0章

18. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 极大线性无关组为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

∴ 满秩分解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 极大无关组为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

∴ 满秩分解为 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{行} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 极大线性无关组为 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ 和 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

∴ 满秩分解为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

25. $\because$ $\forall\ A_{s\times n},\ B_{n\times t}$

有 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$

$$\therefore\ r\left(\prod_{t=1}^{k} B_t\right) = r(B_1 \cdot B_2 \cdot \cdots \cdot B_k)$$

$$\geq r(B_1 \cdot B_2 \cdots B_{k-1}) + r(B_k) - n$$

$$\geq r(B_1 \cdots B_{k-2}) + r(B_{k-1}) + r(B_k) - 2n$$

$$\cdots$$

$$\geq r(B_1) + r(B_2) + \cdots + r(B_k) - (k-1)n$$

$$= \sum_{t=1}^{k} r(B_t) - (k-1)n$$

而 $r\left(\prod_{t=1}^{k} B_t\right) = r(O) = 0$

$\therefore\ \sum_{t=1}^{k} r(B_t) \leq (k-1)n$ 证毕

1 章

2. ① 先证明 若$\vec{\alpha}$非零向量，$k\cdot\vec{\alpha}=\theta$

则 $k=0$

证明：假设 $k\neq 0$，则对 $k\cdot\vec{\alpha}=\theta$ 同乘上

得 $\frac{1}{k}\cdot k\cdot\vec{\alpha}=\frac{1}{k}\cdot\theta$

$\therefore (\frac{1}{k}\cdot k)\cdot\vec{\alpha}=\theta$

即 $\vec{\alpha}=\theta$ 与$\vec{\alpha}$非零向量矛盾

∴ 结论 ① 成立

② 再证明 若$\vec{\alpha}$非零向量，$k_1\neq k_2$

则 $k_1\vec{\alpha}\neq k_2\vec{\alpha}$

证明：~~假设~~ 假设 $k_1\vec{\alpha}=k_2\vec{\alpha}$

$\therefore k_1\vec{\alpha}-k_2\vec{\alpha}=\theta$

即 $(k_1-k_2)\vec{\alpha}=\theta$

而 $\cancel{k_1-k_2\neq 0}$ 由 ① 结论得

对非零向量$\vec{\alpha}$，$k\cdot\vec{\alpha}=\theta \Rightarrow k=0$

$\therefore k_1-k_2=0$ 与题干矛盾

综上 $k_1\alpha\neq k_2\alpha$

4.(3) $\dim V = (n+1)$

设 $\vec{e_i} = (0, \cdots, 1, \cdots 0)$

（第 i 项为1，其余为0 的向量）

$\vec{e} = \vec{e_2} + \vec{e_4} + \cdots \vec{e_{2n}}$

基为 $\{\vec{e_1}, \vec{e_3}, \cdots \vec{e_{2n-1}}, \vec{e}\}$

证明：① 上述基线性无关

令 $a_1\vec{e_1} + a_3\vec{e_3} + \cdots + a_{2n-1}\vec{e_{2n-1}} + a\vec{e} = \theta$

左式 $= (a_1, a, a_3, a, \cdots, a_{2n-1}, a) = \theta$

$\therefore a_1 = a_3 = \cdots = a_{2n-1} = a = 0$

$\therefore$ 结论 ① 成立

证明：② $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 都能由上述基表示

$(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$

$= (x_1, x_2, x_3, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_2)$

$= x_1\vec{e_1} + x_3\vec{e_3} + \cdots + x_{2n-1}\vec{e_{2n-1}} + x_2\vec{e}$

综上：成立

4 (4) $\dim V = 3$

基为 $\{I, A, A^2\}$

证明：① 上述基线性无关

$\because A^2 = \mathrm{diag}(1, w^2, w^4)$

$= \mathrm{diag}(1, w^2, w)$

令 $a_1 I + a_2 A + a_3 A^2 = 0$

$\therefore \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 w + a_3 w^2 = 0 \\ a_1 + a_2 w^2 + a_3 w = 0 \end{cases}$

解得 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$\therefore$ 结论①成立

证明：② $\forall f(A)$ 都能由上述基表示

$f(A) = x_0 I + x_1 \cdot A + x_2 A^2 + \cdots + x_n \cdot A^n + \cdots$

又 $A^3 = I$

$\therefore f(A) = (x_0 + x_3 + \cdots + x_{3k} + \cdots) I$

$+ (x_1 + x_4 + \cdots + x_{3k+1} + \cdots) A$

$+ (x_2 + x_5 + \cdots + x_{3k+2} + \cdots) A^2$

综上：成立