

MANTIK

Bir cümlenin belirttiği hükmü kesinlikle doğru yada kesinlikle yanlış ise bu cümlede önerme adını veriyoruz.

Doğru önermeler (D) harfi veya (1) rakamıyla, yanlış önermeler (y) harfi veya (0) rakamıyla gösterilir.

1 ve 0 değerlerine önermelerin doğruluk değerleri denir.

Önermeler p, q, r, s, \dots gibi küçük harflerle gösterilir.

P
1 → doğru
0 → yanlış

- NOT:**
- Bir cümlenin önerme olması için kesin bir hükmü bildirmesi ve bu hükmün herkesçe doğru ya da yanlış olması gereklidir.
 - Önermeler hem doğru, hem de yanlış olamazlar.
 - Genel olarak emir, soru, ünlem cümleleri ve onlamsız cümleler önerme deplidir.

1) Aşağıdaki cümlelerden hangileri bir önermedir?

- 7 tek sayıdır. ✓
- 10 asal sayıdır. ✓
- Benimle sinemaya gelir misin? X
- Yaşasın Atatürk! X
- Bir gün 32 saatdir. ✓
- Mersin, Akdeniz bölgесinin bir ilidir. ✓
- Televizyon seyredelim mi? X

笑笑 n tane bağımsız önermenin doğruluk değerleri 2^n deplik biçimde sıralanabilir.

P	q
1	1
1	0
0	1
0	0

2 önerme olduğundan 4 tane satır vardır.

P	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

3 önerme olduğundan $2^3 = 8$ tane satır vardır.

Eşdeğer (Denk) önerme: Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye denk önermeler denir.

$p \equiv q$ şeklinde gösterilir.

Bir önermenin olumsuzu (deplili):

Bir p önermesinin olumsuzu p' , \bar{p} , $\sim p$ simgelerinden biriyle ifade edilir.

P	p'
1	0
0	1

$$\cdot (p')' = p$$

$$\cdot \exists \rightarrow \text{bazi, en az 1, bir kısım}$$

$\forall \rightarrow \text{bütün, her}$

olmak üzere

$$(\exists)' = \forall$$

$$(\forall)' = \exists$$

$(\forall x, P(x))$ önermesinin deplili $(\exists x, (P(x))')$

$(\exists x, P(x))$ önermesinin deplili $(\forall x, (P(x))')$

$a > b$ nin deplili $a \leq b$

$a < b$ nin deplili $a \geq b$

$a = b$ nin deplili $a \neq b$ dir.

2) Aşağıdaki önermelerin deyillerini yazınız.

a) p : Bir soyının 5 ile bölümünden kalan en fazla 4 tür.

İse p' : Bir soyının 5 ile bölümünden kalan en az 4 tür.

b) q : 7 asal sayıdır.

İse q' : 7 asal sayı deyildir.

c) r : $x^2 + x + 5 > 0$

İse r' : $x^2 + x + 5 < 0$

d) s : $\exists x, x^2 + 3x - 1 < 0$

İse s' : $\forall x, x^2 + 3x - 1 \geq 0$

BİLEŞİK ÖNERMELER

İki veya daha fazla önermenin ve (\wedge), veya (\vee), ise (\Rightarrow), ancak ve ancak (\Leftrightarrow) bağlaclarıyla oluşturdukları yeni önermeler bilesik önermeler denir.

$p \wedge q$ (p \wedge q) bilesik önermesi:

$p \wedge q$ önermelerinin ikisi de doğru ise doğru, diğer bütün durumlarda yanlışır.

P	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

* \wedge işlemi çarpma gibi düşünülebilir.

$$1 \wedge 1 \equiv 1$$

$$1 \wedge 0 \equiv 0$$

$$0 \wedge 1 \equiv 0$$

$$0 \wedge 0 \equiv 0$$

$$(p \wedge 0) \equiv 0$$

$$(p \wedge 1) \equiv p$$

$p \vee q$ (p \vee q) bilesik önermesi:

p ve q önermelerinden her ikisi de yanlışsa yanlış, diğer durumlarda doğrudur.

