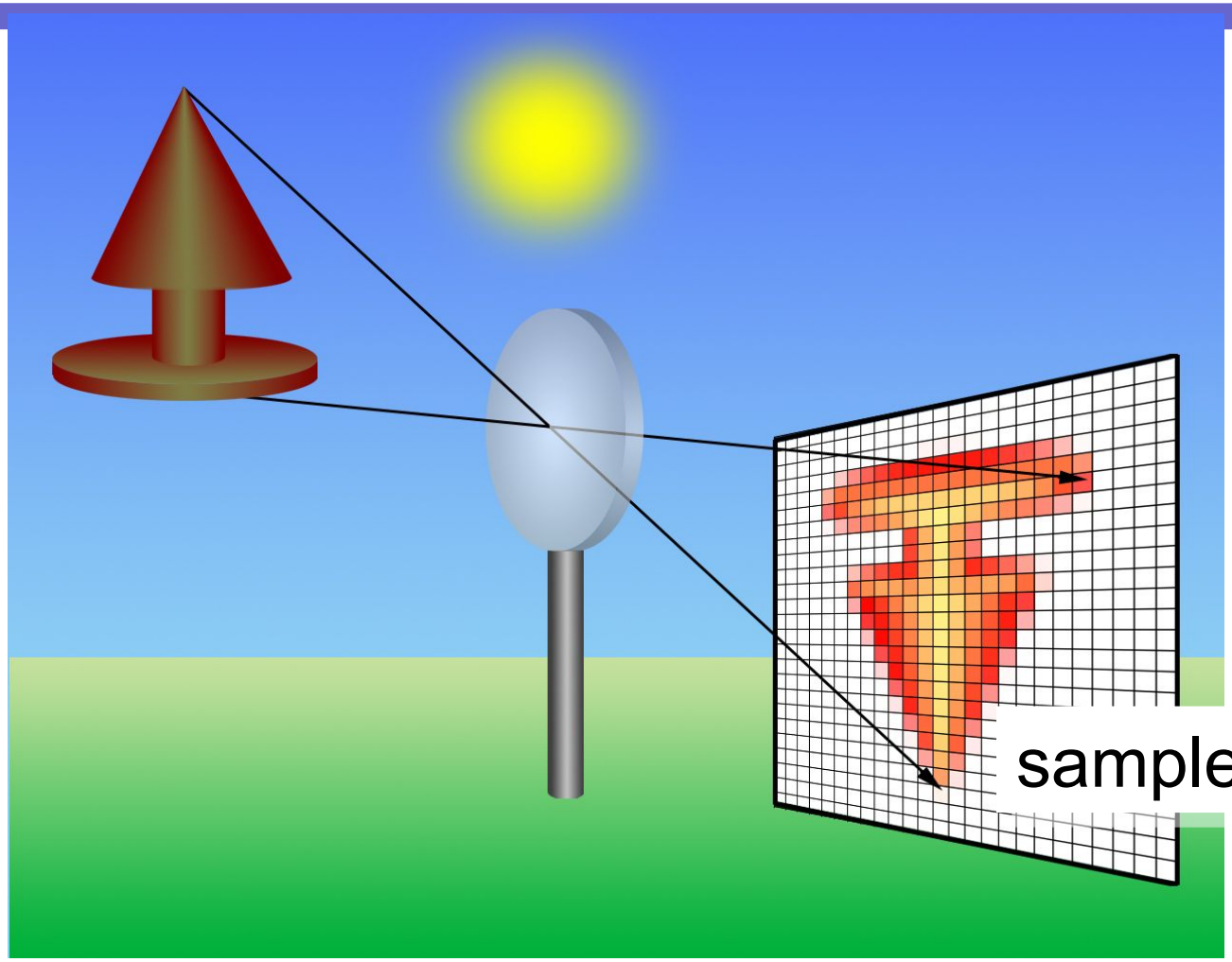
计算机图形学
-- 直线、圆弧生成算法

授课教师： 陈佳舟

邮箱：cjz@zjut.edu.cn

单位：计算机学院数字媒体所

成像原理



基本图形生成算法

- 图元扫描转换
  - 直线段扫描转换
  - 圆弧扫描转换
- 实区域填充
- 图形反走样

直线的扫描转换

图形的生成

指定的输出设备上，根据坐标描述构造二维几何图形。

图形的扫描转换：在光栅显示器等数字设备上确定一个最佳逼近于图形的象素集的过程。

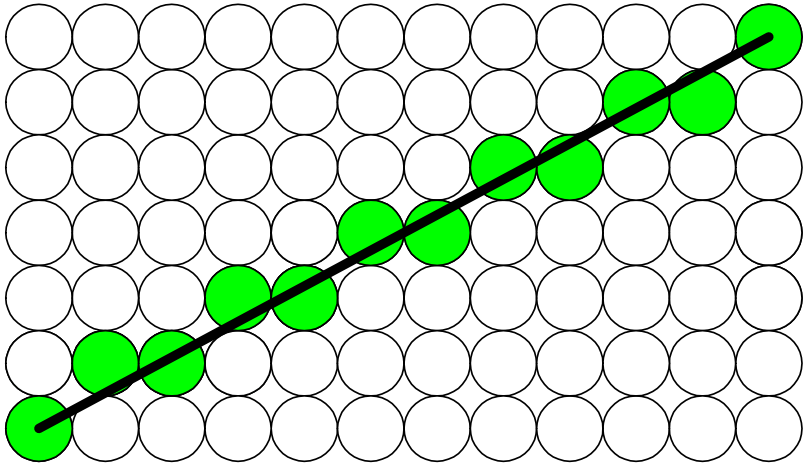


图5-1　用一系列的象素点来逼近直线

直线扫描转换的要求

直线的绘制要求：

1.直线要直

2.直线的端点要准确，即无定向性和断裂情况

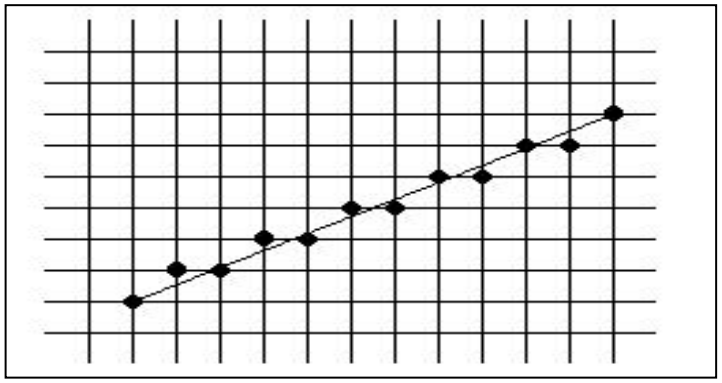
3.直线的亮度、色泽要均匀

4.画线的速度要快

5.要求直线可以具有不同的色泽、亮度、线型等属性

直线段扫描转换

- 假设
  - 像素间均匀网格，整型坐标系，直线段斜率 0<k<1
  - 对k＞1，x、y互换



直线段的扫描转换算法

- *直线的扫描转换*
  - 确定最佳逼近于该直线的一组象素
  - 按扫描线顺序，对这些象素进行写操作
- *三个常用算法*:

  1. 数值微分法（DDA）
  2. 中点画线法
  3. Bresenham算法。

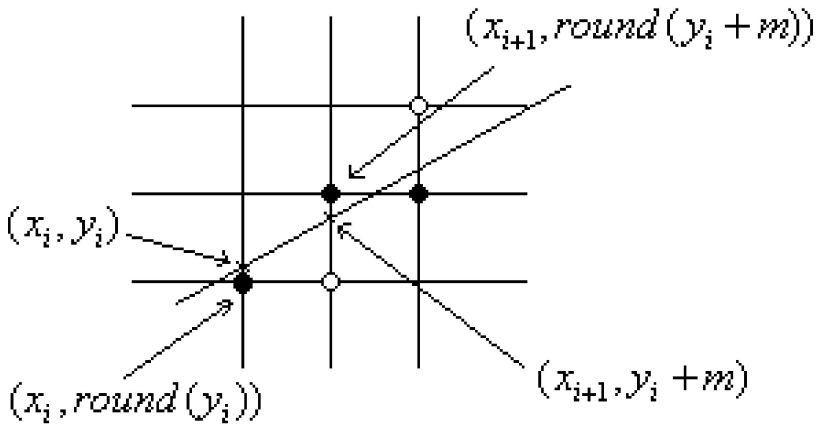
数值微分(DDA)法(1/5)

- 已知线段端点：$P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$
- 直线方程

$$y=kx+b$$

$$\{(x_i, y_i)\},\ i=0,....n.$$

- 浮点数取整： $y_i=round(y_i)=(int)(y_i+0.5)$
  - 用到浮点数的乘法、加法和取整运算



数值微分(DDA)法(2/5)

- *增量算法*
