligned} U_{n+1}^2 - U_n^2 &= 3U_n + 4 - U_n^2 \\ &= -(U_n + 1)(U_n - 4) \geq 0 \quad \text{donc} \end{aligned}$$

d'où  $U$  est une suite strictement croissante

c) \*  $U$  est une suite strictement croissante et majorée par 4 donc elle converge vers une limite  $L$

\* Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

On a

$f(U_n) = U_{n+1}$  et  $f$  est continue sur  $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right]$  or  $L \in [0; 4]$  donc  $f$  est continue en  $L$

$$\text{donc } f(L) = L \Leftrightarrow \sqrt{3L + 4} = L$$

$$\Leftrightarrow 3L + 4 = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 3L - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow L = -1 \notin [0; 4] \text{ ou } L = 4$$

D'où  $U$  converge vers 4

## Exercices résolus

2/a) On a :

$$4 - U_{n+1} = 4 - \sqrt{3U_n + 4} = \frac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}(4 - U_n) \text{ or}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq U_n \leq 4 &\Leftrightarrow 6 \leq 4 + \sqrt{3U_n + 4} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \leq \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{8} \leq \frac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et comme

$$\begin{aligned} 4 - U_n &\geq 0 \quad \text{donc } 0 \leq \frac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}(4 - U_n) \leq \frac{1}{2}(4 - U_n) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (4 - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(4 - U_n) \end{aligned}$$

b) Soit  $P' : \forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

\* Pour  $n=0$  on a :  $0 \leq 4 - U_0 = 4 \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4$  donc  $P'$

est vrai

soit  $n \in \mathbb{N}$  ; Supposons que :  $0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

\* et Montrons que  $0 \leq 4 - U_{n+1} \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ .

D'après 2/a) on a

$$0 \leq (4 - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(4 - U_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Cl :  $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) On a et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$

3/ On a

$$0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n 4 - U_k \leq \sum_{k=1}^n 4\left(\frac{1}{2}\right)^k \sum_{k=1}^n 4 - \sum_{k=1}^n U_k \leq 4 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=1}^n 4 = 4n$$

Or et  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Somme d'une S.G de raison  $\frac{1}{2}$

D'où  $0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

b) On a :

$$0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow -4n \leq -S_n \leq -4n + 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\Leftrightarrow 4n - 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq S_n \leq 4n$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n - 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

### Exercice 2

On considère la suite  $(un)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels définie par :

$$U_n = \frac{1}{3 + |\sin(1)|\sqrt{1}} + \frac{1}{3 + |\sin(2)|\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{3 + |\sin(n)|\sqrt{n}}$$

Montrer que la suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

### Correction

On va minorer  $u$

$n$  par une suite qui tend vers  $+\infty$   $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$3 + |\sin(k)|\sqrt{k} < 3 + \sqrt{k} < 3 + \sqrt{n}$  Ce qui entraîne

$$\text{que } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{1}{3 + |\sin(k)|\sqrt{k}} \geq \frac{1}{3 + \sqrt{n}}$$

## Exercices résolus

Donc

$$U_n \geq \underbrace{\frac{1}{3+\sqrt{n}} + \frac{1}{3+\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{3+\sqrt{n}}}_{n \text{ fois}} = \frac{n}{3+\sqrt{n}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3+\sqrt{n}} = +\infty$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

### Exercice 3

On considère les deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par

$$u_n = \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

- (1) Montrer que  $(u_n)_n$  est strictement croissante, et que  $(v_n)_n$  est strictement décroissante à partir d'un certain rang.
- (2) En déduire que  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  convergent vers une même limite  $l$ .
- (3) Montrer que cette limite est irrationnelle.

### Correction

(1) Rappelons que, par convention,  $0! = 1$ . Pour tout

$n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$ , donc  $(u_n)$  est strictement croissante.

par ailleurs  $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

On voit donc que  $v_{n+1} - v_n < 0$  à partir de  $n = 2$ .

(2) Pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n \leq v_n \leq v_2 = 3$  de sorte que  $(u_n)$  est une suite croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite  $l$ . De même, pour tout  $n \geq 2$ ,  $v_n \geq u_n \geq u_0$  de sorte que la suite  $(v_n)$  est décroissante (à partir du rang  $n = 2$ ) et minorée, donc convergente.

Or  $v_n - u_n = 1/(n!) \rightarrow 0$  lorsque

$n \rightarrow \infty$ , donc  $(v_n)$  converge vers la même limite  $l$ .

(3) Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que

$l \in \mathbb{Q}$ . Alors  $l = p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n \geq 2$ , nous avons  $u_n \leq l \leq v_n$ , et comme  $q \geq 2$  (sans quoi la limite  $l$  serait entière, ce qui est clairement faux), nous avons en particulier

$$u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q \text{ soit } q!u_q \leq \frac{q!p}{q} \leq q!v_q = q!u_q + 1$$

Il est facile de voir que  $q!u_q$  est entier. L'entier  $q!l = q!(p/q)$  est donc compris entre les deux entiers successifs  $q!u_q$  et  $q!u_q + 1 = q!v_q$ , ce qui montre que  $l \in \{u_q, v_q\}$ . Si  $l = u_q$ , alors  $u_q < u_{q+1} < \dots < l = u_q$ , ce qui est absurde. Si  $l = v_q$ , alors  $l = v_q > v_{q+1} > \dots > l$ , ce qui est tout aussi absurde. Ainsi, nous avons montré que  $l$  ne peut pas être rationnel.

### Exercice 4

Soient  $u_0$ ,  $a$  et  $b$  trois réels. On considère la suite  $(u_n)_{\geq 0}$  de nombres réels définie par  $u_0$  et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

1. Comment appelle-t-on la suite  $(u_n)_{\geq 0}$  lorsque  $a = 1$  ? Lorsque que  $b = 0$  et  $a \neq 1$  ?
2. Exprimer  $u_n$  dans les deux cas particuliers de la question 1.

## Exercices résolus

3. Dans le cas général, calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  en fonction de  $u_0$ ,  $a$  et  $b$ .
4. Démontrer par récurrence que le terme général de la suite est donné par :  $u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k}$ ;  $n \in \mathbb{N}^*$
5. On suppose que  $a \neq 1$ . Démontrer que  $\sum_{k=1}^n a^{n-k} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$
6. Déduire de ce qui précède que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1}$
7. On suppose dans cette question que  $a > 1$  et que  $au_0 + b > u_0$ . Montrer que la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $+\infty$ .
8. On suppose dans cette question que  $0 < a < 1$ , montrer que  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge et que sa limite ne dépend pas de  $u_0$ .

### Correction

1. Lorsque  $a = 1$  alors  $u_{n+1} = u_n + b$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique de raison  $b$ . Lorsque  $b = 0$  et  $a \neq 1$  alors  $u_{n+1} = au_n$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $a$ ,

2. Lorsque  $a = 1$  alors  $u_n = u_0 + nb$ . Lorsque  $b = 0$  et  $a \neq 1$  alors  $u_n = anu_0$  (remarque, si  $a = 1$  cela ne change rien).

$$3. u_1 = au_0 + b$$

$$u_2 = au_1 + b$$

$$= (au_0 + b) + b$$

$$= a_2 u_0 + (a + 1)$$

$$u_3 = au_2 + b$$

$$= (a^2 u_0 + a + 1) + b$$

$$= a^3 u_0 + (a^2 + a + 1)$$

4. Pour  $n = 1$  l'égalité est vérifiée (c'est même la définition de  $u_1$ ), on peut aussi remarqué que la relation est aussi vérifiée pour  $n = 2$  et  $n = 3$  d'après 3.

Montrer que l'égalité au rang  $n$  entraîne celle au rang  $n + 1$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b = a \left( a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} \right) + b \\ &= a(a^n u_0 + b(a^n + a^{n-1} + \dots + a + 1)) + b \\ &= a^{n+1} u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \dots + a^2 + a) + b \\ &= a^{n+1} u_0 + b(a^{n+1} + a^n + \dots + a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

$$= a^{n+1} u_0 + b \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k}$$

$$5) \text{ on a } \sum_{k=1}^n a^{n-k} = a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1$$

$$\begin{aligned} &= 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1} \\ &= \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

6. D'après 4. Pour tout  $n \geq 1$  on a

$$\begin{aligned} u_n &= a^n u_0 + b \sum_{k=1}^n a^{n-k} = a^n u_0 + b \left( \frac{a^n - 1}{a - 1} \right) \\ &= \frac{(a^n u_0 + b)(a - 1) + b(a^n - 1)}{a - 1} \\ &= \frac{a^n(u_0 a - u_0 + b) - b}{a - 1} \\ &= \frac{a^n(u_1 - u_0) - b}{a - 1} \end{aligned}$$

7. Comme  $a > 1$ ,  $a^n \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $au_0 + b > u_0$  équivaut à  $u_1 - u_0 > 0$ , on reprend

l'expression du 7. Il est clair que  $u_n \rightarrow +\infty$

8. Comme  $0 < a < 1$ ,  $a^n \rightarrow 0$  donc  $(u_1 - u_0) - b \rightarrow -b$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$  par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\frac{b}{a - 1}$$

Et effectivement cette limite ne dépend pas de  $u_0$ .

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

Soit  $(u_n)_{\geq 0}$  la suite de nombres réels définie par  $u_0 \in ]0,1]$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$ .
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{\geq 0}$ .

### Exercice 2

Soit  $(u_n)_{\geq 0}$  la suite de nombres réels définie par  $u_0 \in ]1,2]$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{4} + \frac{3}{4}$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ .
3. Montrer que la suite est monotone. En déduire que la suite est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{\geq 0}$ .

### Exercice 3

Soit  $(u_n)$  une suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

Et la donnée de  $u_0$

1. a. Montrer que si  $u_0 \leq 2$  alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n \leq 2$  et que la suite est monotone.
- b. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
2. a. Montrer que si  $u_0 \geq 2$  alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n \geq 2$  et que la suite est monotone.
- b. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.
3. a. On pose  $v_n = u_n - 2$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$
- b. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et

$u_0$ . Retrouver le résultat des deux premières questions.

c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{n}$

### Exercice 4

Soit  $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$$

Et soit  $(v_n)_{\in \mathbb{N}}$  définie par

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$$

1. Montrer que  $(v_n)_{\in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{3}{5}$
2. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Montrer que  $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 5

1. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  dont le terme

général est défini par:  $u_n = \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 + 1}}$

2. En déduire la limite de la suite de terme général  $v_n$

défini par:  $v_n = \frac{2n - \sqrt{4n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 1}}$

### Exercice 6

1. On pose que  $u_n = \frac{E(\sqrt{n})}{n}$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

2. On pose que  $v_n = \frac{(E(\sqrt{n}))^2}{n}$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que la suite  $(v_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 7

On considère la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n > 0$ .

## Exercices et problèmes

2. Calculer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < 3$ .
4. Montrer que la suite est croissante, que peut-on en conclure ?

### Exercice 8

On considère la suite de nombre réel définie par son premier terme  $u_0 = 0$  et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n^2 + \frac{1}{8}$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 9

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par récurrence par  $u_0 = \frac{3}{2}$  et par la relation de récurrence  $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < u_n < 2$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement monotone.
3. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 10

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $u_n$  définie par :

$$u_n = \frac{2n+1}{3n^2+1} + \frac{2n+1}{3n^2+2} + \cdots + \frac{2n+1}{3n^2+n}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 11

Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général  $u_n$  définie par :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \dots \times (3n+3)}$$

Est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 12

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite réelle définie pour tout  $n > 0$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

A l'aide de la question 1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 13

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite à valeurs réelles définie par la donnée de  $u_0$ ,  $u_1$  et la relation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $2u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n = 0$

Soient  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites à valeurs réelles définies, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$v_n = 3u_n - \frac{3}{2}u_{n+1} \text{ et } w_n = -\frac{3}{4}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1}$$

1. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ . En déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , de  $u_0$  et de  $u_1$ .
2. Montrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison 2. En déduire une expression de  $w_n$  en fonction de  $n$ , de  $u_0$  et de  $u_1$ .
3. Calculer  $v_n + w_n$  de deux façons différentes et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ , de  $u_0$  et de  $u_1$ .
4. Selon les valeurs de  $u_0$  et de  $u_1$  déterminer si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et le cas échéant déterminer sa limite.

### Exercice 14

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0$  et de  $u_1$  et la relation de récurrence  $2u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ . On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $v_n = u_{n+1} - u_n$  et  $w_n = 2u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{3}{2}$
- . On exprimera  $v_n$  en fonction de  $n$ ,  $u_0$  et  $u_1$ .
2. Montrer que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite constante.
- On exprimera  $w_n$  en fonction  $u_0$  et  $u_1$ .
3. En calculant  $-2v_n + w_n$  de deux façons différentes, exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ ,  $u_0$  et  $u_1$ .
4. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$ ,  $u_0$  et  $u_1$ . Pour quelles valeurs de  $u_0$  et  $u_1$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet-elle une limite finie et dans ce cas exprimer cette limite en fonction de  $u_0$ .

### Exercice 15

On considère la suite de nombres réels définie par son premier terme  $u_0 = \frac{11}{4}$  et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$  est bien définie, convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 16

1. Calculer, si cette limite existe.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} - n + 1}{2\sqrt{n} + n + 2}$$

2. Etudier la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}}$  de nombres réels définie par la donnée de :  $0 < u_0 < 1$  et  $u_n = u_{n-1} - (u_{n-1} - 1)^2$

### Exercice 17

Calculer, si elle existe, la limite, lorsque  $n$  tend vers l'infini, de l'expression  $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

### Exercice 18

Soit  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + n}}{1 + \sqrt{n^2 + 1}}$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 19

On considère les suites  $(u_n)_{\geq 1}$  et  $(v_n)_{\geq 1}$  de nombres réels définies pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite (que l'on ne cherchera pas à calculer).

### Exercice 20

On considère la suite  $(u_n)_{\geq 0}$  de nombres réels dont le terme général est défini par récurrence en posant :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{\geq 0}$  est décroissante.
3. En déduire que la suite  $(u_n)_{\geq 0}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 21

On considère la suite  $(u_n)_{\geq 1}$  de nombres réels définie pour tout  $n \geq 1$  par :  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E(\sqrt{n})$

Montrer qu'elle est convergente et préciser sa limite.

### Exercice 22

On considère la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  est convergente et que sa limite  $l$  vérifie  $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$

### Exercice 23

On considère la suite  $(u_n)_{\in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels définie par :

$$u_n = \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right)^n$$

1. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$ , tel que pour tout

$$n \geq n_0, \text{ on ait : } \left| \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\sin(n^2)}{2} \right| < \frac{3}{4}$$

2. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

### Exercice 24

on pose :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Montrer que  $(u_n)_{\geq 1}$  est une suite divergente.

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$$

- a) Montrer que, Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$$

- c) Montrer que  $(v_n)_{\geq 1}$  est convergente et précisez sa limite.

## Exercices et problèmes

### Exercice 25

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  les suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^2} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont strictement monotones.
2. Montrer que ces deux suites convergent vers la même limite.

### Exercice 26

1. Soit  $(H_p)$  la proposition suivante.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*: & \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ & < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \end{aligned}$$

Montrer  $(H_p)$  par récurrence sur  $p$ .

2. Soit  $(u_n)_{\geq 1}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que la suite  $(u_n)_{\geq 1}$  est convergente et on ne cherchera pas à déterminer la limite de cette suite.

### Exercice 27

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Montrer que, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n+1}.$$

2. En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et préciser sa limite.

### Exercice 28

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

Pour tout entier naturel  $n$ .

1. Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > n^2$ .
- b. Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?
3. Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

### Exercice 29

Soit  $(u_n)$  la suite de terme général  $u_n = 1 + \frac{1}{n(-2)^n}$

définie pour  $n > 0$ .

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
2. On admet les deux résultats suivants :

\* pour tout  $n$  pair non nul,  $(-2)^n \geq 1$ ,

\* pour tout  $n$  impair,  $(-2)^n \leq -1$ .

a. Montrer que pour tout  $n > 0$ , on a :  $-1 \leq \frac{1}{(-2)^n} \leq 1$ .

b. En déduire que pour tout  $n > 0$ , on a l'encadrement

$$1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

c. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 30

On définit une suite  $(u_n)$  par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1. \end{cases}$

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . La suite  $(u_n)$  est-elle croissante ou décroissante?

2. On pose  $v_n = u_n - 4n + 10$ . Calculer  $v_0, v_1, v_2, v_3$ .

3. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique, en préciser la raison.

4. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

5. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

6. Quelle est la limite de  $(u_n)$ ?

### Exercice 31

Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  les suites définies pour tout  $n$  entier naturel par :

## Exercices et problèmes

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. Soit  $(u_n)$  la suite de terme général  $u_n = a_n + b_n$ .

Montrer que  $(u_n)$  est constante et calculer  $u_n$ .

2. Soit  $(v_n)$  la suite de terme général  $v_n = a_n - b_n$ .

Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3. Exprimer  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $u_n$  et  $v_n$  puis en fonction de  $n$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

### Exercice 32

On définit la suite  $u_n$  par son premier terme  $u_0$  et la

relation de récurrence :  $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs  $a = 2$  et  $b = -3$  de  $u_0$  tels que la suite  $u_n$  soit constante

2. Soit  $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$  ; après avoir étudiée  $f$  sur  $\mathbf{R}^{*+}$ ,

tracer sa courbe représentative ainsi que la droite  $y = x$  sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  et représenter les premiers termes de  $u_n$  (on prendra  $u_0 = 0$ ).

Conjecturer le comportement de  $u_n$  (sens de variation, limite).

3. Montrer que si  $u_0$  est différent de  $a$  et  $b$ , il en est de même de  $u_n$  (faire une démonstration par récurrence)

4. Calculer  $\frac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} - b}$  en fonction de  $\frac{u_n - a}{u_n - b}$ . En déduire

la nature de la suite  $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$ . Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $u_n$ . Calculer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 33

On considère la suite  $u_n$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

1. a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

b. Tracer dans un repère orthonormé la courbe

représentative  $P$  de la fonction  $f : f(x) = x(2 - x)$  ainsi que la droite  $d$  ( $y = x$ ).

c. Utiliser  $d$  et  $P$  pour construire sur l'axe des abscisses les points  $A_1, A_2, A_3$  d'abscisses respectives  $u_1, u_2, u_3$ .

2. a. Montrer par récurrence que  $0 < u_n < 1$ .

b. Montrer que  $(u_n)$  est croissante.

3. On considère la suite  $v_n = 1 - u_n$ .

a. Montrer que  $v_{n+1} = v_n^2$ .

b. Montrer par récurrence que  $v_n = v_0^{2^n}$ . En déduire l'expression de  $v_n$  puis celle de  $u_n$ .

c. Déterminer la limite de  $v_n$  puis celle de  $u_n$ .

### Exercice 34

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1, v_1, u_2, v_2$ .

2. Soit la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - u_n$ .

a. Montrer que la suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

## Exercices et problèmes

b. Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$  et préciser la limite de la suite  $(w_n)$ .

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ , démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite  $(t_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ .

a. Démontrer que la suite  $(t_n)$  est constante.

b. En déduire la limite des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

### Exercice 35

On définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 7$  et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}.$$

Soit  $D$  une droite munie d'un repère  $(O ; \vec{i})$ . Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on considère les points  $A_n$  et  $B_n$  d'abscisses respectives  $a_n$  et  $b_n$ .

1. Placez les points  $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2$  et  $B_2$ .

2. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = b_n - a_n$ . Démontrez que  $(u_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimez  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3. Comparez  $a_n$  et  $b_n$ . Étudiez le sens de variation des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Interprétez géométriquement ces résultats.

4. Démontrez que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

5. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = b_n - a_n$  pour tout entier  $n$ . Démontrez que  $(v_n)$  est une suite constante. En déduire que les segments  $[A_n B_n]$  ont tous le même milieu  $I$ .

6. Justifiez que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

### Exercice 36

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  par

$u_0 = 3$  et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_n = \frac{7}{u_n}$$

1. Calculer  $v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$  et  $v_3$ . Donner l'approximation de  $u_3$  et  $v_3$  lue sur la calculatrice.

2. Justifier par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$  et  $v_n > 0$ .

3. a. Démontrer que quel que soit  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$(u_n + v_n)^2 - 28 = (u_n - v_n)^2.$$

b. En déduire que  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}}(u_n - v_n)^2$ .

c. Conclure que quel que soit  $n$  on a  $u_n - v_n \geq 0$ .

4. En s'aidant de la question 3. c., prouver que la suite  $(u_n)$  est décroissante et que la suite  $(v_n)$  est croissante.

5. a. Démontrer que quel que soit  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $u_n \geq \frac{21}{8}$ .

b. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10}(u_n - v_n)^2.$$

c. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que  $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$ .

d. Déterminer la limite de  $u_n - v_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

6. Conclure que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

### Exercice 37

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$a_0 = 3$ ,  $b_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  on a :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n + 3}{3} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n + 3}{3}. \text{ On pose}$$

$$u_n = a_n - b_n$$

1)a/ Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

## Exercices et problèmes

b/ En déduire la limite de  $(u_n)$

2) On pose , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = \frac{a_n + b_n}{n}$

a/ Montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :  $v_n \geq 2$

b/ Montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{2 - v_n}{n+1}.$$

c/ En déduire que  $(v_n)$  converge vers un réel  $l > 0$

3.Exprimer alors  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $u_n$  et  $v_n$  et  $n$  puis déterminer les limites des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### Exercice 38

On considère la suite  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$1 \leq u_n < 2$$

2) a)Montrer que  $(u_n)$  est une suite croissante.

b)En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = \frac{1}{2}$ .

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

c) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 39

Soit u la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$

1/ Calculer :  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$

2/ Montrer que la suite u est croissante

3 / Soit v la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Montrer que v est une suite décroissante

4/ Vérifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

5/ En déduire que u et v ont la même limite L

6/a) Montrer que  $\forall p \geq 1$  on a :  $p! \leq 2^p$

b) En déduire que  $L \geq 2$

### Exercice 40

Soit U la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que la suite U est majorée par 4

b) Montrer que U est strictement croissante

c) Déduire que U est convergente et calculer sa limite

2/a) Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N} \text{ on a } 0 \leq 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$$

b) Déduire que pour tout

$$n \in \mathbb{N} \text{ on a } 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) Retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

3/ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose:  $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Montrer que  $0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

### Exercice 41

Soit u la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2$

b) Montrer que  $(u_n)$  est croissante

c) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer

sa limite

2/ Soit  $v$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que  $v$  est une suite arithmétique de

raison  $-\frac{1}{2}$

b) En déduire  $v_n$  à l'aide de  $n$  et calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

c) Exprimer  $u_n$  à l'aide de  $n$  et retrouver

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

### Exercice 42

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n} \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $0 \leq u_n \leq 4$

b) Montrer que  $u_{n+1} - u_n$

$$= \frac{-(u_n)^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{4 + 3u_n} + u_n} \text{ puis montrer que } (u_n)$$

est croissante

n de  $\mathbb{N}$ ,  $|u_n - 4| \leq \frac{4}{2^n}$

b) Retrouver les résultats du 1° c)

### Exercice 43

On considère la suite réelle  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}} \end{cases}$$

1°) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2°) a- Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 \leq u_n < \sqrt{3}$

b- Montrer que  $(u_n)$  est une suite croissante.

c- En déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

3°) Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$$

a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c- Retrouver alors la limite de  $u_n$ .

### Exercice 44

Soit  $\alpha$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(1 + \alpha).u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

1°) a- Montrer que pour tout entier  $n$ , on a :  $u_n \geq 1$ .

b- Montrer que  $(u_n)$  est une suite décroissante.

c- En déduire que  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite.

2°) Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}.$$

a- Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\alpha$ .

b- Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha$ .

c- Retrouver alors la limite de la suite  $u_n$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ .

### Exercice 45

On considère la suite réelle  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n} \end{cases}$$

1°) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - 3 = \frac{3 - u_n}{\sqrt{12 - u_n} + 3}$$

2°) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3} |u_n - 3|$$

$$3°) \text{ Montrer que } \forall n \in \mathbb{N} ; |u_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4°) Déterminer la limite de  $u_n$  quand  $n$  tends vers

### Exercice 46

On considère la suite réelle  $(u_n)$  définie sur IN

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = \cos \theta & / \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

1°) Montrer que  $u_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

2°) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $0 \leq u_n \leq 1$  et que  $(u_n)$  est une suite croissante.

3°) Montrer que  $(u_n)$  est convergente vers un réel à préciser.

4°) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :

$$u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right); \text{ Retrouver alors la limite de } (u_n).$$

### Exercice 47

$$\text{Soit } u \text{ la suite définie sur IR par : } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{3}{u_n} \end{cases}$$

1°) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} , u_n \geq 2$ .

2°) Déterminer le sens de variation de la fonction

$$f \text{ définie sur } \mathfrak{R}_+^* \text{ par } f(x) = 2 + \frac{3}{x}.$$

3°) Soit la suite  $(v_n)$  définie sur IN par :  $v_n = u_{2n}$ .

a- Montrer par récurrence que la suite  $(v_n)$  est majorée par 3.

b- Montrer par récurrence que la suite  $(v_n)$  est

croissante.

4°) a- Montrer que pour tout entier n, on a :

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2} |u_n - 3|.$$

b- Montrer par récurrence que.

$$\forall n \in \mathbb{N} , |u_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c- En déduire la limite de la suite  $u_n$  puis celle de

$$(v_n)$$

### Exercice 48

Soit la suite réelle u définie sur IN par

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que la suite u est minorée par 3

b) Montrer que la suite u est décroissante

c) En déduire que la suite u est convergente

2/a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$ .

b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

c) Calculer la limite de la suite u

### Exercice 49

Soit la fonction f définie sur l'intervalle

$$[0, 2] \text{ par } f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1/a) Donner les variations de f sur l'intervalle  $[0, 2]$

b) Montrer que si  $x \in [1, 2]$  alors  $f(x) \in [1, 2]$

c) Tracer la représentation graphique de f dans un

R.O.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 4 cm)

2/ Soit u la suite définie sur IN par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n > 0 \end{cases}$$

a) Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de la suite u

## Exercices et problèmes

- b) A partir du graphique que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite  $u$
- 3/a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$

c) Montrer que  $u$  converge vers  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

### Exercice 50

Soit  $u$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que la suite  $u$  est décroissante

2) Montrer que la suite  $u$  est convergente

3) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 51

Soit  $u$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-u_n^2}} , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$0 \leq u_n < \sqrt{2}$$

b- Montrer que la suite  $u$  est croissante.

c- En déduire que  $u$  est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite  $v$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{u_n^2}{2-u_n^2}$

a- Montrer que  $v$  est une suite arithmétique de raison 1.

b- Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c- Retrouver la limite de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{v_k}}$

a- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq s_n \leq \frac{n}{n+1}$$

b- En déduire la limite de  $s_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 52

On considère la suite définie par :  $u_0=0$  et pour tout entier  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1° a) A l'aide de votre calculatrice, calculer les quatre premiers termes de cette suite.

b) Faire une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2° On considère la fonction définie pour  $x \in [0;3]$  par :

$$f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

a) Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .

b) En déduire que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0;3]$  et dresser son tableau de variations. Préciser les valeurs de la fonction aux bornes de cet intervalle.

c) Démontrer que : [ si  $x \in [0;3]$  alors  $f(x) \in [0;3]$  ].

d) Démontrer par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$

e) Démontrer par récurrence, que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

f) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

g) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 53 (Nombres de Fermat)

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $F_n = 2^{\binom{2^n}{2}} + 1$ .

Calculer  $F_0, F_1, F_2, F_3$ .

2. Démontrer par récurrence que pour tout  $n > 1$ , on a  $F_0 \times F_1 \times F_2 \dots \times F_n = F_{n+1} - 2$ .

3. Montrer que la suite  $(F_n)$  est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?

### Exercice 54

1. Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $3^n \geq n^2(n-1)$ .

2. On définit, pour  $n \geq 1$ , la suite  $(u_n)$  par

$$u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n} .$$

a. Quel est le sens de variation de  $(u_n)$  ?

## Exercices et problèmes

b. Montrer par récurrence que pour tout entier  $k \geq 1$ ,  
 $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$ . En déduire que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$   
puis un majorant de  $u_n$ . Que peut-on en conclure pour  $(u_n)$  ?

3. On définit pour  $n \geq 1$  la suite  $(v_n)$  par  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ .

En utilisant la question 1), montrer que  $(v_n)$  est décroissante. Quelle est la limite de  $(v_n - u_n)$ ? Que peut-on en conclure pour  $(v_n)$ ?

### Exercice 55 (Les lettres de Gaston)

On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = 2000$ ,  $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$ .

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives  $y = x$  et  $y = \frac{3}{4}x + 200$ , puis les premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
2. On pose pour tout  $n$   $v_n = u_n - 800$ . Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et la limite de  $(u_n)$ . Au bout de combien de temps a-t-on  $u_n < 810$ ?

3. Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin.» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent... » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède  
a. Si  $(x_n)$  est une suite croissante, on définit  $(y_n)$  par  $y_n = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1}$ . Montrer que  $(y_n)$  est croissante et que pour tout  $n$  on a  $y_n \leq x_n$ . Que peut-on dire pour une suite  $(x_n)$  décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

- b. On appelle  $M_n$  la quantité de lettres qu'il y eu en

moyenne sur le bureau de Gaston pendant les  $n$  premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer  $M_n$  en fonction de  $n$ . Quel est le sens de variation de  $(M_n)$ . La suite  $(M_n)$  est-elle convergente?

Généralisation : On considère une suite  $v$  donnée et la suite  $u$  dont le terme général  $u_n$  est la moyenne

arithmétique :  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k$ .

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , que l'on demande de démontrer.

### Exercice 56

On considère la suite  $u_n$  définie par  $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$

où  $a$  est un réel donné avec  $0 < a < 1$ .

1. On suppose que  $a = \frac{1}{8}$  ;
  - a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
  - b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative  $P$  de la fonction  $f : f(x) = x(2 - x)$  ainsi que la droite  $d$  ( $y = x$ ).
  - c. Utiliser  $d$  et  $P$  pour construire sur l'axe des abscisses les points  $A_1, A_2, A_3$  d'abscisses respectives  $u_1, u_2, u_3$
2. On suppose dans cette question que  $a$  est quelconque ( $0 < a < 1$ ).
  - a. Montrer par récurrence que  $0 < u_n < 1$ .
  - b. Montrer que  $u_n$  est croissante.
  - c. Que peut-on en déduire ?
3. On suppose de nouveau  $a = \frac{1}{8}$  et on considère la suite  $v_n = 1 - u_n$ .
  - a. Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$
  - b. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer la limite de  $v_n$  puis celle de  $u_n$ .

### Exercice 57 ( Suite de Syracuse )

On considère la suite  $u_n$  définie par la donnée de son premier terme  $u_0 = p$  et par la relation :

Si  $u_n$  est pair,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$  ; si  $u_n$  est impair,

$$u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

- Que devient  $u_n$  pour  $p = 1, 2, 3, 7, 8, 11, 27, 28$ .

Constatation(s) ?

- On appelle **vol** de  $p$  le nombre  $V(p)$  de termes de la suite  $u_n$  et **hauteur** de  $p$  le nombre  $H(p)$ , plus grand terme de la suite  $u_n$ . Déterminer  $V(11)$  et  $H(11)$ .
- Calculer de même  $V$  et  $H$  pour  $p = 2^k$ ,  $k$  entier.  
Donnez un autre exemple où le calcul est simple
- On suppose que la conjecture est vérifiée pour tous les nombres jusqu'à  $p$ . Que dire si  $H(p+1) < p$  ?
- Les nombres entiers peuvent être rangés dans quatre groupes : ceux de la forme  $4k$ , de la forme  $4k+1$ , de la forme  $4k+2$  ou de la forme  $4k+3$  avec  $k$  entier. Que pouvez-vous dire dans les trois premiers cas ?

### Exercice 58

On se propose d'étudier une suite définie par une relation de récurrence. Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant donnés, la suite  $(u_n)$  est ici définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = bu_n - \frac{1}{3c}(u_n)^3 \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

- On choisit  $b = c = 1$ . Étudier les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = t - \frac{1}{3}t^3$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

Représenter le graphe de cette fonction. En déduire ensuite le graphe de  $f$  lorsque la variable parcourt la totalité de  $\mathbb{R}$ .

- On suppose  $b = c = 1$ . À l'aide de la première bissectrice des axes tracés dans un repère sur lequel on reproduira le graphique précédent, définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite précédente lorsque le premier terme est défini par  $a = 1$ . Quelle conclusion sur la suite vous

Suggèrent ces tracés ? À l'aide du même procédé, décrire ce qui se passe lorsque  $a > 1$  (on ne demande pas une discussion complète).

- On suppose encore :  $a = b = c = 1$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et que tous ses termes sont positifs. En déduire que la suite admet une limite et montrer que cette limite est nulle.

- On suppose à présent que  $a = 6$ ,  $b = 2$ ,  $c = 18$ .

Déterminer le graphe de la fonction  $g$  définie par

$$g(t) = 2t - \frac{t^3}{54}. \text{ Déterminer les solutions des équations}$$

$g(t) = t$  et  $g(t) = 0$ . En choisissant les unités des axes les plus grandes possibles, dessiner la partie du graphique correspondant au cas où la variable parcourt le segment  $[0 ; 11]$ . Dessiner également la première bissectrice des axes et définir des tracés qui permettent la détermination des quatre premiers termes de la suite. Calculer ces quatre premiers termes. Quelles sont vos remarques en ce qui concerne le comportement de cette suite ?

### Exercice 59

Soit  $I$  l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ .

- Etudier les variations de  $f$  et en déduire que, pour tout  $x$  élément de  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .
- On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+2}{u_n+4}. \text{ Montrer que, pour tout } n \text{ entier, } u_n \text{ appartient à } I.$$

On se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  par deux méthodes différentes.

#### Première méthode

- Représenter graphiquement  $f$  dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.
- En utilisant le graphique précédent, placer les points  $A_0, A_1, A_2$  et  $A_3$  d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .

## Exercices et problèmes

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de  $(u_n)$  et sa convergence ?

c. Etablir la relation  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$  et en

déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

d. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

e. Prouver que la limite  $l$  de la suite  $(u_n)$  vérifie  $l = f(l)$  et calculer  $l$ .

**Deuxième méthode :** On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ .

4. a. Prouver que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ .

b. Calculer  $v_0$  et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

c. Exprimer  $u_n$  en fonction de  $v_n$ , puis en fonction de  $n$ .

d. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$  et sa limite  $l$ .

### Exercice 60

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $-1 < a < 0$ .

On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = a$ , et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ .

1. Étudier la monotonie de la suite  $u$ .

2. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$h(x) = x^2 + x$ . Étudier le sens de variations de la fonction  $h$ .

En déduire que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle

$]-1 ; 0[$ , le nombre  $h(x)$  appartient aussi à

l'intervalle  $]-1 ; 0[$ .

b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :

$-1 < u_n < 0$ .

3. Étudier la convergence de la suite  $u$ . Déterminer, si elle existe, sa limite.

### Exercice 61

Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites  $(x_n)$  définies sur  $\mathbb{N}$  et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$ .

1. On considère un réel  $\lambda$  non nul et on définit sur  $\mathbb{N}$  la suite  $(t_n)$  par  $t_n = \lambda^n$ . Démontrer que la suite  $(t_n)$  appartient à l'ensemble (E) si et seulement si  $\lambda$  est solution de l'équation  $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$ .

En déduire les suites  $(t_n)$  appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites  $(u_n)$

définies sur  $\mathbb{N}$  par une relation de la forme  $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.

2. On considère une suite  $(u_n)$  de l'ensemble (E).

Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $u_0 = 6$  et  $u_1 = 6,6$

En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n.$$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

#### Partie B

On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_0 = 6$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$ .

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 1,4x - 0,05x^2.$$

a. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 8]$ .

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq v_n < v_{n-1} \leq 8$ .

2. En déduire que la suite  $(v_n)$  est convergente et déterminer sa limite  $l$ .

### Exercice 62

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et,

pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$ .

On pose, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 6$ .

## Exercices et problèmes

- a. Pour tout nombre entier naturel  $n$ , calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?  
 b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel  $n$ ,

$$u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6.$$

- c. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .  
 2. On considère la suite  $(w_n)$  dont les termes vérifient, pour tout nombre entier  $n \geq 1$  :  $nw_n = (n+1)w_{n-1} + 1$  et  $w_0 = 1$ .

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

$w_0$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	$w_6$	$w_7$	$w_8$	$w_9$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

- a. Détailer le calcul permettant d'obtenir  $w_{10}$ .  
 b. Donner la nature de la suite  $(w_n)$ . Calculer  $w_{2009}$ .

### Exercice 63

1. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 3$  et pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ .
- a. Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .  
 b. Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

- c. Ci dessous sont tracées, dans un repère orthonormal les droites d'équation  $y = x$  et  $y = \frac{1}{2}x + 3$

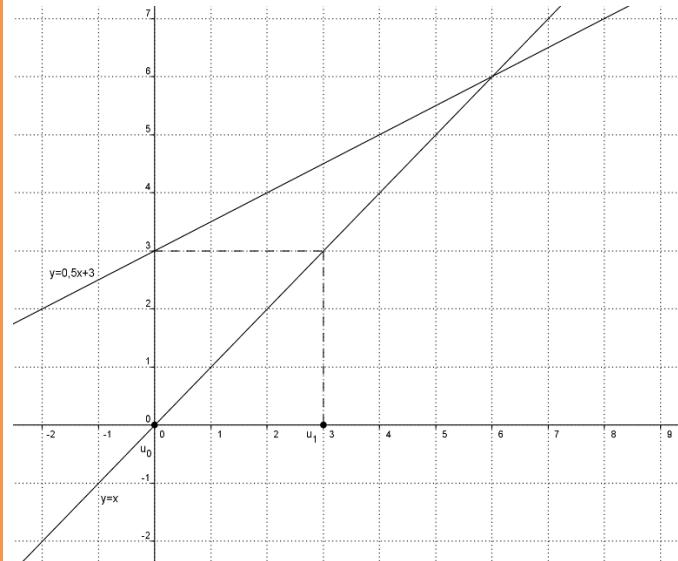
À partir de  $u_0$ , en utilisant ces deux droites, on a placé  $u_1$  sur l'axe des abscisses. De la même manière placer les termes  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

Que peut-on conjecturer sur les variations et la convergence de cette suite ?

2. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout nombre entier naturel  $n$ , par  $v_n = u_n - 6$ .
- a. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.  
 b. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
 c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et

déterminer sa limite.

3. Soit  $(w_n)$  la suite de premier terme  $w_0$  et telle que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3$ . On suppose que  $w_0$  est strictement supérieur à 6. Les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  sont-elles adjacentes ? Justifier.



### Exercice 64

On considère la suite de nombres réels  $(u_n)$  définie sur IN par :  $u_0 = -1$ ,  $u_1 = \frac{1}{2}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer  $u_2$  et en déduire que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique ni géométrique.  
 2. On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ .
- a. Calculer  $v_0$ .  
 b. Exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .  
 c. En déduire que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .  
 d. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .  
 3. On définit la suite  $(w_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$  :  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ .
- a. Calculer  $w_0$ .  
 b. En utilisant l'égalité  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ , exprimer  $w_{n+1}$  en

## Exercices et problèmes

fonction de  $u_n$  et de  $v_n$ .

c. En déduire que pour tout  $n$  de IN,  $w_{n+1} = w_n + 2$ .

d. Exprimer  $w_n$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$   $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ .

5. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n. \text{ Démontrer par récurrence}$$

que pour tout  $n$  de IN :  $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ .

### Exercice 65

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites  $(u_n)$  définies par un premier terme positif ou nul  $u_0$  et vérifiant pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Étude de propriétés de la fonction  $f$

a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

b. Résoudre dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  l'équation  $f(x) = x$ . On note  $\alpha$  la solution.

c. Montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[0; \alpha[$ , alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[0; \alpha[$ .

De même, montrer que si  $x$  appartient à l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$  alors  $f(x)$  appartient à l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$ .

2. Étude de la suite  $(u_n)$  pour  $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

a. Sur le graphique ci-dessous, sont représentées les courbes d'équations  $y = x$  et  $y = f(x)$ .

Placer le point  $A_0$  de coordonnées  $(u_0 ; 0)$ , et, en utilisant ces courbes, construire à partir de  $A_0$  les points

$A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  d'ordonnée nulle et d'abscisses

respectives  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .

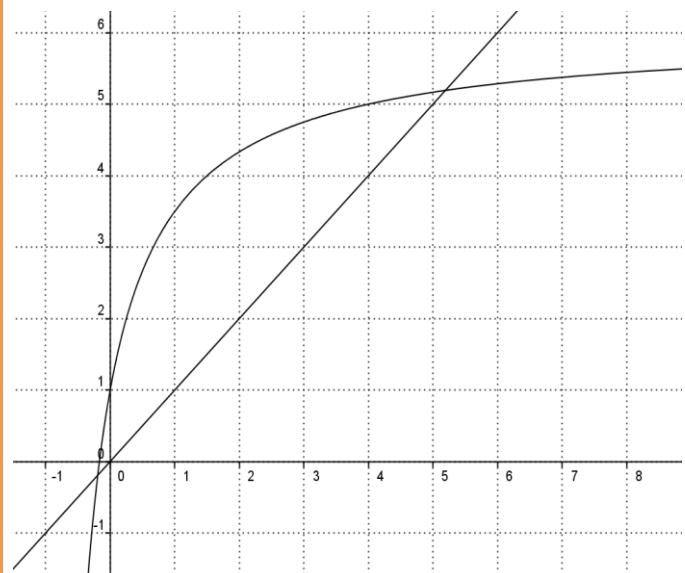
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites  $(u_n)$  selon les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite  $(u_n)$  suivant les valeurs du réel positif ou nul  $u_0$  ?



### Exercice 66

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite  $s_n$  définie par  $s_n = u_{n+1} + u_n$  est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire  $s_n$  en fonction de  $n$ .

2. On pose  $v_n = (-1)^n u_n$  et on considère la suite  $t_n$  définie par  $t_n = v_{n+1} - v_n$ . Exprimer  $t_n$  en fonction de  $s_n$ .

3. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$  (on pourra calculer de deux manières la somme  $t_0 + t_1 + \dots + t_n$ ).

4. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$ .

### Exercice 67

### Exercice 70

## Exercices et problèmes

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_n = 1 - 10^{-n} \text{ et } v_n = 1 + 10^{-n} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Donner les valeurs de  $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4$ .
2. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
3. Quelle est leur limite ?
4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est  $0,9999\dots$  ?

### Exercice 68

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

et la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ .

1. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
2. Soit  $l$  leur limite. Donner un entier  $n_0$  pour lequel l'encadrement de  $l$  par  $u_{n_0}$  et  $v_{n_0}$  est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à  $10^{-3}$ .
3. Donner à la calculatrice une valeur approchée de  $u_{n_0}$  et  $v_{n_0}$ . Est-il possible que  $l$  soit égal à  $\frac{\pi^2}{6}$  ?

### Exercice 69

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , tracer les droites  $(D)$  et  $(\Delta)$  d'équations respectives

$$y = \frac{3x + 1}{4} \text{ et } y = x.$$

1. En utilisant ces deux droites, placer sur l'axe des abscisses les réels  $u_1, u_2, u_3$  puis  $v_1, v_2$  et  $v_3$ .
2. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  puis  $v_1, v_2$  et  $v_3$ .
3. Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et donner leur limite.

$n$  est un entier naturel non nul. On note  $n!$  (et on lit « factorielle  $n$  ») le produit  $n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

On convient de plus que  $0! = 1$ .

1. Calculer  $2!, 3!, 4!, 5!$

$$2. \text{ Simplifier } \frac{(n+1)!}{n!} \text{ puis } \frac{n!}{n}.$$

$$3. \text{ Vérifier que } \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}.$$

4. Justifier que le nombre  $n! \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$  est un entier.

5.  $h$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}. \text{ Calculer } h'(x) \text{ et}$$

vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

### Exercice 71

1. Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul et  $k$  un entier strictement supérieur à  $x$ .

a. Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$ ,  $\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$ .

- b. En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$ ,

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left( \frac{x}{k} \right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ .

2. a. Montrer que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à

$$2, \frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1 \text{ (on pourra écrire } \frac{n^{n-1}}{n!} \text{ comme un produit}$$

de  $n-1$  facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

### Exercice 45

Soit  $t$  un réel donné dans l'intervalle  $]0, 1[$ . On

considère la suite  $(x_n)$  définie par son premier terme

## Exercices et problèmes

$x_n = t$  et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{2n+1} = t(1-x_{2n}) \\ x_{2n+2} = (1-t)x_{2n+1} \end{cases}$$

1. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $y_n = x_{2n+1}$ .

Exprimer  $y_{n+1}$  en fonction de  $y_n$ .

Prouver l'existence de deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ , on puisse écrire :

$$y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta).$$

2. La suite  $(y_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. On pose, de la même manière, pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = x_{2n}$ . La suite  $(z_n)$  est-elle convergente ?

Justifier la réponse.

4. La suite  $(x_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse.

### Exercice 73

Soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

et on définit les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  définies par :

$$v_n = u_{2n} \text{ et } w_n = u_{2n+1}$$

montrer que les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  sont adjacentes.

### Exercice 74

Soit  $(w_n)$  la suite définie par  $w_n = \frac{n!}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que  $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{3}{4} \quad , \forall n \geq 3$

2) En déduire  $w_n \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3} \times w_3 \quad , \forall n \geq 3$

Déterminer la limite de la suite  $(w_n)$

### Exercice 75

Soit la suite réelle  $U$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < U_n < 3$ .

b) Etudier la monotonie de  $U$

c) Montrer que  $U$  est convergente et préciser sa limite

2/ Soit la suite  $V$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$ .

a) Montrer que  $V$  est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$

c) Retrouver la limite de la suite  $U$

3/ On considère la suite  $W$  définie sur

$\mathbb{N}$  par  $W_n = \frac{3}{U_n}$  et on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

a) Vérifier que  $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$$

c) Calculer la limite de  $\frac{S_n}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

### Exercice 76

On considère les suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n \text{ et } v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$$

ou  $\alpha$  un réel donné tel que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Soit  $(t_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $t_n = v_n - u_n$ .

a- Calculer  $t_0$  et  $t_1$ .

b- Montrer que pour tout entier naturel  $n$

$$t_n = (2\alpha - 1)^n.$$

c- En déduire la limite de  $t_n$ .

2) a- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ .

b- Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante

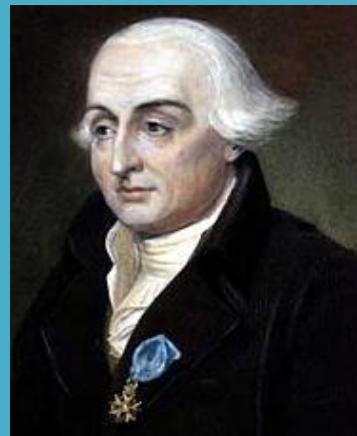
c- En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite  $\ell$ .

d- Les suites  $(u)$  et  $(v)$  sont- elles adjacentes ?

e- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n + v_n = 3$  et en déduire la valeur de  $\ell$

# Chapitre 3

## Dérivabilité, étude des fonctions et les fonctions primitives



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction

## I. Dérivabilité d'une fonction numérique (rappel)

### 1) Dérivabilité en un point

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de centre  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  s'il existe un nombre réel  $l$  tel que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Le nombre  $l$  s'appelle le nombre dérivée de  $f$  en  $a$  et on le note  $f'(a)$

Remarque : si on pose  $h = x - a$  on a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l = f'(a)$

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de centre  $a$  tel que  $I = a - r; a + r$  et  $r > 0$

$f$  est dérivable en  $x_0$  s'il existe un nombre réel  $l$  et une fonction numérique  $\varphi$  définie sur  $J = ]-r; r[$  tel que

$\forall x \in J$  on a  $f(a+h) = f(a) + l \times h + \varphi(h) \times h$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$

**Démonstration :** Supposons que  $f$  est dérivable en  $a$

On a  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$  donc  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0$

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $] -r; r [$  par  $\begin{cases} \varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) & \text{si } h \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 & \end{cases}$

On a  $f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + \varphi(h) \times h$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$  ( $f'(a) = l$ )

### 2) La dérivabilité et la continuité

#### Propriété

Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$

**Démonstration :** On utilise la propriété précédente on a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(a) + l \times h + \varphi(h) \times h) = f(a)$

donc  $f$  est continue en  $a$ .

#### Remarque

- On peut trouver une fonction continue en  $a$  et non dérivable en  $a$
- Si une fonction numérique est non dérivable en  $a$ , alors elle n'est pas dérivable en  $a$

## Exemple :

➤ la fonction  $f(x) = |x - 3|$  est continue en 3 et non dérivable en 3

➤ La fonction g définie par  $\begin{cases} g(x) = x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$  est continue en 0 et non dérivable en 0

## II. La fonction dérivée

### 1) Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que  $f$  est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel  $x$  de I.

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel  $x$  de I associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée fonction dérivée de  $f$  et se note  $f'$ .

### 2) Dérivée de la composée de deux fonctions

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle I et  $g$  une fonction définie sur  $f(I)$

On montre que  $gof$  est dérivable sur I

Soit  $a \in I$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\text{On a } f \text{ est dérivable en } a \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

On pose  $f(a) = A$  et  $f(x) = X$

On a  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  (car  $f$  est dérivable en  $a$  et par suite  $f$  est continue en  $a$ )

Donc  $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a) \Rightarrow X \rightarrow A$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{f(x) - f(a)} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{g(X) - g(A)}{X - A} = g'(A) \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{gof(x) - gof(a)}{x - a} = g'(A) \times f'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

Donc  $gof$  est dérivable en  $a$  et on a  $(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

et par suite  $gof$  est dérivable sur  $I$  et on  $(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) \quad \forall x \in I$

## Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur  $J$  tel que  $f(I) \subset J$

- Si  $a$  est un élément de  $I$  tel que  $f$  est dérivable en  $a$  et  $g$  dérivable en  $f(a)$

Donc  $gof$  est dérivable en  $a$  et on a  $(gof)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$

- Si  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et  $g$  dérivable sur  $f(I)$  alors la fonction  $gof$  est dérivable sur  $I$  et on a :

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) \quad \forall x \in I$$

## Exemple :

On considère la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \cos(x^3 + x - 1)$

On a  $h(x) = gof(x)$  tels que  $f(x) = x^3 + x - 1$  et  $g(x) = \cos x$

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a  $g'(x) = -\sin x$  et  $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$  alors  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

et  $h'(x) = (gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = g'(x^3 + x - 1) \times (3x^2 + 1) = -\sin(x^3 + x - 1) \times (3x^2 + 1)$

## Consequence :

- 1) Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ . Alors les fonctions  $x \mapsto \sin(u(x))$ ,  $x \mapsto \cos(u(x))$  et  $x \mapsto \tan(u(x))$  sont dérivable sur  $I$  et on a  $\forall x \in I$  :

- $(\cos(u(x)))' = -u'(x) \times \sin(u(x))$

- $(\sin(u(x)))' = u'(x) \times \cos(u(x))$

- $(\tan(u(x)))' = -u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$

- 2) Soit  $u$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$ .

Alors la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ .

- 3) Soient  $n$  est un entier relatif non nul et  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  ne s'annulant pas sur  $I$  dans le cas où  $n$  est négatif.

Alors la fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f(x) = (u(x))^n$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $f'(x) = n u'(x) (u(x))^{n-1}$ .

## Exemple :

$$1) \quad f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$$

On pose  $f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$$\rightarrow u'(x) = 6x + 4$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{6x + 4}{2\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}$$

Donc :

$$= \frac{3x + 2}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}$$

$$2) \quad f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4 \text{ On pose}$$

$$f(x) = (u(x))^4$$

$$\text{avec } u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$$

Donc :

$$f'(x) = 4u'(x)(u(x))^3 \\ = 4(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)^3$$

## III. La dérivée et variations d'une fonction

### 1) La monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée

#### Propriété

Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si  $f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur I.
- Si  $f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur I.

Exemples : Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5.$$

1) Etudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.

2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction  $f$ .

$$1) \text{ Pour tout } x \text{ réel, on a : } f'(x) = 3x^2 + 9x - 12.$$

Commençons par résoudre l'équation  $f'(x) = 0$  :

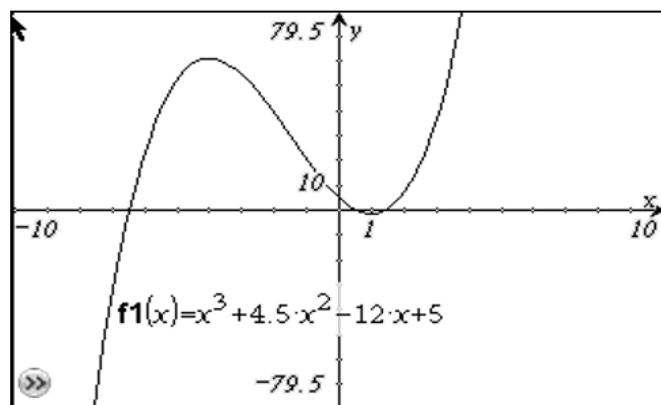
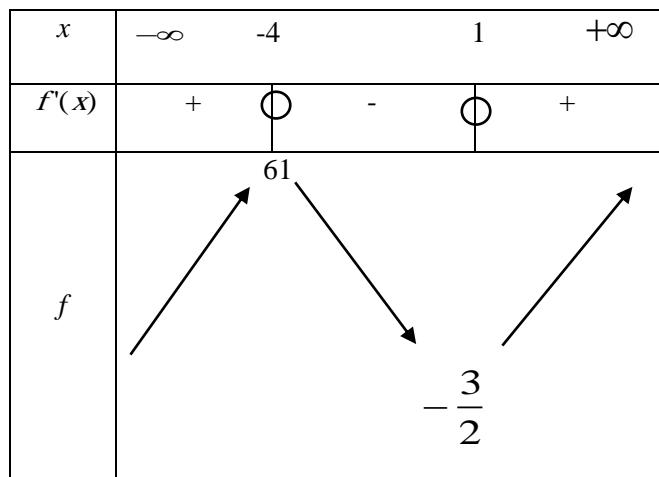
Le discriminant du trinôme  $3x^2 + 9x - 12$  est égal

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$$

L'équation possède deux solutions :

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$$

On en déduit le tableau de variations de  $f$ :



## 2) Extremum d'une fonction

### Propriété

- Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .
- Si la dérivée  $f'$  de  $f$  s'annule et change de signe en un réel  $a$  de  $I$  alors  $f$  admet un extremum en  $x = a$ .
  - Si  $f$  admet un extremum en  $x = a$  alors  $f'(a) = 0$

**Exemple :**

La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$

admet-elle un extremum sur  $\mathbb{R}$  ?

Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 10x - 3$

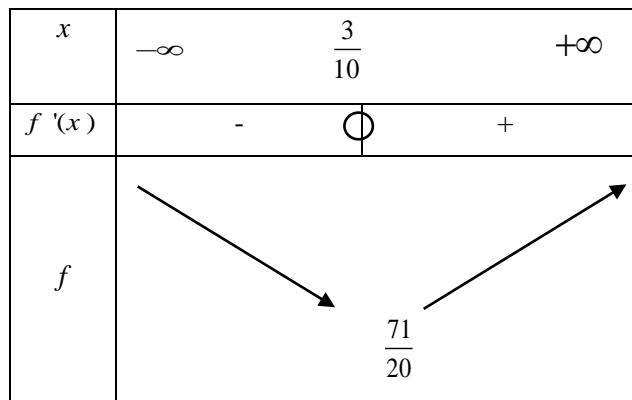
Et :  $f'(x) = 0$  pour  $x = \frac{3}{10}$ .

On dresse alors le tableau de variations :

En effet :  $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$

La fonction  $f$  admet donc un minimum égal à  $\frac{71}{20}$  en

$$x = \frac{3}{10}$$



## IV. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

### 1) Théorème de la fonction réciproque

**Théorème :**

Toute fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , continue et strictement monotone sur cet intervalle réalise une bijection de l'intervalle  $I$  vers l'intervalle  $f(I) = J$ .

**Démonstration :**

- On a  $f$  est continue sur  $I$  donc  $f(I)=J$  est un intervalle donc d'après TVI  $(\forall y \in J)(\exists !x \in I)f(x) = y$  donc  $f$  est surjective
- On montre que  $f$  est injective

On a  $f$  est strictement monotone soit  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $I$  tels que  $x \neq x'$

$$x \neq x' \Rightarrow x < x' \text{ ou } x > x' \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x') \\ f(x) < f(x') \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Donc  $(\forall(x, x') \in I^2): x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$  et par suite  $f$  est injective

Comme  $f$  est injective et surjective alors  $f$  est bijective de  $I$  vers  $J=f(I)$

Remarque :

Soit  $f$  une bijection d'un intervalle  $I$  vers un intervalle  $J$ , on a :

- La fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  :

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

$$(\forall x \in I; \forall y \in J) : (f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y)$$

$$(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x; (\forall x \in J) : (f \circ f^{-1})(x) = x$$

## Exemples :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

- 1) Démontrer que  $f$  est une bijection (admet une fonction réciproque) de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.
- 2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  ( $\forall x \in I$ )

- 1) On a la fonction  $f$  est continue sur  $I$  car c'est la restriction d'une fonction polynôme

La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  car c'est une fonction polynôme et  $(\forall x \in I) f'(x) = 4x + 1 > 0$  donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$  et par suite  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $J$  tel que

$$J = f(I) = \left[f\left(\frac{1}{4}\right); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right[$$

$$\text{Donc } J = \left[-\frac{9}{8}; +\infty\right[$$

- 2) On détermine  $f^{-1}(x)$

$$(\forall x \in \left[-\frac{9}{8}; +\infty\right[) (\forall x \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[) \text{ on a:}$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + y = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{x+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{8x+9}{16}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{8x+9}{16}} \quad \text{ou} \quad y + \frac{1}{4} = -\sqrt{\frac{8x+9}{16}}$$

Comme  $y \geq -\frac{1}{4}$  donc  $y + \frac{1}{4} \geq 0$  et par suite  $y + \frac{1}{4}$

$$= \sqrt{\frac{8x+9}{16}} \quad \text{donc } y = \frac{\sqrt{8x+9}}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\text{Alors } f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{8x+9} - 1}{4}$$

## Application

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty, 0]$  par  $g(x) = 2x^2 - 3$ .

- 1) Déterminer  $g(]-\infty, 0])$

- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = y$  admet une unique solution dans  $]-\infty, 0]$

- 3) En déduire la fonction  $g^{-1}$

## 2) la fonction réciproque

### Propriété

si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors :

- 1)  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  et  $f$  et  $f^{-1}$  ont même sens de variations.
- 2) Les courbes des fonctions  $f$  et  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ )

## Démonstration :

1) Soit  $y_1$  et  $y_2$  deux éléments différents de  $f(I)$  il existe deux éléments  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  car  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$  tels que  $f(x_1) = y_1$  et  $f(y_2) = x_2$  et par suite  $f^{-1}(y_1) = x_1$  et  $f^{-1}(y_2) = x_2$ .

Alors  $\frac{f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$  donc les taux de variation de  $f$  et  $f^{-1}$  ont même signe

Et par suite  $f$  et  $f^{-1}$  ont même sens de variations.

On admet que  $f^{-1}$  est continue

2) Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe de  $f$  et  $(\mathcal{C}')$  la courbe de  $f^{-1}$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Soit  $M(x, y)$  un point du plan et  $M'(y, x)$  symétrique de  $M$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$

On a  $M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M' \in (\mathcal{C}')$

Et par suite  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$

Remarque : on peut construire la Courbe de la fonction  $f^{-1}$  sans connaître l'expression de  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

### 3) La dérivée de la fonction réciproque

Notons que si  $f$  est bijective, alors elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ . Ces deux fonctions vérifient la

relation suivante :  $f^{-1}(f(x)) = x$  et  $f(f^{-1}(x)) = x$

Ainsi, en dérivant des deux côtés, on obtient  $(f^{-1}(f(x)))' = 1$  et  $(f(f^{-1}(x)))' = 1$

et en utilisant la relation de la dérivation des fonctions composées :  $u(v(x))' = u'(v(x)).v'(x)$

on déduit que  $(f(f^{-1}(x)))' = (f^{-1})'(x).f'(f^{-1}(x)) = 1$

$$\text{d'où } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

#### Propriété

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{R}$

1) Si  $x_0$  un élément de  $I$  tel que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f(x_0) \neq 0$  alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$

$$\text{et on a } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2) Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  tel que sa dérivée ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction  $f^{-1}$  est

$$\text{dérivable sur } f(I) \text{ et on a : } \forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## Exemples :

1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$f(x) = xsinx$$

On a  $f$  est dérivable sur  $I$  ( car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur  $I$ ) et pour tout  $x$  de  $I$  :

$$f'(x) = sinx + xcosx.$$

Comme  $sinx \geq 0$  et  $cosx \geq 0 \forall x \in I$  alors  $f'(x) \geq 0$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $I$  et par suite  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I) = I$ .

