$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

并讨论该命题在酉空间是否成立.

3. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$是$[a,b]$上实连续函数,试证:

$$\left|\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\max_k\int_a^b f_k^2(x)\mathrm{d}x\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$,把 $\boldsymbol{A}$ 的列作为欧氏空间 R^3 的一组基,按 Schmidt 正交化方法求 R^3的一组标准正交基,由此求出正交阵 $\boldsymbol{Q}$ 及上三角阵 $\boldsymbol{R}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$.

5. 已知

$$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_5)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

求 $\boldsymbol{W}^{\perp}$ 的一组标准正交基.

6. 设 f 是内积空间 V 上变换,若

$$\langle f(\boldsymbol{\alpha}),f(\boldsymbol{\beta})\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\quad(\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V),$$

试证:f 是线性变换,因此 f 是等距变换.

7. 设 V 为欧氏空间,k 为实数,$f(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-k\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{\omega}$, $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$, $\|\omega\|=1$,求 f 是正交变换的充要条件.

8. 设 f 是内积空间 V 的等变换,W 是 f 的 r 维不变子空间,试证:$W^{\perp}$也是 f 的不变子空间.

9. 设 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij},试证:$\boldsymbol{A}$ 是正交阵的充要条件是

$$a_{ij}=(\det\boldsymbol{A})^{-1}A_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

10. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交阵,且 $\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}=-1$,试证:

4. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$，把 A 的列作为欧氏空间 R^3 的一组基，按 Schmidt 正交化方法求 R^3 的一组标准正交基，由此求出正交阵 Q 及上三角阵 R，使 $A=QR$.

(1) $\beta_1 = \alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{\langle \alpha_2, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{\langle \alpha_3, \beta_2\rangle}{\langle \beta_2, \beta_2\rangle}\beta_2 - \dfrac{\langle \alpha_3, \beta_1\rangle}{\langle \beta_1, \beta_1\rangle}\beta_1$

$= \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \dfrac{3}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \dfrac{-3}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

∴ 单位化 $\gamma_1 = \dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

$\gamma_2 = \dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}$

$\gamma_3 = \dfrac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

∴ A的一组正交基为 $\begin{pmatrix}0\\-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\\\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt6}{3}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

(2) 令 $Q = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$= \begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{3}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

为酉阵（正交阵

而 $\alpha_1 = \beta_1 = \|\beta_1\|\gamma_1$

$\alpha_2 = \beta_2 = \|\beta_2\|\gamma_2$

$\alpha_3 = \beta_3 + \beta_2 - \frac{3}{2}\beta_1$

$= \|\beta_3\|\gamma_3 + \|\beta_2\|\gamma_2 - \frac{3}{2}\|\beta_1\|\gamma_1$

∴ $R = \begin{pmatrix}\sqrt2&0&-\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\sqrt3&\sqrt3\\0&0&\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

∴ $Q = \begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{3}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix}\sqrt2&0&-\frac{3}{2}\sqrt2\\0&\sqrt3&\sqrt3\\0&0&\frac{\sqrt6}{3}\end{pmatrix}$

5. 已知

$$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_5)^T \middle| \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}(x_1,x_2,\cdots,x_5)^T=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\},$$

求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

令 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}$

$\therefore W=K(A)\qquad W^{\perp}=R(A^H)$

而 $A^H=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&2\\4&3\\5&4\end{pmatrix}\xrightarrow{行}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\therefore \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ 是 $W^{\perp}$ 的基

$\therefore \beta_1=\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}-\frac{8}{11}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{11}\\-\frac{5}{11}\\-\frac{2}{11}\\\frac{1}{11}\\\frac{4}{11}\end{pmatrix}$

$\therefore \gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{55}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\qquad \gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix}-8\\-5\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$

$\therefore W^{\perp}$ 的一组标准正交基为 $\frac{1}{\sqrt{55}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{110}}\begin{pmatrix}-8\\-5\\-2\\1\\4\end{pmatrix}$