

## INTEGRAL

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $y = f(x)$  fonksiyonu türeulenebilen bir fonksiyon olsun.

$f'(x) dx$  ifadesine  $f$  fonksiyonunun **diferansiyeli** denir.

Diferansiyel  $dy = d(f(x)) = f'(x) dx$  bıqımlınde ifade edilir.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x) dx$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

1)  $\int x f(x) dx = x^2 + x + C$  olduğuna göre  $f(x)$  fonksiyonu nedir?

$$x f(x) dx = (2x+1) dx$$

$$x f(x) = 2x+1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

2)  $\int f(x+1) dx = x^2 + 2\ln x + e^{x-3} + 4$  olduğuna göre  $f(4)$  in değeri nedir?

$$f(x+1) dx = (2x + \frac{1}{x} + e^{x-3}) dx$$

$$f(x+1) = 2x + \frac{1}{x} + e^{x-3}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 6 + \frac{1}{3} + 1 \\ &= 7 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

## • Temel integral formülleri:

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int 3 dx = 3x + C$$

$$\int -dx = -x + C$$

$$\int \frac{3}{4} dx = \frac{3x}{4} + C$$

$$\int 2 du = 2u + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + C$$

$$\int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3} &= \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2x^2} + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int (4x-3) dx = \int 4x dx - \int 3 dx = \frac{4x^2}{2} - 3x + C$$

$$\begin{aligned} \int (6x^2 + 4x + 5) dx &= 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C \\ &= 2x^3 + 2x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \cdot \ln|x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{du}{u+3} = \ln|u+3| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

$$\int e^{x+1} dx = e^{x+1} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + c$$

$$\int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$\int \sin(4x+1) dx = -\frac{\cos(4x+1)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x) dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\cot^2 x) dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

3)  $f: R \rightarrow R$  fonksiyonu her noktada türevli  
ve  $f'(x) = x+1$   
 $f(2) = -1$   
olduğuna göre  $f(0)$  nedir?

$$f'(x) = x+1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$f(2) = 2+2+c = -1$$

$$4+c = -1 \Rightarrow c = -5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 5 \Rightarrow f(0) = -5$$

4)  $f'(x) = 3x^2 + 2x$  ve  $f(1) = 3$  olduğuna göre  
 $f(-1)$  in değeri nedir?

$$f(x) = x^3 + x^2 + c \Rightarrow 1+1+c=3$$

$$c=1$$

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow f(-1) = -1+1+1 \Rightarrow f(-1) = 1$$

5)  $\int (\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{x} + 3x+1) dx$  nedir?

$$= \int x^{1/3} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int 3x dx + \int 1 dx$$

$$= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \ln|x| + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + \ln|x| + \frac{3x^2}{2} + x + c$$

6)  $\int \left( \frac{4}{x+1} + \sin x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$  nedir?

$$= 4 \cdot \ln|x+1| - \cos x + \arctan x + C$$

7)  $\int \left( \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right) dx$  nedir?

$$= \int \left( \frac{\sqrt{x^2}}{x} \right) dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C \\ &= 2\sqrt{x} + \ln|x| + C \end{aligned}$$

8)  $\int (3 + \tan^2 x) dx$  nedir?

$$\int (1 + \tan^2 x) dx + \int 2 dx = \tan x + 2x + C$$

9)  $\int \tan^2 x dx$  nedir?

$$\begin{aligned} \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx &= \int (1 + \tan^2 x) dx - \int 1 dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

10)  $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$  nedir?

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$$

11)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$  nedir?

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx \\ &= \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

### • İntegral olma yöntemleri:

- Değişken değiştirmeye yöntemi
- Basit kesirlerde ayırma yöntemi
- Kısmi integrasyon yöntemi

• **Değişken değiştirmeye yöntemi:** Hangisinin türüne dğerini ya da dğerinin genişlestirmiş halini veriyorsa ona u diyorum ve türüni alarak yerine yazıyorum.

12)  $\int f(x) \cdot f'(x) dx$  nedir?

$$f(x) = u \Rightarrow f'(x) dx = du$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{f(x)}_u \cdot \underbrace{f'(x) dx}_du &= \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + C \\ &= \frac{[f(x)]^2}{2} + C \end{aligned}$$

13)  $\int -\cos(\cos^2 x) \cdot \sin 2x dx$  nedir?

$$\begin{aligned} \cos^2 x = u &\Rightarrow 2 \cdot \cos x \cdot -\sin x dx = du \\ &-\sin 2x dx = du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos(\cos^2 x)}_u \cdot \underbrace{-\sin 2x dx}_du &= \int \cos u du \\ &= \sin u + C \\ &= \sin(\cos^2 x) + C \end{aligned}$$

14)  $\int 3 \cdot (x^2 - 3x + 1)^2 \cdot (2x-3) dx$  nedir?

$$x^2 - 3x + 1 = u \Rightarrow (2x-3) dx = du$$

$$\int 3 \cdot \underbrace{(x^2 - 3x + 1)^2}_u \cdot \underbrace{(2x-3) dx}_du$$

$$= \int 3u^2 du = u^3 + C = (x^2 - 3x + 1)^3 + C$$

15)  $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$  nedir?

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\int \underbrace{\sin^2 x}_u \cdot \underbrace{\cos x dx}_du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

16)  $\int \tan x \, dx$  nedir?