P	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$p \vee 0 \equiv p$$

$$p \vee 1 \equiv 1$$

Totoloji ve Çelişki:

Bileşenlerine verilen her değer için daima doğru olan bilesik önermelere totoloji, daima yanlış olan bilesik önermelere de çelişki (antitotoloji) denir.

$$p \vee p' \equiv 1 \text{ (totoloji)}$$

$$p \wedge p' \equiv 0 \text{ (çelişki)}$$

* veya (\vee) ile ve (\wedge) bağlaclarının özellikleri:

* Tek kuvvet özellığı:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

* Değişme özellüğü:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

* Birleşme özellüğü:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

* Dağılma özellüğü:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

* De Morgan kuralları:

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

$$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

3) $(p \wedge q)'$ önermesinin eşiti nedir?

$$(p \wedge q)' \equiv (p')' \vee (q') \\ \equiv p \vee q'$$

4) $(p \vee q)'$ $\wedge q$ önermesinin eşiti nedir?

$$\underbrace{(p \vee q)}_{p \wedge q'}' \wedge q \equiv (p \wedge q') \wedge q \\ \text{birleşme özelligi} \\ \equiv p \wedge \underbrace{(q' \wedge q)}_0 \\ \equiv p \wedge 0 \equiv 0 \text{ (çelik)}$$

5) $q' \wedge (p' \vee q)'$ önermesinin eşiti nedir?

$$\underbrace{q' \wedge (p' \vee q')}_{p \wedge q}' \equiv q' \wedge (p \wedge q) \\ \text{değişme özelligi} \\ \equiv q' \wedge (q \wedge p) \\ \text{birleşme özelligi} \\ \equiv (q' \wedge q) \wedge q \equiv 0 \wedge q \equiv 0$$

6) $(p \vee q) \wedge p' \equiv 1$ olduguuna göre

$(p \wedge q') \vee p$ bileşik önermesinin doğruluk değerini nedir?

$$\underbrace{(p \vee q)}_1 \wedge \underbrace{p'}_1 \equiv 1 \\ p' \equiv 1 \Rightarrow \boxed{p \equiv 0}$$

$$p \vee q \equiv 1 \Rightarrow \boxed{q \equiv 1}$$

$$(p \wedge q') \vee p \equiv \underbrace{(0 \wedge 0)}_0 \vee 0 \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$$

7) $(p \vee q) \vee p \equiv 0$ olduguuna göre

$(p \wedge q) \vee (p' \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini nedir?

$$\underbrace{(p \vee q)}_0 \vee \underbrace{p'}_0 \equiv 0 \Rightarrow p \equiv 0 \text{ ve } q \equiv 1$$

$$(p \wedge q) \vee (p' \vee q) \equiv (0 \wedge 1) \vee (1 \vee 1) \equiv 1 \vee 1 \\ \equiv 1$$

8) $(p \wedge q') \vee (p \wedge q)$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p \wedge q') \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge \underbrace{(q' \vee q)}_1 \\ \equiv p \wedge 1 \equiv p$$

9) $(p \vee q) \wedge (p \vee q')$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p \vee q) \wedge (p \vee q') \equiv p \vee \underbrace{(q \wedge q')}_0 \\ \equiv p \vee 0 \equiv p$$

10) $(p \vee q') \vee (p' \wedge q)$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$\underbrace{(p \vee q)}_m \vee \underbrace{(p' \wedge q')}_m' \equiv m \vee m' \equiv 1$$

• $p \Rightarrow q$ ($p \rightarrow q$) bileşik önermesi:

$p \Rightarrow q$ bileşik önermesinde p doğru q yanlış iken yanlış, diğer bütün durumlarda doğrudur.

P	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$1 \Rightarrow 1 \equiv 1 \\ 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 \text{ (100 kuralı)} \\ 0 \Rightarrow 1 \equiv 1 \\ 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$$

⇒ bağılının özellikleri:

- $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$
- $p \Rightarrow p \equiv 1$ (Tek kuvvet özelligi yoktur.)
- $p \Rightarrow q \not\equiv q \Rightarrow p$ (Değişme özelligi yoktur.)
- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \not\equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ (Birleşme özelligi yoktur.)
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
- $p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

11) $(p' \Rightarrow q') \wedge (p' \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p \vee q') \wedge (p \vee q) \equiv p \vee \underbrace{(q' \wedge q)}_0 \equiv p \vee 0 \equiv p$$

dağılma Özelliği

12) $(q \Rightarrow p') \vee q$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$\begin{aligned} (q \Rightarrow p') \vee q &\equiv (q' \vee p') \vee q \\ &\equiv (p' \vee q') \vee q \\ &\equiv p' \vee \underbrace{(q' \vee q)}_1 \equiv p' \vee 1 \equiv 1 \end{aligned}$$

13) $(p \Rightarrow q)' \wedge q$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q)' \wedge q &\equiv (p' \vee q)' \wedge q \\ &\equiv (p \wedge q') \wedge q \equiv p \wedge \underbrace{(q' \wedge q)}_0 \\ &\equiv p \wedge 0 \equiv 0 \end{aligned}$$