  - $y_{i+1}=kx_{i+1}+b=k(x_i+1)+b=y_i+k$
  - $(x_i,y_i)\rightarrow(x_i+1,y_i+k)$
- *缺点*:
  - 有浮点数取整运算
  - 不利于硬件实现
  - 效率低
  - 仅适用于$|k| \leqslant 1$的情形:x每增加1,y最多增加1。当$|k| > 1$时，必须把x，y互换。

数值微分(DDA)法(3/5)

- digital differential analyzer
- *基本思想*
  - 用数值方法解微分方程

$dy/dt = \Delta x$

$dy/dt = \Delta y$

$x_{n+1} = x_n + \epsilon\Delta x$

$y_{n+1} = y_n + \epsilon\Delta y$

数值微分(DDA)法(4/5)

- *对称的DDA*
  - 取$\epsilon=2^{-n}$
  - 使 $2^{n-1}\leqslant\max(|\Delta x|,|\Delta y|)\leqslant 2^{n}$
- *简单的DDA*
  - 取$\epsilon= 1/\max(|\Delta x|,|\Delta y|)$
  - 使 $\epsilon|\Delta x|$, $\epsilon|\Delta y|$中必有一个是单位步长
  - Δx为最大时， $\epsilon\Delta x =1$, $\epsilon\Delta x =k$
  - Δy为最大时， $\epsilon\Delta y =1$, $\epsilon\Delta y =1/k$

数值微分(DDA)法(5/5)

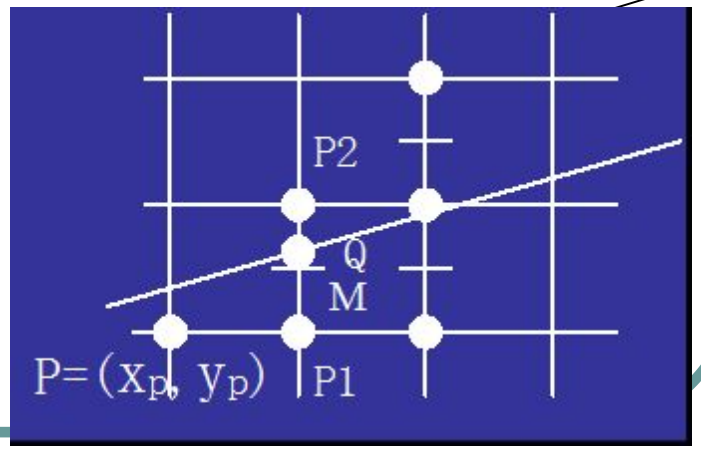
- 缺点：
  - 浮点数运算
  - 不易硬件实现

中点画线法（1/4）

- 问题：判断距离理想直线最近的下一个象素点
- 已知：线段两端点(x0,y0)，(x1,y1)
- 直线方程：F(x,y)=ax+by+c=0
  - a=y0-y1
  - b=x1-x0
  - c=x0y1-x1y0

