

DİZİLER

$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ye tanımlı f fonksiyonuna **reel sayı dizisi** denir.

Tanım kümesi : $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

(a_n) ifadesine genel terim ya da n . terim denir.

$$(a_n) = (n^2 + n + 1) \text{ ise } a_1 = 3$$

$$a_2 = 7$$

$$a_3 = 13$$

⋮

1) $(a_n) = (n^2 + 3n - 1)$ dizisinin ilk üç teriminin toplamı nedir?

$$a_1 = 1 + 3 - 1 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_2 = 4 + 6 - 1 \Rightarrow a_2 = 9$$

$$a_3 = 9 + 9 - 1 \Rightarrow a_3 = 17$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 9 + 17 = 29$$

2) Genel terimi $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ olan dizinin 10. ve 20. terimlerinin toplamı nedir?

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

$$a_{20} = 1 + 2 + 3 + \dots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$$

$$a_{10} + a_{20} = 265$$

3) Genel terimi

$$(a_n) = \begin{cases} 4n+1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -n, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ n^2-1, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

olan dizinin $a_5 + a_6$ toplamı nedir?

$$a_5 = 5^2 - 1 = 24$$

$$a_6 = 4 \cdot 6 + 1 = 25$$

$$\Rightarrow a_5 + a_6 = 24 + 25 = 49$$

4) (a_n) ve (b_n) dizileri

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ n, & n \equiv 1 \pmod{3} \\ -n, & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre

b_4 nedir?

$$\begin{aligned} b_4 &= \sum_{k=0}^4 a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &= 0 + 1 + (-2) + 0 + (4) \\ &= 3 \end{aligned}$$

5) Aşağıda verilenlerden hangileri bir dizidir?

- $(\frac{1}{n})$ ✓
- $(\log n)$ ✓
- $(\sin(n\pi))$ ✓
- $(\frac{3}{n+1})$ ✓
- $(\frac{4}{n-3})$ ☹
- $(\frac{1}{n^2-4})$ ☹
- $(\frac{4}{7})$ ✓
- $(\log_{n+2}(n-7))$ ☹
- $(\sqrt{\frac{n-1}{n+3}})$ ✓
- $(\sqrt{\frac{n-5}{n}})$ ☹
- $(\frac{2}{4n-15})$ ✓
- $(\frac{1}{3n-21})$ ☹

6) $\forall n \in N^+$ ve $n > 1$ için

$$a_n = a_{n-1} + 2n \text{ ve } a_1 = 5 \text{ ise } a_{10} \text{ nedir?}$$

$$a_n - a_{n-1} = 2n$$

$$n=2 \text{ için } a_2 - a_1 = 4$$

$$n=3 \text{ için } a_3 - a_2 = 6$$

$$n=4 \text{ için } a_4 - a_3 = 8$$

$$\vdots$$

$$n=10 \text{ için } a_{10} - a_9 = 20$$

+

$$a_{10} - a_1 = 4 + 6 + 8 + \dots + 20$$

$$a_{10} - a_1 = 108 \Rightarrow a_{10} = 113$$

7) $\forall n \in N^+$ ve $n > 1$ için $a_n = a_{n-1} + 3$ ve $a_1 = 3$

olan (a_n) dörisi \mathbb{N} de a_{40} nedir?

$$a_n - a_{n-1} = 3$$

$$n=2 \text{ için } a_2 - a_1 = 3$$

$$n=3 \text{ için } a_3 - a_2 = 3$$

$$n=4 \text{ için } a_4 - a_3 = 3$$

⋮ ⋮

$$n=40 \text{ için } a_{40} - a_{39} = 3$$

+

$$a_{40} - a_1 = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{39 \text{ tane}}$$

$$a_{40} - 3 = 117 \Rightarrow a_{40} = 120$$

8) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}$ ve $n \in N$, $n \geq 1$ olduguuna göre a_6 nedir?

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n} \text{ ifadesinde } n=2 \text{ için } \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$n=3 \text{ için } \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3}$$

⋮

$$n=6 \text{ için } \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{6}$$

X

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{a_6}{a_1} = \frac{1}{6!} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6!}$$

9) $\forall n \in N^+$ ve $n > 1$ için

$$a_n = \frac{n+3}{n+2}, a_{n-1} \text{ ve } a_1 = 2 \text{ olduguuna göre}$$

a_{21} nedir?