On  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

( car  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] f'(x) > 0$ )

$$\text{Et on a } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} \text{ donc } f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc } (f^{-1})'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}$$

$$\text{et par suite } (f^{-1})'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{12}{6 + \pi\sqrt{3}}$$

## Application :

1) Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ . démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers un intervalle  $J$  à déterminer et calculer  $(f^{-1})'(1)$

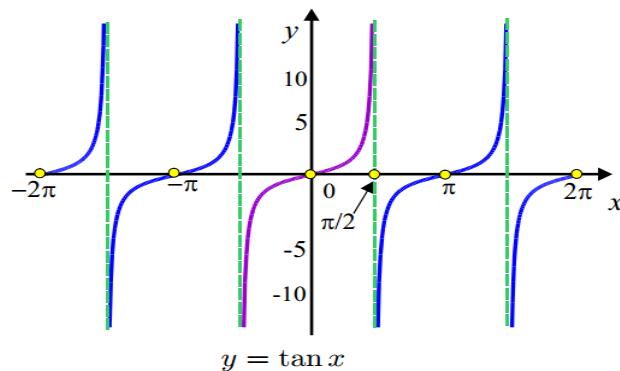
2) soit  $g$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 1}$

Démontrer que  $g$  est une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à déterminer

## V. fonctions réciproques usuelles

### 1) fonction arc tangente

a) Rappelons le graphe de  $\tan x$ .



Comme vous pouvez le constater, l'ensemble image de  $\tan$  est  $\mathbb{R}$  et cette fonction  $\tan x$  est bijective sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  (car continue et croissante). La restriction de la fonction  $\tan$  à  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  admet une fonction réciproque qu'on appelle arctangente et qu'on note  $\arctan$ , ainsi :

$$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \xrightarrow{\arctan} \mathbb{R}$$

Ce qu'on peut traduire par  $\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases}$

## Définition

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  dans  $\mathbb{R}$ . Sa fonction réciproque s'appelle la fonction arctangente que l'on note  $\arctan$

### Résultats :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}) \left( \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \right) \arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \tan(\arctan x) = x$$

$$3) \left( \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \right) \arctan(\tan x) = x$$

$$4) (\forall x_1 \in \mathbb{R}) (\forall x_2 \in \mathbb{R}) \quad \arctan x_1 = \arctan x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

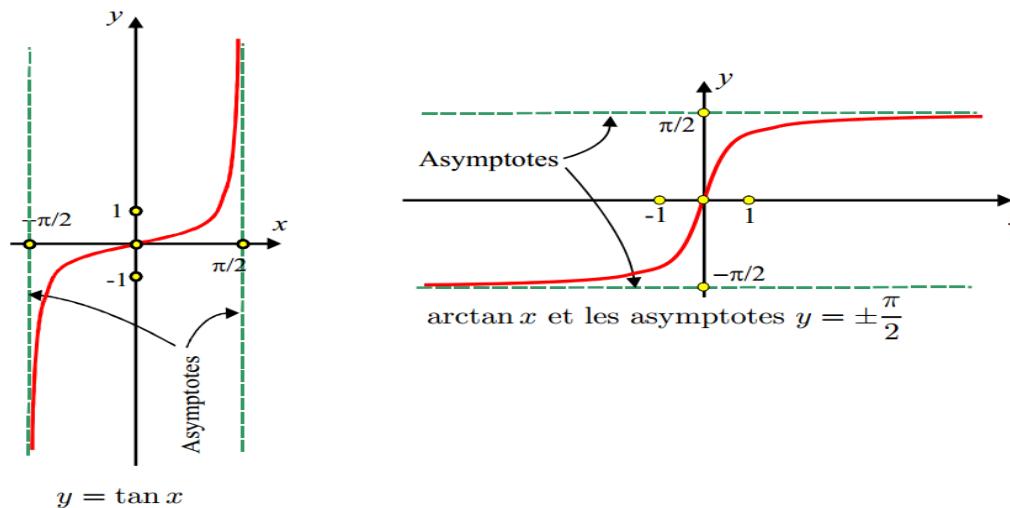
$$5) (\forall x_1 \in \mathbb{R}) (\forall x_2 \in \mathbb{R}) \quad \arctan x_1 < \arctan x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

6) La fonction arctangente est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

### b) La représentation graphique de la fonction $\arctan$

La courbe de  $\arctan$  s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de  $\tan$ .



Remarque : la fonction  $\arctan$  est impaire car  $(\forall x \in \mathbb{R}) \arctan(-x) = -\arctan(x)$

### Application :

$$1) \text{ Calculer } \arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$  n'est pas égal à  $\frac{5\pi}{4}$  car

$\frac{5\pi}{4} \notin \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  Sachant que  $\tan x$  est périodique

de période  $\pi$ , on a,  $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  donc

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

2) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $[-1; 1[$

On démontre que :

$$\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \arctan(a) + \arctan(b)$$

Soit a et b deux éléments de  $]-1; 1[$  et x et y deux

éléments de  $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$  tel que  $a = \tan x$  et

$$b = \tan y$$

$$\text{On a } \frac{a+b}{1-ab} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \tan(x+y)$$

$$\text{Comme } x \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[ \text{ et } y \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$$

$$\text{alors } x+y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{Et on a } \forall \beta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \arctan(\tan(\beta)) = \beta$$

Et par suite

$$\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \arctan(\tan(x+y)) = x+y$$

$$\text{Donc } \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \arctan(a) + \arctan(b)$$

3) Application : démontrer que :

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) ;$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

On a  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$  donc d'après la question

Précédente on a

$$\begin{aligned} 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

On a  $\frac{1}{2} \in ]-1; 1[$  et  $\frac{1}{5} \in ]-1; 1[$  donc d'après la

question précédente

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{10}}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{7}{9}\right)$$

et comme  $\frac{7}{9} \in ]-1; 1[$  et  $\frac{1}{8} \in ]-1; 1[$  alors

$$\arctan\left(\frac{7}{9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{72}}\right)$$

$$= \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

4) Résoudre dans IR l'équation

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

Remarquons tout d'abord qu'une solution de l'équation est nécessairement positive, car  $\arctan x$  a le même signe que x. Transformons l'équation par implications successives.

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

En prenant la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = 1$$

d'où, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\frac{2x+x}{1-2x \cdot x} = 1$$

Finalement, on obtient l'équation  $2x^2 + 3x - 1 = 0$

qui possède une solution unique positive

$$x_0 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \text{ donc } S = \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

5) a) démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

On calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$  on pose  $y = \arctan x$

On arctan est continue sur IR donc

$x \rightarrow 0$  equivaut à  $y \rightarrow 0$  et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

b) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  on pose  $y =$

$\frac{1}{x}$  donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \arctan y =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\arctan y}{y} = 1$$

### c) La dérivée de la fonction arctangente

La dérivée de la fonction arctan x s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

$$\text{D'où } \arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}$$

#### Propriété

1) La fonction arctan est derivable sur IR et on a  $\forall x \in IR \arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}$

2) si u est une fonction derivable sur un intervalle I alors la fonction  $\arctan \circ u$  est derivable

$$\text{sur } I \text{ et on a } (\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

#### Exemples :

1) Calculer la dérivée de  $f(x) = \arctan(\sin x)$

La fonction f est la composée de arctan et sin x, par application de la dérivation de la composée

$$\begin{aligned} \text{on a } (\arctan(\sin x))' &= \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot \sin' x \\ &= \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}. \end{aligned}$$

2) Démontrer que ( $\forall x \in IR$ )

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(\forall x \in IR) \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Soit x un réel et donc il existe un unique  $\alpha$  de

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \tan(\alpha) = x$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a } \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} = |\cos \alpha| \\ &= \cos \alpha \quad \left( \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \right) \\ &= \cos(\arctan(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin(\arctan(x)) \\ &= \cos(\arctan(x)) \cdot \tan(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot x \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{démontrer que } \forall x \in IR^{*+} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall x \\ &\in IR^{*-} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

## Cours

1<sup>ere</sup> méthode

Soit  $x$  de  $IR^{*+}$  il existe un unique  $\alpha$  de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  tel que  $\tan(\alpha) = x$   
c à d  $\arctan x = \alpha$

$$\text{On a } \frac{1}{x} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Et on a } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Et par suite } \frac{1}{x} &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha) \end{aligned}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

2<sup>ieme</sup> méthode

$$\text{On pose } \forall x \in IR^{*+} f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

On la fonction  $f$  est dérivable sur  $IR^{*+}$  (car c'est la somme de deux fonctions dérivables sur  $IR^{*+}$ )

$$\text{Et on a } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in IR^{*+} \end{aligned}$$

Donc  $f$  est une fonction constante sur  $IR^{*+}$  c à d  $(\exists \beta \in IR)(\forall x \in IR^{*+})f(x) = \beta$

$$\text{Pour } x = 1 \text{ on a } f(1) = \beta \text{ c à d } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et par suite } \forall x \in IR^{*+} \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

3) Déduire que  $\forall x \in IR^{*-}$

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

On a si  $x \in IR^{*-}$  on a  $-x \in IR^{*+}$

On sait que la fonction arctan est une fonction impaire donc

$$\arctan(-x) + \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\arctan x - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

## 2) La fonction racine nième

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^n$  et  $n \in IN$  avec  $n \geq 2$

La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $IR^+$  car c'est la restriction d'une fonction polynôme et on a

$$f'(x) = nx^{n-1} > 0 \quad \forall x \in IR^+$$

et comme  $f(IR^+) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)][ = [0; +\infty[$

on déduit de ce qui précède que  $f$  est une bijection de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$

### Définition

Soit  $n$  un élément de  $IN^*$ .

La fonction  $x \mapsto x^n$  est une bijection (admet une fonction réciproque) de  $[0; +\infty[$  vers  $[0; +\infty[$  et sa fonction réciproque s'appelle la fonction racine nième que l'on note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .

Pour tout  $x$  de  $IR^+$ ;  $\sqrt[n]{x}$  se lit racine nième de  $x$  ou bien racine d'ordre  $n$  de  $x$

## Résumé

- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+) \quad \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+) \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $(\forall x \in IR^+) \quad (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in IR^+)(\forall y \in IR^+) \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est continue sur  $IR^+$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

## Exemples :

1) On résoudre dans  $IR$  l'équation  $(E_1)$ :  $x^3 = 8$

On désigne par  $S_1$  à l'ensemble des solutions de  $(E_1)$

On a  $x \in S_1 \Leftrightarrow x^3 = 8$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Et par suite  $S_1 = \{2\}$

2) On résoudre dans  $IR$  l'équation  $(E_2)$ :  $x^5 = -243$

On désigne par  $S_2$  à l'ensemble des solutions de  $(E_2)$

On a  $x \in S_2 \Leftrightarrow x^5 = -243$

$$\Leftrightarrow (-x)^5 = 243$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[5]{243} = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

Et par suite  $S_2 = \{-3\}$

3) On résoudre dans  $IR$  l'équation  $(E_3)$ :  $x^4 = 7$

On désigne par  $S_3$  à l'ensemble des solutions de  $(E_3)$

On a  $x \in S_3 \Leftrightarrow x^4 = 7$

$$\Leftrightarrow (|x|)^4 = 7$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{7}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{7} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{7}$$

Et par suite  $S_3 = \{-\sqrt[4]{7}; \sqrt[4]{7}\}$

4) On compare les deux nombres  $a = \sqrt[4]{5}$  et  $b = \sqrt[6]{4}$

On a  $a^{12} = (a^4)^3 = 5^3 = 125$

Et  $b^{12} = (b^6)^2 = 4^2 = 16$

Comme  $a^{12} > b^{12}$  et  $a > 0$  et  $b > 0$  alors  $a > b$

**Remarque :** l'ensemble des solutions de l'équation  $x^n = a$  avec  $a \in IR^*$  et  $n \in IN^* - \{1\}$  est

La parité de n Le signe de a	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

## Application :

- Soit  $n$  un élément de  $IN$  résoudre l'équation  $(E)$ :  $x^{n+1} = n - 5$  (discuter selon les valeurs de  $n$ )
- Comparer  $\sqrt[7]{6}$  et  $\sqrt[6]{7}$
- Résoudre dans  $IR$  l'équation  $\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{4x}$ .

## Propriété

Soit  $u$  une fonction positive sur un intervalle  $I$  et  $x_0 \in I$

1) Si la fonction  $u$  est continue sur  $I$  alors la fonction  $\sqrt[n]{u}$  est continue sur  $I$

2) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$

3) Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

## Exemples :

1) On étudie la continuité de la fonction

$f: x \mapsto \sqrt[3]{\arctan x}$  en tout intervalle de son ensemble de définition

On a  $\forall x \in IR^+ \ arctan x \geq 0$  et  $\forall x \in$

$IR^* - arctan x < 0$

Donc  $D_f = IR^+$  comme la fonction arctan est continue sur  $IR$  alors elle est continue sur  $IR^+$  et par suite la fonction  $f$  est continue sur  $IR^+$ .

2) On calcul  $L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

On ne peut pas calculer cette limite directement

car on va trouver une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$

On utilise l'identité remarquable  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  on obtient

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$3) \text{ On calcul } L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1}$$

On a  $\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1}$

$$= (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x) - (\sqrt[4]{x^4 + 1} - x)$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{x^3 + 1})^3 - (x)^3}{(\sqrt[3]{x^3 + 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2}$$

$$- \frac{(\sqrt[4]{x^4 + 1})^4 - (x)^4}{(\sqrt[4]{x^4 + 1})^2 + x\sqrt[4]{(x^4 + 1)^2} + x^2}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{x^3 + 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + x^2}$$

$$- \frac{1}{(\sqrt[4]{x^4 + 1})^2 + x\sqrt[4]{(x^4 + 1)^2} + x^2}$$

$$\text{Et par suite } L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{x^4 + 1} = 0$$

## Cours

### Propriété

Les opérations sur racine nième

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $IR^+$  et  $n$  et  $p$  deux éléments de  $IN^* - \{1\}$  on a les propriétés suivantes :

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} ; \quad 2) \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \text{ et } a \neq 0 ; \quad 3) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ et } b \neq 0$$

$$4) \sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a} ; \quad 5) \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a} ; \quad 6) (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$$

### Exemples

$$1) \text{ Simplifier } A = \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } A^3 &= 9\sqrt{3} - 11\sqrt{2} = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2\sqrt{2} + 3(\sqrt{2})^2\sqrt{3} - (\sqrt{2})^3 \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 \end{aligned}$$

Et par suite  $A = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ .

$$2) \text{ On simplifier le nombre } B = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{144}}$$

On a  $a \geq 0$  et  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[p]{a}$

$$\begin{aligned} \text{On a } B &= \frac{\sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2 \times 3^3}}{\sqrt[8]{2^4} \times \sqrt[8]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{2^4 \times 2} \times \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[4]{2^2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[8]{2^4} \times \sqrt[8]{3^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^3}}{\sqrt{2} \times \sqrt[4]{3}} \\ &= 2\sqrt[4]{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt[4]{3^2} \\ &= 6\sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

### Application :

$$1) \text{ simplifier } A = \frac{\sqrt[3]{256} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$$

$$2) \text{ Demontrer que } (\forall a \in IR_+^*)(\forall n \in IN^*)(\forall p \in \mathbb{Z}) \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$$

$$3) \text{ } (\forall a \in IR_+)(\forall n \in IN^*)(\forall p \in \mathbb{Z}) \sqrt[n]{a} \times \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$$

3) les puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif

### Définition

soit un réel strictement positif et  $r$  un nombre rationnel

Le nombre  $a^r$  est le nombre  $\sqrt[q]{a^p}$  tel que  $r = \frac{p}{q}$  et  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in IN^*$  et s'appelle la puissance rationnelle de nombre  $a$  de base  $r$ .

Remarque : soit  $a$  de  $IR_+^*$  on a  $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$  et  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$  en général  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  ( $n \in IN^*$ )

## Exemples :

On a  $7^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{7^5}$  et  $3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{3^4} = 3\sqrt[3]{3}$  et  $4^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4^5}} = \frac{1}{8\sqrt[3]{2}}$

### 4) Limite de la suite $(n^\alpha)_{n \in IN^*}$ tel que $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

#### Propriété

: Soit  $\alpha$  de  $\mathbb{Q}^*$

- 1) Si  $\alpha > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$  ;
- 2) Si  $\alpha < 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

#### Démonstration :

On pose  $\alpha = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$  et  $q \in IN^*$

- 1) Si  $\alpha > 0$  alors  $p > 0$  et par suite  $n^\alpha = n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{n^p}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  et d'après la propriété 9 on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[q]{n^p} = +\infty$  c à d  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

- 2) Si  $\alpha < 0$  alors  $p < 0$  et par suite  $n^\alpha = n^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\frac{1}{n^{-p}}}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{-p}} = 0$  et d'après la propriété 9 on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[q]{\frac{1}{n^{-p}}} = 0$  c à d  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

### 5) Les opérations sur les puissances rationnelles

#### Propriété

Soit  $r$  et  $r'$  deux éléments de  $\mathbb{Q}$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $IR_+^*$  on a :

$$1) a^r a^{r'} = a^{r+r'} \quad ; \quad 2) (ab)^r = a^r b^r \quad ; \quad 3) (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$4) a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad ; \quad 5) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \quad ; \quad 6) \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

#### Exemple :

on simplifie  $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

On a  $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{6}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(2^5)^{\frac{1}{4}} \times (3^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{4}}}{(2 \times 3)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{2^{\frac{5}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Et par suite  $A = 2^{\frac{3}{2}} \times 3 = 3\sqrt{2^3} = 6\sqrt{2}$

## 6) La dérivé de la fonction racine n<sup>ième</sup>

On pose  $\begin{cases} f(x) = x^n \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \\ x \geq 0 \end{cases}$  avec  $n \in IN^*$  on a  $(\forall x \in IR^+) f'(x) = nx^{n-1}$

Donc  $f^{-1}$  est dérivable sur  $IR_+^*$  car  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{Alors } (\forall x \in IR^+) (\sqrt[n]{x})' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

$$\text{Et comme } (\sqrt[n]{x})^{n-1} = x^{\frac{n-1}{n}} = x^{1-\frac{1}{n}} \text{ alors } (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

### Propriété

Soit  $n$  de  $IN^*$

1) La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est dérivable sur  $IR_+^*$  et on a  $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

2) Si  $f$  est une fonction positive et strictement sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$  est dérivable sur  $I$  et on a  $(\forall x \in I) (\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \times f'(x)$

3) Soit  $r$  de  $\mathbb{Q}$

a) La fonction  $x \mapsto x^r$  est dérivable sur  $IR_+^*$  et on a  $(x^r)' = rx^{r-1}$

b) Si  $f$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto (f(x))^r$

$$(\forall x \in I) ((f(x))^r)' = r(f(x))^{r-1} \times f'(x)$$

### Exemples :

1) La fonction  $x \mapsto \sqrt[5]{x}$  est dérivable sur

$$\begin{aligned} IR_+^* \text{ et on a } (\forall x \in IR_+^*) (\sqrt[5]{x})' &= \frac{1}{5} (x)^{\frac{1}{5}-1} \\ &= \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}} \end{aligned}$$

2) soit  $g$  la fonction  $x \mapsto \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$  on  $D_g = IR$

La fonction  $f: x \mapsto (x^2 - 4)^2$  est dérivable sur  $IR$  car c'est une fonction polynôme et strictement positive sur  $IR - \{-2; 2\}$  et on a

$\forall x \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[ g(x) = (x^2 - 4)^{\frac{2}{3}}$  donc la fonction  $g$  est dérivable sur les intervalles  $]-\infty; -2[$  et  $]2; +\infty[$  et

par suite :  $(\forall x \in D_1)$

$$\begin{aligned} (g)'(x) &= \frac{2}{3} (x^2 - 4)' \times (x^2 - 4)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{3} x (x^2 - 4)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{4x}{3 \sqrt[3]{x^2 - 4}} \quad \text{avec } D_1 \\ &= ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[ \end{aligned}$$

Et pour tout  $x$  de  $D_2$

$$\begin{aligned} &= ]-2; 2[ \text{ on a } (\forall x \in D_2) (g)'(x) \\ &= \frac{2}{3} (4 - x^2)' \times (4 - x^2)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{-4}{3} x (4 - x^2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-4x}{3 \sqrt[3]{4 - x^2}} \end{aligned}$$

## Cours

### Application :

Etudier la derivabilité de chaque fonctions des fonctions suivantes et determiner la fonction dérivée

$$f_1: x \mapsto \sqrt[5]{(x^3 - 1)^6} \quad ; \quad f_2: x \mapsto x^2 \sqrt[4]{x^2 - x} \quad ; \quad f_3: x \mapsto x^{\frac{5}{7}} + \sqrt[6]{x}$$

### Conclusion :

$f(x)$	$f'(x)$	L'ensemble de définition de $f'$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$	$IR_+^*$
$x^r ; (r \in \mathbb{Q})$	$rx^{r-1}$	$IR_+^*$
$(u(x))^r ; (r \in \mathbb{Q})$	$r(u(x))^{r-1} \times u'(x)$	L'ensemble des éléments $x$ tel que $u'(x)$ existe et $u(x) > 0$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$IR$
$\arctan(u(x))$	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$	L'ensemble de définition de $u$

## V. les fonctions primitives

### 1) Définition et propriétés

#### Exemple :

On considère les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x + 3 \quad x \mapsto x^2 + 3x - 1$$

On constate que  $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$ .

On dit dans ce cas que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### **Définition**

$f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

On appelle primitive de  $f$  sur  $I$ , une fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que  $F' = f$

#### Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence :

" $F$  a pour dérivée  $f$ " et " $f$  a pour primitive  $F$ ".

#### Exemple :

$F(x) = \frac{x^2}{2}$  est une primitive de  $f(x) = x$  car  $F'(x) = f(x)$  pour tout réel  $x$ .

## Cours

**Application :** Dans chaque cas, déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle I.

a)  $f(x) = x^3 - 2x$  sur  $I = \mathbb{R}$

b)  $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$  sur  $I = ]0; +\infty[$

c)  $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$  sur  $I = \mathbb{R}$

d)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  sur  $I = \mathbb{R}$

e)  $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(3x - 1)$  sur  $I = \mathbb{R}$

a)  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

b)  $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$  donc  $F(x) = x^3 - 3 \times \frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

c)  $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$  du type  $u'u^n$  avec  $u(x) = x^2 - 5x + 4$

donc  $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

d)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  du type  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  avec  $u(x) = x^2 + 1$

donc  $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) - 3\sin(3x - 1)$  donc  $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(3x - 1)$

### Propriété

$f$  est une fonction continue sur un intervalle I.

Si  $F$  est une primitive de  $f$  sur I alors pour tout réel  $C$ , la fonction  $x \mapsto F(x) + C$  est une primitive de  $f$  sur I.

### Démonstration :

$F$  est une primitive de  $f$ .

On pose  $G(x) = F(x) + C$ .

$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$ .

Donc  $G$  est une primitive de  $f$ .

### Exemple :

En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme  $F_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$ , avec

$C \in \mathbb{R}$ , est une primitive de  $f(x) = x$

### 2) Primitive prenant une valeur particulière en un point

**Résultat :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle I. Soit  $x_0$  un élément de I et  $y_0$  un réel. Si  $f$  admet des primitives sur I alors il en existe une seule,  $F$ , telle que :  $F(x_0) = y_0$ .

## Preuve :

La fonction  $f$  admet des primitives, soit  $G$  une primitive de  $f$ .

On considère la fonction  $F$  définie par  $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

$F$  est aussi une primitive de  $f$  car  $F'(x) = G'(x) = f(x)$ .

De plus on a  $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$  **Donc  $F$  existe.**

Soit  $H$  une autre primitive de  $f$  vérifiant  $H(x_0) = y_0$ .

On sait qu'il existe un réel  $k$  tel que  $H(x) = F(x) + k$  pour tout  $x \in I$ .

Donc en particulier on a  $H(x_0) = F(x_0) + k$  d'où  $y_0 = y_0 + k$  donc  $k = 0$  donc  $H = F$ .

La fonction  $F$  est donc bien unique.

## Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = 2x + 3$$

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de  $f$  sont

$$F(x) = x^2 + 3x + k, k \in \mathbb{R}$$

Si on veut  $F(3) = -5$  alors  $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$

$$\text{d'où } k = -23$$

$$\text{La primitive cherchée est donc } F(x) = x^2 + 3x - 23$$

## **Propriété**

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

## 3) Linéarité des primitives

### **Propriété**

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a ; b]$ .

Si  $F$  est une primitive de  $f$  et  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $[a ; b]$  alors :

-  $F + G$  est une primitive de  $f + g$ ,

-  $kF$  est une primitive de  $kf$  avec  $k$  réel.

## Démonstration :

$$- (F + G)' = F' + G' = f + g$$

$$- (kF)' = kF' = kf$$

## 4) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Les primitives F de f ( c un réel )	L'intervalle I de définition f et F
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \geq 0 \text{ entier}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n < -1 \text{ entier}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$]-\infty; 0[ \text{ ou } ]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(ax + b) \quad (a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$	$\text{IR}$
$f(x) = \sin(ax + b); \quad (a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = \tan x + c$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[ ; k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'u^n}{n+1} \quad n \neq -1 \text{ entier}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	I est l'intervalle tel que u et v soient dérivables et v ne s'annule sur I

### Application :

vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des fonctions primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitives F telle que  $F(x_0) = y_0$

$$1) f: x \mapsto (2x-1)(x^2-x+3) \quad ;$$

$$I = \text{IR} \quad x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 2$$

$$2) f: x \mapsto \frac{6x-1}{(3x^2-x)^2} \quad ;$$

$$I = ]1; +\infty[ \quad x_0 = 2 \text{ et } y_0 = 0$$

$$3) f: x \mapsto \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} \quad ; \quad I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$x_0 = -\frac{\pi}{4} \text{ et } y_0 = -1$$

### Solution :

- La fonction f est continue sur IR en tant que fonction polynôme et alors elle admet des fonctions primitives sur IR

De plus, f est de la forme  $u'u$ , où u est la fonction définie sur IR par  $u(x) = x^2 - x + 3$

On deduit que les fonctions primitives de f dont les fonctions définies sur IR par :

$$F_c(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)^2 + c$$

Où c est un réel

L'égalité  $F(1) = 2$  implique que la fonction primitive cherchée est la fonction définie sur IR par :

$$F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x + 3)^2 - \frac{5}{2}$$

- La fonction f est continue sur  $I = ]1; +\infty[$  en tant que fonction rationnelle définie sur  $I = ]1; +\infty[$  et alors elle admet des fonctions primitives sur  $I = ]1; +\infty[$ .

De plus f est de la forme  $\frac{u'}{u^2}$ , où u est la

fonction définie sur  $I = ]1; +\infty[$  par

$$u(x) = 3x^2 - x$$

On en déduit que les fonctions primitives

de  $f$  sont les fonctions définies sur  $I = ]1; +\infty[$  par:

$$F_c(x) = -\frac{1}{3x^2 - x} + c$$

Où  $c$  est un réel.

L'égalité  $F(2) = 0$  implique que la fonction primitive cherchée est la fonction définie sur

$I = ]1; +\infty[$  par :

$$F(x) = -\frac{1}{3x^2 - x} + \frac{1}{10}$$

3) La fonction  $f$  est continue sur  $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

en tant que quotient de fonctions continues sur

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \text{ et}$$

Dont la dominante ne s'annule pas.

elle admet donc des fonctions primitives sur

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

De plus,  $f$  est de la forme  $u'u^2$ , où  $u$  est

$$\text{la fonction définie sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \quad u(x) = \tan x$$

On en déduit que les fonctions primitives

de  $f$  sont définies sur  $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  par :

$$F_c(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x + c \quad \text{Où } c \text{ est un réel}$$

L'égalité  $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$  implique que la fonction

primitive cherchée est la fonction définie sur

$$I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[ \text{ par } F(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \frac{2}{3}.$$

**Application :** déterminer les fonctions primitives de  $f$  sur  $I$  dans chacun des cas suivants

$$1) f: x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 2} ; \quad I = IR$$

$$2) f: x \mapsto \cos^3 x ; \quad I = IR$$

$$3) f: x \mapsto \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)^2} ; \quad I = ]3; +\infty[$$

$$4) f: x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x} ; \quad I = I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$5) f: x \mapsto \tan^2 x + \tan^4 x ; \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$6) f: x \mapsto \frac{x+5}{(x-1)^4} ; \quad I = ]1; +\infty[$$

## VI. Etude des fonctions numériques

### 1) Elements de symétrie de courbe d'une fonction numérique

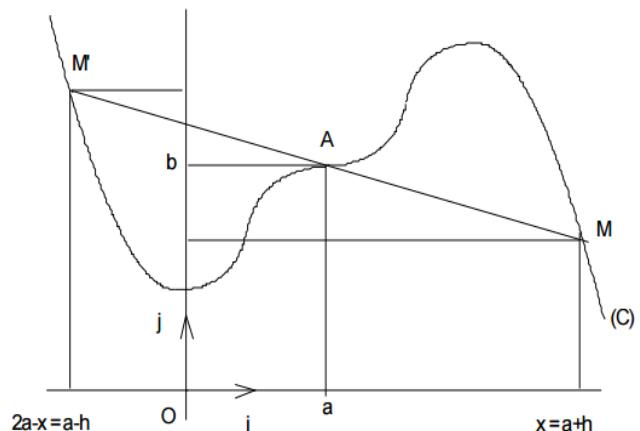
Soit  $f$  une fonction définie sur l'ensemble  $D_f$  et qui est représentée graphiquement dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  par une courbe  $(C)$ .

## Axe de symétrie

La droite (D) d'équation  $x = a$  est axe de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout  $M \in (C)$ , son symétrique  $M'$  par rapport à (D) appartient aussi à (C). On traduit cela par

l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:

- Pour tout  $x \in D_f$ , on a:  $2a - x \in D_f$ . et  
 $f(2a - x) = f(x)$ .
- Pour tout  $h \in IR$  tel que  $a + h \in D_f$ , on a:  
 $a - h \in D_f$  et  $f(a + h) = f(a - h)$ .



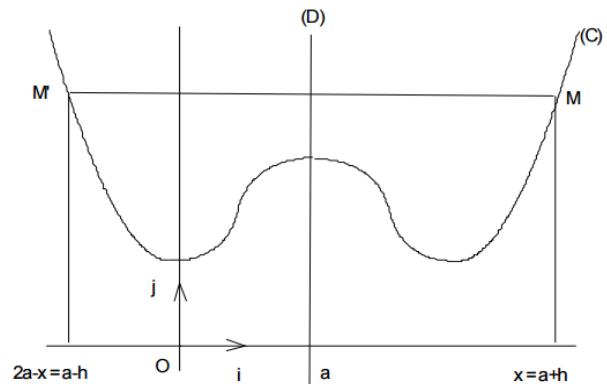
Dans le cas particulier où  $a = 0$ , on retrouve la propriété du graphique d'une fonction paire: Axe de symétrie: axe des ordonnées.

## Centre de symétrie

Le point A de coordonnées  $(a; b)$  est centre de symétrie de (C) si et seulement si, pour tout  $M \in (C)$ , son symétrique  $M'$  par rapport à A appartient aussi à (C). On traduit cela par l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous:

- Pour tout  $x \in D_f$ , on a:  $2a - x \in D_f$  et  
 $f(2a - x) + f(x) = 2b$
- Pour tout  $h \in IR$  tel que  $a + h \in D_f$ , on a:  $a - h \in D_f$  et  
 $f(a + h) + f(a - h) = 2b$

Dans le cas particulier où  $a = b = 0$ , on retrouve la propriété du graphique d'une fonction impaire: Centre de symétrie: origine O du repère.



## 2) La fonction périodique

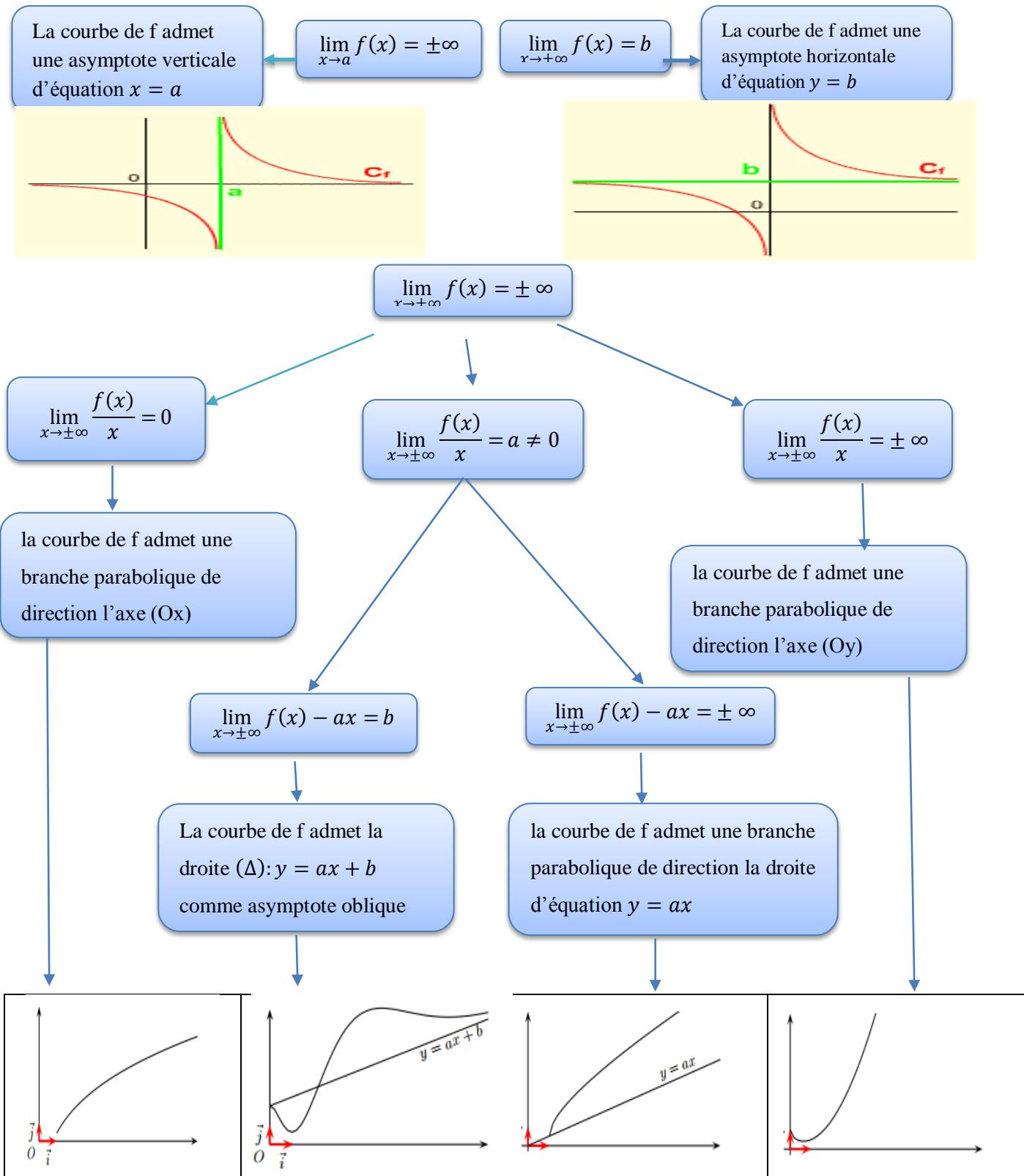
### Définition

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}$  et f une fonction définie sur D et  $T \in \mathbb{R}$  un nombre réel donné. On dit que f est périodique de période T lorsque les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- 1°) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : [  $x \in D$ ssi  $x+T \in D$  ]
- 2°) et pour tout  $x \in D$  : [  $f(x+T) = f(x)$  ]

**Remarque :** Pour construire la courbe d'une fonction périodique  $f$  de période  $T \in \mathbb{R}$ , on construit (une portion de) la courbe sur un intervalle de longueur  $T$ , puis on duplique indéfiniment cette portion à droite et à gauche.  
On dit qu'on a réduit le domaine d'étude à un intervalle de longueur  $T$  de  $D_f$

### 3) Les branches infinies



### 3) Concavité de courbe d'une fonction

#### Propriété

Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle

I.

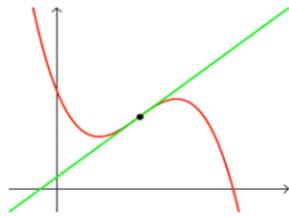
La fonction  $f$  est convexe sur  $I$  si sa dérivée  $f'$  est croissante sur  $I$ ,

soit  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $I$ .

La fonction  $f$  est concave sur  $I$  si sa dérivée  $f'$  est décroissante sur  $I$ ,

soit  $f''(x) \leq 0$  pour tout  $x$  de  $I$ .

Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



**Remarque importante :** Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

## Exercices résolus

### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(\arctan(2x + 1))$

1. Étudier le sens de variation de  $f$ , ses limites en  $\pm\infty$ .

2. Résoudre l'équation  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. Montrer que la restriction de  $f$  à  $[-\frac{1}{2}; +\infty[$  admet une fonction réciproque  $g$  dont on précisera l'ensemble de définition

4. Calculer  $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

### Solution

Pour étudier le sens de variation de  $f$ , on peut dériver la fonction ( $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ) et remarquer que la dérivée vaut

$$f'(x) = -\frac{2}{1 + (2x + 1)^2} \sin(\arctan(2x + 1))$$

Puisque  $\arctan(2x + 1)$  est toujours un élément de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , et que  $\sin u$  est du signe de  $u$  si

$$u \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$f'(x)$  est du signe opposé à  $\arctan(2x + 1)$ . Mais,

$$\arctan(2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

Ainsi,  $f$  est croissante sur  $]-\infty, -\frac{1}{2}[$  et décroissante sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ . D'autre part,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$ . Par

$$\text{composition des limites, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(2x + 1) = \frac{\pi}{2}$$

Par composition à nouveau,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(\arctan(2x + 1)) = 0$ . La limite et le raisonnement sont identiques en  $-\infty$ .

$$2. \text{ On a } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(\arctan(2x + 1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\arctan(2x + 1)) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \arctan(2x + 1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Or,  $\arctan$  prend ses valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ou  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  sont dans cet intervalle

uniquement pour  $k = 0$ . Ainsi, on doit résoudre

$$\arctan(2x + 1) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

$$\text{et } \arctan(2x + 1) = -\frac{\pi}{4} = \arctan(-1)$$

Par injectivité de la fonction  $\arctan$ , ceci revient à

$2x + 1 = 1$  ou  $2x + 1 = -1$ . Finalement, les seules solutions sont  $x = 0$  et  $x = -1$

1. En reprenant le travail effectué à la première

question, on a que  $f'(x) < 0$  si  $x > -\frac{1}{2}$ .

Ainsi,  $f$  est

## Exercices résolus

continue et strictement décroissante sur l'intervalle

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{. on a } f\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos(0) = 1$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $f$  réalise donc une bijection

de  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ . sur l'intervalle  $]0,1]$ . Elle admet une fonction réciproque  $g$  définie sur  $]0,1]$ , et à valeurs dans  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

4. Puisque  $f'$  ne s'annule pas sur  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ,  $g$  est de

derivable et sa dérivé est continue sur  $]0,1[$ . En plus, en

tout réel de la forme  $f(a)$ , avec  $a > \frac{1}{2}$ ,

$$\text{on a } g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

$$\text{Or } f(0) = \cos(\arctan(1)) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Donc } g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

### Exercice 2

Résoudre les équations suivantes :

$$1) \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4} ; \quad 2) x + \sqrt[3]{x} = 2 ; \quad 3) \sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{b} \text{ avec } a, b \in I\!R_+^*$$

### Correction

$$1) \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Il n'y a pas équivalence car  $\tan(A) = \tan(B)$  n'entraîne pas que  $A = B$  sauf si on peut montrer à l'avance que  $A$  et  $B$  sont tous les deux dans un intervalle

du type  $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Or } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \text{ et}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ Donc } \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\arctan(2x) + \tan(\arctan(x)))}{1 - \tan(\arctan(2x))\tan(\arctan(x))} = 1$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tan(\arctan(x)) = x$

et donc  $\tan(\arctan(2x)) = 2x$ .

$$\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2x + x}{1 - 2x \times x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1$$

$$\Rightarrow 3x = 1 - 2x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

Le discriminant est  $\Delta = 9 + 8 = 17$ , et les racines sont

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Il est clair que  $\arctan(2x_1) + \arctan(x_1) < 0$

car  $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$ . Donc  $x_1$  n'est pas une solution de l'équation et par suite  $x_2$  est la seule solution de l'équation.

## Exercices résolus

2) soit l'équation  $x + \sqrt[3]{x} = 2$

$$\Leftrightarrow x \geq -a \text{ et } x \leq a$$

L'ensemble de définition de l'équation est  $D =$

$$\Leftrightarrow x \in [-a; a]$$

$[0; +\infty[$

Soit  $x$  un élément de  $IR^+$  on pose  $t = \sqrt[3]{x}$  avec  $t \geq 0$

On a  $x + \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow t^3 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1) + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow t-1=0 \text{ car } t^2+t+2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

Et par suite  $S = \{1\}$

3) soit l'équation (E):  $\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{b}$

avec  $a; b \in IR_+^*$

Soit  $D$  l'ensemble de définition de (E)

$$x \in D \Leftrightarrow x+a \geq 0 \text{ et } a-x \geq 0$$

Donc  $D = [-a; a]$

$$(E) \Leftrightarrow 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - x^2} \cdot (\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x}) = b$$

$$\Leftrightarrow 2a + 3\sqrt[3]{a^2 - x^2} \cdot \sqrt[3]{b} = b$$

1<sup>re</sup> cas : si  $b - 2a < 0$  alors  $S = \emptyset$

2<sup>ème</sup> cas : si  $b = 2a$  alors (E)  $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{a^2 - x^2} \cdot \sqrt[3]{b} = 0$

$$\Leftrightarrow b(a^2 - x^2) = 0$$

Comme  $b \neq 0$  alors  $x = a$  ou  $x = -a$

Et par suite  $s = \{-a; a\}$

2<sup>ème</sup> cas : si  $b - 2a > 0$  alors on a

$$(E) \Leftrightarrow 27(a^2 - x^2)b = (b - 2a)^3$$

$$\Leftrightarrow a^2 - x^2 = \frac{(b - 2a)^3}{27b}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{(b - 2a)^3}{27b} + a^2 = A$$

Alors :

Si  $A < 0$  alors  $S = \emptyset$

Si  $A = 0$  alors  $S = \{0\}$

Si  $A > 0$  alors  $S = \{-\sqrt{A}; \sqrt{A}\}$

### Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{1 - \sqrt[3]{3-x}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - (x+1) ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2} \right) ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

### Correction

1) 1<sup>re</sup> méthode

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+1} - 1 &= \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - 1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - 1 &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} \text{ Et par suite}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1} + 1)}{((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> méthode

$$\text{On a } \sqrt{x+1} = \sqrt[6]{(x+1)^3} = (\sqrt[6]{x+1})^3$$

$$\text{Et } \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[6]{(x+1)^2} = (\sqrt[6]{x+1})^2$$

Et on pose  $t = \sqrt[6]{x+1}$  tel qu'on a  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 1$

$$\begin{aligned}\text{Et par suite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} &= \frac{(\sqrt{x+1} - 1) - (\sqrt[3]{x+1} - 1)}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - 1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}\end{aligned}$$

$$\text{et par suite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} \right) = \frac{1}{6}$$

$$3) \text{ on a } \sqrt[3]{x+6} - 2 = \frac{x-2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4}$$

$$\text{Et } 1 - \sqrt[3]{3-x} = \frac{(1)^3 - (\sqrt[3]{3-x})^3}{1 + \sqrt[3]{3-x} + (\sqrt[3]{3-x})^2}$$

$$= \frac{x-2}{1 + \sqrt[3]{3-x} + (\sqrt[3]{3-x})^2}$$

$$\text{Et par suite } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{1 - \sqrt[3]{3-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1 + \sqrt[3]{3-x} + (\sqrt[3]{3-x})^2)}{((\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \sqrt[3]{3-x} + (\sqrt[3]{3-x})^2}{(\sqrt[3]{x+6})^2 + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$4) \text{ on a } \sqrt[3]{x^3+1} - (x+1) = (\sqrt[3]{x^3+1} - x) - 1$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^3 - (x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} - 1$$

Et par suite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - (x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})^3 - (x)^3}{(\sqrt[3]{x^3+1})^2 + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} - 1 = -1$$

$$5) \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2}$$

## Exercices résolus

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2} \\
 &= \frac{1-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Et par suite

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left( \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt[3]{x^3+x^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+1)}{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x^3+x^2} + \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2} \\
 &= -\frac{2}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}
 \end{aligned}$$

6) soit  $x > 1$  on a

$$\frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + (\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt[3]{x} - 1 + (\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x^2-1}} \\
 &= \frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right)(x+1)} + \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}} \text{ et par suite} \\
 &\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 1 + (x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right)(x+1)} + \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0
 \end{aligned}$$

### Exercice 4

soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} f(x) = x \cdot \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) Demontrer que  $f$  est continue en 0

2) démontrer que  $f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2} \arctan x$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ ) puis déduire une expression simplifiable à  $f(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$ )

3) on considère l'équation  $\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$  ( $E$ ) ( $x \in \mathbb{R}$ )

a) démontrer que l'équation ( $E$ ) équivaut  $f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x}$  et  $x \in \mathbb{R}^{*+}$

b) déterminer l'ensemble des solutions de ( $E$ )

$$1) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = +\infty$$

$$\text{Et par suite } \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\text{et on a } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} = -\infty$$

$$\text{Et par suite } \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \arctan\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right) = 0 = f(0)$$

Et par suite  $f$  est continue en 0.

### Correction

2) soit  $x$  de  $IR^{*+}$ , il existe un unique  $\alpha$  de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Tel que  $\tan(\alpha) = x$  c à d  $\arctan(x) = \alpha$

$$\begin{aligned} \text{on a } \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} &= \frac{1 + \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}{\tan(\alpha)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\cos(\alpha)}}{\tan(\alpha)} = \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{on a } \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\frac{\alpha}{2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$$

et par suite

$$(\forall x \in IR^{*+}) f(x) = x \cdot \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$= x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = x\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}x = x\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\arctan(x)$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan(x) \quad (\forall x \in IR^{*+})$$

#### Conclusion

On a  $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$  et par suite

$$f(-x) = -\frac{\pi}{2}x - \frac{x}{2}\arctan(-x)$$

Et comme  $f$  est une fonction paire alors  $f(-x) = f(x)$

Et par suite  $f(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{x}{2}\arctan(x) \quad (\forall x \in IR^{*-})$

$$3)a) \text{ on a } x \in IR \quad \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x}}{x}\right) = \frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\left(\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt{x})^2}\right)\right) = \sqrt{x}\frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\arctan\left(\frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\frac{5\pi}{12} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$b) \text{ on a } \begin{cases} f(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\arctan(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{12}\sqrt{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - \arctan(\sqrt{x}) = \frac{5\pi}{6} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arctan(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{6} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{et par suite } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

#### Exercice 5

– Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \sqrt[3]{\tan^2 x}$

1 – a) Montrer que  $f$  est continue sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et dérivable sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

b) calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et montrer que  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0.

## Exercices résolus

2 – a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0; \frac{\pi}{2}]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

b) Tracer les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  dans un même repère orthonormé  $(O, \vec{i}; \vec{j})$ .

on calculera  $f\left(\frac{\pi}{4}\right); f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

c) Sans calculer  $f^{-1}(2)$ ; prouver que  $f^{-1}(2) > \frac{\pi}{3}$ . en déduire que  $f^{-1}(2) > 1$

3- a) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $(f^{-1})'(x)$

b) Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable et dérivable à droite en 0

$$II) H(x) = \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \quad \text{et } H(1) = a$$

1- déterminer le domaine de définition  $D_H$  de  $H$ .

2- Déterminer  $a$  pour que  $H$  soit continue sur  $D_H$ .

$$III) \text{ on pose } \varphi(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

1 – a) Montrer  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $\varphi'(x)$ . déduire que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$b) \text{Deduire que } \forall n \in IN^* \quad f^{-1}(n) + f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2) démontrer que  $\forall n \in IN^* \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$

$$3) \text{Soit la suite } (U_n)_{n \in IN^*} \text{ définie par } U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Montrer que  $\forall n \in IN^* \quad f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ . en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

V) on pose  $h(x) = f^{-1}(x+1)$

1- Etudier et représenter graphiquement  $h$

2) Montrer que  $\forall x \in ]-1; +\infty[ \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$

3- Montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $]-1; +\infty[$  ( on admet que

$h'(x) < 1 \quad \forall x > -1$ ). prouver que  $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$

4) On pose  $\begin{cases} v_0 = \frac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \quad \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que  $\forall n \in IN \quad 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

## Exercices résolus

b) Montrer que  $\forall x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[$  on a  $|h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

c) Montrer que  $\forall n \in IN |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |v_n - \alpha|$ . prover que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$ .

### Correction

$$f(x) = \sqrt[3]{\tan^2 x}; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f(x) = (\tan x)^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{car } \tan x \geq 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1)a) la fonction ( $u: x \mapsto \tan x$ )

est continue et positive sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$f = u^{\frac{2}{3}} \text{ est continue sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

la fonction ( $u: x \mapsto \tan x$ ) est derivable et

strictement et positive sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow f = u^{\frac{2}{3}}$  est derivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

b)  $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ; on a

$$f'(x) = \frac{2}{3} u'(x) \cdot (u(x))^{\frac{2}{3}-1}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \tan^2 x)}{(\tan x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 + \tan^2 x)}{\sqrt[3]{\tan x}} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\tan x)^{\frac{2}{3}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc la fonction  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0.

2) -  $f$  est continue et strictement croissante sur

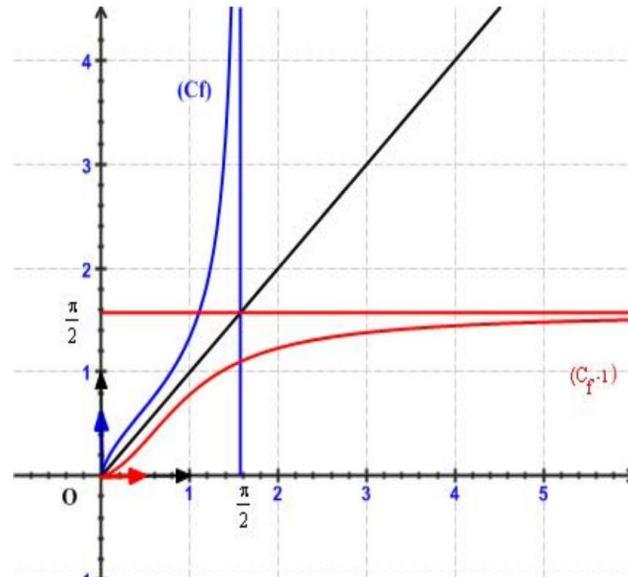
$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{sur } f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)\right]$$

$$= [0; +\infty[$$

$$\text{b) } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ et } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{3} \approx 1,4$$



$$\text{c) } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{3} \approx 1,4 < 2 \Rightarrow f^{-1}(2) > \frac{\pi}{3}$$

( $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ )

$$\text{or } \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow f^{-1}(2) > 1$$

## Exercices résolus

3) a -  $f$  est derivable et  $f' \neq 0$ , sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow f^{-1}$  est derivable sur  $[0; + \infty[$  et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} ; \forall x \in [0; + \infty[$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{(1 + \tan^2 t)}{\sqrt[3]{\tan t}}} \text{ avec } f^{-1}(x) = t$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{\tan t}}{(1 + \tan^2 t)} \text{ avec } f^{-1}(x) = t$$

or  $f^{-1}(x) = t$

$$\Rightarrow f(t) = x \Rightarrow \sqrt[3]{\tan^2 t} = x \Rightarrow (\sqrt[3]{\tan t})^2 = x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\tan t} = \sqrt{x}$$

De plus on a  $\tan^2 t = x^3 \Rightarrow 1 + \tan^2 x = 1 + x^3$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(1 + x^3)} ; \forall x \in [0; + \infty[$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x} \underset{\text{on pose } f^{-1}(x) = y}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(y)}{y}} = 0$$

$\Rightarrow f^{-1}$  est derivable à droite en 0

et on a  $(f^{-1})'_d(0) = 0$

$$II) H(x) = \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1} \text{ et } H(1) = a$$

1)  $d_H = [0; + \infty[$

2) la fonction  $x \mapsto \frac{f^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$  est continue sur

$[0; + \infty[ \setminus \{1\}$ ; puisque  $f^{-1}$  est continue sur  $[0; + \infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} = (f^{-1})'(1)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{1}}{(1 + 1^3)} = \frac{3}{4}$$

Pour que  $f^{-1}$  soit continue sur  $[0; + \infty[$  il faut que

$$a = \frac{3}{4}$$

$$III) \text{ on pose } \varphi(x) = f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

1) a - derivabilité de  $\varphi$  sur  $[0; + \infty[$   
on a

la fonction  $v: x \mapsto x^2$  est derivable sur  $[0; + \infty[$   
la fonction  $f^{-1}$  est derivable sur  $[0; + \infty[$   
 $v([0; + \infty[) = ]0; + \infty[ \subset [0; + \infty[$

$\Rightarrow f^{-1} \circ v$  est derivable sur  $[0; + \infty[$

on a la fonction  $w: x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est derivable sur  $[0; + \infty[$   
la fonction  $f^{-1}$  est derivable sur  $[0; + \infty[$   
 $w([0; + \infty[) = ]0; + \infty[ \subset [0; + \infty[$

$\Rightarrow f^{-1} \circ w$  est derivable sur  $[0; + \infty[$

Ainsi  $\varphi = f^{-1} \circ v + f^{-1} \circ w$  est derivable sur  $[0; + \infty[$

Et on a

$$\varphi'(x) = v'(x) \times (f^{-1})'(v(x)) + w'(x) \times (f^{-1})'(w(x))$$

$$= 2x \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{(1 + (x^2)^3)} \right] - \frac{2}{x^3} \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{\left(1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3\right)} \right]$$

$$= 2x \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{(1 + (x^2)^3)} \right] - 2x \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{(1 + (x^2)^3)} \right] = 0$$

$$\forall x \in ]0; + \infty[ \quad \varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in ]0; + \infty[ \quad \varphi(x) = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \forall x \in ]0; + \infty[ \quad \varphi(x) = \varphi(1) = 2f^{-1}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$b) \text{ soit } n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(\sqrt{n}) = f^{-1}(n) + f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \text{ on a : } 0 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow n \leq k + n \leq 2n$$

## Exercices résolus

Et puisque  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

$$\Rightarrow f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n+k) \leq f^{-1}(2n)$$

$$3) U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

$$\text{On a } 0 < n \leq k+n \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{n}$$

Et puisque  $f^{-1}$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{k+n}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\forall n \in IN^* \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$(n+1)f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq (n+1)f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall n \in IN^*$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) = f^{-1}(0) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0$$

$$\text{et } f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \leq U_n \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow (U_n)_{n \in IN^*} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$VI) h(x) = f^{-1}(x+1)$$

1-  $h(x)$  existe si et seulement si  $(x+1) \in D_{f^{-1}}$

$$\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Rightarrow D_h = [-1; +\infty[$$

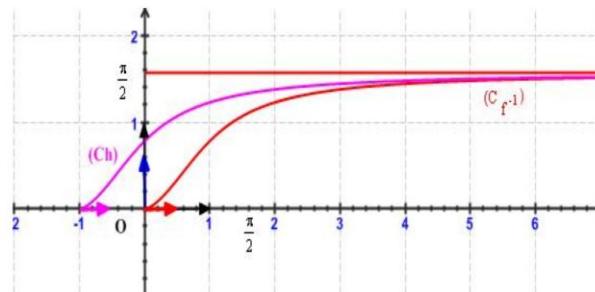
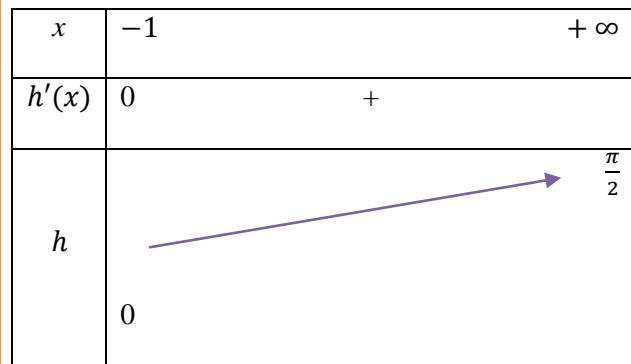
$$h = f^{-1} o \psi \text{ avec } \psi(x) = x+1$$

$f^{-1}$  et  $\psi$  sont continues et strictement croissantes

$\Rightarrow h = f^{-1} o \psi$  est continue et strictement croissante sur  $[-1; +\infty[$

(N.B  $h'(x) = (f^{-1} o \psi)'(x) = \psi'(x) \times (f^{-1})'(\psi(x))$ )

$$= \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1+(x+1)^3)} \quad \forall x \geq -1$$



$$2) \forall x \in ]-1; +\infty[ \quad 0 \leq h(x) < \frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{3}$$

3) on admet que  $h'(x) < 1 \quad \forall x > -1$

Montrons que l'équation  $h(x) = x$  admet une seule solution sur  $\alpha$  dans  $[-1; +\infty[$

$$h(x) = x \Leftrightarrow h(x) - x = 0$$

on pose  $g(x) = h(x) - x$

$g$  est dérivable sur  $[-1; +\infty[$  et on a :

$$g'(x) = h'(x) - 1$$

donc  $g'(x) = h'(x) - 1 < 0 \quad \forall x > -1$  et

$$(g'_d(-1) = h'_d(-1) - 1 = -1)$$

## Exercices résolus

$x$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	-1	-
$g$	1	$-\infty$

$g$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1; +\infty[$

donc  $g$  réalise une bijection de  $[-1; +\infty[$  sur  $]-\infty; 1]$ .

$0 \in ]-\infty; 1]$  donc il existe un réel unique

$$\alpha \in [-1; +\infty[$$

Tel que  $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow h(\alpha) = \alpha$ .

Montrons que  $1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$

$$g(1) = h(1) - 1 = f^{-1}(2) - 1 > 0 \text{ (d'après I.2.c)}$$

$$g\left(\frac{5}{3}\right) = h\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{5}{3} \leq 0$$

$$\text{car } \forall x \in ]-1; +\infty[ \quad 0 \leq h(x) \leq \frac{5}{3}$$

On a  $g\left(\frac{5}{3}\right) \leq g(\alpha) \leq g(1)$  et  $g^{-1}$  est strictement

decroissante sur  $]-\infty; 1]$   $\Rightarrow 1 \leq \alpha \leq \frac{5}{3}$

$$4. \begin{cases} v_0 = \frac{4}{3} \\ v_{n+1} = h(v_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrons par recurrence que:  $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq v_n$

$$\leq \frac{5}{3}$$

$$-\text{Pour } n=0 \quad 1 \leq v_0 = \frac{4}{3} \leq \frac{5}{3}$$

— Pour  $n \geq 0$ ; supposons que  $1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$  et

$$\text{montrons que } 1 \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$$

en effet :  $1 \leq v_n$

$$\leq \frac{5}{3} \text{ et } h \text{ est strictement croissante}$$

$$[-1; +\infty[ \Rightarrow 1 < h(1) \leq h(v_n) \leq h\left(\frac{5}{3}\right) \leq \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 1 \leq v_{n+1} \leq \frac{5}{3}$$

Ainsi  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq v_n \leq \frac{5}{3}$

b) Montrons que  $\forall x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[$  on a  $|h'(x)| \leq \frac{4}{5}$

$$|h'(x)| = \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1+(x+1)^3)}$$

$$\text{on a } 1 < x < \frac{5}{3} \Rightarrow 2 < x+1 < \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{x+1} < \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < \sqrt{24}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2} < 3\sqrt{x+1} < 2\sqrt{6}$$

$$\text{on a } 2 < x+1 < \frac{8}{3} \Rightarrow 8 < (x+1)^3 < \frac{512}{27}$$

$$\Rightarrow 9 < 1 + (x+1)^3 < \frac{539}{27}$$

$$\Rightarrow 18 < 2(1 + (x+1)^3) < \frac{1078}{27}$$

$$\Rightarrow \frac{27}{1078} < \frac{1}{2(1 + (x+1)^3)} < \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x+1}}{2(1 + (x+1)^3)} < \frac{2\sqrt{6}}{18} \Rightarrow |h'(x)| < \frac{\sqrt{6}}{9} < \frac{4}{5}$$

c)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5} |v_n - \alpha|?$

$h$  est continue sur  $\left[1; \frac{5}{3}\right]$ ;  $h$  est derivable sur

$$\left]1; \frac{5}{3}\right[ \text{ et } \forall x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[ \text{ on a } |h'(x)| \leq \frac{4}{5}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in \left[1; \frac{5}{3}\right]; \alpha \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$$

$$\Rightarrow |h(v_n) - h(\alpha)| \leq \frac{4}{5} |v_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ontrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$ .

On montre par recurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |v_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n |v_0 - \alpha|$$

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \text{ car } \frac{4}{5} \in ]-1; 1[$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha.$$

### Exercice 6

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x)$

1. Calculer  $f(0)$ .
2. Pour tout  $x$  réel, calculer la valeur  $f'(x)$  de la dérivée de  $f$  au point  $x$ .
3. Que dire de  $f$ .

