

Projekt zaliczeniowy z teorii ryzyka
Analiza Markowitza oraz miary ryzyka

Aleksandra Mozdyniewicz

31.05.2017

Spis treści

1	Przedstawienie danych	2
2	Analiza portfelowa Markowitza	4
2.1	Porównanie portfela X i Y	5
2.2	Krzywa Markowitza	6
3	Analiza ryzyka	7
4	Wnioski	8

1. Przedstawienie danych

Do przeprowadzenia analizy finansowej wzięto dane 10. spółek z indeksu S&P 500. Jest to indeks, w którego skład wchodzi 500 przedsiębiorstw o największej kapitalizacji, notowanych na największej giełdzie świata - New York Stock Exchange (z ang. Nowojorska Giełda Papierów Wartościowych).

W skład portfela inwestycyjnego wchodzi następujące spółki z branży odzieżowej, tytoniowej, filmowej, spożywczej oraz technologicznej:

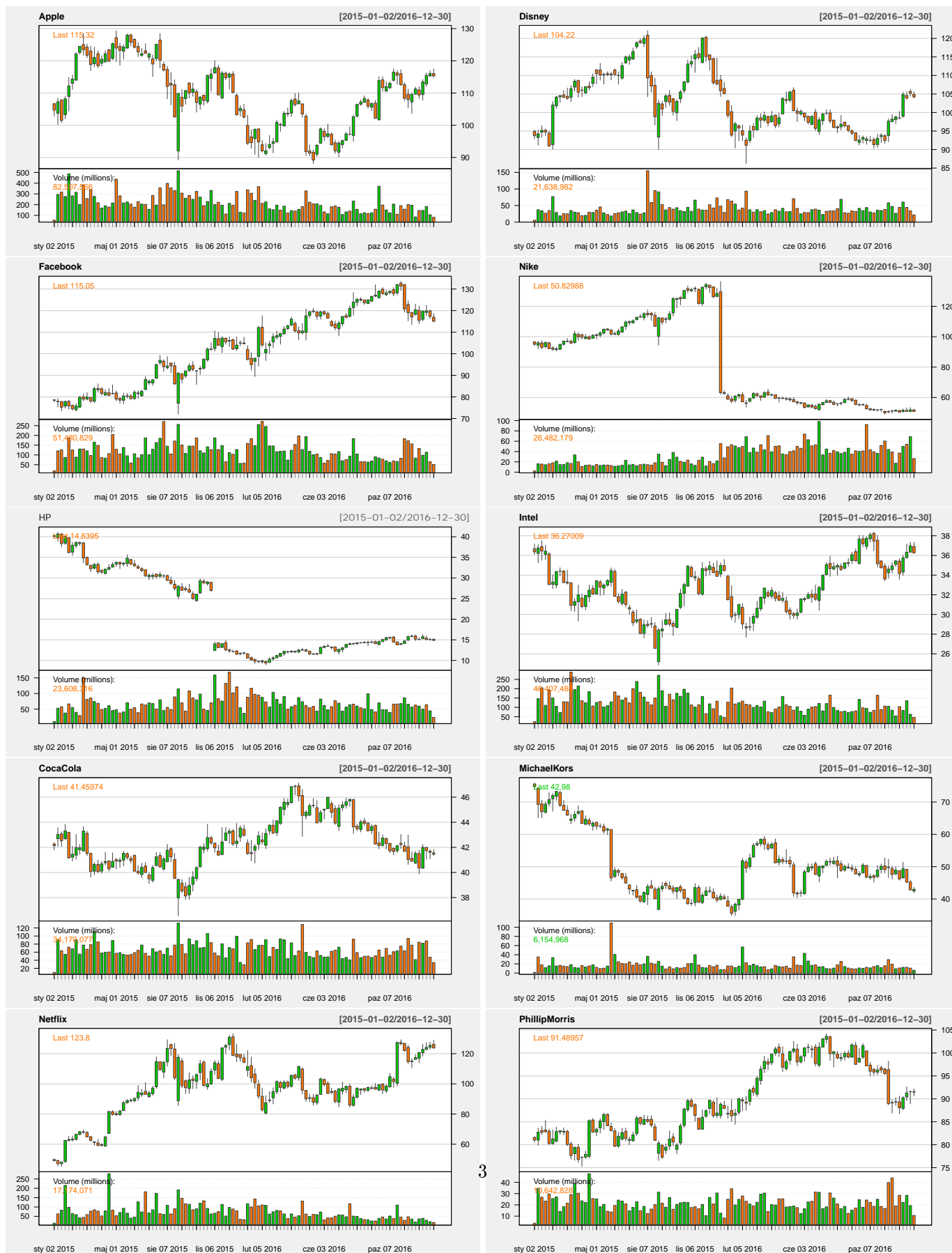
- Apple [apl]
- Walt Disney Company [dis]
- Facebook [fbk]
- Nike [nke]
- HP [hpq]
- Intel [int]
- Coca Cola Company [coc]
- Michael Kors Holdings [kor]
- Netflix [nfx]
- Philip Morris International [phm]

