

TÜREV

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_0 \in [a, b]$ olmak üzere

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limitine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $f'(x_0)$ şeklinde ifade edilir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$f'(x_0^+)$ → sağdan türev

$f'(x_0^-)$ → soldan türev

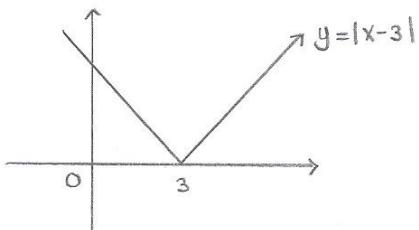
$f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ oluyorsa $f'(x_0)$ vardır ve

$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$ dir.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

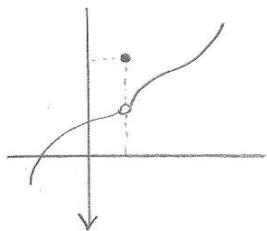
• Türeule sürekli arasındaki ilişkisi:

- Sürekli olan bir fonksiyon türeuli olmak zorunda değildir ama bir fonksiyon türeuli ise süreklidır.



• sürekli ama türeuli yoktur.

- Bir fonksiyon sürekli değilse türeuli değildir.



• sürekli olmadığı için türeuli değilidir.

- ☺ Bir fonksiyonun bir noktası türeuli olması için o noktada,
 - sürekli olması
 - sağdan ve soldan türeulerin birbirine eşit olması gereklidir.

1) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 8, & x = 2 \\ 3x+2, & x > 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$

noktasındaki türevi nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$8 = 8 = 8$ olduğundan sürekliidir.

$$f'(2^+) = 3$$

$$f'(2^-) = 3x^2 \Rightarrow f'(2^-) = 12$$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan türev yoktur.

2) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x, & x > 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^4 + 1, & x < 1 \end{cases}$

noktasındaki türevi nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$3 \neq 2$ olduğundan sürekli değil, sürekli olmadığı için türeuli değildir.

3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x > 3 \\ mx + n, & x \leq 3 \end{cases}$

noktasında türeuli olması için $m+n$ kaç olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \Rightarrow 19 = 3m + n$$

$$f'(3^+) = f'(3^-) \Rightarrow 4x = m \Rightarrow m = 12$$

$$m = 12 \text{ için } 19 = 36 + n \Rightarrow n = -17$$

$$m + n = 12 + (-17) = -5$$

Türev alma kuralları:

$$c \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere } y = c \text{ ise } y' = 0 \text{ dir.}$$

$$y = 3 \Rightarrow y' = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = 0$$

$$n \in \mathbb{R} \text{ ve } y = a \cdot x^n \Rightarrow y' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y = 4x^2 \Rightarrow y' = 8x$$

$$y = \frac{x^4}{2} \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{2} = 2x^3$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$y = 5x \Rightarrow y' = 5$$

$$y = \frac{x}{3} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

$$y = h(x) + g(x) - k(x) \Rightarrow y' = h'(x) + g'(x) - k'(x)$$

$$y = x^2 + 3x + 5 \Rightarrow y' = 2x + 3$$

$$y = 3x - 2 \Rightarrow y' = 3$$

$$y = x - 1 \Rightarrow y' = 1$$

$$y = h(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = h'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot h(x)$$

$$\begin{aligned} y = (x^3 + 1) \cdot (x + 1) &\Rightarrow y' = 3x^2 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x^3 + 1) \\ &= 3x^3 + 3x^2 + x^3 + 1 \\ &= 4x^3 + 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$y = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{h'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot h(x)}{(g(x))^2}$$

$$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow y' = \frac{3 \cdot (x-2) - 1 \cdot (3x+1)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x-6-3x-1}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2}$$

$$y = f^n(x) = [f(x)]^n \Rightarrow y' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$y = (x^3 + x)^3 \Rightarrow y' = 3 \cdot (x^3 + x)^2 \cdot (3x^2 + 1)$$

$$y = (x^2 + 3x - 4)^5 \Rightarrow y' = 5 \cdot (x^2 + 3x - 4)^4 \cdot (2x + 3)$$

$$y = \sqrt[n]{h(x)} \Rightarrow y' = \frac{h'(x)}{2 \cdot \sqrt[n]{h(x)}^{n-1}}$$

$$y = \sqrt{2x} \Rightarrow y' = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2x}}$$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 1}}$$

$$y = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{g'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{(g(x))^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$y = \sqrt[4]{x^2 + 2x + 5} \Rightarrow y' = \frac{2x+2}{4 \cdot \sqrt[4]{(x^2 + 2x + 5)^3}}$$

4) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ olduğuna göre $f'(2)$ nedir?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \cdot (x+1) - 1 \cdot 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} \\ f'(2) &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

5) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$ ise $f'(1)$ nedir?

$$f'(x) = 3 \cdot (x^2 + 2x)^2 \cdot (2x + 2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(1) &= 3 \cdot 9 \cdot 4 \\ &= 27 \cdot 4 \\ &= 108 \end{aligned}$$

6) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$ olduğuna göre $f'(1)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x} + 3)'}{2\sqrt{\sqrt{x} + 3}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x} + 3}}$$

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

7) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ olduğuna göre $f'(3)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}} = \frac{\frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+3)}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{4}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+3}{x-1}}}$$

$$f'(3) = \frac{-\frac{4}{4}}{2\sqrt{\frac{6}{2}}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

8) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$ olduğuna göre $f'(1)$ nedir?

$$y = x^{-3} + x^{-1} \Rightarrow y' = -3x^{-4} - 1 \cdot x^{-2}$$

$$f'(1) = -3 - 1 \Rightarrow f'(1) = -4$$

9) $y = 2x^2 - 3x + 1$ olduğuna göre $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

nin degeri nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$f'(2) = 5$$

• mutlak değer fonksiyonun türevi:

$$f(x) = |g(x)| \text{ için}$$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & g(x) > 0 \\ (-g(x))', & g(x) < 0 \end{cases} \text{ dir.}$$

☺ mutlak değerin içini sıfır yapan değerlerde türev yoktur. Ancak mutlak değerinin içi tam kare ise tam karenin kökünde türev vardır.

10) $f(x) = |x^2 - 4x|$ olduğuna göre $f'(2)$ nin degeri nedir?

$$x=2 \text{ için } x^2 - 4x < 0 \text{ dir.}$$

$$f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$$

$$f'(2) = 0$$

11) $f(x) = |x^2 - 16|$ olduğuna göre $f'(4)$ nedir?

$x=4$ için $x^2 - 16 = 0$ oluyor ve tam kare olmadığından bu noktada türev yoktur.

12) $f(x) = |x^3 - 8| - x^2$ olduğuna göre $f''(-1)$ nin degeri nedir?

$$x=-1 \text{ için } x^3 - 8 < 0 \text{ dir.}$$

$$f(x) = -x^3 + 8 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2x$$

$$f''(x) = -6x - 2 \Rightarrow f''(-1) = 4$$

13) $f(x) = |2-x| + 2$ olduğuna göre $f(1) + f'(3)$ nedir?

$$f(1) = |2-1| + 2 \Rightarrow f(1) = 3$$

$$x=3 \text{ için } 2-x < 0 \text{ olduğundan } f(x) = -2+x+2$$

$$f'(x) = 1$$

$$f'(3) = 1$$

$$f(1) + f'(3) = 3 + 1 = 4$$

14) $f(x) = |x^2 - 2x - 15|$ fonksiyonunun türeuli^ü olduğu aralık nedir?

(+) mutlak değerin içiń sıfır yapan noktalar
da (tam kare depli) türeui yoktur.

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array} \right\} \text{tureuli depli.}$$

$$R = \{-3, 5\}$$

15) $f(x) = |x^2 + mx + 16|$ veriliyor. Her $x \in R$ için
 $f'(x)$ varsa m kaç farklı tam sayı deperi^o
alır?

$$A \leq 0$$

$$m^2 - 64 \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 64$$

$$|m| \leq 8$$

$$-8 \leq m \leq 8$$

→ 17 tanedir.

• Bileşke fonksiyon:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[f(3x+1)]' = f'(3x+1) \cdot 3$$

$$[f(x^2 + 2x - 3)]' = f'(x^2 + 2x - 3) \cdot (2x + 2)$$

16) $f(3x-5) = 2x^2 + x - 1$ olduğuna göre $f'(1) + f'(1)$
toplamı nedir?

$$x=2 \text{ için } f(1) = 8 + 2 - 1 = 9 \Rightarrow f(1) = 9$$

$$f'(3x-5) \cdot 3 = 4x + 1$$

$$x=2 \text{ için } f'(1) \cdot 3 = 9$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3$$

$$\begin{aligned} f'(1) + f'(1) &= 3 + 9 \\ &= 12 \end{aligned}$$

17) $f(2x-3) = g(2x^2 + 3x - 1)$ olarak veriliyor.

$f'(-1) = 21$ olduğuna göre $g'(4)$ nedir?

$$f'(2x-3) \cdot 2 = g'(2x^2 + 3x - 1) \cdot (4x+3)$$

$$x=1 \text{ için}$$

$$\underbrace{f'(-1) \cdot 2}_{21} = \underbrace{g'(4) \cdot 7}_{42}$$

$$21$$

$$42 = g'(4) \cdot 7 \Rightarrow g'(4) = 6$$

18) $f(2x+1) \cdot (3x+1) = g(3x)$ olarak veriliyor.

