TÜREV ÇÖZÜMLÜ SORULARI

Türevin Tanımı

1) $f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM:

1) f fonksiyonunun x_0 apsisli noktasındaki türevi varsa

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ şeklinde tanımlanır.

Buna göre, fonksiyonun $x_0 = 1$ apsisli noktasındaki türevi $f'(1)$ dir.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 3x) - (1^2 - 3)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1).(x-2)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x - 2)$$

$= 1 - 2 = -1$ bulunur.

2) $$f(x) = x^2 + 4x$$

fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

2) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ limiti ile hesaplanır.

Buna göre,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 4(x+h) - x^2 - 4x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h - x^2 - 4x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + 4h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h.(h + 2x + 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2x + 4)$$

$= 2x + 4$ bulunur.

Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Teğetin Eğimi

3) $f(x) = x^2$ fonksiyonuna üzerindeki $x = 2$ noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM:

3) $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

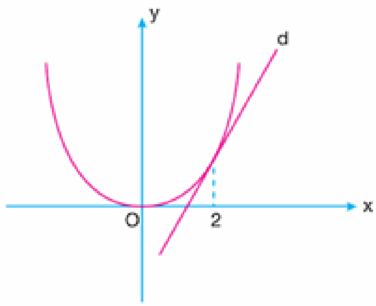
limitinin değeri, $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimidir.

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$x^2 - 2^2 = (x - 2).(x + 2)$ olarak yazıldığında,

$\lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2).(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$ bulunur.

Yani, aşağıdaki şekilde verilen d doğrusunun eğimi 4 tür.



4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı $f(x) = 3x^2 - 1$ fonksiyonuna $x = 4$ noktasından çizilen teğetin x ekseniyle yaptığı açının tanjant değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

4) Fonksiyona $x = 4$ noktasından çizilen teğetin x ekseniyle yaptığı açının tanjant değeri, bu teğetin eğimine eşittir. Yani fonksiyonun bu noktadaki türevinin hesaplanması gerekir.

$f(4) = 3.4^2 - 1 = 47$ dir.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{4 + h - 4} = \lim_{h \to 0} \frac{3.(4+h)^2 - 1 - 47}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 24h}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} (3h + 24) = 24$ tür.

O halde, $\tan\alpha = 24$ bulunur.

5) $f: R \to R$ tanımlı $f(x) = 2x^2 - a$ fonksiyonuna $x = -1$ apsisli noktasından çizilen teğetinin eğimi $\frac{a}{2}$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

5) Fonksiyonun $x = -1$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi, fonksiyonun aynı noktadaki türevinin değerine eşittir.

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - a - (2 - a)}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} 2(x-1) = -4 \text{ tür.}$$

$f'(-1) = \frac{a}{2}$ olduğundan $-4 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = -8$ bulunur.

Sabit Fonksiyonun ve x^n in Türevleri

6) Uygun tanım aralığında f, g, h, p ve q fonksiyonları

$f(x) = 7$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 4x^2$, $p(x) = x^{\frac{3}{5}}$ ve $q(x) = x^{-\frac{7}{4}}$ olduğuna göre,

$f'(x), g'(x), h'(x), p'(x)$ ve $q'(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

6) $f(x) = 7 \Rightarrow f'(x) = 0$

$g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3.x^{3-1} = 3x^2$

$h(x) = 4x^2 \Rightarrow h'(x) = 2.4x^{2-1} = 8x$

$p(x) = x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow p'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

$q(x) = x^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow q'(x) = -\frac{7}{4}x^{-\frac{7}{4}-1} = -\frac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}}$ bulunur.

e^x ve $\sqrt{x}$ Fonksiyonlarının Türevi

7) Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = e^x$

b. $g(x) = \sqrt{x}$

c. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

ÇÖZÜM:

7) **a.** $f(x) = e^x$ ise $f'(x) = e^x$ dir.

b. $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ise $g'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ dir.}$$

c. $h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ ise $h'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \text{ dir.}$$

Logaritmik ve Üstel Fonksiyonlarının Türevi

8) Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a. $f(x) = \log_3 x$

b. $g(x) = \ln x$

c. $h(x) = \frac{1}{2^x}$

ÇÖZÜM:

