BELİRSİZ İNTEGRAL ÇÖZÜMLÜ SORULARI

1) $f(x) = x^2$

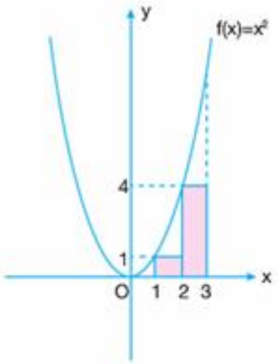
fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı kısmının alanını,

$[0, 3]$ aralığını 3 eş parçaya bölerek,

tahmin ediniz.

ÇÖZÜM:

1)



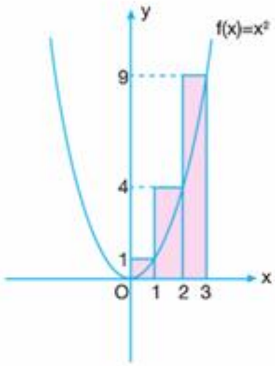
$[0, 3]$ aralığı 3 eş parçaya bölünürse her bi parçanın uzunluğu,

$\frac{3-0}{3} = 1$ br olur.

Alt dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= 1.1 + 1.4 = 5$ br^2 olur.

(Riemann alt toplamı)



Üst dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= 1.1 + 1.4 + 1.9$

$= 14$ br^2 olur.

(Riemann üst toplamı)

O halde, tahmini alan$= \frac{1}{2}.(5+14)$

$= \frac{19}{2} = 9{,}5$ br^2 bulunur.

2) $f(x) = x^2$

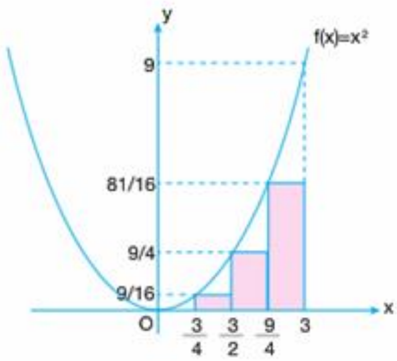
fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı kısmının alanını,

$[0, 3]$ aralığını 4 eş parçaya bölerek

tahmin ediniz.

ÇÖZÜM:

2)



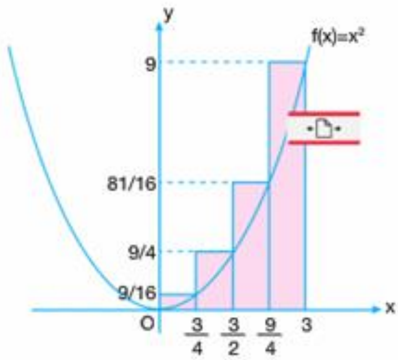
$[0, 3]$ aralığı 4 eş parçaya bölünürse her bir parçanın uzunluğu, $\frac{3-0}{4} = \frac{3}{4}$ br olur.

Alt dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{81}{16}$

$= \frac{27}{64} + \frac{27}{16} + \frac{243}{64} = \frac{378}{64} = \frac{189}{32}$ br^2 bulunur.

(Riemann alt toplamı)



Üst dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{16} + \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{81}{16} + \frac{3}{4}.9$

$= \frac{27}{64} + \frac{27}{16} + \frac{243}{64} + \frac{27}{4} = \frac{405}{32}$ br^2 bulunur.

(Riemann üst toplamı)

O halde, tahmini alan $= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{189}{32} + \frac{405}{32}\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{594}{32}$

$= \frac{297}{32}$ br^2 bulunur. ($\cong 9{,}281$)

Bu tür soruların çözümünde parçalanış sayısı arttıkça, elde edilen alanların, gerçek alan değerine yaklaştığı görülür.

3) $f(x) = 5$

fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integralini bulunuz.

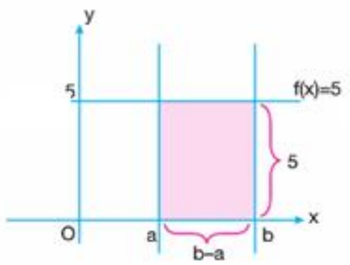
ÇÖZÜM:

3) $[a, b]$ aralığını n tane eşit alt aralığa bölelim. Bu durumda, $1 \leq i \leq n$ koşulunu sağlayan her i için

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ olur.}$$

i. alt aralıktan alınan bir z_i için $f(z_i) = 5$ olacağı açıktır. Buna göre, Riemann toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 5.\Delta x$$
$$= (\underbrace{5+5+5+\dots+5}_{n \text{ tane}}).\Delta x$$
$$= \cancel{n}.5.\frac{b-a}{\cancel{n}}$$
$$= 5.(b-a) \text{ bulunur.}$$



Taralı alan $= 5.(b-a)$ olup $\int_a^b 5\,dx$ belirli integralinin değeri de $5.(b-a)$ dır.