$f(5) = 3$, $g'(6) = 10$ olduğuna göre $f'(5)$
nedir?

$$f'(2x+1) \cdot 2 \cdot (3x+1) + 3 \cdot f(2x+1) = g'(3x) \cdot 3$$

$$x=2 \text{ için}$$

$$\underbrace{f'(5) \cdot 2 \cdot 7}_{3} + \underbrace{3 \cdot f(5)}_{10} = \underbrace{g'(6) \cdot 3}_{10}$$

$$f'(5) \cdot 14 + 9 = 30$$

$$f'(5) \cdot 14 = 21 \Rightarrow f'(5) = \frac{3}{2}$$

19) Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı
ve türeulenebilir bir f fonksiyonu için
 $f(0) = f'(0) = 4$ olduğuna göre

$g(x) = f(x \cdot f(x))$ ile tanımlanan g fonksiyonu
için $g'(0)$ kaçtır?

$$g'(x) = f'(x \cdot f(x)) \cdot (1 \cdot f(x) + f'(x) \cdot x)$$

$$x=0 \text{ için}$$

$$g'(0) = f'(0) \cdot [f(0) + f'(0) \cdot 0]$$

$$\underbrace{g'(0)}_{4} = \underbrace{f'(0) \cdot f(0)}_{4}$$

$$\Rightarrow g'(0) = 16$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y = f(u) \\ u = f(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$20) \quad y = 3t+1 \\ t = x^2 + 2x + 5 \quad \text{olduğuna göre } \frac{dy}{dx} \text{ nedir?}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ = 3 \cdot (2x+2) = 6x+6$$

$$21) \quad y = t^2 + t \\ t = x^2 + x + 3 \quad \text{olduğuna göre } \frac{dy}{dx} \text{ nedir?}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (2t+1) \cdot (2x+1) \\ = (2 \cdot (x^2+x+3)+1) \cdot (2x+1) \\ = (2x^2+2x+7) \cdot (2x+1)$$

$$22) \quad y = 3t^2 + 1 \\ t = 2u^2 + 3u \\ u = x+1 \quad \text{olduğuna göre } \frac{dy}{dx} \text{ in } x=1 \text{ için degeri nedir?}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6t \cdot (4u+3) \cdot 1 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ x=1 \text{ için } u=2 \\ u=2 \text{ için } t=14 \\ = 84 \cdot 11 \\ = 924$$

Ters fonksiyonun türevi:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$23) \quad f: R^+ \rightarrow R \text{ tanımlı ve } f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5 \\ \text{olduğunu göre } (f^{-1})'(5) \text{ nedir?}$$

$$y=5 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 5 \\ x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \\ x(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x \neq 0, x=3, x \neq -1$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(3)} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 \\ f'(3) = 27 - 12 - 3 = 12$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}$$

$$24) \quad f: [1, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 10 \quad \text{olduğuna göre } (f^{-1})'(5)$$

nedir?

$$y=5 \text{ için } x^2 - 2x - 10 = 5$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x=5 \text{ ve } x \neq -3$$

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(5)} \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \\ f'(5) = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}$$

Trigonometrik fonksiyonların türevi:

$$y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cdot \cos 3x$$

$$y = \sin(x^2 + x) \Rightarrow y' = (2x+1) \cdot \cos(x^2+x)$$

$$y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \cos(3x+1) \Rightarrow y' = -3 \cdot \sin(3x+1)$$

$$y = \cos(2x) \Rightarrow y' = -2 \cdot \sin 2x$$

$$y = \tan u \Rightarrow y' = u' \cdot (1 + \tan^2 u) \\ = u' \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \\ = u' \cdot \sec^2 u$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$$

$$y = \tan 2x \Rightarrow y' = 2 \cdot (1 + \tan^2 2x)$$

$$y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \cdot (1 + \cot^2 u) \\ = -u' \cdot \frac{1}{\sin^2 u} = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$$

$$y = \cot(2x+3) \Rightarrow y' = -2 \cdot (1 + \cot^2(2x+3))$$

$$y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

25) $y = \sin x + \cos x$ ise $f'(0)$ nedir?

$$f'(x) = \cos x - \sin x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 - \sin 0 \\ = 1 - 0 = 1$$

26) $y = \sin 4x^2 - \cos 3x$ olduğuna göre $f'(x)$ nedir?

$$f'(x) = 8x \cdot \cos 4x^2 + 3 \cdot \sin 3x$$

27) $y = \sin x^2 + \sin^2 x$ ise $f'(x)$ nedir?

$$f'(x) = 2x \cdot \cos x^2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \\ = 2x \cdot \cos x^2 + \sin 2x$$

28) $y = \sin^3 x$ ise y' nedir?

$$y' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

29) $y = \cos^3 3x$ fonksiyonunun türevi nedir?

$$y' = 3 \cdot \cos^2 3x \cdot (-3 \cdot \sin 3x) \\ = -9 \cdot \cos^2 3x \cdot \sin 3x$$

30) $y = \sin^2 x^3$ olduğuna göre y' nedir?

$$y' = 2 \cdot \sin x^3 \cdot (3x^2 \cdot \cos x^3) \\ = 6x^2 \cdot \sin x^3 \cdot \cos x^3 \\ = 3x^2 \cdot 2 \cdot \sin x^3 \cdot \cos x^3 = 3x^2 \cdot \sin 2x^3$$

31) $y = (\sin 2x)^2$ ise y' nedir?

$$y' = 2 \cdot \sin 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x \\ = 2 \cdot \sin 4x$$

32) $\frac{d^2}{dx^2} (\sin^2 3x)$ ifadesinin eşiti nedir?

$$y' = 2 \cdot \sin 3x \cdot (3 \cdot \cos 3x) \\ = 3 \cdot \sin 6x \Rightarrow y'' = 18 \cdot \cos 6x$$

33) $f(x) = \sin(\cos x)$ ise $f'(0)$ nedir?

$$f'(x) = -\sin x \cdot \cos(\cos x)$$

$$f'(0) = -\underbrace{\sin 0}_{0} \cdot \cos(\underbrace{\cos 0}_1) \\ = 0 \cdot \cos 1 \\ = 0$$

$$y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$y = \text{arc Cot } u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

34) $f(x) = \arctan 2x$ ise $f'(2)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

35) $f(x) = \text{arc sin} \left(\frac{x}{2} \right)$ ise $f'(2)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} \Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{Sayı}}{0} = \infty$$

36) $y = \text{arc Cot} \sqrt{x^4}$ ise $f'(4)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x^4}}}{1+x} \Rightarrow f'(4) = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$

• dogoritma fonksiyonun türevi:

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

37) $y = \ln x + \log_3(4x)$ ise y' nedir?

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{4}{4x \cdot \ln 3} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

38) $f(x) = x \cdot \ln x$ ise $f'(e)$ nedir?

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x \\ = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow f'(e) = \ln e + 1$$

39) $f(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$ olduğuna göre $f'(4)$ nedir?

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x$$

$$f'(4) = \frac{2}{4} + \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 + \ln 4}{4}$$

40) $f(x) = \log_2(\sin x)$ ise $f'(\frac{\pi}{4})$ nedir?

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e$$

• Üstel fonksiyonun türevi:

$$y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = 1 \cdot e^x = e^x$$

$$y = e^{2x} \Rightarrow y' = 2 \cdot e^{2x}$$

$$y = e^{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \cdot e^{\ln x}$$

$$y = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$y = 2^x \Rightarrow y' = 1 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$y = 3^{\sin x} \Rightarrow y' = \cos x \cdot 3^{\sin x} \cdot \ln 3$$

$$y = 3^{x^2+x} \Rightarrow y' = (2x+1) \cdot 3^{x^2+x} \cdot \ln 3$$

41) $f(x) = x^3 \cdot e^{3x}$ ise $f'(1)$ nedir?

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{3x} + 3 \cdot e^{3x} \cdot x^3$$

$$f'(1) = 3 \cdot e^3 + 3e^3 = 6e^3$$

42) $y = \ln x \cdot 2^{x^2}$ ise $f'(1)$ nedir?

$$y' = \frac{1}{x} \cdot 2^{x^2} + 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot \ln x$$

$$f'(1) = 2 + 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{\ln 2}_{0} \cdot \ln 1 = 2$$

• doğaritmik türev:

$y = (\ln x)^B(x)$ yani hem taban hemde derece x 'e bağlı ise her iki tarafın ln'ı alınır ve sonra türevi alınır.

43) $y = x^x$ ise y' nedir?

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x$$

$\ln y = x \cdot \ln x$ (her iki tarafın türevi alınır.)

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

44) $y = x^{3x}$ ise y' nedir?

$$\ln y = \ln x^{3x} \Rightarrow \ln y = 3x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot 3x$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \ln x + 3$$

$$\Rightarrow y' = x^{3x} \cdot (3 \cdot \ln x + 3)$$

45) $y = x^{\sin x}$ ise y' nedir?

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x$$

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\downarrow \\ x^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin x} \cdot \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

• Kapali fonksiyonların türevi:

$F(x,y) = 0$ şeklindeki fonksiyonlara kapali fonksiyon denir.

$$F'(x,y) = -\frac{Fx'}{Fy'}$$

F_x' = y ler sabit kabul edilerek sadece x'e göre türev alınır.

F_y' = x ler sabit kabul edilerek sadece y'ye göre türev alınır.

46) $3y - 3yx - 2x = 0$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Fx'}{Fy'} = -\frac{(-3y-2)}{3-3x} = \frac{3y+2}{3-3x}$$

47) $x^2y - xy - 4x + 5y - 2 = 0$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2xy-y-4)}{x^2-x+5} = \frac{y+4-2xy}{x^2-x+5}$$

48) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ fonksiyonunun türevi nedir?

$$\begin{aligned} -\frac{Fx'}{Fy'} &= -\frac{\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1}}{\frac{2}{3} \cdot y^{\frac{2}{3}-1}} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

49) $x \cdot \cos 2y - 3y + x = 0$ ise $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\begin{aligned} -\frac{Fx'}{Fy'} &= -\frac{\cos 2y + 1}{-2x \cdot \sin 2y - 3} \\ &= \frac{\cos 2y + 1}{2x \cdot \sin 2y + 3} \end{aligned}$$

• Parametrik olarak tanımlanan fonksiyonun türevi:

$y = f(x)$ fonksiyonu için;

$$\left. \begin{array}{l} y = g(t) \\ x = h(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ dir.}$$

50) $x = \sin \theta + 3$

$y = \cos 2\theta - 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ nedir?

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-2 \cdot \sin 2\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{-2 \cdot 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{\cos \theta} = -4 \sin \theta \end{aligned}$$

51) $x = 4t^2 + 3t + 1$

$y = 2t + 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ in $t = 1$ için degeri nedir?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{8t+3} \Rightarrow \frac{2}{11}$$

52) $x = 6 \cdot \sin 3t$

$y = 6 \cdot \cos^2 3t$ denklemi ile verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x=3$ apsisiği noktası türevinin degeri nedir?

$x = 3$ için $3 = 6 \cdot \sin 3t$

$$\Rightarrow \sin 3t = \frac{1}{2}$$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$ olduğundan $t = 10$ dir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12 \cdot \cos 3t \cdot (-3 \cdot \sin 3t)}{6 \cdot 3 \cdot \cos 3t}$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cdot \sin 3t \\ &\downarrow \\ &10 \end{aligned}$$

$$= -2 \cdot \sin 30 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

• Yüksek mertebeden türeüler:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

53) $f(x) = \frac{1}{x}$ ise $\frac{d^{12}y}{dx^{12}}$ nedir?

$$y = x^{-1} \Rightarrow y' = -1 \cdot x^{-2}$$

$$y'' = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$y''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$y'''' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$$

⋮

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 12! \cdot x^{-13}$$

54) $f(x) = \cos x$ ise $\frac{d^{2013}y}{dx^{2013}}$ nedir?

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f''''(x) = \cos x$$

$$2013 \equiv 1 \pmod{4}$$

↓

1. türeue bakılır.

$$\frac{d^{2013}y}{dx^{2013}} = -\sin x$$

55) $y = \cos 2x$ ise $\frac{d^{46}y}{dx^{46}}$ nedir?

$$y' = -2 \cdot \sin 2x$$

$$y'' = -2^2 \cdot \cos 2x$$

$$y''' = 2^3 \cdot \sin 2x$$

$$y'''' = 2^4 \cdot \cos 2x$$

$$46 \equiv 2 \pmod{4}$$

↓

2. türeue bakılır.

$$(-2^{46} \cdot \cos 2x)$$

56) $f(x) = \ln x$ ise $\frac{d^{50}y}{dx^{50}}$ nedir?