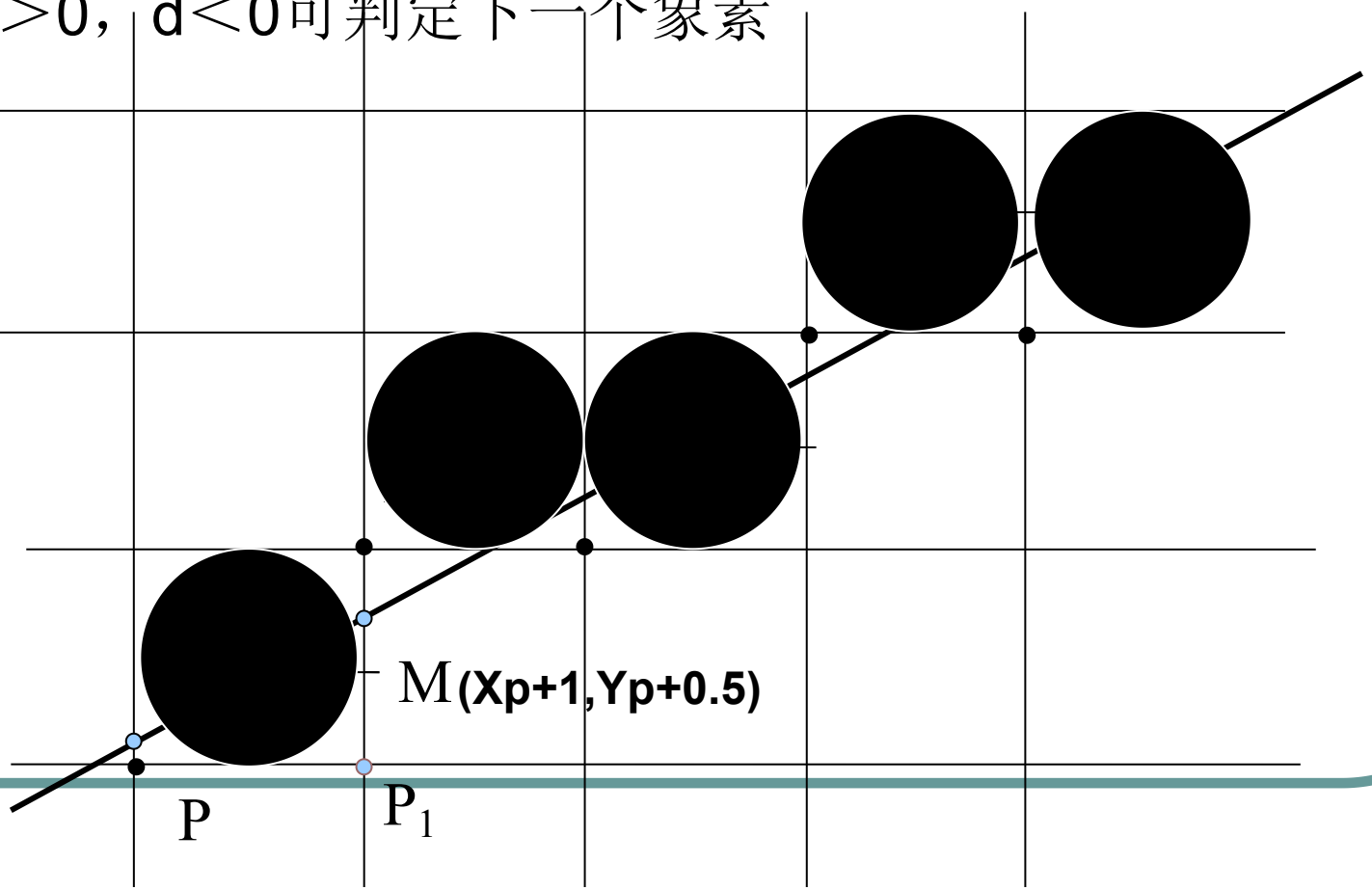
如何判断*M*点在*Q*点上方还是在*Q*点下方？

$$\begin{cases} F(x,y)=0 & \text{点在直线上面} \\ F(x,y)>0 & \text{点在直线上方} \\ F(x,y)<0 & \text{点在直线下方} \end{cases}$$



中点画线法（2/4）

- 直线上方点： F(x,y)＞0　　直线下方点： F(x,y)＜0
- 构造判别式： d=F(M)=F(Xp+1,Yp+0.5)
- 由d＞0，d＜0可判定下一个象素