14) $(p' \wedge q) \Rightarrow p'$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$\begin{aligned} (p' \wedge q)' \vee p' &\equiv (p \vee q') \vee p' \\ &\equiv (q' \vee p) \vee p' \equiv q' \vee \underbrace{(p \vee p')}_1 \equiv q' \vee 1 \equiv 1 \end{aligned}$$

15) $(q \Rightarrow p) \wedge (q' \vee p)'$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(q' \vee p) \wedge (q \wedge p')$$

$$\equiv \underbrace{(q' \vee p)}_m \wedge \underbrace{(q \wedge p')}_m'$$

$$\equiv m \wedge m'$$

$$\equiv 0$$

Koşullu önerme çeşitleri:

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin

a) Karşılık $q \Rightarrow p$ koşullu önermesidir.

b) Tersi $p' \Rightarrow q'$ koşullu önermesidir.

c) Karşıt Tersi $q' \Rightarrow p'$ koşullu önermesidir.

☺ Bir koşullu önermenin karşıt tersi kendisine eşdeğerdir.

$$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$

16) p, q, r önermelerinin deplilleri sırasıyla p', q', r' ile gösterildiğinde göre

$(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$ önermesinin eşiti nedir?

a) Bir önermenin karşıt tersi kendisine eşdeğer olduğunu froman

$$(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (q' \vee r') \Rightarrow (p' \wedge q')$$

17) $x=4$ ise $x^2=9$ koşullu önermesinin

a) Karşılık nedir?

$$x^2=9 \text{ ise } x=4$$

b) Tersi nedir?

$$x \neq 4 \text{ ise } x^2 \neq 9$$

c) Karşıt tersi nedir?

$$x^2 \neq 9 \text{ ise } x \neq 4$$

18) $(p \vee q) \Rightarrow p'$ koşullu önermesinin

a) Karşılık nedir?

$$p' \Rightarrow (p \vee q)$$

b) Tersi nedir?

$$(p' \wedge q') \Rightarrow p$$

c) Karşıt tersi nedir?

$$p \Rightarrow (p' \wedge q')$$

- p ancak ve ancak q ($p \Leftrightarrow q$) bileşik önermesi:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

• Doğruluk değerleri aynı olanlar 1, farklı olurlar ise sıfırdır.

$$1 \Leftrightarrow 1 \equiv 1$$

$$1 \Leftrightarrow 0 \equiv 0$$

$$0 \Leftrightarrow 1 \equiv 0$$

$$0 \Leftrightarrow 0 \equiv 1$$

\Leftrightarrow bağılının özellikleri:

$$\bullet p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$\bullet p \Leftrightarrow p \equiv 1$$

$$\bullet p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p \text{ (değişme özelliği)}$$

$$\bullet p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \text{ (birleşme özelliği)}$$

$$\bullet p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$$

$$\bullet p \Leftrightarrow 1 \equiv p$$

$$\bullet p \Leftrightarrow p' \equiv 0$$

$$\bullet p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$$

- 19) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p' \vee q) \Leftrightarrow (p' \vee q)$$

$$\underbrace{m}_{m} \quad \underbrace{m}_{m}$$

$$\equiv m \Leftrightarrow m$$

$$\equiv 1$$

- 20) $(p \Rightarrow q') \Leftrightarrow (q' \vee p')$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p' \vee q') \Leftrightarrow (p \Rightarrow q')$$

$$\underbrace{m}_{m} \quad \underbrace{m}_{m}$$

$$\equiv m \Leftrightarrow m$$

$$\equiv 1$$

- 21) $(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p \wedge q)'$ bileşik önermesinin eşiti nedir?

$$(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p \wedge q)'$$

$$\equiv (p' \vee q') \Leftrightarrow (p' \vee q)$$

$$\equiv (p \Rightarrow q') \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$\equiv p \Rightarrow (\underbrace{q' \Leftrightarrow q}_{0})$$

$$\equiv p \Rightarrow 0$$

$$\equiv p' \vee 0$$

$$\equiv p'$$

Absorbe Kuralı:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$



$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$



1.Durum:

$$p \equiv 1 \text{ ve } q \equiv 1 \text{ olsun.}$$

$$1 \vee (1 \wedge 1) \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$$

($p \equiv 1$ için sonuç
1 olduğundan doğru)

1.Durum:

$$p \equiv 1 \text{ ve } q \equiv 1 \text{ olsun.}$$

$$1 \wedge (1 \vee 1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$$

($p \equiv 1$ için sonuç
1 olduğundan doğru)

2.Durum:

$$p \equiv 1 \text{ ve } q \equiv 0 \text{ olsun.}$$

$$1 \vee (1 \wedge 0) \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$$

($p \equiv 1$ için sonuç
1 olduğundan doğru)