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -x^{-2}$$

$$y''' = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3}$$

$$y'''' = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$$

$$y'''' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$$

⋮

$$\frac{d^{50}y}{dx^{50}} = -49! \cdot x^{-50} = \frac{-49!}{x^{50}}$$

57) $y = x \cdot e^x$ ise $\frac{d^{72}y}{dx^{72}}$ nedir?

$$y' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x \cdot (1+x)$$

$$y'' = e^x \cdot (1+x) + 1 \cdot e^x = e^x \cdot (2+x)$$

$$y''' = e^x \cdot (2+x) + 1 \cdot e^x = e^x \cdot (3+x)$$

⋮

$$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = e^x \cdot (72+x)$$

58) $y = \sqrt{x}$ ise $\frac{d^5y}{dx^5}$ nedir?

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y''' = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$y'''' = -\frac{15}{16} \cdot x^{-\frac{7}{2}}$$

$$y'''' = \frac{105}{32} \cdot x^{-\frac{9}{2}}$$

. Türevin limit Hesabında Kullanılması:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) \text{ ya da } \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \text{ oluyorsa}$$

L'Hospital Kuralı kullanılır.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ dir.}$$

☺ Eğer belirsizlik devam ederse L'Hospital kuralı birden fazla uygulanabilir.

59) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x}$ nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{\ln x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

60) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$ nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos \sqrt{x}}{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2}$$

61) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2 - \sqrt{4-x}}$ limitinin değeri nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \cos 3x}{-\left(\frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \right)} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

62) $\lim_{d \rightarrow 1} \frac{\sin \pi d}{1-d^2}$ ifadesinin değeri nedir?

$$\lim_{d \rightarrow 1} \frac{\sin \pi d}{1-d^2} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{d \rightarrow 1} \frac{\pi \cdot \cos \pi d}{-2d} = \frac{\pi \cdot \cos \pi}{-2} = \frac{-\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

63) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{\cos x - \cos a}$ ifadesinin değeri nedir?

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{\cos a}{\sin a} = -\cot a$$

64) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{\sin \pi x}$ ifadesinin eşiti nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{\pi}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)}{\pi \cdot \cos \pi x} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-\pi} = \frac{1}{2}$$

65) $\lim_{y \rightarrow x} \frac{y^3 - x^3}{y^2 - x^2}$ nedir?

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{3y^2}{2y} = \frac{3x}{2}$$

66) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}$ nedir?

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2 \cdot \sin x}{1 + \tan^2 x} = \frac{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

67) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^4-16}$ nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x \cdot \cos(x^2-4)}{4x^3} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

68) $f: R \rightarrow R$ her noktada türelili bir fonksiyon ve $f'(1) = 3$ olduguna göre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h} \text{ kaçtır?}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+2h) \cdot 2 - f'(1-3h) \cdot (-3)}{1} = f'(1) \cdot 2 + 3 \cdot f'(1) = 6 + 9 = 15$$

69) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 + x \cdot \sin 2x}$ nedir?

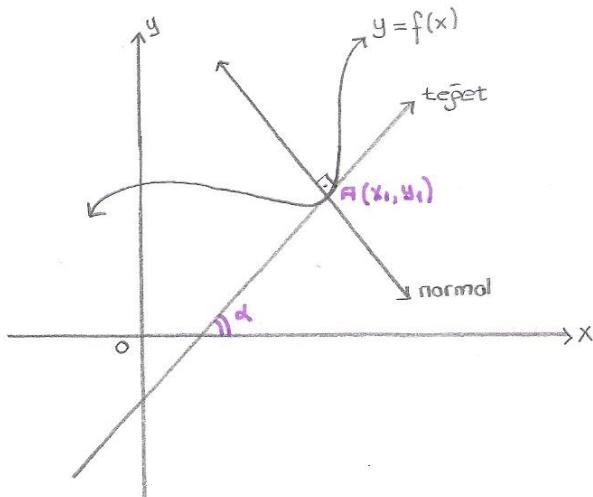
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 2x}{2x + 1 \cdot \sin 2x + 2 \cdot \cos 2x \cdot x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \cos 2x}{2 + 2 \cdot \cos 2x + (-4 \cdot \sin 2x \cdot x + 2 \cdot \cos 2x \cdot 1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

70) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$ nedir?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

• TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU:



Sekilde verilen $y=f(x)$ fonksiyonuna $P(x_1, y_1)$ noktasında çizilen teğetin eğimi, fonksiyonun α noktasındaki birinci türevine eşittir.

Teğetin eğimi $m_T = f'(x_1) = \tan d$

😊 d dar açı ise eğim pozitif, geniş açı ise eğim negatifdir.

Teğetin denklemi:

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

$$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -\frac{1}{f'(x_1)}$$

Normalin denklemi:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)} \cdot (x - x_1)$$

Hatırlatma :)

- Paralel doğruların eğimleri birbirine eşittir.
- Birbirine dik doğruların eğimleri çarpımı -1 dir.
- Doğrunun eğimi bulunurken y yalnız bırakılır ve x in katsayısına bakılır.
 $y = 3x + 5 \Rightarrow m_T = 3$

71) Denklemi $f(x) = \sin(\cos 5x)$ olan eğrinin

$x = \frac{\pi}{10}$ noktasındaki teğetinin ve normalinin eğimi nedir?

$$m_T = f'\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$f'(x) = -5 \cdot \sin 5x \cdot \cos(\cos 5x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -5 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= -5$$

$$\Rightarrow m_T = -5$$

$$m_N = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{10}\right)} = \frac{1}{5}$$

72) $y < 0$ olmak üzere $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $x = \sqrt{3}$ noktasındaki teğetinin eğimi nedir?

$$F(x, y) = -\frac{Fx}{Fy} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$x = \sqrt{3} \text{ için } 3 + y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm \sqrt{6}$$

$$y = -\sqrt{6}$$

$$F'(x, y) = -\frac{x}{y} = -\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

73) $y = 2x^2 - 5x + 3$ fonksiyonunda $x = 2$ noktasında çizilen teğetin denklemi nedir?

$$x = 2 \text{ için } y = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$$

$$(2, 1)$$

$$m_T = f'(2) \Rightarrow f'(x) = 4x - 5 \Rightarrow f'(2) = 3$$

$(2, 1)$ noktasından geçen ve eğimi $m_T = 3$ olan teğetin denklemi

$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

$$y - 1 = 3 \cdot (x - 2)$$

$$y - 1 = 3x - 6$$

$$\Rightarrow y = 3x - 5$$

74) $x^2 + 5y^2 = 14$ eğrisinin P(3,1) noktasındaki tepe-
tiğinin denklemi nedir?

$$F'(x,y) = -\frac{Fx'}{Fy'} = -\frac{2x}{10y} = -\frac{x}{5y} = -\frac{3}{5} \Rightarrow m_T = -\frac{3}{5}$$

$$y-1 = -\frac{3}{5} \cdot (x-3)$$

$$y-1 = \frac{-3x+9}{5}$$

$$5y-5 = -3x+9 \Rightarrow 5y+3x-14=0$$

75) $x^3y^2 - 5xy^3 + 8x^2 - 4y + 24 = 0$ eğrisinin R(2,2)
noktasındaki tepe-
tiğinin denklemi nedir?

$$\begin{aligned} F'(x,y) &= -\frac{Fx'}{Fy'} = -\frac{3x^2y^2 - 5y^3 + 16x}{2x^3y - 15xy^2 - 4} \\ &= -\frac{48 - 40 + 32}{32 - 120 - 4} = -\frac{40}{-92} = \frac{10}{23} \end{aligned}$$

$$y-2 = \frac{10}{23} \cdot (x-2)$$

76) $y = \frac{x^3+8}{x^2+2}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin
x=1 noktasındaki tepe-
tiğinin denklemi nedir?

$$x=1 \text{ için } y = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow R(1,3)$$

$$m_T = f'(1)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+2) - 2x \cdot (x^3+8)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(1) = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 9}{3^2} = \frac{9 - 18}{9} = -1 \Rightarrow m_T = -1$$

(1,3) noktasından geçen ve eğimi -1
olan tepe-
tiğin denklemi

$$y-3 = -1 \cdot (x-1)$$

$$y-3 = -x+1$$

$$y = -x+4$$

77) $y = \frac{x^2 - ax - 5}{x-7}$ fonksiyonunun gösterdiği
eğrinin apsisi $x=-1$ olan noktasındaki tepe-
tiğinin eğri $y = \frac{3x}{4}$ doğrusuna paralel olması için
a kaç olmalıdır?

$$f'(-1) = \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-a) \cdot (x-7) - 1 \cdot (x^2 - ax - 5)}{(x-7)^2}$$

$$\frac{(-2-a) \cdot (-8) - (1+a-5)}{64} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{16+8a-1-a+5}{64} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{20+7a}{16} = \frac{3}{1} \Rightarrow 20+7a=48$$

$$7a=28$$

$$a=4$$

78) $y = x^2 - 1$ eğrisine tepe ve $y = 4x - 3$ doğru-
sunca paralel olan doğrunun denklemi nedir?

$$y = x^2 - 1$$

$$R(x_1, y_1) \rightarrow m_T = 4$$

$$y = 4x - 3$$

$$f'(x) = 4 \Rightarrow 2x_1 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_1 = 2 \text{ için } y_1 = 3 \Rightarrow y - 3 = 4 \cdot (x - 2)$$

$$y = 4x - 5$$

79) $y = x^2 - 3x + 2$ eğrisinin $y - x + 3 = 0$ doğrusu-
na en yakın noktasının koordinatlarını
bulunuz?

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$R \rightarrow m_T = 1$$

$$y = x - 3$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 1$$

$$x = 2$$

$$x = 2 \text{ için } y = 4 - 6 + 2 = 0$$

$$R(2,0)$$

80) $y = x^3 + ax^2 + b$ fonksiyonunun grafiği apsis -4 olan noktada x eksenine teğet olduğunu göre b kaçtır?