中点画线法（3/4）

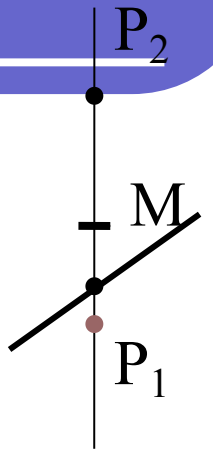
分两种情形考虑再一下个象素的判定：

- 若d≥0，中点M在直线上方，取正右方象素P1 (Xp+1,Yp)
  - 再下一个象素的判别式为：

d’=F((Xp+1)+1,Yp+0.5)=a(Xp+2)+b(Yp+0.5)+c

= d+a

  - d的增量为a

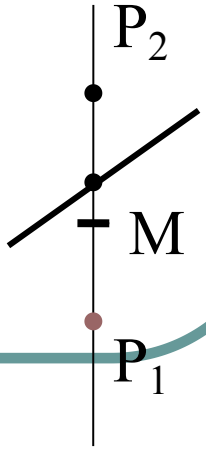


- 若d＜0，中点M在直线下方，取右上方象素P2 (Xp+1,Yp+1)
  - 再下一个象素的判别式为：

d’=F((Xp+1)+1,(Yp+1)+0.5)= a(Xp+2)+b(Yp+1.5)+c

=d+a+b

  - d的增量为a+b



中点画线法（4/4）

- d的初始值
  - d0=F(X0+1,Y0+0.5)
    =F(X0,Y0)+a+0.5b
    =a+0.5b
  - 用2d代替d后，d0=2a+b
  - d的增量都是整数
- 优点：
  - 只有整数运算，不含乘除法
  - 可用硬件实现

因(X0,Y0)在直线上，
所以F(X0,Y0)=0

Bresenham画线算法（1/7）

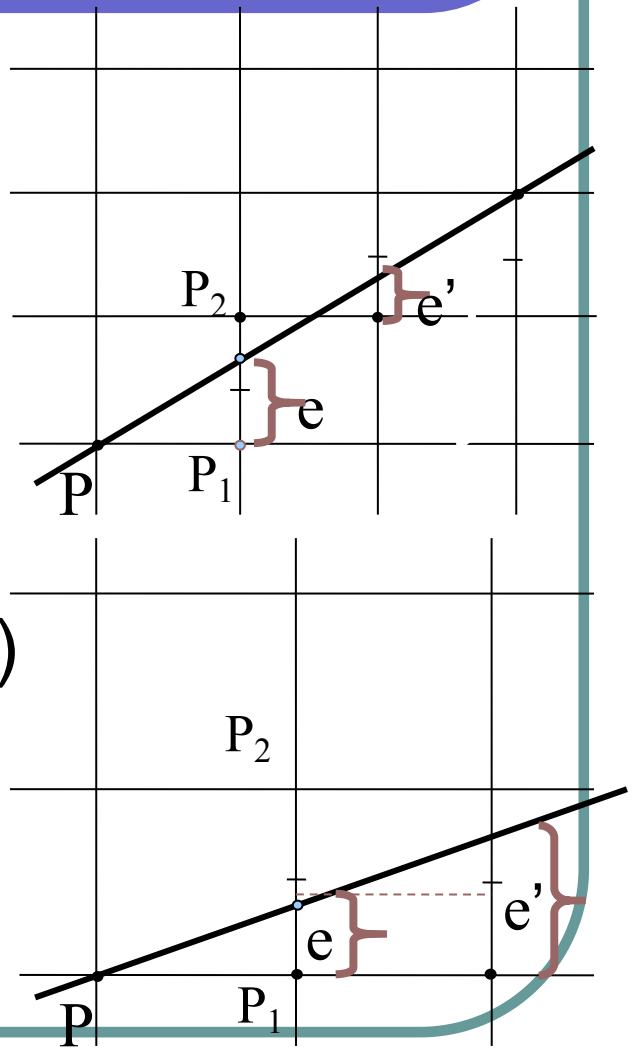
- 使用最广泛
- 与中点画线法的思想类似
- 由误差项符号决定下一个象素取正右方像素还是右上方像素

Bresenham画线算法（2/7）

- *基本思想*
  - 比较从理想直线到位于直线上方的像素的距离d1和相邻的位于直线下方的像素的距离d2
  - 根据距离误差项的符号确定与理想直线最近的象素

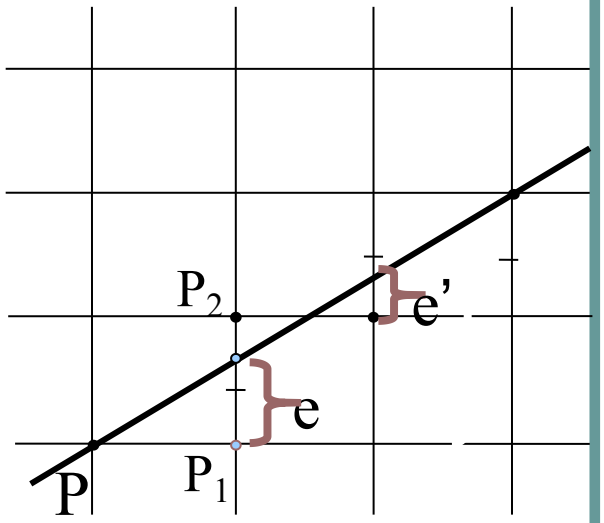
Bresenham画线算法（3/7）

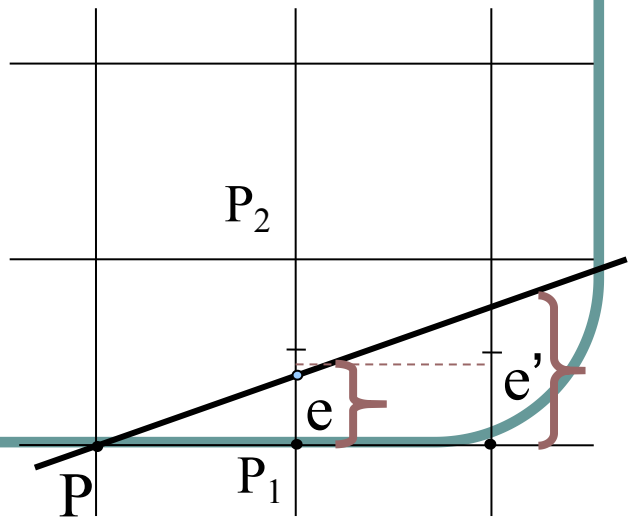
- *最大位移方向每次走一步*
  - k<1时，x为最大位移方向
- *y方向走步与否*
  - 取决于误差e值的大小
- *误差计算*
- 初值：e0= Δy/ Δx
- 当e≥0.5时，最接近P2(xi+1,yi+1)
  - y方向走一步
- 当e<0.5时，最接近P1(xi+1,yi)
  - y方向不走步



