6. 设 f 是内积空间 V 上变换，若

$$\langle f(\boldsymbol{\alpha}), f(\boldsymbol{\beta})\rangle = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle \quad (\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V),$$

试证：f 是线性变换，因此 f 是等距变换.

① 证明 可加性

$$\langle f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta),\ f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)\rangle$$

$$= \langle f(\alpha+\beta), f(\alpha+\beta)\rangle - \langle f(\alpha+\beta), f(\alpha)\rangle - \langle f(\alpha+\beta), f(\beta)\rangle$$
$$- \langle f(\alpha), f(\alpha+\beta)\rangle + \langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle + \langle f(\alpha), f(\beta)\rangle$$
$$- \langle f(\beta), f(\alpha+\beta)\rangle + \langle f(\beta), f(\alpha)\rangle + \langle f(\beta), f(\beta)\rangle$$

$$= \langle \alpha+\beta, \alpha+\beta\rangle - \cancel{\langle \alpha+\beta, \alpha\rangle} - \cancel{\langle \alpha+\beta, \beta\rangle}$$
$$- \langle \alpha, \alpha+\beta\rangle + \cancel{\langle \alpha, \alpha\rangle} + \cancel{\langle \alpha, \beta\rangle}$$
$$- \langle \beta, \alpha+\beta\rangle + \cancel{\langle \beta, \alpha\rangle} + \cancel{\langle \beta, \beta\rangle}$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta) \quad \text{证得}$$

② 证明 数乘性

$$\langle f(k\alpha) - kf(\alpha),\ f(k\alpha) - kf(\alpha)\rangle$$

$$= \langle f(k\alpha), f(k\alpha)\rangle - \langle f(k\alpha), kf(\alpha)\rangle$$
$$- \langle kf(\alpha), f(k\alpha)\rangle + \langle kf(\alpha), kf(\alpha)\rangle$$

$$= \langle f(k\alpha), f(k\alpha)\rangle - \bar{k}\langle f(k\alpha), f(\alpha)\rangle$$
$$- k\langle f(\alpha), f(k\alpha)\rangle + \|k\|^2\langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle$$

$$= \langle k\alpha, k\alpha\rangle - \bar{k}\langle k\alpha, \alpha\rangle$$
$$- k\langle \alpha, k\alpha\rangle + \|k\|^2\langle \alpha, \alpha\rangle$$

$$= \left(\|k^2\| - \|k\|^2 - \|k\|^2 + \|k\|^2\right)\langle \alpha, \alpha\rangle = 0 \quad \Rightarrow f(k\alpha) = k\alpha \quad \text{证得}$$

$\therefore$ f 是线性变换 $f \in Hom(V,V)$

又 $\langle f(\alpha), f(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$ $\Rightarrow$ f 是等距变换

7. 设 V 为欧氏空间，k 为实数，$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega}$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，$\|\omega\|=1$，求 f 是正交变换的充要条件.

$$\langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle = \langle \alpha - k\langle\alpha,w\rangle w,\ \alpha - k\langle\alpha,w\rangle w\rangle$$

$$= \langle\alpha,\alpha\rangle - \langle\alpha, k\langle\alpha,w\rangle w\rangle - \langle k\langle\alpha,w\rangle w, \alpha\rangle + \langle k\langle\alpha,w\rangle w, k\langle\alpha,w\rangle w\rangle$$

$$= \langle\alpha,\alpha\rangle - \overline{k\langle\alpha,w\rangle}\langle\alpha,w\rangle - k\langle\alpha,w\rangle\langle w,\alpha\rangle + \|k\|^2\langle\alpha,w\rangle^2\langle w,w\rangle$$

$$= \langle\alpha,\alpha\rangle + (k^2-2k)\langle\alpha,w\rangle$$

而正交变换 $\Longleftrightarrow$ $\langle f(\alpha), f(\alpha)\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle$

$\therefore$ $k^2-2k=0$ $\Longrightarrow$ $k=0$ 或 2

8. 设 f 是内积空间 V 的等变换，W 是 f 的 r 维不变子空间，试证：$W^{\perp}$ 也是 f 的不变子空间.

① 证明 $f(W) = W$

$\because \forall \eta \in K(f|_W)$ $f(\eta) = \theta$ 即 $\langle f(\eta), f(\eta) \rangle = 0$

而 f 是 V 上等距变换

$\therefore \langle f(\eta), f(\eta) \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = \|\eta\|^2$

$\therefore \|\eta\|^2 = 0$ 即 $\eta = \theta$

$\therefore K(f|_W) = \{\theta\}$

又 $\dim V = r$ 有限

$\therefore f$ 是单射 f 是满射 $f(W) = W$

② 证明 $W^{\perp}$ 是 f 的不变子空间

$\forall \alpha \in W^{\perp}$, $\beta \in W$

$\langle f(\alpha), f(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = 0$

又 W 是不变子空间 $\Rightarrow f(\beta) \in W$

且 ① 得 $f(\beta)$ 充满 W

$\therefore f(\alpha) \perp W$ 即 $f(\alpha) \in W^{\perp}$

$\therefore W^{\perp}$ 也是 f 的不变子空间

12. 设 $\|\omega\|=1$，试证镜象变换

$$H(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}-2\langle\boldsymbol{X},\omega\rangle\omega \quad (\forall \boldsymbol{X}\in C^n)$$

在基 e_1, e_2, e_n 下矩阵为 $I-2\omega\omega^H$. 因此，不论 ω 是怎样的单位向量，总有

$$\det(I-2\omega\omega^H)=-1.$$

(1) $\forall x \in C^n$ $H(x) = x - 2\langle x, w\rangle w$

$= x - 2(w^H x) w$

$= x - 2 w \cdot w^H \cdot x$

$= (I - 2w \cdot w^H) x$

$\therefore$ H 在 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 下的矩阵为 $(I - 2w \cdot w^H)$

(2) 将 w 扩充成 C^n 的标准正交基 $w, w_2, \cdots, w_n$

$f(w_1) = f(w) = w - 2\langle w, w\rangle w = -w = -w_1$

$f(w_2) = f(w_2) = w_2 - 2\langle w_2, w\rangle w = w_2$

$\vdots$

$f(w_n) = f(w_n) = w_n - 2\langle w_n, w\rangle w = w_n$

$\therefore$ f 在 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 下的矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

又同一线性变换下，不同基下的矩阵相似

$\therefore$ $I - 2ww^H \sim \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $\det(I - 2ww^H) = -1$