8) **a.** $f(x) = \log_3 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3 e = \frac{1}{x.\ln 3}$ olur.

b. $g(x) = \ln x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$ olur.

c. $h(x) = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow h'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.\ln\frac{1}{2}$

$$= 2^{-x}.(-\ln 2)$$

$$= -2^{-x}.\ln 2 \text{ olur.}$$

Trigonometrik Fonksiyonlarının Türevi

9) **a.** $f(x) = \sin x$ olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değeri kaçtır?

b. $g(x) = \cos x$ olduğuna göre, $g'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ değeri kaçtır?

c. $h(x) = \tan x$ olduğuna göre, $h'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ değeri kaçtır?

d. $k(x) = \cot x$ olduğuna göre, $k'\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

9) a. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ olur.

b. $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

c. $h(x) = \tan x \Rightarrow h'(x) = 1 + \tan^2 x$

$$\Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \underbrace{\tan^2\frac{\pi}{4}}_{1} = 2 \text{ olur.}$$

d. $k(x) = \cot x \Rightarrow k'(x) = -(1 + \cot^2 x)$

$$\Rightarrow k'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\left(1 + \underbrace{\cot^2\frac{4\pi}{3}}_{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3} \text{ olur.}$$

Parçalı Fonksiyonun Türevi

10) $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 1 \\ -x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

10)
$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x - 1 + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x - 1)}{x - 1}$$

$$= -1 \text{ bulunur.}$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1).(x - 2)}{x - 1}$$

$$= -1 \text{ bulunur.}$$

O halde;

$f'(1^+) = f'(1^-) = -1$ olduğundan

$f'(1) = -1$ bulunur.

Türev ve Süreklilik

11) a ve b birer gerçek sayı olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2 \\ ax + b, & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli olduğuna göre, $a + b$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

11) $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli olduğuna göre, sürekli bir fonksiyondur. O halde,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 = \lim_{x \to 2^+} 2^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax + b) = \lim_{x \to 2^-} (2a + b) = 2a + b$$

olup fonksiyon $x = 2$ noktasında sürekli olduğundan, $2a + b = 4$ olmalıdır. (I)

Ayrıca fonksiyon $x = 2$ noktasında türevli olduğundan, $f'(2^+) = f'(2^-)$ olmalıdır.

$x \to 2^+$ iken $f(x) = x^2$ olup $f'(x) = 2x$ olduğundan, $f'(2^+) = 2.2 = 4$ tür.

$x \to 2^-$ iken $f(x) = ax + b$ olup $f'(x) = a$ olduğundan, $f'(2^-) = a$ dır.

O halde, $a = 4$ olur. Ayrıca (I) ifadesinden,

$2a + b = 4 \Rightarrow 2.4 + b = 4 \Rightarrow b = -4$ olur.

O halde, $a + b = 4 + (-4) = 0$ dır.

12) $f(x) = |x - 2|$

fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli midir? Eğer türevli ise $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

12) $f(x) = |x - 2|$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ -(x - 2), & x < 2 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x - 2) = \lim_{x \to 2^+} (2 - 2) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} [-(x - 2)] = \lim_{x \to 2^-} [-(2 - 2)] = 0$$

ve $f(2) = 0$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir.

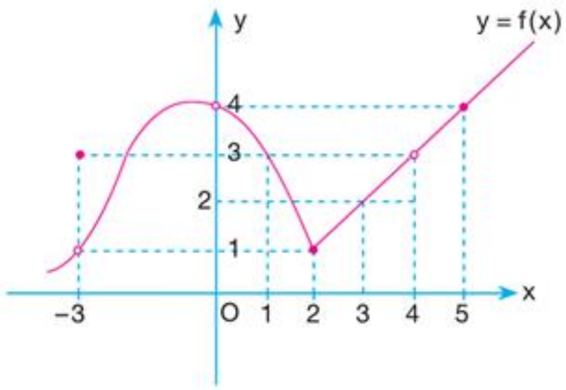
Eğer $f'(2^+) = f'(2^-)$ eşitliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevlidir.