Bresenham画线算法（4/7）

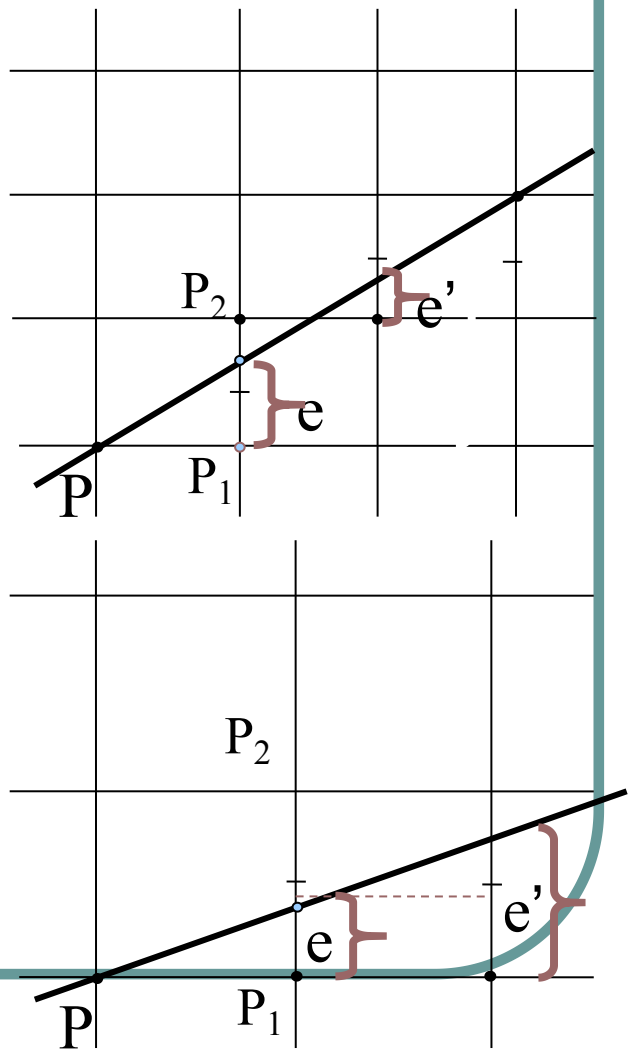
- 为方便与0比较，设e=e-0.5
- e0=Δy/ Δx-0.5
- 当e≥0时，最接近P2(xi+1,yi+1)
  - y方向走一步
- 当e<0时，最接近P1(xi+1,yi)
  - y方向不走步
- 有除法，不宜硬件实现





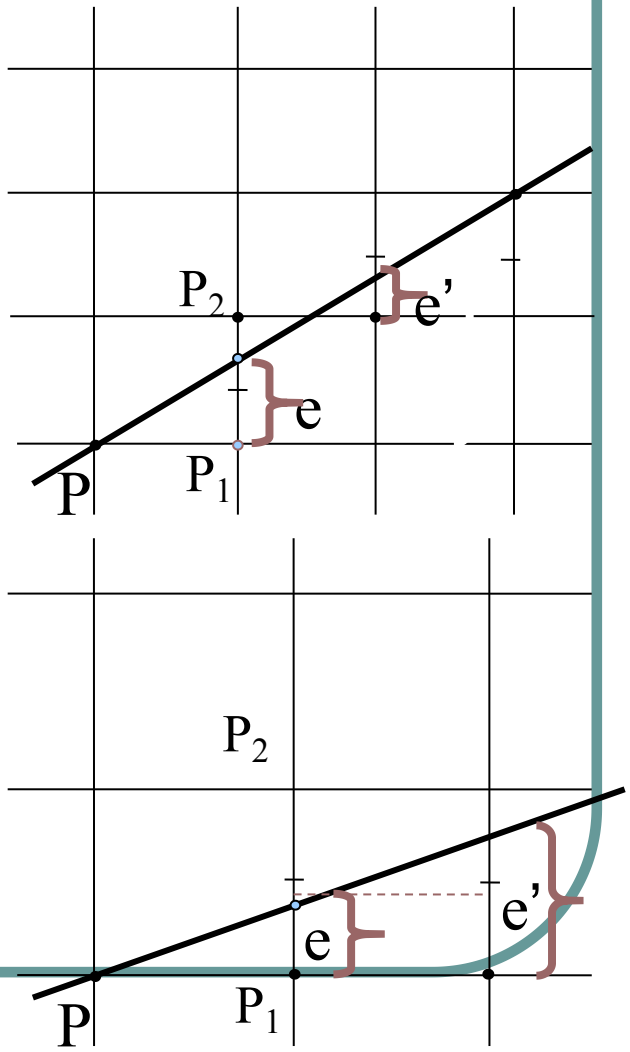
Bresenham画线算法（5/7）

- 设e=e×2Δx，不影响判断的准确性
- e0=2Δy - Δx
- 当e≥0时，最接近P2(xi+1,yi+1)
  - y方向走一步
- 当e<0时，最接近P1(xi+1,yi)
  - y方向不走步