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+3}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_{21}}{a_{20}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{24}{23}$$

$$\frac{a_{21}}{a_1} = 6 \Rightarrow a_{21} = 12$$

10) Genel terimi $a_n = 5^n \cdot (n!)$ olan bir döride a_n , a_{n-1} in kaç katidır?

$$a_{n-1} = 5^{n-1} \cdot (n-1)!$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{5^n \cdot n!}{5^{n-1} \cdot (n-1)!} = \frac{5^n \cdot n \cdot (n-1)!}{5^{n-1} \cdot (n-1)!} = 5 \cdot n$$

11) $\left(\frac{n^2+2n+9}{n+3} \right)$ dörisinin kaç tane terimi tam sayıdır?

$$\begin{array}{r} \overline{n^2+2n+9} \quad | \quad n+3 \\ \underline{-n^2-3n} \\ \hline -n+9 \\ \hline -\underline{-n-3} \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\frac{n^2+2n+9}{n+3} = n-1 + \frac{12}{n+3} \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$n+3=1 \Rightarrow n=-2$$

$$n+3=2 \Rightarrow n=-1$$

$$n+3=3 \Rightarrow n=0$$

$$n+3=4 \Rightarrow n=1$$

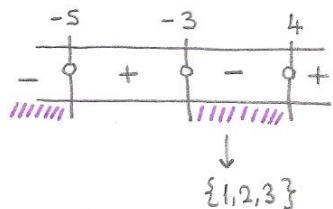
$$n+3=6 \Rightarrow n=3$$

$$n+3=12 \Rightarrow n=9$$

3 tanedir.

12) $(a_n) = \left(\frac{n^2 - n - 12}{n+5} \right)$ dizisinin kaç tane terimi negatifdir?

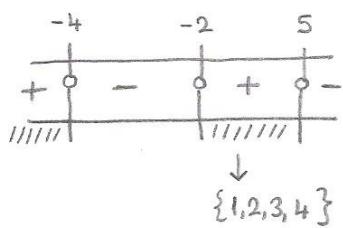
$$\frac{n^2 - n - 12}{n+5} < 0$$



3 tane terimi negatiftir.

13) $(a_n) = \left(\frac{-n^2 + n + 20}{n+2} \right)$ dizisinin kaç terimi pozitifdir?

$$\frac{-n^2 + n + 20}{n+2} > 0$$



14) $(a_n) = (n^2 - 8n + 10)$ dizisinin kaç terimi 3 ten küçüktür?

$$n^2 - 8n + 10 < 3$$

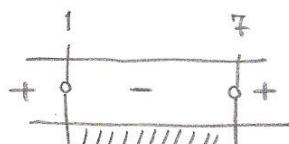
$$n^2 - 8n + 7 < 0$$

$$n^2 - 8n + 7 = 0$$

$$\begin{matrix} \wedge & \wedge \\ n & -7 \\ \square & -1 \end{matrix}$$

$$n=1$$

$$n=7$$



{2, 3, 4, 5, 6}

5 tanedir.

• **Sabit dizisi:** Bütün terimleri birbirine eşit olan dizidir.

$$(a_n) = (k, k, k, \dots, k, \dots)$$

• **(a_n) = (b_n + c) / (d_n + e)** dizisi sabit dizisi ise

$$\frac{b}{d} = \frac{c}{e} \text{ dir.}$$

15) $(a_n) = \left(\frac{3n - k}{2n + 3} \right)$ dizisi sabit dizisi ise k ne olmalıdır?

$$\frac{3}{2} = \frac{-k}{3} \Rightarrow k = -\frac{9}{2}$$

• **Eşit dizisi:**

$\forall n \in N^+$ için $(a_n) = (b_n)$ ise bu dizilere eşit dizisi denir.

$$a_1 = b_1$$

$$a_2 = b_2$$

$$a_3 = b_3$$

⋮

16) $(a_n) = \left(\frac{2n - 3}{n+1} \right)$ ve $(b_n) = \left(\frac{4n - k}{2n + 2} \right)$

dizilerinin eşit olması için k kaç olmalıdır?

$$a_1 = b_1 \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{4-k}{4}$$

$$-4 = 8 - 2k$$

$$2k = 12 \Rightarrow k = 6$$

• **Alt diziler:** $\forall n \in N^+$ ve $k_n \in N^+$

$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1}$ olmak üzere

(a_n) dizisinde n yerine k_n yazarak elde edilen (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin alt dizisi odunu veriyoruz.