4) $$\int_0^3 x\,dx$$

belirli integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

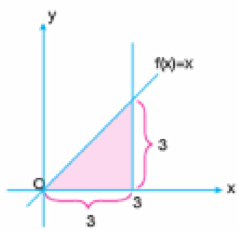
4) $f(x) = x$ fonksiyonu, $[0, 3]$ aralığında sürekli olduğundan, bu aralıkta belirli integrali vardır. $[0, 3]$ aralığını, uzunluğu $\Delta x = \frac{3}{n}$ olan n eşit alt aralığa bölersek bu alt aralıklar

$$\left[0, \frac{3}{n}\right], \left[\frac{3}{n}, \frac{6}{n}\right], \dots, \left[\frac{3.(n-1)}{n}, 3\right] \text{ olur.}$$

$z_1 = \frac{3}{n}$, $z_2 = \frac{6}{n}$, ..., $z_n = 3$ için Riemann toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \frac{3}{n}.\frac{3}{n} + 2.\frac{3}{n}.\frac{3}{n} + \dots + n.\frac{3}{n}.\frac{3}{n}$$
$$= \frac{9}{n^2}.(1+2+3+\dots+n)$$
$$= \frac{9}{n^2}.\frac{n.(n+1)}{2}$$
$$= \frac{9}{2}.\frac{n+1}{n} \text{ olur.}$$

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{2}.\frac{n+1}{n}\right) = \frac{9}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1.n+1}{1.n}$$
$$= \frac{9}{2}.\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{9}{2} \text{ olur.}$$



Taralı alan, $\frac{1}{2}.3.3 = \frac{9}{2}$ br^2 olup $\int_0^3 x\,dx$ belirli integralinin değeri de $\frac{9}{2}$ dir.

5) $$\int_0^2 x^2\,dx$$

belirli integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

5) $f(x) = x^2$ fonksiyonu, $[0, 2]$ aralığında sürekli olduğundan, bu aralıkta belirli integrali vardır. $[0, 2]$ aralığını, uzunluğu $\Delta x = \frac{2}{n}$ olan n eşit aralığa bölersek bu alt aralıklar,

$\left[0, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{4}{n}\right], \left[\frac{4}{n}, \frac{6}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-2}{n}, 2\right]$ olur.

$z_1 = \frac{2}{n}, z_2 = \frac{4}{n}, z_3 = \frac{6}{n}, \ldots, z_n = 2$ için

Riemann toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \frac{4}{n^2}.\frac{2}{n} + \frac{16}{n^2}.\frac{2}{n} + \frac{36}{n^2}.\frac{2}{n} + \ldots + 4.\frac{2}{n}$$

$$= \frac{8}{n^3}.(1 + 4 + 9 + \ldots + n^2)$$

$$= \frac{8}{n^3}.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{4}{3}.\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \text{ olur.}$$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}.\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{1.n^2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}.\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

6)
$$\int_0^1 x^3\,dx$$

belirli integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

6) $f(x) = x^3$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında sürekli olduğundan, bu aralıkta belirli integrali vardır. $[0, 1]$ aralığını, uzunluğu $\Delta x = \frac{1}{n}$ olan n eşit aralığa bölersek bu alt aralıklar,

$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ olur.

$z_1 = \frac{1}{n}, z_2 = \frac{2}{n}, z_3 = \frac{3}{n}, \ldots, z_n = 1$ için

Riemann toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \frac{1}{n^3}.\frac{1}{n} + \frac{8}{n^3}.\frac{1}{n} + \frac{27}{n^3}.\frac{1}{n} + \ldots + 1.\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^4}.(1 + 8 + 27 + \ldots + n^3)$$

$$= \frac{1}{n^4}.\left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$$

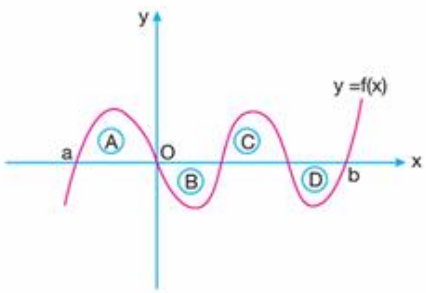
$$= \frac{1}{4}.\frac{n^2+2n+1}{n^2} \text{ olur.}$$

$$\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i).\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}.\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1.n^2+2n+1}{1.n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