Dzienne dane w formacie OHLC (Open, High, Low, Close, Volume) dla powyższych spółek dotyczące okresu od 01.01.2015 do 01.01.2017 pobrano z serwisu stooq.pl.

Analizę portfelową przeprowadzono w programie statystycznym RStudio. Po uprzedniej zamianie danych dziennych na tygodniowe.

Rysunek 1 przedstawia wykresy świecowe spółek znajdujących się w przedstawionym powyżej portfelu inwestycyjnym. Zielony kolor świecy świadczy o tym, iż cena zamknięcia we wskazanym dniu była wyższa niż cena otwarcia. Kolor pomarańczowy świadczy o sytuacji przeciwnej. Wysokość knotu pokazuje cenę najwyższą i najniższą w danym dniu, a granice świec odpowiadają ceną otwarcia i zamknięcia. Pod wykresem każdej spółki znajduje się informacja o wysokości wolumenu. Największy wzrost w analizowanym okresie inwestycyjnym osiągnęły Facebook i Netflix, a największy spadek zanotowały spółki HP oraz Nike. W listopadzie 2015 roku HP dokonało podziału przedsiębiorstwa, co było przyczyną aż 53% spadku. Nike natomiast w tym samym czasie zatwierdziło czteroletni program skupu akcji oraz wzrost kwartalnych dywidend z 12% do 14%.

Rysunek 1: Wykresy świecowe dla spółek z portfela.



2. Analiza portfelowa Markowitza

Dla każdej ze spółek wyliczono proste tygodniowe stopy zwrotu dla cen zamknięcia. Ich średnie przedstawia *Tablica 1*. Najwyższą średnią stopę zwrotu uzyskała *Netflix* (0.01149)¹, natomiast najniższą *HP* (−0.006993). Po analizie wykresów świecowych wynik ten nie wzbudził zastrzeżeń.

apl	dis	fbk	nke	hpq	int	coc	kor	nfx	phm
0.001588	0.001414	0.004237	-0.003619	-0.006993	0.000555	0.000023	-0.003512	0.011490	0.001464

Tablica 1: Średnie tygodniowe stopy zwrotu ze spółek.