17) Aşağıdaki dizilerden hangisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi olamaz?

A) (a_{3n+1}) B) (a_{n^2}) C) (a_{7n-1})

D) (a_{n-3}) E) (a_{n^2+3n+1})

• Monoton diziler:

$a_{n+1} - a_n > 0$ ise monoton artan

$a_{n+1} - a_n < 0$ ise monoton azalır

$a_{n+1} - a_n \leq 0$ ise monoton artmayan

$a_{n+1} - a_n \geq 0$ ise monoton azalmayandır.

😊 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere genel terimi

$(a_n) = \left(\frac{a.n+b}{c.n+d} \right)$ olan dizide

• $-\frac{d}{c} > 1$ ise monoton deşildir.

• $-\frac{d}{c} < 1$ ise monotondur ve

$a.d - b.c > 0$ ise monoton artan

$a.d - b.c < 0$ ise monoton azalandır.

18) $(a_n) = \left(\frac{3n+5}{5n+4} \right)$ dizisinin monotonluk durumu nasıldır?

$$5n+4=0 \Rightarrow n=-\frac{4}{5} < 1 \text{ olduğundan monoton}$$

$3.4 - 5.5 = 12 - 25 = -13 < 0$ olduğundan monoton azalandır.

19) $(a_n) = \left(\frac{3n+k}{2n+5} \right)$ dizisi monoton artan

olduğuna göre k nin en büyük tam sayı değeri kaçırdır?

$$3.5 - 2.k > 0$$

$$2k < 15$$

$$k < \frac{15}{2}$$

$$k < 7,5$$

↓

en fazla 7 olur.

ARİTMETİK DİZİ

Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit bir sayıya eşit olan dizilere aritmetik diziler denir.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$$

r: ortak fark

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_9 = a_1 + 8r$$

$$a_n = a_p + (n-p).r$$

$$a_5 = a_2 + 3r$$

$$a_5 = a_3 + 2r$$

$$a_8 = a_5 + 3r$$

$$a_7 = a_3 + 4r$$

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$$

$$a_7 = \frac{a_5 + a_9}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_1 + a_9}{2}$$

ilk n terim toplamı S_n olmak üzere

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1).r] \text{ dir.}$$

$$S_{10} = 5 \cdot [2a_1 + 9.r]$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \cdot [2a_1 + 14.r]$$

$$S_{40} = 20 \cdot [2a_1 + 39.r]$$

$$S_{11} = \frac{11}{2} \cdot [2a_1 + 10.r]$$

20) Bir aritmetik dizide

$$a_2 = 7$$

$a_5 = 22$ olduğuna göre a_{30} nedir?

$$a_5 = a_2 + 3r \Rightarrow 22 = 7 + 3r$$

$$15 = 3r$$

$$r = 5$$

$$a_{30} = a_2 + 28r$$

$$= 7 + 28 \cdot 5 = 7 + 140 \Rightarrow a_{30} = 147$$

21) Bir aritmetik dizide

$$a_1 = 5$$

$a_5 = 45$ olduğuna göre a_{10} nedir?

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$45 = 5 + 4r \Rightarrow 4r = 40$$

$$r = 10$$

$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$= 5 + 9 \cdot 10$$

$$= 95$$

22) Bir aritmetik dizide $a_8 - a_5 = 12$ olduğuna göre ortak fark nedir?

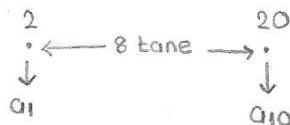
$$a_8 - a_5 = 12$$

$$(a_1 + 7r) - (a_1 + 4r) = 12$$

$$3r = 12$$

$$r = 4$$

23) 2 ve 20 sayıları arasına aritmetik dizide oluşturacak şekilde 8 tane terim yerleştirilirse bu dizinin 6. terimini kaç olur?