7)

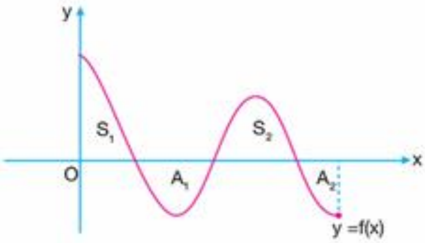


Yukarıdaki şekilde A , B , C ve D bölgeleri Riemann toplamlarını ifade ettiğine göre, $f(x)$ fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan net alanı bulunuz.

ÇÖZÜM:

7) [a, b] aralığında f (x) fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan alanın gerçek değeri, pozitif bölgelerin Riemann toplamından, negatif bölgelerin Riemann toplamı çıkarılarak bulunur.

Buna göre, bu alan değerine net alan denir.



Şekildeki S_1, S_2, A_1 ve A_2 bölgeleri Riemann toplamlarını ifade ettiğine göre f(x) fonksiyonunun x ekseni ile arasında kalan alan

$S_1 - A_1 + S_2 - A_2$

şeklinde bulunur.

O halde soruda verilen f(x) fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan alan;

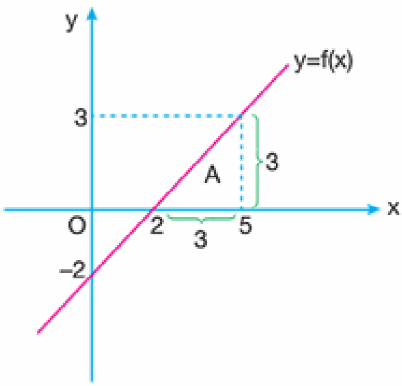
$A - B + C - D = (A + C) - (B + D)$

olarak bulunur.

8) $f(x) = x - 2$ fonksiyonunun [2, 5] aralığında x ekseni ile arasında kalan alanı bulunuz ve bu değeri belirli integral yardımıyla ifade ediniz.

ÇÖZÜM:

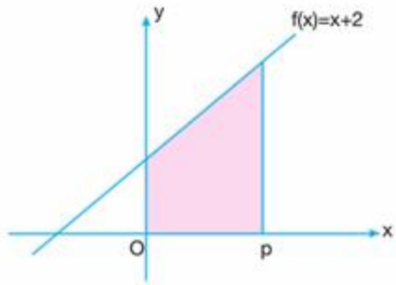
8)



$$A = \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

$$\int_2^5 (x-2)dx = \frac{9}{2} \text{ bulunur.}$$

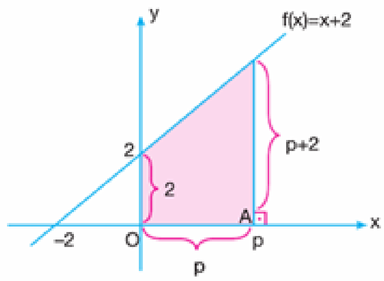
9)



Yukarıdaki şekilde verilen taralı bölgenin alanını veren fonksiyonun türevi ile $f(x) = x + 2$ fonksiyonunu ilişkilendiriniz.

ÇÖZÜM:

9)



Taralı bölgenin alanını A(p) ile gösterelim. O halde,

$$A(p) = \frac{2+p+2}{2}.p$$

$$= \frac{p^2}{2} + 2p \text{ olur.}$$

$$A(p) = \frac{p^2}{2} + 2p \Rightarrow A(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$$

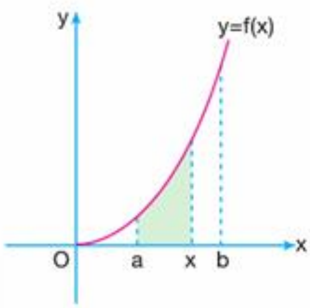
$$\Rightarrow A'(x) = \frac{2x}{2} + 2$$

$$= x + 2$$

$$= f(x) \text{ olur.}$$

Sonuç olarak, $A'(x) = f(x)$ elde edilir.

10)



Yandaki grafikte taralı bölgenin alanını veren F (x) fonksiyonu $F(x) = x^5 + 2x^3 + 7$ şeklinde verilmiştir.

Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

10) İntegralin I. Temel Teoremine göre,

$$F'(x) = f(x) \text{ tir.}$$

Buna göre, $f(x) = F'(x) = 5x^4 + 6x^2$ dir.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \Rightarrow \int (5x^4 + 6x^2)\,dx = x^5 + 2x^3 + c$$

şeklinde yazılır.

11) $F(x) = 3x$

$F'(x) = f(x) = 3$

eşitlikleri veriliyor. Bu eşitlikleri kullanarak,

$$\int_2^5 3.dx$$

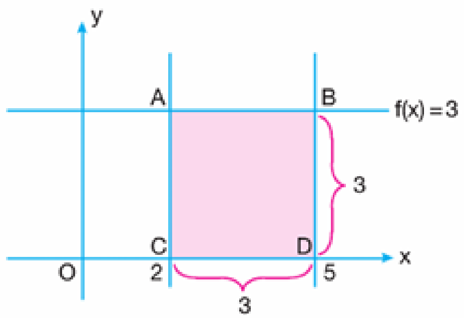
belirli integralini hesaplayınız ve elde ettiğiniz sonucu $f(x) = 3$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni ile arasında kalan alanının, $x = 2$ ve $x = 5$ doğrularıyla sınırlı kısmı ile karşılaştırınız.

ÇÖZÜM:

11) $$\int_2^5 3.dx = \int_2^5 f(x).dx = F(5) - F(2)$$

$$= 3.5 - 3.2$$

$$= 15 - 6 = 9 \text{ olur.}$$



$A(ABCD) = 3.3 = 9$ br^2 olup

$$\int_2^5 3.dx = A(ABCD) \text{ olduğu görülür.}$$

12) **a.** $g(x) = x^2 - 4$

b. $h(x) = x^2 + 9$

c. $k(x) = x^2$

fonksiyonlarının türevlerini bulunuz. Türevi $4x$ olan fonksiyonların denklemini belirtiniz.

ÇÖZÜM:

12) Türev konusunu anlatırken cevabını aradığımız soru "$y = f(x)$ fonksiyonunun türevi nedir?" idi.

Benzer şekilde sorulması gereken sorulardan biri ise $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde,

"Hangi fonksiyonun türevi $y = f(x)$ tir?" olacaktır.

$f(x) = 2x$ fonksiyonunu düşünecek olursak, soruda verilen $g(x) = x^2 - 4$, $h(x) = x^2 + 9$, ve $k(x) = x^2$ fonksiyonlarının üçünün de türevi $2x$ tir. Ayrıca türevi $2x$ olan fonksiyonlar sadece bu fonksiyonlardan ibaret olmayıp türevi $2x$ olan sonsuz sayıda fonksiyon yazılabilir.

Bu fonksiyonları c bir sabit sayı olmak üzere,

$$F(x) = x^2 + c$$

şeklinde gösterebiliriz.

Buradaki $F(x) = x^2 + c$ fonksiyonlarına, $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ilkelleri veya belirsiz integrali adı verilir.

Bu durumda, türevi $4x$ olan fonksiyonlar da

$$t(x) = 2x^2 + c$$

şeklinde yazılabilir.

13) Aşağıda verilen belirli integralleri hesaplayınız.

a. $\int_5^5 (x^4 + x)\,dx$

b. $\int_3^4 (x^3 - x)dx + \int_4^3 (x^3 - x)dx$

ÇÖZÜM:

13)

a. $\int_{5}^{5} (x^4+x)\,dx$

integralinde alt ve üst sınırlar birbirine eşit olduğundan integralin değeri sıfırdır.

$$\Rightarrow \int_{5}^{5} (x^4+x)dx = 0 \text{ olur.}$$

b. $\int_{3}^{4} (x^3-x)dx = -\int_{4}^{3} (x^3-x)dx$ olduğundan,

$\int_{3}^{4} (x^3-x)dx + \int_{4}^{3} (x^3-x)dx$ ifadesi

$$-\int_{4}^{3} (x^3-x)dx + \int_{4}^{3} (x^3-x)dx = 0 \text{ bulunur.}$$

14)

$$\int_{2}^{4} f(x)\,dx = 9$$

$$\int_{4}^{9} f(x)\,dx = 12$$

olduğuna göre, $\int_{2}^{9} f(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