Wartości kowariancji między poszczególnymi spółkami pokazuje *Tablica 2*. Jednak najbardziej istotne w przeprowadzonej analizie są wartości na diagonalu (przekątnej) tej macierzy. Wskazują one wartość odchylenia średniej, czyli wariancję pomiędzy naszymi zmiennymi. Największe zróżnicowanie stóp zwrotu ma *Netflix* (0.005726), a najmniejsze *Coca Cola* 0.000361.

	apl	dis	fbk	nke	hpq	int	coc	kor	nfx	phm
apl	0.001329	0.000412	0.000425	0.000407	0.000557	0.000646	0.000215	0.000348	0.001282	0.000242
dis	0.000412	0.000802	0.000333	0.000474	0.000515	0.000424	0.000154	0.000323	0.000457	0.000174
fbk	0.000425	0.000333	0.001120	0.000533	0.000063	0.000450	0.000233	0.000278	0.000626	0.000260
nke	0.000407	0.000474	0.000533	0.003424	0.000183	0.000316	0.000158	0.000149	0.000822	0.000160
hpq	0.000557	0.000515	0.000063	0.000183	0.004050	0.000816	0.000316	0.000093	0.000568	0.000400
int	0.000646	0.000424	0.000450	0.000316	0.000816	0.001156	0.000290	0.000195	0.000689	0.000335
coc	0.000215	0.000154	0.000233	0.000158	0.000316	0.000290	0.000361	0.000185	0.000406	0.000283
kor	0.000348	0.000323	0.000278	0.000149	0.000093	0.000195	0.000185	0.003646	0.000593	0.000152
nfx	0.001282	0.000457	0.000626	0.000822	0.000568	0.000689	0.000406	0.000593	0.005726	0.000746
phm	0.000242	0.000174	0.000260	0.000160	0.000400	0.000335	0.000283	0.000152	0.000746	0.000597

Tablica 2: Macierz kowariancji dla stóp zwrotu.

Dysponując kapitałem początkowym równym 1000 USD przeprowadzono następującą strategię inwestycyjną w oparciu o model Markowitza. Dla pierwszych dwunastu tygodni dokonano doboru wag portfela inwestycyjnego w taki sposób aby oczekiwana stopa zwrotu była równa średniej stopie zwrotu ze wszystkich spółek, a wariancja była jak najmniejsza. Przy pomocy uzyskanych wag otrzymano stopę zwrotu w trzynastym okresie. Tę samą analizę powtarzano dla kolejnych dwunastotygodniowych okresów dokonując aktualizacji składu portfela co tydzień. W wyniku tego otrzymano 92 stopy zwrotu, a końcowa wartość portfela wyniosła 1515,42 USD. Otrzymano również 92 dziesięcioelementowe wektory wag, których suma dawała liczbę jeden. *Tablica 3*. przedstawia ich rozkład i średnią z pierwszych pięciu okresów.

W pierwszym okresie najwięcej kapitału własnego zainwestowano w spółkę *Philip Morris*, natomiast w kolejnych czterech nastąpiła inwestycja w spółkę *Facebook*. Ujemne wagi portfela oznaczają krótką sprzedaż, czyli strategię inwestycyjną polegającą na sprzedaży papierów wartościowych niebędących własnością sprzedającego. Transakcja ta jest zawierana w celu zarabiania na spadkach kursów papierów wartościowych. W całym analizowanym okresie ujemne wagi przyjmowało od dwóch do sześciu spółek, a średnio największe z nich miała *Coca Cola* (0.421869), a najmniejsze *Michael Kors* (−0.087559).

¹ Wyniki zaprezentowane w projekcie są zaokrąglone do sześciu miejsc po przecinku.

	apl	dis	fbk	nke	hpq	int	coc	kor	nfx	phm
1	-0.008256	0.094048	-0.016096	0.214796	-0.276454	0.160522	-0.240670	0.306694	-0.004377	0.769794
2	-0.126857	0.175116	0.583906	-0.507597	-0.194255	-0.131487	0.442670	0.331827	-0.018347	0.445023
3	-0.192287	0.290993	0.775587	-0.691004	-0.298383	-0.165806	0.468486	0.286754	0.026494	0.499166
4	-0.177409	0.226283	0.808569	-0.697611	-0.153180	-0.252895	0.733250	0.352420	0.049770	0.110804
5	-0.086325	0.268507	0.763299	-0.574173	-0.209544	-0.267784	0.628921	0.348618	0.101653	0.026829
m	-0.118227	0.210989	0.583053	-0.451118	-0.226363	-0.131490	0.406531	0.325263	0.031039	0.370323

Tablica 3: Optymalne wagi dla pierwszych pięciu okresów inwestycyjnych i ich średnie wartości.