Fonksiyon $(-4, 0)$ noktasında x eksenine teğet ise $f'(-4) = 0$

$$f'(-4) = 0$$

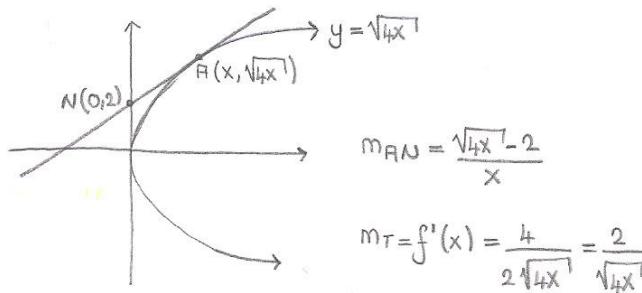
$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \Rightarrow 48 - 8a = 0$$

$$a = 6$$

$$f(-4) = 0 \Rightarrow -64 + 16a + b = 0$$

$$-64 + 96 + b = 0 \Rightarrow b = -32$$

81) $y^2 = 4x$ parabolünün hangi noktasındaki teğeti y eksenini $N(0, 2)$ noktasında keser?



$$\frac{\sqrt{4x} - 2}{x} = \frac{2}{\sqrt{4x}} \Rightarrow 4x - 2\sqrt{4x} = 2x$$

$$2x = 2\sqrt{4x}$$

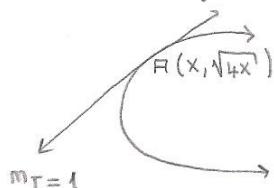
$$x = \sqrt{4x}$$

$$x^2 = 4x \Rightarrow x \neq 0 \text{ ya da}$$

$$x = 4$$

$$A(4, 4)$$

82) $y^2 = 4x$ parabolüne üzerinde bulunan $A(x, y)$ noktasında çizilen teğetin eğimi 1 dir. Buna göre A noktasının koordinatları toplamı nedir?



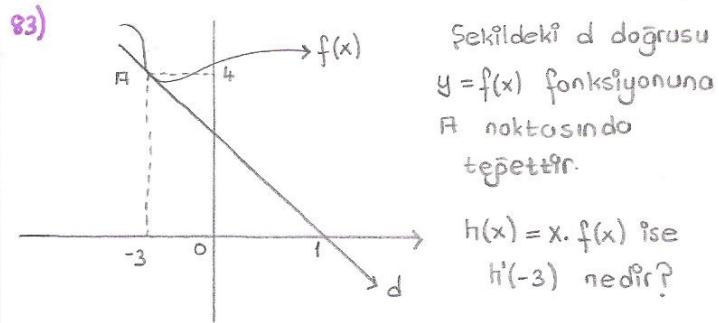
$$y = \sqrt{4x} \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$\frac{4}{2\sqrt{4x}} = 1$$

$$\sqrt{4x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \text{ için } y = 2$$

$$x + y = 3$$



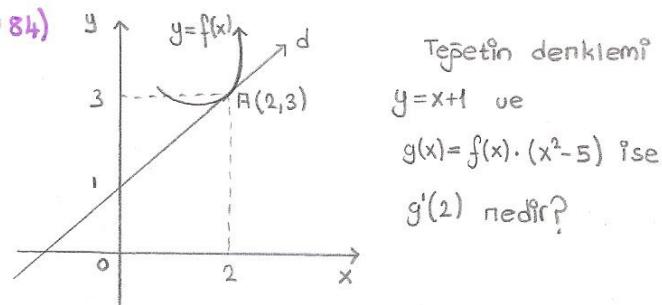
Şekildeki d doğrusu $y = f(x)$ fonksiyonuna A noktasında teğettir. $h(x) = x \cdot f(x)$ ise $h'(-3)$ nedir?

$$h'(x) = 1 \cdot f(x) + f'(x) \cdot x$$

$$\Rightarrow h'(-3) = f(-3) + f'(-3) \cdot (-3) = 4 + 3 = 7$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$4 \quad \tan d = -1$$



Teğetin denklemi $y = x + l$ ve $g(x) = f(x) \cdot (x^2 - 5)$ ise $g'(2)$ nedir?

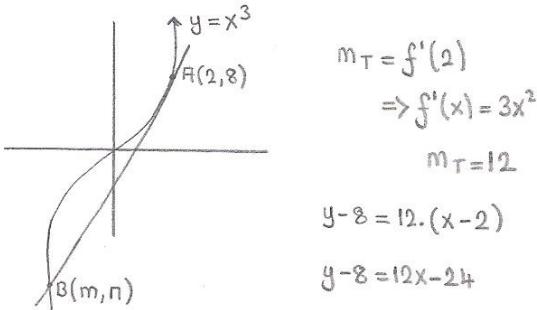
$$g'(x) = f'(x) \cdot (x^2 - 5) + 2x \cdot f(x)$$

$$g'(2) = f'(2) \cdot (-1) + 4 \cdot f(2) = -1 + 12 = 11$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$1 \quad 3$$

85) $y = x^3$ fonksiyonunun graföründeki $A(2, 8)$ noktasından çizilen teğetin eğimi başka bir B noktasında kesiyor. Buna göre B noktasının apsisi nedir?



$$y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$$

$$y - 8 = 12x - 24$$

$$y = 12x - 16$$

$y = x^3$ ile $y = 12x - 16$ nin ortak çözümü yapılsınsa

$$x^3 = 12x - 16$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

$$x = -4 \text{ denklemi sağlar.}$$

$y=f(x)$ parabolünün x ekseni'ni kestirdiği noktalardan gizilen teğetlerin birbirine dik olması için $\Delta = 1$ olmalıdır.

$y=f(x)$ parabolüne sağinden gizilen teğetlerin birbirine dik olması için $\Delta = -1$ olmalıdır.

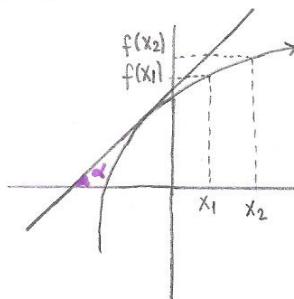
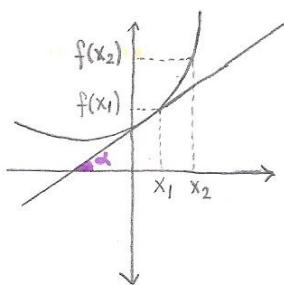
86) Denklemi $y=x^2-ax+1$ olan parabol veriliyor. a nin hangi pozitif değeri için başlangıç noktasından parabole gizilen teğetler birbirine dik olur?

$$\Delta = -1$$

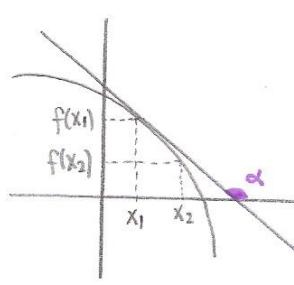
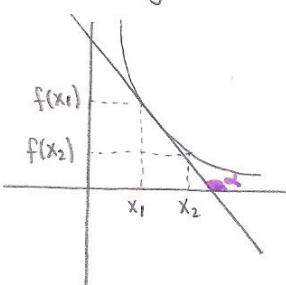
$$a^2-4=-1$$

$$a^2=3 \Rightarrow a=\sqrt{3}$$

Artan ve azalan fonksiyonlar:



$x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa fonksiyon artan fonksiyondur. Fonksiyonun artan olduğu aralıkta $f'(x) > 0$ dir.



$x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa fonksiyon azalan fonksiyondur. Fonksiyonun azalan olduğu aralıkta $f'(x) < 0$ dir.

87) $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+4$ fonksiyonunun artan olduğu aralık nedir?

$$f'(x) > 0$$

$$x^2-4x > 0$$

$$x(x-4) > 0$$

$$x=0 \text{ ve } x=4$$

+	0	-	0	+
---	---	---	---	---

$$(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$$

88) $y=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5$ fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?

$$f'(x) < 0$$

$$2x^2-x < 0$$

$$x(2x-1) < 0$$

$$x=0 \text{ ve } x=\frac{1}{2}$$

+	0	-	0	+
---	---	---	---	---

$$(0, \frac{1}{2})$$

89) $f(x)$, $0 < x < \infty$ için azalan bir fonksiyon olduğunu göre aşağıda verilenlerden hangisi aynı aralıkta artan bir fonksiyondur?

a) $f(x)-x$

türevi alınırsa $f'(x)-1 \Rightarrow$ daima azalan $f'(x) < 0$

b) $f(x^2)$

türevi alınırsa $f'(x^2) \cdot 2x \Rightarrow$ daima azalan $-$ $+$

c) $x-f(x)$

türevi alınırsa $1-f'(x) \Rightarrow$ daima artan $-$

d) $2f(x)$

türevi alınırsa $2f'(x) \Rightarrow$ daima azalan $-$

e) $(f(x))^3$

türevi alınırsa $3(f(x))^2 \cdot f'(x) \Rightarrow$ daima azalan $+$ $-$

- 90) k nin hangi aralıktaki değerleri için $y = \frac{kx+1}{x+k}$ fonksiyonu dağıma eksilendir?

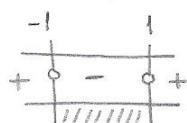
$$f'(x) < 0$$

$$\frac{k \cdot (x+k) - 1 \cdot (kx+1)}{(x+k)^2} < 0$$

$$\frac{kx+k^2-kx-1}{(x+k)^2} < 0 \Rightarrow \frac{k^2-1}{(x+k)^2} < 0$$

$\underbrace{}_0$

$$k^2-1 < 0$$



$$-1 < k < 1$$

- 91) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + kx \text{ veriliyor.}$$

$f(x)$ fonksiyonu $(-\infty, +\infty)$ aralığında artan olduğunu göre k için ne söyleyenebilir?

$$f'(x) > 0$$

$$3x^2 + 12x + k > 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 144 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0$$

$$12k > 144$$

$$k > 12$$

- 92) $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 2$ fonksiyonunun \mathbb{R} de artan fonksiyon olması için k ne olmalıdır?

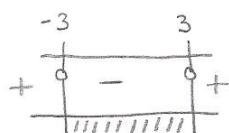
$$f'(x) > 0$$

$$3x^2 + 2kx + 3 > 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 4k^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 < 0$$

$$4k^2 - 36 < 0$$

$$k^2 - 9 < 0$$

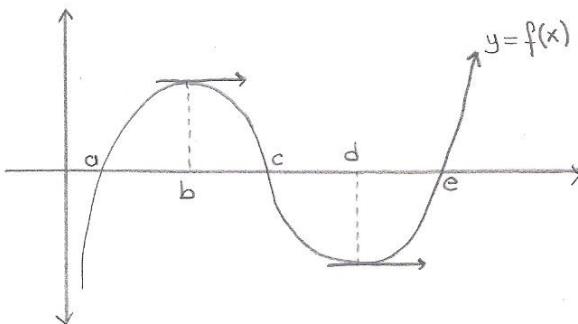


$$-3 < k < 3$$

- Ekstremum noktaları (yerel maksimum ve yerel minimum noktaları):

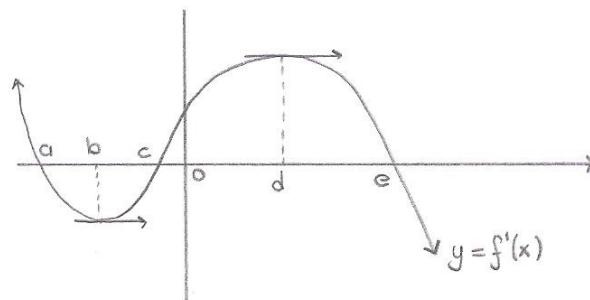
- Bir $f(x)$ fonksiyonunun birinci türevinin sıfır yapan noktalar ekstremum noktalarıdır.