14) $$\int_{2}^{9} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{2}^{4} f(x)\,dx}_{9} + \underbrace{\int_{4}^{9} f(x)\,dx}_{12}$$

$$= 9 + 12 = 21 \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow x=-7 \text{ ve } x=1 \text{ dir.}$$

15) f(x), [−3, 9] aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_{-3}^{9} 4.f(x)\,dx = 28$$

olduğuna göre, $\int_{-3}^{9} 7.f(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

15) $$\int_{-3}^{9} 4.f(x)\,dx = 28 \Rightarrow 4.\int_{-3}^{9} f(x)\,dx = 28$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{9} f(x)\,dx = 7 \text{ dir.}$$

O halde,

$$\int_{-3}^{9} 7.f(x)\,dx = 7.\underbrace{\int_{-3}^{9} f(x)\,dx}_{7} = 7.7 = 49 \text{ bulunur.}$$

16) f(x) ve g(x), [0, 2] aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = -1$$

$$\int_{0}^{2} g(x)\,dx = 4$$

olduğuna göre, $\int_{0}^{2} [4.f(x)-3.g(x)]\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

16) $$\int_{0}^{2} [4.f(x)-3.g(x)]\,dx = \int_{0}^{2} 4.f(x)\,dx - \int_{0}^{2} 3.g(x)\,dx$$

$$= 4.\underbrace{\int_{0}^{2} f(x)\,dx}_{-1} - 3.\underbrace{\int_{0}^{2} g(x)\,dx}_{4}$$

$$= 4.(-1) - 3.4 = -4 - 12$$

$$= -16 \text{ bulunur.}$$

17) Aşağıda verilen integrallerin eşitlerini bulunuz.

a. $\int 4\,dx$

b. $\int -\sqrt{3}\,dx$

c. $\int x^3\,dx$

d. $\int \sqrt{x}\,dx$

ÇÖZÜM:

17) c bir gerçek sayı olmak üzere,

a. $\int 4\,dx = 4x + c$

b. $\int -\sqrt{3}\,dx = -\sqrt{3}\,x + c$

c. $\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} + c = \dfrac{x^4}{4} + c$

d. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$

$= \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

bulunur.

18)

$$\int (x^2 + \sqrt{x} - 2)\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

18)
$$\int (x^2 + \sqrt{x} - 2)\,dx = \int (x^2 + x^{\frac{1}{2}} - 2.x^0)\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x^1 + c$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + c \text{ olur.}$$

19)

$$\int \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

19)
$$\int \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= x + \ln|x| + \ln|x-1| + c$$
$$= x + \ln|x.(x-1)| + c$$
$$= x + \ln|x^2 - x| + c \text{ olur.}$$

20) Aşağıda verilen integrallerin eşitlerini bulunuz.

a. $\int e^{3x}\,dx$

b. $\int \dfrac{1}{e^x}\,dx$

c. $\int \left(\dfrac{1}{2}\right)^x dx$

d. $\int 3^{2x}\,dx$

ÇÖZÜM:

20)

a. $\int e^{3x}\,dx = \dfrac{e^{3x}}{3} + c$ dir.

b. $\int \dfrac{1}{e^x}\,dx = \int e^{-x}\,dx = \dfrac{e^{-x}}{-1} + c = -e^{-x} + c$ dir.

c. $\int \left(\dfrac{1}{2}\right)^x dx = \int 2^{-x}\,dx$

$= \dfrac{2^{-x}}{-\ln 2} + c = \dfrac{-1}{\ln 2.2^x} + c$ dir.

d. $\int 3^{2x}\,dx = \dfrac{3^{2x}}{2.\ln 3} + c$ dir.

21)

$$\int (e^{x+1} + 2^x)\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

21)
$$\int (e^{x+1} + 2^x)\,dx = e^{x+1} + \frac{2^x}{\ln 2} + c \text{ olur.}$$

22) Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

a. $\int \sin x\,dx$

b. $\int \cos x\,dx$

c. $\int \sin 5x\,dx$

d. $\int \cos 3x\,dx$

ÇÖZÜM:

22) **a.** $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ dir.

b. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ dir.

c. $\int \sin 5x\,dx = -\dfrac{\cos 5x}{5} + c$ dir.

d. $\int \cos 3x\,dx = \dfrac{\sin 3x}{3} + c$ dir.