2.1 Porównanie portfela X i Y

Następnym krokiem było stworzenie portfela inwestycyjnego, gdzie począwszy od dwunastego tygodnia w każdą ze spółek inwestowano 10% kapitału.

Nadano mu nazwę portfel Y. Zabieg ten miał na celu porównanie tych dwóch portfeli inwestycyjnych oraz określenie, która z nich jest bardziej preferowana.

Tablica 4. przedstawia wartości średnich i odchylenia stóp zwrotu dla portfeli X i Y. Na jej podstawie stwierdzono, że portfel X ma je dużo bardziej rozproszone. Rysunek 2 przedstawiający stopy zwrotu oraz wartości portfeli X i Y dowodzi prawdziwości tej tezy. Zauważono, że dla okresu 32 stopa zwrotu z portfela X osiągnęła największą wartość 0.348615. Ewidentnie jest to wartość odstająca, która istotnie wpływa na wartość średniej oraz odchylenia stóp dla tego portfela. Wykres wartości portfela X w okresie 32 (marzec 2015r.) również notuje ogromny wzrost w tym okresie. Jest to bardzo zaskakujące zjawisko, ponieważ w tym okresie indeks S&P 500 notował spadek.

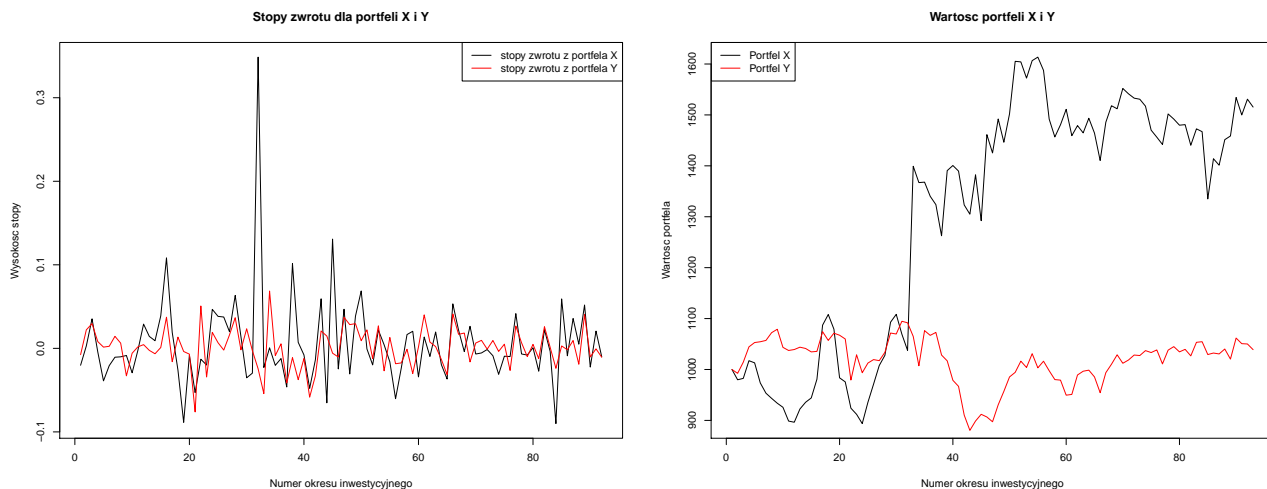
	portfel X	portfel Y
średnia	0.005746	0.000698
odchylenie	0.052148	0.023877

Tablica 4: Średnie stopy zwrotu i ich odchylenia dla portfeli X i Y.