$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$20 = 2 + 9r \Rightarrow r = 2$$

$$a_6 = a_1 + 5r$$

$$= 2 + 5 \cdot 2$$

$$= 12$$

24) Bir aritmetik dizinin 7. terimi 4 ise 2. ve 12. terimlerinin toplamı nedir?

$$a_7 = 4$$

$$a_7 = \frac{a_2 + a_{12}}{2} \Rightarrow a_2 + a_{12} = 8$$

25) $x, y, 15, z, t$ bir aritmetik dizinin ardışık terimleridir.

Buna göre $x+y+z+t$ toplamı nedir?

$$\frac{x+z}{2} = 15 \Rightarrow x+z = 30$$

$$\frac{y+z}{2} = 15 \Rightarrow y+z = 30$$

$$x+y+z+t = 60$$

26) Ortak farkı 4, beşinci terimi 20 olan aritmetik dizinin ilk 7 teriminin toplamı nedir?

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$20 = a_1 + 16 \Rightarrow a_1 = 4$$

$$S_7 = \frac{7}{2} \cdot [2a_1 + 6r] = \frac{7}{2} \cdot [8 + 24] = \frac{7}{2} \cdot 32 \\ = 7 \cdot 16 \\ = 112$$

27) Bir aritmetik dizide $a_1 = -5$ ve

$S_{20} - S_{10} = 240$ olduğuna göre S_{10} nedir?

$$10 \cdot [2a_1 + 9r] - 5 \cdot [2a_1 + 8r] = 240$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ -5 \quad \quad \quad -5$$

$$-100 + 190r + 50 - 45r = 240$$

$$-50 + 145r = 240$$

$$145r = 290$$

$$r = \frac{290}{145} = 2$$

$$S_{10} = 5 \cdot [2a_1 + 8r]$$

$$= 5 \cdot [-10 + 18] = 40$$

GEOMETRİK DİZİ

Ardışık ikinci terimin oranı aynı olan dizilere geometrik dizinin adını veriyoruz.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

r : ortak çarpan (yada ortak oran)

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

$$a_7 = a_1 \cdot r^6$$

$$a_{10} = a_1 \cdot r^9$$

$$a_n = a_p \cdot r^{n-p}$$

$$a_4 = a_3 \cdot r^1$$

$$a_5 = a_2 \cdot r^3$$

$$a_{13} = a_9 \cdot r^4$$

$$a_n^2 = a_{n-p} \cdot a_{n+p}$$

ya da

$$a_n = \sqrt{a_{n-p} \cdot a_{n+p}}$$

$$a_7^2 = a_4 \cdot a_{10}$$

$$a_{12}^2 = a_7 \cdot a_{17}$$

$$a_{12} = \sqrt{a_{10} \cdot a_{14}}$$

$$a_9 = \sqrt{a_3 \cdot a_{15}}$$

• İlk n terim toplamı S_n olan bir geometrik dizide

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-r^6}{1-r}$$

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r}$$

- 28) Bir aritmetik dizide $S_{15} - S_7 = 120$ olduğuna göre S_{22} nedir?

$$\frac{15}{2} \cdot [2a_1 + 14r] - \frac{7}{2} \cdot [2a_1 + 6r] = 120$$

$$15a_1 + 105r - 7a_1 - 21r = 120$$

$$8a_1 + 84r = 120$$

$$20r + 21r = 30$$

$$S_{22} = 11 \cdot [2a_1 + 21r] \\ = 11 \cdot 30 = 330$$

- 29) Bir aritmetik dizide $a_1 = 10$ ve $a_7 + a_{12} = 190$ olduğuna göre a_{10} nedir?

$$a_7 + a_{12} = 190 \Rightarrow a_1 + 6r + a_1 + 11r = 190$$

$$20 + 17r = 190$$

$$\downarrow \\ 10$$

$$20 + 17r = 190$$

$$17r = 170 \Rightarrow r = 10$$

$$a_{10} = a_1 + 9r \\ = 10 + 90 = 100$$

- 30) (a_n) bir aritmetik dizidir.

- $a_2 = 7$ ve $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 136$ olduğuna göre a_{12} nedir?