Bresenham画线算法（6/7）

- *下一步误差的计算*
- 当e≥0时，y方向走一步
  - e’=2Δy/ Δx - 1 =e + Δy/ Δx - 1
  - e’=e + 2Δy - 2Δx
- 当e<0时，y方向不走步
  - e’=2Δy/ Δx=e + Δy/ Δx
  - e’=e + 2Δy



Bresenham画线算法（7/7）

- 优点
  - 整数运算，速度快
  - 精度高
  - 乘2运算可用移位实现，适于硬件实现

异常处理

- 直线y=c（k=0时）
- 直线x=c（k无穷大时）

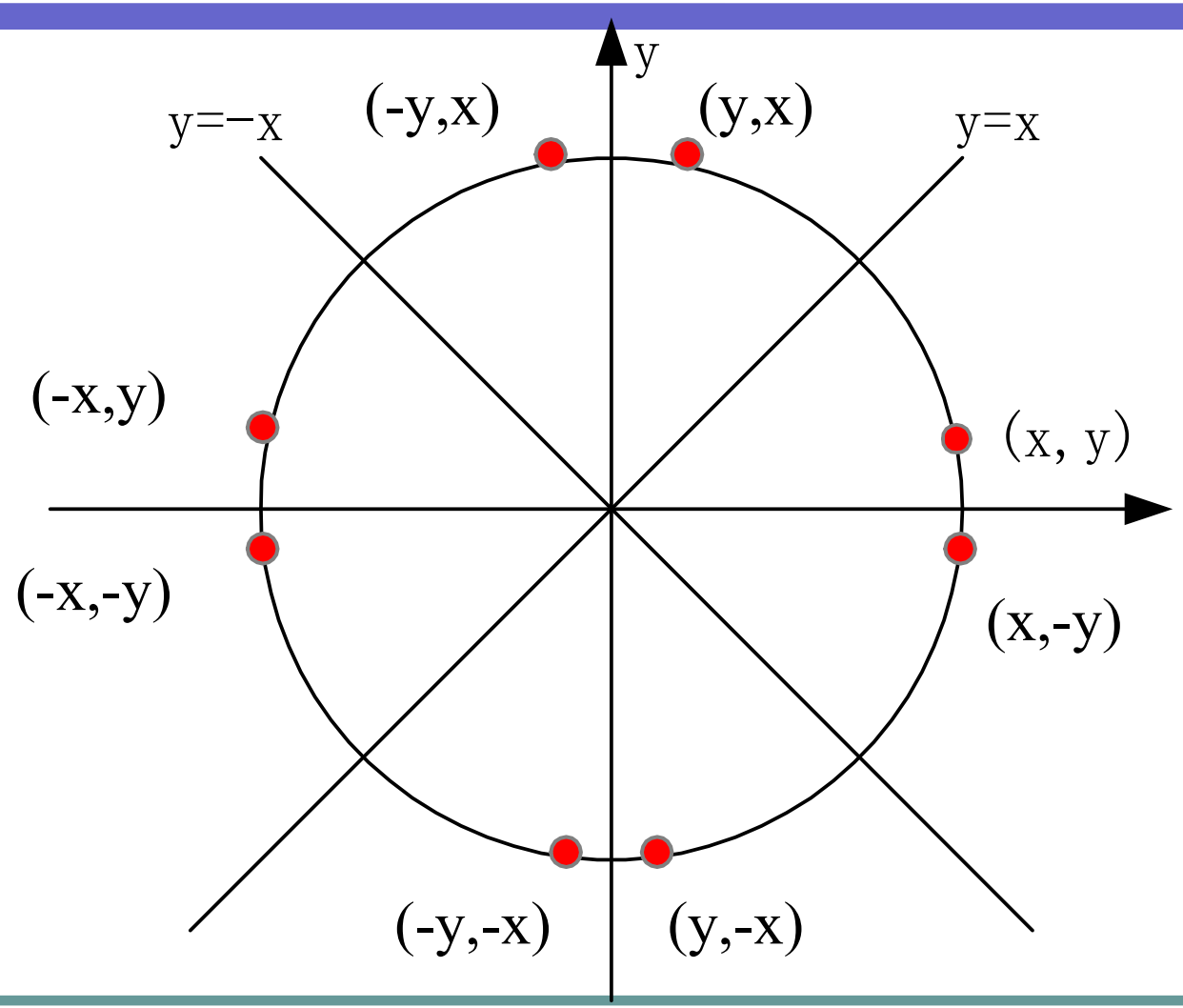
圆的扫描转换

3.2 圆的扫描转换

解决的问题：

绘出圆心在原点，半径为整数R的圆$x^2+y^2==R^2$

八分法画圆


y
y=−x
(-y,x)
(y,x)
y=x
(-x,y)
(x, y)
(-x,-y)
(x,-y)
(-y,-x)
(y,-x)

圆弧的扫描转换

- ***两种直接离散生成方法***
  - 离散点
    - 开方运算
  - 离散角度
    - 三角函数运算
- ***缺点*:**
  - 计算量大
  - 所画像素位置间的间距不一致

$$y = y_c \pm \sqrt{r^2 - (x_c - x)^2}$$

$$\begin{cases} x_i = x_c + r \cdot \cos\alpha_i \\ y_i = y_c + r \cdot \sin\alpha_i \end{cases}$$