- Yerel ekstremum noktalarında türevin işaret değiştirmesi gereklidir.



Fonksiyonun kendisi verildiğinde:

- b ve d noktaları yerel ekstremum noktalarıdır.
- b noktası yerel max. $f'(b) = 0$ dir.
- d noktası yerel min. $f'(d) = 0$ dir.
- (a,b) ve (d,e) aralığında artan fonksiyon olduğundan bu aralıklarda $f'(x) > 0$ dir.
- (b,c) ve (c,d) aralığında azalan fonksiyon olduğundan bu aralıklarda $f'(x) < 0$ dir.



Fonksiyonun türevinin grafiği verildiğinde:

- a, c ve e noktaları yerel ekstremum noktalarıdır.
- a ve e yerel max. ve $f'(a) = 0, f'(e) = 0$ dir.
- c noktası yerel min ve $f'(c) = 0$ dir.
- b ve d noktaları döñüm noktalarıdır ve $f''(b) = 0, f''(d) = 0$ dir.
- $(-\infty, a)$ ve (c, e) aralığında f artan, (a, c) ve $(e, +\infty)$ aralığında f azalandır.

93) Denklemi $f(x) = \frac{x^2+mx}{x-1}$ olan fonksiyonun $x=3$ noktasında ekstremum noktasının olması için m kaç olmalıdır?

$$f'(3) = 0$$

$$f'(x) = \frac{(2x+m)(x-1) - 1 \cdot (x^2+mx)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(6+m) \cdot 2 - (9+3m)}{4} = 0$$

$$12+2m-9-3m=0$$

$$3-m=0 \Rightarrow m=3$$

94) $f(x) = mx^2 + (m+1)x + m-1$ fonksiyonunun $x=-\frac{3}{4}$ te bir minimumu olduğunu göre m kaçtır?

$$f'(-\frac{3}{4}) = 0$$

$$f'(x) = 2mx + m+1$$

$$-\frac{6m}{4} + m+1 = 0 \Rightarrow -6m+4m+4=0$$

$$2m=4$$

$$m=2$$

95) $f(x) = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 12x + 5$ fonksiyonunun yerel minimum noktasını ve yerel minimum değerini bulunuz?

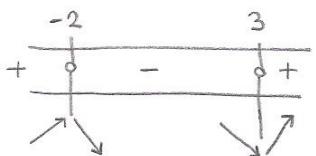
$f'(x) = 0$ yapan noktalar yerel ekstremum noktalarıdır.

$$f'(x) = 2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x=3 \text{ ve } x=-2$$



$x=-2$ noktası
yerel maksimum
noktası

$x=3$ noktası
yerel minimum
noktası

yerel minimum değeri : $f(3)$

$$\begin{aligned} f(3) &= 18 - 9 - 36 + 5 \\ &= 9 - 31 \\ &= -22 \end{aligned}$$

96) $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + nx \text{ ile tanımlıdır.}$$

f fonksiyonunun $x_1=2$ ve $x_2=3$ noktalarında yerel ekstreminumu olduğunu göre $n-m$ farkı kaçtır?

$$f'(2) = 0$$

$$f'(3) = 0$$

$$f'(x) = x^2 - 2mx + n$$

$$4 - 4m + n = 0 \Rightarrow 4m - n = 4$$

$$9 - 6m + n = 0 \Rightarrow -6m + n = -9$$

$$+$$

$$-2m = -5 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

$$n = 6$$

$$n - m = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

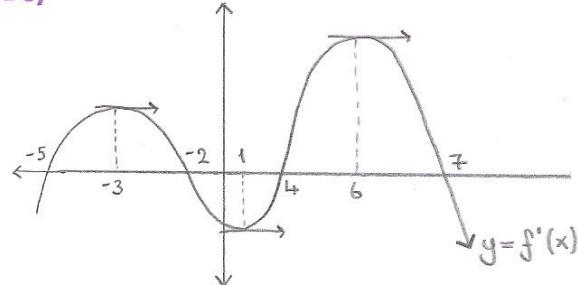
97) $y = 2 - \sin 3x$ fonksiyonunu minimum yapan en küçük pozitif x açısının değeri nedir?

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3 \cdot \cos 3x = 0$$

$$\cos 3x = 0$$

$$3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

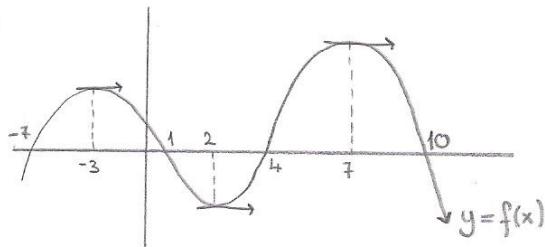
98)



Türevinin grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstreminum noktalarını bulunuz?

$$\{-5, -2, 4, 7\}$$

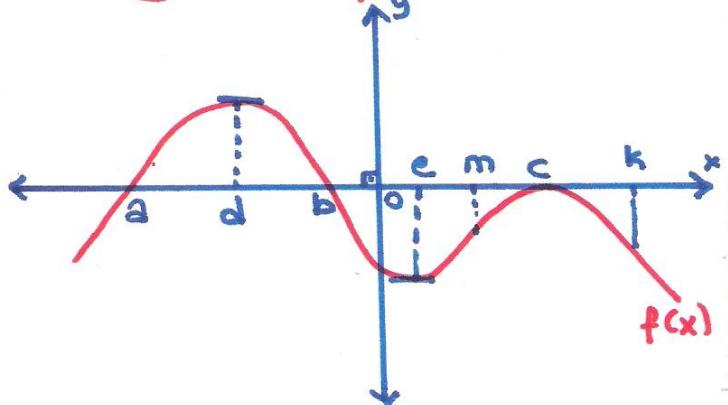
99)



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmişdir. Bu f fonksiyonunun yerel ekstreminum noktalarını bulunuz?

$$\{-3, 1, 7\}$$

Fonksiyon Grafiğinin Yorumu:



Not: Soldan sağa doğru tırmanış noktalarında verilen grafiğin bir sonraki türevi için,

«fonksiyon grafiği verildiyse $f'(x)$

«türev grafiği verildiyse $f''(x)$ için

* $f'(x) > 0$ yani artan.

* Tepeye veya dib'e ulaştığımızda ise $f'(x)=0$ yani ekstreum (max ya da min.)

* İniş noktalarında ise,

$f'(x) < 0$ yani azalandır.

• $f'(a) > 0, f'(m) > 0$

• $(-\infty, d), (e, c)$ aralığında artan

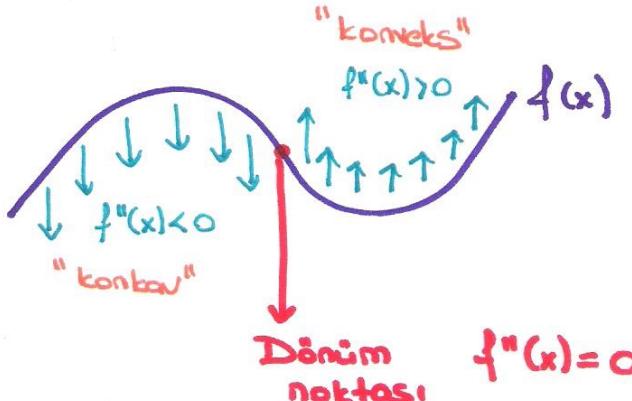
✓ $f'(d) = 0, x=d$ de $f(x)$ maximum

✓ $f'(e) = 0, x=e$ de $f(x)$ minimum

✓ $f'(c) = 0, x=c$ de $f(x)$ maximum

* $f'(b) < 0, f'(0) < 0, f'(k) < 0$

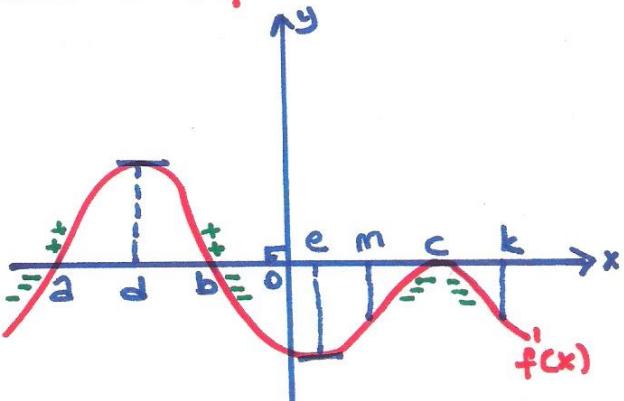
* $(d, e), (c, +\infty)$ aralığında azalan.



Dönüm noktası $f''(x) = 0$

- * $f''(b) = 0, f''(m) = 0$ dönüm noktası
- * $f''(a) < 0, f''(d) < 0, f''(c) < 0, f''(k) < 0$
- * $f''(0) > 0, f''(e) > 0$

Türev Grafiğinin Yorumu:



• $f'(a) = 0$ ↘ yerel minimum

• $f'(b) = 0$ ↗ yerel maksimum

• $f'(c) = 0$ ↘ ekstreum değil

✓ $(-\infty, a), (b, c), (c, +\infty) \rightarrow$ azalan

✓ $(a, b) \rightarrow$ artan

$f''(a) > 0 \rightarrow$ tırmanış noktası

$f''(d) = 0 \rightarrow$ dönüm noktası

$f''(b) < 0 \rightarrow$ iniş noktası

$f''(e) = 0 \rightarrow$ dönüm noktası

$f''(m) > 0 \rightarrow$ tırmanış noktası

$f''(c) = 0 \rightarrow$ dönüm noktası

$$f'''(b) = 0$$

$$f'''(m) = 0$$

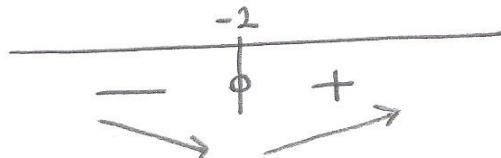
$$f'''(a) < 0$$

$$f'''(e) > 0$$

✓ $f(x) = x^2 + 4x + 5$ fonksiyonunu inceleyin.

* $f'(x) = 2x + 4 = 0$ ise $x = -2$

$2x+4$ için işaret grafği



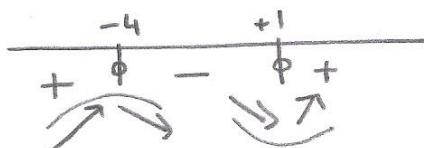
- $x = -2$ de yerel minimum var.
- $(-\infty, -2)$ aralığında azalan
- $(-2, +\infty)$ aralığında artan

✓ $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 6$ yi inceleyin?