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \quad \text{ve} \quad \cos x = u \\ -\sin x \, dx = du \\ \sin x \, dx = -du$$

$$\int -\frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

17)  $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$  nedir?

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x \, dx = du \\ \sin x \, dx = -du$$

$$\int -\frac{du}{u^2} = \int -u^{-2} \, du = -\frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{u} + C \\ = \frac{1}{\cos x} + C$$

18)  $\int \left( \frac{2x}{3x^2+1} \right) \, dx$  nedir?

$$3x^2+1 = u \Rightarrow 6x \, dx = du \Rightarrow 2x = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{u} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln|u| + C \\ = \frac{1}{3} \ln|3x^2+1| + C$$

19)  $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$  integroli nedir?

$$\ln x = u \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right) dx = du$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} \, du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

20)  $\int (2x-3) \cdot (x^2-3x+2)^4 \, dx$  nedir?

$$x^2-3x+2 = u \Rightarrow (2x-3) \, dx = du$$

$$\int \underbrace{(2x-3) \, dx}_{du} \cdot \underbrace{(x^2-3x+2)^4}_{u^4} = \int u^4 \, du \\ = \frac{u^5}{5} + C \\ = \frac{(x^2-3x+2)^5}{5} + C$$

21)  $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$  nedir?

$$x^2+1 = u \Rightarrow 2x \, dx = du \\ x \, dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C \\ = \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

22)  $\int \frac{2 \cdot \arctan x}{1+x^2} \, dx$  nedir?

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = du$$

$$\int 2 \cdot \arctan x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int 2u \, du \\ = u^2 + C = (\arctan x)^2 + C$$

23)  $\int \frac{4}{\cos^2 4x} \, dx$  nedir?

$$4x = u \Rightarrow 4 \, dx = du$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C = \tan 4x + C$$

24)  $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$  nedir?

$$2x = u \Rightarrow 2 \, dx = du$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\frac{\cot u}{2} + C = -\frac{\cot(2x)}{2} + C$$

25)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$  nedir?

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} \quad \text{ve} \quad 3x = u \Rightarrow 3 \, dx = du \\ dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \frac{\frac{du}{3}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u + C \\ = \frac{1}{3} \arcsin 3x + C$$

26)  $\int \frac{2dx}{1+4x^2}$  nedir?

$$\int \frac{2dx}{1+4x^2} = \int \frac{2dx}{1+(2x)^2}$$

$$2x=u \Rightarrow 2dx=du$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C = \arctan(2x) + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a} + C}$$

27)  $\int \frac{dx}{9+x^2}$  nedir?

$$\int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

28)  $\int \frac{dx}{64+x^2}$  nedir?

$$\int \frac{dx}{8^2+x^2} = \frac{1}{8} \arctan \frac{x}{8} + C$$

29)  $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$  nedir?

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+(x+2)^2} &= \frac{1}{1} \cdot \arctan \left( \frac{x+2}{1} \right) + C \\ &= \arctan(x+2) + C \end{aligned}$$

30)  $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$  nedir?

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{25+(x+3)^2} &= \int \frac{dx}{5^2+(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{5} \arctan \left( \frac{x+3}{5} \right) + C \end{aligned}$$

31)  $\int \sin^2 x dx$  nedir?

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

32)  $\int \cos^2 x dx$  nedir?

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int \left( \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$$

33)  $\int \sin^3 x dx$  nedir?

$$\int \sin x \cdot \sin^2 x dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x) dx$$

$$\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$$

$$\sin x dx = -du$$

$$= \int (1-u^2) \cdot -du$$

$$= \int (u^2-1) du = \frac{u^3}{3} - u + C$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

34)  $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$  nedir?

$$\cos 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} \right] + C$$

$$= \frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

• Basit kesirlerde ayırma yöntemi:

Payın derecesi paydanın derecesinden küçük olmalıdır. Değilse polinom bölmesi yapılır. Payda çarpanlarına ayrılıyorsa bu yöntem kullanılır.

Karşımıza gelebilecek durumlar

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{3x+1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

35)  $\int \frac{x+3}{x^2-9x+14} dx$  integralının eşiti nedir?

$$\frac{x+3}{x^2-9x+14} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-2}$$

$$x+3 = A.(x-2) + B.(x-7)$$

$$x=2 \text{ için } 5 = -5B \Rightarrow B = -1$$

$$x=7 \text{ için } 10 = 5A \Rightarrow A = 2$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-9x+14} dx = \int \left( \frac{2}{x-7} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

$$= \int \frac{2dx}{x-7} - \int \frac{dx}{x-2}$$

$$= 2 \ln|x-7| - \ln|x-2| + C$$

36)  $\int \frac{dx}{x^2-1}$  nedir?