2.Durum:

$$p \equiv 1 \text{ ve } q \equiv 0 \text{ olsun.}$$

$$1 \wedge (1 \vee 0) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$$

($p \equiv 1$ için sonuç
1 olduğundan doğru)

3.Durum:

$$p \equiv 0 \text{ ve } q \equiv 1 \text{ olsun.}$$

$$0 \vee (0 \wedge 1) \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$$

($p \equiv 0$ için sonuç
0 olduğundan doğru)

3.Durum:

$$p \equiv 0 \text{ ve } q \equiv 1 \text{ olsun.}$$

$$0 \wedge (0 \vee 1) \equiv 0 \wedge 1 \equiv 0$$

($p \equiv 0$ için sonuç
0 olduğundan doğru)

4.Durum:

$$p \equiv 0 \text{ ve } q \equiv 0 \text{ olsun.}$$

$$0 \vee (0 \wedge 0) \equiv 0 \vee 0 \equiv 0$$

($p \equiv 0$ için sonuç
0 olduğundan doğru)

Sonuç olarak;

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$



4.Durum:

$$p \equiv 0 \text{ ve } q \equiv 0 \text{ olsun.}$$

$$0 \wedge (0 \vee 0) \equiv 0 \wedge 0 \equiv 0$$

($p \equiv 0$ için sonuç
0 olduğundan doğru)

Sonuç olarak;

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$



İfadelerinde sonuç parantezin dışındaki ifadenin aynısıdır.

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q') \equiv p$$

$$p' \vee (p' \wedge q) \equiv p'$$

$$p' \vee (p' \wedge q') \equiv p'$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q') \equiv p$$

$$p' \wedge (p' \vee q) \equiv p'$$

$$p' \wedge (p' \vee q') \equiv p'$$

Yada Bağlacı: \vee

Ancak ve ancak bağlacının tam tersidir.

Önermelerin doğruluk değeri aynı iken sonuç 0, farklı iken sonuç 1 dir.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$p \vee p \equiv 0$$

$$p \vee p' \equiv 1$$

$$p \vee 1 \equiv p$$

$$p \vee 0 \equiv p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Alıştırmalar:

1) $1 \vee 1 \equiv$

2) $1 \vee 1' \equiv$

3) $0 \vee 1' \equiv$

4) $(0 \vee 1) \vee 1 \equiv$

5) $(1 \vee 1) \vee 1' \equiv$

6) $(1 \vee 0) \vee 0' \equiv$

7) $(1 \wedge 0) \vee (0 \vee 0) \equiv$

8) $(1 \vee 0)' \wedge (1 \vee 1)' \equiv$

9) $(0' \wedge 0)' \vee (1 \vee 0') \equiv$

10) $(1 \wedge 1)' \vee (0' \vee 1)' \equiv$

11) $[(1 \vee 0) \vee (0 \wedge 0)']' \equiv$

12) $(p \vee p')' \equiv$

13) $(p \vee 0) \vee (p' \vee p) \equiv$

14) $(p \vee 1) \vee (0 \wedge p') \equiv$

15) $[(p \vee 0')' \vee (p' \vee 1')]' \equiv$

Cevaplar:

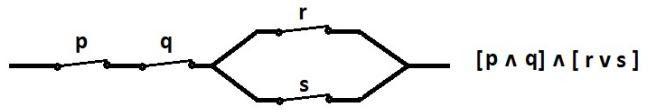
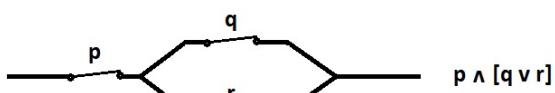
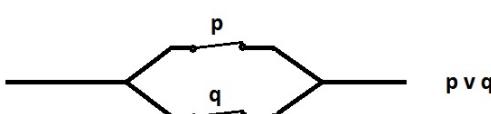
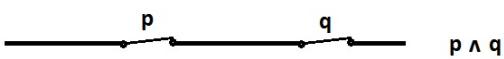
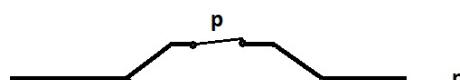
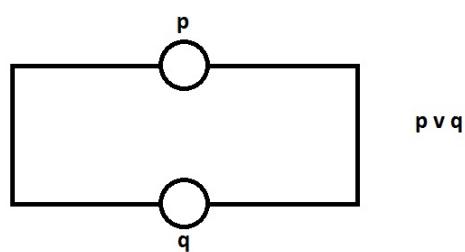
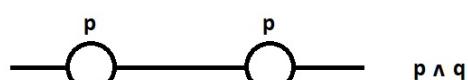
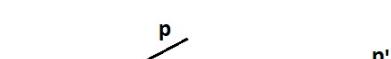
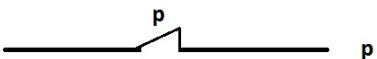
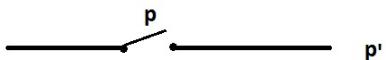
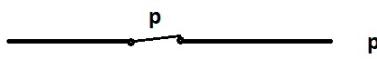
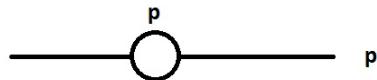
1) 0 2) 1 3) 0 4) 0 5) 0

