Quesiti

Numeri reali e successioni

1. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni monotòne limitate. Posto $c_n = a_n + b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora la succession $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- (A) è convergente.
- (B) è monotòna.
- (C) può essere divergente.
- (D) è illimitata.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

2. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)

Sia $E = \left\{\frac{2n+1}{2n-1} \ : \ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$. Allora:

- (A) E ha minimo.
- (B) E non ha massimo.
- (C) E non è limitato.
- (D) $\inf E = 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

3. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)

Sia $a_n = \ln\left(\frac{n+15}{n+6}\right)$ e $A = \{a_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Allora:

- (A) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.
- (B) $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.
- (C) A ammette un estremo inferiore, ma non un minimo.
- (D) A ammette un estremo superiore, ma non un massimo.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

4. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)

Quanto vale il $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathrm{e}^n - n^{\sqrt{n}}\right)$?

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) e.
- (D) $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

5. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Per $n \to \infty, a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ significa

(A) $\forall \delta > 0 \exists M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > M$ allora $\ell - \delta < a_n < \ell + \delta$.
(B) $\exists \delta > 0$ tale che definitivamente $\ell - \delta < a_n < \ell + \delta$.
(C) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall n > \epsilon$ allora $\ell - \delta < a_n < \ell + \delta$.
(D) $\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > M$ allora $|a_n| < \ell + \epsilon$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

6. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) In $\mathbb{R}$, una successione di numeri razionali non può convergere a $\sqrt{3}$.
(B) Non esiste alcuna successione di numeri irrazionali il cui limite sia 1.
(C) In $\mathbb{R}$, ogni successione convergente è monotòna.
(D) Se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, esiste $c \in \mathbb{Z}$ tale che $x < c < y$.
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

7. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Siano $(a_n), (b_n)$ le successioni reali definite (per n intero positivo) nel modo seguente: $a_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$.

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$
(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{\mathrm{e}}{2}$
(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$
(D) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}^{1/2}$
(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

8. A.A. 2021/22, primo appello (2 affermazioni corrette, 2 punti)
Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove

$$a_n = (1 - \sqrt{n}) \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2n+1}} - 1\right).$$

[A] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente.
[B] $a_n > \mathrm{e}$ definitivamente.
[C] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata inferiormente.
[D] $a_n < \pi$ definitivamente.
[E] $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è non negativa.

9. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- (A) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora vale definitivamente $a_n \geq 0$ oppure $a_n \leq 0$.
- (B) Non esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
- (C) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ per $n \to \infty$,
  allora sicuramente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non tende a zero.
- (D) Ogni successione definitivamente crescente ammette limite in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

10. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $a_n = \ln\left(\frac{n^2+7}{n^2+n}\right)$ e $A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Allora:

- (A) $(a_n)_{n\geq 1}$ è strettamente crescente.
- (B) $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$.
- (C) A ammette estremo inferiore, ma non minimo.
- (D) A ammette estremo superiore, ma non massimo.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

11. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $A = \{q \in \mathbb{Q} \,:\, q^2 \leq 2\} \subset \mathbb{R}$. Allora:

- (A) A ha massimo e minimo.
- (B) A ha estremo superiore ma non ha massimo.
- (C) A non ha estremo inferiore.
- (D) A non è limitato.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

12. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Chiamiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *regolare*, se $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Allora

- (A) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente
- (B) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata
- (C) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
- (D) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare
- (E) se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente decrescente, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare

13. A.A. 2022/23, prima prova (1 risposta corretta)
L'estremo superiore dell'insieme

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \; : \; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Ⓐ Vale 1.
Ⓑ Vale e.
Ⓒ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.
Ⓓ Vale $\frac{1}{2}$.
Ⓔ Vale e^{-1}.

14. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)
Il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \sin(n)$$

Ⓐ vale 0.
Ⓑ vale $\frac{1}{2}$.
Ⓒ vale 1.
Ⓓ non esiste in $\mathbb{R}$.
Ⓔ Nessuna delle altre è corretta.

15. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)
Per $n \in \mathbb{N}$, poniamo $I_n = \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right]$ e $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (intersezione di tutti gli I_n).

Ⓐ J è l'insieme vuoto.
Ⓑ J contiene esattamente un elemento.
Ⓒ J contiene infiniti elementi.
Ⓓ Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale l'inclusione $I_n \subset I_{n+1}$
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

16. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)
Definiamo le successioni in $\mathbb{R}$: $a_n = n \cdot \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$; $b_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^{2n}$ $(n \geq 1)$.
Poniamo: $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$; $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Ⓐ $a = +\infty$ e $b = 1$.
Ⓑ $a = 2$ e $b = 1$.
Ⓒ $a = 0$ e $b = e^2$.
Ⓓ $a = 2$ e $b = e$.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

17. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)

Siano $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ e $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- (A) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n > 0$.
- (B) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.
- (C) A ammette un estremo inferiore, ma non un minimo.
- (D) A ammette un estremo superiore, ma non un massimo.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

18. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

Consideriamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+7}}\right)\right) \cdot \sqrt{n+6}$. Allora:

- (A) $a_n > \frac{1}{2}$ definitivamente.
- (B) $a_n < 1$ definitivamente.
- (C) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata superiormente.
- (D) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è limitata inferiormente.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

19. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)

Sia $I_n = \left[1 - \dfrac{1}{n+1}, 1 + \dfrac{1}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}$ e si consideri $J = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (intersezione di tutti gli I_n). Allora

- (A) $J = \{0\}$;
- (B) $J = \emptyset$;
- (C) $J = \{1\}$;
- (D) J contiene infiniti punti;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

Numeri complessi

20. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
L'insieme delle soluzioni dell'equazione in $\mathbb{C}$

$$z^3 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$$

- (A) è vuoto.
- (B) contiene infiniti numeri complessi.
- (C) se contiene il numero z_0, allora contiene anche il numero

$$z_0 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

- (D) non si può determinare esplicitamente.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

21. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Il numero $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{17}$ vale:

- (A) $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- (B) $\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- (C) $-\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- (D) $\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

22. A.A. 2020/21, primo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)
L'insieme delle soluzioni dell'equazione in $\mathbb{C}$

$$z^2 = |z| + 1$$

- [A] è vuoto.
- [B] è costituito da infiniti elementi.
- [C] è costituito da numeri puramente immaginari.
- [D] giace sulla circonferenza di raggio $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ centrata nell'origine.

23. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $A = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) < 0\right\}$. Allora:

- (A) $\mathrm{i} \in A$.
- (B) $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \in A$.
- (C) $1 - \mathrm{i} \in A$.
- (D) $-1 - \mathrm{i} \in A$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

24. A.A. 2020/21, terzo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{3} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}$. Allora:

- [A] A contiene $(1-i)^2$.
- [B] A contiene $\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^5$.
- [C] se A contiene z, allora contiene anche $\overline{z}$.
- [D] se A contiene z, allora contiene anche $|z|$.

25. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Nel campo dei numeri complessi, l'equazione $|z-1| = \overline{z} - \mathrm{i}$

- (A) ammette solo soluzioni reali.
- (B) non ammette soluzioni.
- (C) ha soluzioni reali con parte reale negativa.
- (D) ammette solo la soluzione $1 - \mathrm{i}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

26. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Poniamo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^5$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

- (A) Esiste un elemento nel codominio che ha esattamente 3 controimmagini.
- (B) Esiste un elemento del codominio che ha infinite controimmagini.
- (C) L'immagine di f è $\mathbb{C}$.
- (D) f è invertibile.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

27. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Consideriamo il numero complesso $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^6}{(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^2}$.

- (A) $|z| = 2$
- (B) $|z| = \dfrac{1}{2}$
- (C) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$
- (D) $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

28. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Definiti gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1, \ 0 < \mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Re}(z)\}, \qquad B = \{\mathrm{i}z \in \mathbb{C} \ : \ z \in A\},$$

allora

- (A) A è contenuto nel secondo quadrante.
- (B) B è contenuto nel terzo quadrante.
- (C) $A \cup B$ è contenuto nel semipiano superiore.
- (D) $A \cup B$ è contenuto nel semipiano inferiore.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

29. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Si consideri la seguente equazione nei numeri complessi:

$$z^2 + |z|^2 - 10 = 8 + 6\mathrm{i}.$$

- (A) L'equazione ammette soluzioni $z_1 = 3$ e $z_2 = -3$.
- (B) L'equazione ammette soluzioni $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ e $z_2 = -3 - \mathrm{i}$.
- (C) L'equazione non ammette soluzioni in $\mathbb{C}$.
- (D) L'equazione ammette infinite soluzioni immaginarie.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

30. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 2 punti)
L'equazione $|z| = z + 1$ in $\mathbb{C}$

- (A) ammette almeno una soluzione reale.
- (B) non ammette soluzioni.
- (C) ammette almeno una soluzione puramente immaginaria.
- (D) ammette infinite soluzioni.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

31. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Il numero complesso $z = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}+2)^2}$ soddisfa:

- (A) $|z| = 1$
- (B) $|z| = \mathrm{e}$
- (C) $\arg z = \frac{\pi}{3}$
- (D) $\arg z = 4$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

32. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0 \leq \mathrm{Im}(z)\}$. Allora:

- (A) Se $z \in A$, allora $\overline{z} \in B$.
- (B) Se $z \in A$, allora $\mathrm{i}z \in B$.
- (C) L'intersezione $A \cap \{\mathrm{i}z : z \in B\}$ non è vuota.
- (D) L'intersezione $A \cap \{\overline{z} : z \in B\}$ non è vuota.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

33. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri l'equazione $z^4 = z \cdot \left(-4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}\right)$ in $\mathbb{C}$. Allora:

