MS211 - Atividade 4: Zeros de Funções e Resolução de Sistemas de Equações Não-Lineares

Aluno: João Pedro Bizzi Velho
RA: 218711

Questão 1

Dados:

$$p_0 = 100 \,|\, K = 1000 \,|\, A = ln(K \setminus p_0) \rightarrow A = ln(10) |\, r = 0.025$$

Qual o valor de t_m tal que $p(t_m) = 1000/2 = 500$ sendo que $p(t_m)$ é dado por:

$$p(t) = K\ exp(-A\ exp\ (-rt)) \rightarrow p(t) = 1000\ exp(-ln(10)\ exp(-0.025t))$$
$$p(t_m) = 500 = 1000\ exp\ (-ln(10)\ exp(-0.025t))$$
$$500 = 1000e^{-ln\ 10 * e^{-0.025t}}$$

Ou ainda:

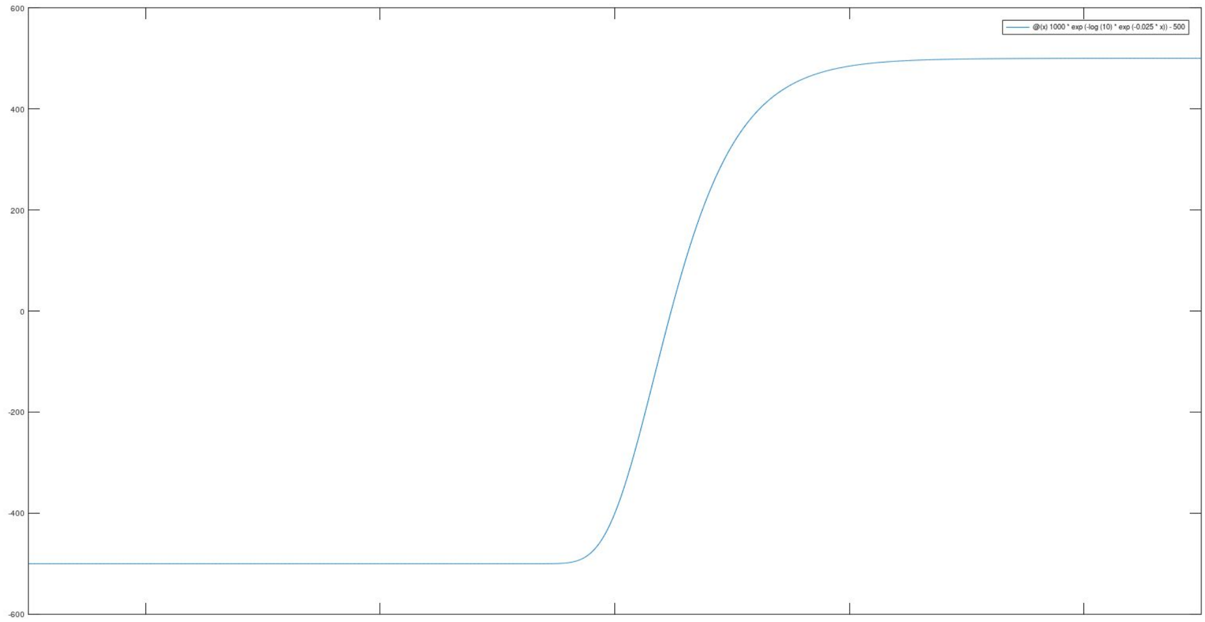
$$0 = 1000e^{-ln\ 10 * e^{-0.025t}} - 500 \rightarrow f(t) = 1000e^{-ln\ 10 * e^{-0.025t}} - 500$$

Podemos escolher dentre os métodos da bissecção, da secante e de Newton. Temos que nossa função é dada por $f(t) = 1000e^{-ln\ 10 * e^{-0.025t}} - 500$ e queremos encontrar o valor de t tal que $f(t) = 0$. Podemos trabalhar com o método de Newton, porém, este método requer o cálculo da derivada da função a qual é complicada, então é preferível trabalhar com outros métodos, como o da Bissecção ou da Secante. Para o método da secante precisamos conhecer o gráfico da função para determinar os dois pontos iniciais, dando o "chute calibrado". Para o método da bissecção não é necessário conhecer o gráfico da função, portanto, optamos por este método, além de ser mais simples em relação ao método de Newton.