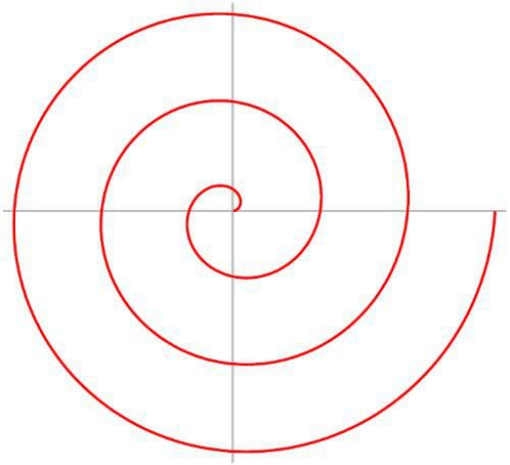
DDA画圆法（1/3）

- 圆的方程：$f(x,y)=x^2+y^2-R^2=0$
- 全微分：$df(x,y)=2xdx+2ydy=0$
- 微分方程：$dy/dx=-x/y$
- 递推方程:

$(y_{n+1}-y_n)/(x_{n+1}-x_n)=-\epsilon x_n/\epsilon y_n$

$x_{n+1}-x_n=\epsilon y_n$

$y_{n+1}-y_n=-\epsilon x_n$



实际画出的曲线不是圆，而是螺旋线，为什么？

DDA画圆法（2/3）

- 将递推公式写成矢量形式：

$$[x_{n+1} \quad y_{n+1}] = [x_n \quad y_n] \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$$

- 构造一个行列式值为1的矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon^2 \end{bmatrix}$

- 对应的圆方程递推关系为

$x_{n+1} = x_n + \epsilon y_n$

$y_{n+1} = -\epsilon x_n + (1-\epsilon^2) y_n = y_n - \epsilon x_{n+1}$

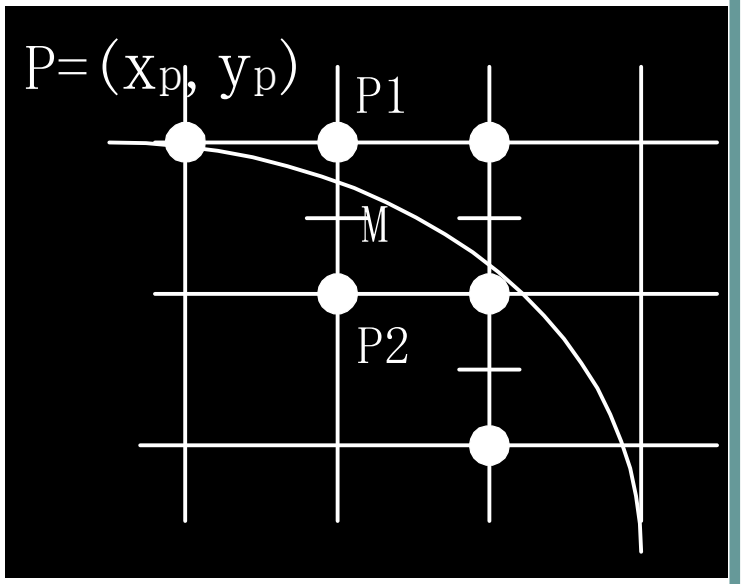
DDA画圆法（3/3）

- 针对不同象限及顺逆时针画圆，赋给ϵ适当的符号
- ϵ不同，圆形状不同， ϵ大近似椭圆

中点画圆法（1/2）

- $F(X,Y)=X^2+Y^2-R^2=0$
- 中点 M=(Xp+1,Yp-0.5)

$$d = F(M) = F(x_p + 1, y_p - 0.5)$$
$$= (x_p + 1)^2 + (y_p - 0.5)^2 - R^2$$



- 当F(M)＜0时，M在圆内，P1距离圆弧近，取P1
- 当F(M)＞0时，M在圆外，P2距离圆弧近，取P2

中点画圆法（2/2）

若 d<0，取P1为下一象素，**再下一象素的判别式为**

$$d' = F(x_p + 2, y_p - 0.5) = (x_p + 2)^2 + (y_p - 0.5)^2 - R^2 = d + 2x_p + 3$$

若d>=0，取P2为下一象素，**再下一象素的判别式为**

$$d' = F(x_p + 2, y_p - 1.5) = (x_p + 2)^2 + (y_p - 1.5)^2 - R^2 = d + 2(x_p - y_p) + 5$$

初始象素是（0,R），判别式d的初值为

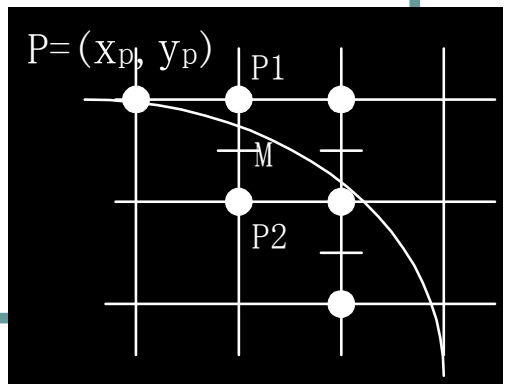
$$d_0 = F(1, R - 0.5) = 1.25 - R$$

使用e=d-0.25代替d

e0=1-R

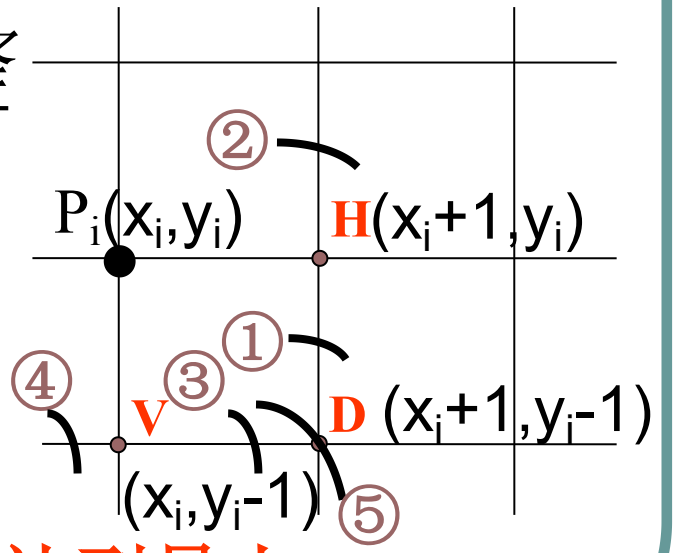
P1(Xp+1,Yp)