- (A) Se z_0 è una soluzione, allora anche $z_0 \cdot \mathrm{i}$ è una soluzione.
- (B) Se z_0 è una soluzione, allora anche $z_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$ è una soluzione.
- (C) Tutte le soluzioni giacciono su una circonferenza centrata nell'origine.
- (D) $2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}}$ è una soluzione.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

34. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + |z|| = |z - |z||\}$. Allora:

- (A) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\}$.
- (B) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0\}$.
- (C) $A = \varnothing$.
- (D) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Im}\, z\}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

35. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri l'equazione $|z^4| + 1 - 2\bar{z}^2 = 0$ in $\mathbb{C}$. Allora:

- (A) L'equazione ha 4 soluzioni distinte.
- (B) L'equazione ha soltanto 2 soluzioni reali.
- (C) L'equazione ha soltanto 2 soluzioni puramente immaginarie.
- (D) L'equazione ha soltanto una coppia di soluzioni complesse coniugate.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

36. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = z^2$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora

- (A) tutti gli elementi del codominio hanno esattamente 2 controimmagini
- (B) almeno un elemento del codominio ha 4 controimmagini
- (C) almeno un elemento del codominio ha infinite controimmagini
- (D) tutti gli elementi del codominio hanno almeno un controimmagino
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

37. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 2 punti)

Sia $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})^9}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^6}$. Allora:

- (A) $2z - \overline{z} = 7$
- (B) $z - \overline{z} = |z|$
- (C) $z + \overline{z} = 2|z|$
- (D) $\arg z + \arg \overline{z} = \frac{\pi}{2}$
- (E) $\arg z + \arg \overline{z} = \pi$

38. A.A. 2022/23, prima prova (1 risposta corretta)

Le soluzioni, in $\mathbb{C}$, dell'equazione

$$z^8 = (2+i)^4$$

- (A) Sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $z^2 = 2+i$.
- (B) Sono tutte puramente reali, cioè, giacciono sull'asse reale.
- (C) Sono tutte puramente immaginarie, cioè, giacciono sull'asse immaginaria.
- (D) Sono esattamente 8.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

39. A.A. 2022/23, prima prova (1 risposta corretta)

Sia E la regione, nel piano di Gauss, costituita da tutti i numeri complessi z tali che

$$\arg(z) + |z| \leq 2\pi\,.$$

Possiamo affermare che:

- (A) Se $z \in E$, allora anche $\overline{z} \in E$.
- (B) Se $z \in E$, allora anche $iz \in E$.
- (C) $E = \emptyset$.
- (D) Se $z \in E$, allora anche $\dfrac{z}{2} \in E$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

40. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)

Si consideri l'equazione $z^3 = 8$, con $z \in \mathbb{C}$. Allora:

- (A) Essa ha esattamente 5 radici.
- (B) Se z_0 è soluzione, anche $\overline{z_0}$ è soluzione.
- (C) Se z_0 è soluzione, allora $\mathrm{Re}(z_0) = 0$.
- (D) Tutte le radici hanno modulo $2\sqrt{2}$.
- (E) Nessuna delle altre è corretta.

41. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)

Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, la parte immaginaria di $w = \dfrac{z^3}{i^5}$ è:

- (A) $-3xy^2 + x^3$
- (B) $3xy^2 - x^3$
- (C) $3x^2y - y^3$
- (D) 0
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

42. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)

Sia $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq |z| \leq 2, \frac{3\pi}{2} \leq \arg(z) < 2\pi\}$. Allora

- (A) $-1 - i \in A$.
- (B) $1 - i \in A$.
- (C) $i \in A$.
- (D) $e^{2\pi i} \in A$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

43. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

Siano $A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \leq |z| \leq 2, \ \mathrm{Re}(z) \leq 0, \ \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$ e $B = \left\{z^3 \ : \ z \in \mathbb{C}, \ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\right\}$. Allora:

- (A) $A \cap B$ consiste di un numero infinito di elementi, che giacciono sull'asse immaginaria.
- (B) $A \cap B$ consiste di un numero infinito di elementi, che giacciono sull'asse reale.
- (C) $A \cap B$ consiste di un solo elemento.
- (D) $A \cap B$ è vuoto.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

44. A.A. 2022/23, quarto appello (2 risposte corrette)

Consideriamo il numero complesso $z = \dfrac{(1+i)^3}{(1-\sqrt{3}i)^4}$.

- [A] $\arg(z) = \dfrac{\pi}{12}$.
- [B] $\arg(z) = -\dfrac{5\pi}{12}$.
- [C] $\arg(z) = \pi$.
- [D] $|z| > 1$.
- [E] $|z| < 1$.

45. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)

Le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^{10} = (1 - i)^5$$

- (A) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $z^2 = 1 - i$;
- (B) sono esattamente 10;
- (C) sono tutte puramente reali;
- (D) sono tutte puramente immaginarie;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

46. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
La funzione $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x} + 1 \quad \forall x > 0$

- (A) è sempre positiva.
- (B) ammette almeno due zeri.
- (C) ammette uno e un solo zero.
- (D) è sempre negativa.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

47. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
La funzione $f(x) = x + \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- (A) ammette l'asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$.
- (B) ammette l'asintoto obliquo $y = x + 1$ per $x \to +\infty$.
- (C) ammette l'asintoto obliquo $y = x - 1$ per $x \to +\infty$.
- (D) non ammette l'asintoti obliqui per $x \to +\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

48. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Dato il parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(e^{ax} - 1)}{\sin(ax)}$$

è uguale a:

- (A) 1.
- (B) a.
- (C) $\frac{1}{a}$.
- (D) 0.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

49. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile. Allora:

- (A) f è necessariamente strettamente monotòna.
- (B) f è necessariamente continua.
- (C) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- (D) l'immagine di f può essere limitata.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

50. A.A. 2020/21, terzo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni successione reale $(x_n)_{n\geq 1}$ con $x_n \neq x_0$ vale

$$x_n \to x_0 \text{ per } n \to \infty \implies f(x_n) \to L \text{ per } n \to \infty,$$

allora:

- A $|L - f(x_0)| < \frac{1}{2}$.
- B Vale anche $f(x_n) \to f(x_0)$ per $n \to \infty$.
- C Se $f(x_0) = L$, allora f è continua in x_0.
- D f non è necessariamente continua in x_0.
- E Se $f(x_0) = L$, allora f è continua in x per $x \in (x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2})$.

51. A.A. 2020/21, quarto appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)
La funzione $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{\ln(x) - 3}$

- A ha un asintoto verticale e nessun altro asintoto.
- B ha un asintoto verticale, un asintoto obliquo e nessun altro asintoto.
- C $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ esiste finito, ma f non ha un asintoto obliquo a $+\infty$.
- D non ha asintoti.

52. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, $J = f(I)$ l'immagine di f.

- (A) Se I è limitato inferiormente, allora J è limitato inferiormente.
- (B) Se $J = \mathbb{R}$, f è invertibile.
- (C) f assume massimo assoluto e minimo assoluto.
- (D) J è un intervallo.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

53. A.A. 2021/22, prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{\log_{\mathrm{e}}(1 + x^3) + \mathrm{e}^{x^3} - 1}$ vale:

- (A) 0
- (B) $\frac{1}{2}$
- (C) 1
- (D) 2
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

54. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

- (A) f ammette asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to +\infty$.
- (B) f ammette asintoto orizzontale $y = -1$ per $x \to +\infty$.
- (C) f ammette asintoto obliquo $y = 2x - 1$ per $x \to +\infty$.
- (D) f ammette asintoto obliquo $y = 2x + 2$ per $x \to +\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

55. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Dato il parametro $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^{\alpha}}$$

- (A) vale 0 se e solo se $\alpha < 1$.
- (B) vale 0 se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.
- (C) vale 0 se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.
- (D) vale 0 per ogni $\alpha > 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

56. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^5)}{3x^2 \sin(x^3)}.$$

Allora:

- (A) Il limite vale 1.
- (B) Il limite vale $\frac{1}{2}$.
- (C) Il limite vale $\frac{1}{3}$.
- (D) Il limite non esiste in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

57. A.A. 2021/22, terzo appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2 + \operatorname{arctg}(x))$. Allora:

- [A] f è sempre positiva.
- [B] f ammette uno e un solo zero.
- [C] f ammette almeno due zeri.
- [D] f non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).
- [E] f ammette almeno un asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).

58. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Si consideri il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x)} \right).$$

Allora:

- (A) Il limite vale $+\infty$.
- (B) Il limite vale 1.
- (C) Il limite vale 0.
- (D) Il limite non esiste.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

59. A.A. 2021/22, quarto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|e^{-1/x}$. Allora:

- A f ha due asintoti obliqui.
- B f è limitata.
- C f ha un asintoto verticale.
- D f non ammette alcun asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).
- E f è pari.

60. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\log(1+x)}{x}-\frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

- A non esiste
- B vale -1
- C vale 1
- D vale $+\infty$
- E vale $-\infty$

61. A.A. 2022/23, primo appello (2 risposte corrette)
Sia data la funzione $f(x)=\ln(1-\ln|x|)$.

- A Il suo dominio è $(-\infty,-e)\cup(e,+\infty)$.
- B Il suo dominio è $(-e,0)\cup(0,e)$.
- C Il suo dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- D $f(x)>0$ in $(-1,0)\cup(0,1)$.
- E $f(x)>0$ in $(-e,0)\cup(0,e)$.

62. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)
Sia data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1} & \text{se } -1<x<0\\ 2x+a & \text{se } x\geq 0\end{cases}.$$

- A Se $a=0$, $f(x)$ è continua nel suo dominio.
- B Se $a=1$, $f(x)$ è continua nel suo dominio.
- C Se $a=-1$, $f(x)$ è continua nel suo dominio.
- D Se $a=1/2$, $f(x)$ è continua nel suo dominio.
- E Nessuna delle altre è corretta.

63. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)
Sia $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ una qualunque funzione continua.

- A Se $f(a)\cdot f(b)>0$, allora f non ha zeri in $[a,b]$.
- B Posto $\lambda=\frac{f(a)+f(b)}{2}$, la funzione $g(x)=f(x)-\lambda$ ha uno zero in $[a,b]$.
- C Se $f(a)\cdot f(b)<0$, allora f ha uno zero, e uno solo, in $[a,b]$
- D Se $f(a)<f(b)$ e $c\in(a,b)$, allora $f(c)\in(f(a),f(b))$.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

64. A.A. 2022/23, terzo appello (2 risposte corrette)
La funzione
$$f(x) = \frac{x\ln(x)}{\ln(x) - 2}$$

- A ha un asintoto verticale;
- B ha nessun asintoto verticale;
- C ha un asintoto orizzontale;
- D ha un asintoto obliquo;
- E ha nessun asintoto orizzontale o obliquo.

65. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)
Detta $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \ln(x) + \frac{1}{x} - 2x$

- A è sempre negativa.
- B è sempre positiva.
- C ammette almeno uno zero.
- D è limitata superiormente.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

66. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$. Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}$$

- (A) vale 0.
- (B) vale $-\infty$.
- (C) vale $+\infty$.
- (D) potrebbe non esistere.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

67. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Data $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, la derivata di $g(x) = f(f(x))$

- (A) è $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\,(1+(\operatorname{arctg}(x))^2)}$.
- (B) è $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.
- (C) è $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)\,(1+(\operatorname{tg}(x))^2)}$.
- (D) non ha senso calcolarla poichè la composizione non è ben definita.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

68. A.A. 2020/21, prima prova in itinere (1 affermazione corretta, 1 punto)
Data una funzione $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$$

Allora:

- (A) Esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (B) f è derivabile anche in $x = a$ e $x = b$.
- (C) f è necessariamente costante.
- (D) f ammette sicuramente un minimo relativo.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

69. A.A. 2020/21, primo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dal teorema di Lagrange possiamo dedurre che:

- [A] dato un qualsiasi $c \in \mathbb{R}$ esistono $a < c$ e $b > c$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- [B] dato un qualsiasi coppia $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- [C] se f è strettamente crescente allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- [D] se f ammette due zeri allora f' ammetto almeno uno zero.

70. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Data la funzione $f(x) = x(1 + \ln x)$ per ogni $x > 1$, abbiamo:

Ⓐ $(f^{-1})'(2e) = \dfrac{1}{3}$.
Ⓑ $(f^{-1})'(2e) = 3$.
Ⓒ $(f^{-1})'(2e) = \dfrac{1}{3 + \ln 2}$.
Ⓓ $(f^{-1})'(2e) = 3 + \ln 2$.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

71. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|x$ è tale che:

Ⓐ $f''(0) = 2$.
Ⓑ $f''(0) = 0$.
Ⓒ Non è derivabile 2 volte in $x = 0$.
Ⓓ $(0, 0)$ non è un punto di flesso per il grafico di f.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

72. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0; \\ x^2 + \alpha x + 1 & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Allora vale al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

Ⓐ f non è derivabile per nessun valore di α.
Ⓑ f è derivabile per ogni α.
Ⓒ f è derivabile per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Ⓓ f è derivabile per $\alpha = 1$.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

73. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ derivabile con

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < 0; \\ f'(x) < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Allora:

Ⓐ f potrebbe ammettere un massimo o minimo.
Ⓑ f ammette almeno un asintoto (orizzontale, obliquo o verticale).
Ⓒ se f è prolungabile per continuità per $x = 0$, allora $x = 0$ diventa un punto estremante.
Ⓓ se f non è prolungabile per continuità per $x = 0$, allora f ammette un asintoto verticale.
Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

74. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora certamente

- (A) esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.
- (B) esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (C) se $f(a) = f(b)$, allora f è una funzione costante.
- (D) f assume massimo e minimo in (a,b).
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

75. A.A. 2021/22, prova in itinere (2 affermazioni corrette, 2 punti)
Definiamo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 5x + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- [A] f non è derivabile in 0.
- [B] f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.
- [C] f è derivabile in 0 e $f'(0) = 5$.
- [D] Per $x \neq 0$, $f'(x) = 5 + 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.
- [E] Per $x \neq 0$, $f'(x) = 5 + 2x \sin \dfrac{1}{x} + x^2 \cos \dfrac{1}{x}$.

76. A.A. 2021/22, prova in itinere (2 affermazioni corrette, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x^4 + 4x^3}$$

- [A] f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.
- [B] $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) > 0$
- [C] $x_0 = -1$ è un punto di minimo locale per f.
- [D] $x_0 = -1$ è un punto di massimo locale per f.
- [E] Esiste un punto $a \in (-1,0)$ in cui $f''(a) = 0$.

77. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{2}$, allora esiste $x_0 \in (0,1)$ tale che

- (A) la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse x.
- (B) la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse y.
- (C) la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta $y = -x$.
- (D) la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta $y = x$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

78. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
La funzione $f(x) = \mathrm{e}^x + mx - 2$ ammette (almeno) 2 zeri se

- (A) $m = 2$.
- (B) $m = 1$.
- (C) $m = -1$.
- (D) $m = 0$.
- (E) $m = 3$.

79. A.A. 2021/22, primo appello (2 affermazioni corrette, 2 punti)
Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- [A] f è continua in $x = 0$.
- [B] f è derivabile in $x = 0$.
- [C] f presenta un punto angoloso in $x = 0$.
- [D] f presenta una cuspide in $x = 0$.
- [E] f presenta un flesso a tangente verticale in $x = 0$.

80. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Data la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \beta x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{x^2} - \beta & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per quale valore del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile due volte in $x = 0$?

- (A) $\beta = 0$.
- (B) $\beta = 2$.
- (C) $\beta = 1$.
- (D) $\beta = -1$.
- (E) $\beta = -2$.

81. A.A. 2021/22, secondo appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Detta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x - 1$ possiamo affermare che:

- [A] f ammette uno e un solo zero.
- [B] $x = 0$ è uno zero di f.
- [C] f ammette infiniti zeri.
- [D] f è illimitata.
- [E] $f'(x) = \mathrm{e}^{\cos x} - \cos x$

82. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
La funzione $f(x) = \left(1 + \sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

- (A) è derivabile in tutto il suo dominio escluso il punto $x = 0$.
- (B) è limitata.
- (C) non è monotòna.
- (D) è derivabile in tutto il suo dominio.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

83. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte in I. Allora:

- (A) Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$, allora f è convessa in I.
- (B) Se $x_0 \in I$ con $f''(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di flesso per f.
- (C) Se $x_0 \in I$ è un punto di flesso per f, allora $f''(x_0) = 0$.
- (D) Se f è concava in $(a, b) \subset I$, allora $f''(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

84. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 2 punto)
Sia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Allora:

- (A) Esiste al massimo un $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (B) Esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.
- (C) f non può essere costante.
- (D) I limiti $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ esistono necessariamente in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

85. A.A. 2021/22, terzo appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora:

- [A] f non è continua in $x = 0$.
- [B] f è continua ma non derivabile in $x = 0$.
- [C] f è derivabile in $x = 0$.
- [D] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4+1} - \frac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\operatorname{arctg}(x)}{3x^2}$.
- [E] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{3\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} + \frac{2x\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4+1}$.

86. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua in $[0,1]$, derivabile in $(0,1)$ e tale che $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Allora:

- (A) Esiste al massimo un $c \in (0,1)$ tale che $f'(c) = 1$.
- (B) Esiste almeno un $c \in (0,1)$ tale che $f'(c) = 1$.
- (C) f' non si può annullare.
- (D) f ha almeno un punto stazionario in $[0,1]$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

87. A.A. 2021/22, quarto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

dove $\alpha > 0$. Allora:

- [A] f_α è continua in $x = 0$.
- [B] f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 2$
- [C] f_α è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha > 1$.
- [D] f_α non è mai derivabile in $x = 0$.
- [E] Solo una delle altre affermazioni è corretta.

88. A.A. 2021/22, quinto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$. Allora

- [A] f è pari
- [B] f è illimitata
- [C] f possiede infiniti zeri
- [D] f possiede un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
- [E] $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$

89. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 2 punti)
Sia $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con f' continua, tale che $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ e $f(1) = -1$. Allora

- (A) esiste almeno un $x_0 \in (-1,0)$ tale che $f'(x_0) = 0$
- (B) esiste almeno un $x_0 \in (0,1)$ tale che $f'(x_0) = 0$
- (C) esiste almeno un $x_0 \in (-1,1)$ tale che $f'(x_0) = 0$
- (D) f' non si annulla mai
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

90. A.A. 2021/22, quinto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora

- [A] f è continua in $x_0 = 0$
- [B] f non è derivabile in $x_0 = 0$
- [C] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = -1$
- [D] f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 1$
- [E] f è derivabile in $\mathbb{R}$ con f' continua

91. A.A. 2022/23, prima prova (Più risposte corrette)
Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\alpha x) & \text{se } x \geq 0\,, \\ \alpha - \frac{\alpha^2}{2} x^2 & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

- [A] È derivabile in $x = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- [B] È continua per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, ma non derivabile per alcun valore $\alpha \in \mathbb{R}$.
- [C] È derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = 1$.
- [D] È inferiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- [E] È superiormente limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

92. A.A. 2022/23, secondo appello (2 risposte corrette)

Definiamo per $a \in \mathbb{R}$: $\qquad f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_a(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

- [A] Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è continua.
- [B] Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a non è continua.
- [C] Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è derivabile.
- [D] Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a non è derivabile.
- [E] Se $a = \frac{1}{6}$, f_a è derivabile.

93. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)
Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$) una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora

- (A) se $f(a) = f(b)$, allora f è una funzione costante;
- (B) esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$;
- (C) esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$;
- (D) se $f(a) < f(b)$ e $c \in (a, b)$, allora $f(c) \in (f(a), f(b))$;
- (E) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

94. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)

Definiamo (per $a \in \mathbb{R}$): $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & x > 0 \\ x^2 + ax + 1 & x \leq 0 \end{cases}$

(A) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è derivabile.

(B) Se $a = 1$, f_a è derivabile.

(C) Per ogni $a \in \mathbb{R}$, f_a è continua e non derivabile.

(D) Se $a = \frac{1}{2}$, f_a è derivabile.

(E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

95. A.A. 2022/23, quarto appello (2 risposte corrette)

Detta $f\colon \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \tan(x^2)\sin\left(\frac{1}{x^3}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

[A] f non è continua in $x = 0$.

[B] f è continua ma non derivabile in $x = 0$.

[C] f è derivabile in $x = 0$.

[D] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\cos^2(x^2)} + \tan(x^2)\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

[E] Per $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\cos^2(x^2)} - \frac{3\tan(x^2)\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x^4}$.

Taylor

96. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quattro volte derivabile in $x = 0$ e tale che $f(x) = -x^2 + x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$. Allora:

- A $f''''(0) = 0$.
- B $f'''(0) = 1$.
- C f ha un punto di massimo locale per $x = 0$.
- D f, f', f'', f''' sono continue in $x = 0$.

97. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il polinomio di Taylor di ordine 3 (centrato in $x_0 = 0$) della funzione $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$ è:

- A $1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3$.
- B $x + x^2 + \frac{5}{6}x^3$.
- C $1 + x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$.
- D $x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

98. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$. Allora per $x \to 1$:

- A $f(x) = 1 + (x - 1) + o(x - 1)$.
- B $f(x) = 1 - (x - 1) + o(x - 1)$.
- C $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + o(x - 1)$.
- D $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) + o(x - 1)$.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

99. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) = x + o(x)$ per $x \to 0$. Allora:

- A f è derivabile in $x = 0$.
- B $f(x) = o(1 - \cos(x))$ per $x \to 0$.
- C $f(x) = o(\sin(x^2))$ per $x \to 0$.
- D $x = 0$ è necessariamente un punto estremante di f.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

100. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il polinomio di Taylor centrato in zero di ordine 4 di $f(x) = \ln(1 - 2x^2)$ è

- A $-2x^2 - 2x^4$.
- B $-2x^2 + 2x^4$.
- C $2x^2 - 2x^4$.
- D $2x^2 + 2x^4$.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

101. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)

Il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{2(x - \sin x) + 2 \ln \sqrt[3]{1 + x^3}}{x^2(\mathrm{e}^x - 1)}$ vale

- (A) -1.
- (B) -2.
- (C) 1.
- (D) 2.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

102. A.A. 2021/22, secondo appello (2 risposte corrette, 2 punti)

Sia $f(x) = \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^{2x^3}}$.
Detto $P_6(x)$ il polinomio di Taylor di f di grado 6, centrato in $x_0 = 0$, abbiamo che:

- [A] $P_6(x) = 1 - 2x^3$.
- [B] $P_6(x) = 1 - 2x^3 + 2x^6$.
- [C] $P_6(x) = 1 - 2x^3 + 4x^6$.
- [D] $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1 + 2x^3}{x^5} = 0$.
- [E] $x_0 = 0$ non è un punto stazionario per f.

103. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}x) + \mathrm{e}^{x^2} - 2$$

è tale che, per $x \to 0$,

- (A) $f(x) = o(x^4)$.
- (B) $f(x) \sim x^2$.
- (C) $f(x) \sim x^4$.
- (D) $f(x) \sim x^6$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

104. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
La funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = (1 + x)e^x - (1 - x)\cos(x) - x(1 + x)^{1/3}$$

è tale che, per $x \to 0$,

- (A) $f(x) = o(x)$.
- (B) $f(x) = x + o(x)$.
- (C) $f(x) = x^2 + o(x^2)$.
- (D) $f(x) = x^4 + o(x^4)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

105. A.A. 2021/22, quinto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile quattro volte in $x_0 = 0$ tale che

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4) \qquad x \to 0.$$

Allora

- [A] f possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$
- [B] f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$
- [C] f possiede un punto di flesso in $x_0 = 0$
- [D] $f^{(3)}(0) = -2$
- [E] $f^{(4)}(0) = 1$

106. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)
Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{e^{x^2} - 1 - \sin(x^2)}$$

- (A) non esiste in $\mathbb{R}$.
- (B) vale -1.
- (C) vale 1.
- (D) vale $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre è corretta.

107. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0,\ f'(0) = 3$.
Poniamo: $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{-1+\sqrt{1+2x}}$

- (A) $L = 3$
- (B) I dati non sono sufficienti per determinare L.
- (C) $L = +\infty$
- (D) $L = \frac{3}{2}$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

108. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)
Il polinomio di MacLaurin di grado 4 della funzione $f(x) = \ln(1-3x^2)$ è:

- (A) $-3x^2 + \frac{9}{2}x^4$;
- (B) $3x^2 - \frac{9}{2}x^4$;
- (C) $-3x^2 - \frac{9}{2}x^4$;
- (D) $3x^2 + \frac{9}{2}x^4$;
- (E) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

109. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

Si consideri $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x\sin(x)}{x + e^{2x} - e^{3x}}$. Allora:

- (A) il limite vale 1.
- (B) il limite vale -1.
- (C) il limite vale 0.
- (D) il limite non esiste in $\mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

110. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)

Il polinomio di Taylor centrato in zero di ordine 5 della funzione $f(x) = 2x^3 \cos x - \sin\left(x^2\right)$ è:

- (A) $-x^2 + 2x^3 - x^5$;
- (B) $x^2 - 2x^3 - x^5$;
- (C) $x^2 + 2x^3 + x^5$;
- (D) $-x^2 - 2x^3 - x^5$;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

111. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Con il cambio di variabile $t = \sqrt{x}$, si ottiene:

- A $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2}{t^2+1}\,dt.$
- B $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{3} \frac{2}{t^2+1}\,dt.$
- C $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{6}.$
- D $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,dx = \frac{\pi}{3}.$

112. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e monotòna crescente. Allora:

- A $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le f(b)(b-a).$
- B $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ge f(b)(b-a).$
- C $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le f(b).$
- D f è integrabile su $[a,b]$.

113. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Allora:

- A $f(0)f(1) < 0$.
- B $\exists c \in (0,1)$ tale che $f(c) = 0$.
- C f è identicamente nulla su $[0,1]$.
- D Se F è una primitiva di f, allora F è costante.

114. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Definiamo $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{(x^3+x)} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$$

Allora:

- A $F'(x) = \mathrm{e}^{-(x^3+x)^2}$.
- B $F'(x) = (3x^2+1)\mathrm{e}^{-(x^3+x)^2}$.
- C F è monotòna crescente.
- D F ha asintoto orizzontale a $+\infty$.

115. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Tra le seguenti affermazioni, segnare quelle corette.

- [A] $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x^a}\, dx$ è convergente se, e solo se, $a > 0$.
- [B] $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{x^a}\, dx$ è convergente se, e solo se, $a > 1$.
- [C] $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx$ è convergente.
- [D] $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\, dx$ non è convergente.

116. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x e^{\sqrt{t}}\, dt}{e^{\sqrt{x}}}$

- (A) non esiste.
- (B) vale 0.
- (C) vale 1.
- (D) vale 2.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

117. A.A. 2020/21, primo appello (almeno 1 affermazione corretta, 3 punti)
Supponiamo che $f\colon [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ ammetta un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Allora necessariamente:

- [A] f è definitivamente crescente.
- [B] anche la funzione $(f(x))^2$ ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
- [C] la funzione $x\big(\ln(f(x) + 1) - \ln(f(x))\big)$ ammette un asintoto orizzontale.
- [D] la funzione $\frac{1}{f(x)}$ non è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$.

118. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

converge se e solo se

- (A) $\alpha \in (0, 1)$.
- (B) $\alpha \in (-1, 0)$.
- (C) $\alpha \leq -1$.
- (D) $\alpha \geq 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

119. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^{2-\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in [0, 1]$. Allora:

- (A) l'integrale converge se e solo se $\alpha \in [0, 1)$.
- (B) l'integrale converge se e solo se $\alpha \in (0, 1)$.
- (C) l'integrale non converge per nessun valore di $\alpha \in [0, 1]$.
- (D) l'integrale converge solo per $\alpha = 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

120. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^\alpha}\, dx$

- (A) converge se e solo se $\alpha \in (0, +\infty)$.
- (B) converge se e solo se $\alpha \in [0, +\infty)$.
- (C) converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (D) non converge mai, qualsiasi sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

121. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \ln(1 + 4x^2)}{(1 + x^3)x^\alpha}\, dx$$

con il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge se

- (A) $\alpha > 0$.
- (B) $\alpha < 3$.
- (C) $0 < \alpha < 3$.
- (D) $\alpha > 3$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

122. A.A. 2021/22, primo appello (2 affermazioni corrette, 2 punti)
Sia $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

- [A] se f è continua allora f è necessariamente integrabile.
- [B] se f è integrabile allora f è necessariamente continua.
- [C] se f è integrabile allora la funzione $G(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$ è continua su $[0, 1]$.
- [D] se f è integrabile e $\int_0^1 f(t)dt = 0$ allora f è identicamente nulla.
- [E] se f è continua allora f non ammette primitiva.

123. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 2 punti)

L'integrale definito $\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\, dx$ vale

- (A) $\frac{1}{4}(\pi - \ln 2)$.
- (B) $\frac{1}{4}(\pi - \ln 4)$.
- (C) $\frac{1}{2}(\pi - \ln 2)$.
- (D) $\frac{1}{2}(\pi - \ln 4)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

124. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Sia F la funzione integrale $F(x) = \int_1^x \frac{t^{500}}{(t+1)^{502}}\, dt$ Allora:

- (A) F ha un asintoto verticale per un $x \in (1, +\infty)$.
- (B) F ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
- (C) F cambia segno in $(1, +\infty)$.
- (D) F ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

125. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Per un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{x^\alpha - x^{\alpha+2}}\, dx.$$

Allora:

- (A) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.
- (B) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.
- (C) L'integrale converge se e solo se $\alpha < 0$.
- (D) L'integrale non converge per alcun valore di α.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

126. A.A. 2021/22, terzo appello (2 riposte corrette, 2 punti)

Sia $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua e si consideri $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Allora:

- [A] F è crescente, ma non necessariamente strettamente crescente.
- [B] F è necessariamente strettamente crescente.
- [C] F ammette necessariamente un punto estremante.
- [D] F potrebbe essere costante su $\mathbb{R}$.

127. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

Allora:

- (A) Se f è continua in $[0,1]$ allora esiste almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
- (B) Esiste sempre almeno un $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
- (C) f è non-negativa.
- (D) Se f non è continua in $[0,1]$ allora non esiste mai $x \in [0,1]$ tale che $f(x) = 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

128. A.A. 2021/22, quarto appello (2 riposte corrette, 2 punti)
Si consideri $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} \sin(t)\,dt$. Allora:

- [A] F è monotòna.
- [B] F ha un asintoto orizzontale.
- [C] F ammette infiniti punti estremanti.
- [D] F è dispari.
- [E] Solo una delle altre affermazioni è corretta.

129. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
L'integrabile improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2}\,dx$$

- (A) converge e vale $\dfrac{\pi}{4}$
- (B) converge e vale $\dfrac{\pi^2}{4}$
- (C) converge e vale $\dfrac{\pi^2}{8}$
- (D) converge e vale $\dfrac{\pi^2}{16}$
- (E) non converge

130. A.A. 2021/22, quinto appello (1 riposta corretta, 1 punto)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1+t^2}\,dt$. Allora

- (A) F è pari
- (B) F è strettamente monotòna
- (C) F non possiede asintoti orizzontali
- (D) F ammette infiniti punti estremanti
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

131. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)

L'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$ vale

- (A) $-1/2$.
- (B) $1/4$.
- (C) $\pi/4$.
- (D) $\pi/2$.
- (E) Nessuna delle altre è corretta.

132. A.A. 2022/23, primo appello (2 risposte corrette)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{(x^3+4x+3)}{(x^4+4)\sqrt[4]{x}}.$$

Allora

- [A] $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
- [B] $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.
- [C] $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ diverge.
- [D] $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ converge.
- [E] $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ diverge.

133. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)

Definiamo: $G(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^2} \log(1+t^4)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$. La derivata $G'(x)$ è data da:

- (A) $G'(x) = \log(1+x^4)$.
- (B) $G'(x) = \log(1+x^8)$.
- (C) $G'(x) = \log(1+x^6)$.
- (D) $G'(x) = 2x\log(1+x^8)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

134. A.A. 2022/23, secondo appello (2 risposte corrette)

Definiamo per $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f_a(x) = \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^a}$.
Allora

- [A] $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, se e solo se $a > 1$.
- [B] $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, se e solo se $a < 1$.
- [C] $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, se e solo se $a < -1$.
- [D] $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, se e solo se $a > -1$.
- [E] $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, se e solo se $a < -1$.

135. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)
L'integrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^\alpha}\,dx$$

- (A) converge se e solo se $\alpha \in [0, +\infty)$;
- (B) converge se e solo se $\alpha \in (0, +\infty)$;
- (C) converge se e solo se $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (D) non converge per nessun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (E) nessuna delle altre affermazioni è corretta.

136. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

L'integrale $\displaystyle\int_e^{e^2} (\ln(x))^2\,dx$ vale:

- (A) $2e - 1$.
- (B) $2e^2$.
- (C) $2e^2 - e$.
- (D) $2e^2 - e + 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

137. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

Si consideri la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$. Allora:

- (A) F ammette un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.
- (B) F non ammette un asintoto orizzontale, ma uno obliquo per $x \to +\infty$.
- (C) F ammette un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
- (D) F non ammette un asintoto orizzontale, ma uno obliquo per $x \to -\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

138. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)
Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione continua.

(A) Se $f(0) \cdot f(1) > 0$, allora f non ha zeri in $[0,1]$.

(B) $\int_0^1 f(x)dx = f(\alpha)$ per almeno un $\alpha \in [0,1]$.

(C) Se $f(0) \cdot f(1) < 0$, allora f ha uno zero, e uno solo, in $[0,1]$.

(D) Se $f(0) < f(1)$ e $c \in (0,1)$, allora $f(c) \in (f(0), f(1))$.

(E) Nessuna delle altre risposte è corretta.

139. A.A. 2022/23, quinto appello (2 risposte corrette)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{(|x|+1)\sqrt[3]{x}}.$$

Allora

[A] $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ converge;

[B] $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ diverge;

[C] $\displaystyle\int_1^{2} f(x)\ dx$ diverge;

[D] $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\ dx$ diverge;

[E] $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\ dx$ converge.

140. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)

Posto $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^3} e^{-t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$. Avremo

(A) $F'(x) = 3x^2 e^{-x^6} - e^{-x^2}$;

(B) $F'(x) = -3x^2 e^{-x^6} - e^{-x^2}$;

(C) $F'(x) = e^{-x^6} - e^{-x^2}$;

(D) $F'(x) = e^{-x^6} - e^{-x^2}$;

(E) nessuna delle altre risposte è corretta.

Nota bene: Equazioni differenziali facevano parte del corso fino all'A.A. 2020/21.

141. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)

Si consideri l'equazione differenziale: $y' - y = \mathrm{e}^x$. Allora:

- A $y(x) = \mathrm{e}^{-x}$ è una soluzione.
- B $y(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$ è l'unica soluzione tale che $y(1) = 0$.
- C $y(x) = (1 + x)\mathrm{e}^{-x}$ è l'unica soluzione tale che $y(0) = 1$.
- D Se $y^*(x)$ è una soluzione, allora $y(x) = c\mathrm{e}^x + y^*(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ è una soluzione.

142. A.A. 2020/21, primo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale: $y' = \mathrm{e}^{t+y}$. Allora:

- A Si tratta di un'equazione a variabili separabili.
- B Si tratta di un'equazione lineare.
- C Tutte le soluzioni hanno un asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
- D Tutte le soluzioni hanno un asintoto verticale.

143. A.A. 2020/21, secondo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale: $y' = y \ln y$. Allora:

- A Ogni soluzione è limitata su $\mathbb{R}$.
- B Non ha soluzioni limitate su $\mathbb{R}$.
- C Ogni soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to -\infty$.
- D Ogni soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.
- E Esiste almeno una soluzione costante.

144. A.A. 2020/21, terzo appello (almeno 1 affermazione corretta, 2 punti)

Si consideri l'equazione differenziale: $y' = t(1 + y^2)$. Allora:

- A Si tratta di un'equazione a variabili separabili.
- B Si tratta di un'equazione lineare.
- C Ogni soluzione ha un asintoto orizzontale per $t \to +\infty$.
- D Ogni soluzione ha un asintoto verticale.
- E Esiste una soluzione costante.

145. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)

La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha in $x = 0$

- (A) un flesso.
- (B) un minimo relativo.
- (C) un massimo relativo.
- (D) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

Serie

Nota bene: Serie numeriche fanno parte del corso dall'A.A. 2021/22.

146. A.A. 2021/22, primo appello (2 affermazioni corrette, 2 punti)

Si consideri la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ con

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+4)}.$$

- [A] la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, ma non converge $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- [B] la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge.
- [C] la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.
- [D] la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge.
- [E] Nulla può essere detto sulla convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

147. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 2 punti)

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^{-3})}{[(n+2)!]^{\alpha}}$$

converge:

- (A) se e solo se $\alpha > 0$.
- (B) se e solo se $\alpha \geq 0$.
- (C) se e solo se $\alpha > 1$.
- (D) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

148. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{\alpha}}$, dove $\alpha \in (0, +\infty)$. Allora:

- (A) La serie converge se e solo se $\alpha > 2$.
- (B) La serie converge se e solo se $\alpha > 1$.
- (C) Nulla si può dire sulla convergenza se $\alpha \in (0, 1]$.
- (D) La serie converge per ogni α.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

149. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k = \dfrac{3k^2+2}{k^4+5k^2}\sin(k)$. Allora:

- (A) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge.
- (B) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, ma $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ non converge.
- (C) La serie è a segni alterni.
- (D) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

150. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Si consideri la serie $\sum_{k\geq 0} a_k$ con $a_k = (-1)^k \dfrac{\sqrt{k}}{k+1}$. Allora

- (A) $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ converge
- (B) $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge, ma $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ non converge
- (C) $\sum_{k\geq 0} a_k$ diverge a $+\infty$
- (D) $\sum_{k\geq 0} a_k$ diverge a $-\infty$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

151. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)

La serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right), \qquad a > 0,$$

converge se e solo se

- (A) $a < 1/2$.
- (B) $a > 1/2$.
- (C) $a < 1$.
- (D) $a > 1$.
- (E) Nessuna delle altre è corretta.

152. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ e $S = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

- (A) $S = \frac{3}{2}$
- (B) $S = \frac{2}{3}$
- (C) $S = 0$
- (D) $S = +\infty$
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

153. A.A. 2022/23, terzo appello (2 risposte corrette)

Quali delle seguenti serie convergono?

- [A] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$
- [B] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{4^{k-2}}$
- [C] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
- [D] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(-1)^k}{1-3k}$

154. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)

Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = \frac{n^3 - 5\sin(n)}{2^{n+1} + 4n}$.

- (A) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, ma non converge $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.
- (B) la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge, ma non converge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
- (C) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non convergono.
- (D) la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ convergono.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

155. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)

Il valore della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$:

- (A) è $\frac{4}{3}$;
- (B) è $+\infty$;
- (C) non esiste;
- (D) è $\frac{3}{4}$;
- (E) nessuna delle altre risposte è corretta.

156. A.A. 2022/23, quinto appello (2 risposte corrette)

Quali delle seguenti serie converge assolutamente?

- A $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;
- B $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$;
- C $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) \cdot \ln\left(1 + n^{-4/3}\right)$;
- D $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$;

157. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Denotiamo con $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r}'$ le seguenti rette in $\mathbb{R}^3$:
$\mathfrak{r}:$ retta passante per $A = (1, 0, -1)$ parallela al vettore $(2, 1, a)$, $\mathfrak{r}':$ retta passante per $A' = (3, 1, -2)$ parallela al vettore $(b, -1, 1)$,

- [A] $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ sono parallele se, e solo se, $a = -1$ e $b = -2$.
- [B] $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ sono parallele se, e solo se, $a = 1$ e $b = 2$.
- [C] $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ sono ortogonali se, e solo se, $a + 2b - 1 = 0$.
- [D] Se $\mathfrak{r}$ e $\mathfrak{r}'$ sono parallele, allora $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$.

158. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
In $\mathbb{R}^n$, siano $\mathbf{u}$ un vettore unitario e $\mathbf{a}$ un vettore qualunque. Allora:

- [A] $\mathbf{b} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{a}$.
- [B] $\mathbf{b} = \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{u}$.
- [C] $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{a}|$.
- [D] $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}| \leq |\mathbf{a}|$.

159. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
Il volume del parallelepipedo costruito sui vettori

$$(0, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (-1, 4, 0)$$

- (A) vale 0.
- (B) vale 3.
- (C) vale 1.
- (D) vale $\sqrt{3}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

160. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
La distanza tra il piano di equazione $3x + 2y - z + 1 = 0$ e il punto di intersezione tra le rette di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t \\ z = 5t - 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s \\ z = 3s - 1 \end{cases}$$

- (A) vale 0.
- (B) vale $\frac{5}{\sqrt{14}}$.
- (C) vale 5.
- (D) vale $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

161. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
I vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tali che $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \alpha$ sono linearmente indipendenti se e solo se

- (A) $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- (B) $\alpha = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
- (C) $\alpha \neq 0$.
- (D) $\alpha = 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

162. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il piano che contiene la retta di equazioni

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

e passa per l'origine ha equazione

- (A) $5x + 5y - 4z = 0$.
- (B) $5x - 5y + 4z = 0$.
- (C) $5x - 5y - 4z = 0$.
- (D) $5x + 5y + 4z = 0$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

163. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Si consideri il punto $P = (2, -3, -4)$ e il piano

$$\pi\colon \begin{cases} x = 2 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda - 2\mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora:

- (A) P è contenuto nel piano π.
- (B) la distanza $d(\pi, P) = \frac{1}{\sqrt{26}}$.
- (C) la distanza $d(\pi, P) = \frac{11}{\sqrt{26}}$.
- (D) la distanza $d(\pi, P) = \frac{24}{\sqrt{26}}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

164. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Si consideri i tre punti

$$A = (3, 0, 3),\ B = (2, -1, 3),\ C = (1, -3, 4)$$

e l'angolo α tra $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$. Allora:

- (A) $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- (B) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.
- (C) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
- (D) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

165. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Sia $\mathscr{r}$ la retta di equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0, \end{cases}$$

e sia π il piano di equazione $2x-y-z=0$. Allora:

- (A) $\mathscr{r}$ giace su π.
- (B) $\mathscr{r}$ è parallela a π, e non giace su di esso.
- (C) $\mathscr{r}$ è ortogonale a π.
- (D) $\mathscr{r}$ non è nè parallela, nè ortogonale, a π.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

166. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 1 punto)
La retta $\mathscr{r}$ contenente il punto $(1,2,3)$ e ortogonale al piano π contenente i punti $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ coincide con

- (A) asse x.
- (B) $\mathscr{r}\colon (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,1,1)$.
- (C) asse y.
- (D) $\mathscr{r}\colon (x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(-1,1,-1)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

167. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Il prodotto misto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ dei vettori

$$\vec{u}=(1,1,2), \quad \vec{v}=(2,2,0), \quad \vec{w}=(1,0,1),$$

vale:

- (A) 4.
- (B) −4.
- (C) 8.
- (D) 0.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

168. A.A. 2021/22, secondo appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Date le rette $\mathscr{r}$ e $\mathscr{s}$ di equazioni parametriche

$$\mathscr{r}\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases} \qquad \mathscr{s}\colon \begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3+3t \end{cases}$$

possiamo affermare che:

- [A] $\mathscr{r}$ e $\mathscr{s}$ sono sghembe.
- [B] $\mathscr{r}$ e $\mathscr{s}$ sono incidenti.
- [C] $\mathscr{r}$ e $\mathscr{s}$ sono ortogonali.
- [D] Il piano di equazione $3x-z=0$ è parallelo a entrambe le rette.
- [E] Il piano di equazione $x+y-z=0$ è parallelo a entrambe le rette.

169. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 2 punti)
Si consideri il piano

$$\pi\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -2 - 6\lambda + 2\mu \\ z = -1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$$

e il punto $A = (3, -1, 2)$. Allora:

- Ⓐ A giace sul piano π.
- Ⓑ La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{3}$.
- Ⓒ La distanza $d(A, \pi)$ è $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
- Ⓓ La distanza $d(A, \pi)$ è 1.
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

170. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Allora:

- Ⓐ Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono necessariamente linearmente indipendenti.
- Ⓑ Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v} = \vec{w}$.
- Ⓒ Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono necessariamente linearmente dipendenti.
- Ⓓ Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, allora $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono necessariamente linearmente dipendenti.
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

171. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
L'equazione cartesiana del piano passante per $A = (1, -2, 1)$ e parallelo ai vettori $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ è

- Ⓐ $2x - 3y + z = 9$.
- Ⓑ $2x + 3y + z = 9$.
- Ⓒ $2x - 3y - z = 9$.
- Ⓓ $2x + 3y + z = -9$.
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

172. A.A. 2021/22, quarto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Siano $\vec{u}, \vec{v}$ due vettori in $\mathbb{R}^3$ tali che $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$. Allora $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ vale

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 0.
- Ⓓ 3.
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

173. A.A. 2021/22, quinto appello (2 risposte corrette, 2 punti)
Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori ortogonali di $\mathbb{R}^3$. Allora

- A $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
- B $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$
- C $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$
- D $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- E una sola delle altre affermazioni è corretta

174. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)
Le due rette

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- A sono coincidenti
- B sono parallele, ma non coincidenti
- C sono incidenti in un punto
- D sono sghembe
- E sono ortogonali

175. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)
Siano dati i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

- A Se $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, allora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono necessariamente ortogonali.
- B Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso modulo.
- C Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, allora $\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ sono linearmente dipendenti.
- D Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari, allora $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono linearmente dipendenti.
- E Nessuna delle altre è corretta.

176. A.A. 2022/23, secondo appello (1 risposta corretta)
Nel triangolo di vertici $A = (3, 0, 3), B = (2, -1, 3), C = (1, -3, 4)$, l'angolo del vertice B è:

- A $\frac{\pi}{6}$
- B $\frac{\pi}{4}$
- C $\frac{5}{6}\pi$
- D $\frac{\pi}{2}$
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

177. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)
Sia dati due versori (vettori di modulo 1) $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Se il loro prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, allora i due versori $\vec{u}$ e $\vec{v}$

- A sono ortogonali;
- B formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$;
- C formano un angolo di $-\frac{\pi}{4}$;
- D formano un angolo di π;
- E nessuna delle altre affermazioni è corretta.

178. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)
Siano dati i vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

- (A) Se $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$, allora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono necessariamente ortogonali.
- (B) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, allora $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno lo stesso modulo.
- (C) Se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$, allora $\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ sono linearmente dipendenti.
- (D) Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari, allora $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ sono linearmente dipendenti.
- (E) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Curve

179. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (almeno 1 affermazione corretta, 1 punto)
Sia γ la curva parametrizzato da $\vec{f}(t) = (1-t, t^2+t, t^2)$, $t \in [0,1]$. Allora:

- A γ è una curva piana.
- B γ è regolare.
- C $\vec{f}$ è una parametrizzazione per arco.
- D γ non ha lunghezza finita.