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A.(x+1) + B.(x-1)$$

$$x=-1 \text{ için } 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$x=1 \text{ için } 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int \left( \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln|x-1| - \ln|x+1| \right] + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

37)  $\int \frac{5x+2}{x^2-4} dx$  integralının eşiti nedir?

$$\frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$5x+2 = A.(x+2) + B.(x-2)$$

$$x=-2 \text{ için } -8 = -4B \Rightarrow B = 2$$

$$x=2 \text{ için } 12 = 4A \Rightarrow A = 3$$

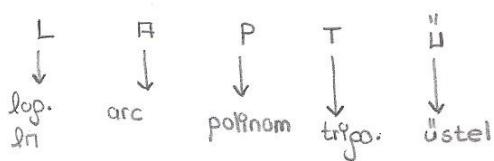
$$\int \frac{5x+2}{x^2-4} dx = \int \left( \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= \int \frac{3}{x-2} dx + \int \frac{2}{x+2} dx$$

$$= 3 \ln|x-2| + 2 \ln|x+2| + C$$

**Kısmi İntegral yöntemi:** Fonksiyon uygun olarak iki parçaya ayrılır. Bu parçalardan birine  $u$  diyerek türev, diğer parçaya  $dx$  ile birlikte  $dv$  diyerek integral alıyoğuz.

"LAPTU" sözcüğünde önce gelene  $u$  diyorum.

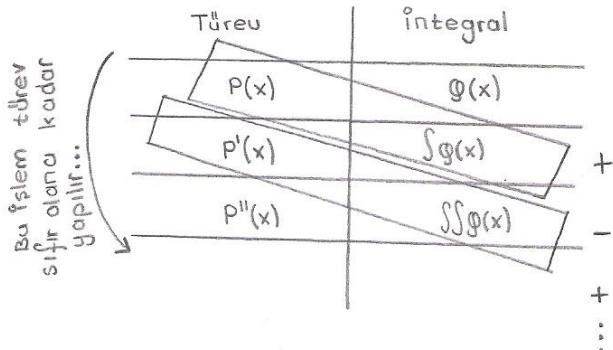


$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Yukarıdaki formül her soru için kullanılabilir.

笑笑 Ama eğer  $u$  dediğimiz ifade polinom fonksiyon ise

$$\int P(x) \cdot Q(x) dx$$



$$= P(x) \cdot \int Q(x) dx - P'(x) \cdot \int \int Q(x) dx + \dots$$

38)  $\int x \cdot e^x dx$  nedir?

$$x=u \Rightarrow dx=du$$

$$e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$$

$$\begin{aligned} u \cdot v - \int v \cdot du &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + c \\ &= e^x \cdot (x-1) + c \end{aligned}$$

yada  $u$  dediğimiz polinom fonksiyon olduğu için

Türev	Integral
x	$e^x$
1	$e^x$
0	$e^x$
	$e^x$

$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

39)  $\int (x+1) \cdot e^x dx$  integralinin eşiti nedir?

Türev	Integral
$x+1$	$e^x$
1	$e^x$
0	$e^x$
	$e^x$

$$\begin{aligned} &= (x+1) \cdot e^x - e^x + c \\ &= e^x \cdot x + c \end{aligned}$$

40)  $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$  integralinin eşiti nedir?

Türev	Integral
$x^2$	$e^{2x}$
$2x$	$\frac{e^{2x}}{2}$
2	$\frac{e^{2x}}{4}$
0	$\frac{e^{2x}}{8}$
	$\frac{e^{2x}}{16}$

$$= x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - 2x \cdot \frac{e^{2x}}{4} + 2 \cdot \frac{e^{2x}}{8} + c$$

$$= e^{2x} \cdot \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + c$$

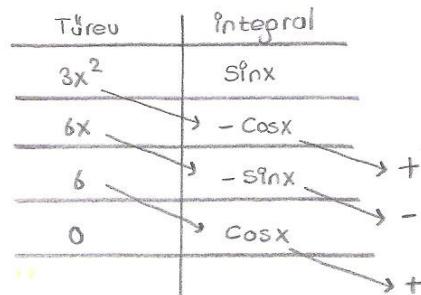
41)  $\int \ln x \, dx$  nedir?

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$\begin{aligned} u \cdot v - \int v \cdot du &= \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \cdot x - \int dx \\ &= \ln x \cdot x - x + C \\ &= x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

42)  $\int 3x^2 \cdot \sin x \, dx$  nedir?



$$\begin{aligned} &= 3x^2 \cdot -\cos x + 6x \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x + C \\ &= -3x^2 \cdot \cos x + 6x \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x + C \end{aligned}$$

43)  $\int \arctan x \, dx$  nedir?

$$\arctan x = u \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = du$$

$$dx = dv \Rightarrow x = v$$

$$\begin{aligned} u \cdot v - \int v \cdot du &= \arctan x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \arctan x \cdot x - \underbrace{\int \frac{x \, dx}{1+x^2}}_{1+x^2=t \Rightarrow 2x \, dx=dt \quad x \, dx=\frac{dt}{2}} \\ &\quad 1+x^2=t \Rightarrow 2x \, dx=dt \\ &\quad x \, dx=\frac{dt}{2} \\ &\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C \end{aligned}$$

$$= \arctan x \cdot x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C$$

### Belli integral:

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

### Özellikler:

- $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

- $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

- $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$

$f(x)$  fonksiyonu  $[-a, a]$  aralığında sürekli olsun.

$f(x)$  tek ise  $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$

$f(x)$  çift ise  $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) \, dx$

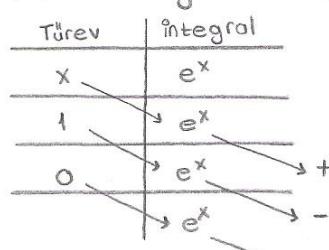
44)  $\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx$  integralının sonucu nedir?