23) $$\int 2.\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx + \int 2\sin x\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

23) $$\int 2.\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx + \int 2\sin x\,dx$$

$$= 2.\int \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx + 2.\int \sin x\,dx$$

$$= 2.\int \cos\left(2.\frac{x}{2}\right)dx + 2.\int \sin x\,dx$$

$$= 2.\left[\int (\cos x + \sin x)dx\right]$$

$$= 2.(\sin x - \cos x) + c \text{ olur.}$$

24) Aşağıda verilen integrallerin eşitlerini bulunuz.

a. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$

b. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$

c. $\int \sec^2 3x\,dx$

d. $\int \mathrm{cosec}^2 4x\,dx$

ÇÖZÜM:

24) **a.** $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$ dir.

b. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$ dir.

c. $\int \sec^2 3x\,dx = \dfrac{\tan 3x}{3} + c$ dir.

d. $\int \mathrm{cosec}^2 4x\,dx = -\dfrac{\cot 4x}{4} + c$ dir.

25) $$\int \left(\frac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

25) Buna göre, $\int \left(\dfrac{1+\sin^3 x}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\sin^3 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= -\cot x - \cos x + \tan x + c$$

$$= \tan x - \cot x - \cos x + c \text{ olur.}$$

26) $$\frac{d}{dx}\int \cos x\,dx + \int d(\tan^2 x)$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

26) $\dfrac{d}{dx}\int \cos x\,dx = \cos x$

$\int d(\tan^2 x) = \tan^2 x + c$ dir.

Buna göre,

$\dfrac{d}{dx}\int \cos x\,dx + \int d(\tan^2 x) = \cos x + \tan^2 x + c$ olur.

27) $$\int x^2.f(x)dx = 3x^4 - 5x^3 + 6$$

olduğuna göre, $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

27) $\int x^2.f(x)dx = 3x^4 - 5x^3 + 6$ ifadesinde her iki tarafın türevini alalım.

Bu durumda, $x^2.f(x) = 12x^3 - 15x^2$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{12x^3 - 15x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 12x - 15 \text{ olur.}$$

28) $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 dir.

$f'(x) = 2x + a$ olduğuna göre, $f(-2)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

28) $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $(-1, 1)$ noktasındaki teğetinin eğimi 2 olduğuna göre,

$f(-1) = 1$ ve $m_T = 2$ yani $f'(-1) = 2$ dir.

$$f'(-1) = 2 \Rightarrow 2 = 2.(-1) + a \Rightarrow a = 4 \text{ tür.}$$

$$f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (2x+4)dx$$

$$\Rightarrow f(x) + c_1 = x^2 + 4x + c_2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 4x + c \quad (c_2 - c_1 = c)$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = (-1)^2 + 4.(-1) + c$$

$$\Rightarrow c = 4 \text{ tür.}$$

Bu durumda, $f(x) = x^2 + 4x + 4$

$$\Rightarrow f(-2) = 4 - 8 + 4 = 0 \text{ bulunur.}$$

29) $$\int (2x-1).(x^2 - x + 3)^4 dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

29) $x^2 - x + 3 = u$ alınırsa, (parantez içine u denir)

$(2x-1)dx = du$ olur.

Buna göre,

$$\int (2x-1).(x^2-x+3)^4 dx = \int u^4 du$$

$$= \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{(x^2-x+3)^5}{5} + c \text{ dir.}$$

30) $$\int (2x-7).\sqrt{x^2 - 7x + 5}\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

30) $x^2 - 7x + 5 = u$ alınırsa, (kökün içine u denir)

$(2x-7)dx = du$ olur.

$$\int (2x-7).\sqrt{x^2-7x+5}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}.u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-7x+5)^3} + c$$

31) $$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

31) $x^2 + 3x - 5 = u$ alınırsa, (paydaya u denir.)

$(2x+3)dx = du$ olur.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|x^2 + 3x - 5| + c \text{ olur.}$$

32) $$\int e^{\sin x + 1}.\cos x\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

32) $\sin x + 1 = u$ alınırsa, (üsse u denir.)

$\cos x\, dx = du$ olur.

$$\int e^{\sin x + 1} . \cos x\, dx = \int e^{u} du$$
$$= e^{u} + c$$
$$= e^{\sin x + 1} + c \text{ bulunur.}$$

33) $$\int \sin(3x - 1) dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

33) $3x - 1 = u$ alınırsa,

$3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$ olur.

$$\int \frac{1}{3} \sin u\, du = \frac{1}{3} \int \sin u\, du = -\frac{1}{3} \cos u + c$$
$$= -\frac{1}{3} . \cos(3x - 1) + c$$

bulunur.