P2(Xp+1,Yp-1)



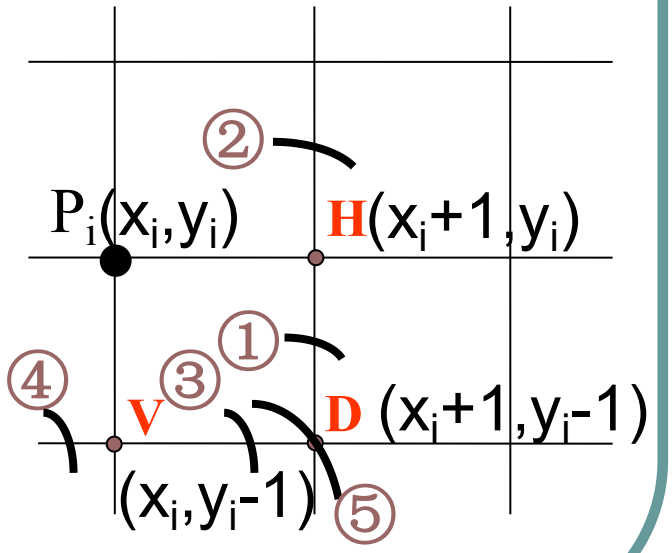
Bresenham画圆算法（1/7）

- 顺时针画第一四分圆，下一步选择哪个点？
- *基本思想*
  - 通过比较像素与圆的距离平方来避免开方运算
- *下一像素有3种可能的选择*
  - $m_H=|(x_i+1)^2+y_i^2-R^2|$
  - $m_D=|(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2|$
  - $m_V=|x_i^2+(y_i-1)^2-R^2|$
- *选择像素的原则*
  - **使其与实际圆弧的距离平方达到最小**



Bresenham画圆算法（2/7）

- 圆弧与点(xi,yi)附近光栅网格的相交关系有5种
- *右下角像素D (xi,yi) 与实际圆弧的近似程度*
  - $\Delta i=(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2$
  - 当$\Delta i<0$时，D在圆内，①②
  - 当$\Delta i>0$时，D在圆外，③④
  - 当$\Delta i=0$时，D在圆上，⑤



Bresenham画圆算法（3/7）

- 当Δi<0时，D在圆内，①②
- 情形①，选m_H，m_D中最小者
- $d=m_H - m_D$

  $=|(x_i+1)^2+y_i^2-R^2| - |(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2|$

  $=(x_i+1)^2+y_i^2-R^2 + (x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2$

  $=2(\Delta i+y_i)-1$
  - 若d<0，则选H
  - 若d>0，则选D
  - 若d=0，则选H。

情形②也适用

Bresenham画圆算法（4/7）

- 当Δi>0时，D在圆外，③④
- 情形③，选m_V，m_D中最小者
- $d'=m_D - m_V$

  $=|(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2| - |x_i^2+(y_i-1)^2-R^2|$

  $=(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2 + x_i^2+(y_i-1)^2-R^2$

  $=2\ (\Delta i-x_i)-1$

  - 若d'<0，则选D
  - 若d'>0，则选V
  - 若d'=0，则选D。

情形④也适用

Bresenham画圆算法（5/7）

- 当Δi=0时，D在圆上，⑤
  - 按d判别，有d>0，应选D
  - 按d'判别，有d'<0，应选D

Bresenham画圆算法（6/7）

- 当Δi<0时，
  - 若d≤0，选H
  - 若d>0，选D
- 当Δi>0时，
  - 若d’ ≤0，选D
  - 若d’>0，选V
- 当Δi=0时，选D

Bresenham画圆算法（7/7）

判别式的递推关系:

- 当取H(xi+1,yi)时
  - $\Delta i+1=(x_i+1+1)^2+(y_i-1)^2-R^2= \Delta i+2(xi+1)+1$
- 当取V(xi,yi-1)时
  - $\Delta i+1=(x_i+1)^2+(y_i-1-1)^2-R^2= \Delta i-2(yi-1)+1$
- 当取D(xi+1,yi-1)时
  - $\Delta i+1=(x_i+1+1)^2+(y_i-1-1)^2-R^2= \Delta i+2(xi+1)-2(yi-1)+2$

多边形逼近法

- 当圆的正内接多边形边数足够多时，可以用画该多边形近似代替画圆
- “以直代曲”的代表方法之一
- 内接正n边形顶点为$P_i(x_i, y_i)$
- 每条边对应的圆心角为 θ，则有

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

回顾：基本图形生成算法

- 图元扫描转换
  - 直线段扫描转换
    - 数值微分(DDA)法
    - 中点画线法
    - **Bresenham画线算法**
  - 圆弧扫描转换
    - DDA画圆法
    - Bresenham画圆法
    - 多边形逼近法
- 实区域填充
- 图形反走样

上机作业预告

- Bresenham直线段扫描转换
  - 窗口中输入若干点
  - 用Bresenham算法依次画出直线段，形成多边形
- 扫描线种子填充算法（下一次课）
  - 在该多边形中填充颜色
- 要求：使用指定算法，效率较高

谢谢！