wartość	portfelX	portfelY
początkowa	1000	1000
min.	893.7	880.5
max.	1613.5	1094.7
końcowa	1515.42	1038.939

Porównując otrzymane dwa portfele inwestycyjne stwierdzono, iż przez pierwsze 32 okresy portfel Y przyjmował większe wartości, a następnie nastąpiło ogromne odbicie dla portfela X dzięki odstającej stopie, a następnie do końca okresu dominował swoją wartością nad portfelem Y. W ostatnim okresie różnica między dwoma inwestycjami wyniosła 476.4805 USD czyli niemal połowę zainwestowanego kapitału (Tablica 5). Jednak na tej podstawie nie można jednoznacznie powiedzieć, który portfel jest bardziej preferowany.

Tablica 5: Wybrane wartości portfeli X i Y.



Rysunek 2: Wykres stóp zwrotu i wartości portfeli X i Y.

W celu odpowiedzi na to pytanie policzono współczynnik Sharpe'a dla dwóch rozważanych portfeli. Współczynnik Sharpe'a (Sharpe Ratio) jest to wskaźnik określający wysokość premii za ryzyko. Im jest on wyższy tym portfel daje większą stopę zwrotu przy danym poziomie ryzyka. Definiujemy go w następujący sposób:

$$SR = \frac{\overline{R_x} - R_{free}}{\sigma_{R_x}}$$

$\overline{R_x}$ – średnia stopa zwrotu z portfela w danym okresie

R_{free} – średnia stopa zwrotu wolna od ryzyka w danym okresie

σ_{R_x} – odchylenie standardowe rynkowej stopy zwrotu w danym okresie

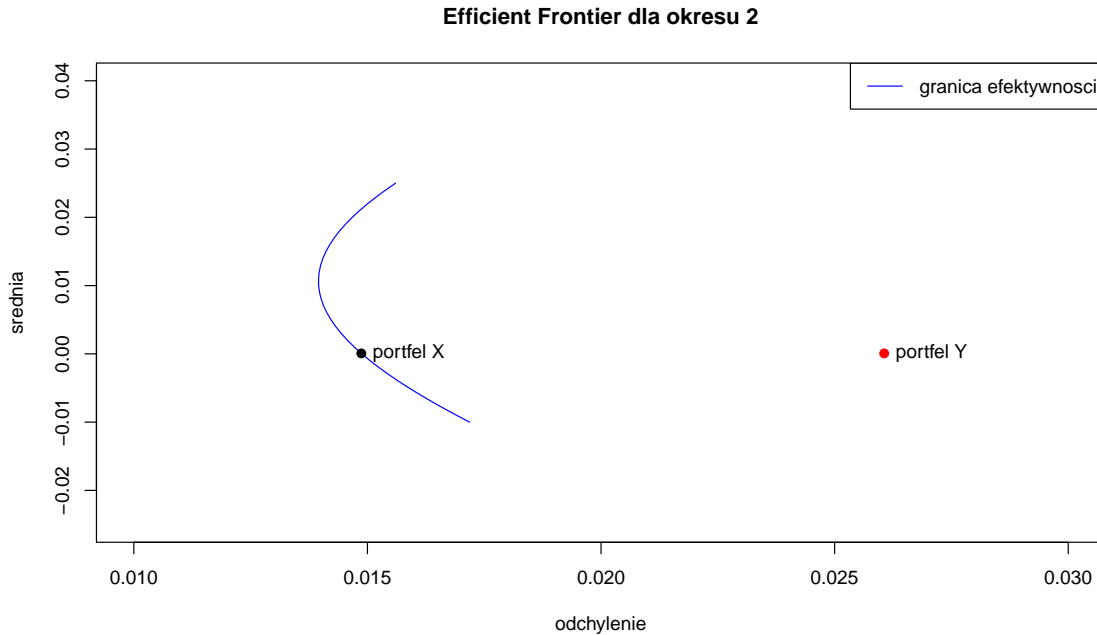
W poniższych rozważaniach przyjęto, że średnia stopa zwrotu wolna od ryzyka w danym okresie wynosi 0%, ponieważ w portfelu nie ma aktywów wolnych od ryzyka. Tablica 6. przedstawia wartość współczynników Sharpe'a dla poczynionych inwestycji. Na jej podstawie stwierdzono, iż potencjalny inwestor powinien przyjąć strategię inwestycyjną zastosowaną dla portfela X, ponieważ uzyska wyższą stopę zwrotu przy ustalonym ryzyku.