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= (\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

45)  $\int_1^{\ln 3} x \cdot e^x \, dx$  integralının eşiti nedir?



$$\int_1^{\ln 3} x \cdot e^x \, dx = (x \cdot e^x - 1 \cdot e^x) \Big|_1^{\ln 3}$$

$$= e^x \cdot (x-1) \Big|_1^{\ln 3}$$

$$= e^{\ln 3} \cdot (\ln 3 - 1) - e^1 \cdot (1 - 1)$$

$$= 3 \cdot (\ln 3 - 1) \\ = \ln 27 - 3$$

46)  $\int_0^1 e^{3x} dx$  nedir?

$$\int_0^1 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \Big|_0^1 = \frac{e^3}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^3 - 1}{3}$$

47)  $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$  nedir?

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x - 1) dx &= (\tan x - x) \Big|_0^{\pi/4} \\ &= (\tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) - (\tan 0 - 0) \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} - 0 \\ &= \frac{4-\pi}{4} \end{aligned}$$

48)  $\int_0^1 \frac{2x dx}{1+x^2}$  nedir?

$$1+x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u} &\Rightarrow \ln|1+x^2| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_0 = \ln 2 \end{aligned}$$

49)  $\int_0^{\pi/2} \left( \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$  integralının eşiti nedir?

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \underbrace{\sin 90}_1 - \underbrace{\sin 0}_0 = 1$$

50)  $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$  nedir?

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx &= \left( \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \left( \underbrace{\frac{\sin \pi}{4}}_{0} + \frac{\pi}{4} \right) - \left( \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{0} + \frac{0}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

51)  $\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx$  nedir?

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx &= (x - \ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \\ &= (e-1 - \underbrace{\ln|e|}_1) - (0 - \underbrace{\ln 1}_0) \\ &= e-2 \end{aligned}$$

☺ İntegral sorularında bize yapılacak dönenşümü yererek oluşan integrali sorulur. Bu durumda yapmamız gereken yapacağımız dönenşüm  $\neq$  cinsindense integralde her şeyi  $t$  ye göre değiştirmeliyiz.

52)  $\int_4^{25} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$  integralinde  $u=\sqrt{x}$  dönenşümü yapılrsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$$x=4 \Rightarrow u=2$$

$$x=25 \Rightarrow u=5$$

- sonra  $u=\sqrt{x}$  in türevini alalım;

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$$

$$\int_2^5 \frac{1+u}{1-u} \cdot 2u du$$
 integrali elde edilir.

53)  $\int_0^{\ln 3} (e^{3x} - e^x) dx$  integralinde  $e^x=t$  dönenşümü yapılrsa ne elde edilir?

- önce sınırları değiştirelim;

$$x=0 \text{ için } t=1$$

$$x=\ln 3 \text{ için } t=3$$

- sonra  $e^x=t$  in türevini alalım;

$$e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int_1^3 (t^3 - t) \cdot \frac{dt}{t} = \int_1^3 (t^2 - 1) dt \text{ elde edilir.}$$

54)  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  integralinde  $x=2\sin t$  dönüşümü  
yapılırsa ne elde edilir?

- Önce sınırları değiştirelim;

$$x=0 \text{ için } t=0$$

$$x=2 \text{ için } t=\pi/2$$

- sonra  $x=2\sin t$ ının türevini alalım;

$$dx = 2\cos t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{4-4\sin^2 t}}_{2\cos t} \cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt \text{ elde edilir.}$$

55)  $\int (\arcsin x)^2 dx$  integralinde  $u = \arcsin x$   
dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

$$- u = \arcsin x \Rightarrow \sin u = x \text{ (türevi alırsak)}$$

$$\cos u du = dx$$

$$= \int u^2 \cos u du \text{ elde edilir.}$$

56)  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin(\arccos x) dx$  integralinde  $t = \arccos x$   
dönüşümü yapılırsa ne elde edilir?

- Önce sınırları değiştirelim;

$$t = \arccos x \Rightarrow x = \cos t$$

$$x=0 \text{ için } t=\frac{\pi}{2}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ için } t=\frac{\pi}{4}$$

- sonra  $x = \cos t$ ının türevini alalım;

$$dx = -\sin t dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cdot -\sin t dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} -\sin^2 t dt \text{ elde edilir.}$$

😊 Mutlak değer fonksiyonun integrali alınır-  
ken kritik noktaya göre parçalanarak  
işlem yapılır.

57)  $\int_{-1}^1 |x| dx$  nedir?

$$= \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= -\left[\frac{0}{2} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{0}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

58)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin x - \frac{1}{2}\right| dx$  nedir?

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ kritik noktası.}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin x + \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \left(\cos x + \frac{x}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\cos x - \frac{x}{2}\right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left(\cos 0 + \frac{\pi}{12}\right) - \left(\cos 0 + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$$

59)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |2x-1| dx$  nedir?