6) 0 7) 0 8) 0 9) 1 10) 1

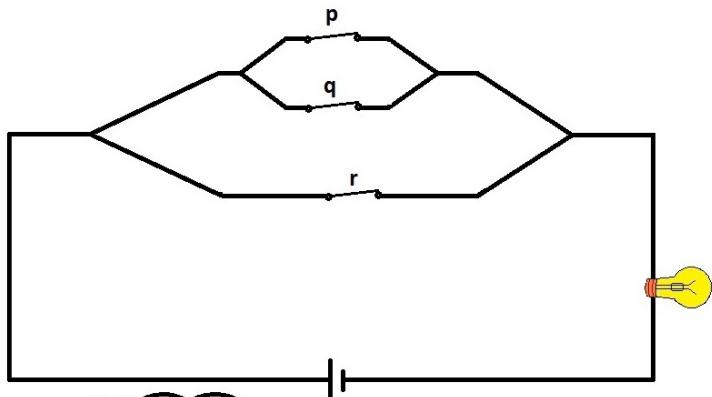
11) 1 12) 0 13) p' 14) p' 15) p'

Mantık ve Elektrik Devreleri:

Gösterim Şekillerinden Bazıları:

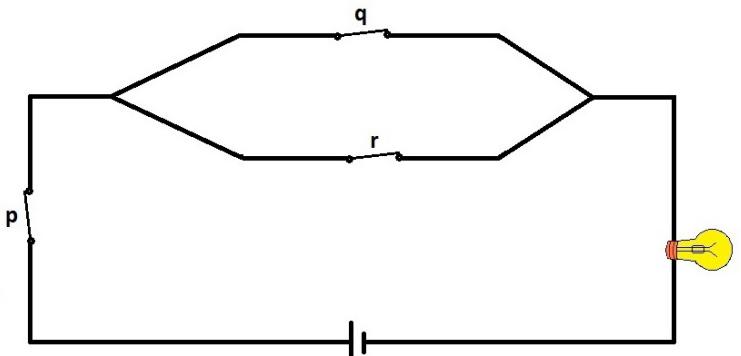


Aşağıdaki şekillerdeki elektrik devrelerine karşılık gelen bileşik önermeyi yazınız, doğruluk değerini bulunuz ve lambanın yanıp yanmayacağı söleyiniz?



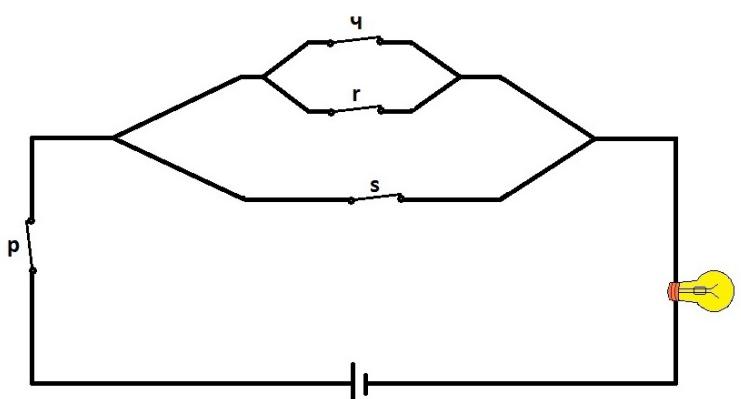
Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

