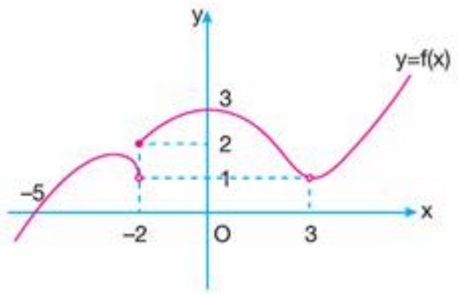
LİMİT ÇÖZÜMLÜ SORULARI

1)



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ ve $x = 3$ değerleri için limiti olup olmadığını belirleyiniz.

ÇÖZÜM:

1) x değişkeni -2 ye soldan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 1$ olur.

x değişkeni -2 ye sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 2 ye yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2$ olur.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ olduğundan, $f(x)$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasında limiti yoktur.

x değişkeni 3 e soldan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

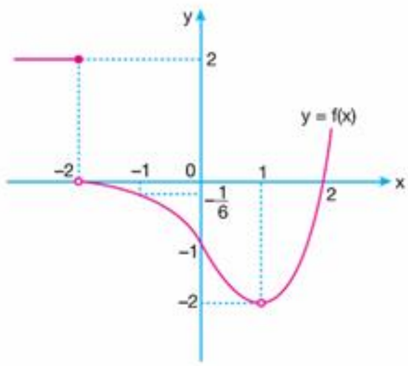
$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1$ olur.

x değişkeni 3 e sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu 1 e yaklaşır. Bu durumda,

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasında limiti vardır ve bu limitin değeri 1 dir. Yani $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$ bulunur.

2)



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-3, 2)$ aralığındaki hangi x tam sayı değerleri için limiti vardır?

ÇÖZÜM:

2) $(-3, 2)$ aralığındaki tüm tam sayı değerleri için $f(x)$ in sağdan ve soldan limitlerini incelemeliyiz.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$ ve

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ yoktur.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{1}{6}$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{1}{6}$ ve

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\frac{1}{6}$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\frac{1}{6}$ dır.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ ve

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$ dir.

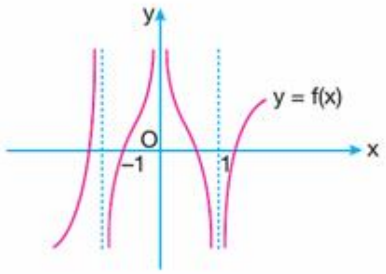
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2$ ve

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$ dir.

Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun $(-3, 2)$ aralığında $x = -1, 0, 1$ tam sayıları için limiti vardır.

3)



Yukarıdaki grafiğe göre,

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

3) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ ve

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ olduğundan,

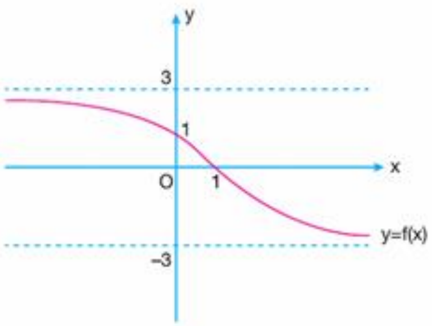
$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ yoktur.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ ve

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ olduğundan,

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ dur.

4)



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre,

a. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

limitlerinin değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

4) Grafik incelendiğinde, x değerleri büyüdükçe $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin -3 e yaklaştığı görülür. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -3$ olur.

Ayrıca, x değerleri küçüldükçe $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerlerin 3 e yaklaştığı görülür. Dolayısıyla, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$ olur.

5) $$\lim_{x \to 2} (x^3 - 2ax^2 + 3) = 3$$

olduğuna göre, a değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

5) $$\lim_{x \to 2} (x^3 - 2ax^2 + 3) = 3$$

$$\Rightarrow 2^3 - 2.a.2^2 + 3 = 3$$

$$\Rightarrow 8 - 8a = 0$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ olur.}$$

6) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}}{\cos x - 1}$$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

6) Buna göre, $x = \frac{\pi}{3}$ için

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}}{\cos x - 1} = \frac{\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{3} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right)$$

$$= \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

7) $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \ x < 1 \\ 1 - x^2 & , \ 1 \leq x < 4 \\ -5x + 5 & , \ x \geq 4 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$, $x = 3$ ve $x = 4$ noktalarındaki varolan limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

7) ➢ $x = 1$ kritik nokta olduğundan sağdan ve soldan limitlerine bakmalıyız.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x-1) = 2.1-1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1-x^2) = 1-1^2 = 0$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ olduğundan, $x = 1$ noktasında limiti yoktur.

