1. 设 $A\in C^{s\times n}$，$B\in C^{n\times s}$，试证：

(1) $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$；

(2) $\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}(BA)^k$，其中 k 为任一正整数.

(1) 令 $A=(a_{ij})_{s\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times s}$

$AB=(c_{ij})_{s\times s}$ $BA=(d_{ij})_{n\times n}$

$\therefore$ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ $d_{ij}=\sum_{k=1}^{s} b_{ik}a_{kj}$

$$\therefore \mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{s} c_{ii}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{s} b_{ki}a_{ik}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} d_{ii}$$

$$=\mathrm{tr}\,BA$$

(2) ① $k=1$ 时 由 (1) 得成立

② $k>1$ 时

$$\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}[(AB)^{k-1}AB]$$

$$=\mathrm{tr}\,B[(AB)^{k-1}A]$$

$$=\mathrm{tr}(BA)^k$$

综上 $\mathrm{tr}(AB)^k=\mathrm{tr}(BA)^k$

3. 设 $A\in C^{n\times n}$，且 $\det A\neq 0$，又 α,β 为已知的 n 维列向量，求方程

$$f(\lambda)=\det(\lambda A-\alpha\beta^T)=0$$

的根.

$\det(\lambda A-\alpha\beta^T)$

$=\det[(\lambda I-\alpha\beta^T A^{-1})A]$

$=\det(\lambda I-\alpha\beta^T A^{-1})\det A$

又 $\det A\neq 0$

(2) 试证：若 A,B 分别为 $s\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵，则

$$\lambda^n\det(\lambda I_s-AB)=\lambda^s\det(\lambda I_n-BA)\quad(s\neq n).$$

∴ 所求根即为 $\det(\lambda I-\alpha\beta^T A^{-1})=0$ 的根

而 $\lambda^n\det(\lambda I_s-A_{s\times n}B_{n\times s})=\lambda^s\det(\lambda I_n-B_{n\times s}A_{s\times n})$

令上式中 $A=\alpha$

$B=\beta^T A^{-1}$

∴ $\lambda\det(\lambda I-\alpha\beta^T A^{-1})=\lambda^n\det(\lambda-\beta^T A^{-1}\alpha)$

∴ 所求根即为 $\lambda^{n-1}\det(\lambda-\beta^T A^{-1}\alpha)=0$ 的根

∴ 根为 0 ($n-1$ 重) 和 $\beta^T A^{-1}\alpha$

4. 设 V 为 n 维内积空间，ω 为 V 中单位向量，作线性变换

$$f(\xi)=\xi-2\langle\xi,\omega\rangle\omega \quad (\forall \xi\in V),$$

求 f 的特征多项式、特征值及相应的特征子空间.

将 w 扩充为 V 的标准正交基 $w, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots \varepsilon_n$

$\therefore$ $f(w)=-1$ $\quad f(\varepsilon_i)=\varepsilon_i \quad (i=2,3,\cdots,n)$

$\therefore$ f 在该组基下的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ f 的特征多项式为 $|\lambda I-A| = (\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$

即 特征值为 -1, 1 ($n-1$ 重)

设 $\forall \xi\in V$，在 $w, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n$ 下坐标为 $X=(x_1, x_2, \cdots x_n)^T$

$\therefore$ $\xi=(w, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)X$

$f(\xi)=(w, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)AX$

① 对特征值为 -1 的特征子空间

对 $\xi\in V_{-1}$ 即 $f(\xi)=-\xi$

$\therefore$ $AX=-X$

即 $(A+I)X = 2(0, x_2, x_3, \cdots, x_n) = \theta$

$\therefore$ $x_2=x_3=\cdots=x_n=0$

$\therefore$ $\xi\in L(w)$ 即 $V_{-1}=L(w)$

② 对特征值为 1 的特征子空间

对 $\xi\in V_1$ 即 $f(\xi)=\xi$

$\therefore$ $AX=X$

即 $(I-A)X = (x_1, 0, \cdots, 0)^T = \theta$

$\therefore$ $x_1=0$

$\therefore$ $\xi\in L(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots, \varepsilon_n) = L(w)^\perp$ 即 $V_1 = L(w)^\perp$

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix},$$

求 $A^{100}-3A^{25}$.

$$C(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&-\lambda-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\-2&\lambda-1&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&\lambda-3&-1\\0&4&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\4&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$\therefore$ 令 $f(\lambda)=\lambda^{100}-3\lambda^{25}=C(\lambda)g(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c$

代入 $f(1)$ $f(-1)$ $f'(1)$

$$\therefore \begin{cases}-2=a+b+c\\4=a-b+c\\25=2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=14\\b=-3\\c=-13\end{cases}$$

$\therefore A^{100}-3A^{25}=f(A)=C(A)g(A)+14A^2-3A-13I$

$$=14\cdot\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\0&-4&-1\end{bmatrix}-13I$$

$$=14\begin{bmatrix}5&0&2\\4&1&2\\-8&0&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16&6&3\\6&16&3\\0&-12&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}54&-6&25\\50&-2&25\\-112&12&-52\end{bmatrix}$$