$x \to 2^+$ iken $f(x) = x - 2$ olup $f'(x) = 1$ olduğundan, $f'(2^+) = 1$ olur.

$x \to 2^-$ iken $f(x) = -(x - 2)$ olup $f'(x) = -1$ olduğundan, $f'(2^-) = -1$ olur.

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli olduğu halde türevli değildir.

13)



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre, $f(x)$ fonksiyonu $x \in [-3, 5]$ aralığındaki kaç farklı tam sayı değeri için türevlidir?

ÇÖZÜM:

13) Bir f fonksiyonu bir x_0 noktasında

türevli $\Rightarrow$ sürekli $\Rightarrow$ limiti var $\Rightarrow$ tanımlı olmalıdır.

Fakat bu önermenin tersi doğru olmayabilir. Mesela sürekli olduğunda türevli olmak zorunda değildir.

Verilen $f(x)$ fonksiyonu $x = -3$, $x = 0$ ve $x = 4$ noktalarında sürekli değildir. Dolayısıyla bu noktalarda türevli değildir.

$x = 2$ noktasında f fonksiyonu sürekli; fakat sağdan ve soldan türevleri farklıdır. Dolayısıyla bu noktada türev yoktur. *(Bu tip noktalar grafikte adına sivri uç dediğimiz noktalardır.)*

$x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$ noktalarında f fonksiyonu sürekli olup bu noktalarda sağdan ve soldan türevleri birbirine eşittir. Dolayısıyla f fonksiyonu bu noktalarda türevlidir.

14) $$f(x) = \frac{x^3 + 7}{x^2 + 6x - 7}$$

fonksiyonunun türevli olduğu en geniş tanım aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

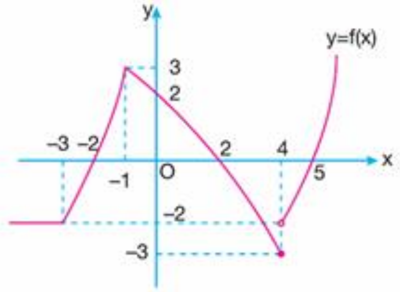
14) Paydayı sıfır yapan x değerleri için fonksiyon tanımsız olacağından, bu değerler için fonksiyonun türevi yoktur. O halde, paydayı sıfır yapan değerleri bulalım.

$x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x + 7).(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = -7$ ve $x = 1$ dir.

O halde, fonksiyonun türevli olduğu en geniş tanım aralığı $R - \{-7, 1\}$ dir.

15)



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $f(x)$ fonksiyonunun türevli olduğu en geniş tanım aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

15) $x = -3$ ve $x = -1$ noktaları kırılma noktaları olduğundan, (yani bu noktalarda fonksiyonun soldan ve sağdan türevleri farklı olduğundan) bu noktalarda f fonksiyonu türevsizdir.

Ayrıca $x = 4$ noktasında f fonksiyonu sürekli olmadığından, türevli değildir. Bu durumda, f fonksiyonunun türevli olduğu en geniş tanım aralığı $R - \{-3, -1, 4\}$ tür.

Toplamanın ve Çıkarmanın Türevi

16) $f : R \to R$

$f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 6x$ olduğuna göre, $f'(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

16) $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 6x$

$\Rightarrow f'(x) = 4.3x^{3-1} + 8.2.x^{2-1} - 6.1.x^{1-1}$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 16x - 6$ bulunur.

Çarpmanın Türevi

17) $f : R \to R$

$f(x) = (2x^2 + 5x).(x^2 - 3x + 3)$

olduğuna göre, $f'(0)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

17) $y = f(x).g(x) \Rightarrow y' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$

$\Rightarrow f(x) = (2x^2 + 5x).(x^2 - 3x + 3)$

$\Rightarrow f'(x) = (4x + 5).(x^2 - 3x + 3) + (2x - 3).(2x^2 + 5x)$

$\Rightarrow f'(0) = (4.0 + 5).(0^2 - 3.0 + 3) + (2.0 - 3).(2.0^2 + 5.0)$

$\Rightarrow f'(0) = 5.3 + (-3).0 = 15$ bulunur.