* $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24 = 0$, $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$\begin{array}{r} | \\ x \\ | \end{array} \quad \begin{array}{r} +4 \\ - \\ -1 \end{array}$$

$x^2 + 3x - 4$ için işaret grafği

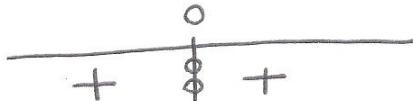


- $x = -4$ te yerel maksimum
- $x = 1$ de yerel minimum
- $(-\infty, -4)$ ve $(1, +\infty)$ aralığında artan
- $(-4, 1)$ aralığında azalan

✓ $f(x) = x^3 + 5$ fonksiyonunu inceleyin.

* $f'(x) = 3x^2 = 0$ ise $\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=0 \end{array} \right\}$ çift kat kök

$3x^2$ için işaret grafği



- Ekstremum noktası yok.

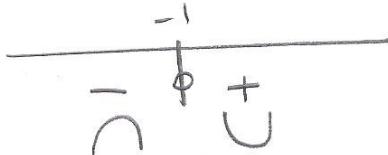
- $R - \{0\}$ da artan

Ek Sayfa 2

✓ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ için düğüm noktaları ve konveks, konkav olduğu aralıkları bulun.

* $f'(x) = 3x^2 + 6x$
 $f''(x) = 6x + 6 = 0$, $x = -1$

$6x+6$ için işaret grafği



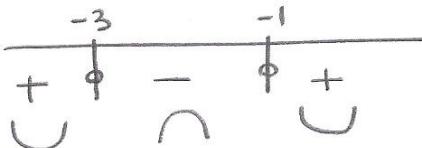
- $x = -1$ de düğüm noktası vardır.

- $(-\infty, -1)$ de konkav (ya. bükey)
- $(-1, +\infty)$ da konveks (diş bükey)

✓ $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 5$ için düğüm noktaları ve konveks, konkav olduğu aralıkları bulun.

* $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$
 $f''(x) = 12x^2 + 48x + 36 = 0$, $x^2 + 4x + 3 = 0$
 $\begin{array}{r} | \\ x \\ | \end{array} \quad \begin{array}{r} +3 \\ +1 \end{array}$

$x^2 + 4x + 3$ için işaret grafği



- $x = -3$ ve $x = -1$ de düğüm noktası

- $(-\infty, -3)$ ve $(-1, +\infty)$ → konveks

- $(-3, -1)$ → konkav

✓ $f(x) = x^4 + 8x - 3$ için,

* $f'(x) = 4x^3 + 8$
 $f''(x) = 12x^2 = 0$ $\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=0 \end{array} \right\}$ çift kat kök

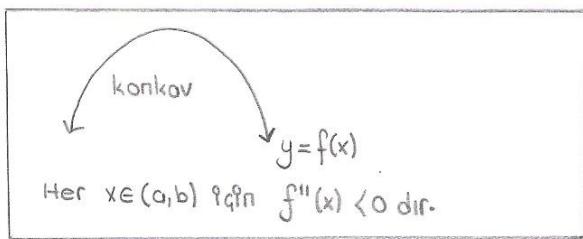
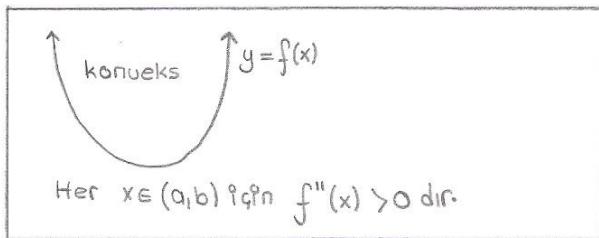
$12x^2$ için işaret grafği



- Düğüm noktası yoktur.

- $R - \{0\}$ da konveks

• Bir fonksiyonun konveksliği ve konkavlığı:



Dönüm noktası (büüküm): Bir fonksiyonun çukurluğunun yeri değiştiğinden noktaya dönüm noktası adını veriyoruz.

😊 Dönüm noktası aynı zamanda ikinci türevi sıfır yapan noktasıdır.

100) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 5$ eğrisinin dönüm noktasının apsis'i ile ordinatı nedir?

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 2$$

$$f''(x) = 6x - 18 \Rightarrow x = 3 \text{ (dönüm noktasının apsis'i)}$$

$x = 3$ fonksiyonun kendisinde yerine yazılırsa ordinatı bulunur.

$$y = f(3) = 27 - 81 + 6 - 5 = -54 + 1 = -53$$

dönüm noktası $(3, -53)$

101) Denklemi $y = x^3 + ax^2 + (a+7)x - 1$ olan eğrinin dönüm (büüküm) noktasının apsis'i 1 ise ordinatı kaçtır?

$$f''(1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 7$$

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow 6 + 2a = 0 \\ a = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f(1) = y \Rightarrow y = 1 - 3 + 4 - 1$$

$$y = -2 + 3$$

$$y = 1$$

102) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + (b+1)x - 3$ fonksiyonunun

$x = -1$ de yerel ekstremum ve $x = -\frac{1}{12}$ de dönüm noktası olduğuna göre a.b nedir?

$$f'(-1) = 0$$

$$f''(-\frac{1}{12}) = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b + 1$$

$$f''(x) = 12x + 2a$$

$$f''(-\frac{1}{12}) = 0 \Rightarrow -1 + 2a = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 6 - 2a + b + 1 = 0$$

$$6 - 1 + b + 1 = 0$$

$$b = -6$$

$$a, b = -3$$

• Bir fonksiyonun bir aralıktaki en büyük ve en küçük değerinin bulunması:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) aralığında türevinin kökleri x_1, x_2, \dots, x_n olmak üzere $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ve aynı zamanda $f(a), f(b)$ değerlerinde bakılır.

Bu değerlerden en büyük olanı en büyük değerini, en küçük olanı en küçük değerini verir.

103) $f(x) = x^3 - 3x + 8$ fonksiyonunun $[-1, 2]$ aralığında alacağı en küçük değer nedir?

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ve } x = -1$$

$$f(1) = 1 - 3 + 8 = 6 \text{ (en büyük)}$$

$$f(-1) = -1 + 3 + 8 = 10$$

$$f(2) = 8 - 6 + 8 = 10$$

104) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ fonksiyonunun $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aralığındaki maksimum değeri nedir?

$$4x^3 - 10x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f(0) = 0 - 0 + 4 = 4 \text{ (en büyük)}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - \frac{5}{4} + 4 = \frac{1 - 20 + 64}{16} = \frac{45}{16}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{16}$$

Maksimum - minimum problemleri:

Maksimum, minimum problemleri çözüldürken:

- * Maksimumunu veya minimumunu aradığımız ifade tek değişkene bağlı olarak yazılır.
- * Yazılan fonksiyonun türevinin sıfır yapan noktası fonksiyonda yerine yazılıarak max. veya min. değeri hesaplanır.

105) $A \in B$ pozitif tam sayılar ve
 $A = 4+x$
 $B = 6-x$ ise $A \cdot B$ çarpımının en büyük değeri nedir?

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (4+x)(6-x) \\ &= 24 - 4x + 6x - x^2 \Rightarrow A \cdot B = -x^2 + 2x + 24 \\ &\quad (A \cdot B)' = 0 \\ &\quad -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$A \cdot B = -1 + 2 + 24 = 25$$

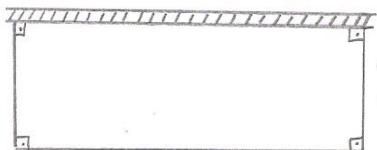
106) a pozitif bir gerçek sayı olmak üzere kenarları a cm ve $(8-2a)$ cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 dir?

$$\text{Alan} = a \cdot (8-2a) = 8a - 2a^2$$

$$\begin{aligned} (\text{Alan})' &= 0 \Rightarrow 8-4a=0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

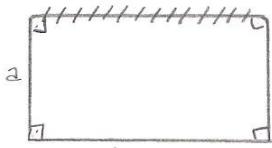
$$\text{Alan} = 8a - 2a^2 = 16 - 8 = 8$$

107)



Sekildeki gibi
dikdörtgen birim
minda ve kenarında
duvar bulunan

bir bahçenin bir kenarına bir sira tel çekili-
miştir. Kullanılan telin uzunluğu 80m ise bah-
çenin alanı en çok kaç m^2 dir?



$$2a+b = 80$$

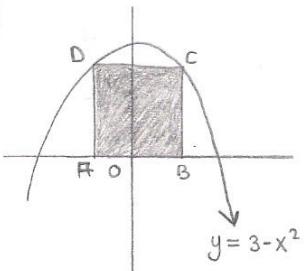
$$\text{Alan} : a \cdot b$$

$$: a \cdot (80-2a) = 80a - 2a^2$$

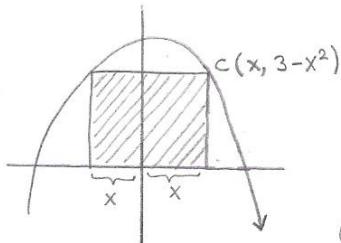
$$\begin{aligned} (\text{Alan})' &= 0 \Rightarrow 80-4a=0 \\ a &= 20 \end{aligned}$$

$$\text{Alan} = 20 \cdot 40 = 800$$

108)

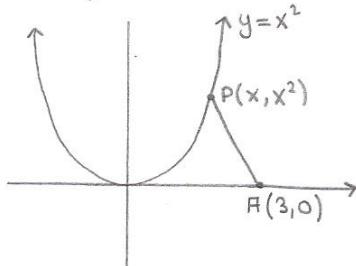


$A \in B$ x ekseninde c ve D parabol
üzerinde olmak üzere
ABCD dikdörtgenleri
çıkarılıyor. Bu dikdörtgen-
lerden alanı en büyük
olanın alanı kaçtır?



$$\begin{aligned} \text{Alan} &= 2x \cdot (3 - x^2) \\ &= 6x - 2x^3 \\ (\text{Alan})' &= 0 \\ 6 - 6x^2 &= 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{Alan} &= 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

109) $y = x^2$ parabolünün $A(3,0)$ noktasının en yakın noktasının koordinatlarının toplamı nedir?



$$|AP| = \sqrt{(x^2 - 0)^2 + (x - 3)^2} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}$$

$$\begin{aligned} (|AP|)' &= 0 \Rightarrow \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} = 0 \Rightarrow 4x^3 + 2x - 6 = 0 \\ x &= 1 \} \\ y &= 1 \} \quad (2) \end{aligned}$$

110) $f(x) = x^2 - 7x + 14$ parabolü üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceğinin en küçük değeri kaçtır?