➢ $x = 3$ kritik nokta olmadığı için, sağdan ve soldan limitlerine bakmaya gerek yoktur. Buna göre,

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (1-x^2) = 1-3^2 = -8$ olur.

➢ $x = 4$ kritik nokta olduğundan sağdan ve soldan limitlerine bakmalıyız.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (1-x^2) = 1-4^2 = -15$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (-5x+5) = -5.4+5 = -15$$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = -15$ olduğundan,

$\lim_{x\to 4} f(x) = -15$ bulunur.

8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

8) $x = 1$ kritik nokta olduğundan fonksiyonun sağdan ve soldan limitlerine bakmalıyız.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1).(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2 \text{ olur.}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1).(x+1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} [-(x+1)] = -2 \text{ olur.}$$

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{|x-1|} \neq \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ olduğundan,

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ değeri yoktur.

9) $\lim_{x\to\infty} \left(2^x + \dfrac{1}{x}\right)$ değeri nedir?

ÇÖZÜM:

9)
$$\lim_{x\to\infty} \left(2^x + \frac{1}{x}\right) = 2^{\infty} + \frac{1}{\infty}$$

$$= \infty + 0$$

$$= \infty \text{ bulunur.}$$

10) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3}{x-2}$ değeri nedir?

ÇÖZÜM:

10) $x = 2$ noktası kritik nokta olduğundan sağdan ve soldan limitlerini bulmalıyız.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2}$ olduğundan,

$\lim_{x\to 2} \dfrac{3}{x-2}$ yoktur.

11) $f: R-\{0\} \to R$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

şeklinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında limitinin olup olmadığını inceleyiniz.

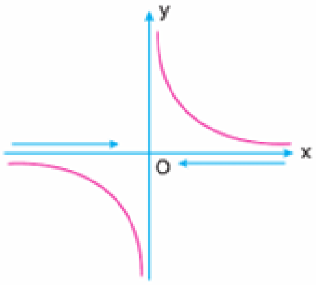
ÇÖZÜM:

11)

x e soldan yaklaşma	f(x)
−0,1	−10
−0,01	−100
−0,001	−1000
−0,0001	−10000

f(x)	x e sağdan yaklaşma
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000

0 f(x) azalarak $-\infty$ a yaklaşıyor. | f(x) artarak $+\infty$ a yaklaşıyor. 0



Tablo ve grafik incelendiğinde x değişkeni sıfır sayısına soldan yaklaşırken f(x) fonksiyonunun aldığı değerlerin sınırsız olarak küçüldüğü görülür. Benzer şekilde, x değişkeni sıfır sayısına sağdan yaklaşırken f(x) fonksiyonunun aldığı değerlerin sınırsız olarak büyüdüğü görülür. O halde,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ dur.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ olduğundan, f(x) fonksiyonunun $x=0$ noktasında limiti yoktur.

$f:R-\{0\}\to R$

$f(x)=\frac{1}{x}$

şeklinde tanımlı f(x) fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ ve $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ dur.

Fakat $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ yoktur.

12) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ ve $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=4$ olmak üzere,

$f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{x\to 2}[\log_2 h(x)]$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

12) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=4$ ve $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ olduğundan sıkıştırma teoremine göre,

$\lim\limits_{x\to 2} h(x)=4$ olur.

Buna göre,

$\lim\limits_{x\to 2}[\log_2 h(x)]=\log_2\left[\lim\limits_{x\to 2} h(x)\right]=\log_2 4=\log_2 2^2$

$=2$ olur.

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 4x}{x^2}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

13) $-1\leq\sin 4x\leq 1$

$$-\frac{1}{x^2}\leq\frac{\sin 4x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x^2}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 4x}{x^2}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$$

$0\leq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 4x}{x^2}\leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 4x}{x^2}=0$ olur.

14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}=\dfrac{2-2}{2^2-3.2+2}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}.(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-1}=1$ bulunur.