Bölmenin Türevi

18) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-2}$

olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

18) $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x-2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x.(3x-2)-(3).(x^2+1)}{(3x-2)^2}$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{2.1.(3.1-2)-3.(1^2+1)}{(3.1-2)^2}$

$\Rightarrow f'(1) = -4$ bulunur.

Parçalı Fonksiyonun Türevi

19) $f(x) = \begin{cases} mx^2+5, & x<1 \\ 2x^3+n, & x \geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için türevlenebilir olduğuna göre, $m.n$ çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

19) $m.1^2+5 = 2.1^3+n$

$m+5 = 2.1+n \Rightarrow m-n=-3$

$f'(x) = \begin{cases} 2mx, & x<1 \\ 6x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

$f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 2m.1 = 6.1^2 \Rightarrow m=3$

$m-n=-3 \Rightarrow 3-n=-3 \Rightarrow n=6 \Rightarrow m.n = 3.6 = 18$
bulunur.

Mutlak Değerin Türevi

20) $f(x) = |x^2-1|$

fonksiyonu x in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ değerlerinden hangisi veya hangilerinde türevlidir?

ÇÖZÜM:

20) $x^2-1=0 \Rightarrow x=1$ ve $x=-1$ kritik nokta

$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq -1 \\ -x^2+1, & -1<x<1 \\ x^2-1, & x \geq 1 \end{cases}$

f fonksiyonu $-2, -1, 0, 1, 2$ noktalarında süreklidir.

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -1 \\ -2x, & -1<x<1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

Kritik noktaların sağdan ve soldan türevine bakılır.

$\left.\begin{array}{l} f'(-1^+)=2, \quad f'(-1^-)=-2 \\ f'(1^+)=2, \quad f'(1^-)=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(-1^+) \neq f'(-1^-) \\ f'(1^+) \neq f'(1^-) \end{array}$

olduğundan, -1 ve 1 noktasında türevli değildir.

$f'(-2)=-4$, $f'(0)=0$, $f'(2)=4$ tür. Buna göre,

$\{-2, 0, 2\}$ noktalarında türevlidir.

Bileşke Fonksiyonun Türevi

21) $f(x) = 2x^2-4$ ve $g(x) = x^3-4x$ olduğuna göre, $(fog)'(2)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

21) $(fog)'(x) = g'(x).f'(g(x))$

$f'(x)=4x$, $g'(x)=3x^2-4$, ve $g(2)=0$ olduğundan

$(fog)'(2) = g'(2).f'(g(2))$

$= 8.f'(0)$

$= 8.0$

$= 0$ bulunur.

Fonksiyonun n.Kuvvetinin Türevi

22) $f(x) = (2x-3)^5 + \sqrt[3]{x^2-2x}$ olduğuna göre,

$f'(1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

22) $y = [f(x)]^n \Rightarrow y' = f'(x).n.[f(x)]^{n-1}$

$$f(x) = (2x-3)^5 + \sqrt[3]{x^2-2x} = (2x-3)^5 + (x^2-2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = 2.5.(2x-3)^4 + (2x-2).\frac{1}{3}.(x^2-2x)^{\frac{1}{3}-1}$$

$$f'(x) = 10.(2x-3)^4 + \frac{1}{3}.(2x-2).(x^2-2x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f'(1) = 10.(2.1-3)^4 + \underbrace{\frac{1}{3}.(2.1-2).(1^2-2.1)^{-\frac{2}{3}}}_{0}$$

$f'(1) = 10$ bulunur.

Zincir Kuralı

23) $y = t^2 + 1$

$t = 2u$

$u = x^2 - 1$

şeklinde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

23) y nin t ye göre, t nin u ya göre, u nun x e göre türevi alınmalıdır.