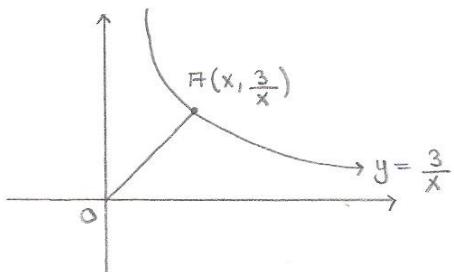


$$\text{Koordinatları toplamı : } x^2 - 7x + 14$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2x - 6 = 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{Koordinatları toplamı : } 9 - 18 + 14 = 5$$

- 111) $y = \frac{3}{x}$ eğrisi üzerinde 1. bölgede olup origine en yakın olan noktanın koordinatları nedir?



$$|OP|^2 = \sqrt{x^2 + \frac{9}{x^2}} = \sqrt{x^2 + 9 \cdot x^{-2}}$$

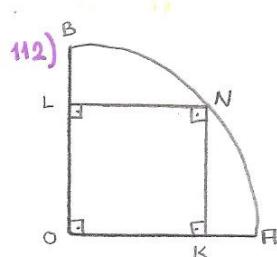
$$(|OP|)^2 = 0 \Rightarrow \frac{2x - 18x^{-3}}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 9 \cdot x^{-2}}} = 0$$

$$2x - \frac{18}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{18}{x^3}$$

$$x^4 = 9$$

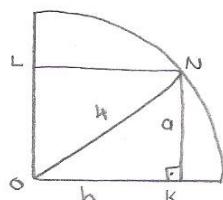
$$x = \sqrt[4]{9}, y = \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}, \sqrt{3})$$



Yondaki şekilde merkezi O ve yarıçapı $|OP|=|ON|=4$ cm olan dörtte bir çember yarıçapı üzerindeki N noktasından yarıçaplara inen dikme ayakları K ve L dir.

Buna göre OKNL dikdörtgeninin en büyük alanı kaç cm^2 dir?



$$a^2 + b^2 = 16$$

$$\text{Alan} : a \cdot b$$

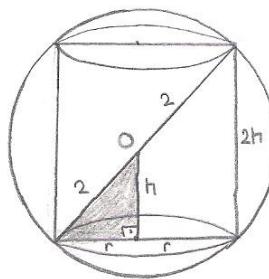
$$: a \cdot (\sqrt{16-a^2})$$

$$(\text{Alan})' = 0 \Rightarrow 1 \cdot \sqrt{16-a^2} + \frac{-2a}{2\sqrt{16-a^2}} \cdot a = 0$$

$$\sqrt{16-a^2} = \frac{a^2}{\sqrt{16-a^2}} \Rightarrow 16-a^2 = a^2 \\ 2a^2 = 16 \\ a = 2\sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Alan} : a \cdot b = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8 \text{ cm}^2$$

- 113) Yarıçapı 2 cm olan bir kürenin içine yerleştirilen maksimum hacimli dik silindirin yüksekliği kaç cm dir?



$$h^2 + r^2 = 4$$

$$V(x) = \pi r^2 \cdot 2h$$

$$V(x) = \pi \cdot (4-h^2) \cdot 2h \\ = \pi \cdot (8h - 2h^3)$$

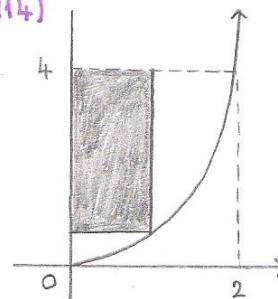
$$(V(x))' = 0$$

$$\pi \cdot (8-6h^2) = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}$$

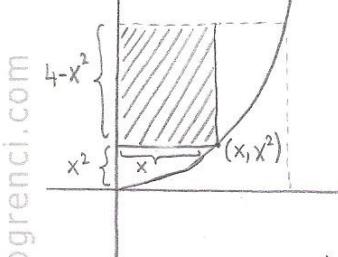
$$h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$2h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

- 114)



Bir kenarı $y=4$ doğrusu, diğer kenarı y eksenini ve bir köşesinde $y=x^2$ eğrisi üzerinde deşisen dikdörtgenlerden en büyük alanının alanı ne olur?



$$\text{Alan} : x \cdot (4-x^2) = 4x - x^3$$

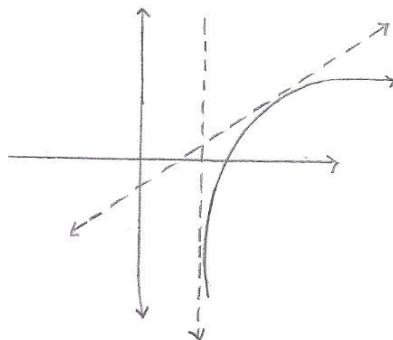
$$(\text{Alan})' = 0 \Rightarrow 4-3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Alan} = x \cdot (4-x^2)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(4 - \frac{12}{9}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{24}{9} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

ASİMPTOLAR:

Bir eğriye sonsuzda teğet olan bir doğruya veya eğriye asimptot adını veriyoruz.



Düsey asimptot: Bir fonksiyonda paydayı sıfır yapan değerler düsey asimptottur.

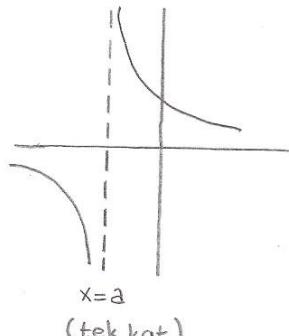
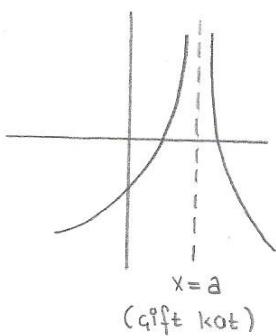
Fonksiyon düsey asimptotu asla kesmez!

$$y = \frac{3x+4}{x-1} \Rightarrow \text{düsey asimptot } x=1$$

$$y = \frac{x+3}{x^2-16} \Rightarrow \text{düsey asimptotlar } x=4 \text{ ve } x=-4$$

$$y = \frac{x^2+3x}{x^2-2x+1} \Rightarrow \text{düsey asimptot } x=1$$

Paydanın çift katlarında baca oluşur, tek katlarında kelebek oluşur.



Yatay asimptot: $y=f(x)$ fonksiyonu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$ ise $y=k$ doğrusuna yatay asimptot adını veriyoruz.

$$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \text{yatay asimptot } y=3$$

$$y = \frac{4x-3}{3x+1} \Rightarrow \text{yatay asimptot } y=\frac{4}{3}$$

Fonksiyon yatay asimptotu kesebilir.

- Rasyonel fonksiyonların asimptotlarının bulunması:

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere

$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki rasyonel fonksiyonlarda:

- $\deg[P(x)] \leq \deg[Q(x)]$ ise **yatay asimptot** vardır ve $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ dir.

$$f(x) = \frac{3x+1}{4x+3} \text{ ise yatay asimptot } y = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-1} \text{ ise yatay asimptot } y=0$$

- $\deg[P(x)] - \deg[Q(x)] = 1$ ise **epik asimptot** vardır ve payın paydaya bölümündeki bölüm polinomu **epik asimptotu** verir.

- $\deg[P(x)] - \deg[Q(x)] \geq 2$ ise **epri asimptot** vardır. Payın paydaya bölümündeki bölümündeki bölüm polinomu **epri asimptotu** verir.

- 115) $f(x) = \frac{3x-5}{x-4}$ fonksiyonunun yatay ve düsey asimptotları nedir?

$$x=4 \text{ düsey}$$

$$y=3 \text{ yatay}$$

- 116) $y = \frac{3x^2+2x-1}{x-2}$ fonksiyonunun asimptotlarını ve bu asimptotların kesim noktalarını bulunuz?

$$x=2 \text{ düsey}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x-1 \\ \hline x-2 \\ \hline 3x^2-6x \\ \hline 8x-1 \\ \hline 8x-16 \\ \hline 15 \end{array} \Rightarrow y = 3x+8 \text{ epik asimptot}$$

$$x=2 \text{ için } y = 3x+8 = 14 \Rightarrow (2, 14)$$

• Simetri merkezi:

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ bıçımındaki fonksiyonların

yatay ve düşey asimptotlarının kesim noktasına simetri merkezi denir.

$$\begin{cases} x = -\frac{d}{c} \\ y = \frac{a}{c} \end{cases} \text{ simetri merkezi } \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

- $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ bıçımındaki fonksiyonlarda

eğik asimptot ile düşey asimptotun kesim noktası fonksiyonun simetri merkezidir.

- $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ bıçımındaki üçüncü dereceden fonksiyonun simetri merkezi dönüşüm noktasıdır.

117) $y = \frac{ax+2}{bx-c}$ eğrisinin simetri merkezi $(-2, 3)$

olduğuna göre $\frac{a}{c}$ nedir?

$$\begin{cases} x = -2 \Rightarrow \frac{c}{b} = -2 \\ y = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \text{ orantılırsa } \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{c} = -\frac{3}{2}$$

118) $y = \frac{3}{x-1}$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin simetri merkezi nedir?

$$\begin{cases} x=1 \text{ düşey} \\ y=0 \text{ yatay} \end{cases} (1, 0)$$

119) $y = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$ fonksiyonunun asimptot denklemlerini ve simetri merkezini bulunuz?

$$\begin{array}{r} x=-2 \\ x^2+4x+5 \quad |x+2 \\ -x^2-2x \\ \hline 2x+5 \\ -2x-4 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = x+2 \end{cases} \text{ asimptot denklemleri}$$

simetri merkezi $(-2, 0)$

120) $y = \frac{x^2-ax-8}{x-b}$ fonksiyonunun gösterdiği

eğrinin y ekseniinde $+8$ de kesmesi ve $y=x-1$ doğrusunu eğik asimptot kabul etmemi için a nin değeri ne olmalıdır?

Fonksiyon $(0, 8)$ den geçtiği için

$$8 = \frac{-8}{-b} \Rightarrow b = 1$$

$$\begin{array}{r} x^2-ax-8 \quad |x-1 \\ -x^2-x \\ \hline (-a+1)x-8 \end{array} \Rightarrow y = x + \underbrace{(-a+1)}_{-1}$$

$$\begin{array}{r} -(-a+1)x+a-1 \\ -7-a \\ \hline -a+1=-1 \\ \Rightarrow a=2 \end{array}$$

121) $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ şeklindeki fonksiyonların eğik osimptotu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|a| \cdot |x+\frac{b}{2a}|}$ dir.

121) $f(x) = \sqrt{x^2-6x+3}$ fonksiyonunun eğik osimptotunu bulunuz?

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{|x-3|} \Rightarrow y = x-3 \quad \begin{cases} y = x-3 \\ y = -x+3 \end{cases} \text{ eğik osimptot}$$

• Grafik çizimi istendiğinde aşağıdaki beş kurallara uymamız gerekmektedir...

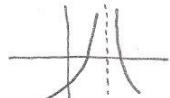
• Payın çift katında x ekseniye tepektir.



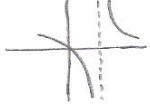
• Payın tek katında x ekseniyi keser.



• Paydanın çift katında buca yapar.