15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

15) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\dfrac{\sqrt{4+5}-3}{4-4}=\dfrac{3-3}{4-4}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği var.

Belirsizliği gidermek için ifadenin pay ve paydasını $\sqrt{x+5}-3$ ifadesinin eşleniği ile çarpalım.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3).(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4).(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5})^2-3^2}{(x-4).(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4).(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}.(\sqrt{x+5}+3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+5}+3}$$

$=\dfrac{1}{6}$ bulunur.

16) $n \in R$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x - m}{x - 3} = n$$

olduğuna göre, $m.n$ çarpımının değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

16) $x = 3$ için $\frac{2x - m}{x - 3}$ kesrinin paydası sıfır olduğundan sonucun (n nin) gerçek sayı olması için pay da sıfır olmalıdır.

Buna göre, $x = 3$ için $2x - m = 0$ olmalıdır.

$2.3 - m = 0 \Rightarrow m = 6$ olur.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2\cancel{(x - 3)}}{\cancel{x - 3}} = 2 \text{ olur.}$$

$m = 6$ ve $n = 2$ olduğundan dolayı

$m.n = 6.2 = 12$ bulunur.

17)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \tan 3x}{2x} \text{ değeri kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

17)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \tan 3x}{2x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \tan 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 4x}{2x} + \frac{\tan 3x}{2x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{2x} + \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{2x}$$

$$= \frac{4}{2} + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{7}{2} \text{ bulunur.}$$

18)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 6x} \text{ değeri kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

18) $x = 0$ için

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 6x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

19)

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3} \text{ değeri kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

19) $x = 3$ için,

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x - 3} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

Kesrin pay ve paydasını $x + 3$ ile çarpalım.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2 - 9).(x + 3)}{(x - 3).(x + 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2 - 9).(x + 3)}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sin(x^2 - 9)}{x^2 - 9} . \lim_{x \to 3} (x + 3)$$

$$= 1.(3 + 3)$$

$$= 6 \text{ bulunur.}$$

20)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{4x^2} \text{ değeri kaçtır?}$$

ÇÖZÜM:

20) $x = 0$ için,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}.1^2$$

$$=\frac{1}{4}$$ bulunur.

21)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}$$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

21)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}$$

$$=1$$ bulunur.

22)

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}$$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

22) $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}=\frac{0}{0}$$ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}\frac{\cancel{(\sin x-\cos x)}.(\underbrace{\sin^2 x+\sin x.\cos x+\cos^2 x}_{})}{\cancel{\sin x-\cos x}}$$

(with $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$)

$$=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+}(1+\sin x.\cos x)=1+\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$ bulunur.

23)

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2-5}{2x^2+3}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{2x^2-1}$$

olduğuna göre, $a + b$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

23)

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x^2-5}{2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3-\underbrace{\frac{4}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{5}{x^3}}_{0}\right)}{x^2\left(2+\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x.\frac{3}{2}=\infty$$ olur.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+4}{2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5+\underbrace{\frac{4}{x}}_{0}\right)}{x^2\left(2-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1.5}{x.2}=\frac{5}{\infty.2}=\frac{5}{\infty}=0$$ olur.

Buna göre, $a+b=\infty+0=\infty$ bulunur.

24) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 3x + 1}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

24) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

25) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3.2^x + 5.3^x}{4.3^x + 2^x}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

25) $$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3.2^x + 5.3^x}{4.3^x + 2^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{3^x}.\left(3.\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^x}^{\,0} + 5\right)}{\cancel{3^x}.\left(4 + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^x}_{\,0}\right)}$$

$= \dfrac{5}{4}$ bulunur.

26) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - \sqrt{x^2+1}}$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM:

26) $$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - \sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad (x \to \infty \ |x| = x)$$

$$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + \sqrt{x+3}}{3x - x}$$

$$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{2x}$$

$= 1$ bulunur.

27) $$\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{(1-a)x^2 + bx - 2}{3x + 1}\right] = 4$$

olduğuna göre, $a.b$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

27) Limitin değeri 4 $(4 \in R)$ olduğundan pay ve paydanın derecesi aynı olmalıdır.

Dolayısıyla x^2 li terimin katsayısı 0 olmalıdır.

$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$ dir.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{bx - 2}{3x + 1} = 4 \Rightarrow \dfrac{b}{3} = 4$

$\Rightarrow b = 12$ dir.

