Analisi e Geometria 1 2023/24
Simulazione d'esame

15 dicembre 2023

- Tutte le domande a risposta multipla in questa simulazione hanno una e una sola risposta corretta.
- Chi deve svolgere la seconda prova in itinere deve rispondere alle domande dalla 5 alla 10 e svolgere l'esercizio 2.
- Questa simulazione non contiene domande di teoria (che saranno invece presenti nell'esame vero e proprio).

Domande a risposta multipla

1. Sia $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+1}, 1\right]$. Quale tra queste affermazioni è corretta?
   (a) $J = (0,1)$
   (b) $J = (0,1]$
   (c) $J = [0,1)$
   (d) $J = [0,1]$
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta.
2. Sia z un numero complesso. Quale tra queste affermazioni è sempre vera?
   (a) il modulo di $1+z$ è maggiore del modulo di z
   (b) z^2 è diverso da z
   (c) il modulo di $z \cdot \overline{z}$ è uguale a 1
   (d) $z+i$ non è un numero reale
   (e) $z+\overline{z}$ è un numero reale
3. Quanto vale $\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{2x+4}{x}\right)$?
   (a) 0
   (b) Un numero reale diverso da 0
   (c) $+\infty$
   (d) Il limite non esiste
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta
4. È data la funzione $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
   (a) f ha esattamente due punti di minimo assoluto
   (b) 0 è un punto di massimo relativo per f

(c) Il grafico di f non interseca l'asse delle ascisse
(d) f non ha asintoto obliquo per $x \to -\infty$
(e) f non è di classe C^1

5. Una certa funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ ha polinomio di Maclaurin di ordine 2 uguale a $1 - 3t + 2t^2$. Quale tra queste affermazioni è falsa?

   (a) f ha un punto di minimo relativo in 0
   (b) f è continua in 0
   (c) La retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$ ha coefficiente angolare pari a -3
   (d) Il grafico di f non passa per l'origine degli assi
   (e) Esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

6. Per quale tra le seguenti successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ si ha che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente?

   (a) $a_n = (-2)^{n+1}$
   (b) $a_n = n!$
   (c) $a_n = \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$
   (d) $a_n = \cos(\pi n)$
   (e) $a_n = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n}}{2n+3}$

7. Quale tra questi è il polinomio di Maclaurin di ordine 2 della funzione $F(x) = \int_0^x (\arctan(t) + e^{2t})dt$?

   (a) $3t^2$
   (b) $1 + 2t + 2t^2$
   (c) $t + \frac{3}{2}t^2$
   (d) $t + 3t^2$
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta

8. Sia $G\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $G(x) = \int_1^{x^2} (1 - \cos(\frac{1}{t}))dt$. Quale tra queste affermazioni è corretta?

   (a) G ammette almeno uno zero su $(1,+\infty)$
   (b) G ha un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$
   (c) $G'(x) = 1 - \cos(\frac{1}{x^2})$ per ogni $x \in (1,+\infty)$
   (d) $G'(x) = 1 - \cos(\frac{1}{x})$ per ogni $x \in (1,+\infty)$
   (e) Nessuna delle altre affermazioni è corretta

9. Sono dati i vettori non nulli $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$ in $\mathbb{R}^3$. Quale tra queste proprietà *non* è soddisfatta dal prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$?

   (a) il prodotto scalare tra $(\vec{v} \times \vec{w})$ e $(0,1,0)$ vale $v_x w_y - v_y w_x$
   (b) $\vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale a $\vec{w}$
   (c) $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$
   (d) $\vec{v} \times \vec{w}$ è ortogonale a $2\vec{v} + 3\vec{w}$
   (e) il prodotto scalare tra $(\vec{v} \times \vec{w})$ e $(1,0,0)$ vale $v_y w_z - v_z w_y$

10. È dato un arco di curva γ con parametrizzazione regolare $\vec{f}\colon [1,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\vec{f}(t) = (\frac{1}{2}t^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}},\ t)$. Quale tra queste è la riparametrizzazione di γ mediante il parametro arco s?

(a) $\vec{g}(s) = (\frac{1}{2}s^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}s^{\frac{3}{2}},\ s)$

(b) $\vec{g}(s) = (\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2s+4})^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(-1+\sqrt{2s+4})^{\frac{3}{2}},\ -1+\sqrt{2s+4})$

(c) $\vec{g}(s) = (\frac{1}{2}(\frac{2}{5}s+1)^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(\frac{2}{5}s+1)^{\frac{3}{2}},\ \frac{2}{5}s+1)$

(d) $\vec{g}(s) = (\frac{1}{2}(s-1)^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(s-1)^{\frac{3}{2}},\ s-1)$

(e) $\vec{g}(s) = (\frac{1}{2}(e^s)^2,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}(e^s)^{\frac{3}{2}},\ e^s)$

Problemi aperti

1. Questo esercizio vale **6 punti**.

   Sia
   $$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

   (a) Determina il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.

   (b) Trova i punti di estremo di f e specifica se sono locali o globali.

   (c) Studia la concavità della funzione e determina eventuali punti di flesso.

   (d) Disegna il grafico di f.

2. Questo esercizio vale **6 punti**.

   È data la parametrizzazione regolare $\vec{f}\colon[0,2]\to\mathbb{R}^3$ (della curva $\gamma = \mathrm{im}(\vec{f})$) definita da
   $$\vec{f}(t) = (t^2\sin(t),\ 2t-2,\ t^2\cos(t)).$$

   (a) Determina il versore $\vec{v}$ tangente a γ nel punto $P = (0,-2,0)$.

   (b) Scrivi l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta $Q+t\vec{v}$ (dove $Q = (1,1,0)$ e $\vec{v}$ è quello trovato nel punto precedente) e passa per il punto $R = (2,2,1)$.

   (c) Calcola la lunghezza di γ.