Optando pelo método da bissecção e com o chute inicial (observando o gráfico) de que $f(a) * f(b) < 0$, sendo $a = 45 \,|\, b = 50$, $f(a) = -26,5$ e $f(b) = 17,0054$. Com isso podemos iniciar o cálculo do método. Temos que para a primeira iteração:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = 47,5 \rightarrow f(47,5) = -4,53 \Rightarrow f(a)f(x_0) > 0 \rightarrow a = x_0 \rightarrow x_1 = \frac{a+b}{2} = 48,75 \cdots$$

Utilizando o código disponibilizado no Google Classroom, com os valores iniciais mencionados e um erro de $\varepsilon = 10^{-7}$ para um limite de dez mil iterações, temos o resultado de $x = 48,0218$, com apenas 27 iterações no total. Comparando com o resultado obtido pela simplificação realizada pelo Symbolab $t = 48,02181$, obtido pela manipulação da equação, notamos que o método escolhido obteve sucesso ao calcular a aproximação para o zero da função.Plotando o gráfico:



Questão 2

(a)

Considerando a como comprimento da viga maior após a intersecção e b como o comprimento da viga menor após a intersecção, W como a largura total do galpão e t como a largura do galpão:

$$a^2 = 64 + t^2$$

$$b^2 = 64 + (W - t)^2$$

Podemos com isto fazer uma comparação entre os triângulos semelhantes, nos levando à:

$$\frac{30}{W} = \frac{a}{t}$$

$$\frac{20}{W} = \frac{b}{(W - t)}$$

Elevando os dois lados ao quadrado de ambas as equações nos permite substituir $a^2\ e\ b^2$:

$$\frac{900}{W^2} = \frac{64 + t^2}{t^2}$$

$$\frac{400}{W^2} = \frac{64 + (W - t)^2}{(W - t)^2}$$

Temos agora um sistema em função de W e de t, bastando, portanto, resolver o sistema por substituição. Porém, fica muito complicado resolver o sistema desta forma, logo, tentamos outra abordagem, desta vez utilizando os ângulos que as vigas formam com a linha imaginária (darei o nome de l) que é paralela ao chão e que passa pelo ponto de intersecção das vigas. O ângulo formado pela reta l e pela viga de 20 m é denominado α e o ângulo formado pela outra viga e a reta l é denominado β, com isto podemos utilizar as tangentes desses ângulos (sendo que os ângulos são OPV, logo o ângulo que a parte de cima de uma viga forma com a reta l é o mesmo que a parte de baixo da mesma viga forma com a reta).

Descreveremos a largura do galpão como W, e com o uso da ideia de proporcionalidade, as duas partes da largura (dividida pela projeção do ponto de intersecção das vigas na largura), temos que a maior parte da largura é dada por pW e a consequentemente a menor pode ser descrita por $(1-p)W$. Com isto, podemos encontrar expressões para a tangente dos ângulos definidos anteriormente:

$$tg(\alpha) = \frac{8}{pW} = \frac{\sqrt{400 - W^2} - 8}{(1-p)*W} \text{ e } tg(\beta) = \frac{8}{(1-p)\,W} = \frac{\sqrt{900 - W^2} - 8}{p*W}$$

Para ser possível trabalhar somente com a largura W do galpão precisaremos remover a constante de proporcionalidade p. Logo, isolando $\frac{1-p}{p}$ nas duas equações e igualando-as teremos o seguinte:

$$\frac{\sqrt{400 - W^2} - 8}{8} = \frac{8}{\sqrt{900 - W^2} - 8} \rightarrow 64 = 64 - 8\sqrt{400 - W^2} - 8\sqrt{900 - W^2} + \sqrt{900 - W^2}\sqrt{400 - W^2}$$

(b)

Isolando 0 em um dos lados teremos a função a qual buscaremos o valor de W que zera a função:

$$f(L) = \sqrt{900 - W^2}\sqrt{400 - W^2} - 8\sqrt{400 - W^2} - 8\sqrt{900 - W^2}$$

Com isto, precisamos determinar qual método será utilizado para obter o zero da função. Notamos que novamente a função apresenta uma derivada um pouco complexa, logo, optamos pelo método da bissecção utilizando o código disponibilizado novamente. As como aproximações iniciais podemos utilizar $a = 5$ e $b = 19$, já que não podemos ter a largura igual ao tamanho da viga. O erro escolhido é o mesmo do item 1, $\varepsilon = 10^{-7}$.