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\downarrow}{\frac{dy}{dt}} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{dt}{du}} \cdot \underset{\downarrow}{\frac{du}{dx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2t \;.\; 2 \;.\; 2x$$

$u = x^2 - 1 \Rightarrow t = 2x^2 - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8.t.x$$
$$= 8.(2x^2-2).x$$
$$= 16x^3 - 16x$$
$$= 16x.(x^2-1) \text{ bulunur.}$$

Ters Fonksiyonun Türevi

24) $f: \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \to \left[-\frac{13}{4}, \infty\right)$ ve $f(x) = x^2 - x - 3$

olduğuna göre, $(f^{-1})'(-1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

24) $f(x_0) = y_0 \Leftrightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ olmak üzere,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ dır.}$$

$$x^2 - x - 3 = -1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$$

$x = -1$ ve $x = 2$

$$\Rightarrow -1 \notin \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ ve } 2 \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$f'(x) = 2x - 1 \text{ ve } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{2.2-1} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

25) $f(x) = \sin(3x+4) - \cos^2 x$

olduğuna göre, $f'(x)$ fonksiyonunun eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

25) $[\sin(f(x))]' = f'(x).\cos(f(x))$

$[\cos(f(x))]' = -f'(x).\sin(f(x))$

$$f(x) = \sin(3x+4) - \cos^2 x = \sin(3x+4) - (\cos x)^2$$

$$f'(x) = 3.\cos(3x+4) - (-\sin x).2.\cos x$$
$$= 3.\cos(3x+4) + 2\sin x.\cos x$$
$$= 3.\cos(3x+4) + \sin 2x \text{ bulunur.}$$

26) $f(x) = \tan(3x+4) - \cot(5x-2)$

olduğuna göre, $f'(x)$ fonksiyonunun eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

26) $[\tan f(x)]' = f'(x)(1+\tan^2 f(x)) = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} = f'(x)\sec^2 f(x)$

$[\cot f(x)]' = -f'(x)(1+\cot^2 f(x)) = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} = -f'(x)\operatorname{cosec}^2 f(x)$

$f(x) = \tan(3x+4) - \cot(5x-2)$

$\Rightarrow f'(x) = 3.[1+\tan^2(3x+4)] + 5.[1+\cot^2(5x-2)]$

$= \dfrac{3}{\cos^2(3x+4)} + \dfrac{5}{\sin^2(5x-2)}$ bulunur.

Logaritmik Fonksiyonlarının Türevi

27) $f(x) = \log_2(5x) + \ln(x^2+1)$

olduğuna göre, $f'(x)$ fonksiyonunun eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

27) $[\log_a f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}.\log_a e$

$[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x) = \log_2(5x) + \ln(x^2+1)$

$f'(x) = \dfrac{5}{5x}.\log_2 e + \dfrac{2x}{x^2+1}$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}.\log_2 e + \dfrac{2x}{x^2+1}$ bulunur.

Üstel Fonksiyonun Türevi

28) $f(x) = 2^{3x-5} + e^{x^2}$

olduğuna göre, $f'(x)$ fonksiyonunun eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

28) $a \in R^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$(a^{f(x)})' = f'(x).a^{f(x)}.\ln a$

$(e^{f(x)})' = f'(x).e^{f(x)}$

$f(x) = 2^{3x-5} + e^{x^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 3.2^{3x-5}.\ln 2 + 2x.e^{x^2}$ bulunur.

29) $f(x) = x^{\sin x}$

olduğuna göre, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

29) $y = x^{\sin x}$ *(her iki tarafın ln ini alalım)*

$\ln y = \ln x^{\sin x}$

$\ln y = \sin x.\ln x$ *(her iki tarafın türevini alalım)*

$\dfrac{y'}{y} = \cos x.\ln x + \dfrac{1}{x}.\sin x$

$y' = x^{\sin x}.(\cos x.\ln x + \dfrac{1}{x}.\sin x)$

$f'(x) = x^{\sin x}(\cos x.\ln x + \dfrac{1}{x}.\sin x)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}.\left(\cos\dfrac{\pi}{2}.\ln\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}.\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\cdot\left(0 + \dfrac{2}{\pi}\cdot 1\right)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ bulunur.

Yüksek Mertebeden Türev

30) $f(x) = ax^3 - bx^2 + 3x + c$,

$f'(1) = 3$ ve $f''(2) = 6$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM:

30) $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ ... I. türev

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ... II. türev

$\dfrac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ ... III. türev

$\dfrac{d^4y}{dx^4} = f^{IV}(x)$ ... IV. türev

⋮

$f(x) = ax^3 - bx^2 + 3x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 2bx + 3$

$\Rightarrow f''(x) = 6ax - 2b$

$\left.\begin{aligned} f'(1) = 3 &\Rightarrow 3a - 2b + 3 = 3 \\ f''(2) = 6 &\Rightarrow 12a - 2b = 6 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} 3a - \cancel{2b} &= 0 \\ -\quad 12a - \cancel{2b} &= 6 \\ \hline -9a &= -6 \end{aligned}$

$a = \dfrac{2}{3}$ bulunur.