$$(p \vee q) \vee r$$



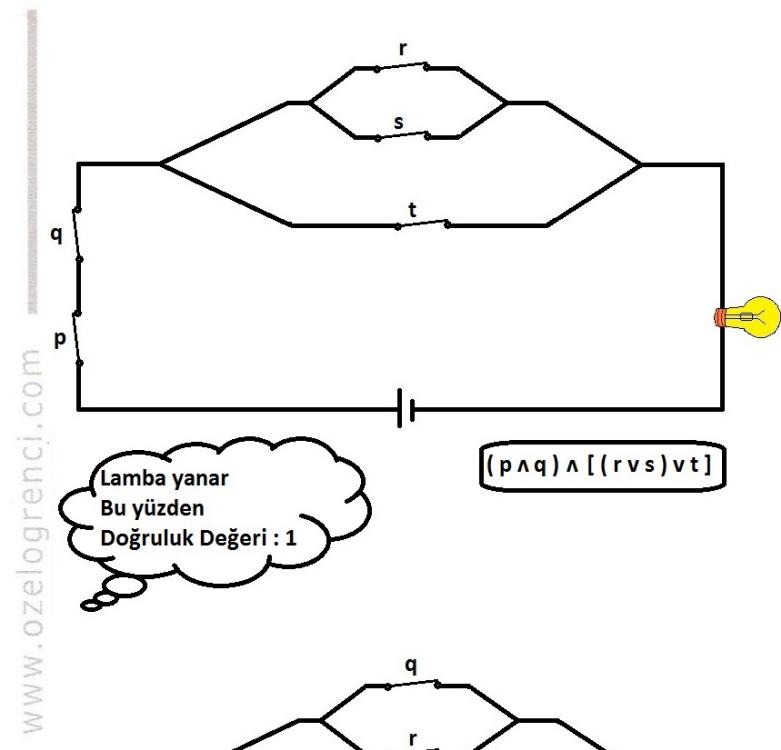
Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

$$p \wedge (q \vee r)$$



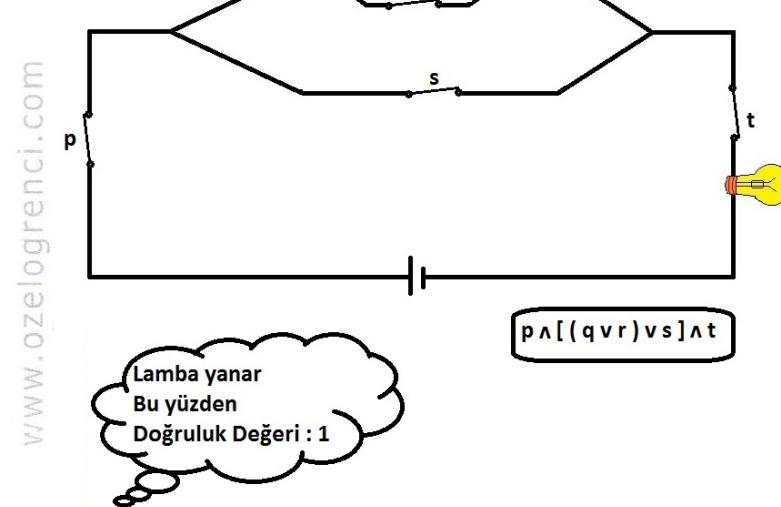
Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

$$p \wedge [(q \vee r) \vee s]$$



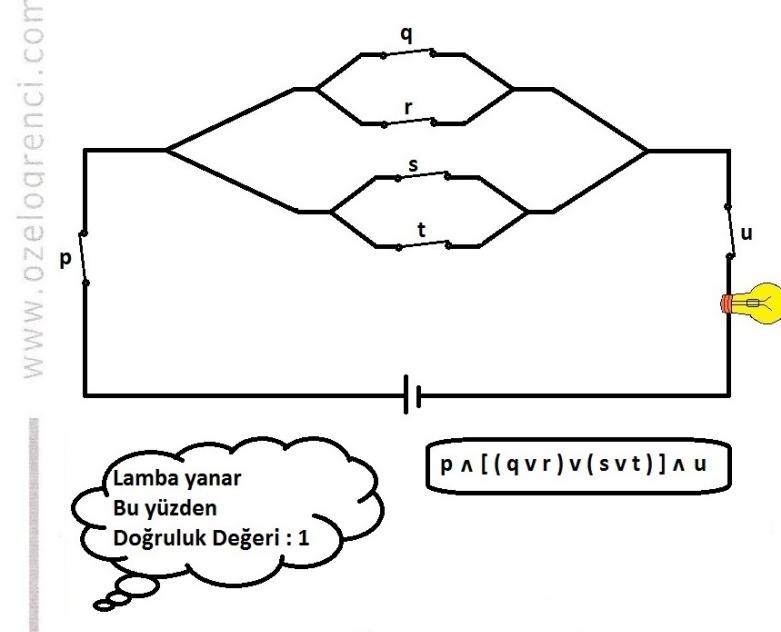
Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