	portfelX	portfelY
SR	0.110189	0.029250

Tablica 6: Współczynnik Sharpe'a dla portfeli X i Y.

2.2 Krzywa Markowitza

Następnym krokiem przeprowadzonej analizy było przeanalizowanie krzywej efektywności (z ang. efficient frontier) dla okresu 2. Krzywa efektywności przedstawia zbiór portfeli optymalnych na płaszczyźnie odchylenie standardowe, średnia stopa zwrotu. Wykres krzywej przypomina w kształcie naboja. Na jego czubku znajduje się portfel o minimalnej wariancji. Celem rozważań jest znalezienie portfela leżącego na krzywej efektywności o minimalnej wariancji. W tym celu narysowano wykres efficient frontier dla okresu 2 dla portfela X (Rys. 3) oraz zaznaczono na nim wartości portfeli X i Y (Tab. 7)



Rysunek 3: Krzywa efektywności w okresie 2 dla portfela X.

Tablica 7: Współrzędne portfeli X i Y dla okresu drugiego, wraz z współczynnikiem Sharpe’a.

	odchylenie	średnia	SR
portfelX	0.014869	0.000069	0.004649
portfelY	0.026060	0.000069	0.002653

Portfele mają tą samą średnią stopę zwrotu, jednak ich odchylenia różnią się o 0.011191. Na wykresie punkty te są znacznie oddalone od siebie, czego powodem mogą być znaczne różnice w wagach (Tablica 8.). Na podstawie wartości współczynnika Sharpe’a oraz odległości między portfelami stwierdzono, że dla potencjalnego inwestora strategia dla portfela X jest bardziej korzystna.

	apl	dis	fbk	nke	hpq	int	coc	kor	nfx	phm
wX	-0.126857	0.175116	0.583906	-0.507597	-0.194255	-0.131487	0.442670	0.331827	-0.018347	0.445023
wY	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000	0.100000
-	-0.226857	0.075116	0.483906	-0.607597	-0.294255	-0.231487	0.342670	0.231827	-0.118347	0.345023

Tablica 8: Wagi dla okresu 2 oraz ich różnica.

3. Analiza ryzyka

Dla portfeli X i Y przeprowadzono analizę ryzyka. Pierwszą sprawdzaną miarą ryzyka był Value at Risk. VaR jest to graniczna kwota, jaką można stracić w wyniku inwestycji w portfel w określonym czasie i przy założonym poziomie ufności. Dla stóp zwrotu z dwóch analizowanych portfeli wyliczono tygodniowy VaR na poziomie 5% metodą historyczną, zakładającą rozkład normalny oraz zakładającą rozkład t-studenta.

Do obliczenia wartości VaR-u historycznego oraz zakładającego rozkład normalny użyto następujących wzorów:

- $VaR(x)_\alpha^{hist} = -x_{(\lfloor n\alpha+1 \rfloor)}$
gdzie $x_{(k)}$ to k -ta statystyka pozycyjna dla próbki o długości k , a $\lfloor z \rfloor$ jest liczbą całkowitą z $z \in \mathbb{R}$
- $VaR(x)_\alpha^{norm} = -(\bar{x} + \bar{\sigma}(x)\Phi^{-1}(\alpha))$
gdzie Φ^{-1} to funkcja odwrotna do dystrybucyj standardowego rozkładu normalnego.
- dla rozkładu t-studenta VaR obliczono metodą Monte Carlo. Wylosowano 100000 obserwacji z rozkładu t-studenta dopasowanego do danych, a następnie przesortowano próbkę oraz policzono z niej kwantyl na poziomie 5%. Na koniec zmieniono znak na przeciwny aby otrzymać wartość dodatnią.