31) $y = f(x) = \sin 3x$

olduğuna göre, $\dfrac{d^{54}y}{dx^{54}}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

31) $f(x) = \sin 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 3.\cos 3x = 3^1.\cos 3x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3.3.\sin 3x = -3^2.\sin 3x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -3.3.3.\cos 3x = -3^3.\cos 3x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 3.3.3.3.\sin 3x = 3^4.\sin 3x$$

Yukarıda da görüldüğü gibi 4. mertebeden türev ile fonksiyon isim ve işaret bakımından aynıdır. O halde, türevler her 4 türevde bir tekrar eder.

$$\frac{d^{54}y}{dx^{54}} = -3^{54}.\sin 3x \text{ bulunur. } (54 \equiv 2 \pmod 4)$$

32) $f(x) = \sin x + \cos x$

olduğuna göre, $f^{(79)}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

32) $f(x) = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun yüksek basamaktan türevlerini alalım.

$\boxed{f'(x) = \cos x - \sin x}$

$f''(x) = -\sin x - \cos x$

$f'''(x) = -\cos x + \sin x$ aynı

$f^{(4)}(x) = \sin x + \cos x$

$\boxed{f^{(5)}(x) = \cos x - \sin x}$

⋮

Bu türevlere dikkat edilirse her dört türevde bir türevlerin tekrar ettiği görülür.

79	4
$-$76	19
3	

$f^{(79)}(x) = f'''(x) = -\cos x + \sin x$ bulunur.

L'Hospital Kuralı

33)
$$\lim_{x \to 0} \frac{-x + \sin x}{x^2}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

33) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x+\sin x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x+\sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-1+\cos x}{2x} \quad \textit{(L' Hospital)}$$

$= \dfrac{0}{0}$ *(yine belirsizlik var tekrar L' Hospital uygulanabilir.)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{-1+\cos x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2} \quad \textit{(L' Hospital)}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$= 0$ bulunur.

34)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - x + 3}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

34) $\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \textit{(L' Hospital)}$$

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 5}{x^2 - x + 3} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x - 2}{2x - 1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

Tekrar L' Hospital uygulanırsa

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x - 2}{2x - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6}{2} = 3$ bulunur.

35) $f : R \to R$ her noktada türevli bir fonksiyon ve $f'(1) = 2$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$ limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

35) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(1+3h)-f(1-2h)]'}{h'}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3.f'(1+3h)-(-2).f'(1-2h)}{1}$$

$$= \frac{3.f'(1)+2.f'(1)}{1}$$

$$= \frac{3.2+2.2}{1} = 6+4 = 10 \text{ olur.}$$

36) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

36) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ ifadesinin limiti olmadığından,

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$ limitini hesaplarken L' Hospital uygulanmaz. Bu durumda temel limit kuralları kullanılarak çözüm yapılır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= 1+0$$

$$= 1 \text{ olur.}$$

Polinomun Türevi

37) $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 4$

polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre, $a.b$ çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM:

37) $P(x)$ polinomu $(x-a)^n$ ile tam bölünebiliyorsa

$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(n-1)}(a) = 0$ dır.

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$P(x)$ polinomu $(x-1)^2$ ile tam bölünebildiğine göre,

$P(1) = 0$ ve $P'(1) = 0$ dır.

$P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 4$ ise $P'(x) = 3x^2 - 2ax + b$

$P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - a.1^2 + b.1 - 4 = 0 \Rightarrow -a + b = 3$

$P'(1) = 0 \Rightarrow 3.1^2 - 2a.1 + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -3$

$$\left.\begin{matrix} -a+b=3 \\ -2a+b=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a=6 \\ b=9 \end{matrix} \Rightarrow a.b = 6.9 = 54 \text{ bulunur.}$$