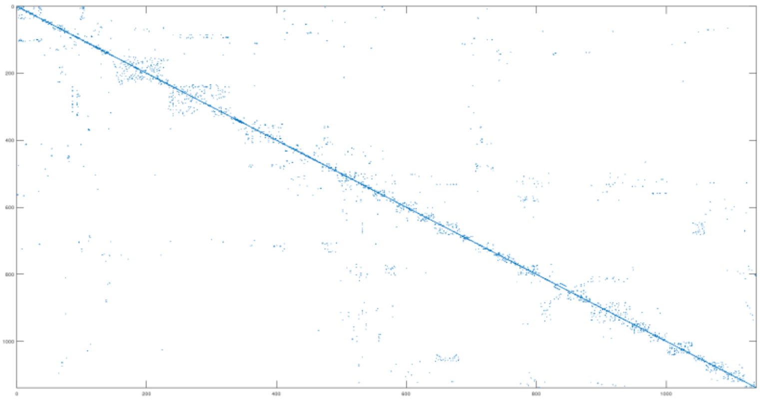
Atividade 3 Fatoração de Cholesky e Métodos Iterativos para Resolução de Sistemas Lineares

João Pedro Bizzi Velho 218711

Questão 1

(a) O gráfico de esparsidade plotado pelo comando spy é:



Logo, notamos que a matriz A possui alta esparsidade, isto é, apresenta uma alta quantidade de elementos nulos (toda a área branca do gráfico) em relação à toda a área do gráfico.
Fazendo um pequeno código para verificar qual a esparsidade da matriz dada chegamos que:

- Existem 1.290.990 elementos nulos na matriz
- Existem 1.295.044 elementos no total
- A esparsidade é, portanto, $esparsidade = \frac{1290990}{1295044} = 0{,}99686 = 99{,}686\%$

(b) Uma matriz A com elementos a_{ij} é simétrica se:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Fazendo este teste no Octave conclui-se que a matriz é simétrica, pois para qualquer valor de i e j a relação acima é satisfeita.

Fazendo o teste $x^T Ax > 0$ sendo x todos os vetores coluna da matriz A, concluímos que a matriz é definida positiva.

(c) O tempo gasto é de 0,00062895 segundos. Já o resíduo é de 1,5635 e-16 e o erro de 4,0011e-12. Cond(A) resulta em 8572645,8968. Portanto, a condição $Erro \leq cond(A) * Residuo$ é satisfeita.

(d) Usando os seguintes comandos:

```
R = chol(A);
tic;y = R'\b;Tempo = toc
tic;x= R\y;Tempo = toc
```

Temos que os tempos, o resíduo e o erro resultantes são:

```
Tempo =  0.00022602
Tempo =  0.000081062
Residuo =    2.2114e-16
Erro =    2.4143e-12
```

Logo, temos que o tempo resultante é de 0,000307052, que é menor (aproximadamente metade) do tempo referente ao item anterior. É possível verificar também, que a inequação dada é satisfeita. Comparando com método anterior notamos que apesar do resíduo ter aumentado, o erro relativo foi reduzido.

Questão 2

(a) Encontrando a esparsidade de cada matriz:

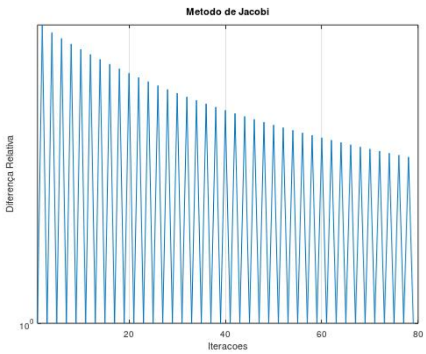
Sistema	A	B	X
1	0,996	0,604	0,319
2	0,*980*	0,194	0,194
3	0,999	0,420	0,420
4	0,996	0,505	0,505
5	0,998	0,505	0,505

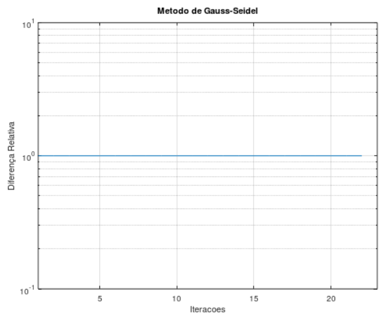
Conclui-se que todos os sistemas são esparsos já que a matriz A de todos os sistemas são esparsas.