180. A.A. 2020/21, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Il versore binormale della curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = \mathrm{e}^{-t} \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

nel punto $(1,1,0)$ è:

- A $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.
- B $\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2)$.
- C $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.
- D indefinito poichè la curva non è biregolare.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

181. A.A. 2020/21, secondo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
La lunghezza del grafico di una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 è

- A $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+|f'(t)|^2}\,dt$.
- B $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+|f(t)|^2}\,dt$.
- C $\displaystyle\int_a^b \sqrt{|f(t)|^2+|f'(t)|^2}\,dt$.
- D $\displaystyle\int_a^b |f'(t)|^2\,dt$.
- E Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

182. A.A. 2020/21, terzo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Si consideri la curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x = \cos(\mathrm{e}^t) \\ y = -\sqrt{2}\mathrm{e}^t \\ z = \sin(\mathrm{e}^t) \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$. Allora:

- (A) esiste $t_0 \in [0,1]$ tale che γ non è regolare in t_0.
- (B) la lunghezza di γ è $\sqrt{3}\mathrm{e}$.
- (C) la lunghezza di γ è $\sqrt{2}(\mathrm{e}-1)$.
- (D) la lunghezza di γ è $\sqrt{3}(\mathrm{e}-1)$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

183. A.A. 2020/21, quarto appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
La lunghezza della curve $\gamma(t) = \left(t-1, 1-t^2, 2+\frac{2}{3}t^3\right)$, $t \in [0,1]$ è:

- (A) $\frac{2}{3}$.
- (B) $\frac{4}{3}$.
- (C) $\frac{5}{3}$.
- (D) $\sqrt{\frac{5}{3}}$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

184. A.A. 2021/22, primo appello (1 affermazione corretta, 2 punti)
Si consideri la curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ avente parametrizzazione data da $\vec{f}(t) = (1, -t, t^2/2)$ per $t \in [0, \sqrt{3}]$. Allora

- (A) γ non è regolare.
- (B) γ è regolare, ma non biregolare.
- (C) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}} ds = \ln\sqrt{3}$.
- (D) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}} ds = -\sqrt{3}$.
- (E) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y}{(1+2z)^{3/2}} ds = -\ln 2$.

185. A.A. 2021/22, secondo appello (1 risposta corretta, 1 punto)
La lunghezza della curva avente parametrizzazione

$$\vec{f}(t) = \left(\cos(\ln t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln t),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\ln t)\right) \qquad t \in \left[1, \mathrm{e}^{2\pi}\right],$$

vale:

- (A) $2\pi - 1$.
- (B) 2π.
- (C) $+\infty$.
- (D) $\mathrm{e}^{2\pi} - 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

186. A.A. 2021/22, terzo appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Sia γ la curva parametrizzata da $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}t\sqrt{t},\ t\sin(t),\ t\cos(t)\right)$, $t \in [0,\pi]$. Allora:

- (A) Esiste $t_0 \in [0,\pi]$ tale che γ non è regolare in t_0
- (B) La lunghezza di γ è $\pi(\pi+2)$.
- (C) La lunghezza di γ è $\frac{\pi(\pi+2)}{2}$.
- (D) La lunghezza di γ è $\frac{\pi(\pi+2)}{2} - 1$.
- (E) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

187. A.A. 2021/22, quarto appello (2 risposte corrette, 2 punti)

Sia γ la curva parametrizzata da $\vec{f}(t) = (\ t - \sin(t),\ 1 - \cos(t))$, $t \in [0,\pi]$. Allora:

- [A] La curva è chiusa, cioè, $\vec{f}(0) = \vec{f}(\pi)$.
- [B] La curva è regolare.
- [C] La curva non è regolare.
- [D] $\int_\gamma \sqrt{y} = \sqrt{2}\pi$.
- [E] $\int_\gamma \sqrt{y} = \sqrt{2}(\pi - 1)$.

188. A.A. 2021/22, quinto appello (1 risposta corretta, 1 punto)

Sia γ la curva parametrizzata da $\vec{f}(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, t^2\right)$, $t \in [0,1]$. Allora l'integrale di linea

$$\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2 + 4z}\, ds$$

vale

- (A) -1
- (B) 0
- (C) 1
- (D) $\frac{8}{3}$
- (E) $\frac{16}{3}$

189. A.A. 2022/23, primo appello (1 risposta corretta)

Sia γ la curva parametrizzata da $\vec{f}(t) = (t^2 - 1, t, t^2 + 2), t \in \mathbb{R}$. Inoltre sia $\vec{p} = \vec{f}(0)$ un punto su γ. Allora:

- (A) γ è contenuta nel piano $\pi : x + y - z = -3$.
- (B) γ è contenuta nel piano $\pi : x - z = -3$.
- (C) La retta tangente a γ in $\vec{p}$ ha equazione parametrica $(x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda(0, 1, 0)$.
- (D) La retta tangente a γ in $\vec{p}$ ha equazione parametrica $(x, y, z) = (-1, 0, 2) + \lambda(0, 1, 1)$.
- (E) Nessuna delle altre è corretta.

190. A.A. 2022/23, terzo appello (1 risposta corretta)
Sia data la curva γ parametrizzata da $\vec{f}(t) = \big(\cos(e^t), -e^t, \sin(e^t)\big)$, $t \in [0,1]$. Allora

- Ⓐ esiste $t_0 \in [0,1]$ tale che γ non è regolare nel punto $\vec{f}(t_0)$;
- Ⓑ la lunghezza di γ è $e-1$;
- Ⓒ la lunghezza di γ è $\sqrt{2}(e-1)$;
- Ⓓ la lunghezza di γ è $\sqrt{2}e$;
- Ⓔ nessuna delle altre affermazioni è corretta.

191. A.A. 2022/23, quarto appello (1 risposta corretta)
Si consideri la curva γ con parametrizzazione $\vec{\gamma}(t) = (2\sqrt{2}t - \sin(t),\ 2\sqrt{2}\sin(t)+t,\ 3\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

- Ⓐ γ non è regolare per ogni $t \in [0, 2\pi]$.
- Ⓑ γ è regolare, ma non è biregolare per ogni $t \in [0, 2\pi]$.
- Ⓒ la lunghezza di γ vale $6\sqrt{2}\pi$.
- Ⓓ la lunghezza di γ vale $\sqrt{18}\pi$.
- Ⓔ Nessuna delle altre affermazioni è corretta.

192. A.A. 2022/23, quinto appello (1 risposta corretta)
Sia γ la curva parametrizzata da $\vec{f}(t) = (t^2+1, t, t^2-1)$, $t \in \mathbb{R}$ e sia $\vec{p} = \vec{r}(0)$. Allora:

- Ⓐ γ è contenuta nel piano $\pi\colon x - z = -2$;
- Ⓑ γ è contenuta nel piano $\pi\colon x - z = 2$;
- Ⓒ la retta tangente a γ in $\vec{p}$ ha equazione parametrica $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0)$;
- Ⓓ la retta tangente a γ in $\vec{p}$ ha equazione parametrica $(x, y, z) = (-1, 0, 1) + \lambda(0, 1, 0)$;
- Ⓔ nessuna delle altre risposte è corretta.

Esercizi a Carta e Penna

Nota bene: Nell'A.A. 2020/21, dimostrazioni non facevano parte della parte scritta.

Studio di Funzione

1. A.A. 2020/21, seconda prova in itinere (12 punti)

Si consideri la funzione:

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

(1) Determinare il dominio di f, gli eventuali zeri ed il segno di f.

(2) Stabilire se f è continua nel suo dominio e determinare i limiti al bordo del dominio di f.

(3) Determinare il dominio di definizione della derivata prima e calcolare f'.

(4) Studiare la monotona di f e determinare gli eventuali punti estremanti, sepcificando se sono assoluti e/o relativi.

(5) Tracciare un grafico qualitativo della funzione f.

(6) Sfruttando lo studio di f svolto nei punti precedenti, si tracci un grafico qualitativo della funzione integrale

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

dove l'integrale è da intendersi eventualmente in senso improprio.

2. A.A. 2020/21, primo appello (12 punti)

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{3\,\mathrm{arctg}(\frac{1}{x})} & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(1) Stabilire dominio, eventuali zeri e segno.

(2) Studiare la continuità, e individuare eventuali asintoti.

(3) Deterimare il dominio della derivata f', e calcolarla. Classificare eventuali punti di non derivabilità.

(4) Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti e/o relativi.

(5) Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

(6) Determinare le primitive della funzione

$$g(x) = f'(x)\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{arctg}(\frac{1}{x})},$$

calcolare quindi $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.

3. A.A. 2020/21, secondo appello (12 punti)
Sia data la funzione
$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) - 2x^2.$$

(1) Stabilire il dominio, individuare eventuali simmetrie ed eventuali asintoti.

(2) Studiare la continuità e dire se esistono punti in cui f è prolungabile con continuità.

(3) Determinare il dominio della derivata prima e calcolarla.

(4) Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti e/o relativi.

(5) Determinare il dominio della derivata seconda e calcolarla.

(6) Studiare la convessità e determinare eventuali punti di flesso.

(7) Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

(8) Provare che il seguente integrale esiste finito e calcolarlo
$$\int_{-1}^{1} f'(y)\, dy.$$

4. A.A. 2020/21, terzo appello (12 punti)
Sia data la funzione
$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2+x^2}{2-x^2}\right).$$

(1) Stabilire il dominio, individuare eventuali simmetrie ed eventuali asintoti.

(2) Studiare la continuità e dire se esistono punti in cui f è prolungabile con continuità.

(3) Determinare il dominio della derivata prima e calcolarla.

(4) Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti e/o relativi.

(5) Determinare il dominio della derivata seconda e calcolarla.

(6) Studiare la convessità e determinare eventuali punti di flesso.

(7) Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

(8) Calcolare lo sviluppo del polinomio di Taylor al ordine 3 in $x = 0$.

5. A.A. 2020/21, terzo appello (12 punti)
Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(1 + x^2).$$

(1) Determinare il dominio D di d, calcolare i limiti al bordo del dominio D e determinare gli eventuali asintoti.