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 136$$

$$a_2 + 3r + a_2 + 4r + a_2 + 5r + a_2 + 6r = 136$$

$$4a_2 + 18r = 136$$

$$\downarrow \\ 7$$

$$28 + 18r = 136$$

$$18r = 108$$

$$r = 6$$

$$a_{12} = a_2 + 10r \\ = 7 + 10 \cdot 6$$

$$\Rightarrow a_{12} = 67$$

31) İlk terimi 3 ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik diziin 5. terimi nedir?

$$a_5 = a_1 \cdot r^4$$

$$a_5 = 3 \cdot 2^4 \Rightarrow a_5 = 48$$

32) 2 ve 162 arasında uygun olan 3 tam sayı yerleştirilerek 5 sayıdan oluşan bir geometrik dizisi oluşturuluyor.

Bu üçluğunun toplamı nedir?

$$\begin{array}{cccccc} 2 & & & 162 \\ \downarrow & \cdot & \cdot & \downarrow \\ a_1 & & & a_5 \end{array}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 162 = 2 \cdot r^4$$

$$81 = r^4$$

$$r = 3$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3$$

$$= 6 + 18 + 54$$

$$= 78$$

33) Bir geometrik dizide $\frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{27}$ ve

$a_3 + a_5 = 270$ olduğunu göre a_1 nedir?

$$\frac{a_5}{a_3 \cdot r^3} = \frac{1}{27} \Rightarrow r = 3$$

$$a_3 + a_5 = 270 \Rightarrow a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^4 = 270$$

$$9a_1 + 81a_1 = 270$$

$$900a_1 = 270$$

$$\Rightarrow a_1 = 3$$

34) Bir geometrik dizide $a_9 = 32$ ve $a_{12} = 4$ olduğunu göre a_5 in değeri nedir?

$$a_{12} = a_9 \cdot r^3$$

$$4 = 32 \cdot r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_9 = a_5 \cdot r^4 \Rightarrow 32 = a_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$32 = \frac{a_5}{16} \Rightarrow a_5 = 512$$

35) Bir geometrik dizinin ardışık üç terimin sırasıyla $x-2, x+1, x+5$ olduğunu göre x kaçtır?

$$(x+1)^2 = (x-2)(x+5)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x - 10$$

$$-x = -11$$

$$\Rightarrow x = 11$$

36) $a, 5, b$ bir aritmetik dizinin ardışık ilk üç terimi, $a, 4, b$ bir geometrik dizinin ardışık ilk üç terimidir.

Buna göre $a^2 + b^2$ toplamı nedir?

$$\frac{a+b}{2} = 5 \Rightarrow a+b = 10$$

$$a \cdot b = 16$$

$$(a+b)^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + \underbrace{2ab + b^2}_{16} = 100$$

$$a^2 + 32 + b^2 = 100$$

$$a^2 + b^2 = 68$$

37) Bir geometrik dizinin ilk 6 teriminin toplamının, ilk 3 teriminin toplamına oranı $2\sqrt{2}$ dir. Bunu göre bu dizinin ortak çarpanı nedir?

$$S_6 = 2\sqrt{2} S_3$$

$$\frac{a_1 \cdot \frac{1-r^6}{1-r}}{a_1 \cdot \frac{1-r^3}{1-r}} = \frac{1+r^3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 1+r^3 = 2\sqrt{2}$$

$$r^3 = 2\sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}-1}$$

38) Bir geometrik dizide $S_{10} = 33$, $S_5 = 5$ olduğunu göre r kaçtır?

$$a_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r} = 33 \cdot \frac{1-r^5}{1-r} \cdot a_1$$

$$(1-r^5) \cdot (1+r^5) = 33 \cdot (1+r^5)$$

$$1+r^5 = 33$$

$$r^5 = 32$$

$$\Rightarrow r = 2$$

☺ Bir dizi hem aritmetik hemde geometrik bir dizi ise **sabit dizi** dir.