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ kritik noktası.}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2x+1) dx = (-x^2+x) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

- Integral işaretinin altında türüm alınır.

$$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$h(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

60)  $f(x) = \int_1^{\ln x} e^{t^2} dt$  ise  $f'(e)$  nin değeri nedir?

$$f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} - e^1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(e) = e \cdot \frac{1}{e} \Rightarrow f'(e) = 1$$

61)  $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^3}{t^2+2} dt$  ise  $F'(1)$  nedir?

$$F'(x) = \left( \frac{x\sqrt{x}}{x+2} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3} \cdot 0$$

$$F'(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

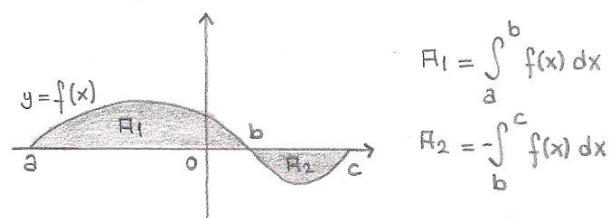
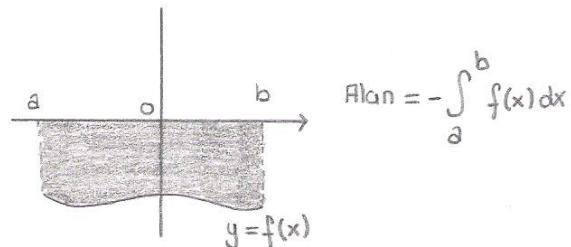
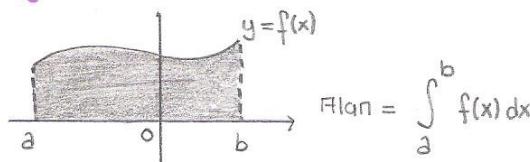
62)  $f(x) = \int_{x+1}^{e^x} \ln t dt$  olarak veriliyor. Buna göre  $f'(4)$  nedir?

$$f'(x) = \ln e^x \cdot e^x - \ln(x+1) \cdot 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = x \cdot e^x - \ln(x+1)$$

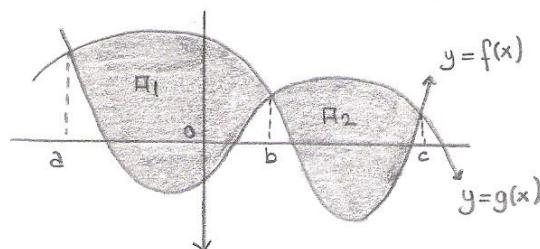
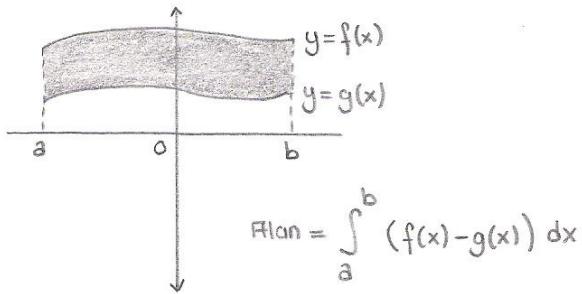
$$f'(4) = 4 \cdot e^4 - \ln 5$$

### İntegralde Alan:

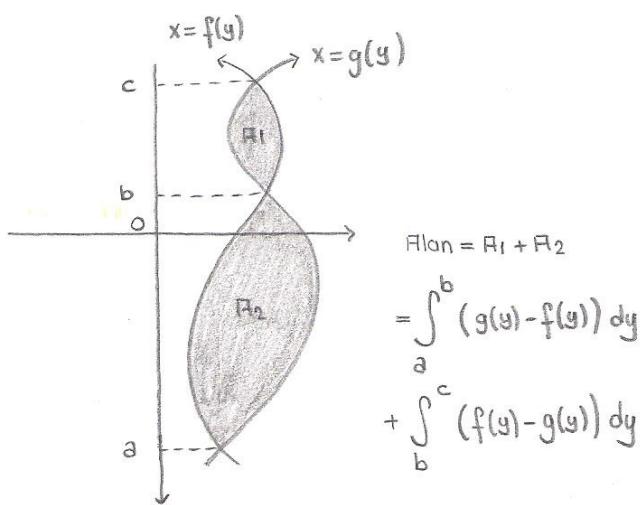
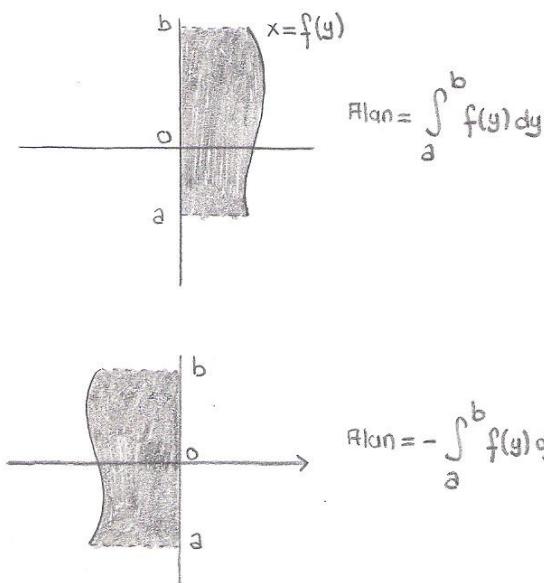


$$\cdot \int_a^c f(x) dx = A_1 - A_2$$

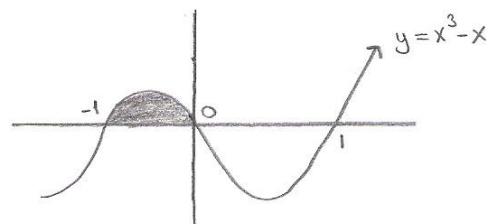
$$\cdot \int_a^c |f(x)| dx = A_1 + A_2$$



$$\text{Alan} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx + \int_b^c (g(x) - f(x)) dx$$

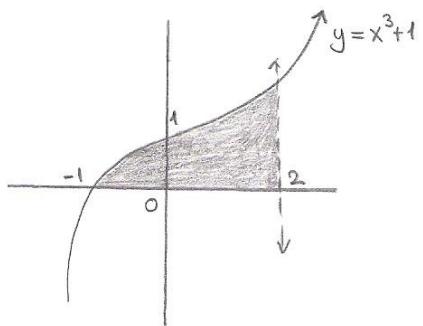


63)  $y=x^3-x$  eğrisi ile oxisler ekseninin sınırladığı alanlardan üst taraftakının değeri nedir?