34) $$\int (\cot x + \cot^3 x) dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

34) $$\int (\cot x + \cot^3 x) dx = \int \cot x . (1 + \cot^2 x) dx$$

$\cot x = u$ alınırsa,

$-(1 + \cot^2 x) dx = du$ olur.

$$\int \cot x . (1 + \cot^2 x) dx = \int u . (-du)$$
$$= -\int u du$$
$$= -\frac{u^2}{2} + c$$
$$= -\frac{\cot^2 x}{2} + c \text{ bulunur.}$$

35) $$\int \sin^2 x dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

35) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ise,

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ olur.

$\sin 2x = 2 \sin x . \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$
$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

bulunur.

36) $$\int 64 \sin^2 x . \cos^2 x dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

36) $\int (\sin x)^{2n} . (\cos x)^{2m} dx$ şeklindeki integrallerde,

$n, m \in N$ olmak üzere,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

yardımcı formülleri kullanılır.

$$64 \sin^2 x . \cos^2 x = 16(2 . \sin x . \cos x)^2$$
$$= 16(\sin 2x)^2$$
$$= 16 \sin^2 2x$$
$$= 16\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)$$
$$= 8 - 8\cos 4x$$

$$\int 64 \sin^2 x . \cos^2 x dx = \int (8 - 8\cos 4x) dx$$
$$= 8x - 2\sin 4x + c$$

bulunur.

37) $$\int \sin^3 x \,.\, \cos^5 x dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

37) $m, n \in Z$ olmak üzere,

$\int (\sin x)^{2n+1} . (\cos x)^{2m+1} dx$ integralinde kuvvetinin mutlak değeri küçük olan ifade,

$$(\sin x)^{2n+1} = (\sin x)^{2n} . \sin x \text{ veya}$$

$$(\cos x)^{2m+1} = (\cos x)^{2m} . \cos x$$

şeklinde yazılarak $\cos x = u$ veya $\sin x = u$ dönüşümü yapılır.

$$\int \sin^3 x . \cos^5 x dx = \int \cos^5 x . \sin^2 x . \sin x dx$$

$$= \int \cos^5 x . (1 - \cos^2 x) . \sin x dx$$

$\cos x = u$

$-\sin x dx = du$

$$= -\int u^5 . (1 - u^2) du$$

$$= \int (u^7 - u^5) du = \frac{1}{8} u^8 - \frac{1}{6} u^6 + c$$

$$= \frac{1}{8} \cos^8 x - \frac{1}{6} \cos^6 x + c$$

bulunur.

38) $$\int x \sin x \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

38) $\int x \sin x \, dx$ integralinde,

$x = u$ ve $\sin x dx = dv$ olsun.

$x = u \Rightarrow dx = du$ olur.

$\sin x dx = dv \Rightarrow \int \sin x \, dx = \int dv \Rightarrow -\cos x = v$ olur.

Bunları formülde yerlerine yazalım.

$$\int x \sin x \, dx = x . (-\cos x) - \int -\cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c \text{ bulunur.}$$

39) $$\int (x^2 - x) \cos x \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

39) Bu tip integrallerde aşağıdaki İntegrasyon metodunu kullanabiliriz.

$\int (x^2 - x) \cos x \, dx$ integralinde

	Türevi alınacak	İntegrali alınacak
+	$x^2 - x$	$\cos x$
–	$2x - 1$	$\sin x$
+	2	$-\cos x$
	0	$-\sin x$

$$= \int (x^2 - x) . \cos x \, dx$$

$$= (x^2 - x) . \sin x - (2x - 1) . (-\cos x) + 2(-\sin x) + c$$

$$= (x^2 - x - 2) \sin x + (2x - 1) \cos x + c \text{ bulunur.}$$

40) $$\int e^x \sin x \, dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

40) $A = \int e^x \sin x \, dx$ olsun.

$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$ olur.