Buna göre,

$a.b = 1.12 = 12$ bulunur.

28) $m, n \in R$ olmak üzere,

$$f : R \to R, \ f(x) = \begin{cases} mx + 1 & , \ x > 1 \\ -2 & , \ x = 1 \\ 5x + n & , \ x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli olduğuna göre, $m.n$ kaçtır?

ÇÖZÜM:

28) $$f(x) = \begin{cases} mx + 1 & , \ x > 1 \\ -2 & , \ x = 1 \\ 5x + n & , \ x < 1 \end{cases}$$

f fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli ise

➢ $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (5x + n) = 5 + n$

➢ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (mx + 1) = m + 1$

➢ $f(1) = -2$

değerleri birbirine eşit olmalıdır.

$5 + n = -2 \Rightarrow n = -7$

$m + 1 = -2 \Rightarrow m = -3$ olur.

Buna göre, $m.n = (-7).(-3) = 21$ olur.

29) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} & , \ x < 1 \\ 2 & , \ x = 1 \\ x^2 - 1 & , \ x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu kaç farklı x tam sayı değeri için süreksizdir?

ÇÖZÜM:

29) I. Fonksiyonun tanımsız olduğu noktaları inceleyelim.

$x < 1$ koşuluyla $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ rasyonel fonksiyonu paydayı sıfır yapan değer için tanımsızdır.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 < 1$ olduğundan,

$x = -1$ noktasında fonksiyon süreksizdir.

II. Fonksiyonun kritik noktasına bakalım.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

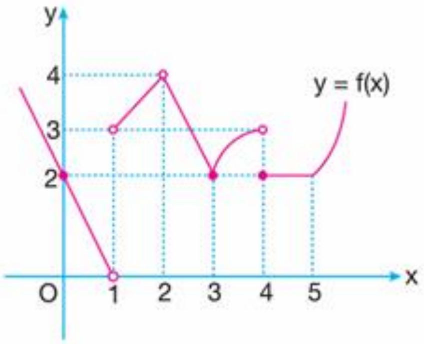
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1) = 1^2 - 1 = 0, \quad f(1) = 2$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq f(1)$ olduğundan,

$x = 1$ noktasında süreksizdir.

Dolayısıyla $y = f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ ve $x = 1$ olmak üzere, 2 tam sayı değeri için süreksizdir.

30)



Yukarıdaki şekilde, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $x \in [0, 4]$ aralığında hangi tam sayı değerleri için $y = f(x)$ fonksiyonu süreklidir?

ÇÖZÜM:

30) ➢ $x = 0$ için

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ ve $f(0) = 2$ dir.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(2) = 0$ olduğundan,

$x = 0$ noktasında $f(x)$ süreklidir.

➢ $x = 1$ için

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ olduğundan,

$x = 1$ noktasında $f(x)$ süreksizdir.

➢ $x = 2$ için

$f(2)$ tanımsız olduğundan,

$x = 2$ noktasında $f(x)$ süreksizdir.

➢ $x = 3$ için

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$ ve $f(3) = 2$ dir.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ olduğundan,

$x = 3$ noktasında $f(x)$ süreklidir.

➢ $x = 4$ için

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2$ dir.

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ olduğundan,

$x = 4$ noktasında $f(x)$ süreksizdir.

Buna göre, $x = 0$ ve $x = 3$ noktalarında $f(x)$ süreklidir.

31) $$f(x) = \frac{8x + 5}{x^2 + mx + 1}$$

fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde sürekli olduğuna göre, m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

31) $f(x)$ fonksiyonunun $\forall x \in R$ iken sürekli olması için paydasını sıfır yapan değer olmamalıdır. Yani,

$x^2 + mx + 1 = 0$ denkleminde $\Delta < 0$ olmalıdır.

$\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4.1.1 < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0$

$\Rightarrow (m-2).(m+2) < 0$

m		−2		2	
	+	∘	−	∘	+

Buna göre, $-2 < m < 2$ olmalıdır.

32)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 4}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM:

32) $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2).(x+2) \geq 0$

x		−2		2	
	+	•	−	•	+

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ noktasında $f(x)$ tanımsızdır.

Buna göre, $f(x)$ fonksiyonu,

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty) - \{4\}$ aralığında süreklidir.