(c)

Aplicando a equação no código pelo Octave, temos que o zero da função é dado em $W = 16,212$, com $f(W) = 0.00000009 \simeq 0$, com 32 iterações no total. Poderíamos utilizar o método da secante também, de forma a reduzir o número de iterações, já que este método apresenta uma aproximação inicial melhor em relação ao da bissecção. Assim como no item anterior, podemos estudar a validade do resultado ao resolver a equação pelo Symbolab, a qual resulta em 16,212, logo, a aproximação é válida.

Questão 3

Considerando a função: $x(t) = c_1 + 0,5(e^{(t+c_2)} + e^{-(t+c_2)})$:

(a) Encontrar c_1 e c_2 tal que $x(0) = 1$ e $x(1) = 2$.

Dada as condições iniciais podemos substituir na equação:

$$1 = c_1 + 0,5(e^{c_2} + \frac{1}{e^{c_2}})$$
$$2 = c_1 + 0,5(e^{1+c_2} + \frac{1}{e^{1+c_2}})$$

Isolando c_1 teremos:

$$c_1 = -0,5(e^{c_2} + \frac{1}{e^{c_2}}) + 1 = -0,5(e^{1+c_2} + \frac{1}{e^{1+c_2}}) + 2$$
$$(e^{c_2} + \frac{1}{e^{c_2}}) = (e^{1+c_2} + \frac{1}{e^{1+c_2}}) - 2 \rightarrow e^{c_2}(1 - e) + e^{-c_2}(1 - \frac{1}{e}) = -2 \text{ (I)}$$

Solucionando este sistema com a ajuda do Symbolab, temos que:

$$c_2 = 0,35245$$

Basta agora substituir o valor obtido em um das equações:

$$c_1 = -0,5(e^{0,35245} + \frac{1}{e^{0,35245}}) + 1$$
$$c_1 = -0,0627561$$

Substituindo os valores obtidos e checando se as condições iniciais impostas são satisfeitas:

$$x(0) = 1 = -0,0627561 + 0,5(e^{(0,35245)} + e^{-(0,35245)}) = 1$$

Primeira condição satisfeita.

$$x(1) = 2 = -58182637324.8 + 0,5(e^{26,48} + e^{-26,48}) = 2$$

Segunda condição satisfeita!

Portanto, temos que:

$$c_1 = -0,06275$$
$$c_2 = 0.35245$$

(b) Usando agora o método de Newton para determinar uma aproximação para as constantes considerando o critério de parada 10^{-3} e aproximação inicial $(0, \frac{1}{2})$

Para determinar as aproximações podemos utilizar as seguintes equação $f(c_1, c_2)$ e $g(c_1, c_2)$, que são dadas ao substituirmos as duas condições dadas no enunciado, logo:

$$f(c_1, c_2) = c_1 - 1 + 0,5(e^{c_2} + e^{-c_2})$$
$$g(c_1, c_2) = c_1 - 2 + 0,5(e^{c_2+1} + e^{-c_2-1})$$

Calculando as derivadas parciais de cada função:

$$f_{c_1}(c_1, c_2) = 1;\ g_{c_1}(c_1, c_2) = 1$$
$$f_{c_2}(c_1, c_2) = 0,5(e^{c_2} + e^{-c_2});\ g_{c_2}(c_1, c_2) = 0,5(e^{c_2+1} + e^{-c_2-1})$$

Organizando este é o Jacobiano a ser utilizado. Aplicando o método de Newton para tal, chegamos nos seguintes resultados:

$$c_1 = -0,0628$$
$$c_2 = 0,3525$$

Comparando com os resultados obtidos no item anterior, concluímos que a aproximação realizada converge para o valor obtido por manipulação da expressão.

Questão 4

Na situação dada, eu indicaria o primeiro produto, ou seja, aquele com o método da bissecção e o método de Newton. A justificativa é pelo fato de que o segundo método funciona para grande parte dos casos e ainda também para sistemas lineares como foi utilizado no item 3. Além disto, o método da bisseção é ótimo para funções bem comportadas, sendo simples, e bastante efetivo, com pequenos gastos computacionais. Concluindo, um método complementaria o outro, logo, este produto seria minha escolha.