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$ olur.

$$A = \int e^x \sin x \, dx$$
$$= e^x \sin x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{\text{Burada tekrar kısmi integrasyon uygulanır.}}$$

$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$$A = e^x \sin x - \left[e^x . \cos x - \int e^x(-\sin x)dx\right]$$

$$A = e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{A}$$

$$2A = e^x \sin x - e^x \cos x + c_1 \qquad \left(\frac{c_1}{2} = c\right)$$

$$A = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x + c \text{ bulunur.}$$

41) $$\int -\frac{5}{x^2 - 3x - 4} dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

41) $$-\frac{5}{x^2 - 3x - 4} = \underset{(x-4)}{\frac{A}{x+1}} + \underset{(x+1)}{\frac{B}{x-4}}$$

$$-5 = A(x-4) + B(x+1)$$

$x = 4$ için, $-5 = B.5 \Rightarrow B = -1$

$x = -1$ için, $-5 = A.(-5) \Rightarrow A = 1$ bulunur.

$$\int \frac{-5}{x^2 - 3x - 4} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-4}\right) dx$$
$$= \ln|x+1| - \ln|x-4| + c$$
$$= \ln\left|\frac{x+1}{x-4}\right| + c \text{ bulunur.}$$

42) $$\int \frac{x^2 - x}{x+1} dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

42)
$$\begin{array}{rr|l} & x^2 - x & x+1 \\ - & x^2 + x & \overline{x-2} \\ \hline & -2x & \\ - & -2x - 2 & \\ \hline & 2 & \end{array}$$

$\dfrac{x^2 - x}{x+1} = x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{x^2 - x}{x+1} dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x+1}\right) dx$$
$$= \int (x-2)dx + 2\int \frac{1}{x+1} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + 2\ln|x+1| + c \text{ bulunur.}$$

43) $$\int \frac{1}{(x-1).(x-2)^2} dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

43) $\dfrac{1}{(x-1).(x-2)^2} = \dfrac{A}{\underset{(x-2)^2}{x-1}} + \dfrac{B}{\underset{(x-2).(x-1)}{x-2}} + \dfrac{C}{\underset{(x-1)}{(x-2)^2}}$

$1 = (A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + 4A + 2B - C$ ise

$A + B = 0$, $-4A - 3B + C = 0$, $4A + 2B - C = 1$ dir.

Buradan, $A = 1$, $B = -1$ ve $C = 1$ bulunur.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right| - \frac{1}{x-2} + c \text{ bulunur.}$$

Çözüm kümesi, $Ç.K. = \left\{\frac{1}{e}, e^2\right\}$

44) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

44) $\displaystyle\int \frac{1}{\underset{(1+\cos x)}{1-\cos x}}dx = \int \frac{\cos x + 1}{1-\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{\cos x + 1}{\sin^2 x}dx$$

$\left(\begin{matrix}\sin x = u \\ \cos x dx = du\end{matrix}\right)$ $\displaystyle = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$$= \int \frac{du}{u^2} + (-\cot x) + c_1$$

$$= \frac{-1}{\sin x} + c_2 - \cot x + c_1 \quad (c_1 + c_2 = c)$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \cot x + c \text{ bulunur.}$$

45) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x dx$ integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

45) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{1}{\underset{(\sin x)}{\sin x}}dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx$$

$\left(\begin{matrix}\cos x = u \\ -\sin x dx = du\end{matrix}\right)$ $\displaystyle = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$$= \int \frac{-du}{1-u^2}$$

$$= \int \frac{du}{u^2-1} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} - \frac{\frac{1}{2}}{u+1}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}.\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + c \text{ bulunur.}$$

46) $$\int \frac{\sqrt{2x-1}+2}{\sqrt[3]{2x-1}}dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM:

46) $\sqrt[m]{ax+b}$ ve $\sqrt[n]{ax+b}$ köklü ifadelerini içeren fonksiyonların integrallerini hesaplamak için

OKEK (m,n) = k olmak üzere,

$ax + b = u^k$ değişken değiştirmesi yapılır.

$m = 2$ ve $n = 3$ ise, OKEK $(2,3) = 6$ olduğundan,

$2x - 1 = u^6$ dönüşümü yapılır.

$2x - 1 = u^6 \Rightarrow 2dx = 6u^5 du \Rightarrow dx = 3u^5 du$

$$\int \frac{\sqrt{2x-1}+2}{\sqrt[3]{2x-1}}dx = \int \frac{\sqrt{u^6}+2}{\sqrt[3]{u^6}}.3u^5 du$$

$$= 3\int \frac{u^3+2}{u^2}.u^5 du$$

$$= 3\int (u^3+2).u^3 du$$

$$= 3\int (u^6 + 2u^3)du$$

$$= 3\left(\frac{u^7}{7} + \frac{2u^4}{4}\right) + c$$

$\left(u^6 = 2x-1 \Rightarrow u = (2x-1)^{\frac{1}{6}}\right)$

$$= \frac{3}{7}(2x-1)^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{2}{3}} + c$$

bulunur.