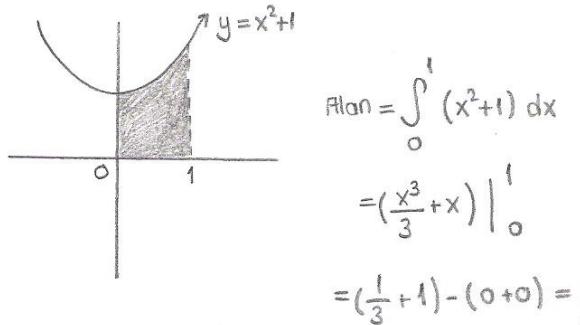
$$\begin{aligned}\text{Alan} &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= 0 - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

64)  $y=x^3+1$  eğrisi,  $x=2$  doğrusu ve oxisler eksenin ortasındaki alan nedir?

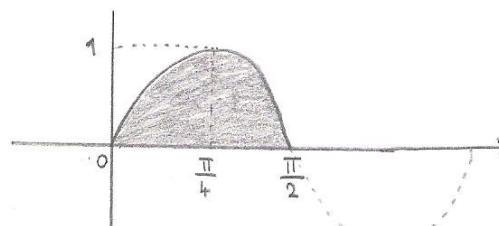


$$\begin{aligned}\text{Taraflı alan} &= \int_{-1}^2 (x^3 + 1) dx = \left( \frac{x^4}{4} + x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= (4 + 2) - \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

65)  $y=x^2+1$ ,  $y=0$ ,  $x=0$  ve  $x=1$  arasında kalan bölggenin alanı nedir?

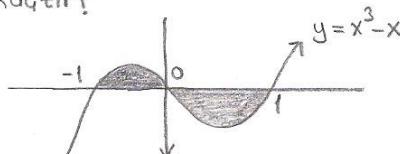


66)  $y=\sin 2x$  eğrisi  $x=\frac{\pi}{2}$  doğrusu ve  $Ox$  eksenile sınırlı bölggenin alanı nedir?



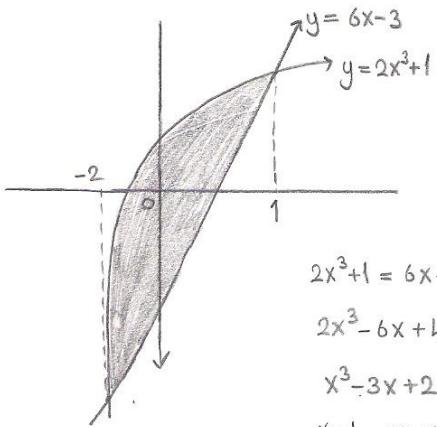
$$\text{Alan} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

67)  $y=x^3-x$  eğrisi ile  $x$  eksenin ortasındaki alan kaçtır?



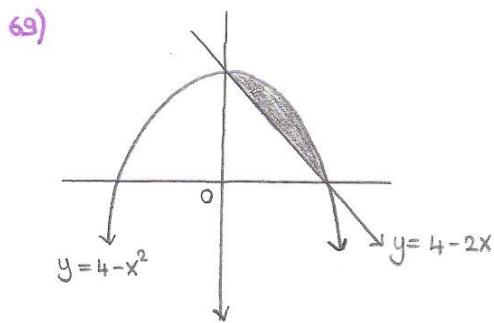
$$\begin{aligned}\text{Alan} &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x^3 - x) dx \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

68)  $y = 2x^3 + 1$  ve  $y = 6x - 3$  eğrilerinin sınırlanmış olduğu alan kaçtır?



$$\begin{aligned} 2x^3 + 1 &= 6x - 3 \\ 2x^3 - 6x + 4 &= 0 \\ x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ x = 1 \text{ ve } x = -2 &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_{-2}^1 (2x^3 + 1 - (6x - 3)) dx \\ &= \int_{-2}^1 (2x^3 + 1 - 6x + 3) dx \\ &= \left( \frac{2x^4}{4} + x - 3x^2 + 3x \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

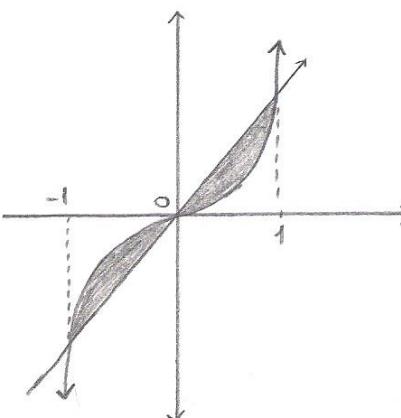


Sekilde parabol ile doğru arasında kalan bölgenin alanı nedir?

$$4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \\ x(x-2) = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_0^2 (4 - x^2 - (4 - 2x)) dx \\ &= \int_0^2 (4 - x^2 - 4 + 2x) dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left( -\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

70)  $y = x^3$  eğrisi ve  $y = x$  doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı nedir?



