5. 设 $A\in C^{n\times n}$.

(1) 若 $V=\{B\mid AB=BA, B\in C^{n\times n}\}$，证 V 为 $C^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 若 $A=I$，求(1)问中的 V；

(3) 若 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$，求(1)问中 V 的一组基；

(4) 当 $n=3$，$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，求(1)问中 V 的一组基.

(1) ① 证明 V 非空

取 $B=I$，易得 $\forall A\in C^{n\times n}$ 使得 $AB=BA$

$\therefore$ V 非空

② 证明 V 关于加法封闭

$\forall$ 取 $B_1, B_2\in V$

$\therefore$ $\begin{cases} AB_1=B_1A \\ AB_2=B_2A \end{cases}$

$\therefore$ $A(B_1+B_2)=(B_1+B_2)A$

$\therefore$ V 关于加法封闭

③ 证明 V 关于数乘封闭

$\forall$ 取 $B_3\in V$

$\therefore$ $AB_3=B_3A$

$\therefore$ $k\cdot AB_3=A\cdot(kB_3)=(kB_3)\cdot A$

$\therefore$ V 关于数乘封闭

综上：V 是 $C^{n\times n}$ 的子空间

5. 设 $A \in C^{n\times n}$.

(1) 若 $V=\{B \mid AB=BA, B\in C^{n\times n}\}$，证 V 为 $C^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 若 $A=I$，求(1)问中的 V；

(3) 若 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$，求(1)问中 V 的一组基；

(4) 当 $n=3$，$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，求(1)问中 V 的一组基.

(2) $\because A = I$

$\therefore \forall B \in C^{n\times n}$

$AB = BA$ 恒成立

$\therefore V = C^{n\times n}$

(3) $$\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\\b_{n1}&&b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\\b_{n1}&&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&n\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\2b_{21}&2b_{22}&\cdots&2b_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\nb_{n1}&nb_{n2}&\cdots&nb_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&2b_{12}&\cdots&nb_{1n}\\b_{21}&2b_{22}&&\vdots\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&2b_{n2}&&nb_{nn}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $i\neq j$ 时 $b_{ij} = b_{ji} = 0$

$$\therefore B = \begin{pmatrix}b_{11}&&&\\&b_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&b_{nn}\end{pmatrix}$$

V 中一组基为 $\{E_{11}, E_{12}\ \cdots\ E_{nn}\}$

5. 设 $A \in C^{n\times n}$.

(1) 若 $V=\{B \mid AB=BA, B\in C^{n\times n}\}$，证 V 为 $C^{n\times n}$ 的子空间；

(2) 若 $A=I$，求(1)问中的 V；

(3) 若 $A=\mathrm{diag}(1,2,\cdots,n)$，求(1)问中 V 的一组基；

(4) 当 $n=3, A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$，求(1)问中 V 的一组基.

(4)

$$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}3b_{11}&3b_{12}&3b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{21}+2b_{31}&b_{22}+2b_{32}&b_{23}+2b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b_{11}&b_{12}+b_{13}&2b_{13}\\3b_{21}&b_{22}+b_{23}&2b_{23}\\3b_{31}&b_{32}+b_{33}&2b_{33}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases}b_{21}=2b_{21}\\ b_{21}+2b_{31}=3b_{31}\\ 3b_{12}=b_{12}+b_{13}\\ b_{22}=b_{22}+b_{23}\\ b_{22}+2b_{32}=b_{32}+b_{33}\\ 3b_{13}=2b_{13}\\ b_{23}=2b_{23}\\ b_{23}+2b_{33}=2b_{33}\end{cases} \Rightarrow B=\begin{pmatrix}b_{11}&0&0\\0&b_{22}&0\\0&b_{33}-b_{22}&b_{33}\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 一组基为

$\{E_{11}, E_{22}-E_{32}, E_{33}+E_{32}\}$