### Correction

$$\begin{aligned} 1. f(0) &= 2 \arctan(\sqrt{1+0^2} - 0) + \arctan(0) \\ &= 2 \arctan(1) \\ &= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x) \right)' \\ &= 2 \times \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + (\sqrt{1+x^2} - x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$= 2 \times \frac{\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + (1+x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2)} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2} \times \sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - x)} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

3. Sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  :  $(x) = K$

$$\text{or } f(0) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } f(x) = \frac{\pi}{2}$$

## Exercice 1

Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -1; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et l'interpréter géométriquement ce résultat
2. Determiner une approximation affine de  $f$  au voisinage de 0 .
3. Determiner une valeur approchée de  $\sqrt{1,01}$

## Exercice 2

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x \sin(2x) + a|x|$

4. Montrer que  $g$  est dérivable à droite et à gauche en 0.
5. Determiner  $a$  pour que  $g$  soit dérivable en 0.
6. On suppose que  $a=0$ , calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

## Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1+x)^3$

Montrer que  $f$  est dérivable en 0 , et déduire une approximation affine de  $f$  au voisinage de 0 .

## Exercice 4

On considère les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = 2 + (x-2)\sqrt{x+1}$   $g(x) = \sqrt{x+1} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$

$$h(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{x+1}$$

1. a ) Etudier la monotonie de  $f$   
b ) déduire la monotonie de  $g$   
c ) Etudier la monotonie de  $h$
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  :  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2}$
3. Déduire un encadrement au nombre  $\sqrt{1,004}$  d'amplitude  $2 \times 10^{-6}$

## Exercice 5

1. Montrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[$  on a :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et}$$

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Montrer que la fonction  $\arctan$  est dérivable  $n$  fois sur  $\mathbb{R}$  tq  $n \in \mathbb{N}^*$  , et on a  $\forall x \in ]0; +\infty[$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\arctan^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

## Exercice 6

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction  $f$
2. Etudier la dérивabilité de la fonction  $f$
3. Etudier la continuité de  $f'$

## Exercice 7

En utilisant la fonction dérivé, montrer que :

1.  $\forall x > 0 : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
2.  $\forall x < 0 : \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

## Exercice 8

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$x - \frac{x^3}{3} \leq \arctan(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

2. Déduire :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^3}$

## Exercice 9

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions  $n$  fois dérivables sur un intervalle  $I$

Montrer la formule de Leibnitz

## Exercices et problèmes

$$\forall x \in I : (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

1. En utilisant la formule de Leibnitz déterminer  $h^{(n)}$

Tel que  $h(x) = (x^3 - x) \sin x$

### Exercice 10

Calculer les limites suivantes :

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^{2017}-1}{x-1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3\cos^2(x) - \sin^2(x)}{3x - \pi}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1)}{(2-x)^6 - 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

### Exercice 11

Déterminer  $D_f$  et Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \sqrt{\arctan x - \frac{\pi}{4}}$$

$$2. f(x) = \arctan \left( \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \right)$$

$$3. f(x) = (\arctan(2x) + x)^5$$

$$4. f(x) = \sqrt{x^3} \sqrt[3]{x^2}$$

$$5. f(x) = \arctan \left( \sqrt[4]{x+1} \right)$$

$$6. f(x) = \left( \sqrt[3]{x^3 - 8} \right)^2$$

### Exercice 12

Déterminer la fonction primitive  $F$  de la fonction  $f$  et déterminer  $D_F$

$$1. f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$$

$$3. f(x) = \sin x \cos(2x)$$

$$4. f(x) = x \sqrt{x^2 + 1}$$

$$5. f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$6. f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

$$7. f(x) = \sin x \cos^3 x$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{x} - 1 \right)$$

### Exercice 13

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \left( \frac{1}{x} \right)}{\sqrt[3]{1+2x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2 + x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \arctan(x) - \pi}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin x \sin a}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x} - \sqrt[5]{x+1}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x^3 + x^2 + 1} + x$$

### Exercice 14

Démontrer que les fonctions suivantes sont continues et dérivable en  $x_0$

$$1) f(x) = (x - x_0) \sqrt{|x - x_0|} ; x_0 \in IR$$

$$2) \begin{cases} f(x) = x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases} ; x_0 = 0$$

$$3) \begin{cases} f(x) = x^3 - 4x & ; x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 3x - 1 & ; x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1$$

## Exercices et problèmes

### Exercice 15

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$(x) = 2 \sin(x) + \sin(2x).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de  $f$  et déterminer son signe.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de  $f$ .

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 2 \cos(x) + \sin(2x).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , sa période et sa parité. En déduire un ensemble d'étude.
2. Calculer la dérivée de  $f$  et déterminer son signe sur  $[-\pi, \pi]$ .
3. Dresser le tableau de variation.
4. Tracer la courbe représentative de  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

### Exercice 17

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{3} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(2x)$$

1. Déterminer la période de  $f$ , sa parité et en déduire un intervalle d'étude  $I$ .
2. Exprimer  $\sin(3x)$  et  $\sin(2x)$  en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$ .
3. Etudier les variation de  $f$  sur  $I$ .
4. Calculer  $f(0)$ ,  $(x_0)$  et  $(\pi)$  sous forme rationnelle. Où  $x_0$  est l'unique valeur dans  $]0, \pi[$  annulant  $f'(x)$ .
5. Dresser le tableau de variation. Tracer

sommairement le graphe de  $f$  sur trois périodes.

### Exercice 18

Le but de cet exercice est de montrer la formule de

John MACHIN (1680-1751) :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

On rappelle que

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

1. On pose  $\theta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$  calculer  $\tan(2\theta)$ , puis  $\tan(4\theta)$ .
2. Montrer que  $0 \leq \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{\pi}{6}$  en déduire un encadrement de  $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$
3. En déduire la formule de MACHIN.

### Exercice 19

Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Montrer que  $f$  admet une limite en 0 et déterminer cette limite.

### Exercice 20

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :

$$f_n(x) = x^n - x - 1, \text{ avec } n \geq 2.$$

1. Montrer qu'il existe un unique  $x_n \in [0; 1]$  tel que  $f_n(x_n) = 0$
2. Montrer que  $f_{n+1}(x_n) > 0$
3. En déduire que la suite  $(x_n)$  est décroissante et quelle converge vers une limite  $l$ .
4. déterminer  $l$

## Exercices et problèmes

### Exercice 21

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On définit la fonction

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Donner une condition sur  $b$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $f$  soit dérivable sur  $\mathbb{R}$  et dans ce cas calculer  $f'(0)$ .

Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par :

$$f(x) = x|x| ; g(x) = x^{\frac{3}{5}} ; h(x) = \cos(\sqrt{|x|})$$

Sont-elles dérivables en 0 ?

### Exercice 22

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - \sqrt[3]{1-x}$

- 1) Vérifier que  $D_f = ]-\infty; 1]$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 puis donner une interprétation géométrique au résultat
- 4) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty; 1[$  puis donner le tableau de variations de  $f$ .
- 5) Déterminer les branches infinies à  $C_f$  et construire  $C_f$
- 6) Demontrer que  $f$  est admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
- 7) Calculer  $f(0)$  puis déduire  $f^{-1}'(-1)$
- 8) Demontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution sur  $]0; 1[$

### Exercice 23

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = -2 + \sqrt[3]{8-x^3}$$

- 1) Vérifier que  $x \in ]-\infty; 2[$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1
- 4) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-\infty; 2[$
- 5) Déterminer les branches infinies à  $C_f$
- 6) Demontrer que  $f$  est admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à déterminer puis donner l'expression de  $f^{-1}(x)$
- 7) Calculer  $(f^{-1})'(0)$

### Exercice 23

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$

- 1) Vérifier que  $D_f = [0; +\infty[$
- 2) Etudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$
- 3) Etudier la dérivabilité à droite en 0
- 4) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$
- 5) Déterminer les branches infinies à  $C_f$
- 6) Demontrer que  $f$  est admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à déterminer puis donner l'expression de  $f^{-1}(x)$
- 7) calculer  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$

### Exercice 24

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty$  [par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

## Exercices et problèmes

1)a)Vérifier que pour tout  $x > 0$  on a :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}, \text{En déduire que } f \text{ est continue à}$$

droite en 0

b) Montrer que  $f$  est dérivables à droite en 0.

2)a)Montrer que pour tout  $x > 0$  on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \frac{1}{x}}$$

b) Déduire alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat

3)a)Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}}$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0, +\infty[$

c)Montrer que  $f$  est une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle I que l'on précisera

d) Calculer  $f(1)$ , en déduire  $(f^{-1})'(\sqrt{2} - 1)$

### Exercice 25

Soit  $f$  définie sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}$$

1. a) Montrer que  $f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}};$

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une

solution unique  $\lambda$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

c) Montrer que  $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

2. On considère la suite  $(U_n)$  définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a ) vérifier que  $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et montrer que

$$0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b ) Montrer que  $|U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|U_n - \lambda| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$  et

déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 26

Soit  $f$  la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} \quad ; \quad x < -2 \\ f(x) = \arctan(\sqrt{x+2}) \quad ; \quad x \geq -2 \end{cases}$$

1.a) montrer que la fonction  $f$  est continue en  $-2$

b ) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c ) montrer que la courbe  $(C_f)$  admet un

asymptote oblique  $(\Delta)$  au voisinage de  $-\infty$  et

déterminer l'équation cartésienne de  $(\Delta)$  puis

étudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à

$(\Delta)$  sur l'intervalle  $]-\infty; -2[$

2.Etudier la dérивabilité de  $f$  à droite et à gauche de

$-2$  ; interpréter géométriquement chaque résultat

3.Etudier les variations de  $f$

4.Construire  $(C_f)$

5.Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = [-2; +\infty[$

## Exercices et problèmes

- 6.
- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer
  - Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$
  - Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \in ]1; 2[$
  - Construire dans le même repère  $(C_{g^{-1}})$

### Exercice 27

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \arctan(3x) + 2x - 1$$

- Démontrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

Démontrer que l'équation  $f^{-1}(x) = x$  admet une

solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$

- Vérifier que  $\alpha = 1 - \arctan(3\alpha)$  et  $1 - \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{1}{3}$

- Démontrer que  $f^{-1}(x) < x$  ( $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ) et

interpréter géométriquement cet résultat.

### Exercice 28

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + 3\sqrt[3]{1-x} & ; x \leq 1 \\ f(x) = (x-1)(1+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)) & ; x > 1 \end{cases}$$

- a) montrer que la fonction  $f$  est continue en 1
- b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 1 et interpréter géométriquement cet résultat

- a) calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
  - Démontrer que la droite d'équation  $(\Delta) : y = x$  est une asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
  - Etudier la branche infini à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$
- a) Etudier les variations de  $f$  sur  $I = ]-\infty; 1[$
  - Donner le tableau de variation  $f'$  sur l'intervalle  $K = [1; +\infty[$  puis les variations de  $f$  sur  $K$
- soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $J = ]-\infty; 0]$ 
    - Démontrer que  $g$  est une bijection de  $J$  vers un intervalle  $L$  à déterminer
    - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $t^3 - 3t - 2 = 0$  puis déterminer  $g^{-1}(-2)$  et  $(g^{-1})'(-2)$
    - Construire dans un repère orthonormé les courbes  $(C_f)$  et  $(C_{g^{-1}})$

### Exercice 29

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- calculer la dérivée  $f'(x)$  et étudier son signe.  
Etudier la dérivable de  $f$  en -2 et en 2 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus
- déterminer le tableau de variations de  $f$ .  
Etudier les branches infinies de  $(C_f)$  ; puis construire  $(C_f)$ .

Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[2; +\infty[$

## Exercices et problèmes

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer

3. Construire  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans un même repère orthonormé.

4. Calculer  $g^{-1}(-2)$ ;  $g^{-1}(-1)$  et  $(g^{-1})'(-1)$ .

5. Déterminer l'expression de  $g^{-1}(x)$ .

### Exercice 30

I/ Soit la fonction  $d$  définie par :  $f(x) = \sqrt{x-1} - x$

1/ Déterminer les limites de faux bornes de son domaine de définition.

2/ Etudier la dérивabilité de  $f$  en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

3/ Calculer le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0 = 2$ .

4/ Ecrire l'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point  $x_0 = 2$ .

II/ On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

1/ Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

2/ a- Montrer que  $f$  est continue en  $-1$ .

b- Justifier la continuité de  $f$  sur son domaine de définition.

3/ a- Etudier la dérивabilité de  $f$  en  $-1$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

b- Déterminer  $f'(-1)$ .

4/ Donner une l'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 0.

### Exercice 31

Soit  $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1/ Etudier la continuité de  $f$  en 0

2/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  Interpréter graphiquement le résultat

3/a) Montrer que  $\forall x < 0$  on a  $1 \leq f(x) \leq 1 - \frac{2}{x}$

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4/a) Pour  $x \geq 0$ ; Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$  et

vérifier que  $f'(x) < 1$

b) Montrer que la courbe représentative de  $g$  la restriction de  $f$  à  $[0; +\infty[$  coupe  $\Delta : y = x$  en point unique d'abscisse  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]1; 2[$

### Exercice 32

1/ Soit la fonction  $g(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]-2, 2[$  puis calculer  $g'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de  $g$

c) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à préciser

d) Déduire que l'équation  $g(x)=0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-2, 2[$

e) Donner alors le signe de  $g(x)$  sur  $]-2, 2[$

2/ Soit la fonction  $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$

## Exercices et problèmes

a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $(-2)$  et à gauche en  $(2)$  ; Interpréter graphiquement les résultats

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

c) Tracer  $\zeta_f$  dans un RO.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3/a) Montrer que pour  $x \in [0, 1]$  on a  $|g(x)| \leq 1$

b) En déduire que pour  $x \in [0, 1]$  on a  $|f(x) - 2| \leq x$

### Exercice 33

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, 4[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}}$

1/a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  ; Interpréter

graphiquement les résultats obtenus

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

c) Donner une équation de la tangente  $T$  à  $\zeta_f$  au

point  $A(2, 0)$

2/a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, 4[$  sur un intervalle  $J$  à préciser

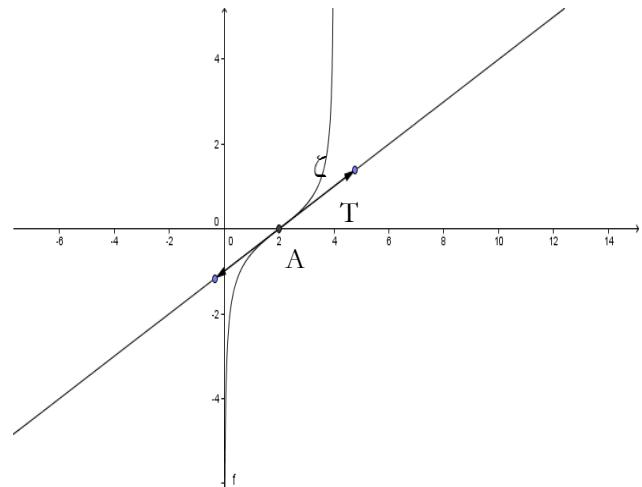
b) Donner le tableau de variation de  $f^{-1}$ , fonction réciproque de  $f$

c) Montrer que pour tout

$$x \in J \text{ on a } f^{-1}(x) = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

3/ La figure ci-dessous représente une partie de la

courbe  $\zeta_f$  et la tangente  $T$  dans un RO.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



a) Compléter  $\zeta_f$

b) En utilisant le graphe étudier la position  $\zeta_f$  et  $T$  ;

Conclure

c) Tracer la courbe  $\zeta_{f^{-1}}$  dans le même repère

### Exercice 34

Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - x & \text{si } x \in [1; +\infty[ \\ \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1} & \text{si } x \in ]-\infty; 1] \end{cases}$  et  $(\Gamma)$  sa

courbe représentative dans  $R$

I- 1/ Montrer que  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$

2/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $1$ .

Interpréter graphiquement le résultat.

II- 1/ Vérifier que  $f$  n'est pas continue en  $1$

2/ Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x + 4$

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y)$

b) Déterminer pour  $x < 1$  le signe de  $f(x) - y$

## Exercices et problèmes

III- 1/ Pour  $x < 1$ , calculer  $f'(x)$  puis déterminer son signe.

2/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à  $(\Gamma)$  au point E d'abscisse 0

3/ Pour  $x \geq 1$  calculer  $f'(x)$  puis déterminer son signe.

4/ Dresser le tableau de variation de f sur IR

### Exercice 34

A) Soit la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Etudier les variations de f.

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente T au point d'abscisse 0.

2.a) Montrer que l'équation :  $f(x) = 3x$  admet dans

$[-1, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

b) Justifier que  $\alpha \in ]0, 1[$ .

3) Tracer la courbe (C).

B) Soit la fonction g définie sur  $[-\pi/4, \pi/2]$  par :

$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & \text{si } x \neq \pi/2 \\ g(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que pour tout  $x \in [-\pi/4, \pi/2]$  on a :

$$g(x) = 1 + \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2) Etudier les variations de g et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

3) Montrer que g admet une application réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle I que l'on précisera.

4) Etudier la dérivabilité de  $g^{-1}$  sur l'intervalle I puis calculer  $(g^{-1})'(x)$ .

5) Tracer, dans le repère contenant la courbe de g, celle de  $g^{-1}$ .

### Exercice 35

Soit la fonction f définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$$

1) dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1, +\infty[$

c) Vérifier que  $1,44 < \alpha < 2$

3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à

$$(E) : 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x ; \text{ pour } x > 1$$

Soit g la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que  $g(\alpha) = \alpha$

b) Montrer que g est bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle K que l'on précisera.

c) Calculer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in K$ .

### Exercice 36

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{-|x^3| + x^2}{x+1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1) Calculer les limites de f en  $-\infty$  et  $+\infty$

2) Etudier la continuité de f en  $-1$

3) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $-1$

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et donner sa fonction dérivée.

### Exercice 37

Soit  $f$  la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = -x^3 + \sqrt{1-x} - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\cos(x-1)-1}{x-1} - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1)a) Montrer que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$

b) Etudier la continuité de  $f$  en  $1$

$$\left( \text{On rappelle que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \right)$$

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3)a) Montrer que pour tout réel  $x > 1$ , on a :

$$-3 - \frac{2}{x-1} \leq f(x) \leq -3$$

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , interpréter le résultat.

4) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $]-\infty, 1]$

a) Montrer que  $g$  est strictement décroissante sur

$]-\infty, 1]$  en déduire  $g([-\infty, 1])$

b) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $]-\infty, 1]$

c) Vérifier que  $-0,9 < \alpha < -0,8$ .

d) En déduire le signe de  $g$  sur  $]-\infty, 1]$

### Exercice 38

soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 \sin\left(\frac{2}{x}\right)}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1/a) Montrer que pour tout

$$x \in ]0, +\infty[ \text{ on a : } \frac{-x^2}{1+x} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{1+x}$$

b) Déduire la limite de  $f$  à droite en  $0$

c) Montrer que  $f$  est continue en  $0$

2/a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 2$ . En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\text{b) Calculer } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

3/a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]-\infty, 0[$  on a :  $f(x) \in ]-\infty, 0[$

b) Justifier que  $x \mapsto fof(x)$  est bien définie sur  $]-\infty, 0[$

### Exercice 39

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  sur un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1)a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

$$\left( \text{On vous donne } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x-1} = 0 \right)$$

b) En déduire que  $f$  continue en  $1$

c) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2)a) Vérifier que pour tout

## Exercices et problèmes

$$x \in ]-\infty; 1[ ; \frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$$

b) En déduire que la droite d'équation  $y = 1$  est une asymptote à ( $C$ ) au voisinage de  $-\infty$

3)a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -1$ ,

interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que l'équation  $f(x)$

$$= 0 \text{ admet}$$

Au moins une solution  $\alpha$  dans  $]-\frac{1}{2}, 0[$

b) Montrer que  $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{1 - \alpha^2}$

### Exercice 40

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2\pi & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{-2\pi x + \sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et soit } (C) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Etudier la continuité de  $f$  en 0.

2) a) Montrer que pour tout  $x < 0$ , on a :

$$-2\pi + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq -2\pi - \frac{1}{x}.$$

b) En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter géométriquement ce résultat.

3) Etudier la branche infinie de ( $C$ ) au voisinage de  $+\infty$

4) Etudier la dérивabilité de  $f$  à droite et à gauche de 0

5) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

sur  $]-\infty, 0[$  calculer  $f'(x)$ .

6) Montrer que l'équation  $f(x)=0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $0 < \alpha < 2$ .

### Exercice 41

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2 \left( x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

1°/ Montrer que  $f$  est impaire et dresser son tableau de variations .

2°/ On note ( $C$ ) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer les asymptotes à ( $C$ ) et étudier la position relative de ( $C$ ) par rapport à son asymptote oblique .

### Exercice 42

On pose pour  $a$  réel strictement positif la fonction  $f_a$  définie

sur  $[0; a]$  par : Pour tout  $x \in [0; a]$

$$f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

(a) Justifier la dérivabilité de  $f_a$  sur  $[0; a]$  et calculer sa dérivée. En déduire le tableau des variations de  $f_a$  en précisant les valeurs aux bornes.

(b) Montrer que  $f_a$  réalise une bijection de  $[0; a]$  sur  $[0; \frac{1}{a}]$ . On note  $f_a^{-1}$  sa bijection réciproque. Donner le tableau des variations de  $f_a^{-1}$  en précisant les valeurs aux bornes.

(c) Montrer que  $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$ .

Déterminer les points d'inflexion de ( C ) .

Construire ( C ) .

3°/ Soit g la fonction définie sur  $]0, \pi[$  par  
 $g(x) = f(\sin x)$  .

Etudier g et dresser son tableau de variations .

Montrer que la courbe ( Γ ) de g possède  $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$   
comme axe de symétrie .

Construire ( Γ ) .

### Exercice 43

Soit f la fonction par  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}x)}} x \in ]0; 1]$

1°/a) Etudier la derivabilité de f en 1

b) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in ]0, 1[$

c) Montrer que f réalise une bijection de  $]0, 1[$  sur un intervalle J que l'on précisera.

2°/ Construire dans un repère R ( $o, \vec{i}, \vec{j}$ ) les courbes  $C_f$   
et  $C_{f^{-1}}$  [Ind : calculer  $f(\frac{1}{2})$ ]

3°/a) Montrer que  $f^{-1}$  est derivable sur  $]0, +\infty[$  et

$$x \in ]0, +\infty[ (f^{-1})'(x) = -\frac{4x}{\pi(1+x^4)}$$

b) Montrer que  $f^{-1}$  est derivable en  $0^+$  et que  
 $(f^{-1})'_d(0) = 0$

4°/ On pose  $C(x) = f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) x \in ]0, +\infty[$

Montrer que C est derivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer  
 $C'(x)$

En deduire que  $\forall x \in ]0, +\infty[ C(x) = 1$

5°/ On pose  $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} , x \in ]0, +\infty[$

Etudier les variations de g et tracer (g)

### Exercice 44

Soit  $f(x) = 2 - \sin \frac{x}{2} , x \in [-\pi, \pi]$  .

1°/ a) Montrer que f est une bijection de  $[-\pi, \pi]$  sur  
 $[1, 3]$

b) Calculer  $f^{-1}(\frac{5}{2})$ ,  $f^{-1}(2)$  .

2°/ a) Montrer que pour tout  $x \in ]1, 3[$  .

b) Calculer  $(f^{-1})'(\frac{5}{2}), (f^{-1})'(2)$  .

c) Montrer que pour tout  $x \in ]1, 3[$  ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{\sqrt{-x^2+4x-3}} .$$

3°/ Dans Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; Tracer  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$

### Exercice 45

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x} .$$

1°/ Montrer que la fonction f est définie sur  
 $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  .

2°/ Etudier la continuité de f sur  $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  .

3°/ Etudier la dérivabilité de f en tout point de  
 $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$  .

Interpréter géométriquement le résultat obtenu .

4°/ a) Etudier les variations de f .

b) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

## Exercices et problèmes

5°/ a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera .

b) Expliciter :  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$  .

c) Tracer la courbe représentative ( $C'$ ) de  $f^{-1}$

dans le même repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

### Exercice 45

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$

Soit  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un plan

rapporté à un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

a- Etudier la dérивabilité de  $f$  à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b- Prouver que  $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .

a- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter le résultat obtenu.

Tracer  $(\zeta_f)$  .

3)a/ Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

b/ Calculer  $f^{-1}(3)$ . Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 3 et calculer  $(f^{-1})'(3)$ .

c/ Tracer  $\zeta_{f^{-1}}$  la courbe représentative de  $f^{-1}$  dans

le même repère

### Exercice 46

$$\text{Soit } f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$

Déterminer  $D_f$ .

Vérifier que pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(x) = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2 - 1}$

Montrer que  $f$  admet des primitives sur  $]-\infty; -1]$

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-\infty; -1]$  telle que

$$F(-2) = \frac{2}{3}$$

### Exercice 47

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = -1 + \sqrt{x^2 + 1}$

1/a) Déterminer le domaine de définition de  $f$

b) Montrer que  $f$  est une fonction paire. Interpréter graphiquement ce résultat

2/ Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$

3/a) Montrer que la droite  $\Delta : y = x - 1$  est une asymptote à  $\zeta_f$  au voisinage de  $+\infty$

b) Etudier la position relative de  $\zeta_f$  et  $\Delta$

4/ Tracer  $\zeta_f$  et  $\Delta$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

5/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$

Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}_+$

Tracer  $\zeta_{g^{-1}}$  courbe représentative de la fonction  $g^{-1}$

dans le même repère

Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$

Expliciter  $g^{-1}(x)$  ainsi que  $(g^{-1})'(x)$

### Exercice 48

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \sqrt{\sin x}$

1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

## Exercices et problèmes

2) a- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

b) construire  $C_f$

c)- On note  $g$  la fonction réciproque de  $f$ . de  $f$ .

Construire à partir de  $C_f$ . En précisant les demi-tangents de  $C_g$  aux points d'abscisse 0 et 1

3) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et que

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

4) Soit  $k$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$k(x) = \sqrt[4]{1-x^4}$$

a – Etudier les variations de  $k$  sur  $[0, 1]$

b- Montrer que  $g \circ k$  est dérivable sur  $]0; 1[$

c- Déduire alors :  $g \circ k(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$

### Exercice 49

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{4 + \cos x}$

1) Montrer que  $f$  admet dans  $\mathbb{R}$  une seule primitive  $F$  vérifiant  $F(0) = 0$ .

2) a) Montrer que la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = F(x) - F(-x)$$
 est constante.

b) Etudier alors la parité de  $F$ .

3) a) Montrer que : pour tout  $t \in [0; +\infty[$  on a :

$$\frac{1}{6}t \leq f(t) \leq t$$

b) Déduire que pour tout  $x \in [0; +\infty[$  on a :

$$\frac{1}{12}x^2 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$$

4) Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  en déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

5) a) Etudier le comportement de la courbe ( $C$ ) de  $F$  au voisinage de  $+\infty$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $F$ .

### Exercice 50

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[1, +\infty[$

b) On désigne par  $g$  la fonction réciproque de  $f$ , calculer  $g(1)$ ,  $g(\sqrt{2})$  et  $g(2)$ .

c) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et que :

$$g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

### Exercice 51

Soit la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
 et  $C_f$  sa courbe représentative dans

un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1)a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Montrer que  $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$$x \in [0; +\infty[$$

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d) Montrer que la droite  $D : y = x+1$  est une asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .

e) Tracer  $C_f$  ainsi que la demi tangente à  $C_f$  au point  $O$ .

2) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à déterminer.

b) Construire dans le même repère la courbe de  $f^{-1}$

### Exercice 52

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

- 1) Montrer que  $f$  admet des primitives sur  $[1, +\infty[$
- 2) Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[1, +\infty[$  qui s'annule en 1. Donner le sens de variation de  $F$ .
- 3) Soit  $G$  la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par

$$G(x) = F\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

- a) Montrer que  $G$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  et que

$$G'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

- b) En déduire que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$G(x) = \tan(x) - x$$

- c) Calculer  $F(\sqrt{2})$  et  $F(2)$

- 4) Soit la fonction  $h$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{Déterminer la primitive } H \text{ de}$$

$h$  sur  $]1, +\infty[$  qui s'annule en  $\sqrt{3}$

### Exercice 53

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-2, +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{2x + 4} - 1$$

- 1/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-2$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- 2/ a- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]-2, +\infty[$ .

b- En déduire que  $f$  réalise une bijection sur un intervalle  $J$ , que l'on précisera.

3/ Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ .

a- Déterminer le domaine de continuité de  $f^{-1}$  et son sens de variation.

b- Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $-1$ .

c- Calculer  $f(0)$  en déduire  $(f^{-1})'(1)$ .

4/ Expliciter  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$  pour tout  $x \in J$ .

### Exercice 54

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} - x.$$

On désigne par  $(\zeta_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

- 1/ Montrer que  $f$  est définie sur  $]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$ .

- 2/ Montrer que la droite  $\Delta : y = 0$  est asymptote à  $(\zeta_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .

- 3/ a- Montrer que  $\Delta' : y = -2x$  est une asymptote à  $(\zeta_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .

- b- Etudier la position de  $(\zeta_f)$  par rapport à  $\Delta'$ .

- 4/ a- Etudier la dérивabilité de  $f$  à droite en  $3$  et à gauche en  $-3$ .

- b- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

- 5/ a- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, -3[ \cup ]3, +\infty[$  et

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} - 1.$$

- b- Montrer que  $f$  strictement décroissante sur  $]-\infty, -3]$  et strictement croissante sur  $[3, +\infty[$ .

- c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

## Exercices et problèmes

6/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[3, +\infty[$ .

a- Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[3, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

b- Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[-3, 0[$

c- Calculer  $g^{-1}(-1)$ , en déduire  $(g^{-1})'(-1)$

d- Expliciter  $g^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

### Exercice 55

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1)a- dresser le tableau de variation de  $f$

b- Etudier les variations de la fonction

$\varphi: x \mapsto f(x) - x$  sur  $] -1; 1[$ .

Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $] -1; 1[$

une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left] \frac{4}{5}; 1 \right[$

Donner le signe de  $\varphi(x)$

2) a- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1; 1[$

sur  $\mathbb{R}$ , on note  $f^{-1}$  sa fonction réciproque

$$b - \text{démontrer que } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) Soit la suite  $(U_n)$  définie par :  $U_0 \in [0; \alpha]$

$$U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a- Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; \alpha]$

b- Utiliser le signe de  $\varphi(x)$  pour montrer que :

$$\forall x \in [0; \alpha] \quad f^{-1}(x) \geq x$$

Montrer alors que la suite  $(U_n)$  est monotone et en

déduire que  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite

b) Pour tout de  $] -1; 1[$ , on pose:

$$h(x) = f(\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right))$$

c) Montrer que :  $\forall x \in ] -1; 1[$

$$h(x) = -1 + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)}$$

d) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $] -1; 1[$

sur  $\mathbb{R}$ . On note  $h^{-1}$  sa fonction réciproque

e) Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que

$$(h^{-1})'(x) = -\frac{2}{\pi((x+1)^2 + 1)}$$

4) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ , on pose

$$H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

a-Montrer que  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer  $H'(x)$

b) Calculer  $h\left(-\frac{1}{2}\right)$  et  $h\left(\frac{1}{2}\right)$ , en déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$H(x) = -1 \quad : \forall x \in \mathbb{R}_+^* ; H(x) = 1$$

c- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on pose

$$V_n = \sum_{k=1}^n \left[ h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right] \text{ et } W_n = \frac{1}{n} V_n$$

$$* \text{ Montrer que } h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$**) \text{ Montrer que } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad V_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right),$$

en déduire que la suite  $(W_n)$  est convergente et donner sa limite.

### Exercice 56

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

et  $F$  la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tel que  $F(0) = 0$

$$1) a- \text{ Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}_- : x \leq F(x) \leq x - \frac{1}{3}x^3$$

## Exercices et problèmes

b- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+$  :  $x - \frac{1}{3}x^3 \leq F(x) \leq x$

2) Calculer alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-x}{x^2}$

3) Soit G la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} G(x) = \frac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

a- Etudier la continuité et la dérivabilité de G en 0

b - Déterminer le signe de  $H(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - F(x)$

puis donner le sens de variation de G sur  $\mathbb{R}$

4) On pose  $\varphi(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$

pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$

a- Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et calculer

$$H'(x)$$

b- Vérifier que  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$   $F(\operatorname{tg}(x)) = x$  puis

calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

c- En déduire que  $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$

d- Montrer que F réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que l'on précisera

Déterminer  $F^{-1}(x)$  pour tout x de J

### Exercice 57

Sur la figure est tracée la courbe représentative notée

$(\zeta_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'une fonction f

définie sur  $\mathbb{R}$ . On sait que :

- La droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x + 4$  est une asymptote à  $(\zeta_f)$  en  $+\infty$ .

- La droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote à la courbe  $(\zeta_f)$  en  $-\infty$ .

- La courbe  $(\zeta_f)$  admet deux tangentes aux points d'abscisses -3 et -1.

- La courbe  $(\zeta_f)$  admet une demi tangente T et une demi tangente verticale au point d'abscisse -4.

1/ Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$

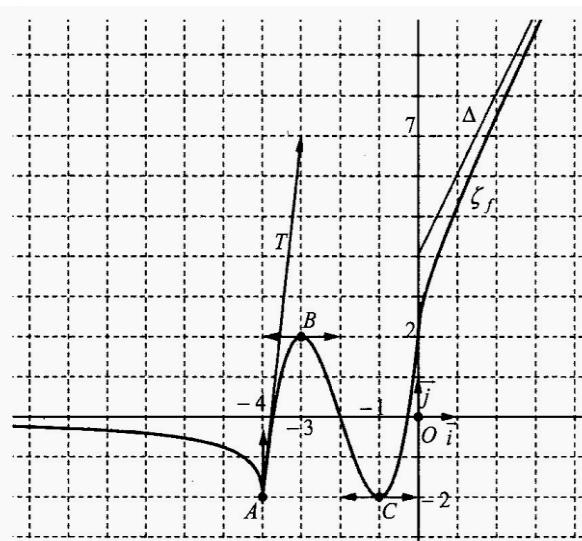
2/ Calculer :  $f(-1)$ ;  $f(-3)$  et  $f'_d(-4)$ .

3/ a- f est-elle dérivable à gauche en -4 ? Déterminer alors  $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{f(x) - f(-4)}{x + 4}$

b- Montrer qu'il existe une solution unique  $\alpha \in ]-4, -3[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle  $[-1, +\infty[$ .

Montrer que h réalise une bijection de  $[-1, +\infty[$  sur un intervalle J que l'on précisera.



### Exercice 58

Soit f la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

## Exercices et problèmes

1/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite et à gauche en 0.

$f$  est-elle dérivable en 0 ?

2/a) Calculer la fonction dérivée de  $f$  sur chaque intervalle

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

3/a) Montrer que la droite  $\Delta : y = x + 1$  est une

asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $(+\infty)$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ; Interpréter graphiquement le

Résultat

4/ Pour  $x \in ]-\infty, 0]$  Montrer que la courbe de  $f$

admet un point d'inflexion A

5/ Tracer  $(\zeta_f)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 59

Soit  $f$  la fonction définie sur

$$\mathbb{R} \text{ par } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1/ Etudier la continuité de  $f$  en 0

2/a) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0

b) Interpréter graphiquement les résultats trouvés

3/ Calculer la fonction dérivée de  $f$  sur chaque

intervalle

4/ Dresser le tableau de variation de  $f$

5/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ; Interpréter

graphiquement les résultats obtenus

### Exercice 60

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+2}{x+2} & \text{si } x > 0 \\ 3 - \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ a) Montrer que  $f$  est continue en 0

b) Déterminer le domaine de continuité de  $f$

3/ a) Montrer que  $f$  n'est pas dérivable en 0

b) Déterminer les équations cartésiennes des deux tangentes à

$(C_f)$  au point A (0,1) ;  $(C_f)$  étant la courbe représentative de  $f$  dans un repère cartésien

4/a) Calculer la fonction dérivée de  $f$  sur chaque intervalle.

b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

5/a) Montrer que  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale au voisinage de  $(+\infty)$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x$  ; Interpréter

graphiquement le résultat obtenu

### Exercice 61

Soit  $f$  la fonction définie sur

$$]-1, 1[ \text{ par } f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

et  $\zeta_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

## Exercices et problèmes

1/a) Justifier que  $f$  est dérivable sur

$$]-1,1[ \text{ et que } f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

2/a) Montrer que  $I(0, -1)$  est un point d'inflexion de  $\zeta_f$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à  $\zeta_f$  au point  $I$

c) Montrer que  $I$  est un centre de symétrie pour  $\zeta_f$

3/ Tracer  $\zeta_f$  en précisant les asymptotes

4/ a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0,1[$  sur un intervalle  $J$  à préciser

b) Calculer  $(f^{-1})'(-1)$

c) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$

### Exercice 62

A/ Soit la fonction  $g$  défini sur  $IR_+$  par :

$$g(x) = 2\sqrt{x} - x - 1$$

1°) Etudier la dérivabilité de  $g$  adroite en 0.

2°) Déterminer  $g'(x)$  pour tout  $x \in IR_+^*$

3°) a- Donner le tableau de variation de  $g$ .

En déduire que  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in IR_+$ .

B/ Soit la fonction  $f$  défini sur  $IR$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{x - 1} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x + 1}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de  $f$  en 0 et en 1.

2°) a- Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en 1.

Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

3°) Calculer  $f'(x)$  et donner le tableau de variation de  $f$ .

### Exercice 63

Soit la fonction  $f$  défini par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \pi x + \cos \pi x + 1 & \text{si } x > 1 \\ f(x) = x^2 - x + \pi & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1°) Etudier la continuité de  $f$  en 1.

2°) a- Montrer que  $\forall x > 1; f(x) \geq \sqrt{x^2 - 1} + \pi x$ .

b- Déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3°) a- Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $[1; +\infty[$

b- Prouver que  $\forall x > 1 f'(x) > 0$ .

4°) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

5°) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

6°) L'équation  $f(x) = 0$  possède-t-elle des solutions dans  $IR$  ?

7°) Soit  $h: [0; \pi] \rightarrow IR ; x \mapsto h(x) = f(3 + \sin x)$ .

Etudier la dérivabilité de  $h$  sur  $[0; \pi]$ .

Dresser le tableau de variations de  $h$ .

### Exercice 64

Soit  $f$  la fonction définie sur  $IR$  par :

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 3}$$

On désigne par  $\zeta_f$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## Exercices et problèmes

1°) Dresser le tableau de variations de f.

2°) a- Montrer que la droite  $\Delta: y = -2x + 1$  est

une asymptote à  $\xi_f$ .

b- étudier la position de  $\xi_f$  par rapport à  $\Delta$ .

c- Tracer  $\xi_f$  et  $\Delta$  dans le même R.O.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3°) a- Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b- Construire  $\xi_{f^{-1}}$  dans le même R.O.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

c- Montrer que  $\forall x \in J \quad f^{-1}(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{2(x-1)}$

4°) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans IR une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ .

5°) Soit g la fonction définie sur  $[0; \pi]$  par

$$g(x) = 1 + f'(\cos x)$$

a) vérifier que  $\forall x \in [0; \pi] \quad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}$

et que  $g'(x) = \frac{-\sin x}{(\sqrt{3 + \cos^2 x})^3}$

Montrer que g réalise une bijection de  $[0; \pi]$  sur un intervalle I à préciser.

c- Déterminer le domaine D de la dérivable de  $g^{-1}$

Et montrer que  $\forall x \in D$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{\sqrt{3}}{(x^2 - 1)\sqrt{1 - 4x^2}}$$

### Exercice 65

Soit la fonction définie sur  $IR_+^*$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 - \cos \pi x} & ; \text{ si } x \in ]0; 1] \\ f(x) = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - 1} & ; \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

1°) a- Montrer que f est continue en 1.

b- Etudier la dérivable de f en 1.

2°) Montrer que f est dérivable sur  $]0; 1]$  et sur

$]1; +\infty[$

Déterminer  $f'(x)$  lorsque  $x \in ]0; 1]$  et

$x \in ]1; +\infty[$

3°) Soit  $g: ]1; +\infty[ \rightarrow IR / g(x) = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - 1}$

a- Montrer que g réalise une bijection de  $]1; +\infty[$

sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Montrer que pour tout  $x \in J$  on a

$$g^{-1}(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{8x + 4}$$

4°) Soit  $\varphi: ]0; 1] \rightarrow IR / \varphi(x) = \frac{1}{1 - \cos \pi x}$

a- Montrer que  $\varphi$  admet une fonction réciproque  $\varphi^{-1}$  dont on précisera le domaine de définition.

b- Montrer que  $\varphi^{-1}$  est dérivable sur et que

$$\forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[ \quad (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{-\pi x \sqrt{2x - 1}}$$

$\varphi^{-1}$  est elle dérivable à droite en  $\frac{1}{2}$ .

5°) Montrer que l'équation  $\varphi(x) = x$  admet une seul solution  $x_0 \in ]0; 1]$ .

## Exercices et problèmes

Calculer  $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)$  et en déduire  $x_0$ .

### Exercice 66

Soit  $f$  la fonction définie par fonction définie par :

$$f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable  $n$  fois sur

$$]-1; 1[$$

Avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \in ]-1; 1[$ , on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Et  $P_n$  un polynôme vérifier la relation suivante

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_{n+1}(x) = (1-x^2)P_n'(x) + (2n+1)xP_n(x)$$

2. a ) Montrer que

$$\forall x \in ]-1; 1[ : (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$$

b ) deduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) - n^2(1-x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

c ) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n' = n^2 P_{n-1}$

d ) deduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$n^2 P_n(x) - (2n-1)xP_n'(x) - (1-x^2)P_n''(x) = 0$$

e) calculer  $P_n(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### Exercice 67

On considere la fonction polynome  $P_n$  definie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x-k) = (x-1) \times (x-2) \times \dots \times (x-n)$$

et

$$\text{la fonction } f_n \text{ tel que } f_n(x) = \frac{P_n'(x)}{P_n(x)}$$

1. Montrer par recurence que  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\text{on a } f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x-k}$$

2. Deduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P_n(x)P_n''(x) < \left(P_n'(x)\right)^2$$

# Chapitre 4

## Fonction logarithme népérien

### Histoire

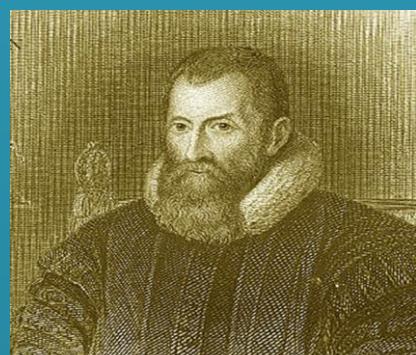
En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

*Neper* construit le mot à partir des mots grecs « *logos* » (logique) et *arithmos* (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.

en plus complexes.



## I. Fonction logarithme népérien

### 1) Définition et propriétés algébriques

#### a) Activité

1) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x}$

- Montrer que  $f$  admet des fonctions primitives sur  $]0; +\infty[$ .
- En déduire que  $f$  admet une primitive unique sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

L'unique primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1, s'appelle fonction logarithme népérien. Elle est notée  $\ln$

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(a \times x^r)$  avec  $a \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $r \in \mathbb{Q}$

- Vérifier que  $g'(x) = r \times \frac{1}{x}$   $\forall x \in ]0; +\infty[$ .
- En déduire que  $g$  est une fonction primitive sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto r \times \frac{1}{x}$ .
- Vérifier que  $\forall x \in ]0; +\infty[$   $g(x) = r \ln(x) + c$  où  $c$  est une constante.
- Montrer que si  $x = 1$  alors  $c = \ln a$
- En déduire que pour tous réels  $x$  et  $a$  de  $]0; +\infty[$  et pour tout nombre rationnel  $r$  on a :  $\ln(ax^r) = r \ln x + \ln a$
- En déduire si on pose  $x = b$ , alors on obtient la propriété suivante :

$$\forall r \in \mathbb{Q}; \forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln(ab^r) = \ln a + r \ln b$$

- En déduire les propriétés suivantes :

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\forall r \in \mathbb{Q}; \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln(b^r) = r \ln b$

- Sans utiliser de calculatrice, exprimer en fonction de  $\ln 2$ ,  $\ln 3$  ou  $\ln 5$  les nombres suivants :

$$\ln \sqrt{10} ; \ln 30 ; \ln \sqrt[3]{\frac{25}{18}} ; \ln \sqrt[3]{100} ; \ln(0,01)$$

## Définition

L'unique primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1, s'appelle fonction logarithme népérien. Elle est notée  $\ln$

## Conséquence :

- La fonction  $\ln$  est définie sur  $]0; +\infty[$
- $\ln 1 = 0$
- $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \ln' x = \frac{1}{x}$

**Application** : déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right); \quad g(x) = \ln x + \ln(x-1); \quad h(x) = \ln(x^2 - x)$$

**Exercice** : déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \ln(x+4) - \ln(25-x^2); \quad f_2(x) = \ln(x^2 - 8x + 7); \quad f_3(x) = \ln\left|\frac{2x-|x|}{x-5}\right|$$

## Propriété

- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln(ab) = \ln a + \ln b ; \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b ; \quad \forall r \in \mathbb{Q}; \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \ln(b^r) = r \ln b$
- soient  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $]0; +\infty[$  alors  $\ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)$

$$\text{c-à-d : } \ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln(x_k)$$

## Cours

### Consequence :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x$  en général ( $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ) ( $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$ )
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln(x^2) = 2 \ln x$
- $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2 : \ln(|xy|) = \ln|x| + \ln|y|$  et  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$

Exemples :  $A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$

$$\begin{aligned} A &= \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) \\ &= \ln(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) \\ &= \ln(9 - 5) \\ &= \ln 4 \end{aligned}$$

$$B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3$$

$$\begin{aligned} B &= 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 \\ &= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2 \\ &= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2} \\ &= \ln \frac{40}{9} \end{aligned}$$

## 2) Monotonie de la fonction $\ln$

### a) Activité :

On considère la fonction logarithme népérien  $\ln$

Démontrer que :

- $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$
- $\ln$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$
- $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

### Propriété

Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs, on a :

$$1) \quad \begin{cases} \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \\ \ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y \end{cases} ; \quad 2) \quad \begin{cases} \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \\ \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \end{cases}$$

## Cours

### Exemples :

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

a) Ensemble de définition :

$$\begin{aligned}x-3 > 0 &\quad \text{et} \quad 9-x > 0 \\x > 3 &\quad \quad \quad x < 9\end{aligned}$$

L'équation est définie sur  $]3 ; 9[$ .

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-3)(9-x) = \ln 1$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(9-x) = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \text{ et } x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc  $6 - 2\sqrt{2}$  et  $6 + 2\sqrt{2}$  car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition.

b) Ensemble de définition :

$$\begin{aligned}3-x > 0 &\quad \text{et} \quad x+1 > 0 \\x < 3 &\quad \quad \quad x > -1\end{aligned}$$

L'inéquation est définie sur  $]-1 ; 3[$ .

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(3-x) \leq \ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3-x \leq x+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc  $[1 ; 3[$ .

## II. Etude de la fonction $\ln$

### 1) Limite de la fonction $\ln$ en $+\infty$ et en 0

#### a) Activité

A. On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x - \ln x$

1) Donner le tableau de variations de f

2) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \ln(x) < x$

3) Démontrer que  $\forall x > 1 : 0 < \ln(x) < 2\sqrt{x}$

4) a) Déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$

b) déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$  tel que  $n \in \mathbb{N}^*$

c) on pose  $t = \frac{1}{x}$  démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$

B. 1) démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$  et déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h + 1)}{h} = 1$

2) On admet  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

## Propriété

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
- et pour tout entier non nul  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$  et pour tout entier  $n$ ,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

## Exemples :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$ .

Et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$  soit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty.$$

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{0}{0}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1 + (x - 1))}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \text{ Comme}$$

composée de limites.

c) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln x}{x - 1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0. \text{ Et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - 1} = 0.$$

## 2) Etude de la fonction $\ln$

### a) Activité

On considère la fonction logarithme népérien  $\ln$  et  $(C)$  sa courbe dans un repère orthonormé.

- 1) Démontrer que  $\ln$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$
- 2) Démontrer que l'équation  $\ln x = 1$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$

L'unique solution de l'équation  $\ln x = 1$  est notée  $e$  et on a alors  $\ln e = 1$

Une valeur approchée de  $e$  est  $e \approx 2,71828182845\dots$

La notation  $e$  est utilisée par le mathématicien suisse Euler (1707-1783)

- 3) Donner le tableau de variations de la fonction  $\ln$
- 4) Étude des branches infinies à  $(C)$ 
  - a) Démontrer que la fonction  $\ln$  est admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$ .
  - b) Démontrer que  $(C)$  admet l'axe des ordonnées comme asymptote.
- 5) Étudier la concavité de  $(C)$
- 6) Déterminer l'équation des tangentes à  $(C)$  aux points d'abscisse 1 et  $e$ .
- 7) Représenter  $(C)$
- 8) Déduire la représentation graphique des fonctions suivantes :
  - $x \mapsto \ln(-x)$
  - $x \mapsto -\ln(x)$
  - $x \mapsto |\ln(x)|$
  - $x \mapsto \ln|x|$

### Solution :

La fonction logarithme népérien est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc est continue sur  $]0; +\infty[$ . Et La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  car Pour tout réel  $x > 0$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ .

## Cours

Donc  $\ln$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\ln(]0; +\infty[) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \mathbb{R}$ .

1) Comme  $f$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  et  $1 \in \mathbb{R}$  donc il existe unique nombre de  $]0; +\infty[$  que l'on note  $e$  tel

que  $\ln e = 1$

2) Tableau de variation de  $\ln$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$\ln'(x)$			+	
$\ln x$	$-\infty$	0		$+\infty$

3) Les branches infinies

a) On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc ( $C$ ) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$ .

b) On  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$  alors ( $C$ ) admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

4) On  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$  Pour tout réel  $x > 0$  donc

$x$	0	$+\infty$
$\ln''(x)$	-	
( $C$ )		

5) - L'équation de la tangente à ( $C$ ) au point d'abscisse 1

$$(T_1): y = \ln'(1)(x - 1) + \ln(1)$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1$$

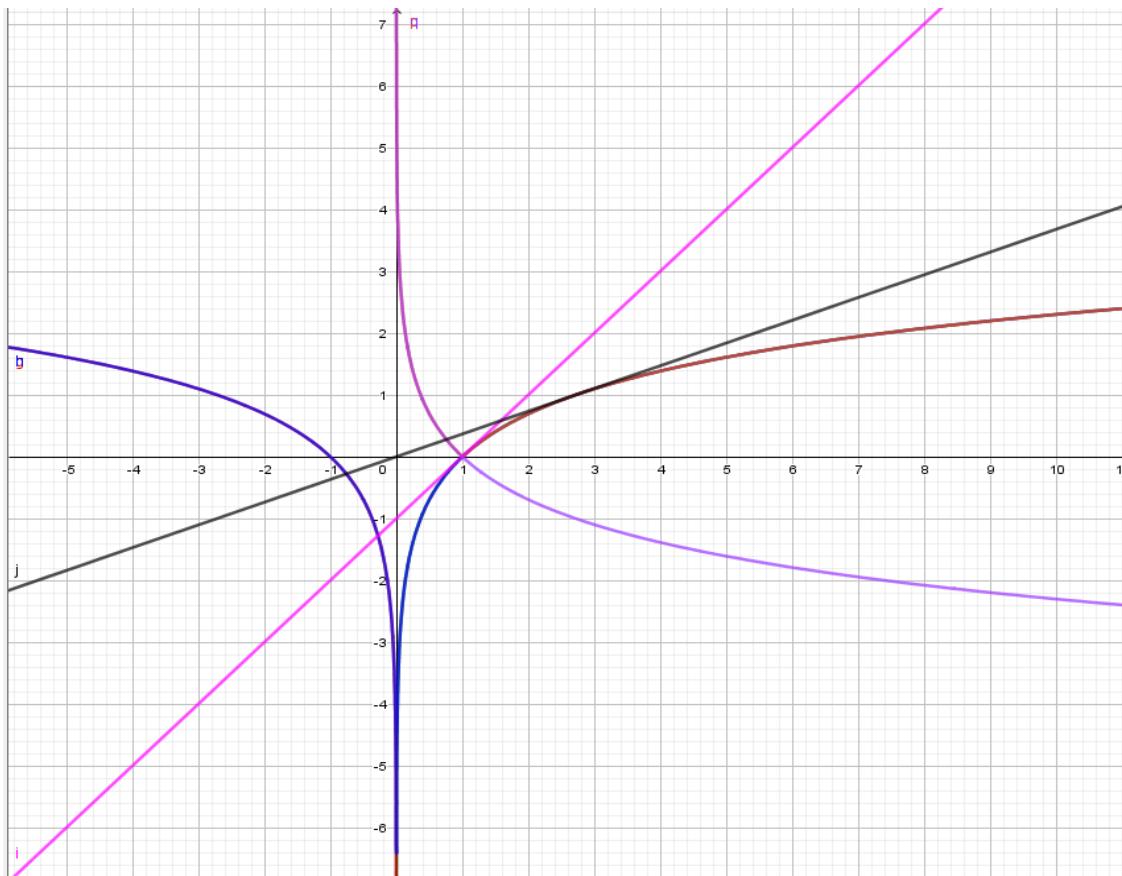
- L'équation de la tangente à ( $C$ ) au point d'abscisse  $e$

$$(T_2): y = \ln'(e)(x - e) + \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$$

6) Construction de ( $C$ )

- Droite
- i:  $y = x - 1$
  - j:  $y = 0.37x$
  - Fonction
  - f(x) =  $\ln(x)$
  - g(x) =  $\ln(-x)$
  - h(x) =  $\ln(|x|)$
  - p(x) =  $|\ln(x)|$
  - q(x) =  $-\ln(x)$



### III. Fonctions de la forme $\ln u$

#### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I.

La fonction  $x \mapsto \ln|u(x)|$  est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ .

#### Exemple :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2[$  par :  $f(x) = \ln(2x - x^2)$  alors  $f'(x) = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$ .

**Application :** calculer  $D_f$ , puis calculer  $f'$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = \ln(\ln x)$  ; 2)  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  ; 3)  $f(x) = \ln|\sin^2 x + 3 \sin x + 4|$

## Exercice corrigé

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-2;1[$  par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right).$$

- a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- b) Etudier la dérивabilité de la fonction  $f$ .
- c) Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$ .
- d) Tracer sa courbe représentative.

### Correction

a) -  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{1-x} = 0$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$  comme

composée de limites.

-  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$  comme

composée de limites.

b) La fonction  $u : x \mapsto \frac{x+2}{1-x}$  est strictement positive

et dérivable sur  $]-2;1[$  donc  $f$  est dérivable sur  $]-2;1[$ .

$$u'(x) = \frac{1 \times (1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2}$$

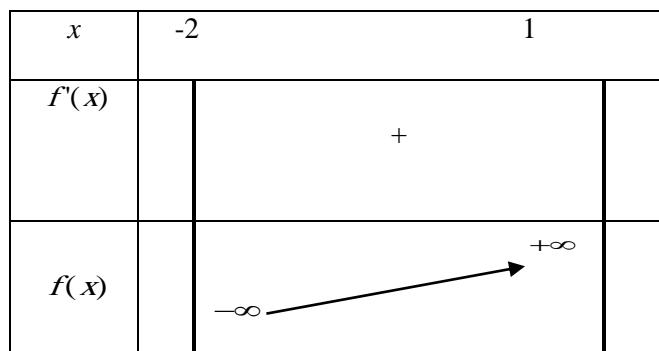
$$c) = \frac{1-x+x+2}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}$$

Donc  $u'(x) > 0$ .

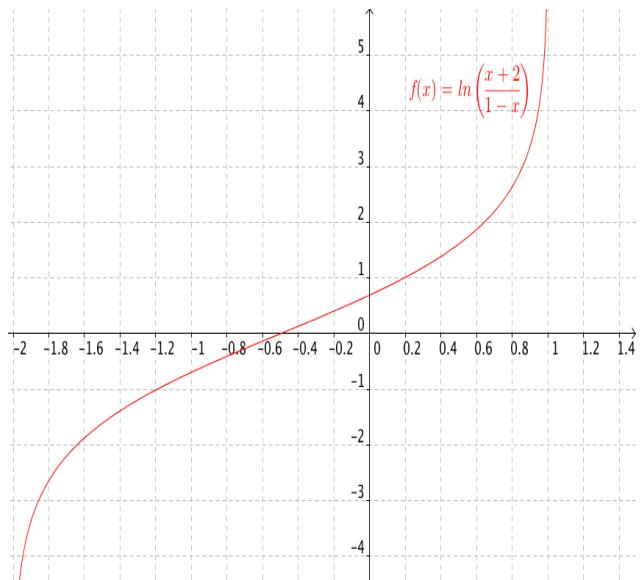
La fonction  $u$  est donc strictement croissante sur  $]-2;1[$ ,

d'où :

La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]-2;1[$ .



d) La courbe



### Définition

soit  $u$  une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  s'appelle la dérivée logarithmique de la fonction  $x \mapsto u(x)$  sur  $I$ .

**Exemples :** la dérivée logarithmique de la fonction  $x \mapsto x^4 + x^2 + 3$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 3}$

## Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable et ne s'annule sur un intervalle  $I$ .

L'ensemble des fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$  est les fonctions  $x \mapsto \ln|u(x)| + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

## Exemples :

□ L'ensemble des fonctions primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } ]-\infty; 0[ \text{ est } x \mapsto \ln(-x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R} .$$

□ L'ensemble des fonctions primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k \text{ avec}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

**Application :** déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$

$$\begin{cases} f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2 - 2x} \\ I = ]-\infty; 0[ \end{cases} ; \quad \begin{cases} f : x \mapsto \tan x \\ I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \end{cases} ; \quad \begin{cases} f : x \mapsto \frac{x-1}{x+1} \\ I = ]-1; +\infty[ \end{cases}$$

## IV. Fonction logarithme de base $a$

### 1) Définition

#### Définition

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif et différent de 1.

La fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ ; définie sur  $]0; +\infty[$ , s'appelle **fonction logarithmique de base  $a$** , et notée  $\log_a$

On a donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

## Remarque :

- $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x .$
- La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.
- $\forall a \in \mathbb{R}^* - \{1\} \quad \log_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1 .$
- $\forall r \in \mathbb{Q} \quad \log_a(a^r) = \frac{\ln a^r}{\ln a} = \frac{r \ln a}{\ln a} = r$

## 2) Propriétés :

### Propriété 1

soit  $a$  un nombre strictement positif différent de 1 on a :

$0 < a < 1$	$a > 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$

### Propriété 2

. pour tous nombres réels  $a$  et  $b$  de  $]0; +\infty[$  et pour tout nombre rationnel  $r$  :

□  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \log_a(ab) = \log_a a + \log_a b$

□  $\forall b \in \mathbb{R}_+^* : \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$

□  $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \log_a\left(\frac{a}{b}\right) = \log_a a - \log_a b$

□  $\forall r \in \mathbb{Q}; \forall b \in \mathbb{R}_+^* : \log_a(b^r) = r \log_a b$

□ Soient  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $]0; +\infty[$  alors

$$\log_a(x_1 x_2 \dots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \dots + \log_a(x_n) \text{ c.-à-d. : } \log_a\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{k=1}^n \log_a(x_k)$$

## 3) Etude de la fonction $\log_a$

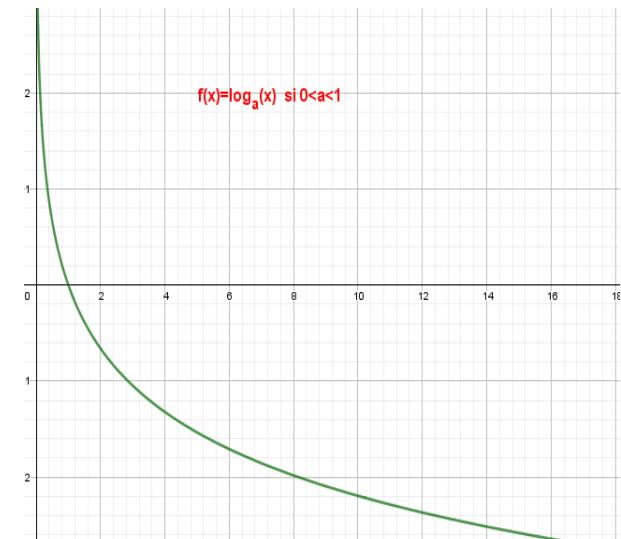
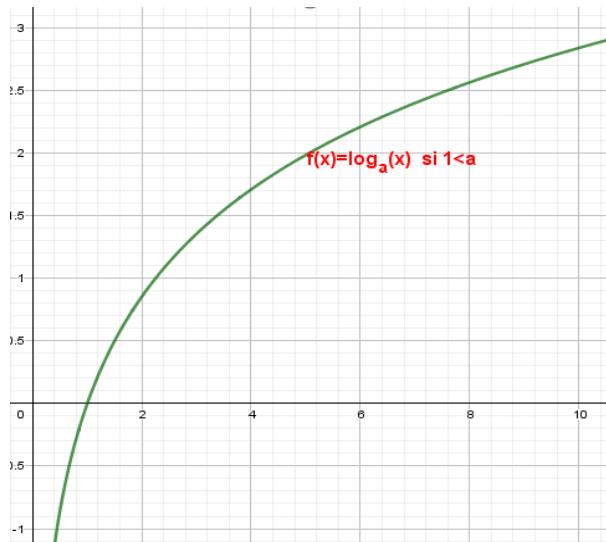
On a la fonction  $\log_a$  est définie sur  $]0; +\infty[$  et on a  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$

## Cours

	$x$	0	1	e	$+\infty$
Si $a > 1$	$\log'(x)$			+	
Si $a > 1$	$\log_a$	$-\infty$	0		$+\infty$

	$x$	0	1	e	$+\infty$
Si $0 < a < 1$	$\log'(x)$			-	
Si $0 < a < 1$	$\log_a$	$+\infty$	0		$-\infty$

La représentation graphique :



### 4) Cas particulier : fonction logarithme décimal

#### Propriété

la fonction logarithme de base 10 s'appelle fonction logarithme décimal, et notée  $\log_{10}$  ou  $\log$ .