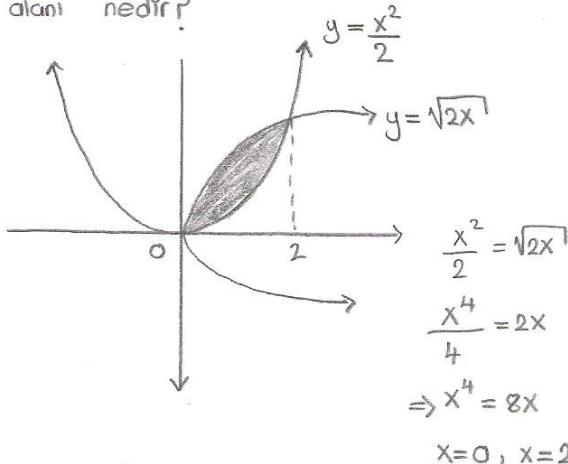
$$\begin{aligned} x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2 - 1) &= 0 \\ x = 0 & \\ x = -1 & \\ x = 1 & \end{aligned}$$

$$\text{Alan} = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^1 (x - x^3) dx$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= 0 - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) - 0 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

71)  $x^2 = 2y$

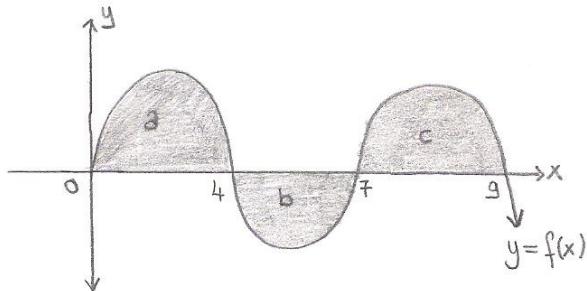
$y^2 = 2x$  eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı nedir?



$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= \sqrt{2x} \\ \frac{x^4}{4} &= 2x \\ \Rightarrow x^4 &= 8x \\ x=0, x=2 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_0^2 \left[ \sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right] dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx \\ &= \left( \frac{\sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

72)



Yukarıda verilen tarali bölgelerin alanları sırasıyla  $a, b, c$  birimdir.

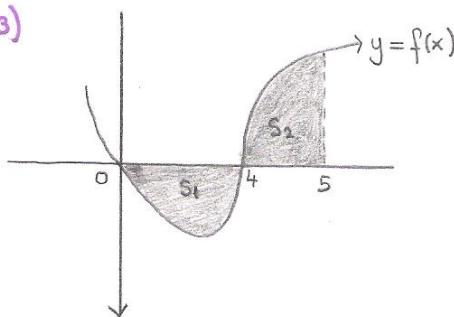
Buna göre  $\int_0^9 |f(x)| dx - \int_0^7 f(x) dx$  nin değeri nedir?

$$\int_0^9 |f(x)| dx = a+b+c$$

$$\int_0^7 f(x) dx = a-b$$

$$\Rightarrow (a+b+c) - (a-b) = a+b+c - a+b = 2b+c$$

73)



$$\int_0^5 f(x) dx = -\frac{25}{3} \quad \text{ve} \quad S_1 = \frac{32}{3} \text{ birim kare}$$

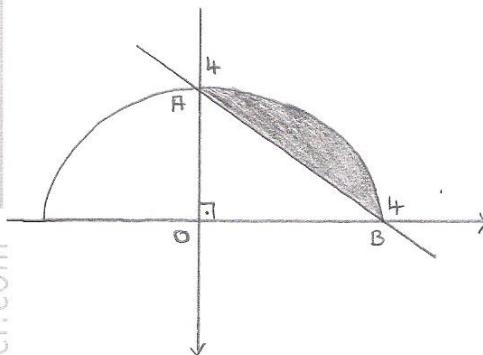
olduğuna göre  $S_2$  nedir?

$$\int_0^5 f(x) dx = S_2 - S_1$$

$$-\frac{25}{3} = S_2 - \frac{32}{3}$$

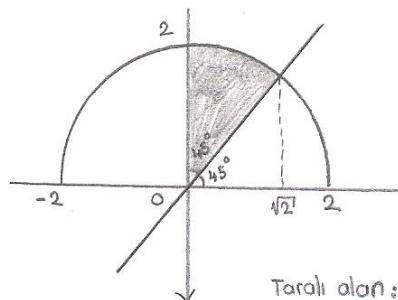
$$\Rightarrow S_2 = \frac{32}{3} - \frac{25}{3} \\ = \frac{7}{3}$$

74)  $\int_0^4 (\sqrt{16-x^2} - (4-x)) dx$  nedir?