Wyniki tej analizy przedstawia Tablica 9. Można zauważyć, że dla portfela Y wartości VaR prawie się nie różnią. Inwestując w portfel Y, graniczna kwota jaką można stracić w okresie tygodnia na poziomie istotności 5% przy zainwestowaniu 1000 USD wynosi około 38 USD. Natomiast dla portfela X otrzymano nierównomierne wartości. Mogło to być spowodowane wystąpieniem wcześniej wspomnianej wartości odstającej, dlatego podjęto próbę ponownego dopasowania rozkładu t-studenta do stóp zwrotu portfela X po uprzednim usunięciu obserwacji nr 32. Po zmianie modelu VaR historyczny nie zmienił się, natomiast rozkłady normalny i t-studenta zyskały dokładniejsze dopasowania, czego konsekwencją stały się ewentualnie mniejsze graniczne straty. Należy jednak zaznaczyć liczyć się z możliwością granicznej tygodniowej straty w wysokości 80 USD.

Drugą miarą ryzyka, dla której przeprowadzono analizę jest Expected Shortfall. ES na poziomie istotności α oznacza oczekiwaną stratę dla $\alpha\%$ najmniejszych stóp zwrotu. Estymator liczono przy pomocy następującego wzoru:

$$ES(x)_\alpha^{hist} = -\overline{x_{(\lfloor n\alpha+1 \rfloor)}}$$

VaR	portfelX	portfelY
hist	0.052937	0.037524
norm	0.080029	0.038575
tstud	0.067475	0.037255
VaR2	portfelX	portfelY
hist	0.052937	0.037524
norm	0.060201	0.038575
tstud	0.061078	0.036820
ES	portfelX	portfelY
hist	0.061271	0.045977
norm	0.090942	0.043751
tstud	0.095345	0.045206
ES2	portfelX	portfelY
hist	0.061271	0.045977
norm	0.068437	0.043751
tstud	0.075461	0.045206

Tablica 9: VaR i ES

Dla stóp zwrotu z analizowanych portfeli wyliczono tygodniowy ES na poziomie 8% tymi samymi trzema metodami. Jednak tym razem Do obliczenia ES dla rozkładu normalnego i t-studenta zastosowano metodę Monte Carlo. Wylosowano 100000 obserwacji z rozkładów dopasowanych do danych a następnie użyto estymatora historycznego dla ES. W tej analizie tak jak dla VaR przeprowadzono dwie próby. Efekty obrazuje Tablica 9. Wiedzimy, że oczekiwana strata dla portfela X wynosi od 6% – 9%, a dla portfela Y ok. 4.5%. Wnioskujemy, że portfel X narażony jest na większe straty.

Kolejnym rozważaniem było używając ES na poziomie 8% znalezienie optymalnych dodatnich wag $a + b = 1$ tak, aby ryzyko portfela $aX + bY$ było najmniejsze. Po optymalizacji otrzymano następujące wagi: $a = 0.236319$ $b = 0.763681$. Czyli aby ryzyko było jak najmniejsze należy zainwestować 24% kapitału w portfel X, a 76% w portfel Y.

4. Wnioski

Mimo, iż w pierwszej części rozważań korzystniejszym portfelem był portfel X, po przeprowadzeniu optymalizacji oraz analizie ryzyka stwierdzono, iż portfel Y charakteryzuje się mniejszym ryzykiem. Jednak zysk portfela X jest na tyle duży, iż powinien zniwelować ewentualne straty, dlatego strategia inwestycyjna X jest lepsza.