**Remarque :**  $\log 1 = 0$  ;  $\log 10 = 1$  ;  $\forall r \in \mathbb{Q}; \log(10^r) = r$

**Application :** calculer  $\log(100)$  ;  $\log(1000)$  ;  $\log(0,01)$  ;  $\log(0,0$

### Exercice 1

#### Déivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 & \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ .

Calculer  $g(0)$  et en déduire que sur  $\mathbb{R}^+$  :  $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ .

- b. Par une étude analogue, montrer que si  $x \geq 0$ , alors  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ .

- c. Établir que pour tout  $x$  strictement positif on a :  $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$ .

En déduire que  $f$  est dérivable en zéro et que  $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ .

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

- b. Montrer que sur  $[0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ .

- c. Dresser le tableau de variation de  $f$  en précisant la limite de  $f$  en  $+\infty$

#### Correction

1.  $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 & \end{cases}$ ;  $f$  est continue en 0 ssi

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , or le cours donne justement la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right)$$

$$2. a. \quad = \frac{1 - 1 - x + x + x^2 - x^2 - x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0$$

Donc  $g$  est décroissante et comme  $g(0)=0$ , on a

également  $g(x) \leq 0$ , soit  $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ .

b. On prend

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0 \end{aligned}$$

$k(0) = 0$  donc  $k(x) \geq 0$ , soit  $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$ .

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

$$c. \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) - x \geq -\frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$$

## Exercices résolus

$f$  dérivable en zéro : on calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} ; \text{ or}$$

le résultat précédent montre que cette limite est

précisément  $-\frac{1}{2}$  qui est donc  $f'(0)$ .

3. a.  $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ ,

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \leq 0 ; \text{ on a}$$

$h(0) = 0$  et  $h$  décroissante donc  $h(x) \leq 0$ .

b.  $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \leq 0$ .

c.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

### Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction  $f$ .

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$ .

1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ . Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$ .
2. Etudier le signe de  $g'(x)$  selon les valeurs de  $x$ . Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ . Déterminer la limite de  $g$  en 0.
3. Dresser le tableau des variations de  $g$ .
4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Vérifier que  $0,5 < \alpha < 0,6$ . Déduire des questions précédentes le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

*On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction  $g$ .*

#### Partie B : Etude de la fonction $f$

1. a. Calculer la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $xf(x)$  (on pourra poser  $X = \frac{1}{x^2}$ ).

- b. En déduire que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a  $f'(x) = g(x)$ . Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

2. Etude de  $f$  en 0

- a. Montrer que  $x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures. Que peut-on en

## Exercices résolus

conclure ?

- b. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
- c. Préciser la tangente à la courbe de  $f$  au point O.
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Donner l'allure de (C).

1. a.  $g$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet,  $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que  $-\frac{2}{x^2+1}$ .

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{2x}{x^4} + \frac{2 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^3} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2+1)+4x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

b. Le signe de  $g'(x)$  est celui de

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ . Comme  $g'$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a : si  $0 < x < 1$ ,  $g'(x)$  est négatif ; si  $x > 1$ ,  $g'(x)$  est positif.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+1}$  ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+1}$  ;

5. Pour  $0 < x < \alpha$ , alors  $g(x)$  est positif ; pour  $x > \alpha$  alors  $g(x)$  est négatif.

### Correction

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \text{ avec } X = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+1} = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

4. a.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-0,3	0

$$g(1) = \ln(1 + \frac{1}{1^2}) - \frac{2}{1^2 + 1} = \ln 2 - 1 \approx -0,3.$$

4. b. La fonction est continue et dérivable sur  $]0 ; 1]$ ,

de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur  $\alpha > 0$  telle que  $g(\alpha) = 0$ .

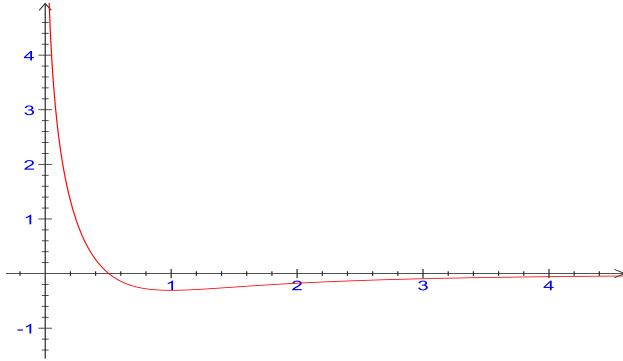
On a  $g(0,5) \approx 0,009438$  et  $g(0,6) \approx -0,141452$  donc

$g(0,5) > 0 = g(\alpha) > g(0,6)$  et comme  $g$  est

décroissante,  $0,5 < \alpha < 0,6$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2 + 1) = 0 \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x^2 + 1) = \ln 1 = 0.$$

## Exercices résolus



1. a.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (\text{cours}). \end{aligned}$$

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

2.  $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x^2})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{-2x}{x^4} = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{-2}{x^3} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1} = g(x) \end{aligned}$$

$X$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$

3. a.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x^2 + 1) - x \ln x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x^2 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x^{-1}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln \frac{1}{x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0^- \end{aligned}$$

avec  $X = \frac{1}{x}$

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ .

b.  $f$  dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

c. La tangente en O à  $f$  est verticale. Son équation est  $x = 0$ .

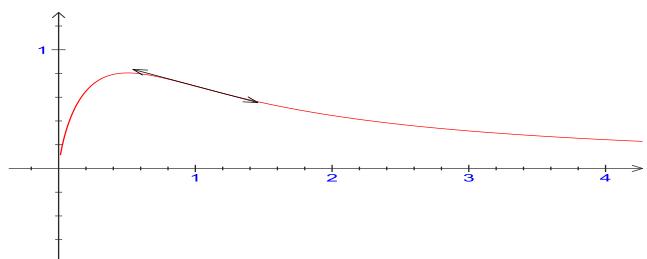
4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) : f(1) = 1 \ln\left(1 + \frac{1}{1^2}\right) = \ln 2,$$

$$f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1 \text{ d'où}$$

$$y = (\ln 2 - 1)(x - 1) + \ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2 - 1)x + 1.$$

5.



Remarque :

On a vu dans la partie A que  $g'(1) = 0$ , or  $g'(1) = f''(1)$ , c'est-à-dire la dérivée seconde de  $f$  en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour  $x = 1$

## Exercices résolus

### Exercice 3

### Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation :  $\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6)$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système :  $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$ .
4. Résoudre l'inéquation :  $\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$ .
5. Résoudre :  $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ .
6. Résoudre :  $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$ .

### CORRECTION

1. Domaine de définition :

$$D_1 = \left[ -\infty; \frac{3-\sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[ \frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty \right], \text{ par ailleurs}$$

$2x - 6 > 0$  si et seulement si  $x > 3$ . On a donc

$$D_f = D_1 \cap [3; +\infty[ = \left[ \frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty \right] \text{ car}$$

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3,56.$$

Pour la résolution :  $\ln a = \ln b$  équivaut à  $a = b$  donc,

l'équation devient :  $x^2 - 3x - 2 = 2x - 6$  ou

encore  $x^2 - 5x + 4 = 0$  d'où les solutions 1 et 4 ; mais seule 4 est valable.

2.

$$\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln \frac{x}{y} = \ln e \\ x + y = 2e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ye \\ ye + y = 2e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2e}{1+e} \\ x = \frac{2e^2}{1+e} \end{cases}$$

Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

3. Attention à l'ensemble de définition :

$$1+x > 0, 1-x > 0, 2x > 0$$

$$\Rightarrow x > -1, x < 1, x > 0 \Rightarrow x \in ]0; 1[$$

On a alors

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &> \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{1+x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0 \end{aligned} .$$

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur

$]0; 1[$ , la solution est donc l'intervalle  $]0; 1[$ .

4.  $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$  : il faut que  $x > -3$  et que  $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) > 0$  (à l'extérieur des racines) donc  $D = ]-3; +\infty[$ .

$$1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \ln e + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow \ln e(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow e(x+3) = x^2 + 2x - 3.$$

Il est une bijection :  $x^2 + (2-e)x - 3(1+e) = 0$ ,

$$\Delta = (2-e)^2 + 12(1+e) = 4 - 4e + e^2 + 12 + 12e = e^2 + 8e + 16 = (e+4)^2.$$

$$x = \frac{-(2-e) \pm (e+4)}{2}, x_1 = -3 \notin D \text{ o } x_2 = e+1 \in D.$$

$$S = \{e+1\}.$$

## Exercices résolus

5.  $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$  Il faut que  $x^2 - 4e^2 > 0$  et que  $3x > 0$  i.e.  $x > 0$  et  $x^2 > 4e^2$  c'est-à-dire ( $x > 0$ ) et ( $x > 2e$  ou  $x < -2e$ ).

$$D = ]2e ; +\infty[.$$

$$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln e + \ln(3x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \Leftrightarrow (E) x^2 - 3ex - 4e^2 < 0.$$

$$\Delta = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2 = (5e)^2, x = \frac{3e \pm 5e}{2};$$

$$(E) \Leftrightarrow -e < x < 4e. S = ]2e ; 4e[.$$

## Exercices et problèmes

Vrai-Faux

A) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$ ,  $D$  son ensemble de définition et  $C$  sa courbe représentative.

- a. On a  $D = ]0, +\infty[$ .
- b. La courbe  $C$  admet une droite asymptote en  $+\infty$ .
- c. Pour tout  $x \in D$ , on a :  $f(x) < \frac{x}{2}$ .
- d. Pour tout  $x \in D$ , on a :  $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$ .

QCM

(choisir la bonne réponse)

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  respectivement définies par :

$$f(x) = -2\ln(x) + 2 + x^2 \text{ et } g(x) = \frac{-x^2 - 2\ln(x)}{x}.$$

1. La dérivée de  $f$  est définie par :  $f'(x) =$

A. $\frac{2x^2 - 2}{x}$	B. $\frac{2x^2 + 2}{x}$	C. $\frac{-2x^2 - 2}{x}$	D. aucune des 3 réponses précédentes
-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------------------

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 2 est :

A. $y = f'(x)(x - 2) + f(2)$	B. $y = f'(x)(x - 2) - f(2)$	C. $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$	D. $y = f(2)(x - 2) + f'(2)$
------------------------------	------------------------------	------------------------------	------------------------------

3. La dérivée de  $g$  est définie par :  $g'(x) =$

A. $-2x - \frac{2}{x}$	B. $\frac{f(x)}{x^2}$	C. $-\frac{f(x)}{x^2}$	D. aucune des 3 réponses précédentes
------------------------	-----------------------	------------------------	--------------------------------------

4. Le minimum de  $f$  est égal à :

A. 1	B. 3	C. 0	D. aucune des 3 réponses précédentes
------	------	------	--------------------------------------

5.  $f(\sqrt{e}) =$

A. $e$	B. $e+1$	C. $e-1$	D. aucune des 3 réponses précédentes
--------	----------	----------	--------------------------------------

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

A. 0	B. 2	C. $-\infty$	D. $+\infty$
------	------	--------------	--------------

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) =$

A. $-\infty$	B. $+\infty$	C. n'existe pas	D. aucune des 3 réponses précédentes
--------------	--------------	-----------------	--------------------------------------

8. L'asymptote oblique à la courbe  $C_g$  représentative de  $g$  a pour équation réduite :

A. $y = -x - 2$	B. $y = -x$	C. $y = x + 2$	D. $y = x$
-----------------	-------------	----------------	------------

10. Le nombre de solutions à l'équation  $g(x) = 0$  est égal à :

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3
------	------	------	------

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

1. Soit  $f(x) = \frac{\cos(\pi x^2 - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}}{x-1}$ ; calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

2.  $f(x) = \ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right)$ ; calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

3.  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3}{e^x}\right)$ ; calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{2x}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

### Exercice 2

1. Résoudre dans IR l'équation

$$\ln(x^2 - 3x - 2) = \ln(2x - 6).$$

2. Résoudre l'inéquation :  $e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e$ .

3. Résoudre dans IR le système :  $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ x + y = 2e \end{cases}$ .

4. Résoudre l'inéquation :

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x).$$

5. Résoudre :  $1 + \ln(x+3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$ .

6. Résoudre :  $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$ .

### Exercice 3 [Dérivation et encadrement]

Le plan P est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. On considère la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en 0.

b. Par une étude analogue, montrer que si

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction  $g$

définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$g(x) = \ln(1+x) - \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).$$

Calculer  $g(0)$  et en déduire que sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\ln(1+x) \leq \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).$$

$$x \geq 0, \text{ alors } \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

c. Établir que pour tout  $x$  strictement positif on a

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}.$$

En déduire que  $f$  est dérivable en zéro et que

$$f'(0) = -\frac{1}{2}$$

3. a. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x).$$

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

b. Montrer que sur  $[0, +\infty[, f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ .

c. Dresser le tableau de variation de  $f$  en précisant la limite de  $f$  en  $+\infty$

### Exercice 4

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle

$$]0; +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}.$$

On note C la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

## Exercices et problèmes

1. Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
  2. En remarquant que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f(x)$  est égal à  $\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$ , déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  3. a. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}$ .
  - b. Étudier le signe de  $-2 + \ln x$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
En déduire le signe de  $f'$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
  4. On note  $I$  le point d'intersection de  $C$  et de l'axe  $(O ; \vec{i})$ . Déterminer les coordonnées du point  $I$ .
  5. On note  $T$  la tangente à la courbe  $C$  au point  $A$  d'abscisse 1. Déterminer une équation de la droite  $T$ .
  6. Sur la feuille de papier millimétré, tracer, dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $C$  et la droite  $T$ .  
On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe  $(O ; \vec{i})$  et 5 cm pour unité graphique sur l'axe  $(O ; \vec{j})$ .
- Partie B
1. a. On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = (\ln x)^2$ . On note  $g'$  la fonction dérivée de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

Calculer  $g'(x)$ .

b. En déduire une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

### Exercice 5

#### Partie A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x.$$

1. Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ . Étudier son signe sur  $]0 ; +\infty[$ .

2. Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

(On ne demande pas les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $g(x) < 0$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x}.$$

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c. Démontrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x + 1$  est asymptote à la courbe  $C$ .

## Exercices et problèmes

d. Étudier la position relative de C et Δ sur  $]0 ; +\infty [$ .

2. a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$ .

b. Vérifier que pour tout x de  $]0 ; +\infty [$ ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f

sur  $]0 ; +\infty [$ .

d. Calculer  $f(1)$ . En déduire le signe de f sur  $]0 ; +\infty [$ .

3. Dans le plan muni du repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , tracer la

droite  $\Delta$  et la courbe C.

### Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie sur  $]0 ; +\infty [$  par

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}(\ln x)^2 \text{ est une primitive de } f$$

sur  $]0 ; +\infty [$ .

### Exercice 6

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle

$$]0 ; +\infty [ \text{ par } g(x) = \ln x - 2x^2 - 1.$$

1. Soit  $g'$  la fonction dérivée de la fonction g. Calculer  $g'(x)$ . Étudier le signe de  $g'(x)$  sur  $]0 ; +\infty [$ . Dresser le tableau de variations de la fonction g dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (aucune limite n'est demandée).

2. Déduire du 1. que la fonction g est négative sur l'intervalle  $]0 ; +\infty [$ .

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle

$$]0 ; +\infty [ \text{ par } f(x) = 1 - 2x - \frac{\ln x}{x}.$$

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en  $+\infty$ .

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit D la droite d'équation  $y = 1 - 2x$ .

a. Démontrer que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3. a. Soit  $f'$  la fonction dérivée de la fonction f.

Démontrer que pour tout x de l'intervalle  $]0 ; +\infty [$ ,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b. En utilisant la partie A déduire le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty [$  et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer la droite D et la courbe C dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 7

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers  $+\infty$ .

« Une suite tend vers  $+\infty$  si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : Une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

## Exercices et problèmes

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$ .

La courbe (C) représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique.

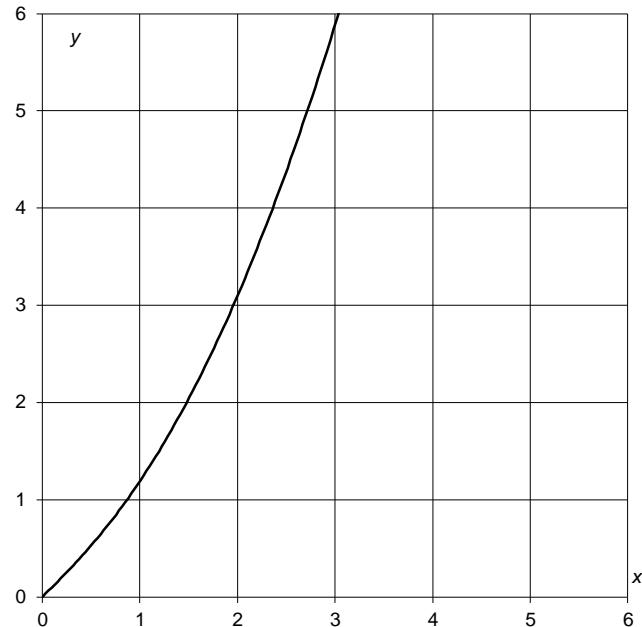
Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

### Partie C

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$  en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son comportement lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?
3. a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$ .

- b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- c. Montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.
- d. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .



### Exercice 8

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction  $\ln$  est définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , positive sur  $[1; +\infty[$ , et vérifie :

- \*  $\ln 1 = 0$  ;
  - \* pour tous réels strictement positifs  $x$  et  $y$ ,  
 $\ln(xy) = \ln x + \ln y$  ;
  - \* pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$  ;
  - \*  $\ln(2) \approx 0,69$  à  $10^{-2}$  près.
1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ .

## Exercices et problèmes

a. Étudier les variations de  $f$  et en déduire que  $f$  admet un minimum sur  $]0; +\infty[$ .

b. En déduire le signe de  $f$  puis que, pour tout  $x > 1$ ,

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}.$$

c. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f_n$ .

### Exercice 9

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle

$$]-1; +\infty[ \text{ par } f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe  $C$  représentative de  $f$  est donnée sur la figure ci-dessous que l'on complétera.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe C

1. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . Calculer

$f'(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-1; +\infty[$ .

2. Pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-1; +\infty[$ , on pose

$$N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x).$$

Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur  $]-1; +\infty[$ .

Calculer  $N(0)$ . En déduire les variations de  $f$ .

3. Soit  $D$  la droite d'équation  $y = x$ . Calculer les

Coordonnées du point d'intersection de la courbe  $C$  et de la droite  $D$ .

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction  $f$

1. Démontrer que si  $x \in [0; 4]$ , alors

$$f(x) \in [0; 4]$$

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de IN.}$$

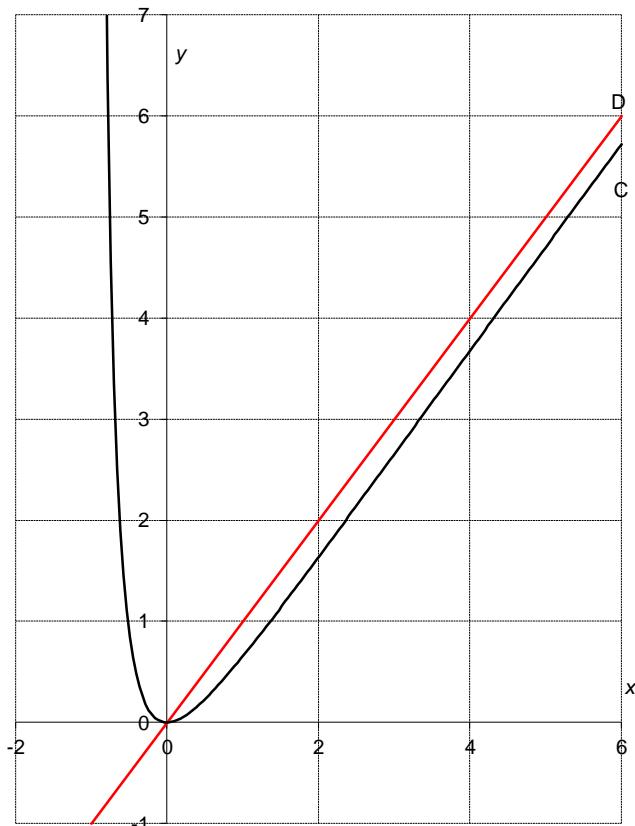
a. Sur le graphique, en utilisant la courbe  $C$  et la droite  $D$ , placer les points de  $C$  d'abscisses  $u_0, u_1, u_2$  et  $u_3$ .

b. Démontrer que pour tout  $n$  de IN on a :  $u_n \in [0; 4]$ .

c. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

d. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On désigne par  $l$  sa limite.

e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de  $l$ .



## Exercices et problèmes

### Exercice 10

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle

$$[0 ; +\infty[ \text{ par : } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A

1. a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Que peut-on en déduire pour la fonction  $f$  ?
- b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. a. Étudier la dérивabilité de  $f$  en 0.
- b. Montrer que  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$ .
3. Étudier le sens de variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ , puis dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . Déterminer une valeur approchée décimale de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

#### Partie B

1. Calculer une équation de la tangente  $D$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse  $x = 1$ .
2. On considère la fonction  $g : x \mapsto f(x) - 2x - \frac{1}{2}$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
  - a. Calculer  $g'(x)$ , puis  $g''(x)$  où  $g'$  et  $g''$  désignent respectivement les fonctions dérivées première et seconde de  $g$ . Étudier le sens de variations de  $g'$ . En déduire le signe de  $g'(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

- b. Étudier le sens de variations de  $g$ . En déduire la position de la courbe  $C$  par rapport à la tangente  $D$ .
3. Construire la courbe  $C$  et la tangente  $D$  (unité graphique : 2 cm).

### Exercice 11

#### Partie A

Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x .$$

1. Étudier les variations de  $u$  sur  $]0 ; +\infty[$  et préciser ses limites en 0 et en  $+\infty$ .

2. a. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  admet une solution unique sur  $]0 ; +\infty[$ . On note  $\alpha$  cette solution.

- b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

3. Déterminer le signe de  $u(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

4. Montrer l'égalité :  $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$ .

#### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur

$$]0 ; +\infty[ \text{ par } f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2 .$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

1. Exprimer, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x)$  en fonction de  $u(x)$ .
2. En déduire les variations de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

## Exercices et problèmes

### Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé

$(O ; \vec{i}, \vec{j})$  on note :

\*  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $\ln$

(logarithme népérien) ;

\*  $A$  le point de coordonnées  $(0 ; 2)$  ;

\*  $M$  le point de  $\Gamma$  d'abscisse  $x$ ,  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$ .

1. Montrer que la distance  $AM$  est donnée par

$$AM = \sqrt{f(x)}.$$

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = \sqrt{f(x)}.$$

a. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations sur  $]0; +\infty[$ .

b. Montrer que la distance  $AM$  est minimale en un point de  $\Gamma$ , noté  $P$ , dont on précisera les coordonnées.

c. Montrer que  $AP = \alpha\sqrt{1+\alpha^2}$ .

3. La droite  $(AP)$  est-elle perpendiculaire à la tangente à  $\Gamma$  en  $P$  ?

#### Exercice 12

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par :

$$\begin{cases} f(0) = 0, f(1) = 0, \\ f(x) = (\ln x) \times \ln(1-x), x \in ]0; 1[. \end{cases}$$

On note  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique : 10 cm).

On admet que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ , ainsi que

le résultat suivant : pour  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0$ .

### Partie A - Étude de la fonction $f$

1. a. Déterminer la limite quand  $x$  tend vers 0 de

$$\text{l'expression } \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

b. En déduire la limite quand  $x$  tend vers 0 de

l'expression  $\frac{f(x)}{x}$  ; que peut-on en déduire pour la courbe  $C$  ?

2. Montrer que pour tout  $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ ,

$f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(\frac{1}{2}+x\right)$ . Que peut-on en conclure pour  $C$  ?

3. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0 ; 1[$  par :

$$\varphi(x) = (1-x)\ln(1-x) - x \ln x.$$

a. Déterminer  $\varphi'(x)$ , puis montrer l'égalité

$\varphi''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$  ; en déduire les variations de  $\varphi'$  sur  $]0 ; 1[$ .

b. Montrer que  $\varphi'$  s'annule en deux valeurs  $a_1$  et  $a_2$  sur  $]0 ; 1[$  (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs).

Donner le signe de  $\varphi'$  sur  $]0 ; 1[$ .

c. Déterminer la limite quand  $x$  tend vers 0 de  $\varphi(x)$  et la limite quand  $x$  tend vers 1 de  $\varphi(x)$ . Calculer

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ . En déduire le signe de  $\varphi(x)$  sur  $]0 ; 1[$ .

4. a. Montrer que  $f'(x)$  a même signe que  $\varphi(x)$  sur  $]0 ; 1[$ .

b. Donner le tableau de variations de  $f$ .

c. Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; 1[$ , les inégalités

## Exercices et problèmes

suivantes sont vraies :  $0 < (\ln x) \times \ln(1-x) \leq (\ln 2)^2$

d. Tracer C .

### Exercice 13

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère

orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2 cm).

1. Soit  $u$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$

$$\text{par } u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x .$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction  $u$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  .

b. Calculer  $u'(1)$  et en déduire le signe de  $u'(x)$

pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  .

2. Étude de la fonction  $f$

a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  .

b. Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et construire le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à la courbe (C).

b. Déterminer la position de (C) par rapport à  $(\Delta)$  .

c. Tracer la courbe (C) et la droite  $(\Delta)$  .

### Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  .

On considère la fonction  $f$  , définie sur l'intervalle

$]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2$ .

On note (C) sa courbe représentative.

1. a. Résoudre dans  $]0 ; +\infty[$  l'équation  $f(x) = 0$ . (On pourra poser  $\ln x = X$ ).

b. Résoudre dans  $]0 ; +\infty[$  l'inéquation  $f(x) > 0$ .

2. a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$  .

b. Calculer  $f'(x)$ .

c. Étudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse  $e^{\frac{5}{4}}$  .

4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Pour cela, on considère la fonction  $\varphi$  , définie sur

$$]0 ; +\infty[ \text{ par : } \varphi(x) = f(x) - \left( 4e^{-\frac{5}{4}}x - \frac{41}{8} \right).$$

a. Montrer que  $\varphi'(x) = \frac{4\ln x - 1}{x} - 4e^{-\frac{5}{4}}$  puis calculer  $\varphi''(x)$  .

b. Étudier le sens de variation de  $\varphi'$  sur  $]0 ; +\infty[$  . En déduire que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$  , on a  $\varphi'(x) \leq 0$  .

c. Calculer  $\varphi\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$  . Pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$

déterminer le signe de  $\varphi(x)$  . En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

5. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm).

## Exercices et problèmes

### Exercice 15

On désigne par  $a$  un réel de l'intervalle  $]0; \pi[$  et on considère la famille de fonctions numériques  $f_a$  définies par :  $f_a(x) = \ln(x^2 - 2x \cos a + 1)$ .

On appelle  $C_a$  la représentation graphique de  $f_a$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrez que l'ensemble de définition de  $f_a$  est  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminez les limites de  $f_a$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Montrez que la droite d'équation  $x = \cos a$  est axe de symétrie de  $C_a$ .
4.  $a$  et  $a'$  étant deux réels distincts, montrez que  $C_a$  et  $C_{a'}$  sont sécantes en un unique point que l'on précisera.
5. Calculez  $f'_a(x)$  et déduisez-en son sens de variation.
6. Donnez l'allure des courbes  $C_a$ .

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = \mathbb{R} - \{3\}$  par  $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.  $C$  est la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité 1 cm).

1. a. Vérifier que si  $x \in D$  alors  $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$ .
  - b. Pour  $x$  appartenant à  $D$ , calculer  $f''(x)$  où  $f''$  désigne la dérivée seconde de  $f$ . En déduire les variations de  $f''$ .
  - c. Calculer les limites de  $f''$  en  $-\infty$  et en 3.
2. a. Montrer que  $f''$  s'annule sur  $]-\infty; 3[$  pour une

seule valeur  $\alpha$ . Donner un encadrement de  $\alpha$

d'amplitude 0,1. Etudier le signe de  $f''(x)$  sur  $]-\infty; 3[$

- b. Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]3; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
2. Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D$ . Préciser les asymptotes éventuelles à  $C$ .
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de  $C$  et de l'axe des abscisses.
4. Tracer la courbe  $C$ .

### Exercice 17

#### Première partie

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur

$$[0; +\infty[ \text{ par : } \begin{cases} f(x) = x \ln \frac{x+2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que  $f$  est continue en 0.
  - b.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
  - c. On pose  $h = \frac{2}{x}$  avec  $(x > 0)$ . Trouver la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. a. Pour  $x > 0$  calculer  $f'(x)$  et  $f''(x)$  et vérifier que  $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$ .
  - b. Etudier le sens de variation de  $f'(x)$  et trouver la limite de  $f'(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire le signe de  $f'(x)$ .
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f(x)$ .
3. On appelle  $C$  la courbe représentative de  $f(x)$  (unités : 4 cm). Tracer  $C$  en indiquant la tangente en O

## Exercices et problèmes

et au point A d'abscisse 2.

4. Soit  $u$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$u(x) = \frac{2x}{x+2} \text{ et } H \text{ sa représentation graphique dans le}$$

même repère que C.

a. Dresser le tableau de variation de  $u$  et vérifier que pour tout  $x > 0$  on a  $f(x) - u(x) = xf'(x)$ .

En déduire la position relative de C et H. Tracer H en indiquant le point B d'abscisse 2.

b.  $\lambda$  étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à C au point d'abscisse  $\lambda$  rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée  $u(\lambda)$ . En déduire à l'aide du tracé de H la construction de la tangente à C au point d'abscisse  $\lambda$ . Indiquer la construction ainsi de la tangente à C au point A.

### Deuxième partie

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions  $g$ , définies et dérivables sur  $]0, +\infty[$  et possédant la propriété suivante P :

$$g(x) - x g'(x) = \frac{2x}{x+2} \text{ . } g \text{ étant définie et dérivable sur}$$

$$]0, +\infty[ \text{ on pose } G(x) = \frac{g(x)}{x} .$$

1. Montrer que  $g$  possède la propriété P si et seulement

$$\text{si } G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} .$$

2. En déduire l'ensemble (E).

### Exercice 18

1. La fonction  $g$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6 .$$

En utilisant les variations de  $g$ , déterminer son signe suivant les valeurs de  $x$ .

2. La fonction numérique  $f$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1 .$$

a. Démonstration de cours : démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 .$$

b. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$  (en  $+\infty$ , on pourra poser  $X = \sqrt{x}$ ).

c. Utiliser la question 1. pour déterminer le sens de variation de  $f$ .

3. Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x - 1$  et C la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé du plan. Montrer que  $\Delta$  est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. Construire C et  $\Delta$ .

### Exercice 19

Soit  $k$  un nombre réel. On considère la fonction  $f_k$  définie sur  $[0 ; 1]$  par

$$f_k(x) = x(\ln x)^2 + kx \text{ si } x > 0 \text{ et } f_k(0) = 0 .$$

On note  $C_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans le plan rapporté au repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 10 cm).

On note I, J et L les points de coordonnées respectives  $(1 ; 0)$ ,  $(0 ; 1)$  et  $(1 ; 1)$ .

Première partie : Étude des fonctions  $f_k$

## Exercices et problèmes

### A. Étude et représentation de $f_0$

Dans cette question  $k = 0$ .

#### 1. Signe de la dérivée

- a. Calculer la dérivée  $f'_0$  de  $f_0$  sur  $]0 ; 1]$  et montrer que  $f'_0(x)$  peut s'écrire  $f'_0(x) = (\ln x)(\ln x - 2)$ .

- b. Déterminer les solutions de l'équation  $f'_0(x) = 0$  sur  $]0 ; 1]$ .

- c. Étudier le signe de  $f'_0$  sur  $]0 ; 1]$ .

#### 2. Étude à l'origine

- a. Déterminer la limite de  $\frac{\ln u}{\sqrt{u}}$ , puis de  $\frac{(\ln u)^2}{u}$

lorsque  $u$  tend vers  $+\infty$ .

- b. En déduire que  $x(\ln x)^2$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, puis que  $f_0$  est continue en 0.

- c. Déterminer la limite de  $\frac{f_0(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers 0.

En déduire la tangente en O à la courbe  $C_0$ .

#### 3. Tracé de la courbe $C_0$

- a. Dresser le tableau des variations de  $f_0$ .

- b. Tracer la courbe  $C_0$ .

### B. Étude de $f_k$

#### 1. Dérivée de $f_k$

- a. Calculer  $f'_k(x)$  sur  $]0 ; 1]$ .

- b. Soit  $A_k$  le point de  $C_k$  d'abscisse 1. Montrer que la tangente  $T_k$  à  $C_k$  au point  $A_k$  est la droite  $(OA_k)$ .

#### 2. Étude à l'origine

- a. Établir que  $f_k$  est continue en 0.

- b. Déterminer la tangente à  $C_k$  en O.

On ne demande pas d'étudier les variations de  $f_k$ .

### C. Étude et représentation de $f_1$ et $f_{\frac{1}{2}}$

#### 1. Étude de $f_1$ et tracé de $C_1$

- a. Prouver que, pour tout  $x$  de  $]0 ; 1]$ ,

$$f'_1(x) = (\ln x + 1)^2.$$

- b. Déterminer la position relative des courbes  $C_0$  et  $C_1$ .

- c. Établir le tableau de variation de  $f_1$  et tracer  $C_1$  sur le même graphique que  $C_0$  en précisant le coefficient directeur de la tangente  $T_1$  à  $C_1$  au point  $A_1$ .

#### 2. Étude de $f_{\frac{1}{2}}$ et tracé de $C_{\frac{1}{2}}$

- a. Prouver que, pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{f_0(x) + f_1(x)}{2}.$$

- b. En déduire une construction de  $C_{\frac{1}{2}}$  à partir de  $C_0$  et

$C_1$  et tracer  $C_{\frac{1}{2}}$  sur le même graphique que  $C_0$  et  $C_1$  en précisant la tangente  $T_{\frac{1}{2}}$  à  $C_{\frac{1}{2}}$  au point  $A_{\frac{1}{2}}$ .

### Exercice 20 (Famille fonctions)

Pour tout nombre réel  $k$  strictement positif, on

considère la fonction  $f_k$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

par :  $f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f_k$  en 0.

2. On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ . Démontrer que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ . En déduire la limite de la fonction  $f_k$  en  $+\infty$ .

3. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  strictement

## Exercices et problèmes

positif,  $f'_k(x) = \frac{1-2kx^2}{x}$ .

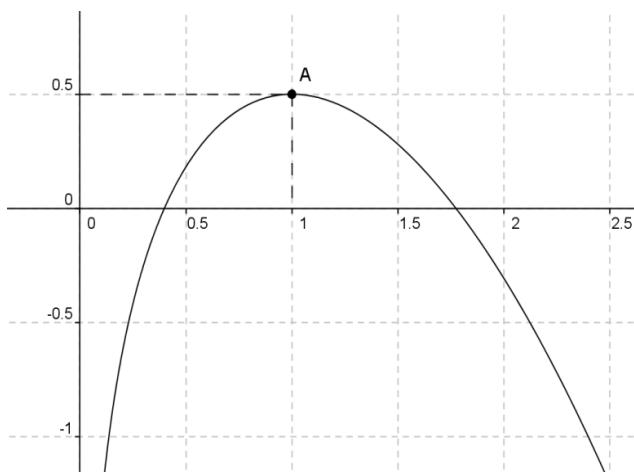
4. donner le tableau de variations de  $f_k$

5. On a tracé ci-dessous la courbe  $C_k$  représentative d'une fonction  $f_k$  pour une certaine valeur du nombre réel  $k$  strictement positif. Le point  $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$

appartient à la courbe  $C_k$ .

Quelle est la valeur du nombre réel  $k$  correspondant ?

Justifier la démarche.



### Exercice 21

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par

$f(x) = 1 + \ln(1+x)$ . On note  $C_f$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $D$  la droite d'équation  $y = x$ .

#### Partie A

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$ .
- b. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ .

b. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ . En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

c. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .

d. Montrer que sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$  l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ ,

avec  $\alpha$  négative et  $\beta$  appartenant à l'intervalle  $[2 ; 3]$ .

e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de  $g(x)$ . En déduire la position relative de la courbe  $C_f$  et de la droite  $D$ .

### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout nombre entier naturel  $n$  par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $2 \leq u_n \leq \beta$ .
2. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Justifier la réponse

### Exercice 22

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

1. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

2. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et calculer  $f'(x)$ .

3. Soit  $u$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $u(x) = \ln x + x - 3$ .

## Exercices et problèmes

- a. Etudier les variations de  $u$ .
- b. Montrer que l'équation  $u(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[2 ; 3]$ . Montrer que  $2,20 < \alpha < 2,21$ .
- c. Etudier le signe de  $u(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
4. a. Etudier les variations de  $f$ .
- b. Exprimer  $\ln_\alpha$  comme un polynôme en  $\alpha$ . Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ . En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $2 \times 10^{-2}$
5. a. Etudier le signe de  $f(x)$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
- b. Tracer la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm.

### Exercice 23

$f$  est la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

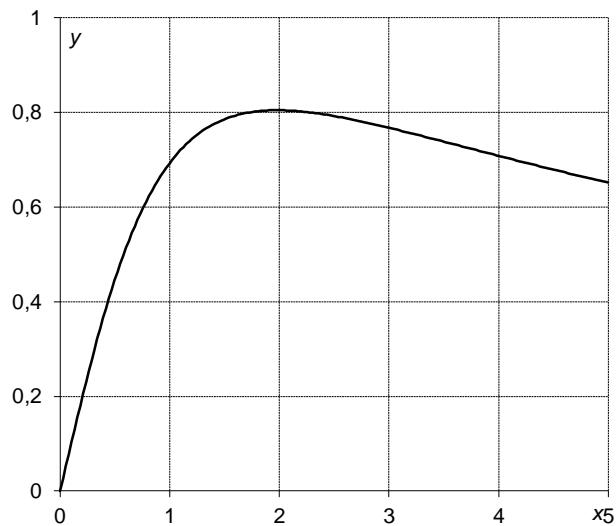
1. Montrer que l'on a, pour tout réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,
- $$f'(x) = \frac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}.$$
2. La fonction  $\varphi$  est définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $\varphi(x) = x + 1 + \ln x$ . Etudier ses variations, en déduire que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$ . Etudier le signe de  $\varphi$ .
3. En déduire les variations de  $f$ , étudier les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une solution unique que l'on notera  $\alpha_n$ . On cherche maintenant à étudier la

suite  $(\alpha_n)$ .

5. Montrer que, pour tout entier  $n > 0$ ,  $f(e^n) < n$ . En déduire que  $\alpha_n > e^n$  et la limite de  $(\alpha_n)$
6. Prouver que la relation  $f(\alpha_n) = n$  peut se mettre sous la forme  $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$ .
- En déduire la limite de  $\frac{\alpha_n}{e^n}$ .

### Exercice 24

La fonction  $f$  est définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(0) = 0$  et si  $x > 0$ ,  $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ . Sa courbe dans le plan rapporté à un repère d'origine  $O$ , est donnée ci-dessous.



1. Montrer que, pour tout réel positif  $t$ ,  $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ . En déduire la continuité de  $f$  en 0.
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ . En déduire la dérivation de  $f$  en 0.

## Exercices et problèmes

### Exercice 25

A. On considère la fonction  $f_1$  définie sur  $]0 ; +\infty[$

par  $f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ , et on appelle  $(C_1)$  sa courbe

représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unité 2 cm sur  $(Ox)$ , 10 cm sur  $(Oy)$ .

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ . Que peut-on en déduire pour  $(C_1)$  ?

2. Etudier les variations de  $f_1$ , donner son tableau de variation.

3. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $(C_1)$  en son point d'abscisse 1.

B. On considère la fonction  $f_2$  définie sur  $]0 ; +\infty[$

par  $f_2(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2}$ , et on appelle  $(C_2)$  sa courbe

représentative dans même repère que  $(C_1)$ .

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ . Que peut-on en déduire pour  $(C_2)$  ?

2. Etudier les variations de  $f_2$ , donner son tableau de variation.

3. Etudier le signe de  $f_1(x) - f_2(x)$ , en déduire la position relative de  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

4. Tracer  $T$ ,  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

### Exercice 26

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 on considère la

fonction  $f_n$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{1+n \ln x}{x^2}$ .

#### Partie A

I. Etude des fonctions  $f_n$

1. Calculer  $f'_n(x)$  et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est  $n-2-2n \ln x$ .

2. Résoudre l'équation  $f'_n(x) = 0$ . Etudier le signe de  $f'_n(x)$ .

3. Déterminer les limites de  $f_n$  en  $+\infty$  et en 0.

4. Etablir le tableau de variation de  $f_n$  et calculer sa valeur maximale en fonction de  $n$ .

II. Représentation graphique de quelques fonctions  $f_n$ .

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 5 cm. On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans ce repère.

1. Tracer  $C_2$  et  $C_3$ .

2. Calculer  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ . Cette différence est-elle dépendante de l'entier  $n$ .

3. Expliquer comment il est possible de construire la courbe de  $C_4$  à l'aide de  $C_2$  et  $C_3$ . Tracer  $C_4$ .

#### Partie B : Etude sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ de l'équation $f_n(x) = 1$

Dans toute la suite on prendra  $n \geq 3$ .

1. Vérifier que pour tout  $n$ ,  $e^{\frac{n-2}{2n}} > 1$  et  $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right) > 1$ .

En déduire que l'équation  $f_n(x) = 1$  n'a pas de

solution sur l'intervalle  $\left]1; e^{\frac{n-2}{2n}}\right]$ .

2. On pose pour  $t \geq 1$ ,  $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$ . Etudier les variations de  $\varphi$ .

En déduire que pour tout  $t$  appartenant à  $]1 ; +\infty[$ ,

## Exercices et problèmes

$\varphi(t) \leq \frac{1}{e}$  puis que pour tout  $n \geq 3, f_n(n) < 1$ .

3. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  a exactement une

solution  $\alpha_n$  sur  $\left] e^{\frac{n-2}{2n}}, n \right]$ . Combien l'équation

$f_n(x) = 1$  a-t-elle de solutions sur  $]0, +\infty[$  ?

Calculer  $f_n(\sqrt{n})$  et montrer que pour tout  $n \geq e^2$ ,

$f_n(\sqrt{n}) > 1$ . En déduire que pour  $n \geq 8$  on a

$\sqrt{n} < \alpha_n < n$  et donner la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

### Exercice 27

On appelle  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}.$$

1. Déterminer la dérivée de  $f$ , étudier ses variations.

2. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3.  $g$  est définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ .

Déterminer la dérivée de  $g$  et étudier son signe à l'aide de la question précédente.

4. Vérifier que  $g = h \circ k$ , avec

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}, k(x) = \frac{1}{x}. \text{ En déduire les limites de } g$$

en 0 et en  $+\infty$ , et dresser le tableau de variation de  $g$ .

### Exercice 28

I – Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

par :  $g(x) = x^2 - 2\ln x + 2$ .

a) Etudier les variations de la fonction  $g$

b) Calculer  $g(1)$  et en déduire le signe  $g(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

II - Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

par :  $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + x - 1$ .

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan

muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (unité : 2cm)

1°/ a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , interpréter géométriquement

le résultat obtenu

c) Montrer que, pour tout réel  $x$  strictement positif

$$, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} .$$

d) En déduire le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

2°/ a) Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b) Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $D$ .

c) Tracer  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  et  $D$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3°/ a) Montrer que  $f$  est une bijection de l'intervalle  $]0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

c) Tracer la courbe représentative  $(C')$  de  $f^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 29

Partie A :

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = ]0, +\infty[$ , par :

## Exercices et problèmes

$$g(x) = x^2 - 2 + \log(x).$$

1°/ Etudier les variations de la fonction g

2°/ Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans

$\mathbb{IR}_+^*$  une solution unique  $\alpha$ .

3°/ Vérifier que :  $\alpha \in ]1,31 ; 1,32[$

4°/ En déduire le signe de g(x) sur  $I = ]0, +\infty[$ .

Partie B :

Soit f la fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1 - \log x}{x}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ).

1°/ a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

b) Interpréter ce résultat géométriquement.

2°/ a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Montrer que f est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et déterminer  $f'(x)$ .

c) Vérifier que  $f'(x)$  à le même signe que g(x)

d) En déduire le tableau de signe de f.

e) Vérifier que :  $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha}$ .

3°/ a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 1$

est une asymptote oblique à la courbe (C).

b) Montrer que la droite  $\Delta$  coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à  $\Delta$ .

4°/ Déterminer le point de la courbe (C) où la

tangente (T) est parallèle à  $\Delta$

5°/ Construire la courbe représentative (C) de f

dans un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ).

6°/ Déterminer une primitive F de f sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1.

Partie C :

1°/ Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

a) Etudier les variations de  $\varphi$ .

b) Déduire que pour tout x de  $]0, +\infty[$ ,

$$\varphi(x) > \frac{1}{2}.$$

2°/ Soit la suite u définie sur IN par  $u_0 = 2$  et pour tout n de IN,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

a) Montrer que pour tout n de IN,  $u_n > \alpha$ .

b) Montrer que la suite u est strictement croissante

c) Montrer que, pour tout n de IN,  $u_{n+1} > \frac{1}{2} + u_n$

d) Déduire que pour tout n de IN,  $u_n > \frac{n}{2} + 2$

.Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 30

Partie A :

Soit g la fonction définie sur  $I = ]0, +\infty[$ , par :

$$g(x) = -x^2 + 1 - \log(x).$$

1°/ Etudier les variations de la fonction g

2°/ Calculer  $g(1)$

## Exercices et problèmes

3°/ En déduire que :

$$\begin{aligned} \text{Si } x > 1 &\quad \text{alors } g(x) < 0 \\ \text{Si } 0 < x < 1 &\quad \text{alors } g(x) > 0 \end{aligned}$$

### Partie B :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , par :

$$f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x}.$$

et on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans

le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique : 2cm)

1°/ a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

b) Interpréter ce résultat géométriquement.

2°/ a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3°/ a) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 3 - x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .

b) Etudier la position de la courbe  $(C)$  par rapport à  $(D)$ .

4°/ Ecrire l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $e$ .

5°/ Tracer la courbe représentative  $(C)$  de  $f$ ,  $(T)$  et

$(D)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

6°/ Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1.

### Exercice 31

I- Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = ]0, +\infty[$ , par :

$$g(x) = x + (x - 2) \ln(x).$$

1°/ a) Montrer que  $g'(x) = 2 \frac{x-1}{x} + \ln x$ .

b) En déduire que : si  $x > 1$  alors :  $g'(x) > 0$

si  $x < 1$  alors :  $g'(x) < 0$

2°/ a) Etudier les variations de  $g$ .

b) En déduire que : pour  $x > 0$ ,  $g(x) > 1$

II- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$ , par :

$$f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2.$$

1°/ a) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Vérifier que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  et dresser le

tableau de variation de  $f$ .

2°/ On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente

$(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1

b) Donner le sens de variation de la fonction  $h$

définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = x - 1 - \ln x$ .

En déduire le signe de  $h(x)$ .

c) Montrer que  $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$ .

En déduire la position de la courbe  $(C)$  par rapport à sa tangente  $(T)$ .

3°/ a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Conclure.

b) Tracer  $(T)$  et  $(C)$ .

4°/ a) Montrer que

## Exercices et problèmes

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 - x(\ln(x))^2 + 2x \ln x - x$$

est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

### Exercice 32

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]1, +\infty[$  par

$$g(x) = \frac{x}{x-1} + \ln(x-1). \text{ On note } (\Gamma) \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(unité graphique étant 2cm)

1) a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$  et que

$$g'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction  $g$

2) a) Montrer que l'équation  $g(x)=3$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]1, +\infty[$ .

b) On suppose que  $\alpha < \beta$ . Vérifier que

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

2) Etudier les branches infinies de  $(\Gamma)$ .

3) Montrer que la courbe  $(\Gamma)$  admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

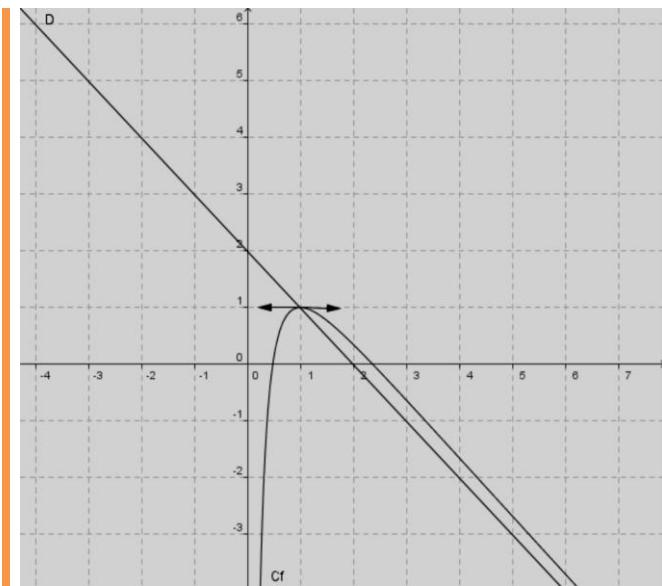
4) Tracer la courbe  $(\Gamma)$ .

### Exercice 33

On considère la fonction  $f$  dont la courbe représentative  $C$  est représentée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthogonal.

$f$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Les droites d'équations  $x=0$  et  $y=-x+2$  sont les asymptotes de  $(C)$ .



1) Sans justifier et par lecture graphique déterminer :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x - 2$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) On admet que la fonction précédente est définie pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = ax + b + \frac{\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

a) Montrer que  $f'(x) = a + \frac{1 - \ln x}{x^2}$

b) Déterminer graphiquement  $f(1)$  et  $f'(1)$ .

c) En déduire que  $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x}$ .

### Exercice 34

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}; x > -2$$

On désigne par  $\zeta_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a- Vérifier que pour tout  $x \in ]-2, +\infty[$ , on a :

## Exercices et problèmes

$$f'(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

b- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

définie sur un intervalle  $J$  à préciser.

2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $] -2, +\infty[$  par :

$$g(x) = f(x) - x$$

a- Dresser le tableau de variation de  $g$ .

b- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $] -2, +\infty[$  deux solutions  $-1$  et  $\alpha$

et que  $1.8 < \alpha < 2$ .

c- En déduire la position relative de  $\zeta_f$  et de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .

3) a- Tracer  $\Delta$  et  $\zeta_f$ , on tracera la tangente  $T$  à  $\zeta_f$  au point d'abscisse 0.

b- Tracer dans le même repère la courbe  $\zeta'$  de la fonction  $f^{-1}$ .

### Exercice 35

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[ \setminus \{1\}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  à droite en 0.

2) a- Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  ;

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

b- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  et que  $1.49 < \alpha < 1.5$

b- Monter que  $f'(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 1}{\alpha}$ .

4) a- Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $\zeta_f$  au point d'abscisse  $e$ .

b- déterminer les coordonnées du point A

intersection de  $(T)$  avec l'axe  $(0, j)$ .

5) a- Montrer que la droite  $D : y = x + 1$  est une asymptote oblique à  $\zeta_f$ .

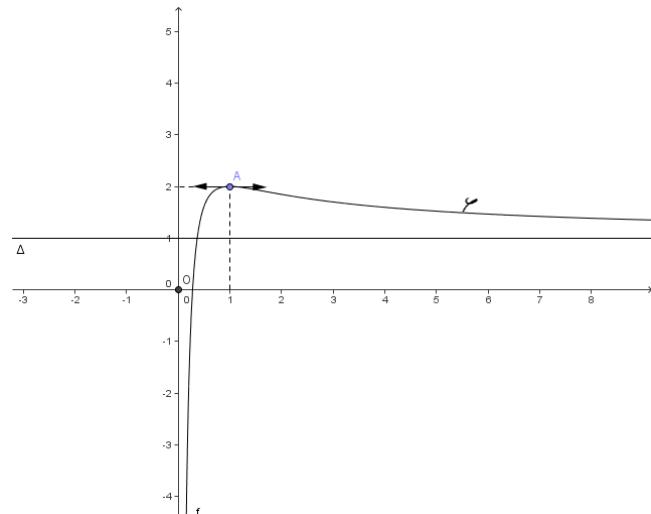
b- Tracer  $D$ ,  $(T)$  et  $\zeta_f$ .

### Exercice 36

I/ La courbe  $\zeta_f$  ci-dessous représente une fonction  $f$

définie sur  $]0, +\infty[$  ; les droites d'équation  $x = 0$

et  $y = 1$  étant des asymptotes à cette courbe



1/ En utilisant le graphique, déterminer :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Le tableau de variation de  $f$

2/ on suppose que l'expression de  $f(x)$

est de la forme  $f(x) = a + \frac{b}{x} + c \frac{\ln x}{x}$  où

$a, b$  et  $c$  sont trois nombres réels.

## Exercices et problèmes

a) Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0, +\infty[$ ,

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2} + c\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)$$

b) Montrer, en se référant au graphique, que les réels  $a, b$  et  $c$  vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=2 \\ c-b=0 \end{cases}$$

c) Déduire alors l'expression de  $f(x)$

### Exercice 37

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que  $f$  est une fonction paire.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

2)a) Montrer que  $f$  est dérivable en 0.

b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  on a :

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ f(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right]$$

3) a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction :  $t \rightarrow \ln t$ ,

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , il existe un réel

$$c \in ]x^2, 1+x^2[ \text{ tel que } \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{c}.$$

b) Déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\frac{x^2}{1+x^2} < f(x) < 1.$$

c) Déterminer alors le signe de  $f'(x)$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et

dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Tracer la courbe représentative ( $C$ ) de  $f$  relativement à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ .

a) Exprimer  $U_n$  en fonction de  $f(n)$ . Déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e.$$

c) Montrer que la suite  $U_n$  est croissante.

### Exercice 38

A/ Dans le graphique ci-contre, la courbe ( $\Gamma$ ) est celle de la fonction  $g$  définie sur  $]1, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{ax}{x-1} + b \ln(x-1)$  et la droite  $\Delta$  est d'équation  $y=x$ .

L'unique tangente horizontale à la courbe ( $\Gamma$ ) est au point A(2,2)

1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2) En se servant des valeurs de  $g(2)$  et  $g'(2)$ , montrer que  $a=b=1$

B/ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]1, +\infty[$  par :

$f(x) = x \ln(x-1)$ . On désigne par ( $C$ ) sa courbe dans un repère orthonormé  $(O', \vec{u}, \vec{v})$ .

1) Montrer que pour tout réel  $x$  de  $]1, +\infty[$  on a :

$$f'(x) = g(x).$$

2) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) Etudier la branche infinie de ( $C$ ) au voisinage de  $+\infty$ .

4) Montrer que le point I(2,0) est un point d'inflexion de ( $C$ ).

5) tracer la courbe ( $C$ ).

### Exercice 39

### Exercice 40

## Exercices et problèmes

On donne le tableau de variation de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(x+3).$$

x	-3	+∞
f'(x)	+	
f		+∞

1) Montrer que l'équation  $f(x)=x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1,2[$ .

2) Soit la suite réelle  $(u_n)$  définie sur IN par :

$$u_0=1 \text{ et } u_{n+1}=f(u_n)$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :  $1 \leq u_n \leq 2$ . (On prend  $\ln 4 \approx 1,4$  et  $\ln 5 \approx 1,6$ )

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante. (on pourra se servir du principe de récurrence)

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout  $x \in [1,2]$ , on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

b) En utilisant le théorème des accroissements finis,

montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

d) Retrouver alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

On considère la fonction f définie sur  $[0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x(2 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Montrer que f est continue à droite en 0

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3/ Etudier les variations de f et tracer  $(\zeta_f)$  dans un repère orthonormé .

4/ On considère la suite  $u_n$  définie sur IN par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

Montrer que :  $1 \leq u_n \leq e$ .

5/ Montrer que  $u_n$  est une suite croissante.

6/ En déduire que  $u_n$  est convergente et calculer sa limite.

7/ On pose :  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrer que :  $v_n = 2 - \ln u_n$  et que

$$v_{n+1} - v_n = -\ln v_n, n \in \mathbb{N}$$

En déduire que  $v_n$  est décroissante.

En déduire que  $v_n$  est convergente et calculer sa limite.

### Exercice 41

1/ Soit g la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$g(x) = -1 + x + 2\ln x$$

Etudier le sens de variation de g.

Calculer g(1) puis déterminer le signe de g(x) sur  $]0, +\infty[$ .

## Exercices et problèmes

a- En déduire que : si  $0 < x < 1$  alors  $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

$$\text{si } x > 1 \text{ alors } g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

2/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\zeta_f$  sa courbe représentative dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . "unité graphique : 2 cm"

a- Montrer que  $f$  est dérivable à droite en 0.

b- Calculer  $f'(x)$  et vérifier que pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$$

c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$

une solution unique  $\alpha$  tel que  $7/4 < \alpha < 2$ .

3/ a- Vérifier que la tangente  $\Delta$  à  $\zeta_f$  au point O a pour équation  $y = x$ .

b- Etudier la position de  $\zeta_f$  par rapport à  $\Delta$ .

c- Tracer  $\Delta$  et  $\zeta_f$ .

### Exercice 42

Dans le graphique (fig),  $\zeta_f$  désigne la courbe

représentative de  $f$  dans un R.O  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La droite  $\Delta : x = -2$  est une asymptote à la courbe  $\zeta_f$ .

1/ Donner  $f(-1)$ ;  $f'(-1)$ ;  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$  et le nombres de

solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = 0$

2/ On suppose dans la suite que pour tout  $x \in ]-2, +\infty[$ ,

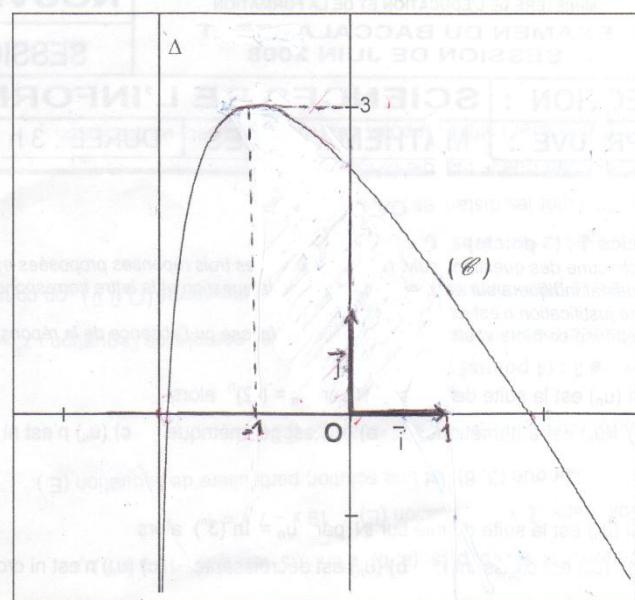
$f(x) = -2x + m + p \ln(x + 2)$ ,  $m$  et  $p \in \mathbb{R}$ .

a- Montrer que  $m = 1$ .

b- Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $p$ .

c- Montrer que  $f(x) = -2x + 1 + 2 \ln(x + 2)$

d- Etudier la position de  $\zeta_f$  par rapport à la droite  $D$  d'équation  $y = -2x + 1$ .



Figure

### Exercice 43

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle

$$I = ]0, +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1 - 2 \ln(x)$$

On désigne par  $\zeta_f$  sa courbe représentative dans un

repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Montrer que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que la droite d'équation  $x = 0$  est asymptote à  $\zeta_f$

## Exercices et problèmes

c) Montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{2x} \text{ puis dresser le tableau de}$$

variation de  $f$

2/a) Montrer que l'équation  $f(x)=0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'intervalle  $I$

et que  $0.5 < \alpha < 0.7$  et  $3.7 < \beta < 3.9$

b) Tracer  $\zeta_f$

### Exercice 44

On Considère une fonction  $f$  définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	1			

On note  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1/ Répondre par vraie ou faux sans justification

a) 0 est un minimum local de  $f$

b) La droite d'équation  $x = 2$  est une asymptote à  $(\zeta_f)$

c) La droite d'équation  $y = -3$  est une asymptote à  $(\zeta_f)$

d) La courbe  $(\zeta_f)$  admet une asymptote oblique

2/ Déterminer le signe de  $f(x)$  pour

$$x \in ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$$

a) Montrer que  $g$  est définie sur l'ensemble

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

b) Donner le tableau de variation de  $g$

Donner une allure de la courbe  $(\zeta_g)$  de  $g$  dans un repère orthonormé.