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

39) $a+d, 2ad, ad^2$ dizisinin hem aritmetik hemde geometrik dizi olabilmesi için a nin olacagi deger kaq olmalıdır?

$$a+d = 2ad = ad^2$$

$$2ad = ad^2 \Rightarrow d = 2$$

$$a+d = 2ad \Rightarrow a+2 = 4a$$

$$3a = 2$$

$$a = \frac{2}{3}$$

40) $2a+3b=10, b+5, a+b-1$ dizisi hem aritmetik hemde geometrik bir dizi ise b nedir?

$$2a+3b=10 = b+5 = a+b-1$$

$$b+5 = a+b-1 \Rightarrow a=6$$

$$2a+3b=10 = b+5$$

↓

$$2+3b=b+5 \Rightarrow 2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

SERİLER

(an) bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \text{ toplamına}$$

seri adini veriyoruz.

- $\sum_{k=p}^{\infty} r^k$ geometrik serisinde

$|r| < 1$ ise seri yakınsak

$|r| > 1$ ise seri tıroksaktır.

☺ $\sum_{k=p}^{\infty} r^k = \frac{a_1}{1-r} \quad (a_1=r^p \text{ ve } |r| < 1)$

41) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ geometrik serisinin degeri nedir?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots$$

$$a_1 = 1$$

$$r = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

42) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ toplamının sonucu nedir?

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

43) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ toplamının sonucu nedir?

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

44) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ toplamının sonucu nedir?

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2}{3^n \cdot \frac{1}{3}} &= \sum_{n=1}^{\infty} 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 6 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 6 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} = 12 \end{aligned}$$

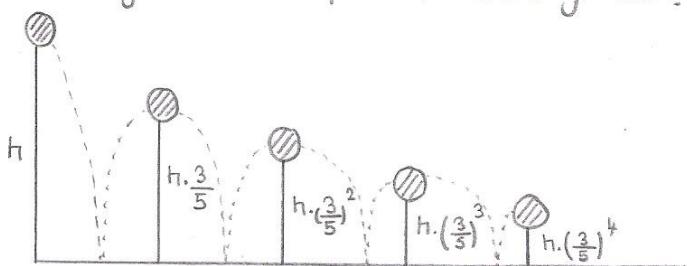
45) $1 < y < 3$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+y^n}{3^n}\right)$ toplamının sonucu nedir?

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y}{3}\right)^n \\ & = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{y}{3}}{1 - \frac{y}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{y}{3}}{\frac{3-y}{3}} \\ & = \frac{1}{2} + \frac{y}{3-y} = \frac{3-y+2y}{6-2y} = \frac{3+y}{6-2y} \end{aligned}$$

46) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^{n-1}}$ toplamının sonucu nedir?

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n \cdot \frac{1}{7}} = 7 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \\ & = 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} = 7 \cdot \frac{7}{5} = \frac{49}{5} \end{aligned}$$

47) 16 metre yükseklikten serbest bırakılan bir top her defasında bir önceki düşüşü $\frac{3}{5}$ ö kadar 2ipliyor. Hareket bitinceye kadar top kaç metre yol alır?



$$\text{olduğu yol: } h + 2h \cdot \underbrace{\left[\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \dots \right]}_{\text{Geometric series}}$$

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} & = h + 2h \cdot \frac{3}{2} \\ & = 4h \\ & \downarrow \\ & 16 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{olduğu yol: } 64 \text{ m.}$$

😊 h : topun ilk yüksekliği

a : yükselseme oranı

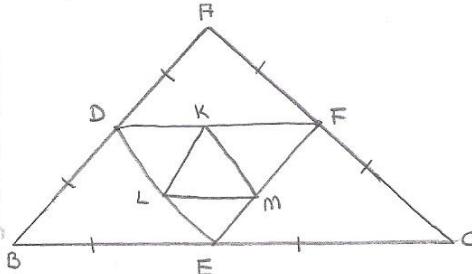
olmak üzere topun olacağı yol: $h \cdot \left(\frac{1+a}{1-a} \right)$ dir.

$$\begin{aligned} & h = 16 \text{ metre} \\ & a = \frac{3}{5} \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \text{yol} = 16 \cdot \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} \\ & = 16 \cdot \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}} = 16 \cdot 4 = 64 \text{ metre} \end{aligned} \right\}$$

48) 24 metre yükseklikten serbest bırakılan bir top her defasında bir önceki düşüşü $\frac{2}{5}$ ö kadar 2ipliyor. Hareket bitinceye kadar kaç metre yol alır?

$$24 \cdot \frac{1 + \frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = 24 \cdot \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{5}} = 24 \cdot \frac{7}{3} = 56 \text{ metre}$$