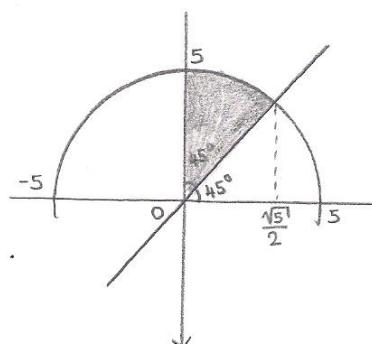
$$\begin{aligned} \text{Alan} &= (4 \text{ te bir daire}) - (\text{A (AOB) üçgenin}) \\ &\quad \text{alanı} \\ &= 4\pi - 8 \\ &= 4(\pi - 2) \end{aligned}$$

75)  $\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2} - x) dx$  nedir?



$$\text{Tarali alan: } \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi \cdot 4 \cdot \frac{45}{360} = \frac{\pi}{2}$$

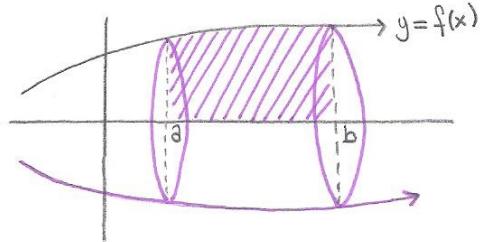
76)  $\int_0^{\frac{5}{\sqrt{21}}} (\sqrt{25-x^2} - x) dx$  nedir?



$$\text{Tarali alan: } \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{45}{360} = \frac{25\pi}{8}$$

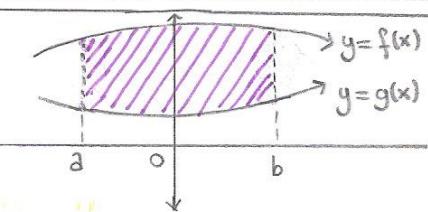
• İntegralde hacim:

• x - eksenin etrafında dönme:



$y=f(x)$  eğrisi,  $x=a$ ,  $x=b$  ve  $y=0$  doğrularının belirttiği bölgenin x eksenin etrafında  $360^\circ$  döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

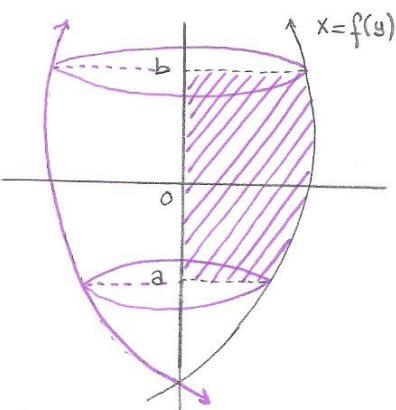
$$\text{hacm} = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$



$y=f(x)$  ve  $y=g(x)$  eğrilerinin x eksenin etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$\text{hacm} = \pi \cdot \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

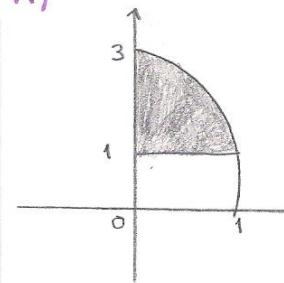
• y - eksenin etrafında dönme:



$x=f(y)$  eğrisi,  $y=a$ ,  $y=b$  ve  $x=0$  doğrularının belirttiği bölgenin y eksenin etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$\text{hacm} : \pi \cdot \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

77)

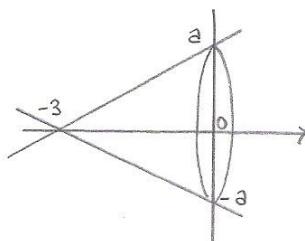


Birinci bölgede y eksenin  $y=1$  doğrusu ve  $9x^2+y^2=9$  elipsi arasında kalan bölge y eksenin etrafında  $360^\circ$  döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmi nedir?

$$\text{Hacm} = \pi \cdot \int_1^3 \left( \frac{9-y^2}{9} \right) dy$$

$$= \pi \cdot \int_1^3 \left( 1 - \frac{y^2}{9} \right) dy = \pi \cdot \left[ y - \frac{y^3}{27} \right] \Big|_1^3 \\ = \pi \cdot \left[ (3-1) - \left( 1 - \frac{1}{27} \right) \right] = \frac{28\pi}{27}$$

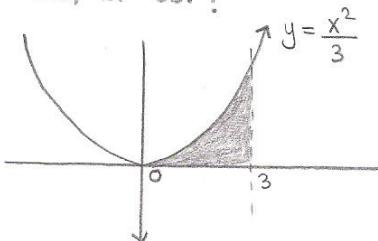
78) Denklemi  $\frac{-x}{3} + \frac{y}{a} = 1$  olan doğru ve koordinat eksenleriyle sınırlı bölgenin x-eksenin etrafında döndürülmesiyle oluşan konının hacmi  $16\pi$  birim küptür. Buna göre a nin değeri kaç olabilir?



$$\text{Konının hacm} : \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$

$$\frac{\pi \cdot a^2 \cdot 3}{3} = 16\pi \Rightarrow a = \pm 4$$

79)  $y = \frac{1}{3}x^2$  eğrisi,  $x=3$  doğrusu ve x-eksenin ile sınırlı bölgenin x-eksenin etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç  $br^3$  tür?



$$\text{Hacm} = \pi \cdot \int_0^3 \left( \frac{x^2}{3} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 \frac{x^4}{9} dx$$

$$= \pi \cdot \left( \frac{x^5}{45} \right) \Big|_0^3 = \pi \cdot \frac{243}{45} = \frac{\pi \cdot 27}{5} \Rightarrow \frac{27\pi}{5}$$