### Exercice 45

On considère la suite réelle  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  pa

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \end{cases} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$1 < U_n < 2.$$

b) Montrer que  $(U_n)$  est croissante.

c) En déduire que  $(U_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

2/ Soit  $(V_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$V_n = \ln(U_n - 1)$$

a) Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ . Retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 46

Soit  $f$  la fonction définie sur

$$]0, +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + e \cdot x - e$$

1/ Soit la fonction  $g$  définie sur

$$]0, +\infty[ \text{ par } g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

## Exercices et problèmes

- a) Dresser le tableau de variation de  $g$
  - b) Résoudre dans  $]0, +\infty[$  l'équation  $g(x) = e$
  - c) Calculer  $g\left(\frac{1}{e}\right)$  en déduire le signe de  $g(x)$
- 2/a) Vérifier que  $f'(x) = g(x)$
- b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition
- c) Montrer que  $\zeta_f$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ex$
- d) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 3/a) Ecrire l'équation de la droite ( $T$ ) tangente à  $\zeta_f$  au point I d'abscisse 1
- b) Etudier la position relative de  $\zeta_f$  et ( $T$ )
- c) Tracer  $\zeta_f$  et ( $T$ )

### Exercice 47

I- Soit  $g$  la fonction définie sur

$$]0, +\infty[ \text{ par } g(x) = 1 + x + \ln x$$

1/ Dresser le tableau de variation de  $g$

- 2/a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $]0, +\infty[$  et que  $0.27 < \alpha < 0.28$
- b) En déduire le signe de  $g(x)$

II- On considère la fonction  $f$  définie sur

$$[0, +\infty] \text{ par } f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(\zeta_f)$  sa courbe représentative dans un

R.O.N  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat

2/a) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , on

$$\text{a) } f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Interpréter

graphiquement le résultat

b) Vérifier que  $f(\alpha) = -\alpha$

c) Tracer  $(\zeta_f)$

### Exercice 48

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} U_0 = 0.5 \\ U_{n+1} = U_n^2 \end{cases}$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$0 < U_n \leq 0.5$$

b) Montrer que  $U$  est une suite strictement décroissante

c) En déduire que  $U$  est convergente et déterminer sa limite  $l$

2/ On pose  $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $V_n < 0$

b) Montrer que  $V$  est une suite géométrique de raison 2

c) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$

Retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 49

I) On appelle  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x \text{ et } g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

1) Étudier les variations de  $f$  et de  $g$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

2) En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$$

II) On se propose d'étudier la suite  $(u_n)$  de nombres réels définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Montrer par récurrence que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) \\ &\quad + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

3) On pose  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$  et

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$$

à l'aide de la première partie, montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

4) Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ . En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$$

5) a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement

croissante.

b) En déduire que  $(u_n)$  est convergent. Soit  $\ell$  sa limite.

Montrer que  $\frac{5}{6} \leq \ln(\ell) \leq 1$  et en déduire

un encadrement de  $\ell$ .

### Exercice 50

On considère une fonction  $f$  définie sur

$$\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[ \text{ par } f(x) = -x^2 + ax - \ln(2x+1)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

La courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  passe par l'origine et admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au

point d'abscisse  $\frac{1}{2}$

1)a) Donner  $f(0)$  et  $f' \left(\frac{1}{2}\right)$

b) Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$

c) Déterminer  $a$  et  $b$

d) Vérifier que  $f'(0) = 0$  interpréter le résultat.

2) Dans la suite de l'exercice on vous admet que

$$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$$

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} f(x)$  interpréter le résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(on pourra remarquer que  
 $f(x) = -x(x-2) - \ln(2x+1)$ )

c) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \text{ interpréter le résultat}$$

d) Dresser le tableau de variation de  $f$

3) Tracer  $(C)$

# Chapitre 5

## Fonction exponentielle

Des questions telles que « si la nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentième , & qu'il y ait au commencement 100 000 habitants : on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ? »

(Euler 1748, *introductio* ,110) ou " un particulier doit 400 000 florins, dont on est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent... "

En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre Hésitation, " Si  $N$  est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction

$$\left(\frac{N-1}{N}\right) \text{ égalera l' unité}. Si n tend vers l'infini, \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

tend vers le nombre d' Euler e

(E.Hair et al,*L'analyse au fil de l'histoire* ,2000)

## I. fonction exponentielle népérienne

### 1. definition et propriété

#### a) definition

La fonction  $\ln$  est continue et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  donc elle admet une fonction réciproque définie

$$\text{sur l'intervalle } \ln([0; +\infty[) = \left[ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \right] = ]-\infty; +\infty[ = \mathbb{R}$$

la fonction réciproque de la fonction  $\ln$  s'appelle fonction exponentielle est notée  $\exp$

#### Définition

la fonction réciproque de la fonction  $\ln$  s'appelle la fonction exponentielle est notée  $\exp$ .

#### Résultats :

- l'ensemble de définition de la fonction  $\exp$  est  $\mathbb{R}$
- l'ensemble des images de la fonction  $\exp$  est  $]0; +\infty[$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0; +\infty[) : (\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y)$

De la définition on déduit les propriétés suivantes

#### Propriété 2

- La fonction  $\exp$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $]0; +\infty[$
- La fonction  $\exp$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- On a : 1)  $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp(x) > 0$   
2)  $(\forall x \in \mathbb{R}) \ln(\exp(x)) = x$   
3)  $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) \exp(\ln(t)) = t$

Remarque :

- Comme la fonction  $\exp$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  alors pour tous réels  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$  on a :
- $$x < y \Leftrightarrow \exp(x) < \exp(y) \text{ et } x = y \Leftrightarrow \exp(x) = \exp(y)$$

## II. Etude de la fonction exponentielle

### 1) Dérivabilité

#### Propriété

La fonction exponentielle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(\exp x)' = \exp x$

## 2) Variations

### Propriété

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Démonstration : On a démontré dans le paragraphe I. que la fonction exponentielle ne s'annule jamais.

Or, par définition,  $\exp(0) = 1$  donc pour tout  $x$ ,  $\exp x > 0$ .

Comme  $(\exp x)' = \exp x > 0$ , la fonction exponentielle est strictement croissante.

## 3) Limites en l'infini

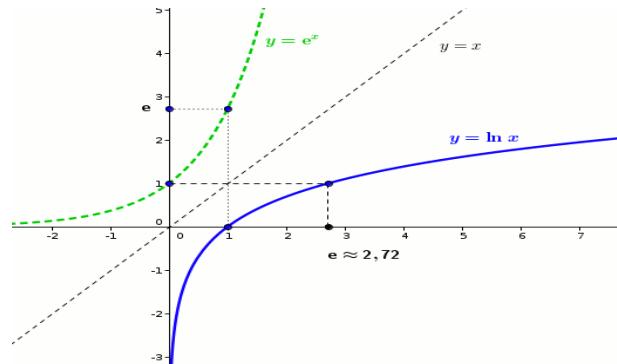
### Propriété

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$$

## 4) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$		+
$\exp x$	0	$+\infty$



## III. Propriété de la fonction exponentielle

### 1) Relation fonctionnelle

### Propriété

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :  $\exp(x + y) = \exp x \exp y$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Démonstration :

Comme  $\exp x \neq 0$ , on pose  $f(x) = \frac{\exp(x + y)}{\exp x}$  avec  $y$  un nombre réel.

Pour tout  $x$ , on a  $f'(x) = \frac{\exp(x + y)\exp x - \exp(x + y)\exp x}{(\exp x)^2} = 0$ . Donc la fonction  $f$  est constante.

Comme  $f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp y$ , on en déduit que  $\frac{\exp(x+y)}{\exp x} = \exp y$ .

### Propriété

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

a)  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$  ; b)  $\exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}$  ; c)  $\exp(nx) = (\exp x)^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$

### Démonstration :

a)  $\exp x \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$

b)  $\exp(x-y) = \exp(x+(-y))$

$$\begin{aligned} &= \exp x \exp(-y) \\ &= \exp x \frac{1}{\exp y} = \frac{\exp x}{\exp y} \end{aligned}$$

c) La démonstration s'effectue par récurrence.

L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = \exp(nx)\exp x = (\exp x)^n \exp x = (\exp x)^{n+1}.$$

### Notation nouvelle :

$$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp(1))^x = e^x$$

On note pour tout  $x$  réel,  $\exp x = e^x$

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

### Propriété

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :

a)  $e^0 = 1$  et  $e^1 = e$  ; b)  $e^x > 0$  et  $(e^x)' = e^x$

c)  $e^{x+y} = e^x e^y$ ,  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ,  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ,  $(e^x)^n = e^{nx}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  ; d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

## Démonstration de d) :

- Soit la fonction  $g$  définie par  $g(x) = e^x - x$ .

Pour  $x$  positif,  $g'(x) = e^x - 1 \geq e^0 - 1 = 0$  car la fonction exponentielle est croissante.

Donc la fonction  $g$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

Comme  $g(0) = 1$ , on a pour tout  $x$ ,  $g(x) \geq 1$ .

On dresse ainsi le tableau de variations :

Et donc  $g(x) = e^x - x \geq 0$ , soit  $e^x \geq x$ .

D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit

que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	1	

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0.$$

## Application

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$$

$$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$$

Correction

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} \\ &= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} \\ &= \frac{e^3}{e^{-5}} \\ &= e^{3-(-5)} = e^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (e^5)^{-6} \times e^{-3} \\ &= e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} \\ &= e^{-30} \times e^{-3} \\ &= e^{-30-3} \\ &= e^{-33} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} \\ &= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} \\ &= e^6 + 1 \end{aligned}$$

## Propriété

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a : a)  $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$  ; b)  $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

## Application :

a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $e^{4x-1} \geq 1$ .

### Reponse

$$a) e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad ou \quad x = 1$$

Les solutions sont -3 et 1.

$$b) e^{4x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle  $\left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$

## IV. Limites

### Propriété

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et pour tout entier  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  et pour tout entier  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$

### Démonstration :

a) - On pose  $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ .

On a :  $f'(x) = e^x - x$  et  $f''(x) = e^x - 1$ .

Pour tout  $x$  strictement positif,  $f''(x) = e^x - 1 \geq 0$ .

On dresse alors le tableau de variations :

On en déduit que pour tout  $x$  strictement positif

$f(x) > 0$  et donc  $e^x > \frac{x^2}{2}$ . Et donc  $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ .

$x$	0	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	1	
Signe de $f'(x)$		+
$f(x)$	1	

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ , on en déduit par comparaison de limites que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ .

- Dans le cas général, il faut montrer que :

$$\frac{e^x}{x^n} = \left( \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right)^n$$

et appliquer le résultat précédent.

$$\text{b) } -\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-Xe^{-X}) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -\frac{X}{e^X} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} \right) = 0.$$

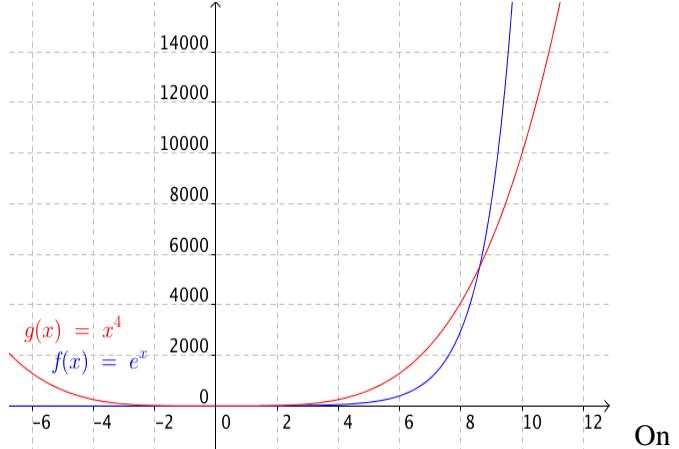
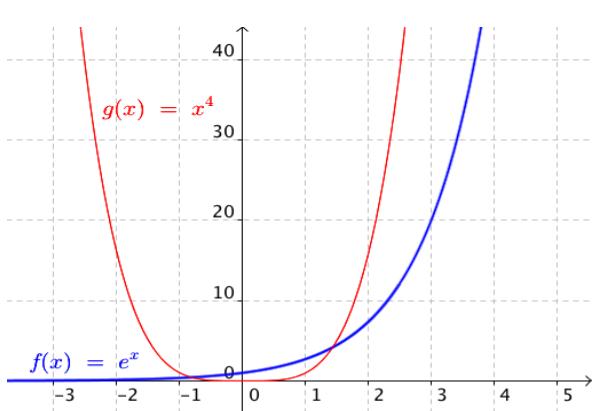
- Dans le cas général, il faut montrer que :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x \leq \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right)$$

et appliquer le résultat précédent.

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

**Exemple** : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction  $x \mapsto x^4$  dans différentes fenêtres graphiques.



constate que pour  $x$  suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction  $x \mapsto x^4$ .

### Propriété 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \text{ avec } a \text{ un réel}$$

**Démonstration** : Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

## Cours

### Application

Calculer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-3x})$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + X}{e^x - X^2}$

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-3x}) = +\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$

c) Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type " $\infty - \infty$ ".

Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + X}{e^x - X^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{X}{e^x}}{1 - \frac{X^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{X}{e^x}}{1 - \frac{X^2}{e^x}}$$

### Reponse

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{X^2} = +\infty$ , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{X^2}{e^x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{X}{e^x}}{1 - \frac{X^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + X}{e^x - X^2} = 1.$$

## V. Fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ .

### Exemple :

Soit  $f(x) = e^{4x+3}$  alors  $f'(x) = 4e^{4x+3}$

### Propriété

: Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les fonctions  $x \mapsto u(x)$  et  $x \mapsto e^{u(x)}$  ont le même sens de variation.

### Démonstration :

On a  $(e^u)' = u'e^u$

Comme  $e^u > 0$ ,  $u'$  et  $(e^u)'$  sont de même signe.

### Exemple :

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$  donc la fonction  $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est également décroissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

## Propriété

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

L'ensemble des fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  sur  $I$  est et les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

## Application :

- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}$  sur  $]-1; +\infty[$  est  $x \mapsto e^{\sqrt{x+1}} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des fonctions primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}e^{\arctan x}$  sur  $\mathbb{R}$  est  $x \mapsto e^{\arctan x} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

**Exercice :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ .

- Etudier les limites de  $f$  à l'infini.
- Calculer la dérivée de la fonction  $f$ .
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
- Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$ .

## solution

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$  donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 \times \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \right) = 0$$

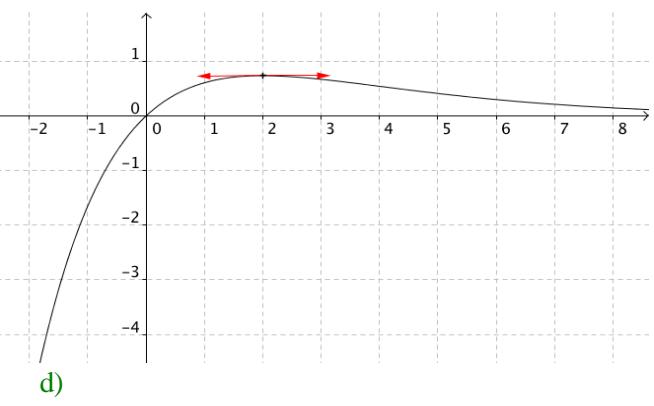
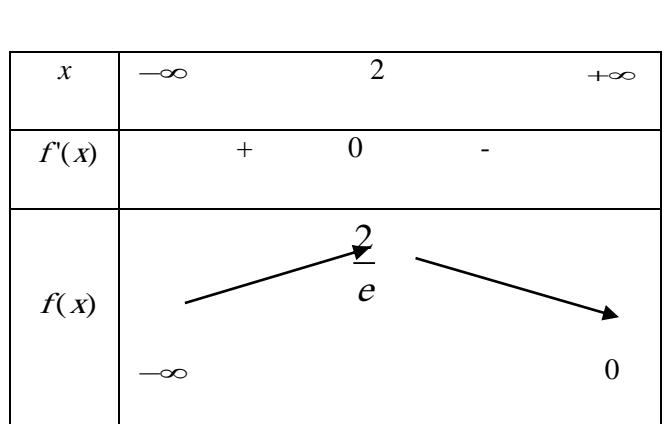
$$b) f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left( -\frac{1}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}} = \left( 1 - \frac{x}{2} \right) e^{-\frac{x}{2}}$$

c) Comme  $e^{-\frac{x}{2}} > 0$ ,  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \frac{x}{2}$ .

$f$  est donc croissante sur l'intervalle  $]-\infty; 2]$

et décroissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

On dresse le tableau de variations :



## VI. La fonction exponentielle de base a

### 1) Définition

#### Définition

La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto e^{x \ln a}$  s'appelle la fonction exponentielle de base a , notée  $\exp_a$

### 2) Propriétés

#### Propriété 1

Soit a un élément de  $\mathbb{R}^{*+} - \{1\}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}): (\exp_a(x) > 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0; +\infty[): (\exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a y)$$

#### Propriété 2

Pour tous réels x et y, on a :

$$a) \exp_a(x+y) = \exp_a x \exp_a y ; \quad b) \exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a x}$$

$$c) \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a x}{\exp_a y} ; \quad d) \exp_a(nx) = (\exp_a x)^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

**Résultat :** la fonction  $\exp_a$  est la fonction réciproque de la fonction  $\log_a$

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\} ; (\forall r \in \mathbb{Q}): \exp_a(r) = (\exp_a(1))^r = a^r$$

On entend cette écriture a  $\mathbb{R}$  et on écrit  $(\forall x \in \mathbb{R}): \exp_a(x) = (\exp_a(1))^x = a^x$

#### Propriété 2

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in ]0; +\infty[): \left(a^x = y \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \log_a(a^x) = x \quad (\forall t \in ]0; +\infty[): a^{\log_a(t)} = t$
- Pour tous réels x et y, on a :  $a^{x+y} = a^x \times a^y ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ; \quad (a^x)^y = a^{xy} ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- Soient a et b des éléments de  $\mathbb{R}^{*+}$  on a :  $(a \times b)^x = a^x \times b^x ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

**Application :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $4^x = 18$

Cette équation s'écrit  $e^{x \ln 4} = 18 \Leftrightarrow x \ln 4 = \ln 18 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 18}{\ln 4}$  donc  $S = \left\{ \frac{\ln 18}{\ln 4} \right\}$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $3^{2x} \geq 5^{1-x}$

Cette inéquation est équivaut à  $2x \ln(3) \geq (1-x) \ln(5) \Leftrightarrow (2 \ln(3) + \ln(5))x \geq \ln(5)$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{\ln(5)}{2 \ln(3) + \ln(5)} \right\}$$

3) Etude de la fonction  $x \mapsto a^x$

### Propriété

la fonction  $x \mapsto a^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $(a^x)' = \ln a \times a^x$

### Propriété

- 1) Si  $a > 1$  alors la fonction  $x \mapsto a^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- 2) Si  $0 < a < 1$  alors la fonction  $x \mapsto a^x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$
- 3) Si  $a > 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- 4) Si  $0 < a < 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

Si  $a > 1$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a$		+
$x \mapsto a^x$	0	

Si  $0 < a < 1$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a$		-
$x \mapsto a^x$	$+\infty$	

## Exercices résolus

### Exercice 1

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies de  $]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  et  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

a. Démontrer que  $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}$

b. Factoriser  $g(x)$ .

c. Déterminer le signe de la dérivée de  $f$ .

### Correction

$$\begin{aligned} a. \quad & 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1} = 2x + \frac{e^x - 1 + 2}{2(e^x - 1)} \\ & = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1} = 2 + \frac{-e^x + 1 + 2e^x}{2(e^x - 1)} ; \\ & = 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = f(x) \end{aligned}$$

b.  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2, X = e^x,$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9 = 3^2, X = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$X_1 = e^{x_1} = 2 \text{ et } X_2 = e^{x_2} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = 2(e^x - 2)(e^x - \frac{1}{2}).$$

c.  $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1},$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

est donc du signe de  $g(x)$  et  $f$  est donc négative entre  $\ln 2$  et  $-\ln 2$ , positive ailleurs.

### Exercice 2

Démontrer que quel que soit le réel  $x$  on a :  $\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x$ .

### Correction

$$\ln(e^x + 1) - \ln(1 + e^{-x}) = x \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + 1}{1 + e^{-x}} = x$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{1 + e^{-x}} = e^x \Leftrightarrow e^x + 1 = e^x(1 + e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow e^x + 1 = e^x + 1 \end{aligned}$$

### Exercice 3

Résoudre les systèmes :

a.  $\begin{cases} 2^x - 3^y = 5 \\ 3 \times 2^x + 3^y = 24 \end{cases}$

b.  $\begin{cases} \ln x + \ln y = -2 \ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2^x - 3^y = -1 \\ 3 \times 2^x + 3^y = 33 \end{cases} \Rightarrow 4 \times 2^x = 32, 2^x = 8, x = 3, \\ & \begin{cases} x = 3 \\ 8 - 3^y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 3^y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}, S = \{(3; 2)\}. \end{aligned}$$

soit  $\begin{cases} xy = \frac{1}{16} \\ x + y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ .

Soit à résoudre l'équation :  $X^2 - SX + P = 0$ ,

### Correction

$$\begin{cases} \ln x + \ln y = -2 \ln 4 \\ e^x e^y = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln xy = \ln 4^{-2} \\ e^{x+y} = e^{-\frac{1}{2}} \end{cases},$$

$$X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow (X + \frac{1}{4})^2 = 0 \Leftrightarrow X = -\frac{1}{4} = x = y.$$

Or, bien évidemment, les valeurs négatives sont exclues car  $\ln$  n'est pas définie sur  $\mathbb{R}_-$  donc  $S = \emptyset$ .

## Exercices résolus

### Exercice 4

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ .

Soit  $C$  la représentation graphique de la fonction  $g$  dans le repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ . Montrer que  $g'(x)$  est du signe de  $(1-x^2)$ . En déduire les variations de  $g$ .

2. Montrer que :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et préciser l'asymptote à  $C$  correspondante.

3. Tracer la courbe  $C$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives  $-2 ; -1 ; 0 ; 1$  et  $3$ .

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel  $k$ , le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = k$ .

b. Prouver rigoureusement que l'équation  $g(x) = 2$  admet une solution  $\alpha$  et une seule. Prouver que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[-2 ; -1]$ .

c. Montrer que  $\alpha$  vérifie la relation  $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ .

### Correction

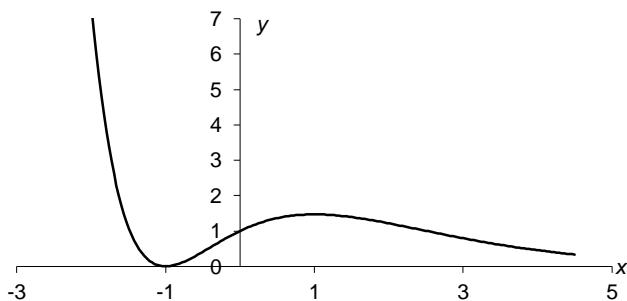
$$g(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

1.  $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x})$   
 $= (x+1)e^{-x}(2-x-1) = (x+1)(1-x)e^{-x}.$

2. a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 e^X = +\infty$ .

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} X^2 e^X = 0$ .

$C$  a une asymptote horizontale en  $+\infty$ .



4. a. Si  $k < 0$ , pas de solutions ; si  $k = 0$ , une seule solution :  $x = -1$ , si  $0 < k < 4/e$ , 3 solutions, si  $k = 4/e$  :

deux solutions dont  $x = 1$ , enfin si  $k > 4/e$ , une seule solution.

b. Si  $x > -1$ ,  $f(x)$  est toujours inférieur ou égal à  $4/e$  ( $< 2$ ), donc  $f(x) = 2$  n'a pas de solution sur  $[1 ; +\infty[$ . Lorsque  $x < -1$ ,  $f$  est continue monotone strictement croissante de  $]-\infty ; -1[$  vers  $]0 ; +\infty[$ . Comme 2 est dans cet intervalle, il existe une seule valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) = 2$ .

Claculons  $f(-2) = 7,39$  et  $f(-1) = 0$  ; comme  $0 < 2 < 7,39$  on a  $-2 < \alpha < -1$ .

c. Nous savons que

$$f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 2e^\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+1 = \sqrt{2e^\alpha} & ; \text{comme } \alpha < -1 \\ \alpha+1 = -\sqrt{2e^\alpha} & \end{cases}$$

on choisit la racine négative, soit  $\alpha = -1 - \sqrt{2e^2}$ .

### Exercice 5

Soit  $f_k$  la famille de fonctions définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f_k(x) = kx^2 + e^{-x}$  où  $k$  est un réel strictement positif quelconque et  $g_k$  la famille de fonctions également définies sur  $[0, +\infty[$  par  $g_k(x) = 2kx - e^{-x}$ .

On note  $C_k$  la courbe représentative de  $f_k$  dans le repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique : 2 cm.

## Exercices résolus

1. Sens de variation de  $g_k$
- Calculer la dérivée  $g'_k$  de  $g_k$  ; vérifier que  $g'_k(x)$  est toujours strictement positif.
  - Calculer la limite de  $g_k(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
  - Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel  $\alpha_k > 0$  tel que  $g_k(\alpha_k) = 0$ . Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\alpha_1$  et de  $\alpha_2$ .
  - Étudier le signe de  $g_k(x)$  sur  $[0, +\infty[$ .
  - Montrer que  $f'_k(x) = g_k(x)$  ; en déduire le sens de variation de  $f_k$ .
2. Comportement asymptotique de  $f_k$  en  $+\infty$
- Déterminer la limite de  $f_k(x)$  en  $+\infty$ .
  - Déterminer le signe de  $f_k(x) - kx^2$  et sa limite en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat ; on note  $P_k$  la courbe d'équation  $y = kx^2$ .
3. Construction de  $f_k$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f_k$ . Préciser le signe de  $f_k$ .
  - Préciser l'équation de la tangente  $T$  à  $C_k$  au point d'abscisse 0.
  - Prouver que  $f_k(\alpha_k) = k \alpha_k (\alpha_k + 2)$ .

### Correction :

$$f_k(x) = kx^2 + e^{-x}, \quad g_k(x) = 2kx - e^{-x}.$$

#### 1. Sens de variation de $g_k$

a.  $g'_k(x) = 2k + e^{-x}$  est toujours  $> 0$  puisque  $e^{-x}$

l'est ainsi que  $2k$ .

b. Comme  $e^{-x}$  tend vers 0 en  $+\infty$  la fonction  $g_k(x)$  se comporte comme  $2kx$  et tend donc vers  $+\infty$ . On a  $g_k(0) = 0 - e^{-0} = -1$  qui est négatif et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_k(x) = +\infty$  qui est positif ; comme  $g_k$  est

continue, monotone

strictement croissante elle s'annule une seule fois.

Calculons des valeurs approchées de  $\alpha_1$ , solution de

$$2x - e^{-x} = 0 : \text{on a } 0,351 < \alpha_1 < 0,352.$$

$x$	$g_1(x)$
0,35172775	-1,6116057
0,35183246	0,00026696

$x$	$g_2(x)$
0,20335079	-0,00258881
0,20418848	0,00144524

De même on obtient la solution de  $4x - e^{-x} = 0$  :

$$0,203 < \alpha_2 < 0,205.$$

## Exercices résolus

d. Comme  $g_k$  est croissante, on a

$$x < \alpha_k \Rightarrow g_k(x) < g_k(\alpha_k) = 0 \text{ et}$$

$$x > \alpha_k \Rightarrow g_k(x) > g_k(\alpha_k) = 0$$

e. Il est immédiat que  $f'_k(x) = 2kx - e^{-x} = g_k(x)$  ;  $f_k$  est donc décroissante avant  $\alpha_k$  et croissante après.

$x$	0	$\alpha_k$	$+\infty$
$f'_k$	-	0	+
$f_k$	1	$f_k(\alpha_k)$	

2. Comportement asymptotique de  $f_k$  en  $+\infty$

a. Là encore  $e^{-x}$  tend vers 0 en  $+\infty$  donc  $f_k$  se comporte comme  $kx^2$  et tend donc vers  $+\infty$ .

b. Comme  $f_k(x) - kx^2 = e^{-x}$ , cette expression est positive et tend vers 0 à l'infini. La courbe  $P_k$  est donc asymptote de  $C_k$  et  $C_k$  est au dessus de  $P_k$ .

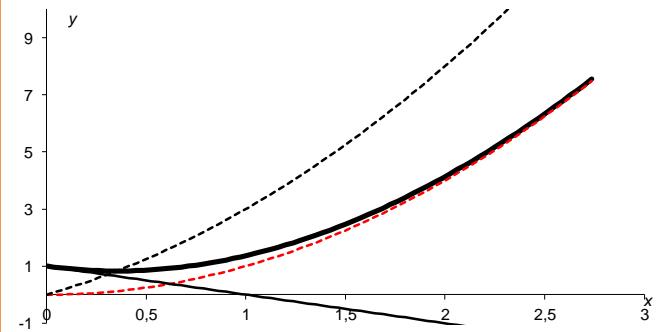
3. Construction de  $f_k$ .

a. Comme  $kx^2$  est positif ainsi que  $e^{-x}$ ,  $f_k(x)$  est positive.

b. On a  $f'_k(0) = -1$  et  $f_k(0) = 1$  d'où la tangente :  $y = -x + 1$ .

c.  $g_k(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_k} = 2k\alpha_k$  donc

$$f_k(\alpha_k) = k\alpha_k^2 + 2k\alpha_k = k\alpha_k(\alpha_k + 2).$$



### Exercice 6

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = xe^{-x}$  sur  $[0; +\infty[$ . On note  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique: 10 cm).

#### Partie A

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.

c. construire  $\Gamma$ .

2. a. Montrer que pour tout réel  $m$  de l'intervalle  $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet deux solutions.

b. Dans le cas où  $m = \frac{1}{4}$ , on nomme  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions, (avec  $\alpha < \beta$ ). Déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

c. Résoudre l'équation  $f(x) = m$  dans le cas où  $m = 0$  et  $m = \frac{1}{e}$ .

#### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$  où  $\alpha$  est le réel défini à la question A. 2. b.

## Exercices résolus

- a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
- b. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- c. La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
2. On considère la suite  $(w_n)$  définie sur IN par  $w_n = \ln u_n$ .
- a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = w_n - w_{n+1}$ .
- b. On pose  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ . Montrer que  $S_n = w_0 - w_{n+1}$ .
- c. En déduire  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie sur IN par son premier terme  $v_0$ ,  $v_0 > 0$ , et pour tout entier  $n$ , par  $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$ . Existe-t-il une valeur de  $v_0$  différente de  $\alpha$  telle que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on ait  $u_n = v_n$  ? Si oui, préciser laquelle.

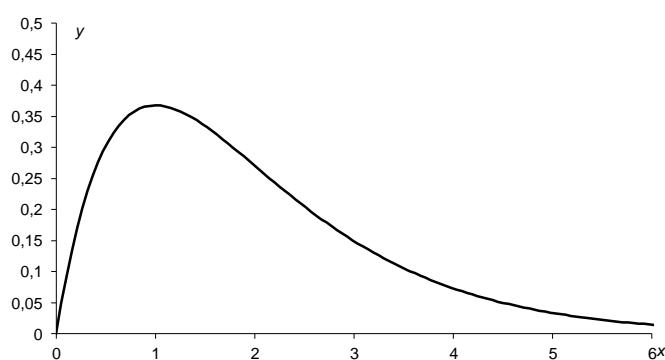
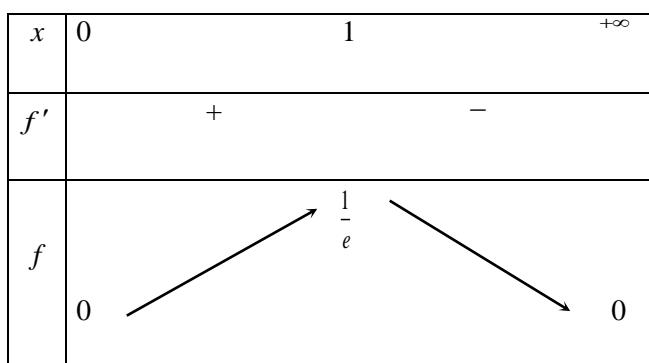
**Correction :**

### Partie A

1. a.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -Xe^X = 0$ .

b.  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ . L'exponentielle est positive,  $f'$  est du signe de  $1-x$ .

c.



2. a. La droite d'équation  $y = m$  coupe la courbe  $\Gamma$  en deux points, l'équation  $f(x) = m$  a donc bien deux solutions. Plus scientifiquement, lorsque  $m$  est dans  $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ , il a deux antécédents par  $f$ : un antécédent entre 0 et 1 car  $f$  est croissante et continue de  $]0 ; 1[$  vers  $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ , l'autre entre 1 et  $+\infty$  car  $f$  est continue, monotone, décroissante de  $]1 ; +\infty[$  vers  $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$ .

b. On cherche quand  $f(x)$  encadre  $1/4$ :

$$f(0,3573) = 0,2499 \text{ et } f(0,3574) = 0,25001.$$

c.  $f(x) = 0$  a l'unique solution 0 (tableau de variation)

et  $f(x) = \frac{1}{e}$  a pour unique solution 1.

Partie B 
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

a. Comme  $u_0 = \alpha > 0$  et que si  $u_n > 0$  alors  $u_n e^{-u_n} > 0$ , il est clair que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ .

b. On peut faire  $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n (e^{-u_n} - 1)$  ;

$$\text{or } u_n > 0 \Leftrightarrow -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0$$

## Exercices résolus

donc la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c.  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0, elle converge

donc. Soit  $l$  sa limite, on a

$$le^{-l} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l=0 \\ e^{-l}=1 \Leftrightarrow -l=0 \end{cases}; \text{ la seule possibilité est}$$

que  $l=0$ .

2.  $w_n = \ln u_n$ .

a. Prenons le logarithme de

$$\begin{aligned} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} &\Leftrightarrow \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} \\ &= \ln u_n - u_n \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n - u_n \end{aligned},$$

soit  $u_n = w_n - w_{n+1}$ .

b.

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= w_0 - w'_1 + w'_1 - w'_2 + \dots + w'_{n-1} - w'_n + w'_n - w_{n+1} \\ &= w_0 - w_{n+1} \end{aligned}$$

c. Comme  $u_n$  tend vers 0,  $w_n$  tend vers  $-\infty$ , donc  $S_n$  tend vers  $+\infty$ .

3. En fait à partir de  $u_0 = \alpha$  on a  $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$ ; mais

$$f(\beta) = \frac{1}{4}, \text{ donc si l'on prend } v_0 = \beta, \text{ à partir du rang 1}$$

les deux suites seront confondues.

### Exercice 7

Caractéristique de Exp et tangentes

1. Dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2 cm tracer la courbe représentative (C) de la fonction exponentielle ( $x \mapsto e^x$ ) sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$ .

2. Tracer sur la même figure les tangentes à (C) aux points d'abscisses  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 1$ . Chacune de ces tangentes coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse  $x'_1$ ,  $x'_2$ ,  $x'_3$ .

Mesurer **à la règle** les trois distances  $x_i - x'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Que constatez-vous ? (Les trois longueurs mesurées doivent apparaître clairement sur le graphique.)

3. Soit  $A$  un point de (C) d'abscisse  $a$ . Vérifiez que l'équation de la tangente (T) en  $A$  à (C) a pour équation  $y = e^a x + (1-a)e^a$ . Justifiez alors que le résultat du 2. est bien une constante que l'on précisera par le calcul.

4. On cherche désormais s'il y aurait d'autres courbes présentant cette propriété : soit une fonction  $f$  de courbe représentative (C),  $A$  un point de (C) d'abscisse  $a$ , (T) la tangente en  $A$  à (C) et  $a'$  l'abscisse du point d'intersection entre (T) et ( $Ox$ ) quand il existe. On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

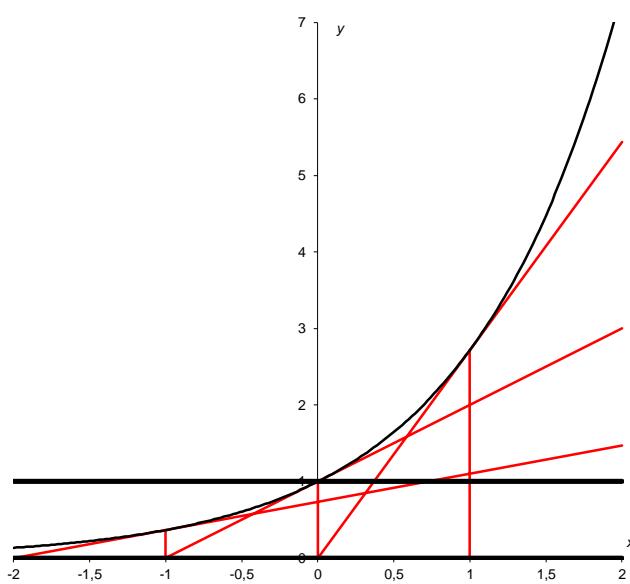
a. Donner l'équation de la tangente (T).

b. Exprimer  $a'$  en fonction de  $a$ ,  $f(a)$  et  $f'(a)$ . En déduire  $a - a'$ .

c. Soit  $k$  une constante réelle. Montrer que  $a - a' = k \Leftrightarrow \frac{f(a)}{f'(a)} = k$ . Résoudre cette équation et conclure.

### Correction

1.



2. Les trois longueurs mesurées valent 1.

3.  $f(a) = e^a$ ,  $f'(a) = e^a$  ;

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= e^a(x-a) + e^a \\ &= e^ax + (1-a)e^a \end{aligned}$$

Le point d'intersection entre (C) et ( $Ox$ ) a pour abscisse

$$x_0 : e^ax_0 + (1-a)e^a = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{(a-1)e^a}{e^a} = a-1$$

d'où la distance entre  $a$  et  $x_0$  :  $a-x_0 = a-(a-1) = 1$ .

4. a.  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ .

b. Le point d'intersection entre la tangente et ( $Ox$ ) a pour abscisse  $a'$  :

$$0 = f'(a)(a'-a) + f(a)$$

$$\Leftrightarrow a'-a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow a-a' = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

c. On a donc bien  $a-a' = k \Leftrightarrow \frac{f(a)}{f'(a)} = k$ . En fait il

s'agit simplement de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{k}y$

dont les solutions sont de la forme  $f(x) = Ce^{\frac{1}{k}x}$ .

Par exemple pour la situation de départ on avait  $k=1$  (

$f(x) = e^x$ ) et l'écart mesuré était bien de 1. Ceci

caractérise d'ailleurs les fonctions exponentielles.

### Exercice 1

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$1. (e^{-2x} - e^x)(1 + e^{3x}) = e^x (e^{-3x} + 1)(1 - e^{3x})$$

$$2. \ln(e^{2x} + e^x + 1) = 2x + \ln(e^{-2x} + e^x + 1)$$

### Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1} \text{ et } g(x) = \sqrt{e^{ax}} - e^{\frac{-a}{2}x} \text{ Avec } a \in \mathbb{R}^*$$

Montrer que f et g sont deux fonctions impaires

### Exercice 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

a)  $\frac{e^{-x} - 7}{e^x + 7} = 2$  ; b)  $e^{\frac{3x-1}{x-3}} = e$

c)  $e^{-2x} e^{x+\ln 3} = e^{2x-\ln 9}$  ; d)  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

a)  $e^{2x} - 2e^x + 1 > e^2$ ,

b)  $e^{3x} - 6e^{2x} + 3e^x < 0$  ;

c)  $\ln(4 - e^x) \geq 2$

### Exercice 4

Soit k un réel strictement positif et  $f_k$  la fonction définie

sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_k(x) = e^{-kx^2}$ .

1. Étudier la parité de la fonction  $f_k$ .

2. Étudier les variations de la fonction  $f_k$  et dresser son tableau de variation.

3. Déterminer la dérivée seconde  $f_k''$  et résoudre

l'équation  $f_k''(x) = 0$ .

4. Démontrer que, quels que soient les réels strictement positifs h et k, on a :  $f_k \leq f_h$  si, et seulement si,  $h \leq k$

5. On prend  $k = \frac{1}{2}$ . On désigne par  $\alpha$  la solution

positive de l'équation  $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 0$ .

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de  $f_{\frac{1}{2}}$  au point d'abscisse  $\alpha$ .

### Exercice 5

On considère la courbe C représentant la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2cm).

#### PARTIE A

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en  $-\infty$ .

b. Montrer que si x est différent de zéro on a :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

En déduire la limite de la fonction f en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Montrer que  $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ .

b. Étudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de la fonction f sur  $\mathbb{R}$ .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

4. Étude de la position de C par rapport à T

a. Montrer que pour tout réel x on a :

$$f(x) - (x+1) = (x+1)e^{-x} g(x) \text{ avec}$$

$$g(x) = x + 1 - e^x.$$

b. Calculer  $g'(x)$  et étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

d. En déduire le signe de  $g(x)$ , puis de  $f(x) - (x+1)$ .

e. En déduire la position de C par rapport à T.

f. Après avoir reproduit et complété le tableau de valeurs ci-dessous, tracer T et C dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Donner les valeurs de  $f(x)$  arrondies à  $10^{-2}$  près.

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	
$f(x)$										

### PARTIE B

- a. Montrer que la fonction  $F$  définie par

$F(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$  est une primitive de la fonction  $f$ .

#### Exercice 6

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = (x+1)^2 e^{-x}.$$

Soit  $C$  la représentation graphique de la fonction  $g$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$ . Montrer que  $g'(x)$  est du signe de  $(1-x^2)$ . En déduire les variations de  $g$ .

2. Montrer que :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ .

- b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et préciser l'asymptote à  $C$  correspondante.

3. Tracer la courbe  $C$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives  $-2 ; -1 ; 0 ; 1$  et  $3$ .

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel  $k$ , le nombre de solutions de l'équation  $g(x) = k$ .

- b. Prouver rigoureusement que l'équation  $g(x) = 2$  admet une solution  $\alpha$  et une seule. Prouver que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[-2 ; -1]$ .

- c. Montrer que  $\alpha$  vérifie la relation  $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$ .

### Partie B

On appelle  $f$  la fonction définie sur l'intervalle

$$I = [-2 ; -1] \text{ par } f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

#### 1. Étude de $f$

- a. Étudier les variations de  $f$  sur  $I$ .

- b. En déduire que, pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $f(x)$  appartient à  $I$ .

- c. Montrer que, pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}e}$ .

- d. On rappelle que  $f(\alpha) = \alpha$ . En intégrant l'inégalité précédente, montrer que, pour tout élément  $x$  de  $I$ , on a :

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

2. Approximation de  $\alpha$  à l'aide d'une suite

Soit  $(u_n)$  la suite d'éléments de  $I$  définie par la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et la condition initiale

$$u_0 = -\frac{3}{2}.$$

- a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- c. Prouver que la suite  $(u_n)$  converge, préciser sa limite et déterminer un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0}$  soit une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-3}$  près. Calculer  $u_{n_0}$ .

#### Exercice 7

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$  si  $t > 0$  et  $g(0) = 1$ .

1. a. Établir que  $g$  est continue en 0.

- b. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2. a. Pour tout  $t > 0$ , calculer  $g'(t)$ .

- b. Prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $1 + t \leq e^t$ .

- c. En déduire le signe de  $g'$  et le sens de variation de  $g$ .

3. On se propose d'étudier la dérивabilité de  $g$  en 0. À cet effet on introduit la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$ .

- a. Calculer  $h'$  et  $h''$ , ainsi que les valeurs de  $h(0)$  et  $h'(0)$ .

- b. Prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$  (1). Pour cela, on établira d'abord que  $0 \leq h''(t) \leq t$  et on en déduira un encadrement de  $h'$  et de  $h$ .

- c. Déduire de la relation (1) un encadrement de

$$\frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}. \text{ Prouver finalement que } g \text{ est dérivable en } 0$$

et donner la valeur de  $g'(0)$ .

4. Construire la courbe représentative  $C$  de  $g$ , dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 8

1. Pour tout réel  $k$  positif ou nul, on considère la

fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_k(x) = x + \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$ .

a. Justifier que, pour tout réel  $k$  positif ou nul, on a

$$(E) : 2f_k' = (f_k - x)^2 + 1.$$

b. En déduire le sens de variations de  $f_k$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. On note  $C_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . Sur la figure ci-dessous on a représenté la droite  $D$  d'équation  $y = x - 1$ , la droite  $D'$  d'équation  $y = x + 1$  et plusieurs courbes  $C_k$  correspondant à des valeurs particulières de  $k$ .

Déterminer le réel  $k$  associé à la courbe  $C$  passant par le point  $O$  puis celui associé à la courbe  $C'$  passant par le point  $A$  de coordonnées  $(1 ; 1)$ .

3. On remarque que, pour tout  $x$  réel, on a :

$$f_k(x) = x - 1 + \frac{2}{1 + ke^x} \quad (1) \text{ et } f_k(x) = x + 1 - \frac{2ke^x}{1 + ke^x} \quad (2).$$

En déduire pour tout  $k$  strictement positif :

- la position de la courbe  $C_k$  par rapport aux droites  $D$  et  $D'$  ;
- les asymptotes de la courbe  $C_k$ .

4. Cas particulier :  $k = 1$ .

a. Justifier que  $f_1$  est impaire.

### Exercice 9

On se propose d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (x+1) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = (x+1)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 4 cm.

#### 1. Variations de $f$

a. Montrer que la dérivée  $f'$  de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  est de la

forme  $\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \times Q(x)$  où  $Q$  est une fonction rationnelle.

b. Déterminer la limite de  $(1+t)e^{-t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et déterminer  $f'(0)$ .

c. Etudier le sens de variation de  $f$ .

d. Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

e. Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$ ,  $x \in [0 ; +\infty[$ , admet une unique solution  $\alpha$  dont on donnera un encadrement à  $10^{-1}$  près.

#### 2. Etude d'une fonction auxiliaire

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$\varphi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}.$$

a. Calculer la dérivée de  $\varphi$ .

b. Prouver que, pour tout réel  $t$  positif ou nul,  $0 \leq \varphi'(t) \leq t$ .

c. En déduire que, pour tout réel  $t$  positif ou nul,

$$0 \leq \varphi(t) \leq \frac{t^2}{2} \quad (1)$$

#### 3. Etude de $f$ au voisinage de $+\infty$

a. A l'aide de l'encadrement (1), établir que, pour tout réel  $x$  strictement positif :  $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$ .

b. En déduire que  $(C)$  admet une asymptote  $(\Delta)$  au voisinage de  $+\infty$  et préciser la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

#### 4. Etude de la tangente à $(C)$ en un point

Soit  $a$  un élément de  $]0 ; +\infty[$ , et  $(T_a)$  la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse  $a$ .

a. Déterminer une équation cartésienne de  $(T_a)$ .

b. Montrer que  $(T_a)$  coupe l'axe des abscisses  $(0 ; \vec{i})$  au point d'abscisse  $\frac{a}{1+a+a^2}$ .

c. Construire  $(C)$  et  $(\Delta)$ . On placera le point de  $(C)$  d'ordonnée 2 et on précisera les tangentes à  $(C)$  aux points d'abscisses  $\frac{1}{3}$ , 1 et 3.

## Exercices et problèmes

### Exercice 10

On appelle  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x.$$

1. a. Calculer la dérivée de  $f$  ainsi que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b. On appelle  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}.$$

Etudier le sens de variation de  $g$  et montrer que

l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  sur  $[0 ; 0,5]$ . En déduire l'étude du signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$  et les variations de  $f$ .

2. On appelle  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $I =$

$$[0 ; 0,5] \text{ par } h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x.$$

a. Montrer que  $\alpha$  est l'unique solution sur  $I$  de l'équation  $h(x) = x$ .

b. Etudier les variations de  $h$ , en déduire que pour tout élément  $x$  de  $I$ ,  $h(x)$  appartient à  $I$ .

c. Prouver que pour tout élément  $x$  de  $I$  on a  $-0,83 \leq h'(x) \leq 0$ .

En déduire que pour tout  $x$  de  $I$  on a

$$|h(x) - \alpha| \leq 0,83|x - \alpha|.$$

3. On définit une suite  $(u_n)$  par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n). \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $I$ , et que  $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|u_n - \alpha|$ .

b. En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0,83)^n$

c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

4. Préciser un entier  $p$  tel que l'on ait  $|u_p - \alpha| \leq 10^{-2}$ .

Calculer  $u_p$  à l'aide de votre calculatrice (on en donnera la partie entière et deux décimales). En déduire un encadrement de  $\alpha$ .

Montrer que  $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}$ , et donner un encadrement de  $f(\alpha)$ .

### Exercice 11

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (1-2x)e^{2x}.$$

1. Etudier les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2. Calculer  $f'(x)$ , étudier les variations de  $f$ , dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe représentative  $C$  de  $f$  dans un repère orthonormal d'unité 2cm.

#### Partie B

La fonction  $f$  est toujours celle définie dans la partie A.

On note  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ ,  $f^{(3)}$ , ...,  $f^{(n)}$  les dérivées successives de  $f$ ,  $n$  désignant un entier naturel non nul.

1. Calculer  $f^{(2)}$  et  $f^{(3)}$ .

2. Montrer par récurrence sur l'entier non nul  $n$  que

$$f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}.$$

3. Pour tout  $n$  non nul, la courbe représentative de  $f^{(n)}$  admet une tangente horizontale en un point  $M_n$ .

a. Calculer les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  de  $M_n$ .

b. Vérifier que la suite  $(x_n)$  est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de  $(x_n)$  ?

c. Vérifier que la suite  $(y_n)$  est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. Quelle est la limite de  $(y_n)$  ?

### Exercice 12

Pour chaque entier naturel  $n$ , on définit sur l'intervalle

$$]0 ; +\infty[ \text{ la fonction } f_n \text{ par } f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x.$$

#### Partie A : étude du cas particulier $n = 0$ .

$f_0$  est donc définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

1. Justifier, pour tout réel  $u$ , l'inégalité  $e^u \geq u+1$ . En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} + x - 1 \geq 0$ , puis que, pour tout réel  $x$ ,  $1 + (x-1)e^x \geq 0$ .

2. Déterminer les limites de  $f_0$  en 0 et en  $+\infty$ .

3. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ ,

## Exercices et problèmes

la dérivée de  $f_0$  est donnée par  $f'_0(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ . En déduire le sens de variation de  $f_0$ .

4. Représenter la courbe  $C_0$  de  $f_0$  dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

### Partie B : étude de la famille de fonctions $f_n$ pour $n \geq 1$

On appelle  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le repère précédent.

1. Déterminer le sens de variation de  $f_n$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

2. Déterminer les limites de  $f_n$  en 0 et en  $+\infty$ . En déduire que  $C_n$  possède une asymptote que l'on précisera.

3. Etudier les positions relatives des courbes  $C_n$  et  $C_{n+1}$ .

4. Montrer que toutes les courbes  $C_n$  passent par un même point  $B$  dont on précisera les coordonnées.

5. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , montrer qu'il existe un unique réel  $a_n$  appartenant à  $]0 ; 1[$  tel que  $f_n(a_n) = 0$ .

6. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $f_{n+1}(a_n) = \ln(a_n)$ . En déduire que  $a_n \leq a_{n+1}$ , puis que la suite  $(a_n)$  est convergente.

7. a. En utilisant la partie A, montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $]0 ; 1[$ ,  $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\ln(a_n) \geq \frac{1-e}{n}, \text{ puis que } a_n \geq e^{-\frac{1-e}{n}}$$

c. En déduire la limite de la suite  $(a_n)$ .

8. Construire sur le graphique précédent les courbes  $C_1$  et  $C_2$ .

### Exercice 13

1. Soit  $\varphi$  l'application de  $\mathbb{R} - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^x + 1.$$

a. Etudier les limites de  $\varphi$  aux bornes du domaine de définition.

b. Montrer que  $\varphi'(x) = \frac{-(2x+1)}{x^3}e^x$  et en déduire les

valeurs de  $\varphi'$ . Construire le tableau de variations de  $\varphi$  et en déduire que  $\varphi(x)$  est strictement positive sur  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

2. Soit  $f$  l'application définie dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + e^x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

a. Montrer que  $f$  est continue en 0.

b. Etudier la dérivableté de  $f$  en 0 et en donner les conséquences graphiques.

c. Etudier les variations de  $f$  (on sera amené à utiliser le 1. pour trouver le signe de  $f'(x)$ ). Donner le tableau de variations de  $f$ .

d. Construire la courbe de la fonction  $f$ .

### Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative tracée dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous. On considère également la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^{-x}$  et on nomme  $C$  sa courbe représentative dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$ .

b. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes  $\Gamma$  et  $C$ .

3. On définit la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = f\left(n \frac{\pi}{2}\right)$ .

a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique.

En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et étudier sa convergence.

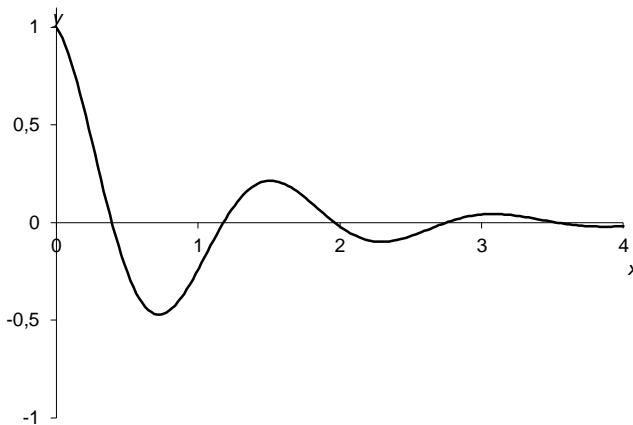
4. a. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$ .

b. En déduire que les courbes  $\Gamma$  et  $C$  ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près par excès

## Exercices et problèmes

du coefficient directeur de la droite  $T$  tangente à la courbe  $\Gamma$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ . Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant  $T$  et  $C$ .



### Exercice 15

Le but de l'exercice est démontrer que l'équation (E) :

$e^x = \frac{1}{x}$ , admet une unique solution dans l'ensemble  $\mathbb{R}$

des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

#### I. Existence et unicité de la solution

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1. Démontrer que  $x$  est solution de l'équation (E) si et seulement si  $f(x) = 0$ .

2. Étude du signe de la fonction  $f$ .

a. Etudier le sens de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur  $\mathbb{R}$ , notée  $\alpha$ .

c. Démontrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

d. Étudier le signe de  $f$  sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ .

#### II. Deuxième approche

On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à l'équation  $g(x) = x$ .

2. En déduire que  $\alpha$  est l'unique réel vérifiant :

$$g(\alpha) = \alpha.$$

3. Calculer  $g'(x)$  et en déduire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ .

### III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite $\alpha$

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ .

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. On note  $l$  sa limite.

3. Justifier l'égalité :  $g(l) = l$ . En déduire la valeur de  $l$ .

### Exercice 16

#### Partie A : question de cours

1. Soit  $f$  une fonction réelle définie sur  $[a; +\infty[$ .

Compléter la phrase suivante :

«On dit que  $f$  admet une limite finie  $l$  en  $+\infty$  si . . . .»

2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur  $[a; +\infty[$  et  $l$  un nombre réel.

Si  $g$  et  $h$  ont pour limite commune  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , et si pour tout  $x$  assez grand  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , alors la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  est égale à  $l$

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x - x - 1$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan. La droite  $(D)$  d'équation  $y = -x - 1$  est asymptote à  $(C)$ .

On a représenté ci-dessous la courbe  $(C)$  et la droite  $(D)$ .

1. Soit  $a$  un nombre réel. Écrire, en fonction de  $a$ , une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $M$  d'abscisse  $a$ .

2. Cette tangente  $(T)$  coupe la droite  $(D)$  au point  $N$  d'abscisse  $b$ . Vérifier que  $b - a = -1$ .

3. En déduire une construction, à effectuer sur la figure ci-dessous, de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point  $M$

## Exercices et problèmes

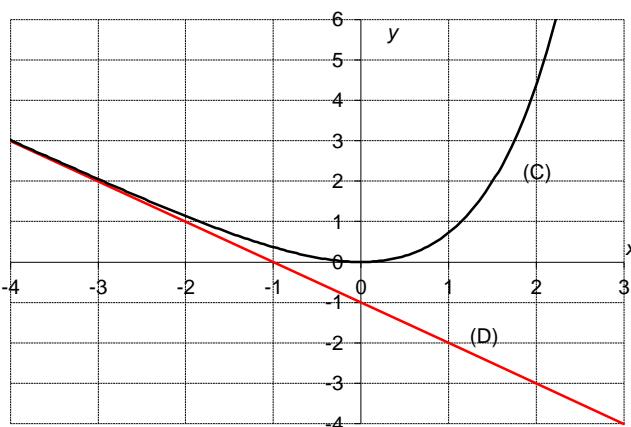
d'abscisse 1,5. On fera apparaître le point  $N$  correspondant.

### Partie C

- Déterminer graphiquement le signe de  $f$ .
- En déduire, pour tout entier naturel non nul  $n$ , les inégalités suivantes :

$$(1) \ e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \text{ et } (2) \ e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}.$$

- En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ .
- En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .
- Déduire des questions précédentes un encadrement de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  puis sa limite en  $+\infty$ .



### Exercice 17

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle

$$]0; +\infty[ \text{ par } f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

- Restitution organisée de connaissances : La fonction exponentielle est l'unique fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$

vérifiant  $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ .

- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en 0.
- Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour  $n$  entier supérieur ou égal

$$\text{à 1 par : } u_n = \frac{1}{n} \left[ 1 + e^n + e^{n-\frac{1}{2}} + \dots + e^{\frac{n-1}{2}} \right].$$

$$1. \text{ Démontrer que } 1 + e^n + e^{n-\frac{1}{2}} + \dots + e^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1-e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{\frac{1}{n}}} \text{ puis en}$$

$$\text{déduire que } u_n = (e-1) f\left(\frac{1}{n}\right).$$

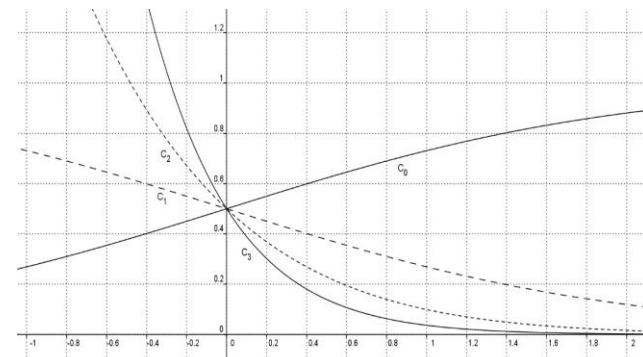
- En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite  $(u_n)$  converge vers  $e-1$ .

### Exercice 18

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $f_n$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Les courbes  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont représentées ci-dessous :



### Partie A : Quelques propriétés des fonctions $f_n$ et des courbes $C_n$

- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  les courbes  $C_n$  ont un point  $A$  en commun. On précisera ses coordonnées.

#### 2. Étude de la fonction $f_0$

- Étudier le sens de variation de  $f_0$ .

- Préciser les limites de la fonction  $f_0$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Interpréter graphiquement ces limites.

- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_0$  sur  $\mathbb{R}$

## Exercices et problèmes

### 3. Étude de la fonction $f_1$

- Démontrer que  $f_0(x) = f_1(-x)$  pour tout nombre réel  $x$ .
- En déduire les limites de la fonction  $f_1$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , ainsi que son sens de variation.
- Donner une interprétation géométrique de 3. a. pour les courbes  $C_0$  et  $C_1$ .

### 4. Étude de la fonction $f_n$ pour $n > 2$

- Vérifier que pour tout entier naturel  $n > 2$  et pour tout nombre réel  $x$ , on a :  $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$ .
- Étudier les limites de la fonction  $f_n$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- Calculer la dérivée  $f'_n(x)$  et dresser le tableau de variations de la fonction  $f_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 19

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1.

On considère la fonction  $f_n$  définie par : pour tout réel

$$x \in [0 ; +\infty[, f_n(x) = nxe^{-nx}.$$

On note  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

II-1-a- Donner  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

II-1-b- On en déduit que  $C_n$  admet une asymptote  $\Delta$  dont on donnera une équation.

II-2-a-  $f'_n$  désigne la dérivée de  $f_n$ . Justifier que : pour tout réel  $x \in [0 ; +\infty[, f'_n(x) = ne^{-nx}(1-nx)$ .

II-2-b- Dresser le tableau des variations de  $f_n$ .

II-2-c-  $f_n$  présente un maximum en un point  $M_n$ .

Donner les coordonnées de  $M_n$ .

II-3-a- Justifier que : pour tout réel  $x \in [0 ; +\infty[,$

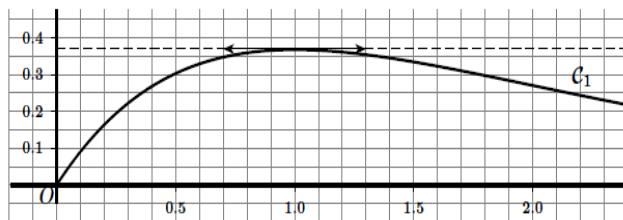
$$f_2(x) - f_1(x) = xe^{-2x}(2 - e^x).$$

II-3-b- On déduit de la question II-3-a- que les courbes  $C_1$  et  $C_2$  ont deux points communs  $P$  et  $Q$  d'abscisses respectives  $p$  et  $q$  (avec  $p < q$ ).