49) Bir kenarı 2 cm olan bir eşkenar üçgenin kenar orta noktaları birleştirilerek yeni bir üçgen oluşturuluyor. Bu işlem elde edilen her üçgene sonsuz defa uygulandığında oluşturacak tüm üçgenlerin alanları toplamı kaç cm^2 dir?



$$A(ABC) = 5$$

$$A(DEF) = 5 \cdot \frac{1}{4}$$

$$A(KLM) = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\text{Tüm alanlar} = S \cdot \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right] = S \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = S \cdot \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\text{Tüm alan} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

50) Yarıçapı 8 cm olan bir çemberin içine her birinin yarıçapı bir öncekiniin yarısı olacak şekilde sonsuz çoklukta çemberler çiziliyor.

- a) Çizilen tüm çemberlerin çevreleri toplamı nedir?

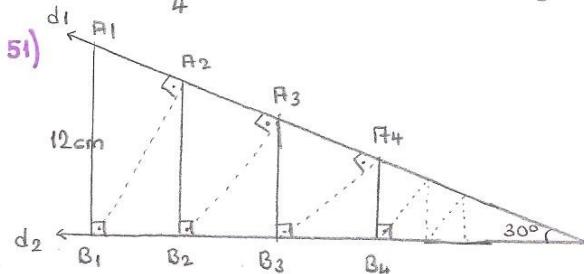
yarıçapı: r olsun

$$r, r \cdot \frac{1}{2}, r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots$$

$$\begin{aligned} 2\pi r + 2\pi r \cdot \frac{1}{2} + 2\pi r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots &= 2\pi r \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right) \\ &= 2\pi r \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 4\pi r = 32\pi \end{aligned}$$

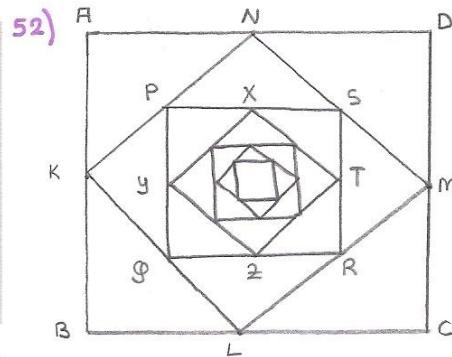
- b) Çizilen tüm çemberlerin alanları toplamı nedir?

$$\begin{aligned} \pi r^2 + \pi r^2 \cdot \frac{1}{4} + \pi r^2 \cdot \frac{1}{16} + \pi r^2 \cdot \frac{1}{64} \\ = \pi r^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right) \\ = \pi r^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \pi r^2 \cdot \frac{4}{3} = \pi \cdot 64 \cdot \frac{4}{3} = \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$



d₁ doğrusu üzerinde alınan A₁ noktasından d₂ doğrusuna A₁B₁ dikmesi iniliyor. Sonra B₁ noktasından d₁ doğrusuna B₁A₂ dikmesi ve A₂ dikme ayağından d₂ doğrusuna A₂B₂ dikmesi iniliyor ve bu işlem sonsuz defa uygulandığında inilen tüm dikmelerin uzunlukları toplamı olan |A₁B₁| + |A₂B₂| + |A₃B₃| + ... nedir?

$$h + h \cdot \frac{3}{4} + h \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots = h \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = h \cdot \frac{4}{1} = 4h = 48 \text{ cm}$$



Şekildeki ABCD dikdörtgenin boyutları 12 cm ve 16 cm dir. Bu dikdörtgenin kenarlarının orta noktalarını köşe kabul eden bir dörtgen ve bu dörtgenin kenar orta noktaları birleştirilerek bir dikdörtgen çiziliyor.

Bu işlem sonsuz defa uygulandığında oluşan tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı nedir?

Dikdörtgenlerin çevreleri toplamı

$$\begin{aligned} 56 + 56 \cdot \frac{1}{2} + 56 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ = 56 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 112 \text{ cm} \end{aligned}$$

Dörtgenlerin çevreleri toplamı

$$\begin{aligned} 40 + 40 \cdot \frac{1}{2} + 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ = 40 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 80 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$112 + 80 = 192 \text{ cm dir.}$$