(2) Studiare la continuità e dire se esistono punti in cui f è prolungabile con continuità.

(3) Studiare la derivabilità di f, calcolare f' e dire se esistono punti in cui f' è prolungabile con continuità.

(4) Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti estremanti, specificando se sono assoluti e/o relativi.

(5) Calcolare f''.

(6) Studiare la convessità di f e determinare eventuali punti di flesso.

(7) Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

(8) Stabilire se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}}\, dx$$

6. A.A. 2021/22, primo appello (6 punti)
Si consideri la seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x^2+1}}.$$

(1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri ed il segno della funzione f.

(2) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli asintoti.

(3) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti estremanti.

(4) Tracciare un grafico probabile della funzione f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma è richiesto che il grafico tracciato sia coerente con tutte le informazioni ottenibili a prescindere dalla derivata seconda.

(5) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x^2+1}\, dx$$

7. A.A. 2021/22, secondo appello (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln(\ln(x)) - \operatorname{arctg}(\ln(x) - 1)$$

(1) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e la presenza di eventuali asintoti.

(2) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (locali e globali).

(3) Stabilire il numero esatto di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, giustificando adeguatamente la risposta (si osservi che $f(\mathrm{e}) = 0$).

(4) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni precedentemente ricavate.

8. A.A. 2021/22, terzo appello (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{1+x^3}$$

(1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri ed il segno della funzione f.

(2) Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

(3) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità.

(4) Studiare la monotonia e determinare il numero di punti estremanti, eventualmente usando il teorema degli zeri. Determinare punti di massimo e minimo locale e globale.

(5) Tracciare un grafico probabile della funzione f. Non è richiesto lo studio della derivata seconda, ma è richiesto che il grafico tracciato sia coerente con tutte le informazioni ottenibili a prescindere dalla derivata seconda.

9. A.A. 2021/22, quarto appello (6 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{1 - e^{-x}}$$

(1) Determinare il dominio, gli eventuali zeri ed il segno della funzione f. Studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

(2) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, studiare i punti di non derivabilità. Studiare la monotonia di f, determinare i punti estremanti e gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.

(3) Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione. Studiare la convessità di f, determinando gli eventuali punti di flesso.

(4) Tracciare un grafico della funzione f coerente con tutte le informazioni ricavate nei punti precedenti.

10. A.A. 2021/22, quinto appello (6 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x.$$

(1) Determinare il dominio e le eventuali simmetrie della funzione f. Inoltre, studiare i limiti al bordo del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

(2) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione.

(3) Studiare la monotonia di f e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale e globale.

(4) Calcolare f'' determinandone l'insieme di definizione.

(5) Studiare la cocavità di f e determinare gli eventuali punti di flesso.

(6) Tracciare il grafico qualitativo della funzione f.

11. A.A. 2022/23, prima prova (6 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \left(x^2 + 12x\right) e^{-\frac{2}{x}}\,.$$

(1) Determinare il dominio, studiare il segno e stabilire la presenza di eventuali asintoti.

(2) Calcolare f', trovare tutti i punti stazionari e classificarli. Stabilire inoltre se esistono punti di estremo globale.

(3) Tracciare un grafico qualitativo di f sulla base delle informazioni ricavate (non è richiesto lo studio di f'').

12. A.A. 2022/23, primo appello (6 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

(1) Determinare il dominio, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.

(2) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione, e studiare la monotonia di f determinando i punti di massimo e minimo locale e globale.

(3) Calcolate f'' e studiare la concavità di $f(x)$ determinando gli eventuali flessi.

(4) Tracciare un grafico probabile della funzione f. È richiesto che il grafico tracciato sia coerente con tutte le informazioni ottenute.

13. A.A. 2022/23, secondo appello (8 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 - x$$

(1) Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti. Stabilire se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(2) Calcolare f' e studiare la monotonia di f determinando gli eventuali punti di estremo. Motivando la risposta, dire quanti sono gli zeri di f.

(3) Calcolate f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.

(4) Tracciare il grafico qualitativo di f.

14. A.A. 2022/23, terzo appello (8 punti)
Data la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}},$$
determinarne

(1) dominio e limiti agli estremi del dominio;

(2) eventuali asintoti;

(3) derivata prima e eventuali punti di massimo e minimo locale;

(4) grafico qualitativo.

15. A.A. 2022/23, quarto appello (8 punti)
Si consideri la funzione
$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$$

(1) Determinare il dominio, i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti. Stabilire se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(2) Calcolare f' determinandone l'insieme di definizione.

(3) Studiare la monotonia di f determinando i punti di massimo e minimo locale e globale.

(4) Tracciare il grafico qualitativo di f.

16. A.A. 2022/23, quinto appello (7 punti)
Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} - 2 + x$.

(1) Determinare i limiti al bordo del dominio e gli eventuali asintoti.

(2) Stabilire se f può essere estesa con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(3) Calcolare f' e studiare la monotonia di f.

(4) Motivando la risposta, dire quanti sono gli zeri di f.

(5) Calcolare f'' e studiare la concavità di f determinando gli eventuali flessi.

(6) Tracciare il grafico qualitativo di f.

Geometria

1. A.A. 2022/23, primo appello (6 punti)

Siano dati il punto $\vec{q} = (1, 1, -1)$ e la retta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare la distanza tra r ed $\vec{q}$.

(2) Determinare l'equazione parametrica della retta s per $\vec{q}$ sia ortogonale sia incidente ad r.

(3) Determinare l' equazione cartesiane del piano contenente i punti $\vec{q}$ ed $\vec{o} = (0, 0, 0)$ e parallelo alla retta r.

2. A.A. 2022/23, secondo appello (4 punti)
Si consideri la curva γ parametrizzata da

$$\vec{f}(t) = (t^2 + \cos t,\ t^2 - \sin t,\ t^2 + t), \qquad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

(1) Determinare vettore tangente, normale e binormale di γ nel punto $P = (1, 0, 0)$.

(2) Determinare i punti $Q \in \gamma$ in cui la retta tangente è ortogonale alla retta tangente in P.

3. A.A. 2022/23, terzo appello (4 punti)
Nello spazio $\mathbb{R}^3$, sia r la retta passante per $A = (1, 0, 2)$ e $B = (3, 4, 1)$ e sia s la retta intersezione dei piani $x - 2y = 1$ e $y + z = 0$.

(1) Stabilire se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(2) Determinare un piano π che contiene s e che è parallelo ad r.

(3) Calcolare la distanza tra π ed un punto di r (scelto a piacere).

4. A.A. 2022/23, quarto appello (4 punti)
Si considerino i punti $A = (-1, 3, -5)$, $B = (-2, -1, 4)$ e il piano

$$\pi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(1) Calcolare la distanza tra il punto A e il piano π.

(2) Calcolare gli angoli del triangolo A, B, C, dove C è il punto di proiezione ortogonale di A su π.

5. A.A. 2022/23, quinto appello (5 punti)

Siano dati il punto $A = (0, 1, -1)$ e la retta $r\colon \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare la distanza tra r ed A.

(2) Determinare l'equazione parametrica della retta s passante per A che è sia ortogonale sia incidente ad r.

(3) Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente i punti A ed $B = (-1, 0, 0)$ e parallelo alla retta r.

Dimostrazioni

1. A.A. 2021/22, primo appello (6 punti)
Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange e se nella sua dimostrazione si fa uso del Teorema di Rolle, dimostrare anche quest'ultimo.

2. A.A. 2021/22, secondo appello (6 punti)
   (1) Enunciare il criterio del rapporto per serie numeriche.
   (2) Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

3. A.A. 2021/22, terzo appello (6 punti)
   (1) Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Riemann-integrabile. Provare che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ è continua in $[a,b]$.
   (2) Provare con un esempio che F può non essere derivabile in almeno un punto di $[a,b]$.

4. A.A. 2021/22, quarto appello (6 punti)
   (1) Sia π un piano di equazione cartesiana $ax + by + cz = d$ e sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto dello spazio. Dimostrare la formula che fornisce la distanza di P da π.
   (2) Definire geometricamente la distanza di un punto da una retta nello spazio.

5. A.A. 2021/22, quinto appello (6 punti)
   (1) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
   (2) Enunciare e dimostrare il teorema di monotonia per le funzioni derivabili.

6. A.A. 2022/23, prima prova (4 punti)
   (1) Enunciare e dimostrare il teorema del confronto per successioni.
   (2) Enunciare (ma non dimostrare) il teorema di valori intermedi.

7. A.A. 2022/23, primo appello (10 punti)
   (1) Enunciare e dimostrare la continuità della funzione composta.
   (2) Enunciare la formula di integrazione per sostituzione.
   (3) Enunciare e dimostrare il criterio del rapporto per serie numeriche.

8. A.A. 2022/23, secondo appello (10 punti)
   (1) Enunciare e dimostrare il teorema su limiti di successioni monotone.
   (2) Enunciare la formula della distanza punto tra un punto e un piano.
   (3) Enunciare e dimostrare la disugualianza di Cauchy-Schwarz.

9. A.A. 2022/23, terzo appello (10 punti)

(1) Enunciare e dimostrare il teorema sulla unicità del limiti di una successione.

(2) Enunciare la formula di De Moivre.

(3) Enunciare e dimostrare la continuità della funzione integrale.

10. A.A. 2022/23, quarto appello (10 punti)

(1) Enunciare e dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

(2) Enunciare il criterio del confronto per serie numeriche.

(3) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

11. A.A. 2022/23, quinto appello (10 punti)

(1) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

(2) Enunciare il teorema di Fermat.

(3) Enunciare e dimostrare il teorema della continuità della funzione integrale.