Donner les valeurs exactes de  $p$  et  $q$  et une valeur approchée de  $q$  à  $10^{-1}$  près.

II-3-c- Donner, pour tout réel  $x \in [0 ; +\infty[,$  le signe de  $f_2(x) - f_1(x)$ .

En déduire la position relative des courbes  $C_1$  et  $C_2$ .



II-4- Sur la figure est tracée la courbe  $C_1$ . Placer les points  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $P$  et  $Q$ .

Tracer la tangente à la courbe  $C_2$  au point  $M_2$ , puis tracer la courbe  $C_2$ .

II-5- On considère la fonction  $F$  définie par : pour tout réel  $x \in [0 ; +\infty[, F(x) = -(x+1)e^{-x}$ .

II-5-a- Justifier que  $F$  est une primitive de la fonction  $f_1$ .

### Exercice 20

#### Problème

##### Partie A

1. En janvier 2006, l'once d'or (soit environ 31 grammes d'or) coûtait 500 \$ contre 1 700 \$ en janvier 2013 (source Les Echos, 2013). Le cours de l'or a donc connu une progression spectaculaire avec une augmentation moyenne d'environ 19 % par an.

En supposant que cette augmentation annuelle reste constante pour les prochaines années, à partir de quelle année le prix de l'once d'or dépassera-t-il les 5 000 \$ ?

2. On s'intéresse à une entreprise spécialisée dans la production d'articles dont la qualité augmente quand on y introduit de l'or. Le coût de production de ces articles, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par une fonction  $C$ .

Cette fonction  $C$  dépend principalement de la masse d'or, exprimée en dizaines de grammes, contenue dans les articles. Les coûts de production augmentent très fortement (on parle, en économie, d'une croissance exponentielle) en fonction de la masse d'or contenue, l'entreprise ne produira que des articles ne contenant qu'une faible quantité d'or.

On admet que tous les articles fabriqués sont vendus et

que leur prix de vente est proportionnel à la masse d'or contenue, la même pour tous les articles.

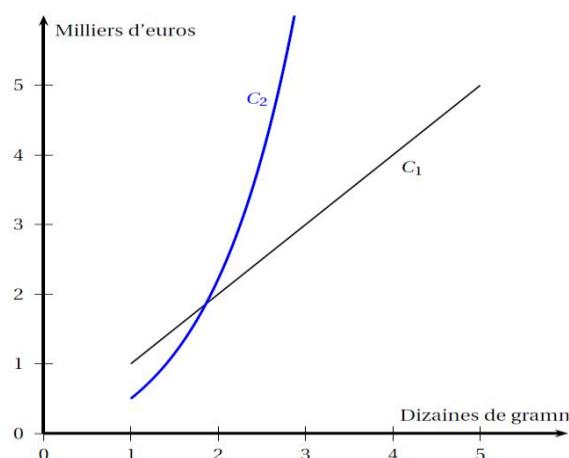
On appelle  $R$  la recette de l'entreprise exprimée en milliers d'euros en fonction de  $x$  la quantité d'or exprimée en dizaines de grammes d'or.

Les courbes des fonctions  $C$  et  $R$  sont données dans le repère ci-dessous.

On suppose que la quantité d'or minimale contenue dans chaque article est de dix grammes.

- Identifier, en justifiant, les courbes associées aux fonctions de coût et de recette.
- Conjecturer le sens de variation de chacune des fonctions.
- On dit que l'entreprise a un bénéfice nul lorsque le coût de production est égal à la recette.
  - Justifier graphiquement qu'il existe une masse d'or exprimée en dizaines de grammes et notée  $\alpha$  pour laquelle le bénéfice de l'entreprise est nul et en déduire une équation vérifiée par  $\alpha$ .
  - Déterminer, avec la précision permise par le graphique, les masses d'or que les articles doivent contenir pour que l'entreprise réalise des bénéfices positifs.

### Partie B



On se propose d'étudier la fonction  $C$  définie et

dérivable sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par :  $C(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2}$

et les solutions éventuelles de l'équation  $C(x) = x$ .

Pour cela on pose  $\phi(x) = C(x) - x$ , pour  $x \in [1; +\infty[$ .

- Déterminer la limite en  $+\infty$  de la fonction  $\phi$ .
- Déterminer le sens de variation de la fonction  $\phi$  sur  $[1; +\infty[$ .
- En déduire que l'équation  $C(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$ .
- Établir que  $\frac{3}{2}\alpha < 2$ .

### Partie C

On se propose d'étudier une méthode d'approximation du nombre  $\alpha$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$  par :

$$g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1.$$

- Démontrer que l'équation  $C(x) = x$  équivaut à l'équation  $g(x) = x$  pour  $x \in I$ .
- a. Justifier que la fonction  $g$  est croissante sur  $I$  et en déduire que, pour tout réel  $x$  appartenant à  $I$ ,  $g(x)$  appartient à  $I$ .
- b. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $I$  :  $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$ .
- On admet alors que, pour tout couple de réels  $(x ; y)$  de  $I$ , on a :  $\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq \frac{1}{2}$ .

- Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a :

$$\frac{|g(x) - \alpha|}{|x - \alpha|} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $I$  définie par  $w_0 = \frac{3}{2}$  et pour tout entier naturel  $n > 0$ ,  $w_{n+1} = g(w_n)$ .

- Donner une valeur arrondie à  $10^{-3}$  près de  $w_2$  et  $w_3$ .
- Établir que pour tout entier naturel  $n$  :

$$|w_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |w_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

- En déduire que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

Quelle est sa limite ?

## Exercices et problèmes

4. Donner un encadrement de la limite de la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'amplitude  $10^{-4}$ . Expliquer la démarche.
5. Pour quelle masse d'or incluse dans les articles produits, l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice nul ? La masse sera donnée en grammes à  $10^{-2}$  près.

### Exercice 21

Pour tout réel  $k$  strictement positif, on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ . Soit  $C_k$  la courbe représentative de  $f_k$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

#### Etude préliminaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .

1. Etudier le sens de variation de  $g$ .
2. En déduire que, pour tout réel  $a$  positif ou nul,  $\ln(1+a) \leq a$ .

#### Partie A : étude de $f_1$

1. Calculer  $f'_1(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f_1$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

3. Dresser le tableau de variation de  $f_1$ .

#### Partie B : étude et propriétés de $f_k$

1. Calculer  $f'_k(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f_k$ .
2. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$ ,

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right). \text{ En déduire la limite de } f_k \text{ en } +\infty.$$

3. a. Dresser le tableau de variation de  $f_k$ .

- b. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0, +\infty[$ , on a

$$f_k(x) \leq \frac{k}{e}.$$

4. Déterminer une équation de la tangente  $(T_k)$  au point d'abscisse 0 de  $C_k$ .
5. Soit  $p$  et  $m$  deux réels strictement positifs tels que  $p < m$ . Etudier la position relative de  $C_p$  et  $C_m$ .

6. Tracer les courbes  $C_1$  et  $C_2$  ainsi que leurs tangentes en 0.

### Exercice 22

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

le symbole  $\ln$  désignant le logarithme népérien.

1. Montrer que  $e^{2x} - e^x + 1$  est strictement positif pour tout réel  $x$ . Étudier les variations de la fonction  $f$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction  $f$ .
2. Préciser les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$
3. Vérifier que  $f(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$  et montrer que  $f(x) - 2x$  tend vers une limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . En déduire l'asymptote correspondante de  $(C)$ .
4. Construire la courbe  $(C)$  (on précisera la tangente au point de  $(C)$  d'ordonnée nulle).
5. Déterminer, en utilisant la courbe  $(C)$ , le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue  $x$  :

$$e^{2x} - e^x + 1 = \frac{7}{8}$$

- a. par le calcul,
- b. en utilisant la courbe  $(C)$ .

### Exercice 23

Soit  $f$  l'application de  $]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie

par  $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ , et  $g$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

définie par  $g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$ .

#### Partie A

1. Montrer que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a

$$a \quad f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}.$$

2. Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  on a

$$a \quad f(x) = 2x - \frac{1}{2} + \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

3. Résoudre l'équation  $g(x) = 0$  puis factoriser  $g(x)$ .

#### Partie B : Etude de $f$

1. Calculer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

## Exercices et problèmes

2. a. Montrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x + \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe (C) représentative de  $f$ .
- b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).
3. Montrer que la fonction dérivée de  $f$  est du signe de la fonction  $g$  de la partie A et dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Réprésenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)
5. a. Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel  $m$ , l'intersection de (C) et de la droite ( $D_m$ ) d'équation  $y = 2x + m$ .
- b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

### Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme  $\frac{u'(x)}{u(x)}$ , déterminer les primitives sur  $]0 ; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - 1}$ .
2. En déduire, en utilisant A.2., les primitives sur  $]0 ; +\infty[$  de  $f(x) - (2x + \frac{1}{2})$ .

### Exercice 24

Dans tout le problème  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan P.

On note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ .

On appelle C la courbe représentative de  $f$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Partie A

1. Etude de  $f$ :
  - a. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ . Justifier vos calculs.
  - b. Préciser les équations des asymptotes.
2. Donner l'expression de  $f'(x)$  où  $f'$  est la dérivée de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ . Préciser  $f(0)$ .
3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse  $x=0$ ; on note  $T_0$  cette tangente.
4. Courbe :

- a. Soit  $x$  un réel quelconque. Calculer  $f(x) + f(-x)$ .
- b. Quelle propriété de symétrie peut-on déduire de la question précédente ?

- c. Tracer C, ses asymptotes et la tangente  $T_0$ .

### Partie B

1. a. Soit  $u(x) = 1 + e^{-x}$ . Calculer  $u'(x)$ .
- b. En déduire la primitive  $F$  de  $f$  qui prend la valeur  $-\ln 2$  en  $x=0$ .

### Exercice 25

On désigne par  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et par  $f'$  sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

- (1) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$ .
- (2)  $f'(0) = 1$
- (3) La fonction  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On rappelle que la dérivée de  $u^n$  est  $nu' u^{n-1}$ .

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) \neq 0$ .
- b. Calculer  $f(0)$ .
2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

- (4) Pour tout nombre réel  $x$ ,  $f''(x) = f(x)$ .

où  $f''$  désigne la dérivée seconde de la fonction  $f$ .

3. On pose  $u = f' + f$  et  $v = f' - f$ .
  - a. Calculer  $u(0)$  et  $v(0)$ .
  - b. Démontrer que  $u' = u$  et  $v' = -v$ .
  - c. En déduire les fonctions  $u$  et  $v$ .
- d. En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .
4. a. Etudier les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
- b. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
5. a. Soit  $m$  un nombre réel. Démontrer que l'équation  $f(x) = m$  a une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
- b. Déterminer cette solution lorsque  $m = 3$  (on en donnera une valeur approchée décimale à  $10^{-2}$  près).

### Exercice 26

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}.$$

## Exercices et problèmes

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers 0,  $x$  réel positif. En déduire que C possède une asymptote dont on précisera l'équation.

2. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Montrer que la droite D d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.

3. a. Calculer, pour tout  $x$  réel strictement positif, le nombre dérivé  $f'(x)$ . Montrer que, pour tout  $x$  réel

$$\text{strictement positif, } f'(x) = 2 \frac{\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}.$$

b. Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . En déduire le tableau de variations de  $f$  sur cet intervalle.

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.

5. a. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout

$$x > 0, f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x - 1}.$$

### Exercice 27

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]-\infty ; 1[$  par

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

On désigne par  $(\Gamma)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , l'unité graphique étant 2 cm.

#### Partie 1

1. a. Soit  $X = \frac{2}{x-1}$ . Prouver l'égalité  $f(x) = \frac{e}{2} X^2 e^X$ . En

déduire la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures.

b. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

c. En déduire une asymptote à la courbe  $(\Gamma)$ .

2. a. Soit  $v$  la fonction numérique définie sur  $]-\infty ; 1[$

par  $v(x) = \frac{x+1}{e^{x-1}}$ . Calculer  $v'(x)$ .

b. Démontrer que  $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$ .

c. Etudier les variations de  $f$ .

d. Tracer la courbe  $(\Gamma)$ .

### Exercice 28

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty$  par

$$f(x) = x^2 - 3 + 3e^{-\frac{1}{3}x} \text{ et } g \text{ la fonction également définie}$$

sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = 2x - e^{-\frac{1}{3}x}$ . On note C la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité graphique : 2 cm.

#### 1. Sens de variation de $g$

a. Calculer la dérivée  $g'$  de  $g$  ; vérifier que  $g'(x)$  est toujours strictement positif.

b. Calculer la limite de  $g$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$  et montrer que  $0,4 \leq \alpha \leq 0,5$ .

d. Étudier le signe de  $g(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

e. Montrer que  $f'(x) = g(x)$  ; en déduire le sens de variation de  $f$ .

#### 2. Comportement asymptotique de $f$ en $+\infty$

a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. Déterminer le signe de  $f(x) - (x^2 - 3)$  et sa limite en  $+\infty$  ; interpréter graphiquement ce résultat ; on note P la courbe d'équation  $y = x^2 - 3$ .

#### 3. Signe de $f$

a. Dresser le tableau de variation de  $f$

b. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution non nulle  $a$  et une seule appartenant à l'intervalle  $[\alpha ; +\infty[$  et montrer que  $0,8 < a < 0,9$ .

c. Étudier le signe de  $f(x)$  sur  $[0 ; +\infty[$ .

#### 4. Courbe

Tracer dans le repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  les

courbes P et C. On précisera la tangente à C au point d'abscisse 0.

## Exercice 29

A. On désigne par  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^2 - e^x}$  et on appelle  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les variations de  $f$ . Préciser les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2. Déterminer le signe de  $f(x)$  en fonction de  $x$ .

3. Tracer la courbe  $C$ .

B. Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0\}$  par  $g(x) = \ln \left| \frac{x}{e^2 - e^x} \right|$ .

On note  $G$  la courbe représentative de  $g$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Préciser les limites de  $g$  en  $-\infty$ , en  $+\infty$  et en 0.

2. Calculer  $g'(x)$  et déterminer le signe de  $g'(x)$  en utilisant le signe de  $f'(x)$  et le signe de  $f(x)$ . Dresser le tableau de variation de  $g$ .

3. Démontrer que pour tout  $x$  réel strictement positif,

$$g(x) - x = \ln \left( 1 - e^{-\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $G$ . Étudier la position de la courbe  $G$  par rapport à  $D$  pour tout  $x$  réel strictement positif.

4. Démontrer que pour tout  $x$  réel strictement négatif :

$$g(x) - \frac{x}{2} = \ln \left( 1 - e^{\frac{x}{2}} \right).$$

Montrer que la droite  $d$  d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe  $G$ . Étudier la position de  $G$  par rapport à  $d$  pour tout  $x$  réel strictement négatif.

5. Construire  $G$ ,  $D$  et  $d$  (on utilisera un graphique différent de celui de la partie A).

## Exercice 30

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

On note  $C$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère

orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

b. Établir que, pour tout nombre réel  $x$  non nul,

$$f(x) = x \left( 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right). \text{ En déduire la limite de } f \text{ en } +\infty.$$

2. Donner, sans démonstration, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \text{ et démontrer que } f \text{ est continue en } 0.$$

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a :

$$e^x \geq x + 1, \text{ et que l'égalité n'a lieu que pour } x = 0.$$

b. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et déterminer la fonction  $g$  telle que, pour tout nombre réel  $x$  non nul,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

c. Donner le tableau des variations de  $f$ .

4. Soient  $x$  un nombre réel non nul et les points  $M(x; f(x))$  et  $M'(-x; f(-x))$  de la courbe  $C$ .

a. Établir que  $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ , puis déterminer le coefficient directeur de la droite  $(MM')$ .

b. On admet que la fonction  $f$  est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

## Exercice 31

L'objet de cet exercice est d'étudier la fonction  $g$

définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$  si  $t > 0$  et  $g(0) = 1$ .

1. a. Établir que  $g$  est continue en 0.

b. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2. a. Pour tout  $t > 0$ , calculer  $g'(t)$ .

b. Prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $1 + t \leq e^t$ .

c. En déduire le signe de  $g'$  et le sens de variation de  $g$  (on ne demande pas de construire la courbe représentative de  $g$ ).

3. On se propose d'étudier la dérивabilité de  $g$  en 0. À cet effet on introduit la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $h(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}$ .

a. Calculer  $h'$  et  $h''$ , ainsi que les valeurs de  $h(0)$  et  $h'(0)$ .

## Exercices et problèmes

- b. Prouver que pour tout  $t \geq 0$ ,  $0 \leq h(t) \leq \frac{t^3}{6}$  (1). Pour cela, on établira d'abord que  $0 \leq h''(t) \leq t$  et on en déduira un encadrement de  $h'$  et de  $h$ .
- c. Déduire de la relation (1) un encadrement de  $\frac{1-e^{-t}-t}{t^2}$ . Prouver finalement que  $g$  est dérivable en 0 et donner la valeur de  $g'(0)$ .

4. Construire la courbe représentative  $C$  de  $g$ , le plan étant rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 32

Le but des deux premières questions de cet exercice est l'étude, sur  $\mathbb{R}$ , de l'équation

$$(E) : 3^x + 4^x = 5^x$$

1. Démontrer que  $(E)$  est équivalente à :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x.$$

- a. Question de cours : pour tout réel  $a$  strictement positif, on note  $f_a$  la fonction (exponentielle de base  $a$ ) définie pour tout réel  $x$  par :  $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$ .

Démontrer que  $f_a$  est strictement croissante lorsque  $a$  est élément de  $]1; +\infty[$ , strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  lorsque  $a$  est élément de  $]0; 1[$  et est constante lorsque  $a$  est égal à 1.

Étudier la limite de  $f_a$  en  $+\infty$ , selon les valeurs de  $a$ .

- b. Étudier le sens de variations de  $f$ .

- c. Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

- d. En déduire qu'il existe un unique  $x_0$  réel positif ou nul tel que  $f(x_0) = 1$ . Donner la valeur de  $x_0$ .

### 3. Questions avec « prise d'initiative »

- a. Résoudre, sur  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ .
- b. L'équation  $3^x + 4^x + 5^x + 6^x = 7^x$  admet-elle une solution entière ( $x$  solution est un nombre entier) ?

### Exercice 33

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire $g$

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x),$$

1. Calculer  $g'(x)$  et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .
3. Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ . En déduire le signe de  $g(x)$ .

#### Partie B : Étude de la fonction $f$

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1+2e^x).$$

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que pour tout réel  $x$ ,

$$f'(x) = 2e^{-2x} g(x).$$

2. En posant  $X = 1+2e^x$ , montrer que

$$f(x) = \frac{4X}{(X-1)^2} \frac{\ln X}{X}. \text{ En déduire la limite de } f \text{ en } +\infty$$

3. En posant  $h = 2e^x$ , calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .

5. On note  $C$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- a. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C$  au point d'abscisse 0.

- b. Tracez la courbe  $C$  et la tangente  $T$ .

### Exercice 34

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a.  $2^x = 3^{2x+1}$    b.  $\sqrt{2^{\sqrt{x}}} = 5$

c.  $5^{1-x} \leq 3$    d.  $7^{\frac{x}{x+1}} \leq 6^x$

2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes et calculer leur dérivée :

a.  $f$  définie par  $f(x) = x^{\ln x}$

b.  $g$  définie par  $g(x) = (\ln x)^x$ .

## Exercices et problèmes

### Exercice 35

On appelle  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{\sqrt{x}} \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Prouver que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1$
2. En déduire la continuité de  $f$  en 0.
3. Etudier le signe de  $f(x)$ .
4. Etudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
5. Montrer que l'on a pour tout  $x > 0$  :

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - 2xe^{-x}}{2x\sqrt{x}}.$$

6. Etudier les variations de  $f$  à l'aide d'une fonction auxiliaire.
7. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 (on sera amené à utiliser la question 1)

### Exercice 36

On appelle  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = xe^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

1. Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Etudier la continuité de  $f$  en 0.
3. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
4. Etudier les variations de  $f$ .
5. Montrer que la droite d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à la courbe de  $f$  (on sera amené à poser  $x = \frac{1}{t}$ ).
6. Tracer la courbe de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 3 cm.

### Exercice 37

On désigne par  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle

$]0 ; +\infty[$ , les solutions de l'équation  $E_a$  :  $x^a = a^x$ .

#### L. Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de

l'équation  $E_2$ .

2. Vérifier que le nombre  $a$  est toujours solution de l'équation  $E_a$ .
3. On se propose de démontrer que  $e$  est la seule solution de l'équation  $E_e$ .

On note  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$

$$\text{par } h(x) = x - e \ln x.$$

- a. Question de cours : On rappelle que lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors  $\frac{e^t}{t}$  tend vers  $+\infty$ .  
Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .
- b. Déterminer les limites de  $h$  en 0 et  $+\infty$ .
- c. Etudier les variations de  $h$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
- d. Dresser le tableau des variations de  $h$  et conclure quant aux solutions de l'équation  $E_e$ .

#### II. Résolution de l'équation $E_a$

1. Soit  $x$  un réel strictement positif. Montrer que  $x$  est solution de l'équation  $E_a$  si et seulement si  $x$  est solution de l'équation :  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- a. Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ . Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

- b. Etudier les variations de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- c. Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .

- d. Tracer la courbe  $C$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , unité : 2 cm.

3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions  $(P_1)$  et  $(P_2)$  suivantes :

$(P_1)$  : si  $a \in ]0 ; 1]$ , alors  $E_a$  admet l'unique solution  $a$  ;

$(P_2)$  : si  $a \in ]1 ; e[ \cup ]e ; +\infty[$ , alors  $E_a$  admet deux solutions  $a$  et  $b$ , l'une appartenant à l'intervalle  $]1 ; e[$  et l'autre appartenant à l'intervalle  $]e ; +\infty[$ .

- b) Etudier les variations de la fonction  $f$

- c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une

### Exercice 38

## Exercices et problèmes

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

1/a) Montrer que  $f$  est dérivable sur

$$\mathbb{R} \text{ et que } f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

2/a) Etudier les variations de la fonction

$$g(x) = f(x) - x.$$

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $a$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $a \in ]2; 3[$

3/a) Montrer que  $\forall x \in ]2; 3[$  on a :  $|f'(x)| \leq 0,5$

b) En déduire que

$$\forall x \in [2; 3] \text{ on a : } |f(x) - a| \leq 0,5. |x - a|$$

4/ Soit  $V$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq V_n \leq 3$$

b) Montrer que :  $|V_{n+1} - a| \leq 0,5. |V_n - a|$

c) Déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} : |V_n - a| \leq (0,5)^n \text{ et calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$$

### Exercice 39

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$$

I-1/a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Interpréter

géométriquement le résultatat.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2/a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^{-x})$

b) En déduire que la droite  $D : y = x + 1$  est une A.O à  $\zeta_f$  au V( $-\infty$ )

c) Déterminer la position de  $\zeta_f$  par rapport à  $D$

3/a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

solution unique  $x_0 = -\ln(e - 1)$

4/ Tracer la courbe de  $\zeta_f$  et ses asymptotes

5/a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\infty, 1[$

b) Tracer  $\zeta_{f^{-1}}$  courbe représentative de  $f^{-1}$ ,

fonction réciproque de  $f$

c) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in ]-\infty, 1[$

### Exercice 40

A) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = (1 - x)e^x + 1$$

1) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

2) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $1.2 < \alpha < 1.3$ .

b) En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

B) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que la droite  $\Delta : y = x$  est une asymptote à  $(C)$ .

b) Etudier la position relative de  $(C)$  et  $\Delta$ .

3) Montrer que pour tout réel  $x$ , on a :

$$f(-x) = f(x) - x.$$

4) Vérifier que  $f(\alpha) = \alpha - 1$  et que  $f(-\alpha) = -1$

5) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Vérifier que  $f'(-\alpha) = 1$  puis écrire une équation de la tangente  $T$  à  $(C)$  au point d'abscisse  $-\alpha$ .

6) Pour tout réel non nul  $x$ , soient les points  $M$  et  $M'$  de  $(C)$ , d'abscisses respectives  $x$  et  $-x$ .

## Exercices et problèmes

Montrer que la droite (MM') est parallèle à une droite fixe qu'on précisera.

7) Dans la figure de la page annexe, on a placé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le point de coordonnées  $(\alpha, 0)$ .

a) Construire les points A  $(\alpha, \alpha - 1)$  et B  $(-\alpha, -1)$ .

b) Construire la tangente T.

c) Tracer la courbe (C) et la droite  $\Delta$ .

### Exercice 41

A/ Soit la fonction  $f$  définie sur IR par :

$f(x) = x - e^{2x-2}$ . On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Résoudre dans IR, l'équation  $1 - 2e^{2x-2} \geq 0$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$

2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans IR exactement deux solutions  $\alpha$  et 1.

Vérifier que  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ .

B/ Soit la fonction  $g$  définie sur IR par :  $g(x) = e^{2x-2}$  et la suite  $(u_n)$  définie sur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

4) a) Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , on a :

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$$

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |u_n - \alpha|$$

c) En déduire que pour tout entier naturel on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n. Retrouver alors \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

### Exercice 42

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathfrak{R}$  par :

$$g(x) = e^x (2-x) - 2$$

1°) Dresser le tableau de variation de  $g$  ?

2°) a- Monter que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans

$]1; +\infty[$  une solution unique  $\alpha$

b- Calculer  $g(0)$ . Etudier alors le signe de  $g(x)$ .

3°) Soit la fonction  $f$  définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

a- Montrer que  $f$  est continue et dérivable en 0

$$\text{b- Montre que } f'(x) = \frac{x g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

4°) a- Montrer que  $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ .

b- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ , en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

c- Dresser le tableau de variation de  $f$  et Tracer

$$\xi_f$$

### Exercice 43

Soit  $g(x) = x + \ln(e^{-2x} + 1)$  ;  $x \in [0, +\infty[$ . On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) Etablir le tableau de variation de  $g$ .

2) Montrer que la droite D :  $y=x$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$ .

3) Etudier la position de (C) par rapport à D.

4) Tracer (C) et D.

5) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur un intervalle K qu'on précisera.

b) Tracer la courbe (C') de la fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .

6) a) Montrer que pour tout t de  $[0, +\infty[$  on a :

$$1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$$

b) En déduire que pour tout x de  $[0, +\infty[$  on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$$

c) En déduire un encadrement de  $\ln(1+e^{-2t})$  pour tout t de  $[0, +\infty[$ .

# Chapitre 6

## Théorème de rolle et accroissement finis

### Histoire

Mathématicien autodidacte, Michel Rolle (Amber, 1652 – Paris, 1719) était comptable et il étudiait l'algèbre dans ses moments libres. En 1690, il publie le traité d'algèbre qui contient sa « méthode des cascades », permettant d'encadrer les racines réelles de certains types d'équations. Un an plus tard, dans sa « Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalités de tous les degrés », on y trouve le théorème qui porte son nom et selon lequel « une fonction ne peut s'annuler plus d'une fois dans l'intervalle séparant deux racines réelles consécutives de sa fonction dérivée ». De nos jours, on formule ce théorème de façon équivalente en disant qu'entre deux zéros d'une fonction dérivable se trouve toujours au moins un zéro de sa dérivée. Rolle se méfiait des nouvelles méthodes du calcul différentiel et il s'efforça à les dénoncer et à combattre le livre de calcul de L'Hospital. Ironie du sort que ce mathématicien français soit aujourd'hui reconnu pour son apport dans le domaine qu'il essaya de discréditer de son vivant !



Michel Rolle est un mathématicien français

(1652-1719)

## I. Théorème de rolle

### Theorème

Soit  $f$  une fonction satisfaisant les trois conditions suivantes :

- $f$  est continue en tout point de l'intervalle fermé  $[a, b]$  ;
- $f$  est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert  $]a, b[$  ;
- $f(a) = f(b)$ .

Alors, il existe au moins un nombre  $c$  dans  $]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$

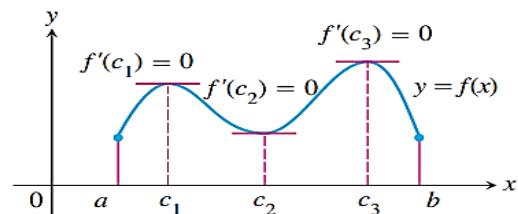
(figure 1).

### Démonstration

Si  $f$  est constante tous les points  $x$  donnent  $f'(x) = 0$ . Sinon, comme  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , il existe un point  $c$  tel que pour tout  $x$  de  $[a ; b]$ ,  $f(x) \leq f(c) = M$  (si  $f(a)$  est différent de  $M$ , sinon on fait le même raisonnement avec  $f(x) \geq f(c) = m$ ).

Soit  $g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ , si  $x > c$ ,  $g(x) \leq 0$ , et si  $x < c$ ,  $g(x) \geq 0$  ; on a

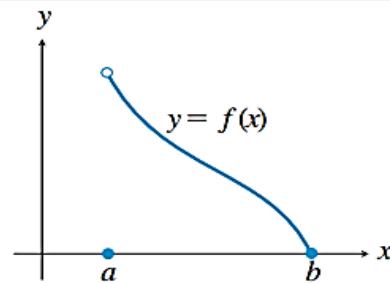
donc  $\lim_{x \rightarrow c^+} g(x) \leq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow c^-} g(x) \geq 0$  d'où  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 = f'(c)$ .



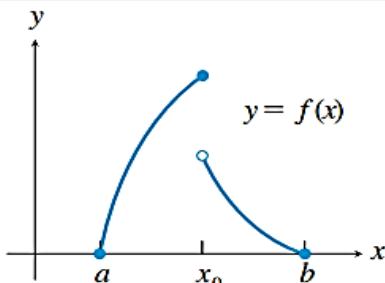
**Figure 1** Selon le théorème de Rolle, toute courbe dérivable admet au moins une tangente horizontale entre deux points d'ordonnées égales. Le nombre  $c$  pour lequel  $f'(c) = 0$  n'est pas nécessairement unique : ici,  $f'(x) = 0$  en trois points.

**Remarque :** Prêtez attention aux hypothèses du théorème de

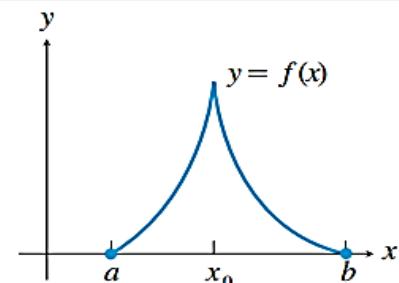
Rolle. Si l'une des conditions n'est pas observée, il est possible que la fonction  $f$  n'admette aucune tangente horizontale sur l'intervalle (figure 2).



a)  $f$  dérivable partout sur  $]a, b[$  mais discontinue à l'une des bornes.



b)  $f$  discontinue en un point intérieur et nécessairement non dérivable en un point  $x_0$  de  $]a, b[$ .



c)  $f$  continue sur  $[a, b]$ , mais non dérivable en un point  $x_0$  de  $]a, b[$ .

**Figure 2** Trois situations où  $f$  n'admet pas de tangente horizontale sur  $]a, b[$ .

### Application :

Montrez que les conditions du théorème de Rolle sont satisfaites par :  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 1$  sur l'intervalle  $[-3; 3]$

## Solution

En tant que polynôme,  $f(x)$  est continue et dérivable partout ;  $f(x)$  est donc continue et dérivable sur  $[3, 3]$ . Nous avons également  $f(-3) = 1 = f(3)$ .

Les conditions du théorème de Rolle sont donc satisfaites. D'après le théorème,  $f$  doit valoir 0 au moins une fois en un point  $c$  de l'intervalle ouvert  $]3, 3[$ . Or,  $f'(x) = x^2 - 3$ . Cette dérivée prend la valeur 0 deux fois sur l'intervalle  $]3, 3[$  : en

$$x = \sqrt{3} = c_1 \text{ et en } x = -\sqrt{3} = c_2$$

Exemple 2 : soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = e^{x^2}$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[-1; 1]$  et dérivable sur  $]-1; 1[$  et  $f(-1) = f(1) = e$

Donc d'après le théorème de Rolle il existe au moins un  $c$  de  $]-1; 1[$  tel que  $f'(c) = 0$  c à d  $2ce^{c^2} = 0$  et par suite

$$c = 0 \text{ et } 0 \in ]-1; 1[.$$

Exemple 3 : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f'$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $]a, a + 2\pi[$ .

La fonction  $f$  est  $2\pi$ -périodique et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f(a) = f(a + 2\pi)$  et le théorème de Rolle montre l'existence d'un réel  $c \in ]a, a + 2\pi[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Application :** vérifier les conditions de théorème de ROLLE pour la fonction  $f$  dans l'intervalle  $I$  dans chacun des cas suivants :

$$1) \quad f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ et } I = [1; 2]$$

$$2) \quad f(x) = \sin^2 x \text{ et } I = [0; \pi]$$

$$3) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6} \text{ et } I = [1; 2]$$

## II. Théorème des accroissements finis (Théorème de la moyenne de Lagrange )

Le théorème de la moyenne de Lagrange, aussi appelé théorème des accroissements finis, peut être considéré comme une version « inclinée » du théorème de Rolle.

### Théorème

Soit  $f$  une fonction vérifiant les deux conditions suivantes :

- $f$  est continue en tout point de  $[a, b]$  ;
- $f$  est dérivable en tout point de  $]a, b[$ .

Alors, il existe au moins un nombre  $c$  dans l'intervalle  $]a, b[$  tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$c \text{ à d } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

## Démonstration

Représentons le graphe de  $f$  par une courbe dans le plan (figure 3) et traçons la droite passant par les points  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$ .

Voici l'équation point-pente décrivant cette droite :

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

L'écart vertical séparant les graphes de  $f$  et  $g$  au point d'abscisse  $x$  est donné par :

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La figure 4 présente simultanément les graphes de  $f$ ,  $g$  et  $h$ .

La fonction  $h$  satisfait aux trois conditions du théorème de Rolle sur  $[a, b]$  : elle est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  puisque  $f$  et  $g$  le sont également

De plus,  $h(a) = h(b)$  vu que les graphes de  $f$  et de  $g$  se coupent aux points

$A$  et  $B$  ; nous pouvons d'ailleurs le vérifier algébriquement en détail :

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

Et

$$h(b) = f(b) - g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$$

Selon le théorème de Rolle, il existe un nombre  $c$  dans l'intervalle  $]a, b[$  pour lequel  $h'(c) = 0$ .

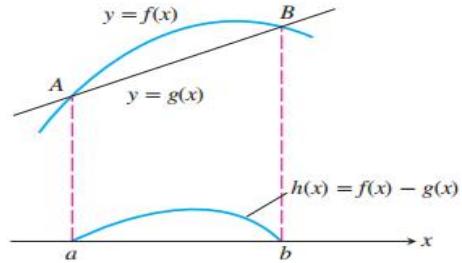
Dérivons les deux membres de l'équation (2) par rapport à  $x$ , puis posons  $x = c$

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

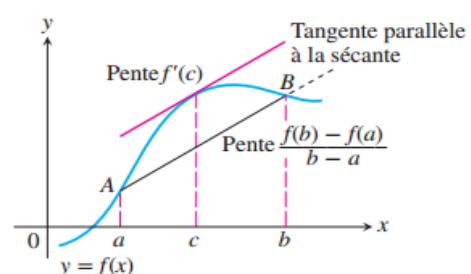
$$\text{On évalue en } x = c \quad h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad h'(c) \\ = 0 \text{ par le théorème de ROLLE sur la fonction } h$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b} \quad \text{CQFD}$$



**Figure 4** La sécante  $AB$  est le graphe de la fonction  $g(x)$ . La fonction  $h(x) = f(x) - g(x)$  correspond à l'écart vertical séparant les graphes de  $f$  et de  $g$  au point d'abscisse  $x$ .

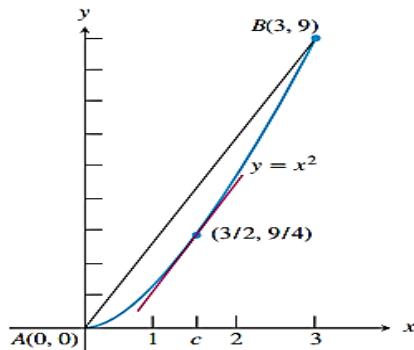


**Figure 3** En termes géométriques, le théorème de la moyenne de Lagrange affirme qu'en un point situé quelque part entre  $A$  et  $B$ , la courbe admet au moins une tangente parallèle à la sécante  $AB$ .

## Exemples

1) La fonction  $f(x) = x^2$  (figure 6) est continue sur  $0 \leq x \leq 3$  et dérivable sur  $0 < x < 3$ . Dès lors que  $f(0) = 0$  et  $f(3) = 9$ , selon le théorème des accroissements finis (de la moyenne de Lagrange), il doit exister un point  $c$  de l'intervalle de définition de la dérivée pour lequel  $f'(x) = 2x$  est égale à  $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9 - 0}{3 - 0} = 3$ .

Ici, nous pouvons trouver  $c$  au moyen de l'équation  $f'(c) = 2c = 3$ , soit  $c = 3/2$ .



**Figure 6** La tangente au point d'abscisse  $c = 3/2$  est parallèle à la sécante. Leur pente commune vaut 3.

2) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 - 3x + 12$

La fonction  $f$  est continue sur  $[1 ; 2]$  et dérivable sur  $]1 ; 2[$  donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel  $c$  dans  $]1 ; 2[$  tel que  $f(2) - f(1) = (2 - 1)f'(c)$  c à d  $f'(c) = 4$  ce qui équivaut  $3c^2 - 3 = 4$

$$\text{C à d } c = \sqrt{\frac{7}{3}} \text{ ou } c = -\sqrt{\frac{7}{3}} \text{ et tel que } c \in ]1 ; 2[ \text{ alors } c = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

**Application :** déterminer parmi les fonctions suivantes les quelles satisfaites les conditions de théorème des accroissements finis sur  $I$

- 1)  $f(x) = x^3 + x - 4$  et  $I = [0; 2]$
- 2)  $g(x) = 2\sqrt{x} + \sin x$  et  $I = [0; \pi]$
- 3)  $\begin{cases} h(x) = x^2 - 4 \\ h(x) = 5x - 8 \end{cases}$  et  $I = [1; 2]$

## III. Inégalité des accroissements finis

### propriété

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ .

S'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall x \in ]a ; b[$   $m \leq f'(x) \leq M$  alors  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

### Démonstration :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$

Donc d'après le théorème des accroissements finis il existe un  $c$  de  $]a ; b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Et comme  $\forall x \in ]a ; b[ m \leq f'(x) \leq M$  alors  $m \leq f'(c) \leq M$  donc  $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$

Et par suite  $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$  car  $a < b$

## Propriété

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a ; b]$  et derivable sur  $]a ; b[$  et  $k$  un reel strictement positif .

Si  $\forall x \in ]a ; b[ |f'(x)| \leq k$  alors  $|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$

## Exemples

1) Soit  $f$  la fonction definie par  $f(x) = \sin x$

- La fonction  $f$  est continue et derivable sur  $IR$  et on a  $\forall x \in IR f'(x) = \cos x$  et  $\forall x \in IR |f'(x)| \leq 1$

Soit  $a$  et  $b$  deux reels d'apres la proprieté precedente on a :  $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$

Si  $a = 0$  alors  $\forall b \in IR |\sin b| \leq |b|$

2) Soit  $g$  la fonction definie par  $g(x) = \arctan x$

Et soient  $a$  et  $b$  deux reels tels que  $0 \leq a < b$

On a  $g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$  donc  $\forall x \in [a ; b] \frac{1}{1 + a^2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{1 + b^2}$

D'apres l'inegalités des accroissements finis on a :  $\frac{1}{1 + a^2}(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq \frac{1}{1 + b^2}(b - a)$

Et par suite  $\frac{1}{1 + a^2}(b - a) \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{1}{1 + b^2}(b - a)$

## Application :

Demontrer que

$$1) \forall x \in ]0; +\infty[ \quad \frac{x}{1 + x^2} < \arctan x$$

$$2) (\forall (a; b) \in IR^2) \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2} \quad \frac{b - a}{\cos^2 a} < \tan b - \tan a < \frac{b - a}{\cos^2 a}$$

$$3) \forall x; y \in [0; 10] \quad |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y|$$

$$4) \forall a, b \in \left[-1; \frac{4}{3}\right] \quad |u(b) - u(a)| < \frac{3}{4}|b - a| \quad \text{tel que } u(x) = \sqrt[3]{5 - 3x} + x - 2$$

## IV. Monotonie d'une fonction

### Théorème

Soit  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

1. Si  $f'(x) \geq 0$  en tout point de  $]a, b[$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ .
2. Si  $f'(x) \leq 0$  en tout point de  $]a, b[$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a, b]$ .

### Démonstration

Soit deux points,  $x_1$  et  $x_2$ , de  $[a, b]$  tels que  $x_1 < x_2$ .

Puisque les conditions du théorème de la moyenne sont satisfaites pour tout l'intervalle  $[a, b]$ , elles le sont automatiquement pour  $[x_1, x_2]$  inclus dans  $[a, b]$ .

En appliquant le théorème de la moyenne à  $f$  sur  $[x_1, x_2]$ , nous obtenons

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

pour une certaine valeur  $c$  entre  $x_1$  et  $x_2$ .

Puisque  $x_1 < x_2$ ;  $x_2 - x_1$  est positif et  $f(x_2) - f(x_1)$  est de même signe que  $f'(c)$ .

Par conséquent,

1. si  $f'$  est positif sur  $]a, b[$ , alors  $f(x_2) > f(x_1)$  et  $f$  est croissante ;
2. si  $f'$  est négatif sur  $]a, b[$ , alors  $f(x_2) < f(x_1)$  et  $f$  est décroissante.

### Théorème

Les fonctions de dérivée nulle sont des fonctions constantes

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x$  dans  $]a, b[$ , alors  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

### Démonstration

En se basant sur les hypothèses du théorème, nous devons démontrer que la fonction  $f$  possède une valeur constante sur l'intervalle  $[a, b]$ . Pour ce faire, prouvons que si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux points de l'intervalle  $[a, b]$ , alors  $f(x_2) = f(x_1)$ . Soit  $x_1$  et  $x_2$ , deux points de  $[a, b]$  tels que  $x_1 < x_2$ . La fonction  $f$  satisfait aux conditions du théorème des accroissements finis sur  $[x_1, x_2]$ , car elle satisfait déjà à ces hypothèses sur  $[a, b]$  qui contient  $[x_1, x_2]$ . Donc,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

pour une certaine valeur  $c$  entre  $x_1$  et  $x_2$ . Puisque  $f'(x) = 0$  partout sur  $]a, b[$ ,  $f'(c) = 0$  et alors,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

## Cours

d'où  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  et enfin  $f(x_2) = f(x_1)$

### Exemples :

soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = 2 \arctan x - \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)$

La fonction  $g_1: x \mapsto \arctan x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $]0; +\infty[$

La fonction  $g_2: x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et La fonction  $g_1: x \mapsto \arctan x$  est dérivable

sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\arctan og_2 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et par suite la fonction

$g = g_1 - \arctan og_2$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}}{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ g'(x) = 0$  et par suite  $g$  est constante

donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ g(x) = g(1) = \frac{\pi}{2}$

2) soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x + \cos x$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $f'(x) = 1 - \sin x$

on a  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Comme  $f'$  est positive est nulle en des points isolés alors la fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$

### Application :

1) démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[ e^{\frac{x}{x+1}} < x+1 < e^x$

2) pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :  $f_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$

a) démontrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}_+) f_{2n}(x) \leq \ln(1+x) \leq f_{2n-1}(x)$

b) déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \ln(1+x^2)}{x^4}$

## Exercices résolus

### Exercice 1

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow IR$ , continues sur  $[a, b]$ , dérivables sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) \neq f(b)$  et  $g(a) \neq g(b)$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que :  $\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$

On considérera pour cela la fonction  $F$  définie sur  $[a, b]$  par  $F(x) = [f(a) - f(b)]g(x) - [g(a) - g(b)]f(x)$

### Correction

La Fonction  $F$  est sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , de dérivée

$$F'(x) = [f(a) - f(b)]g'(x) - [g(a) - g(b)]f'(x)$$

De plus, on vérifie facilement que :

$$F(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = F(b).$$

appliquer le théorème de Rolle : il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $F'(c) = 0$ , c'est-à-dire, tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

### Exercice 2

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction arctan , montrer que :

$$\forall t > 0 \quad \arctan t > \frac{t}{1 + t^2}$$

### Correction

Le théorème des accroissements finis, applique à la fonction Arctan sur l'intervalle  $[0, t]$  (où  $t$  est quelconque dans  $IR_{*+}$ ), implique l'existence de  $c \in ]0, t[$  tel que :

$$\frac{1}{1 + c^2} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} = \frac{\arctan t}{t}$$

Puisque la fonction  $t \mapsto 1/(1 + t^2)$  est strictement décroissante sur  $IR_+$ , on en déduit immédiatement que :

$$\frac{\arctan t}{t} > \frac{1}{1 + t^2}$$

puis l'inégalité demandée.

$$\arctan t > \frac{t}{1 + t^2}$$

### Exercice 3

a) A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

b) En déduire que les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $IR_{*+}$  par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ et } g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

sont monotones.

c) D'exterminer les limites en l'infini de  $\ln f$  et  $\ln g$ , puis de  $f$  et  $g$ .

### Correction

Appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction  $(x \mapsto \ln x)$ , sur l'intervalle  $[x, x+1]$  : il existe  $c \in ]x, x+1[$  tel que :

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1 - x} = \ln(x+1) - \ln x$$

L'encadrement demandé provient du fait que

$$\frac{1}{c} \in \left] \frac{1}{x+1}, \frac{1}{x} \right[$$

Remarquons que cet encadrement peut aussi s'écrire :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

$$\text{Equivaut à } \forall x > 0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (1)$$

b) Montrer que  $f$  est monotone équivaut à montrer

que  $\ln f$  est monotone. Or

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$$

La première inégalité dans (1) montre alors que  $(\ln f)'(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ , donc que  $\ln f$  est strictement croissante sur  $IR_{*+}$ . De même, on vérifie facilement que :

$$(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$$

La deuxième inégalité dans (1) montre alors que  $(\ln g)'(x) < 0$  pour tout  $x > 0$ , donc que  $\ln g$  est strictement décroissante sur  $IR_{*+}$

c) En multipliant le double inégalité (1) par  $x$ , puis par  $x+1$  on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \frac{x}{x+1} &< x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < 1 \\ &< (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

A l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln g)(x) = 1$ , puis  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e$

### Exercice 4

Soient  $p$  et  $q$  deux réels et  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale  $P$  définie par  $P(x) = x^n + px + q$  admet aux plus trois racines réelles si  $n$  est impair et au plus deux racines réelles si  $n$  est pair.

### Correction

On a  $P'(x) = nx^{n-1} + p$  et  $P''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ .

En particulier, on voit que  $P''$  admet exactement une racine, à savoir  $x = 0$ .

Commençons par le cas où  $n$  est impair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que  $P$  admette quatre racines distinctes  $a < b < c < d$ . La fonction  $P$  est évidemment continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $P(a) = P(b)$ . Le théorème de Rolle implique alors l'existence de  $a_1 \in ]a, b[$  tel que  $P'(a_1) = 0$ . Le même raisonnement sur les intervalles  $[b, c]$  et  $[c, d]$  montre l'existence de  $b_1 \in ]b, c[$  et  $c_1 \in ]c, d[$  tel que  $P'(b_1) = 0$  et  $P'(c_1) = 0$ . Donc  $P'$  admet trois racines distinctes  $a_1 < b_1 < c_1$ . Le même raisonnement montre alors aussi que  $P''$  admet deux racines  $a_2 \in ]a_1, b_1[$  et  $b_2 \in ]b_1, c_1[$ . Ces racines étant nécessairement distinctes, il y a contradiction avec le

fait que  $P''$  admet pour unique racine  $x = 0$ . Il s'ensuit que  $P$  admet aux plus trois racines réelles distinctes.

Traitons maintenant le cas où  $n$  est pair. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que  $P$  admette trois racines distinctes  $a < b < c$ . Comme précédemment, on déduit l'existence de deux racines de  $P'$  distinctes  $a_1 \in ]a, b[$  et  $b_1 \in ]b, c[$ , puis l'existence d'une racine  $a_2 \in ]b_1, c_1[$ . Or on a vu que  $P''$  admet 0 pour unique racine, de sorte que  $a_2 = 0$  et que  $a_1 < 0 < b_1$ . Mais puisque  $P'(x) = nx^{n-1} + p$ , les racines de  $P'$  satisfont l'équation  $x^{n-1} = -\frac{p}{n}$

et puisque  $n$  est pair, les racines sont toutes du signe de  $-p/n$ . On ne peut donc avoir  $a_1 < 0 < b_1$ . Il s'ensuit que  $P$  admet au plus deux racines réelles distinctes.

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = |x| - 2\sqrt{|x|}$$

- 1) Démontrer que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- 2) Déterminer  $g'(x)$  sur les deux intervalles :

$$]-\infty; 0[ \text{ et } ]0, +\infty[$$

- 3) Vérifier que  $g\left(-\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right)$
- 4) Démontrer que  $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[ \quad g'(x) \neq 0$
- 5) Démontrer que  $\exists c \in \left]\frac{1}{4}; 2\right[ \quad g'(c) = 0$

### Exercice 2

On considère la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = (x+2)(x-1)(x+1)(x-3)$$

sans calculer  $h'(x)$  démontrer que l'équation

$h'(x) = 0$  admet trois solutions distinctes

### Exercice 3

- 1) Démontrer que  $\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[ \sin c = c^2$

- 2) déduire que l'équation  $\cos x - 2x = 0$  admet au moins une solution sur  $\mathbb{R}$

- 3) Cette solution est elle unique ? justifier

### Exercice 4

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0,1]$  telle que :

$$\forall x \in [0,1[ \quad f(x) > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

$$\text{Démontrer que } \exists c \in [0,1[ \quad , \frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{3f'(1-c)}{f(1-c)}$$

### Exercice 5

Soit  $f$  une fonction sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$

Et soient  $x_1$  et  $x_2$  et  $x_3$  des éléments de  $I$  tels que :

$$2f(x_3) = f(x_1) + f(x_2)$$

Démontrer que  $\exists c \in I ; f'(c) = 0$

### Exercice 6

Démontrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad x < e^x - 1 < xe^x$

### Exercice 7

$$\text{Démontrer que } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 50^\circ < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{36}$$

### Exercice 8

On considère la fonction  $H$  définie par :

$$H(x) = \frac{1}{x+1} \text{ et soit } \alpha \in ]0, +\infty[$$

- 1) Démontrer que  $\forall x \in ]0, \alpha[$

$$-1 < H'(x) < -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

- 2) déduire que  $\forall x \in ]0, +\infty[$

$$1-x < \frac{1}{x+1} < 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$$

### Exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- 1) Démontrer que pour tout  $x$  de  $[1000 ; 1001]$

$$\frac{1}{3 \times (10,1)^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3 \times 10^2}$$

- 2) Déduire que  $10,0032 < \sqrt[3]{1001} < 10,0033$

### Exercice 10

On considère la fonction définie par :

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad f(x) = \sqrt{x}$$

- 1) Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  et pour tout  $t$  de  $[x; x+1[$  on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq f'(t) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- 2) Déduire que  $\forall x \in ]0; +\infty[$

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- 3) On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est divergente

### Exercice 11

En utilisant le théorème des accroissements finis démontrer que :

$$1) \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \tan a - \tan b < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

$$2) \forall x, y \in [0, 10] \quad |x \sin x - y \sin y| \leq 11|x - y|$$

$$3) \forall x \in ]0, +\infty[ \quad \frac{x}{x^2 + 1} < \arctan x$$

$$4) \forall x \in ]0, +\infty[ \quad x < e^x - 1 < x e^x$$

### Exercice 12

Soit  $f$  une fonction définie sur un segment et continue  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$

montrer que  $(\exists c \in ]0, 1[) : 2cf'(c) = \sqrt{c}$

### Exercice 13

Soit  $f$  définie sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{1 + \sin x}}$$

$$1)a) \text{ Montrer que } f'(x) = \frac{-\cos x}{\sqrt{2}(1 + \sin x)^{\frac{3}{2}}}; \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\lambda$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$c) \text{ Montrer que } |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. On considère la suite  $(U_n)$  définie par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) vérifier que  $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et montrer que

$$0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b) \text{ Montrer que } |U_{n+1} - \lambda| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \lambda| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

et déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

### Exercice 14

Soit  $a, b$  et  $c$  des éléments de  $]0, +\infty[$  tels que

$$\ln(b) - \ln(a) = (b - a) \times \frac{1}{c} \quad \text{démontrer que}$$

$$\sqrt{ab} < c < \frac{1}{2}(a + b)$$

### Exercice 15

Soit  $f$  une fonction définie sur un segment  $[0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on suppose que  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  montrer que

$$(\exists a, b, c \in [0, 1]) : f'(a)f'(b) = \frac{1 - c^n}{1 - c} \cdot c^{n-1}$$

### Exercice 16

1) Démontrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[$

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 - x^2 + x^4$$

2) On considère la fonction  $f$  définie par

$$\forall x \in ]0, +\infty[ \quad f(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$$

a) Démontrer que  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad |f'(x)| \leq x^4$

b) Déduire que  $\forall x \in ]0, +\infty[ \quad |f(x)| \leq x^5$

c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

### Exercice 17

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$  par

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

1) Démontrer que  $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \quad -2 \leq f'(x) < 1$

Déduire que  $\forall a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) \sin a \leq \cos a - \sin a \leq \left(\frac{\pi}{4} - a\right) \sin a$$

## Exercices et problèmes

### Exercice 18

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$

Par  $f(x) = \sin x$

On sait d'après le théorème des accroissements finis

que pour tout  $a$  et  $b$  de  $[0; \frac{\pi}{2}]$  on a :

$$\exists c \in ]a; b[ : f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

1) Démontrer que  $c$  est unique

$$2) \text{ Démontrer que } 0 < c - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

### Exercice 19

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  démontrer que

$$\exists c \in ]a; b[ : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) + \frac{b - a}{2} f''(c)$$

### Exercice 20

Soit  $f$  une fonction trois fois dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$  démontrer qu'il existe  $c$  de  $]a; b[$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)f''(a) \\ &\quad + \frac{1}{6}(b - a)^2 f'''(c) \end{aligned}$$

### Exercice 21

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$

Démontrer que si l'équation  $f(x) = 0$  admet 4

solutions alors l'équation  $f'(x) = 0$  admet trois

solutions

### Exercice 22

On considère la fonction  $f$  définie de  $[1; 2]$  vers  $\mathbb{R}$

par :  $f(x) = \sin(x - 1) + 2 \sin(x - 2) + \sin(x - 3)$

Démontrer que  $\exists (a, b) \in [1; 2]^2$  :

$$1 - \frac{f(1)}{f(a)} = 2 - \frac{f(2)}{f(b)} \text{ et } (a \neq b)$$

### Exercice 23

$F$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a; b]$  et dérivables sur  $]a; b[$  telles que :

- $\forall x \in [a; b] \quad g(x) \neq 0$
- $\forall x \in ]a; b[ \quad g'(x) \neq 0$
- $(fg)(a) = (fg)(b)$

$$\text{Démontrer que : } (\exists c \in ]a; b[) : \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

### Exercice 24

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que :

$$f(a) = f(b) = 0$$

Démontrer que  $\exists c \in ]a; b[ : f'(c) + f(c)g'(c) = 0$

### Exercice 25

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et dérivable 3 fois sur  $]a; b[$  telle que :

$$\exists x \in ]a; b[ \quad f(a) = f(b) = f(c) = 0$$

Démontrer que pour tout  $x$  de  $]a; b[$  il existe  $\alpha$  de

$$]a; b[ : f(x) = \frac{1}{6}(x - a)(x - b)(x - c)f'''(\alpha)$$

### Exercice 26

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$  telle que :

$$\forall x \in ]a; b[ \quad f(x) \neq 0 \text{ et } f(a) = f(b) = 0$$

Démontrer que :

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\exists c \in ]a; b[) \quad f'(c) = \lambda f(c)$$

### Exercice 27

Démontrer que

$$(\forall x \in ]2; +\infty[) \quad 1 - \frac{1}{x+2} < \ln(x+2) < x+1$$

# Chapitre 7

## Les équations différentielles

### Histoire

*Le pendule isochrone.* le problème consiste à modifier le pendule standard pour rendre la période indépendante de l'amplitude.

*Huygen (1673, horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que la force accélératrice devienne proportionnelle à la longueur d'arc s.*

*Le mouvement du pendule serait alors décrit par  $s'' + Ks = 0$ , dont les oscillations sont indépendantes de l'amplitude*

(E.Hair et al,L'analyse au fil de l'Histoire,2000)

## I. L'équation différentielle de premier ordre

### 1) Equation différentielle $y' = ay \quad a \in IR^*$

Une équation de la forme  $y' = ay$ , où l'inconnue  $y$  est une fonction et  $a$  est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre coefficient constant. Résoudre dans IR une équation de la forme

$y' = ay$  c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur IR qui vérifient  $y' = ay$

#### Propriété

Les solutions de l'équation différentielle  $y' = ay$  sont les fonctions définies et dérivables sur R telles que :

$$y = \lambda e^{ax} \text{ avec } \lambda \in IR$$

$y = \lambda e^{ax}$  avec  $\lambda \in IR$  est appellé la solution générale de l'équation différentielle  $y' = ay$

**Démonstration :**  $y' = ay$ ,

$$\begin{aligned} \text{Soit } \frac{y'}{y} &= a \Rightarrow \ln|y| = ax + k \\ \Leftrightarrow |y| &= e^{ax+k} = e^k e^{ax} \\ \Leftrightarrow y &= \pm C e^{ax} = \lambda e^{ax} \text{ avec } C \text{ réel positif non nul.} \end{aligned}$$

#### Exemples

1) La solution générale de l'équation différentielle

$$y' + 3y = 0 \text{ est } y = \lambda e^{-3x} \text{ avec } \lambda \in IR$$

2) La demi-vie du polonium-218 est presque

exactement 3 minutes.

a) Quelle proportion de la quantité initiale restera-t-il après 5 minutes?

b) Combien de temps est-il nécessaire pour que 99% du polonium-218 soit décomposé?

On pose d'abord l'équation de la décomposition

$$\text{radioactive. } \frac{dQ}{dt} = -kQ.$$

On résout et on obtient .  $Q = Q_0 e^{-kt}$ .

Pour trouver la valeur de  $k$ , on utilise la condition initiale sur la demi-vie :

$$Q(3) = \frac{1}{2} Q_0 \Rightarrow \frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln 2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } Q(t) &= Q_0 e^{-\frac{t}{3} \ln 2} \text{ ou } Q(t) = Q_0 (2)^{-\frac{t}{3}} \\ &= Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \end{aligned}$$

$$a) \text{ on a } Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{3} \ln 2}$$

$$\text{donc } Q(5) = Q_0 e^{-\frac{5}{3} \ln 2}$$

$$\text{En proportion, } \frac{Q_0 e^{-\frac{5}{3} \ln 2}}{Q_0} = e^{-\frac{5}{3} \ln 2} \approx 0,315$$

Après 5 minutes, il reste environ 31,5% de la quantité initiale.

b) On cherche  $t$  pour que  $Q(t) = 0,01 Q_0$

$$0,01 Q_0 = Q_0 e^{-\frac{t}{3} \ln 2} \Rightarrow \ln(0,01) = -\frac{t}{3} \ln 2$$

$$\Rightarrow t = -3 \frac{\ln(0,01)}{\ln 2} \approx 19,93$$

Ça prend donc près de 20 minutes pour que 99% du polonium-218 se décompose.

## Application :

Resoudre les équations différentielles suivantes :  $y' + y = 0$  ;  $y' + \sqrt{2}y = 0$  ;  $2y' + 3y = 0$

- 2) La solution particulière de ED  $y' = ay$  qui vérifie  $y(x_0) = y_0$

### Propriété

Soit  $a$  un réel non nul. Pour tous réels  $x_0$  et  $y_0$ , l'équation  $y' = ay$  admet une unique solution qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ . C'est  $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$

### Exemples

- 1) L'unique solution de l'équation différentielle  $y' = 5y$  qui prend la valeur 3 en 2 est  $y = 3e^{5(x-2)}$
- 2) L'unique solution de l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$  qui vérifie la condition  $y(\ln 3) = 4$  est  $y = 4e^{-2(x-\ln 3)}$

## Application :

- 1) Déterminer la solution de l'équation différentielle  $y' + 3y = 0$  qui prend la valeur -5 en 0
- 2) Déterminer la solution de l'équation différentielle  $y' = 5y$  qui prend la valeur 5 en  $\ln 2$
- 3) L'équation différentielle  $y' = ay + b$

On détermine la solution générale de l'équation différentielle  $y' = ay + b$

$$\text{on a } y' = ay + b \Rightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

on pose  $z = y + \frac{b}{a}$  donc l'équation différentielle  $\left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$  devient  $z' = az$

On sait que la solution générale de l'équation différentielle  $z' = az$  est  $z = \lambda e^{ax}$  avec  $\lambda \in IR$

Donc on remplace  $z$  par  $y + \frac{b}{a}$  on obtient  $y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$

Et par suite la solution générale de ED  $y = ay + b$  c'est  $y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$  avec  $\lambda \in IR$

## Propriété

Soient a et b deux réels non nuls

$$\text{la solution générale de l'ED } y = ay + b \text{ c'est } y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

## Exemples

1) la solution générale de l'équation  $y' = 3y + 7$  est

$$y = \lambda e^{3x} - \frac{7}{3} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

2) la solution générale de l'équation  $y' + 2y + 5 = 0$

$$\text{est } y = \lambda e^{-2x} - \frac{5}{2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

## Application :

- 1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle  $y' + 7y + 11 = 0$
- 2) Déterminer la solution de l'équation différentielle  $y' = \pi y + \sqrt{2}$  qui vérifier  $y(0) = -1$

## II. L'équation différentielle de second ordre

1) L'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  avec  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Soient a et b deux réels. L'équation  $y'' + ay' + by = 0$  telle que l'inconnue est une fonction y deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$  (ou sur un intervalle I de  $\mathbb{R}$ ) s'appelle l'équation différentielle de second ordre.