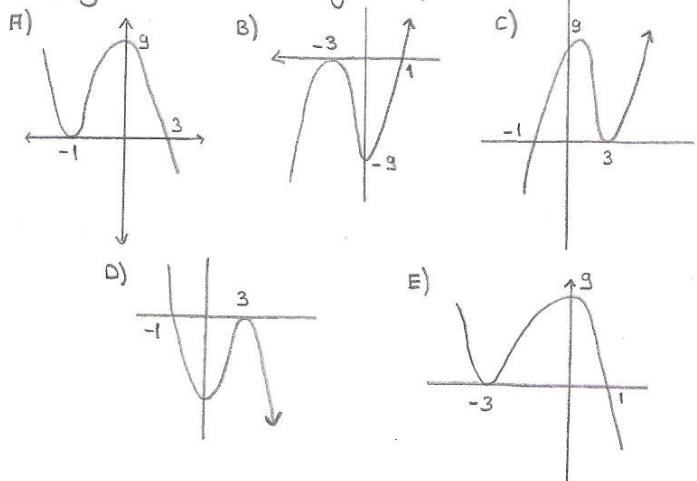


• Paydanın tek katında kelebek yapar.

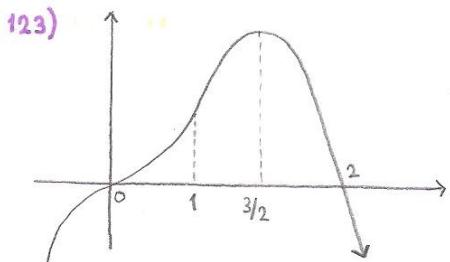


• Yukarıda verilen dört kurallı denedik ama yine sonuç vermiyorsa istediğiniz noktaları yerine koymak sağlayıp sağlamadığını baktıktan sonra eleme yapınız.

122) $y = (1-x) \cdot (x+3)^2$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Cözüm: Fonksiyonun $x=1$ de x eksenini kesmesi ve $x=-3$ de x eksenine teğet olması gereklidir. Bunu sağlayan B ve E şıklarıdır. $x=0$ için y eksenini $y=9$ da kesmektedir. Bunuda sağlayan E şikkidir.



Grafiği verilen fonksiyon hangisi olabilir?

- A) $y = x^3 \cdot (2-x)$
- B) $y = x \cdot (x-2)$
- C) $y = x^2 \cdot (2-x)$
- D) $y = x^2 \cdot (x-2)$
- E) $y = x^3 \cdot (x-2)$

Cözüm: Fonksiyon x eksenini $x=0$ ve $x=2$ de kestiği için tek kat kök olmalıdır. A, B ve E şıkları kalmıştır. Nokta yerine koymasak mesela $x=1$ için y değeri pozitif olmalıdır.

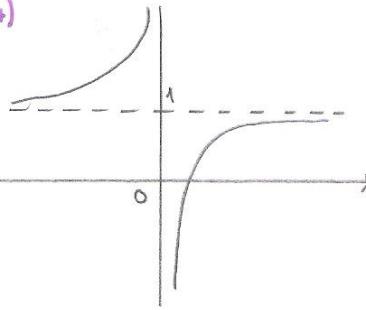
$$x=1 \text{ için } A) y = 1 \cdot 1 = 1$$

$$x=1 \text{ için } B) y = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$x=1 \text{ için } E) y = 1 \cdot (-1) = -1$$

cevap: A

124)

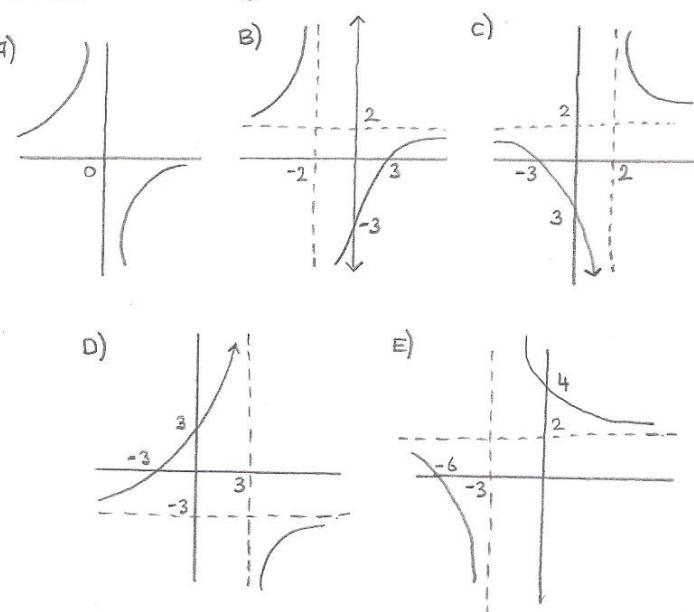


Şekildeki grafik aşağıdakilerden hangisi ne öittir?

- A) $y = \frac{x-1}{x}$
- B) $y = \frac{x+1}{x}$
- C) $y = \frac{x}{x-1}$
- D) $y = \frac{x+1}{x-1}$
- E) $y = \frac{x-1}{x+1}$

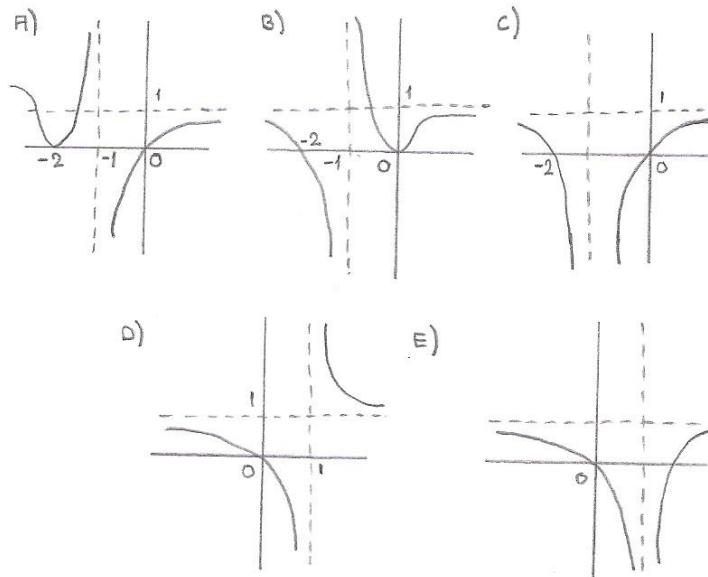
Cözüm: $x=0$ düşey asimptot olduğu için A ve B den biri olmalıdır. B şıklını incelediğimizde fonksiyon $x=-1$ de x eksenini kesiyor ama pozitif bir noktada kesmesi gereklidir. O yüzden cevap A dir.

125) $y = \frac{2x-6}{x+2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



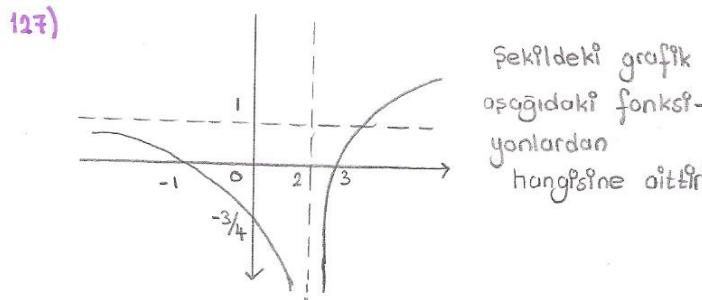
Cözüm: $x=-2$ düşey ve $y=2$ yatay asimptottur. Bunu sağlayan sadece B seçenekidir.

126) $y = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki kilerden hangisidir?



Çözüm: $y = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow$ fonksiyon $x=0$ ve $x=-2$

de x ekseni \ni keser ve $x=-1$ düşey asimptot (çift katlı) olduğundan $x=-1$ de buca oluşturur. Bunları sağlayan bir tek C dir.



A) $y = \frac{x^2+x-3}{(x-2)^2}$ B) $y = \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^2}$ C) $y = \frac{x^2-2x-3}{2(x-2)}$

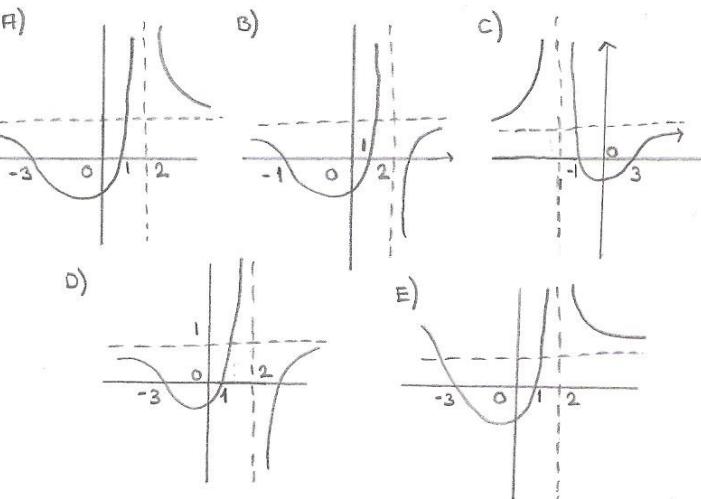
D) $y = \frac{x^2-x-3}{(x+2)^2}$ E) $y = \frac{x^2-3x-2}{(x-2)^2}$

Çözüm: Fonksiyon x ekseni \ni $x=-1$ ve $x=3$ te kesiyor ve $x=2$ de buca yapıyor.

$$y = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)^2} \Rightarrow y = \frac{x^2-2x-3}{(x-2)^2}$$

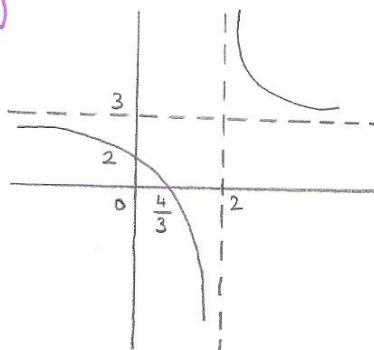
Cevap: B

128) $y = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-2)^2}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



Çözüm: Fonksiyon x ekseni \ni $x=-3$ ve $x=1$ de kesmeli ve $x=2$ de buca yapmalıdır. A ve E sıkları kalır. Eğer değer verirsek $x=-4, -5, -6, \dots$ y değerlerinin küçüldüğü görülmektedir halbuki E de büyümektedir. Cevap A dir.

129)



$y = \frac{ax+b}{x+c}$ fonksiyonu şekilde verildiği gibi $a+b+c$ nedir?

Çözüm: $x=-c$ düşey asimptot olduğu için $-c=2 \Rightarrow c=-2$ dir.

$y=a$ yatay asimptot olduğu için $a=3$ tür.

Fonksiyon $(0,2)$ noktasından geçiyorsa denklemi sağlar.

$$2 = \frac{ax+b}{x+c} \Rightarrow 2 = \frac{b}{c} \Rightarrow 2 = \frac{b}{-2} \Rightarrow b=-4$$

$$a+b+c = 3 + (-4) + (-2)$$

$$= -3$$