$$(p \wedge q) \wedge [(r \vee s) \vee t]$$



Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

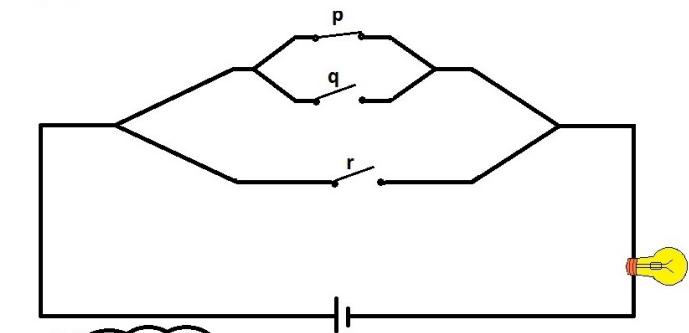
$$p \wedge [(q \vee r) \vee s] \wedge t$$



Lamba yanar
Bu yüzden
Doğruluk Değeri : 1

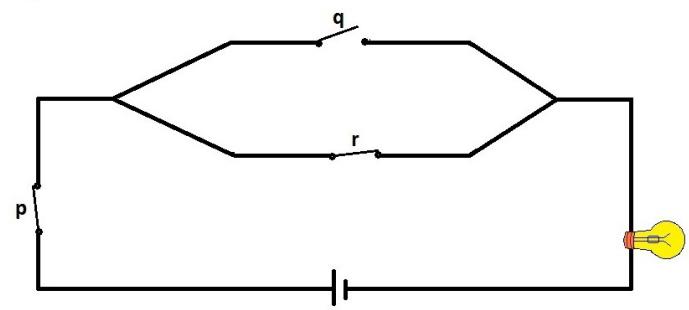
$$p \wedge [(q \vee r) \vee (s \vee t)] \wedge u$$

Aşağıdaki şekillerdeki elektrik devrelerine karşılık gelen bileşik önermeyi yazınız, doğruluk değerini bulunuz ve lambanın yanıp yanmayacağı söleyiniz?