(b) Para ambos os métodos, a matriz A deve ser não singular, isto é, o determinante deve ser diferente de zero, e os elementos da diagonal principal não podem ser nulos.

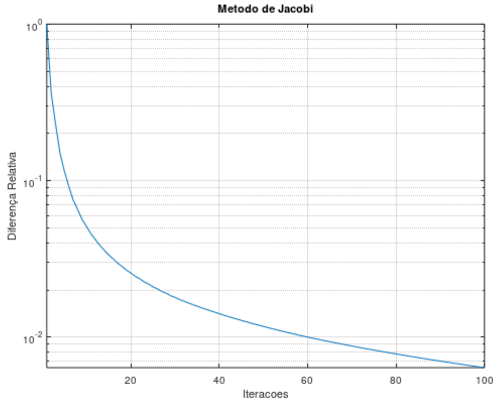
Checando os determinantes temos que não podemos aplicar os métodos nos sistemas 1 e 3, pois det(A_1) = det(A_3) = 0 e existem elementos nulos em sua diagonal principal.

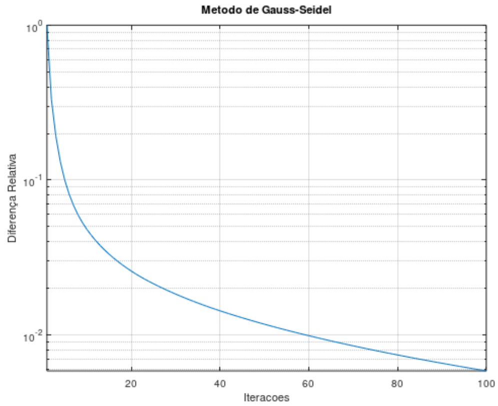
(c) Utilizando as funções disponibilizadas com os valores *default* para os sistemas 2, 4 e 5 temos os seguintes resultados:
Para o sistema 1:



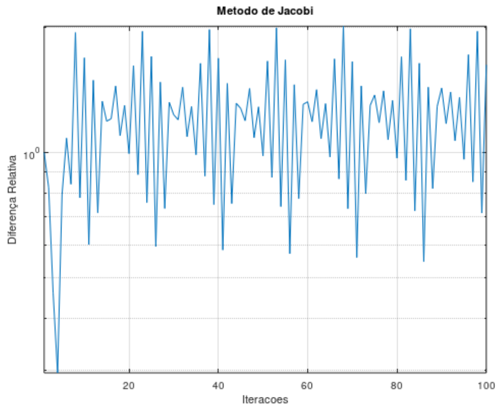


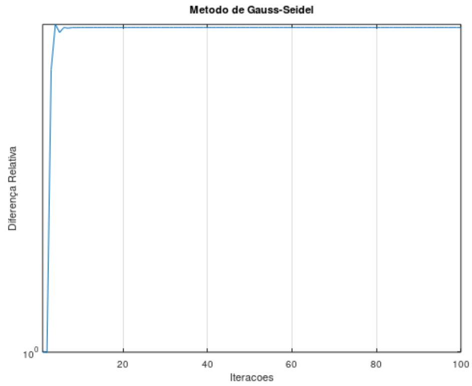
Neste caso notamos que o método de Gauss-Seidel apresenta um erro relativo muito menor independente do número de iterações, enquanto o método de Jacobi apresenta uma alternância entre altos valores de erro e baixos valores de erro conforme varia-se o número de iterações.





Comparando os dois métodos para o sistema 4 notamos que ambos apresentam acentuada redução da diferença quando se aumenta o número de iterações.





Neste último sistema, notamos um comportamento peculiar ao aplicarmos o método de Jacobi, apresentando valores de diferença próximos a 1. Já o método de Gauss- Seidel apresenta um aumento significativo quando aumentamos o número de iterações.

Questão 3