Cas particuliers :

- Si  $a = b = 0$  : dans ce cas l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  devient  $y'' = 0$

Donc la solution générale de cette équation est  $y = \alpha x + \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels

- Si  $b = 0$  : dans ce cas, l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  devient  $y'' + ay' = 0$

Equivaut à  $(y' + ay)' = 0$  donc ( $\exists b \in \mathbb{R}$ ):  $y' + ay = b$  donc d'après ce qui précède on obtient

$$y = \lambda e^{ax} + \frac{b}{a} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si  $a = 0$  et  $b > 0$  : donc l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  devient  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega = \sqrt{b}$

nous avons vu déjà la solution générale de cette équation différentielle c'est  $y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$  tels  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

## 2) Resolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

### Théorème

Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre de la forme : (E) :  $ay'' + by' + cy = 0$

On appelle équation caractéristique de l'équation (E), l'équation défini par :  $ar^2 + br + c = 0$

Soit  $\Delta$  le discriminant du l'équation caractéristique

Les solutions de l'équation (E) dépend du nombre de racines du l'équation caractéristique

- Si  $\Delta > 0$ , l'équation caractéristique admet deux racines réelles  $r_1$  et  $r_2$ , alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :  $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ ,  $(\lambda, \mu) \in IR^2$
- Si  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique admet une racine double  $r_0$ , alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :  $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$ ,  $(\lambda, \mu) \in IR^2$
- Si  $\Delta < 0$ , l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = r_0 + i\omega$  et  $r_2 = r_0 - i\omega$ , alors les solutions de (E) peuvent se mettre sous la forme :  $y(x) = e^{r_0 x}[\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)]$   $(\lambda, \mu) \in IR^2$

### Exemple :

1) • Résoudre dans R :  $2y'' - 5y' + 2y = 0$

On calcule le discriminant du polynôme caractéristique :  $\Delta = 25 - 16 = 9$ .

- On calcule ses racines :  $r_1 = \frac{5+3}{4} = 2$  et  $r_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$
- On obtient les solutions suivantes :  $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{x}{2}}$

2) soit m un nombre réel fixé. On recherche selon les valeurs de m les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_m): y'' - 2y' + (1 - m)y = 0$$

L'équation caractéristique de ED  $(E_m)$  est  $r^2 - 2r + 1 - m = 0$ . On a  $\Delta = 4m$

- si  $m = 0$  alors  $\Delta = 0$  et l'équation caractéristique une solution double c'est  $r = 1$  et par suite la solution générale de l'équation  $(E_0)$  c'est  $y(x) = (\lambda + \mu x)e^x$ ,  $(\lambda, \mu) \in IR^2$
- si  $m > 0$  alors  $\Delta > 0$  et l'équation caractéristique admet deux racines réels différents  $r_1 = 1 + \sqrt{m}$  et  $r_2 = 1 - \sqrt{m}$  et par suite la solution générale de l'équation différentielle  $(E_m)$  c'est :

$$y(x) = \lambda e^{(1+\sqrt{m})x} + \mu e^{(1-\sqrt{m})x}, (\lambda, \mu) \in IR^2$$

## Cours

- si  $m < 0$  alors  $\Delta < 0$  et l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées  $r_1 = 1 + i\sqrt{-m}$  et  $r_2 = 1 - i\sqrt{-m}$  et par suite la solution générale de l'équation différentielle  $(E_m)$  c'est :

$$y(x) = e^x [\lambda \cos(\sqrt{-m} x) + \mu \sin(\sqrt{-m} x)] \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

### Application

1) Resoudre les équations différentielles suivantes :  $y'' + y' - 3y = 0$  ;  $y'' - 2y = 0$  ;  $y'' - 4y' + 3y = 0$

$$y'' + y' + y = 0 \quad ; \quad y'' + 4y' - 5y = 0$$

2) Resoudre et Discuter selon les valeurs de  $m$  l'équation différentielle  $(E_m)$ :  $y'' - 2my' + my = 0$

**Remarque :** soient  $x_0$  et  $y_0$  et  $z_0$  des réels et  $y$  une solution générale de l'équation différentielle

$$(E): y'' + ay' + by = 0$$

Il existe une solution unique de l'équation  $(E)$  vérifie les conditions initiales suivantes :  $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}$

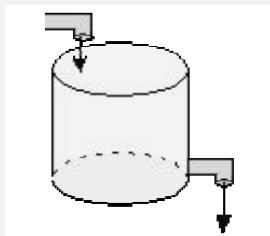
### Exercice 1

**Problèmes de mélanges** On s'intéresse à la quantité  $q(t)$  d'une substance (sel, polluant, drogue, etc.) présente dans un environnement (réservoir, lac, patient, etc.) en supposant que cette substance peut être introduite dans l'environnement à un certain taux régulier (input) et qu'elle peut s'échapper de cet environnement à un autre taux (output). Comme  $\frac{dq}{dt}$  représente le taux de variation de cette quantité, il est raisonnable de supposer qu'on

$$\text{aura cette loi d'équilibre : } \frac{dq}{dt} = \text{input} - \text{output}$$

**Considérons l'exemple classique suivant :**

Un réservoir contient initialement 500 litres d'eau pure. Ce réservoir est alimenté par un conduit qui fournit de l'eau à un débit de 4 litres/minute, avec une concentration de sel de 100 gr/litre. Un autre conduit, au bas du réservoir, laisse l'eau salée s'échapper du réservoir, à un rythme de 4 litres/minute.



Déterminez la quantité de sel présente dans le réservoir en fonction du temps. Donnez la quantité de sel dans l'eau après 10 minutes, et après une heure.

### Correction

Soit  $q(t)$  : la quantité de sel (en kilogrammes) dans le réservoir au temps  $t$  (en minutes)  $q(t)$  puisque l'eau est pure initialement

$$\frac{dq}{dt} = \text{input} - \text{output}$$

$\text{input}$

= le taux de variation de la quantité entrante

= le débit × la concentration

$$= 4 \times \frac{\text{litres}}{\text{minute}} \times 100 \frac{\text{grammes}}{\text{litre}} = 400 \times \frac{\text{gr}}{\text{min}}$$

$$= 0,4 \times \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

On remarque que l'input est constant. Nous supposerons que la solution est maintenue uniforme par brassage.

À un instant  $t$  donné, la concentration dans le réservoir

$$\text{est donnée par } \frac{q(t)}{500} \times \frac{\text{kg}}{\text{litre}}.$$

Comme l'eau du réservoir ayant cette concentration

de sel quitte à un taux de 4 litres/minute, on peut déduire que :

$$\text{output} = \frac{q(t)}{500} \times \frac{\text{kg}}{\text{litre}} \times 4 \frac{\text{litre}}{\text{min}} = \frac{q(t)}{125} \times \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Nous pouvons donc écrire l'équation différentielle de la quantité de sel dans l'eau :

$$\frac{dq}{dt} = 0,4 - \frac{q}{125} \text{ avec } q(0) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire; nous en trouvons la solution générale :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{125} = \frac{4}{10} \Rightarrow q(t) = 50 + Ce^{-\frac{t}{125}}$$

Puis utilisons la condition initiale pour trouver

$$q(t) = 50 - 50e^{-\frac{t}{125}}$$

Après 10 minutes, il y aura

$$q(10) = 50 - 50e^{-\frac{10}{125}} = 3,844 \text{ kg}$$

de sel dans ce réservoir.

## Exercices résolus

Après une heure, il y aura

$$q(60) = 50 - 50e^{-\frac{60}{125}} = 19,061 \text{ kg}$$

de sel dans ce réservoir.

**REMARQUE :** Considérons le cas où le débit à la sortie est différent de celui à l'entrée; disons par exemple qu'il sort 3 litres/minute et qu'il entre 4 litres/minute. La concentration dans le réservoir, au temps  $t$ , sera

$\frac{q(t)}{500+t}$  et non pas  $\frac{q(t)}{500}$  puisque, à chaque minute, le volume augmentera de 1 litre (débit à l'entrée - débit à la sortie).

L'équation différentielle à résoudre est

$$\frac{dq}{dt} = 0,4 - \frac{4q}{500+t}$$

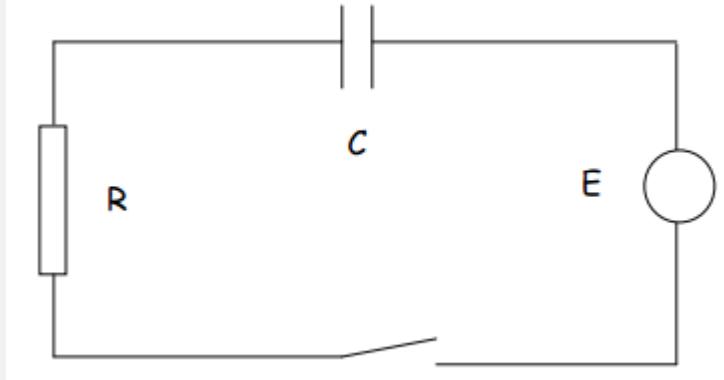
et sa solution donne

$$q(t) = \frac{2t}{25} + 40 - \frac{2,5 \times 10^{12}}{(t+500)^4}$$

### Exercice 2

#### Charge d'un condensateur

On considère le schéma ci-dessous :



montage électrique

Le condensateur de capacité  $C = 4 \times 10^{-4}$  F (farads) est monté en série avec un générateur dont la tension aux bornes est  $E = 6$  V et un conducteur ohmique de résistance  $R = 88 \Omega$  (ohms).

A l'instant initial le condensateur est déchargé et la tension est nulle à ses bornes. On ferme le circuit, et on s'intéresse à l'évolution de la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur. D'après la loi d'Ohm et la loi d'addition des tensions, la tension  $u_c$  aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$E = R \times C \times \frac{du_c}{dt} + u_c$$

. où  $t$  est le temps en secondes.

- 1) Ecrire une l'équation sous la forme  $y' = ay + b$ .
- 2) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- 3) Donner la valeur de  $u_c$  au bout de 100 ms.

#### Correction

- 1) On pose  $y = u_c$ .

L'équation différentielle s'écrit alors :  $E = RCy' + y$

Ou :  $RCy' = -y + E$

$$\text{ou } y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$$

De la forme  $y' = ay + b$  avec  $a = -\frac{1}{RC}$  et  $b = \frac{E}{RC}$

## Exercices résolus

2) Les solutions générales de l'équation  $y' = ay + b$   
sont de la forme :  $y = ke^{at} - \frac{b}{a}$  avec  $k \in IR$

$$\text{Pour } t = 0 \text{ on a } y(0) = 0 \Rightarrow 0 = k - \frac{b}{a} \Rightarrow k = \frac{b}{a}$$

$$\text{soit } y = y = \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

$$\frac{b}{a} = -E$$

$$\text{On a donc } u_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$3) \text{ Pout } t = 100 \text{ ms} = 100 \times 10^{-3} \text{ s} = 0,1 \text{ s}$$

$$u_C(0,1) = 6 \left( 1 - e^{-\frac{0,1}{88 \times 4 \times 10^{-4}}} \right) = 6 \left( 1 - e^{-\frac{1000}{88 \times 4}} \right) \\ = 6 \left( 1 - e^{-\frac{125}{44}} \right) \approx 5,65 \text{ V}$$

### Exercice 3

- 1) Resoudre l'équation differentielle  $y' - y = 0$  (1)
- 2) Soit  $f$  une fonction derivable sur  $IR$  telle que  $f'(x) - f(x) = x$  (2)
  - a) Determiner  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $f_0(x) = ax + b$  soit une solution de l'équation (2)
  - b) Deduire toutes les solutions de l'équation (2) ( poser  $y = f - f_0$ )
  - c) Determiner l'unique solution  $f_1$  de l'équation (2) qui verifie  $f_1(0) = 0$

### Correction

$$1) \text{ On a (1)} \Leftrightarrow y' = y$$

$$\text{Donc } y = \lambda e^x \text{ avec } \lambda \in IR$$

$$2)a) \text{ on a } f'_0(x) - f_0(x) = x \Leftrightarrow a - (ax + b) = x$$

$$\Leftrightarrow -ax + a - b = x \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

$$\text{Et par suite } a = -1 \text{ et } b = -1$$

$$b) \text{ resoudre l'équation (1)}$$

$$\text{on a } f'_0 - f_0 = x \text{ et } f' - f = x \quad (2)$$

$$\text{donc } (f - f_0)' = f - f_0$$

$$\text{alors } f - f_0 = \lambda e^x \text{ avec } \lambda \in IR$$

$$\text{et parsuite } f(x) = x - 1 + \lambda e^x \text{ avec } \lambda \in IR$$

$$c) \text{ determinant de } f_1$$

$$\text{on a d'apres b) } f_1(x) = x - 1 + \lambda e^x \text{ avec } \lambda \in IR$$

$$f_1(0) = 0 \text{ donc } -1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Et pae suite } f_1 = x - 1 + e^x$$

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales donnée :

- a)  $y' + 3y = 1$  et  $y(0) = 0$
- b)  $y' = 5y$  et  $y(1) = -2$
- c)  $y' + y + 2 = 0$  et  $y(0) = 0$
- d)  $y' + 3y = 1$  et  $y(0) = 0$
- e)  $y' - \sqrt{2}y = 0$  et  $y(-1) = 0$
- f)  $y' + ey + e^2 = 0$  et  $y(e) = 0$

### Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- a)  $y'' + 4y = 0$  ; b)  $y'' - y' = 0$

### Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales donnée :

- a)  $y'' - 5y' + 6y = 0$  ;  $y(0) = -1$  et  $y'(0) = 1$
- b)  $y'' + y' + y = 0$  ;  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$
- c)  $3y'' + 2y' + y = 0$  ;  $y(\pi\sqrt{2}) = 2$  et  $y'(\pi\sqrt{2}) = 0$
- d)  $y'' + y' + y = 0$  ;  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$

### Exercice 4

- a) Résoudre E D suivante :  $y'' + y' - y = -2$
- b) Déterminer la solution vérifie  $y(0) = e$  et  $y'(0) = 0$

### Exercice 5

Vérifier que la solution de l'équation différentielle (E) :  $y' - y \ln 2 = 0$  sont des fonctions de la forme :  $x \mapsto \alpha 2^x$  où  $\alpha$  un réel

### Exercice 6

- a) Résoudre E D suivante : (E) :  $y'' - 2y' + 5y = 0$
- b) Déterminer la solution  $f$  de l'équation (E) qui vérifie  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$

c) Déterminer une fonction primitive de  $f$

### Exercice 7

On considère les deux équations différentielles

$$y'' - 2y' + 3y = 0 : (1) \quad \text{et} \quad z'' + 2z' = 0 : (2)$$

On pose pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $y = ze^x$

- 1) Démontrer que  $y$  est la solution de l'équation (1) si et seulement si  $z$  est la solution de l'équation (2)

- 2) Déterminer les solutions de l'équation (2)

Déterminer  $f$  la solution de l'équation (1) qui vérifie  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -2$

### Exercice 8

- 1) Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 2y' + 2y = 0$

- 2) On lance trois fois un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On appelle  $a$ ,  $b$  et  $c$  les résultats obtenus respectivement au premier, deuxième et troisième lancés.

Déterminer la probabilité de l'événement suivant : «les solutions de l'équation différentielle  $ay'' - by' + cy = 0$  sont donnés par  $y = e^x(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  »

### Exercice 9

#### Équation d'ordre 3

Soit l'équation différentielle

$$(E) : y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

- 1) Vérifier que la fonction  $h : x \mapsto e^{2x}$  est solution de (E).

- 2) Soit  $f$  une fonction trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  la fonction  $x \mapsto f(x)e^{-2x}$ .

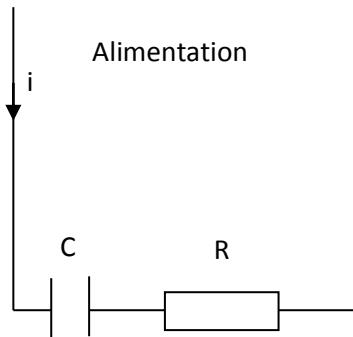
Montrer que  $f$  est solution de (E) si, et seulement si,  $g'''$  est la fonction nulle.

- 3) En déduire les solutions de (E).

## Exercices et problèmes

### Exercice 10

On considère le circuit électrique ci-dessous.



R est la résistance du résistor et C la capacité du condensateur.

R et C sont des constantes.

Soit  $q(t)$  la charge de l'armature du condensateur à l'instant t.

$$( \text{On rappelle que : } R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U )$$

La fonction  $t \mapsto q(t)$  est la solution de l'équation différentielle :  $Ry' + \frac{1}{C}y = U$

1/ Déterminer toutes les solutions de l'équation :

$$Ry' + \frac{1}{C}y = U$$

2/ En utilisant la condition initiale,  $q(0) = 0$ , montrer

$$\text{que } q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

3/ On observe à l'oscilloscope la tension  $U_r = R.i$  aux bornes du résistor. Sachant que  $i(t) = \frac{dq}{dt}$

Donner l'expression de  $U_r$  en fonction de t.

### Exercice 11

On considère l'équation différentielle (E):

$$y' - 2y = e^{2x}.$$

1) Vérifier que la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^{2x}$  est une solution de l'équation différentielle (E).

2) Résoudre l'équation différentielle (E'):

$$3) y' - 2y = 0.$$

4) Montrer que f est une solution de (E) signifie  $(f-g)$  est une solution de (E').

5) En déduire toutes les solutions de (E).

6) Déterminer, la fonction h, solution de (E) qui vérifie :  $h(0) = 1$

### Exercice 12

Soit l'équation différentielle : (E) :  $y - y' = \frac{e^x}{x^2}$ . On se

propose de résoudre E sur  $[0, +\infty[$

1/ Résoudre l'équation différentielle  $(E_0)$  :  $y' = y$

2/ Montrer que  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  est une solution de E

3/a) Montrer que  $(g-f)$  est solution de  $(E_0)$  sur

$[0, +\infty[$  si et seulement si g est solution de E

b) Déduire les solution de (E) sur  $[0, +\infty[$

4/ La vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre des bactéries en présence.

On note  $N(t)$  le nombre de bactéries (en million)

d'individu et  $N'(t)$  la vitesse

d'accroissement

On suppose que  $N(t)$  vérifie (E) et  $N(0) = N_0$

En combien de temps (t en seconde) le nombre de bactérie sera le double

### Exercice 13

On donne les équations différentielles :

$$(E_0) : y' - 2y = 0 \quad \text{et} \quad (E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

1/ Résoudre  $(E_0)$

2/ Vérifier que  $f(x) = 2xe^{2x} + 1$  est solution de (E)

3/a) Montrer que  $(g-f)$  est solution de  $(E_0)$  si et seulement si g est solution de (E)

## Exercices et problèmes

b) Résoudre alors (E)

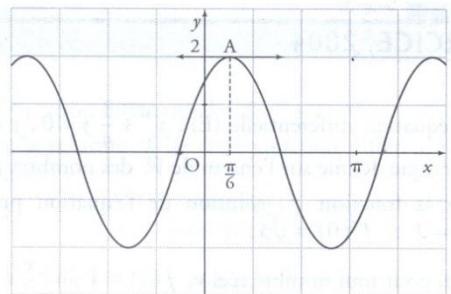
4/a) Montrer que la solution de (E) qui s'annule en 0

$$\text{est } h(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$$

### Exercice 14

1) Résoudre l'équation différentielle (E) :  $4y'' + 9y = 0$ .

2) On désigne par  $f$  la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A  $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$



a) Déterminer une expression de  $f(x)$

b) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  ;

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

### Exercice 15

Soit l'équation (E) :  $2y' + 3y = 6x - 5$

1/ Soit  $f(x) = ax + b$

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  soit solution de (E)

2/a) Montrer que  $g(x) - f(x)$  est solution de (E') :

$2y' + 3y = 0$ ssi  $g$  est solution de (E)

b) Résoudre alors (E)

### Exercice 16

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' - 4y = -8x^2$ .

1°) Chercher une solution particulière  $P$  fonction polynôme du second degré.

2°) On pose  $y_1 = y - P$ .

a- Montrer que  $y$  est un solution de (E)ssi  $y_1$  est une solution de l'équation

$$(E'): y_1' - 4y_1 = 0$$

b- En déduire les solutions de (E).

### Exercice 17

En réalité, dans un secteur observé d'une région

donné, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs.

On note  $u(t)$  le nombre des rongeurs vivants au

temps  $t$  (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction  $u$ , ainsi définie, satisfait

$$\text{aux conditions : (E}_2\text{)} \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, où  $u'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $u$ .

a) On suppose que, pour tout réel positif  $t$ , on a

$u(t) > 0$ . On considère, sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ , la fonction  $h$  définie par  $h(t) = \frac{1}{u(t)}$ . Démontrer

que la fonction  $h$  satisfait aux conditions (E<sub>2</sub>) si et seulement si la fonction  $u$  satisfait aux conditions :

$$(\text{E}_3) \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

pour tout nombre réel  $t$  positif ou nul, où  $h'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $h$ .

b) Donner les solutions de l'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$

et en déduire l'expression de la

fonction  $h$ , puis celle de la fonction  $u$ .

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

# Chapitre 8

## Intégration



*En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XVII<sup>e</sup> siècle, pour désigner le calcul intégral. À cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).*

*Au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.*

## I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

### 1) L'intégrale et fonctions primitives

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$

Si  $F$  et  $G$  sont fonctions primitives de la fonction  $f$  sur  $I$  alors  $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$

Donc le nombre  $F(b) - F(a)$  ne dépend pas de la fonction primitive choisie  $F$

#### Définition

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Si  $F$  est une primitive de  $f$  alors le nombre  $F(b) - F(a)$  s'appelle l'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a ; b]$  se note :  $\int_a^b f(x) dx$ . Et on lit "intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f(x) dx$ ".

Notations : On écrit :  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$



Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires. Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

#### Remarques :

-  $a$  et  $b$  sont appelés les bornes d'intégration.

-  $x$  est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire :  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ .

" $dx$ " ou " $dt$ " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

#### Exemples

$$\text{Calculer : } A = \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx$$

$$B = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3} dx$$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_2^5 (3x^2 + 4x - 5) dx \\
 &= \left[ x^3 + 2x^2 - 5x \right]_2^5 \\
 &= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) \\
 &= 125 + 50 - 25 - (8 + 8 - 10) \\
 &= 144
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 B &= \int_{-1}^1 e^{-2x} dx \\
 &= \left[ \frac{1}{-2} e^{-2x} \right]_{-1}^1 \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2 \times 1} - \frac{1}{2} e^{-2 \times (-1)} \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^2 \\
 &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 C &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3} dx \\
 &= \left[ \ln(e^x + 3) \right]_0^1 \\
 &= \ln(e^1 + 3) - \ln(e^0 + 3) \\
 &= \ln(e + 3) - \ln 4 \\
 &= \ln\left(\frac{e + 3}{4}\right)
 \end{aligned}$$

## Application

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  sur  $[0; +\infty[$

Puis calculer l'intégrale  $L_1 = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

2. Calculer les deux intégrales suivants  $L_2 = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\ln(x))^3}{x} dx$  et  $L_3 = \int_{-2}^{-1} x 2^{-x^2} dx$

### 2) L'intégrale et opérations

#### Propriété

$f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ;  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

a)  $\int_a^a f(x) dx = 0$

b)  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

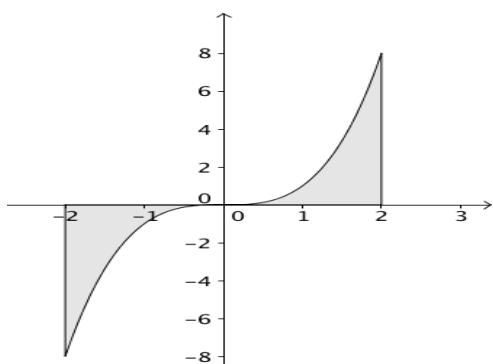
a)  $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$

b)  $\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(x) dx$

**Remarque :** Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

**Par exemple :**

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 - \frac{1}{4} \times (-2)^4 = 4 - 4 = 0.$$



## Propriété

### (Relation de Chasles)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a, b$  et  $c$  trois réels de  $I$ .

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

### Démonstration :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

### Remarques :

- On peut généraliser la relation de Chasles par récurrence à  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  somme

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a_0, a_1, \dots$  et  $a_n$  des éléments de  $I$

$$\text{On a } \int_{a_0}^{a_n} f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)dx \text{ c à d } \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$$

### Exemples

On considère l'intégrale  $A = \int_{-2}^0 |x^2 + x| dx$  on  $x \mapsto x^2 + x$  c'est un polynôme de degré 2 s'annule en -1 et

0 . Donc  $\forall x \in [-2; -1]$   $x^2 + x \geq 0$  donc  $|x^2 + x| = x^2 + x$

$\forall x \in [-1; 0]$   $x^2 + x \leq 0$  Donc  $|x^2 + x| = -x^2 - x$

Donc on utilise la relation de Chasles on obtient

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} (x^2 + x) dx + \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[ -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = 1 \end{aligned}$$

### Application

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 4]$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{4-x}; 0 \leq x < 2 \\ f(x) = \frac{4-x}{x}; 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue sur  $[0; 4]$  et calculer  $\int_0^4 f(x)dx$

## Propriété : (linéarité)

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$  ;  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

a) Pour  $k$  réel,  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

b)  $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

## Démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

-  $kF$  est une primitive de  $kf$

-  $F + G$  est une primitive de  $f + g$

## Exemples

On pose :  $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$  et  $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

a) Calculer  $A + B$  et  $A - B$ .

b) En déduire  $A$  et  $B$ .

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$\begin{aligned} A + B &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x) dx + \int_0^{2\pi} (\sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dx \\ &= [x]_0^{2\pi} \\ &= 2\pi - 0 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x) dx - \int_0^{2\pi} (\sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos 2x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0 \end{aligned}$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi.$$

## Application

1. On considère deux intégrales  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

a) Calculer  $I + J$  et  $I - J$ .

b) En déduire  $I$  et  $J$ .

## 3) Fonction définie par une intégrale

### Propriété

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  un élément de  $I$

La fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est la fonction primitive de la fonction  $f$  qui s'annule en  $a$

### Preuve :

Prouvons d'abord que  $F$  est dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$  et que  $F'(x_0) = f(x_0)$

Pour cela, étudions la limite en  $x_0$  de la fonction  $T$  définie pour tout réel  $h \neq 0$  tel que  $x_0 + h$  est dans  $I$  par

$$T(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$$

$$\text{On a } F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$$

$$= \int_{x_0}^a f(t) dt + \int_a^{x_0+h} f(t) dt$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Il existe  $c$  entre  $x_0$  et  $x_0 + h$  tel que  $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = (x_0 + h - x_0)f(c) = hf(c)$ . On en déduit que

$$T(h) = f(c).$$

Or lorsque  $h$  tend vers 0,  $c$  tend vers  $x_0$  et puisque  $f$  est continue,  $f(c)$ , et donc  $T(h)$ , tend vers  $f(x_0)$ .

Ainsi,  $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = f(x_0)$ . On en déduit que  $F$  est dérivable en  $x_0$  et  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

L'unicité résulte du fait que  $F(a) = 0$ .

### Remarques

► La fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  est dérivable sur  $I$  et on a  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

► Comme la fonction  $F$  est dérivable sur  $I$  donc alors  $\forall x_0 \in I$  on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \right) = f(x_0) \text{ et d'après la relation de Chasles on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \right) = f(x_0)$$

# Cours

## Exemples

1) On va étudier les variations de la fonction U

définie sur  $\text{IR}$  par  $U(x) = \int_0^x e^{t^2} (t^2 - 4) dt$

La fonction U est la fonction primitive de la fonction

$u(x) = e^{x^2} (x^2 - 4)$  est continue sur  $\text{IR}$

donc U est dérivable sur  $\text{IR}$  et on a

$$U'(x) = e^{x^2} (x^2 - 4)$$

Donc le signe de  $U'(x)$  est le signe de la  $x^2 - 4$  donc U

est croissante sur  $[-\infty; -2]$  et  $[2; +\infty[$  et décroissante  
sur  $[-2; 2]$

2) Soit f et g deux fonctions continues sur  $\text{IR}$  et

vérifient  $\int_1^x g(t) dt = \arctan(x-1)$  et

$$\int_1^x (f(t) - g(t)) dt = \ln(x^2 + 1)$$

a) la fonction  $\varphi_1(x) = \arctan(x-1)$  est la  
fonction primitive de la fonction g sur  $\text{IR}$  donc

$$\varphi_1'(x) = g(x) \text{ sur } \text{IR} \text{ alors } g(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

$$\text{donc } g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) La fonction  $\varphi_2(x) = \ln(x^2 + 1)$  est la fonction

primitive de la fonction  $f - g$  sur  $\text{IR}$  donc

$$f(x) - g(x) = \varphi_2' \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ alors}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et par suite}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \frac{2x}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3) Soit h la fonction définie sur  $[-\frac{1}{2}; +\infty[$  par

$$\begin{cases} h(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+2x)} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = e^2 \end{cases}$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = e^2 = h(0) \text{ et par suite h est continue}$$

en 0

et d'après la continuité de la composée de deux

$$\text{fonctions alors h est continue sur } [-\frac{1}{2}; +\infty[$$

donc la fonction  $H : x \mapsto \int_0^x h(t) dt$  est dérivable sur

$$[-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\text{et donc } H'(x) = h(x) \text{ pour tout } x \text{ de } [-\frac{1}{2}; +\infty[$$

On a pour  $x = 0$  on a  $H'(0) = e^2$  donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt \right) = e^2$$

## Application :

Etudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur  $[0 ; 10]$  par  $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$ .

a) Etudier les variations de F.

b) Tracer sa courbe représentative.

a) La fonction  $t \mapsto \frac{t}{2}$  est continue et positive sur  $[0 ; 10]$  donc  $F$  est dérivable sur  $[0 ; 10]$   $F'(x) = \frac{x}{2} > 0$

Donc  $F$  est croissante sur  $[0 ; 10]$ .

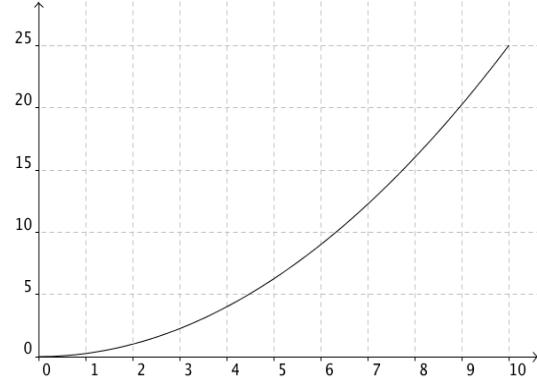
On dresse le tableau de variations :

$$\text{Ainsi } F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25$$

$x$	0	10
$F'(x)$		+
$F(x)$	0	25

b) Pour tout  $x$  de  $[0 ; 10]$ , on a  $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}$

On a ainsi la représentation graphique de  $F$ :



## Propriété

Soit une fonction continue sur un intervalle  $I$  ; et soit  $V$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  tel que  $v(J) \subset I$ .

La fonction  $\psi(x) = \int_a^{v(x)} f(t) dt$  avec  $a \in I$  est dérivable sur  $J$  et on a  $\psi'(x) = v'(x)f(v(x))$

## Démonstration :

Soit  $x \in J$  on a  $\psi(x) = \varphi(v(x)) = (\varphi \circ v)(x)$  avec  $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$

Donc  $\psi = \varphi \circ v$  comme  $v$  est dérivable sur  $J$  et  $v(J) \subset I$  et  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et  $\varphi' = f$  alors  $\psi$  est dérivable sur  $J$  et on a  $\psi' = v' \times (\varphi' \circ v)$  c à d  $\psi' = v' \times (f \circ v)$  donc  $\psi'(x) = v'(x) \times f(v(x)) \quad \forall x \in J$

**Exemple :** Soit  $F$  la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt ; \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$  est continue sur  $[-1; +\infty[$

Et la fonction  $v : x \mapsto x^2 + 2x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

et  $v(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$

et par suite la fonction  $F$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et dérivable

$$F'(x) = v'(x)f(v(x))$$

sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $F'(x) = 2(x+1)\sqrt{(x+1)^2}$

$$F'(x) = 2(x+1)|x+1|$$

## Application :

justifier ,dans chacun des cas,la derivabilite de la fonction F sur I et calculer sa fonction derivee

$$1) \quad F(x) = \int_1^x \sqrt{1-t^2} dt ; I = [-1;1] ; \quad 2) \quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt ; I = ]0;+\infty[$$

$$3) \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{x^2+1} dt ; I = \mathbb{R} \quad ; \quad 4) \quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt ; I = ]-1;1[$$

### 4) Interpretation geometrique d'une integrale

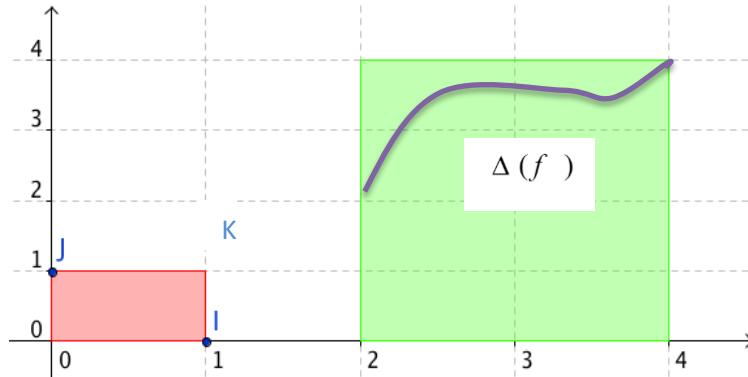
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a < b$

On suppose que le plan est muni d'un repere orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  et que l'unité d'aire est l'aire du triangle OIKJ tels

que  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

On pose  $\Delta(f) = \{M(x; y) / a \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$  c'est l'aire compris entre  $(C_f)$  et l'axe des abscisses et

les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  on écrit  $\Delta(f) = A(f)$



On vas comparer les nombres  $A(f)$  et  $\int_a^b f(x) dx$  dans des cas particuliers :

#### a) cas d'une fonction constante

Soit  $f : x \mapsto k$  avec k un reel positif

on a  $A(f)$  est le rectangle de dimension k et  $b-a$  donc  $A(f) = k(b-a)$  ( en unité d'aire )

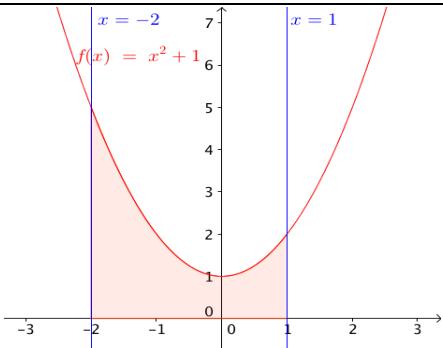
et on  $\int_a^b f(x) dx = k(b-a)$  alors  $\int_a^b f(x) dx = A(f)$  (en unité d'aire)

b) Intégrale d'une fonction affine.

**Exemple.**  $f$  est définie sur  $\Psi$  par  $f(x) = 2x - 1$ . Calculons le réel

$$\int_2^5 f(x) dx$$

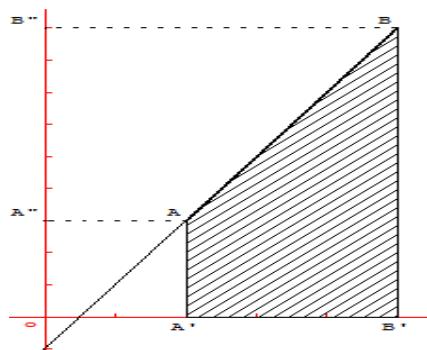
$$\int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 (2x - 1) dx = F(5) - F(2) = 5^2 - 5 - (2^2 - 2) = 18.$$



Le polygone AA'B'B est un trapèze donc

$$A(f) = \frac{(AA' + BB') \times A'B'}{2} = \frac{(3 + 9) \times 3}{2} = 18$$

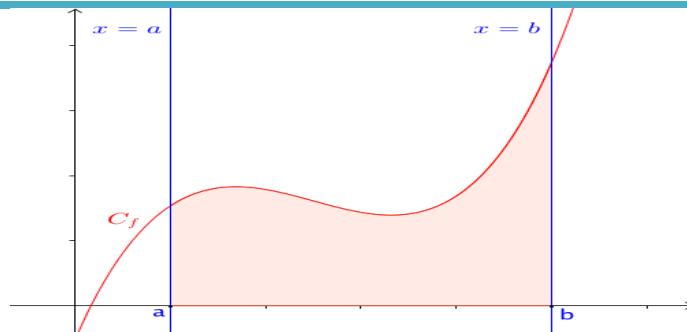
**Conclusion**  $A(f) = \int_2^5 f(x) dx$



## Propriété

Soit  $f$  une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a ; b]$ .

On appelle l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  est  $\int_a^b f(x) dx$  u a



**Exemple :**

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction  $f(x) = x^2 + 1$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -2$  et  $x = 1$  est l'intégrale de la fonction  $f$  sur l'intervalle

$$[-2 ; 1] \text{ et se note } \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx \text{ u a.}$$

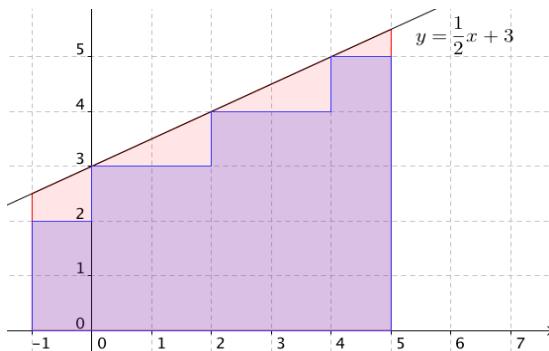
## Application : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction  $f$

par  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$  dans un repère orthonormé.

b) Calculer  $\int_{-1}^5 f(x)dx$ .

a)



b) Calculer  $\int_{-1}^5 f(x)dx$  revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 5$ .

Donc par dénombrement, on obtient :  $\int_{-1}^5 f(x)dx = 21 \text{ u.a.} + 3 \text{ u.a.} = 24 \text{ u.a.}$

## II. techniques de calculs des intégrales

### 1) l'utilisation directe des fonctions primitives

a) calculer l'intégrale suivante  $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

on remarque  $\frac{(\ln x)^3}{x}$  s'écrit sous la forme  $u'u^3$  telle que  $u(x) = \ln x$  et on sait que la fonction primitive de la

fonction  $u'u^3$  est  $\frac{1}{4}u^4$  donc la fonction primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{(\ln x)^3}{x}$  est  $\frac{1}{4}(\ln x)^4$  alors

$$I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \left[ \frac{1}{4}(\ln x)^4 \right]_1^e = \frac{1}{4}$$

b) calculer l'intégrale  $J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

on a  $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$  et  $(e^{-x} + 1)' = -e^{-x}$  alors  $\frac{1}{e^x + 1}$  s'écrit sous la forme  $-\frac{u'}{u}$  tel que  $u(x) = e^{-x} + 1$

On sait que la fonction primitive de la fonction  $-\frac{u'}{u}$  est  $\ln \frac{1}{|u|}$  alors une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$

est  $x \mapsto \ln \frac{1}{e^{-x} + 1}$  et par suite  $J = \int_0^1 \frac{1}{e^{-x} + 1} dx = \left[ \ln \frac{1}{e^{-x} + 1} \right]_0^1 = \ln 2 - \ln(1 + e^{-1})$

c) Calculer l'intégrale  $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$

on détermine une primitive de la fonction  $x \mapsto \cos^4 x$

On linéarise  $\cos^4 x$  par les formules d'EULER on obtient  $\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$  donc

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \left[ \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8} x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi + 8}{32}$$

d) Déterminer les nombres a,b,c et d pour que  $\forall x \neq 0 \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2 + 1}$  et calculer

$$\text{l'intégrale } L = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} dx$$

$$\text{On a } \forall x \neq 0 \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + (b+d)x + c}{x(x^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + (b+d)x + c = x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow a = c = d = 1 \text{ et } b = -1$$

$$\text{Donc } \forall x \neq 0 \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} = x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} \text{ et par suite}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 + 1} dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 + x + \ln x + \arctan x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} + \ln \sqrt{3} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

### 2) Intégration par parties

#### Propriété

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , dont les dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ .

Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . On a :  $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

## Preuve :

La formule de dérivation d'un produit permet d'écrire  $(uv)' = u'v + uv'$

On en déduit que pour tout  $t \in I$ , on a  $(uv')(t) = (uv)'(t) - (u'v)(t)$

Les fonctions étant continues, on a alors pour  $a \in I$  et pour  $b \in I$

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

**Exemple :** Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad u(x) &= x & v'(x) &= \cos x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables et leurs dérivées sont continues sur  $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \left[ x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[ x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[ x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - (0 \sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

## Remarque :

Après avoir fait une intégration par parties, la nouvelle intégrale que l'on a à calculer doit être plus simple que la première. Si ce n'est pas le cas, il faut peut-être modifier le choix de  $u$  et  $v'$ . On pourra, si besoin est, utiliser plusieurs fois l'intégration par parties.

Calculer les intégrales suivantes :

a)  $K = \int_0^1 (1-x)e^{-x}dx$

b) Trouver une primitive sur  $]0 ; +\infty[$  de  $f(x) = \ln x$

a)  $M = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

b)  $P = \int_1^e x \ln x dx$

## Application :

### 3) Changement de variable

Soit  $g$  une fonction dérivable sur un segment  $[a ; b]$  telle que  $g'$  est continue sur  $[a ; b]$

Et soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $J$  tel que  $J=g([a ; b])$

Si  $F$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur  $J$  alors  $\forall x \in [a; b]; (Fog)'(x) = f(g(x)) \times g'(x)$

Donc  $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = [Fog]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$  alors

$\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$  Donc on a la propriété suivante

### Propriété

Soit  $g$  une fonction dérivable sur un segment  $[a ; b]$  telle que  $g'$  est continue sur  $[a ; b]$

Et soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $J$  tel que  $J=g([a ; b])$

On a  $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$

**Remarque :** si on pose  $t = g(x)$  alors  $\frac{dt}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow dt = g'(x) dx$  si on remplace dans l'expression

$f(g(x)) \times g'(x) dx$  la variable  $g(x)$  par la variable  $t$  on obtient  $f(t) dt$

Et on aussi  $\begin{cases} \text{si } x = a \text{ alors } t = g(a) \\ \text{si } x = b \text{ alors } t = g(b) \end{cases}$ . Donc on dit qu'on a fait un changement de variable et cette technique

s'appelle intégration par changement de variable

### Exemples :

a) calculer l'intégrale  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$

posons  $t = \frac{1}{x}$  alors  $dt = -\frac{1}{x^2} dx$  et  $4-x^2 = \frac{4t^2-1}{t^2}$   $t \begin{cases} \text{si } x=1 \text{ alors } t=1 \\ \text{si } x=\sqrt{3} \text{ alors } t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$  et par suite

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} -\frac{1}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}}} dt = \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{t}{\sqrt{4t^2-1}} dt = \left[ -\frac{1}{4} \sqrt{4t^2-1} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

b) Calculer l'intégrale  $J = \int_0^{\pi} \sin^5 x dx$

on  $\forall p \in \mathbb{N} : \sin^{2p+1} x = (\sin x)^{2p} \sin x = (1-\cos^2 x)^p \sin x$  donc  $J = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx$

Posons  $t = \cos x$  alors  $dt = -\sin x dx$  et  $\begin{cases} \text{si } x = 1 \text{ alors } t = 1 \\ \text{si } x = \pi \text{ alors } t = -1 \end{cases}$

$$\text{et par suite } J = \int_0^\pi (1-t^2)^2 (-dt) = \int_0^\pi (t^4 - 2t + 1) dt = \frac{16}{15}$$

**Application :** en utilisant intégration par changement de variable calculer

a)  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1-\sin x} dx$  posons  $t = \tan \frac{x}{2}$  ; b)  $J = \int_0^1 \sqrt{x+1} dx$  posons  $t = \sqrt{x+1}$

c)  $K = \int_0^1 \frac{1}{2+\sqrt{x}} dx$  posons  $t = 2 + \sqrt{x}$  ; d) ;  $L = \int_1^{\ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx$  posons  $t = e^x$

e)  $M = \int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} dx$  posons  $t = x - \frac{1}{x}$

### III. L'intégrale et l'ordre

#### 1. Inégalités

a) Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a;b]$  et  $F$  sa fonction primitive sur  $[a;b]$  on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ et } F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b] \text{ si } f \text{ est positive sur } [a;b] \text{ alors la fonction}$$

$$F'(x) = f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b] \text{ donc } F \text{ est croissante sur } [a;b] \text{ alors } \text{ si } a \leq b \text{ alors } F(a) \leq F(b)$$

$$\text{et par suite } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

b) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un segment  $[a;b]$  Si  $f(x) \geq g(x)$  alors  $f(x) - g(x) \geq 0$ .

$$\text{Donc en appliquant a), on a : } \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$

$$\text{Par linéarité, on a } \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0 \text{ et donc } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

#### Propriété

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a;b]$

a) Si, pour tout  $x$  de  $[a;b]$ ,  $f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

b) Si, pour tout  $x$  de  $[a;b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

## Cours

### Exemple :

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ , on a

$$0 \leq e^{x^2} \leq e^x .$$

b) En déduire que  $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$ .

a) Sur  $[0 ; 1]$ ,  $x^2 \leq x$  .

Comme la fonction exponentielle est croissante et

Positive sur  $\mathbb{R}$ , on a  $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$  .

b) On déduit de la question précédente que

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx .$$

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

$$\text{D'où } 0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$$

### Propriété

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a; b]$

1) Si, pour tout  $x$  de  $[a; b]$ ,  $f(x) \leq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

2)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

3) Soit  $M$  la valeur maximale et  $m$  la valeur minimale de  $f$  sur  $[a; b]$

Alors on a  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$  et si  $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$  alors  $\int_a^b |f(x)| dx \leq M(b-a)$

### Exemple :

on considère l'intégrale  $I = \int_1^3 \frac{1}{t \sqrt{1+t^2}} dt$  démontrer que  $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

La fonction  $g : t \mapsto \frac{1}{t \sqrt{1+t^2}}$  est positive et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc on a  $I \geq 0$  et on a

$M = \sup_{1 \leq x \leq 3} |g(x)| = g(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $0 \leq I \leq 2M \Leftrightarrow 0 \leq I \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$  et par suite  $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

## 2. Valeur moyenne d'une fonction

### Définition

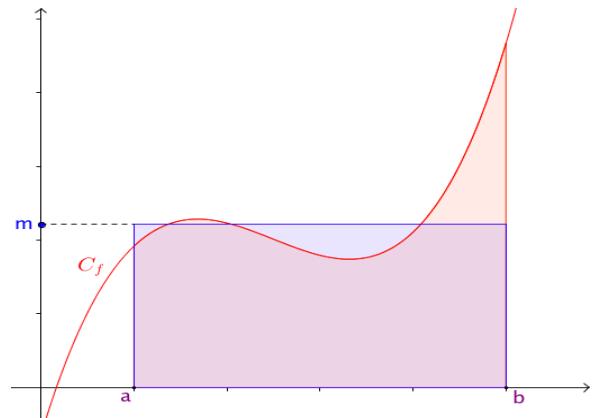
Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a \neq b$  .

On appelle valeur moyenne de  $f$  sur  $[a ; b]$  le nombre réel  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  .

## Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de  $f$  (en rouge ci-dessous)

est égale à l'aire sous la droite d'équation  $y = m$  (en bleu).



## Exemple :

- 1) Calculons la valeur moyenne de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$  sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{1}{10} \left[ x^3 - 2x^2 + 5x \right]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} (1000 - 200 + 50) \\ &= 85 \end{aligned}$$

- 2) Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.

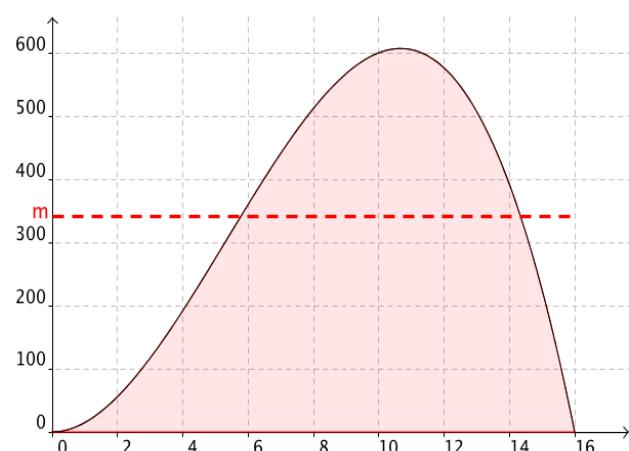
Au  $x$ -ième jour après le signalement des premiers cas,

le nombre de malades est égale à  $f(x) = 16x^2 - x^3$ .

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{16-0} \int_0^{16} f(x) dx \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{16} (16x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{16} \\ &= \frac{1}{16} \left( \frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\ &= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4} \\ &= \frac{16^3}{12} \\ &= \frac{1024}{3} \approx 341 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



**Exercice corrigé 1:**

Encadrer la fonction  $f : x \mapsto \arctan x$  sur l'intervalle  $[0;1]$

**Correction :**

on a la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Comme  $\forall x \in [0;1] 1 \leq x^2 + 1 \leq 2$  alors

$$\forall x \in [0;1] \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$$

Pour  $0 \leq x \leq 1$  on considère l'intégrale de  $f'$  sur  $[0;x]$

$$\text{on obtient l'encadrement } \int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(x) dx \leq \int_0^x 1 dt$$

$$\text{c à d } \frac{x}{2} \leq f(x) \leq x$$

**Exercice corrigé 2 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $\forall n \geq 0 \quad u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$

- a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée
- b) Déduire que  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite

**Correction :**

a) On a  $\forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{t^n}{1+t^2} \geq 0$  donc

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \geq 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est minorée par } 0$$

$$\text{On a } \forall n \geq 0 \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \text{ donc}$$

$$\forall n \geq 0 \quad \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$$

et par suite  $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} \leq u_n$  alors la suite

$(u_n)$  décroissante

b) Comme la suite  $(u_n)$  est minorée et décroissante alors elle est convergente

$$\text{On a } \forall n \geq 0 \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^n dt \text{ donc}$$

$$\forall n \geq 0 \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

**Application :**

1)a) Démontrer que  $\forall x > 1 \quad \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\forall n \geq 0 \quad \frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

b) déduire un encadrement au nombre  $\ln 2$

3) On considère  $\forall n \geq 0 \quad I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi dx$

2) Posons  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$  démontrer que

a) Démontrer que  $\forall n \geq 0 \quad 0 < I_n < \int_0^1 x^n dx$

b) Dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

## IV. Des applications du calcul intégral

### 1. Intégrale et aire

#### ► Notion d'une aire



#### Propriété

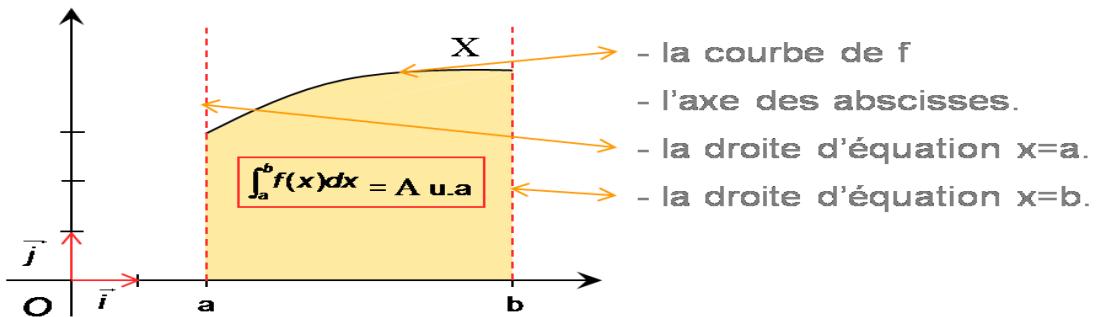
Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

si  $f$  fonction continue **positive** sur un intervalle  $[a ; b]$  (**avec  $a < b$** ).

Alors l'aire de la partie du plan limité par la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et

$x = b$  est  $\int_a^b f(x)dx$  en unité d'aire

L'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a ; b]$  notée est en **unités d'aire**, l'**aire** de la partie du plan limitée par :



#### Propriété

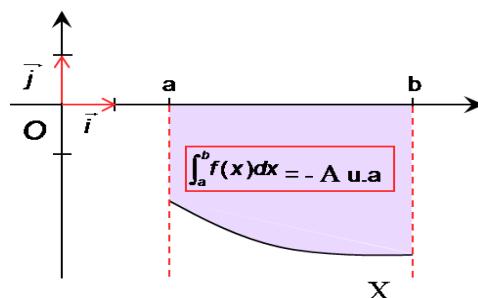
Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

si  $f$  fonction continue négative sur un intervalle  $[a ; b]$  (**avec  $a < b$** ).

Alors l'aire de la partie du plan limité par la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et

$x = b$  est  $\int_a^b -f(x)dx$  en unité d'aire

L'intégrale de la fonction  $f$  sur  $[a ; b]$  notée  $\int_a^b f(x)dx$   
est en **unités d'aire**, l'**opposé** de l'**aire** de la partie du plan limitée par :



- la courbe de  $f$
- l'axe des abscisses.
- la droite d'équation  $x=a$ .
- la droite d'équation  $x=b$ .

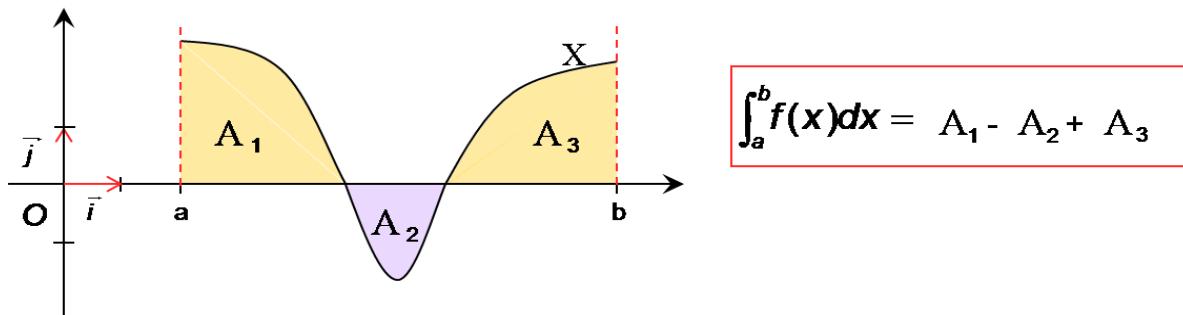
## Propriété

Soit  $f$  fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  ( avec  $a < b$  ).

Et soit  $(C)$  sa représentation dans le repère Soit le repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

L'aire de la partie du plan limité par la courbe de  $f$  et l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et

$x = b$  est  $\int_a^b |f(x)|dx$  en unité d'aire

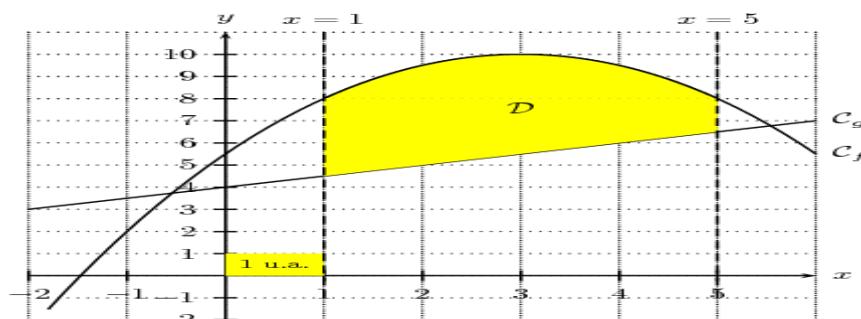


Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  , on note respectivement  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives de deux fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé.

## Propriété

Si  $a < b$  et si  $f(x) \geq g(x)$  pour tout  $x$  de  $[a ; b]$  , alors  $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$  est l'aire du domaine  $D$ , en u.a.

Le domaine  $D$  est délimité par la courbe  $C_f$ , la courbe  $C_g$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$  .



## Exemple

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$

par  $f(x) = -x^2 + 2$  et  $g(x) = x^2 - 2x - 2$ .

Soit  $(C_f)$  et  $(C_g)$  leurs courbes représentatives dans un plan  $P$  un plan muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

Calculer l'aire du domaine délimité par  $(C_f)$ ,  $(C_g)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 2$ .

On a :  $g(x) - f(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$ .

Donc pour tout  $x \in [-1, 2]$   $f(x) \leq g(x)$

D'après le théorème précédent, l'aire recherchée peut être calculée par la formule :

$$\int_{-1}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx = [\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x]_{-1}^2 = 9$$

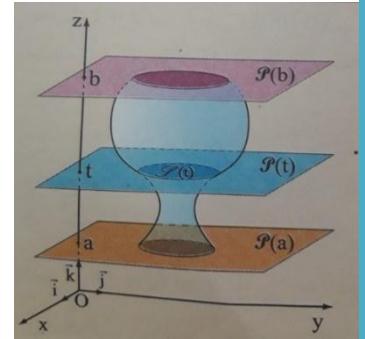
## 2. Calcul de volumes simples

### Théorème

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $(\Sigma)$  le solide délimité par les plans parallèles d'équation  $z=a$  et  $z=b$  et  $V$  son volume.

Si pour tout  $t \in [a, b]$ , l'intersection de  $(\Sigma)$  avec le plan d'équation  $z=t$  possède une aire  $S(t)$  où  $S$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ , alors le volume  $V$  du solide est donné par la formule :  $V(\Sigma) = \int_a^b S(t) dt$



### Exemple :

Calcul du volume d'une boule de rayon  $R$

Soit  $B$  une boule de centre  $O$  (origine du repère) et de rayon  $R$ .

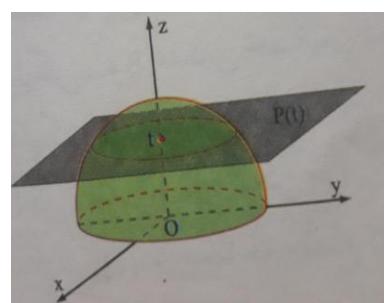
Pour tout  $t \in [-R, R]$  l'intersection de  $B$  avec le plan d'équation  $z = t$  est un

disque de rayon  $\sqrt{R^2 - t^2}$ . Cette intersection possède une

aire  $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$ ,  $S$  est une fonction continue sur  $[-R, R]$

On peut donc appliquer le théorème précédent et on obtient alors :

$$V(B) = \int_{-R}^R S(t) dt = \int_{-R}^R \pi(R^2 - t^2) dt = \pi \left[ tR^2 - \frac{t^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$



## Exemple : Calcul du volume d'un solide de révolution

Faisons tourner autour de l'axe des ordonnées la partie de la parabole d'équation  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . Nous obtenons un solide ( $\Sigma$ ) (dit de révolution) dont nous allons calculer le volume.

Le solide ( $\Sigma$ ) est délimité par les plans parallèles d'équation  $y=0$  et  $y=4$ . Son intersection avec le plan d'équation  $y=t$  est un disque de rayon  $r$  tel que  $t=r^2$ . Cette intersection possède une aire  $S(t)=\pi r^2=\pi t$ ,  $S$  est une fonction continue sur  $[0,2]$ . On peut donc appliquer le théorème précédent pour calculer le volume de ( $\Sigma$ ). On obtient

$$\text{alors : } V(\Sigma) = \int_0^4 S(t) dt = \int_0^4 \pi t dt = \pi \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^4 = \frac{16}{2} \pi = 8\pi$$

### Propriété

Propriété : l'espace est apporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ .