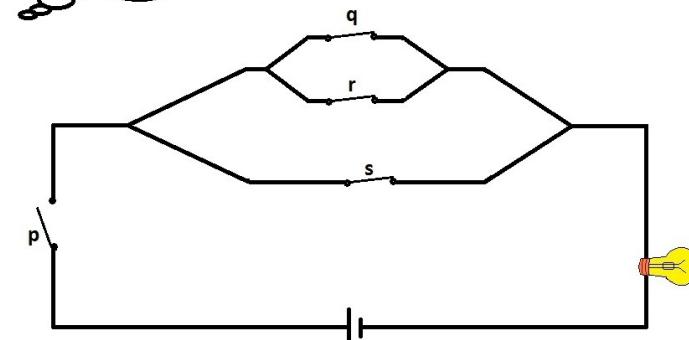
Lamba yanar.
Doğruluk Değeri : 1

$$(p \vee q) \vee r$$



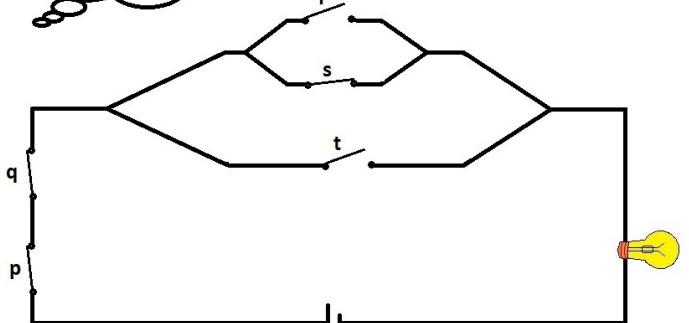
Lamba yanar.
Doğruluk Değeri : 1

$$p \wedge (q \vee r)$$



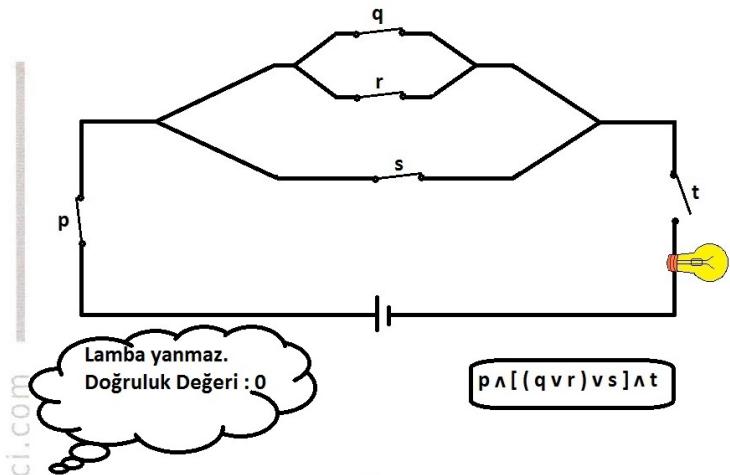
Lamba yanmaz.
Doğruluk Değeri : 0

$$p \wedge [(q \vee r) \vee s]$$



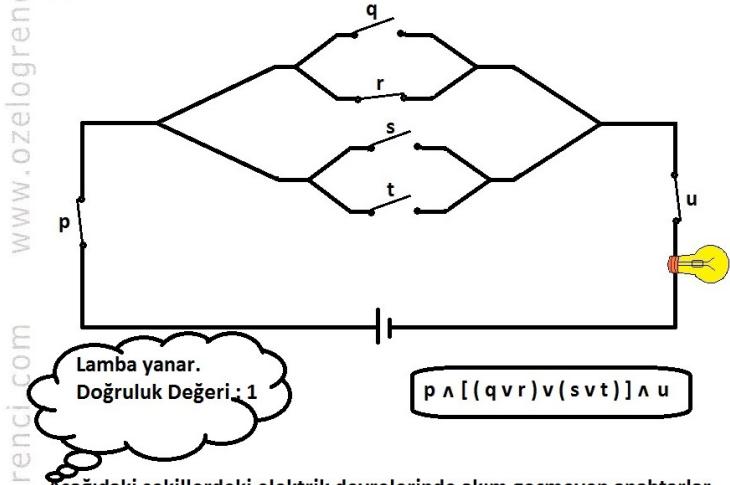
Lamba yanar.
Doğruluk Değeri : 1

$$(p \wedge q) \wedge [(r \vee s) \vee t]$$



Lamba yanmaz.
Doğruluk Değeri : 0

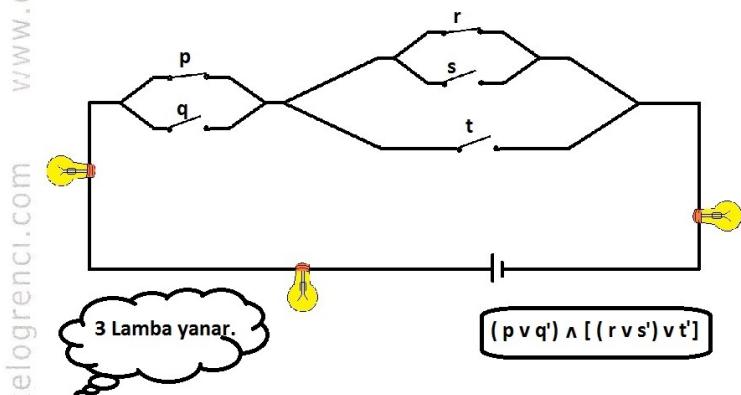
$$p \wedge [(q \vee r) \vee s] \wedge t$$



Lamba yanar.
Doğruluk Değeri : 1

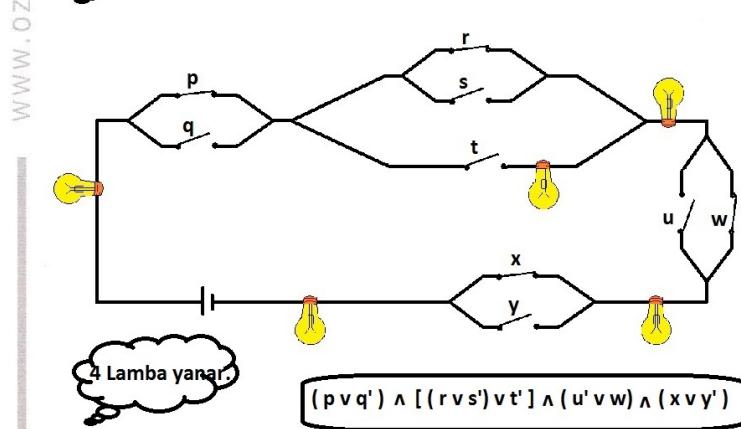
$$p \wedge [(q \vee r) \vee (s \vee t)] \wedge u$$

Aşağıdaki şekillerdeki elektrik devrelerinde akım geçmeyen anahtarlar, değil ile gösterildiğinde bu elektrik devrelerine karşılık gelen bileşik önermeleri yazınız ve kaç tane lambanın yanıp yanmayacağı söleyiniz?



3 Lamba yanar.

$$(p \vee q') \wedge [(r \vee s') \vee t']$$



4 Lamba yanar

$$(p \vee q') \wedge [(r \vee s') \vee t'] \wedge (u' \vee w) \wedge (x \vee y')$$