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de  $f$  autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle  $[a, b]$

est : en unité de volume est  $\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

## Exemples

- 1) Le volume  $V$  du solide engendré par la rotation de la fonction  $x \mapsto \cos x$  autour de l'axe des abscisses

sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  en unité de volume est

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \pi \left[ x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}$$

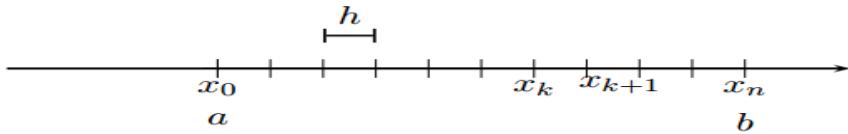
### 3. Encadrement d'une intégrale par deux suites / méthodes des rectangles

Activité : soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $I$  tel que  $a < b$  et soit  $n$  de  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$

## Cours

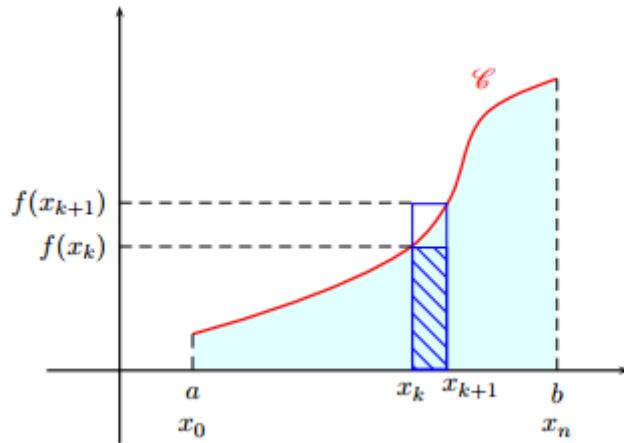
On suppose que  $f$  est strictement croissante sur  $[a,b]$ . on partage l'intervalle  $[a,b]$  en  $n$  intervalles de même

longueur  $h = \frac{b-a}{n}$ . On pose  $x_0 = a$  et pour  $0 \leq k \leq n$   $x_k = a + k \frac{b-a}{n} = x_0 + k \times h$



Sur chacun de ces intervalles  $[x_k, x_{k+1}]$ , on peut encadrer l'aire sous la courbe de  $f$  par des aires de rectangles.

Donc on a  $h \times f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \leq h \times f(x_{k+1})$



D'après la relation de Chasles  $\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt$

L'aire sous la courbe de  $f$  sur  $[a,b]$  est alors comprise entre la somme des aires des rectangles « sous » la courbe et la somme des aires des rectangles « au-dessus » de la courbe .

Alors  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f(x_k) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f(x_{k+1}) \Leftrightarrow \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \int_a^b f(t) dt \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$

Si on pose  $s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$  et  $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$

On a  $0 \leq S_n - s_n \leq \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$  alors d'après le théorème des gendarmes on  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0$

On pose  $r_n = \int_a^b f(x) dx - s_n$  et  $R_n = S_n - \int_a^b f(x) dx$  on a  $0 \leq r_n \leq S_n - s_n$  et  $0 \leq R_n \leq S_n - s_n$

Alors d'après le théorème des gendarmes on  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \int_a^b f(x) dx$

### Propriété

si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a,b]$  avec  $a < b$  alors les deux suites

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ sont convergente en une limite commune}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

On a la propriété suivante :

**Exemples:** déterminer la limite des suites suivantes  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  définies par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn}}$

- On a pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$  donc  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$  avec  $f(x) = \frac{1}{x}$

On la fonction  $f$  est continue sur  $[1,2]$  donc la propriété précédente on a  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\int_1^2 f(x) dx$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

- On a pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}}}$  donc  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(1 + \frac{k}{n}\right)$  avec  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

On la fonction  $g$  est continue sur  $[1,2]$  donc la propriété précédente on a  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\int_1^2 g(x) dx$  et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

**Application :** calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

### Exercice 1

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ . On donne le tableau de ses variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	$1+e^{-2}$	1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty; +\infty[$  par  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

#### Partie A

- En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
- a. Interpréter graphiquement  $g(2)$ .
- b. Montrer que  $0 \leq g(2) \leq 2,5$ .
- a. Soit  $x$  un réel supérieur à 2. Montrer que  $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$ . En déduire que  $g(x) \geq x - 2$ .
- b. Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]-\infty; +\infty[$ .

#### Partie B

On admet que pour tout réel  $t$ ,  $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$ .

- À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel  $x$  l'intégrale  $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt$ .
- En déduire que pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = x(1-e^{-x})$ .
- Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $-\infty$ .

### Partie A

1. Pas trop dur...

2. a.  $g(2) = \int_0^2 f(t) dt$ ;  $g(2)$  est l'aire sous la courbe (C) sur l'intervalle  $[0; 2]$ .

b. D'après le tableau de variations de  $f$  on peut dire que pour tout réel  $t$  de  $[0; 2]$ ,  $0 \leq f(t) \leq 1 + e^{-2}$  et que  $f$  est continue sur  $[0; 2]$ .

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$0 \times (2 - 0) \leq \int_0^2 f(t) dt \leq (1 + e^{-2}) \times (2 - 0), \text{ c'est-à-dire } 0 \leq \int_0^2 f(t) dt \leq 2(1 + e^{-2}).$$

Or  $2(1 + e^{-2}) \approx 2,3$  et  $g(2) = \int_0^2 f(t) dt$ . Par conséquent,

$$0 \leq g(2) \leq 2,3$$

3. a. Soit  $x$  un réel supérieur à 2. D'après le tableau de variations de  $f$ , pour  $t \geq 2$ ,  $f(t) \geq 1$ .

On intègre cette inégalité :

$$\int_2^x f(t) dt \geq \int_2^x 1 dt = x - 2. \text{ De plus,}$$

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt$$

d'après la relation de Chasles d'où

$$g(x) = g(2) + \int_2^x f(t) dt. \text{ Comme } g(2) \geq 0$$

(d'après la question 2. b.), on en déduit que

$g(x) \geq x - 2$  pour tout réel  $x$  supérieur à 2.

b.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ , d'après le théorème de

comparaison des limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

### Correction

4.  $g$  est la primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  s'annulant en 0,

$g'(x) = f(x)$ . D'après le tableau de variations de  $f$ ,

$f(x) \geq 0$  lorsque  $x \geq 0$  donc  $g$  est croissante et

$f(x) \leq 0$  lorsque  $x \leq 0$ ,  $g$  est décroissante.

### Partie B

1.  $I = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt$ . Posons  $u'(t) = e^{-t}$  et

$$v(t) = t-1 ; \text{ alors } u(t) = -e^{-t} \text{ et } v'(t) = 1.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x (t-1)e^{-t} dt = \left[ -(t-1)e^{-t} \right]_0^x - \int_0^x -e^{-t} dt \\ &= \left[ -(x-1)e^{-x} - 1 \right] - \left[ e^{-t} \right]_0^x \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_0^x (t-1)e^{-t} dt &= \left[ -(x-1)e^{-x} - 1 \right] - e^{-x} + 1 \\ &= -xe^{-x} \end{aligned}$$

2.  $g(x) = \int_0^x (t-1)e^{-t} dt + \int_0^x 1 dt$  d'après la

linéarité de l'intégration.

D'où :  $g(x) = -xe^{-x} + 1 \times (x-0) = x - xe^{-x}$ , donc

$g(x) = x(1 - e^{-x})$ , pour tout réel  $x$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  d'où

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  (limite d'une fonction composée). On

en déduit alors que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$ ; de plus,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1)$

.

### Exercice 2

#### Approcher $\ln(1+x)$

But de l'exercice : approcher  $\ln(1+a)$  par un polynôme de degré 5 lorsque  $a$  appartient à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

Soit  $a$  dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  ; on note  $I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t}$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_k(a) = \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt$ .

1. Calculez  $I_0(a)$  en fonction de  $a$ .

2. A l'aide d'une intégration par partie, exprimez  $I_1(a)$  en fonction de  $a$ .

3. A l'aide d'une intégration par partie, démontrez que  $I_{k+1}(a) = \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

4. Soit  $P$  le polynôme défini sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$ . Démontrez en calculant  $I_2(a)$ ,  $I_3(a)$  et  $I_4(a)$ , que  $I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$ .

5. Soit  $J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt$ . Calculez  $J(a)$ .

6. a. Démontrez que pour tout  $t \in [0; a]$ ,  $\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5$ .

b. Démontrez que pour tout  $a \in [0; +\infty[$ ,  $J(a) \leq I_5(a) \leq 0$ .

7. En déduire que pour tout  $a \in [0; +\infty[$ ,  $|\ln(1+a) - P(a)| \leq \frac{a^6}{6}$ .

8. Déterminez, en justifiant votre réponse, un intervalle sur lequel  $P(a)$  est une valeur approchée de  $\ln(1+a)$  à  $10^{-3}$  près.

### Correction

$$1. I_0(a) = \int_0^a \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a) - \ln 1 \\ = \ln(1+a)$$

2.  $I_1(a) = \int_0^a \frac{(t-a)dt}{(1+t)^2}$  : intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(t) = t-a \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \frac{-1}{1+t} \end{cases} \text{ et}$$

$$I_1(a) = \left[ \frac{-1(t-a)}{1+t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-dt}{(1+t)} = -a + I_0(a) \\ = \ln(1+a) - a$$

3. Encore une intégration par parties :

$$\begin{cases} u(t) = (t-a)^{k+1} \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^{k+2}} \end{cases}, \text{ soit}$$

## Exercices résolus

$$\begin{cases} u'(t) = (k+1)(t-a)^k \\ v(t) = \int (1+t)^{-k-2} dt = \frac{1}{-k-2+1} (1+t)^{-k-2+1}, \\ = \frac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_{k+1}(a) &= \left[ \frac{-(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^k} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(k+1)(t-a)^k}{(k+1)(1+t)^{k+1}} dt \\ &= \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + \int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}} dt \\ &= \frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{k+1} + I_k(a) \end{aligned}.$$

4. Soit  $P(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$  ; calculons

$I_5(a)$  à l'aide de l'égalité précédente :

$$\text{pour } k=1 : I_2(a) = \frac{(-1)^2 a^2}{2} + I_1(a) = \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a$$

pour  $k=2$  :

$$I_3(a) = \frac{(-1)^3 a^3}{3} + I_2(a) = -\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a,$$

pour  $k=3$  :

$$I_4(a) = \frac{a^4}{4} + I_3(a) = \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a,$$

pour  $k=4$  :

$$\begin{aligned} I_5(a) &= \frac{-a^5}{5} + I_4(a) \\ &= \frac{-a^5}{5} + \frac{a^4}{4} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \ln(1+a) - a \\ &= \ln(1+a) - P(a) \end{aligned}$$

$$5. J(a) = \int_0^a (t-a)^5 dt = \left[ \frac{(t-a)^6}{6} \right]_0^a = -\frac{a^6}{6}$$

6. a. Comme  $t \leq a$ , on a  $t-a \leq 0 \Rightarrow (t-a)^5 \leq 0$  d'où

$$\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \geq (t-a)^5 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^6} \leq 1 \Leftrightarrow (1+t)^6 \geq 1 \text{ ce qui}$$

est évidemment vrai (remarquez les deux changements de sens des inégalités...).

b. On a  $(t-a)^5 \leq \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}$  donc en intégrant sur

$$\text{l'intervalle } [0 ; a] : \int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \text{ d'où}$$

$$J(a) \leq I_5(a) ; \text{ de plus } \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} \leq 0 \text{ et l'intégrale d'une}$$

fonction négative sur un intervalle dont les bornes sont rangées dans le sens croissant est négative donc

$$\int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0, \text{ d'où } \int_0^a (t-a)^5 dt \leq \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \leq 0.$$

7. On a d'après 4.

$$|\ln(1+a) - P(a)| = |I_5(a)| \leq \left| \int_0^a (t-a)^5 dt \right| = \frac{a^6}{6}$$

(l'inégalité du 6.b. devient

$$\left| \int_0^a (t-a)^5 dt \right| \geq \left| \int_0^a \frac{(t-a)^5}{(1+t)^6} dt \right| \text{ du fait du changement}$$

de signe).

8. Il suffit de prendre  $\frac{a^6}{6} \leq 10^{-3}$ , soit

$$a \leq \sqrt[6]{6 \cdot 10^{-3}} \approx 0,426.$$

Moralité : pour  $x$  dans  $[0 ; \sqrt[6]{6 \cdot 10^{-3}}]$ , on approche  $\ln(1+a)$  par  $P(a)$  avec une erreur maximale de 0,001.

Ceci est très utile pour calculer les valeurs des logarithmes.

## Exercice 3

### Suite intégrale

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 e^{1-x}$ .

On désigne par  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

a. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ ; quelle conséquence graphique pour  $C$  peut-on en tirer?

b. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer sa fonction dérivée  $f'$ .

c. Dresser le tableau de variations de  $f$  et tracer la courbe  $C$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'intégrale  $I_n$  définie par  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ .

a. Établir une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .

b. Calculer  $I_1$ , puis  $I_2$ .

c. Donner une interprétation graphique du nombre  $I_2$ . On la fera apparaître sur le graphique de la question 1. c.

3. a. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$  de  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a l'inégalité

suivante :  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ .

b. En déduire un encadrement de  $I_n$  puis la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Correction

1. a.  $f(x) = x^2 e^{1-x}$  tend vers  $+\infty$  en  $-\infty$  car les deux termes tendent vers  $+\infty$ .

En  $+\infty$ , les croissances comparées permettent de dire que l'exponentielle fait tendre  $f$  vers 0. On a alors une asymptote horizontale  $y = 0$ .

b.  $f$  est le produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}.$$

c. Comme l'exponentielle est positive,  $f'$  est du signe de  $x(2-x)$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f$	$+\infty$	0	$4e^{-1}$	0

La représentation graphique est laissée à vous.

2. a. Faisons une intégration par parties :

$$\begin{cases} u = x^{n+1} \\ v' = e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = (n+1)x^n \\ v = -e^{1-x} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = \left[ -x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1)I_n$$

b.

$$I_1 = \int_0^1 x^1 e^{1-x} dx = \left[ -e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx ; \text{ par}$$

$$= -1 + e + \left[ -xe^{1-x} \right]_0^1 = e - 2$$

application de la formule de récurrence,  
on trouve :  $I_2 = -1 + 2I_1 = -1 + 2(e - 2) = 2e - 5$ .

Remarque : on aurait pu faire calculer

## Exercices résolus

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[ -e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + e \text{ puis appliquer la}$$

formule de récurrence :

$$I_1 = -1 + I_0 = -1 + (e - 1) = e - 2 \dots \text{on aurait évité une deuxième intégration par parties...}$$

b. Aire entre la courbe de  $f$ , l'axe horizontal,  $x = 0$  et  $x = 1$ .

$$\begin{aligned} 3.a \quad 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1 \Leftrightarrow x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e \end{aligned}$$

car  $x^n > 0$ .

b. On intègre l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n dx &\leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 &\leq I_n \leq e \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 ; \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \end{aligned}$$

donc  $I_n$  tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes...

### Exercice 4

#### Intégrales et suites

On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  non nul par :  $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$  et

$$y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt .$$

1. a. Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.

b. Étudier les variations de la suite  $(x_n)$ .

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$  ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n .$$

### Correction

1. a. Pour tout réel  $t$  de  $[0 ; 1]$ ,  $\cos t > 0$  et  $t^n \geq 0$  ;

la fonction  $t \mapsto t^n \cos t$  est positive sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . De plus, cette fonction est continue sur

$[0 ; 1]$ , par conséquent  $\int_0^1 t^n \cos t dt \geq 0$ , c'est-à-dire que  $x_n \geq 0$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

$$\begin{aligned} b. x_{n+1} - x_n &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t dt - \int_0^1 t^n \cos t dt \\ &= \int_0^1 (t^{n+1} \cos t - t^n \cos t) dt \\ &= \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) \cos t dt \\ &= \int_0^1 t^n (t-1) \cos t dt \end{aligned}$$

Sur  $[0 ; 1]$ ,  $t-1 \leq 0$ ,  $t^n \geq 0$ ,  $\cos t \geq 0$ , la fonction

$t \mapsto (t-1)t^n \cos t$  est négative et

$\int_0^1 (t-1)t^n \cos t dt \leq 0$ ,  $x_{n+1} - x_n \leq 0$  :  $(x_n)$  est

décroissante.

c. Comme  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 0,

$(x_n)$  est convergente.

2. a.  $0 < \cos t \leq 1$ , soit  $0 < t^n \cos t \leq t^n$  et

$$0 < \int_0^1 t^n \cos t dt \leq \int_0^1 t^n dt .$$

$$\int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_n \leq \frac{1}{n+1} .$$

b. Comme  $0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ,

d'après le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

3. a.  $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t dt$ . Posons  $u(t) = \cos t$  et

$v(t) = t^{n+1}$ , alors  $u(t) = \sin t$  et  $v'(t) = (n+1)t^n$  :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t dt \\ &= \left[ t^{n+1} \sin t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t dt \\ &= (\sin(1) - 0) - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t dt \end{aligned}$$

donc  $x_{n+1} = -(n+1)x_n + \sin(1)$ .

b. On a  $y_n = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$  (d'après la

question 2. b.) d'où :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(1) - x_{n+1}) = \sin(1)$

De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$  ; donc, par quotient des

limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .

4.  $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ .

Alors  $nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos(1)$  ; or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = 0$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1)$ .

On sait que  $y_n = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$ , soit

$ny_n = \frac{n}{n+1} (\sin(1) - x_{n+1})$  ; comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(1) - x_{n+1}) = \sin(1)$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$  (car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ), on a par

conséquent,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1)$ .

### Exercice 5

#### Equation différentielle : populations

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme

$$N'(t) = 2N(t) - 0,0045[N(t)]^2 \quad (1)$$

où  $t$  est le temps exprimé en heures.  $N(t)$  représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant  $t$ ; à  $t = 0$  on a  $N(0) = 1$  (en milliers).

1. On pose  $y(t) = \frac{1}{N(t)}$ ; montrer que  $y$  est solution d'une équation différentielle (E) du type  $y' = ay + b$ .
2. Résoudre (E).
3. En déduire que la solution de (1) est  $N(t) = \frac{1}{0,99775e^{-2t} + 0,00225}$ .
4. Etudier les variations de  $N$ .

5. Montrer que  $N(t) = \frac{e^{2t}}{0,99775 + 0,00225e^{2t}}$ . Déduisez-en une primitive de  $N(t)$ .
6. On appelle *nombre moyen* de bactéries la limite quand  $T$  tend vers  $+\infty$  de  $\frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt$ . Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

#### Correction

$$\begin{aligned} 1. \quad y(t) &= \frac{1}{N(t)} \Leftrightarrow N(t) = \frac{1}{y(t)} \\ &\Rightarrow N'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)} \end{aligned}$$

Remplaçons dans (1) :

$$\begin{aligned} N'(t) &= 2N(t) - 0,0045N(t)^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{y} - \frac{0,0045}{y^2} \\ &\Leftrightarrow y' = -2y + 0,0045 \end{aligned}$$

2. On a donc la solution

$$y(t) = Ce^{-2t} - \frac{0,0045}{-2} = Ce^{-2t} + 0,00225. \text{ A } t = 0 \text{ on a}$$

$$N(0) = 1 \text{ d'où } y(0) = 1 \text{ et donc}$$

$$1 = C + 0,00225 \Rightarrow C = 0,99775.$$

3. La solution pour  $N$  est donc

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{0,00225 + 0,99775e^{-2t}} \\ &= \frac{e^{2t}}{0,00225e^{2t} + 0,99775} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \text{On a } N'(t) &= \frac{-\left(0,99775 \times -2 \times e^{-2t}\right)}{\left(0,00225 + 0,99775e^{-2t}\right)^2} \\ &= \frac{1,9955e^{-2t}}{\left(0,00225 + 0,99775e^{-2t}\right)^2} > 0 \end{aligned}$$

donc  $N$  est croissante. En  $+\infty$  sa limite est

## Exercices résolus

$$\frac{1}{0,00225} \approx 444.$$

5.  $N(t) = \frac{e^{2t}}{0,00225e^{2t} + 0,99775}$ ;  $N(t)$  est de la

forme  $\frac{u'}{u}$  avec  $u = 0,00225e^{2t} - 0,00125$ , soit

$u' = 0,0045e^{2t}$ . On écrit donc

$$N(t) = \frac{1}{0,0045} \frac{0,0045e^{2t}}{0,00225e^{2t} + 0,99775}; \text{ une primitive}$$

de  $N$  est alors  $\frac{1}{0,0045} \ln(0,00225e^{2t} + 0,99775)$ .

$$\begin{aligned} 6. \frac{1}{T} \int_0^T N(t) dt \\ = \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{0,0045} \ln(0,00225e^{2t} + 0,99775) \right]_0^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ln(0,00225e^{2T} + 0,99775) - \ln(1)}{0,0045T} \\ &= \frac{\ln(0,00225e^{2T} + 0,99775)}{0,0045T} \end{aligned}$$

Quand  $T$  tend vers  $+\infty$ ,  $(0,00225e^{2T} + 0,99775)$  est équivalent à  $0,00225e^{2T}$  et

$\frac{\ln(0,00225e^{2T} + 0,99775)}{0,0045T}$  est équivalent à

$$\frac{2T + \ln(0,00225)}{0,0045T} = \frac{2}{0,0045} + \frac{\ln(0,00225)}{0,0045T} \text{ qui tend}$$

donc vers  $\frac{2}{0,0045} \approx 444$ .

### Exercice 6

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ; on considère la suite  $(I_n)$  définie par  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1/a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in [1, e]$ :  $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} \geq 0$

b) En déduire que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

c) Déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente

2/a) Calculer  $I_1$

b) Montrer à l'aide d'une intégration que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ :  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

c) En déduire la valeur de  $I_2$

3/a) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_n \leq e$ .

b) Déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

### Correction

1/a)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in [1, e]$ :

$$(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} = (\ln(x))^n \cdot (1 - \ln(x)) \geq 0$$

car  $\forall x \in [1, e]$  on a :  $0 \leq \ln(x) \leq 1$

b)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$I_n - I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^n dx - \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

## Exercices résolus

$$= \int_1^e (\ln x)^n - (\ln(x))^{n+1} dx \geq 0$$

d'où  $I_n \geq I_{n+1}$  donc la suite  $(I_n)$  est décroissante

$$\forall x \in [1, e] \text{ on a } 0 \leq \ln(x) \leq 1$$

c) donc  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx \geq 0$

On a alors la suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

2/a)

$$I_1 = \int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^e$$

$$= (e \ln(e) - e) - (1 \ln(1) - 1) = 1$$

b)  $I_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$

$$u(x) = (\ln(x))^{n+1} \text{ donc } u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln(x))^n$$

$$v'(x) = 1 \quad \text{donc } v(x) = x$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[ x (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e x (n+1) \frac{1}{x} (\ln(x))^n dx \\ &= e - 0 - (n+1) \int_1^e (\ln(x))^n dx = e - (n+1) I_n \end{aligned}$$

c)  $I_2 = e - (1+1) I_1 = e - 2$

3/a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $I_n \geq 0$  donc  $I_{n+1} \geq 0$   
donc  $e - (n+1) I_n \geq 0$  d'où  $(n+1) I_n \leq e$

b)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a  $I_n \geq 0$

et  $(n+1) I_n \leq e$  donc  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

## Exercices et problèmes

### Exercice 1

1. Déterminer les réels  $a, b, c$  tels que pour tout  $u$

$$\text{différent de } \frac{1}{2}, \frac{u^2 - 1}{2u - 1} = au + b + \frac{c}{2u - 1}.$$

$$2. \text{ Calculer } \int_{-1}^0 \frac{x^2 - 1}{2x - 1} dx.$$

$$3. \text{ Calculer } \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{\cos^3 x}{1 - 2\sin x} dx.$$

### Exercice 2

1) Calculez les intégrales:

$$a) \int_{-3}^0 (x^3 + 2x^2 - 1) dx ; b) \int_1^2 \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} dx$$

$$c) \int_1^e \frac{\ln t}{t} dt ; d) \int_1^2 2e^{3x} dx ; e) \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{2x + 3}} dx$$

$$f) \int_1^2 (x + 1) \ln x dx ; g) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx ; h) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1} dx$$

$$i) \int_{-2}^0 (2x^3 - x + 1) dx ; j) \int_1^2 \frac{2}{(3u - 1)^2} du ; k) \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx ; l)$$

$$\int_0^2 3e^{2x} dx ; m) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} dx ; n) \int_1^2 x^2 \ln x dx ;$$

$$o) \int_1^e \frac{\ln 2t}{t^2} dt ; p) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x e^{\sin x} dx ; q) \int_{-1}^1 t \sqrt{1 - t^2} dt ;$$

$$r) \int_1^2 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+2x)^2} dx ; s) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \tan^2 \left( \frac{u}{2} \right) du .$$

$$t) \int_0^1 x e^{2x} dx ; u) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^3 x dx , v) \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx .$$

2) Calculer les intégrales suivantes (on précisera éventuellement l'intervalle de validité) :

$$1^\circ) \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} ; 2^\circ) \int_0^{-2} t \exp(-t^2) dt$$

$$3^\circ) \int_1^e \left( x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx ; 4^\circ) \int_{-1}^x \frac{dt}{1-t}$$

$$5^\circ) \int_0^{\pi/6} \sin 3u du ; 6^\circ) \int_{e^2}^e \frac{\ln t}{t} dt$$

$$7^\circ) \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx (n \in N^*) ; 8^\circ) \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

$$9^\circ) \int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x} ; 10^\circ)$$

$$\int_1^{e^2} (x^3 + 1) \ln(x) dx ; 11^\circ) \int_0^1 (x^2 + x + 1) e^{-x} dx ;$$

$$12^\circ) \int_0^{\pi} x^2 \sin(x) dx$$

### Exercice 3

Pour tout réel positif  $a$ , on définit  $I(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$I(a) = \frac{\ln(a) - 1}{a^2} + 1.$$

2. En déduire la limite de  $I(a)$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ .

$$3. \text{ On définit maintenant } J(a) = \int_1^a \frac{\ln(x)}{x^2 + 1} dx. \text{ En}$$

utilisant (avec justification) que pour tout  $x$  supérieur à

$$1, x^2 \leq x^2 + 1 \leq 2x^2, \text{ montrer que } \frac{1}{2} I(a) \leq J(a) \leq I(a).$$

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} e^{-x}.$$

Pour tout  $\alpha > 1$ , on considère l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x) dx.$$

1. Interpréter géométriquement le nombre  $I(\alpha)$ .

## Exercices et problèmes

2. Démontrer que, pour tout  $x \in [1; +\infty[$ , on a :

$$e^{-x} \leq f(x) \leq xe^{-x}.$$

3. En déduire pour tout  $\alpha > 1$  un encadrement de  $I(\alpha)$

4. Quelle est la limite de  $I(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$  ?

5. Déterminer la dérivée par rapport à  $\alpha$  de  $I$ . Quel est son signe ? Dresser le tableau de variation de  $I$ .

### Exercice 5

1. Restitution organisée de connaissances

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle  $[a ; b]$ .

2. Soient les deux intégrales définies par

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \text{ et } J = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$$

a. Démontrer que  $I = -J$  et que  $I = J + e^{\pi} + 1$ .

b. En déduire les valeurs exactes de  $I$  et de  $J$ .

### Exercice 6

1°) Montrer que les intégrales

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \text{ et } J = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

existent.

2°) Calculer  $I + J$  et  $I - J$ . En déduire  $I$  et  $J$ .

### Exercice 7

1. Application du changement de variable. Montrer:

-- si  $f$  est impaire et continue sur  $[-a, a]$ , alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0 \quad (a > 0);$$

-- si  $f$  est paire et continue sur  $[-a, a]$ , alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (a > 0);$$

-- si  $f$  est périodique de période  $T$  est continue sur  $\mathbf{R}$ , alors  $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$ .

$$\text{Calculer : } \int_{-3}^3 x \sqrt{x^4 + 1} dt ; \int_0^{2\pi} \sin^3 t dt$$

### Exercice 8

Pour  $n$  entier naturel, on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

1°) Quelle est la signification géométrique de  $I_0$  ? En déduire la valeur de  $I_0$ .

2°) Calculer  $I_1$ .

3°) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a :

$$I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}. \text{ En déduire la valeur de } I_n \text{ en fonction}$$

de  $n$  (on distinguera suivant la parité de  $n$ ).

4°) Montrer que  $(I_n)$  est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0.

5°) Montrer que  $n(n+1)(n+2) I_n I_{n-1}$  est indépendant de  $n$  et calculer sa valeur ; en déduire un équivalent simple de  $I_n$  lorsque  $I_n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 9

Soit  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$ , avec  $n$  appartenant à  $\mathbf{N}$ .

1°) Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer

## Exercices et problèmes

que pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

3°) Après avoir calculé  $I_0$  et  $I_1$ , en déduire  $I_{2p}$  et  $I_{2p+1}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

4°) Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1.$$

5°) En déduire la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$  de

$$\left( \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2p-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2p+1} \quad (\text{formule de Wallis}).$$

### Exercice 10

On note, pour tout nombre réel  $a$  positif et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n(a) = \int_0^1 \exp(a(1-x)) x^n dx$$

1°) Calculer  $u_0(a)$ .

2°) Convergence de la suite  $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit  $a > 0$  donné.

a) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$0 < u_n(a) < \frac{\exp(a)}{n+1}.$$

b) Montrer que la suite  $(u_n(a))$  est décroissante.

c) Déterminer la limite de  $u_n(a)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3°) Forme explicite de  $u_n(a)$ .

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :  $a \cdot u_{n+1}(a) = -1 + (n+1) \cdot u_n(a)$ .

b) Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$

$$u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}} \left[ \exp(a) - \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right].$$

### Exercice 11

On étudie dans cet exercice la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{c'est à dire } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \pi/2$  :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt$$

1°) convergence de la suite  $(J_k/I_k)$ .

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \pi/2$  :  $t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k$  tel que  $k \geq 0$  :  $0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1})$ .

c) Exprimer  $I_{k+1}$  en fonction de  $I_k$  en intégrant par parties  $I_{k+1}$  (on pourra poser  $u'(t) = \cos(t)$  et  $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$  dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que  $J_k/I_k$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

2°) Convergence et limite de la suite  $(S_n)$ .

a) Exprimer  $I_k$  en fonction de  $J_k$  et  $J_{k-1}$ , en intégrant deux fois par parties l'intégrale  $I_k$  ( $k \geq 1$ ).

b) En déduire la relation suivante pour  $k \geq 1$  :

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

## Exercices et problèmes

c) Calculer  $J_0$  et  $I_0$ , puis déterminer la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ .

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de  $S_{n+p} - S_n$  pour  $n \geq 1$  et

$p \geq 1$ , puis de  $S - S_n$ , et montrer que

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}. Autrement dit, S_n + \frac{1}{n}$$

constitue une valeur approchée de  $S$  à  $\frac{1}{n^2}$  près.

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre  $S$  à  $10^{-6}$  près.

### Exercice 12

Pour  $n$  entier naturel non nul on définit la suite  $(S_n)$  par

$$: S_n = 1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \dots + \frac{1}{n^{1/3}}$$

1°) Justifier pour  $k$  entier naturel non nul l'encadrement

$$: \frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$$

2°) En déduire l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{dx}{x^{1/3}} + 1.$$

3°) que peut-on dire de la suite  $(S_n)$  ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite  $(T_n)$  définie par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \dots + \frac{1}{n^{4/3}} \quad \text{est convergente.}$$

### Exercice 13

Calculer les limites quand  $n$  tend vers  $+\infty$  des sommes

suivantes :  $\sum_{k=1}^n \frac{k^4}{n^5} ; \quad n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$

(rappel :  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ ) ;  $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ .

### Exercice 14

Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ . Démontrer :

1°)  $\forall k \in [[1, n-1]]$

$$\frac{1}{n} \ln \frac{k}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x) dx \leq \frac{1}{n} \ln \frac{k+1}{n}.$$

$$2°) u_n \leq \int_{1/n}^1 \ln(x) dx \leq u_n - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}.$$

$$3°) \frac{1}{n} - 1 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}.$$

$$4°) \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -1.$$

$$5°) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

### Exercice 15

Pour  $n \in \mathbb{N}$  on note  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt[n]{2^k}$

1°) Montrer que pour tout  $k$  appartenant à  $[[0, n-1]]$  :

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{2^k} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} 2^t dt \leq \frac{1}{n} \sqrt[n]{2^{k+1}}.$$

2°) En déduire un encadrement de  $u_n$  et la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3°) Retrouver cette limite en calculant  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercices et problèmes

### Exercice 16

Soit  $f$  la fonction définie pour tout  $x$  strictement positif

$$\text{par : } f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

- 1°) Etudier les variations de  $f$ . montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.  
2°) Déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . En déduire que l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx \text{ est convergente et calculer sa valeur.}$$

- 3°) Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On pose :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$$

- a) Etablir, pour tout entier  $j$  vérifiant  $1 \leq j \leq n$ , les

$$\text{inégalités : } \frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

- b) en déduire l'encadrement :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$$

- c) Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$$

- d) Montrer que la suite  $(S_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

- 4°) On rappelle que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\text{on a l'égalité : } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la

somme  $\sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$  en fonction de  $n$ . En déduire la

$$\text{limite : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{n^n}{n!} \right).$$

### Exercice 17

Soit  $I$  la suite de terme général  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

- 1°) a) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .  
b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .

Etudier la convergence de la suite  $I$ .

- 2°) Calcul d'une valeur approchée de  $I_{15}$ .

- a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = (n+1)I_n - 1/e$ , et :

$$I_n = \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!} I_{n+p}$$

- b) En déduire que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  :

$$0 \leq I_n - \frac{n!}{e} \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{n!}{(n+p+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$$

- c) Comment peut-on choisir  $p$  pour que

$$0 \leq I_{15} - \frac{15!}{e} \sum_{k=1}^p \frac{1}{(15+k)!} < 10^{-6} ?$$

En déduire là l'aide de la calculatrice une valeur approchée de  $I_{15}$  à  $10^{-6}$  près.

- c\*) Ecrire en turbo-pascal un programme qui affiche

une valeur de  $\frac{15!}{e} \sum_{k=1}^p \frac{1}{(15+k)!}$ .  $p$  est fourni par

l'utilisateur. On veillera à minimiser les calculs.

### Exercice 18

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on pose :

## Exercices et problèmes

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$$

1°) Quelle est la dérivée de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

définie par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  ? Calculer  $I_0$ .

2°) Calculer  $I_1$ .

3°) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

En déduire la limite de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Montrer que  $J_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

4°) Etablir à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1} J_n.$$

Quelle est la limite de  $nI_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

### Exercice 19

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$

1°) Etude de la suite  $(J_n)$

a) Calculer  $J_1$ .

b) Montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1

$$0 \leq J_n \leq 1/(n+1).$$

c) Etudier la convergence de la suite  $(J_n)_{n \geq 1}$ .

2°) Etude de la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$ .

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1 :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

b) Etudier la convergence de la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$ .

c) Déterminer un équivalent de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 20

On pose pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx, \text{ et } I_0 = e - 1.$$

1°) a) Etablir, pour tout entier naturel  $n$  :

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

b) Montrer, pour tout entier naturel  $n$  :  $I_n \geq 0$ .

c) Déduire des questions a) et b) que, pour tout entier

$$\text{naturel } n : 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

d) Quelle est la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

e) Montrer :  $I_n \sim_{+\infty} \frac{e}{n}$ .

2°) Soit  $a$  un réel différent de  $I_0$  ; on note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e - (n+1)u_n \end{cases}$$

Montrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ . (On pourra considérer la

suite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $D_n = |u_n - I_n|$ .)

### Exercice 21

On définit la fonction  $f : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

1°) Démontrer que pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à

$$2 : \frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2°) Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, on définit

$$\text{l'intégrale : } I_n = \int_2^n f(x) dx.$$

a) Démontrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

## Exercices et problèmes

b) On définit la fonction  $F : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$x \rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ . Calculer la dérivée de  $F$ , et en

déduire une expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

c) Déterminer la limite de  $I_n - \ln(n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

3°) On définit, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou

$$\text{égal à } 2 : S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

a) Montrer que :  $I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + 1/\sqrt{3}$ .

b) Trouver un équivalent simple de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 22

Pour tout entier naturel  $n$  on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{-x} dx$ .

1°) a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq I_n \leq 1/(n+1).$$

b) En déduire que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge et donner sa limite.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour

$$\text{tout entier naturel } n : I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

3°) a) En déduire pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq I_n - \frac{1}{e(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

b) Trouver un équivalent simple de  $I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 23

On considère, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , la fonction

polynomiale

$P_n : [0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  définie, pour tout  $x$  appartenant à  $[0$

$; +\infty[$ , par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

### I. Etude des fonctions polynomiales $P_n$

1°) Montrer, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $x \in [0 ; +\infty[$  :

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1},$$

où  $P_n$  désigne la dérivée de  $P_n$ .

2°) Etudier, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , les variations de  $P_n$  sur  $[0 ; +\infty[$  et dresser le tableau de variations de  $P_n$ .

3°) Montrer, pour tout  $n \in \mathbf{N}^* : P_n(1) < 0$ .

4°) a) Vérifier, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $x \in [0 ; +\infty[$  :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left( -\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right)$$

b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbf{N}^* : P_n(2) \geq 0$ .

5°) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , l'équation  $P_n(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in [1 ; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $x_n$ , et que  $1 < x_n \leq 2$ .

6°) Ecrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de  $x_2$  à  $10^{-3}$  près.

### II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$

1°) Etablir, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $x \in [0 ; +\infty[ : P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$

2°) En déduire, pour tout  $n \in \mathbf{N}^* :$

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt$$

3°) Démontrer, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  et tout  $t \in [1 ; +\infty[ :$

## Exercices et problèmes

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4°) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt \geq \frac{n}{2} (x_n - 1)^2, \text{ puis :}$$

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}$$

5°) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

### Exercice 24

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$$

1. Calculer  $I_1$ .

2. a) Etudier le sens de variation de la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$ .

b) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

c) Montrer que, pour tout  $x \in [1, e]$  :  $\ln(x) \leq x/e$ .

d) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n$ .

### Exercice 25

Pour  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on pose :  $I_n =$

$$\int_0^1 x^n \sin(\pi x) dx$$

1°) a) Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$

$$0 \leq I_n \leq 1/(n+1).$$

b) En déduire que la suite  $(I_n)$  converge vers 0.

2°) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

3°) Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et

$I_{n-2}$  pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2.

4°) Démontrer par récurrence :  $\forall p \geq 1$

$$I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1} (2p-2k)!}$$

### Exercice 26

Question de cours : soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions continues, dérivables sur  $I$  telles que les fonctions dérivées  $u'$  et  $v'$  soient continues sur  $I$ .

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle  $[a ; b]$  de  $I$ .

#### Partie A

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . On suppose que  $f'$  est continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

1. Utiliser la question de cours pour montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 x f'(x) dx.$$

2. En déduire que

$$\int_0^1 [f(x) - f(1)] dx = - \int_0^1 x f'(x) dx$$

#### Partie B

On désigne par  $\ln$  la fonction logarithme népérien.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]-2 ; 2[$  par

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$
 et  $C$  sa courbe représentative dans

un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

## Exercices et problèmes

2. a. Montrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle

$$]-2; 2[ \text{, on a } f'(x) = \frac{4}{4-x^2}.$$

b. En déduire les variations de  $f$  sur l'intervalle

$$]-2; 2[$$

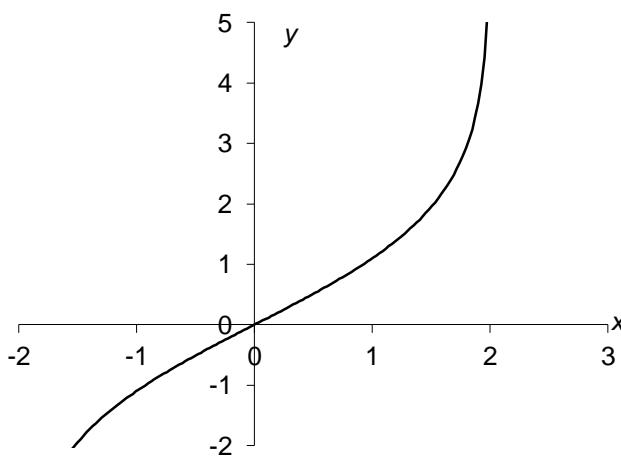
### Partie C

Le courbe  $C$  est tracée ci-dessous. Hachurer la partie  $P$

du plan constituée des points  $M(x ; y)$  tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) \leq y \leq \ln 3.$$

En utilisant la partie A, calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de  $P$ .



### Exercice 27

1. Calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x \, dx$  à l'aide d'une

intégration par parties.

2. Soit la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par :

$f(x) = \sqrt{x} \tan x$  dont la courbe  $(C_f)$  est représentée ci-contre dans le plan  $P$  muni du repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère le solide engendré par la rotation autour de l'axe  $(O ; \vec{i})$  de la surface délimitée dans le plan  $P$

par l'axe  $(O ; \vec{i})$ , la droite d'équation  $x = \frac{\pi}{4}$  et la courbe  $(C_f)$ .

Sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume  $V$  du solide en  $\text{cm}^3$ .

### Exercice 28

On considère la fonction numérique  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Déterminer une fonction polynôme  $P$ , de degré inférieur ou égal à 3 qui a même valeur et même nombre dérivé que  $f$  en 0 et 1.

2. Soit  $k$  la fonction définie par

$$k(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - 1. \text{ Factoriser } k \text{ et en}$$

déduire la position relative de  $C_f$  et  $C_P$ , les courbes représentatives de  $f$  et  $P$ .

3. A l'aide d'un encadrement de  $1+x$  pour  $x$  dans

$$[0 ; 1] \text{ montrer que } \frac{1}{240} < \int_0^1 k(x) \, dx < \frac{1}{120}.$$

4. Calculer  $\int_0^1 f(x) \, dx$  et  $\int_0^1 P(x) \, dx$ .

5. Déduire des résultats précédents la valeur de l'entier

$$n \text{ tel que } \frac{n}{240} < \ln 2 < \frac{n+1}{240}.$$

6. On considère la suite géométrique  $u_n$  de premier terme 1 et de raison  $-x$ .

a. Calculer la somme des  $n$  premiers termes :

$$s_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n ; \text{ en déduire}$$

$$f(x) = s_n(x) + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

## Exercices et problèmes

b. Montrer que

$$\int_0^a f(x)dx = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \dots + \frac{1}{n+1}(-x)^{n+1} + \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx$$

c. Montrer que sur  $[0 ; a]$  on a

$$-\frac{a^{n+1}}{1+a} \leq \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \leq \frac{a^{n+1}}{1+a} \text{ puis que}$$

$$-\frac{a^{n+2}}{1+a} \leq \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{a^{n+2}}{1+a}. \text{ Préciser la limite de}$$

$$\int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

d. On admet que ce résultat reste valable lorsque  $a$  vaut

1. En déduire un algorithme de calcul de  $\ln 2$ .

*Rappel : somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $u_0$ , de raison  $q$  :*

$$u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

### Exercice 29

Pour tout  $k$  entier on note  $f_k$  l'application de  $[0 ; 1]$

dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f_k(x) = x^k \sqrt{1-x}$ . On appelle

$C_k$  sa courbe représentative.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_k$ .

2. Donner, en distinguant suivant la valeur de  $k$ , le tableau de variations de  $f_k$ .

3. Etudier les positions respectives de  $C_k$  et  $C_{k+1}$ .

Tracer les courbes  $C_0, C_1, C_2$ .

4. On pose  $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx$ . Calculer  $\int_0^1 f_0(x)dx$ .

a. Quel est le sens de variation de  $I_k$ ? Montrer que  $I_k$  converge vers une limite  $l$  que l'on ne cherchera

pas.

b) Montrer, en intégrant par parties que pour tout entier

$k > 0$ , on a  $I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$ . En déduire une expression

de  $I_k$ .

c. Montrer que pour tout  $k$  entier, on a

$\int_0^1 f_k(x)dx \leq \frac{a}{1+k}$  où  $a$  est une constante que l'on

déterminera. En déduire la limite de  $I_k$ .

### Exercice 30

On définit la suite d'intégrales :

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}, I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx, \dots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$$

( $n$  désigne un entier naturel).

1. Calculer  $I_1$  et  $I_0 + I_1$ . En déduire  $I_0$ . Pour tout entier  $n$ , calculer  $I_n + I_{n+1}$ .

2. Montrer sans calcul que la suite  $(I_n)$  est croissante.

3. Prouver que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{nx}}{2}. \text{ En déduire un encadrement de } I_n.$$

4. A partir de cet encadrement, déterminer la limite de  $I_n$  et celle de  $\frac{I_n}{e^n}$ .

### Exercice 31

On considère la suite numérique  $(J_n)$  définie, pour

tout entier naturel  $n$  non nul, par  $J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{t+1} dt$ .

1. Démontrer que la suite  $(J_n)$  est croissante.

2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle

## Exercices et problèmes

n'aboutit pas.

On définit la suite  $(I_n)$ , pour tout entier naturel  $n$  non

$$\text{nul, par } I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t} dt.$$

a. Justifier que, pour tout  $t \geq 1$ , on a  $\sqrt{t+1} \leq t+1$ .

b. En déduire que  $J_n \leq I_n$ .

c. Calculer  $I_n$  en fonction de  $n$ . En déduire que la suite  $(J_n)$  est majorée par un nombre réel (indépendant de  $n$ ).

d. Que peut-on en conclure pour la suite  $(J_n)$  ?

### Exercice 32

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$ . Etudier le signe de sa fonction dérivée  $f'$ , sa limite éventuelle en  $+\infty$  et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par son terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

a. Justifier que, si  $n \leq x \leq n+1$ , alors

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$

b. Montrer, sans chercher à calculer  $u_n$ , que pour tout entier naturel  $n$ ,  $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$ .

c. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit  $F$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

a. Justifier la dérивabilité de  $F$  sur  $[0; +\infty[$  et déterminer pour tout réel positif  $x$  le nombre  $F'(x)$ .

b. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n = \int_0^n f(x) dx$ .

Calculer  $I_n$ .

4. On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Calculer  $S_n$ . La suite  $(S_n)$  est-elle convergente ?

### Exercice 33

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} ; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx ; K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx.$$

#### 1. Calcul de I

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}).$$

a. Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ .

b. En déduire la dérivée  $f'$  de  $f$ .

c. Calculer la valeur de  $I$ .

#### 2. Calcul de J et de K

a. Sans calculer explicitement  $J$  et  $K$ , vérifier que :

$$J + 2I = K.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale  $K$ , montrer que :  $K = \sqrt{3} - J$ .

c. En déduire les valeurs de  $J$  et de  $K$ .

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sin^4 x$  ;  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Exprimer  $\sin^2 x$  en fonction de  $\cos 2x$ , puis  $\sin^4 x$  en fonction de  $\cos 2x$  et de  $\cos 4x$ .

## Exercices et problèmes

2. Quelle est la forme générale des primitives de  $f$  sur

$\mathbb{R}$  ?

3. Calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$ .

### Exercice 34

On désigne par  $n$  un nombre entier relatif différent de  $-1$  et par  $x$  un nombre réel supérieur ou égal à  $1$ .

1. Calculer l'intégrale  $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t dt$  (on pourra

effectuer une intégration par parties).

2. En déduire le calcul de  $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$ .

3. Calculer  $I_n(e) - J_n(e)$ .

4. déterminer la limite de  $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$  quand  $n$  tend

vers  $+\infty$ .

### Exercice 35

On pose  $I_0 = \int_1^e x dx$  et  $I_n = \int_1^e x (\ln x)^n dx$  pour tout  $n$

entier non nul.

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$  (on pourra utiliser une intégration par parties).

2. Montrer que pour tout  $n$  entier  $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

. Calculer  $I_2$ .

3. Montrer que pour tout  $n$  entier,  $I_{n+1} \leq I_n$ . En

déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement

suivant :  $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$ .

4. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

### Exercice 36

Soit  $p$  et  $n$  des entiers naturels. On pose

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx .$$

1. Calculer  $I_{n,0}$  et  $I_{n,1}$ .

2. Calculer  $I_{0,n}$  et en déduire  $I_{1,n}$ .

3. Etablir une relation de récurrence entre  $I_{p,n}$  et

$I_{p+1,n+1}$ . En déduire la valeur de  $I_{p,n}$  en fonction de  $p$  et  $n$ .

### Exercice 37

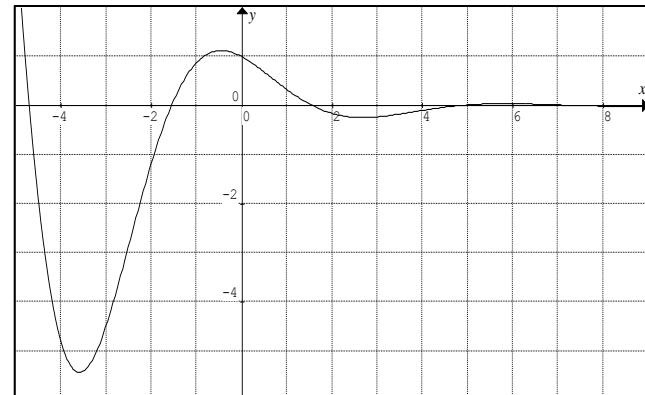
Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$

d'unité 1 cm.

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos x$

représentée ci-dessous. Soit  $C$  cette courbe

représentative.



1. Montrer que pour tout réel  $x$ , on a

$$f'(x) = -e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left( \frac{1}{2} \cos x + \sin x \right).$$

2. a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .

b. Montrer que sur  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , on a  $f(x) \geq 0$ .

## Exercices et problèmes

c. Montrer que pour tout réel  $x$ ,

$$4f''(x) + 4f'(x) = -5f(x).$$

3. Soit l'intégrale  $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx$ .

On considère la fonction  $F$  telle que, pour tout réel  $x$ ,

$$F(x) = -\frac{1}{5} [4f'(x) + 4f(x)].$$

a. Sachant que  $f$  vérifie (1), montrer que  $F$  est une primitive de  $f$ .

b. Etablir que

$$I = -\frac{4}{5} \left[ f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] - \frac{4}{5} \left[ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

puis que  $I = \frac{4}{5} \left( e^{\frac{\pi}{4}} + e^{-\frac{\pi}{4}} \right)$

c. Interpréter graphiquement ce résultat.

### Exercice 38

Soit  $F$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 0$  et dont la dérivée est donnée par

$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ . On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de  $F(x)$ . (C) est la courbe représentative de

$F$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $G$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , par  $G(x) = F(x) + F(-x)$ .

a. Montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'(x)$ .

b. Calculer  $G(0)$  et en déduire que  $F$  est une fonction impaire.

2. Soit  $H$  définie sur  $[0; +\infty]$  par  $H(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$ .

a. Montrer que  $H$  est dérivable sur  $[0; +\infty]$  et calculer

$H'(x)$ .

b. Montrer que, pour tout  $x$  élément de  $[0; +\infty]$ ,

$$H(x) = 2F(1).$$

c. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2F(1)$ .

d. Qu'en déduit-on pour la courbe (C) ?

3. a. Démontrer que, pour tout  $x$  élément de  $[0; 1]$ ,

$$\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1. \text{ En déduire que } \frac{1}{2} \leq F(1) - F(0) \leq 1$$

puis une valeur approchée de  $F(1)$ . Quelle est la précision de cette approximation ?

b. Soit  $T$  la fonction définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  par

$$T(x) = F(\tan x) - x. \text{ Démontrer que } T \text{ est une fonction}$$

constante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . En déduire la valeur exacte

de  $F(1)$ .

4. Dresser le tableau de variation de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses  $-1, 0$  et  $1$ . Unités graphiques : 2 cm sur  $(Ox)$  et 4 cm sur  $(Oy)$ . On prendra  $F(1) = 0,78$ .

### Exercice 39

#### Partie A

On considère l'équation différentielle (E) :  $y' + y = e^{-x}$ .

1. Démontrer que la fonction  $u$  définie sur l'ensemble

$\mathbb{R}$  des nombres réels par  $u(x) = xe^{-x}$  est une solution de (E).

2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0)$  :  $y' + y = 0$ .

## Exercices et problèmes

3. Démontrer qu'une fonction  $y$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , est solution de (E) si et seulement si  $y - u$  est solution de  $(E_0)$ .

4. En déduire toutes les solutions de (E).

5. Déterminer la fonction  $f_2$ , solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

### Partie B

$k$  étant un nombre réel donné, on note  $f_k$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  par :  $f_k(x) = (x + k)e^{-x}$

On note  $C_k$  la courbe représentative de la fonction  $f_k$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de  $f_k$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2. Calculer  $f'_k(x)$  pour tout réel  $x$ .

3. En déduire le tableau de variations de  $f_k$ .

### Partie C

1. On considère la suite d'intégrales  $(I_n)$  définie par

$$I_0 = \int_{-2}^0 e^{-x} dx \text{ et pour tout entier naturel } n \neq 1 \text{ par :}$$

$$I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx .$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale  $I_0$ .

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :  $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$ .

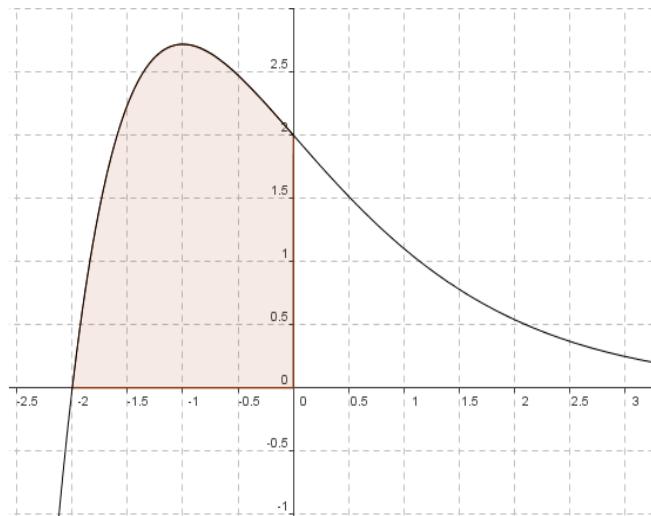
c. En déduire les valeurs exactes des intégrales  $I_1$  et  $I_2$ .

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe  $C_k$  qui est la représentation graphique d'une fonction  $f_k$  définie à la partie B.

a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel  $k$

correspondant.

b. Soit  $S$  l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer  $S$  en fonction de  $I_1$  et  $I_0$  et en déduire sa valeur exacte.



### Exercice 40

1. Exprimer les limites suivantes sous forme d'intégrales.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2 + i^2}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + i^2}}$

2. Montrer que

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^6 + 2^6 + \dots + n^6}{n^7} = \int_0^1 x^6 dx,$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n^{r+1}} = \int_0^1 x^r dx,$

pour tout nombre réel positif  $r$

## Références

### Analyse : Généralités sur les fonctions

$f(-x) = f(x)$ : $f$ est paire,	$f(-x) = -f(x)$ : $f$ est impaire,	<i>changement de repère au point <math>\omega(a,b)</math> :</i>
symétrie par rapport à $Ox$	symétrie par rapport à $O$	$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases}$
<i>nombre dérivé en <math>x_0</math> : <math>\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}</math>. Tangente en <math>x_0</math> : <math>y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)</math></i>		
<i>si <math>f''(x_0) \geq 0</math>, la courbe est au dessus de sa tangente en <math>x_0</math> ; si <math>f''(x_0) \leq 0</math>, la courbe est en dessous de sa tangente.</i>		
<i>inégalité des accroissements finis : sur <math>[a, b]</math>, si <math>m \leq f'(x) \leq M</math> alors <math>\forall x, y \in [a, b], m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M</math></i>		
<i><math>f</math> et <math>g</math> ont des courbes asymptotes ssi <math>\lim_{\infty}(f(x) - g(x)) = 0</math> ; leur position dépend du signe de <math>f(x) - g(x)</math></i>		

### Analyse : Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques : 1° terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = u_n + a$  ;  $u_n = u_0 + na$  ou  $u_n = u_1 + (n-1)a$  ; diverge.

$$S_n = \frac{(\text{nbre de termes})(1^{\text{er}} \text{terme} + \text{dernier terme})}{2} \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{n} ; 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suites géométriques : 1° terme  $u_0$  ;  $u_{n+1} = bu_n$  ;  $u_n = u_0 b^n$  ou  $u_n = u_1 b^{n-1}$  ; converge vers 0 si  $|b| < 1$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b} \text{ tend vers } \frac{1}{1 - b} \text{ si } |b| < 1 ; \text{ si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

### Analyse : Propriétés des fonctions usuelles ; fonctions logarithmiques et exponentielle

$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ ( $x > 0$ )	$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$	$a^x = e^{x \ln a}$ ( $a > 0$ )
	Si $x \in ]-\infty, +\infty[$ et $y \in ]0, +\infty[$ , $y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$	
$\ln ab = \ln a + \ln b$	$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ ; $\ln a^x = x \ln a$	$e^{a+b} = e^a e^b$ ; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ ; $(e^a)^b = e^{ab}$
$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$	$e^0 = 1$ ; $\ln 1 = 0$ ; $\ln e = 1$	$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ ( $x > 0$ ) ; $x^0 = 1$

## Références

Fonctions puissances

Si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$   $y = \sqrt[n]{x}$  équivaut à  $x = y^n$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta ; x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} ; (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

**Analyse : Limites usuelles de fonctions et de suites**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Comportement à l'infini

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty ; \text{ si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0^- ; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0 ; \alpha < 0 : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 ; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 ; \begin{cases} (1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\varepsilon(h) & (\alpha \neq 0) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{cases}$$

Croissances comparées à l'  $\infty$

$$\alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

$$\alpha > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$$

$$a > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$$

$\alpha > 0$  et  $a > 1$  :

$$\alpha < 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$$

$$0 < a < 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

**Analyse : Dérivées et primitives**

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
$k$	0	$kx$	$u+v$	$u'+v'$	$\int u + \int v$
$x^n$ , $n \in \mathbb{Q}^*$	$nx^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$ku$	$ku'$	$k \int u$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x $	$u.v$	$u'.v + u.v'$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	

## Références

$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$		$u^n, n \in \mathbb{Q}^*$	$n u' u^{n-1}$	$\int u' u^n = \frac{1}{n+1} u^{n+1}$
			$u \circ v$	$v' \cdot (u' \circ v)$	
$e^u$	$u' e^u$	$\int u' e^u = e^u$	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$ $(= e^{\alpha \ln u})$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$	$\int \ln(x+a) = (x+a) \ln x - x$	$\cos u$	$-u' \sin u$	$\int u' \cos u = \sin u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u)$	$\int \tan u = \ln \cos u $	$\sin u$	$u' \cos u$	$\int u' \sin u = -\cos u$

### Analyse : Calcul intégral

Formules fondamentales : Si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

Si  $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ , alors  $g'(x) = f(x)$  et  $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$

Formules de Chasles  $\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$   $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$

Linéarité  $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$

Positivité Si  $a \leq b$  et  $f \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

Si  $a \leq b$  et  $f \leq g$ , alors  $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

### Intégration d'une inégalité

Si  $a \leq b$  et  $m \leq f \leq M$ , alors  $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  :  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Intégration par parties  $\int_a^b u v' dt = [uv]_a^b - \int_a^b u' v dt$

- المفید في الرياضيات، التحلیل السنة الثانیة بکالوریا علوم ریاضیة دار الثقافة طبعة 2007
- سلسلة MEGAmath الجزء الأول 1 TOME للسنة الختامية علوم ریاضیة (أوب) SOGELIV طبعة 2004
- زروال 250 تمرين و حلولها السنة 3 ثانوي علوم ریاضیة، افريقيا الشرق طبعة 1994
- وزارة التربية الوطنيةالرياضيات، السنة الثالثة شعبة العلوم التجريبية، مكتبة المدارس،طبعة 2005

باللغة العربية

باللغات الأجنبية

- Mathématiques au bac marocain, sciences experementalle, exercices et problèmes resolus, H. REDIANE, SOCHEPRESS
- L'oasis des maths 2<sup>e</sup> bac sciences experementalles, edition almadaris 2016
- Savoir resoudre les problemes de bac, QUATORZE ANS D'EXAMENS DE MATHEMATIQUES 1967-1980, DELAGRAVE/SOCHEPRESS
- Maths obligatoire et specialité T<sup>le</sup> S, Edition HATIER ,paris,juin 2007
- Mathématiques ANALYSE-FONCTIONS DE LA VARIABLLE REELLE, NOBERT VERDIER, edition ESKA 1997
- Mathématiques et presentation des phenomenes physiques,partie mathématiques,UNIVERSITE BOURDEAUX
- Collection pixel,maths term S specialité,edition 2008 BORDAS
- Enseignement specifiqueMaths term S,edition MAGNARD

باللغات الاجنبية

- <http://laruche.lycee.free.fr/profs.htm>
- <https://www.ilemaths.net/math-s terminale.php>
- <https://www.sos-devoires-corrigés.com>
- <https://www.espacemaths.com>
- <https://devoir@t.net>
- <http://www.matheleve.net/>
- Pour les images : <https://images.google.com/?hl=fr>
- <https://www.wikipedia.org/>
- <https://www.maths-akir.midiblogs.com>
- <https://www.chigatome.com>
- <https://www.studorama.com>
- <https://www.sigmaths.co.cc>
- <http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php>

Les sites web

Les sites web

المراجع المعتمدة في انجاز هذا الكتاب