17. 设 $f\in \mathrm{Hom}(V,V)$.

(1) 试证：f 是单射 $\Leftrightarrow K(f)=\{\mathbf{0}\}$；

(2) 若 $\dim V=n$，试证：f 是单射 $\Leftrightarrow f$ 是满射 $\Leftrightarrow f$ 可逆.

(1) "$\Rightarrow$" $\forall\ \alpha \in K(f)$

$\therefore\ f(\alpha)=\theta$

而 $\begin{cases} f(\theta)=\theta \\ f\text{ 是单射} \end{cases}$

$\therefore\ \alpha=\theta$

$\therefore\ K(f)=\{\theta\}$

"$\Leftarrow$" $\forall\ \alpha\neq\beta\in V$，且 $f(\alpha)=f(\beta)$

$\therefore\ f(\alpha-\beta)=f(\alpha)-f(\beta)=\theta$

而 $K(f)=\{\theta\}$

$\therefore\ \alpha-\beta=\theta$ 即 $\alpha=\beta$

$\therefore\ f$ 是单射

17. 设 $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

(1) 试证：f 是单射 $\Leftrightarrow K(f)=\{\mathbf{0}\}$；

(2) 若 $\dim V=n$，试证：f 是单射 $\Leftrightarrow f$ 是满射 $\Leftrightarrow f$ 可逆.

(2) 由(1)得 f 是单射 $\Longleftrightarrow K(f)=\{0\}$

$\Longleftrightarrow \dim K(f) = 0$

$\Longleftrightarrow \dim R(f) = \dim V - \dim K(f) = n$

$\Longleftrightarrow f$ 是满射

$\therefore$ f 是单射 $\Longleftrightarrow$ f 是满射

而 单射 + 满射 = 双射

$\therefore$ f 是可逆的

综上：f 是单射 $\Longleftrightarrow$ f 是满射 $\Longleftrightarrow$ f 是可逆的

20. 已知线性变换 f 与 g 满足 $f^2=f, g^2=g$，试证：

(1) f 与 g 有相同的值域 $\Leftrightarrow fg=g, gf=f$；

(2) f 与 g 有相同的核 $\Leftrightarrow fg=f, gf=g$.

(1) "$\Longrightarrow$" $\because$ f 与 g 有相同值域

$\therefore$ $\forall \alpha \in V$, $f(\alpha) \in R(f) = R(g)$

取 $\beta \in V$ 使得 $g(\beta) = f(\alpha)$

$\therefore$ $g(\beta) = f(\alpha) = f^2(\alpha) = f[f(\alpha)] = f[g(\beta)] = fg(\beta)$

$\therefore$ $g = fg$

同理可得 $f = gf$

"$\Longleftarrow$" $\forall$ $t = f(\alpha) \in R(f)$

$t = f(\alpha) = gf[\alpha]$

$= g[f(\alpha)] \in R(g)$

$\therefore$ $R(f) \subseteq R(g)$

同理可得 $R(g) \subseteq R(f)$

综上：$R(g) = R(f)$

即 f, g 有相同的值域

20. 已知线性变换 f 与 g 满足 $f^2=f, g^2=g$，试证：

（1）f 与 g 有相同的值域 $\Leftrightarrow fg=g, gf=f$；

（2）f 与 g 有相同的核 $\Leftrightarrow fg=f, gf=g$.

(2) "$\Rightarrow$" $\because$ f, g 有相同的核

$\therefore$ $\forall\ \alpha \in K(f) = K(g)$

$f(\alpha) = g(\alpha) = \theta$

而 $f(\alpha) = f^2(\alpha) = f[f(\alpha)] = f[g(\alpha)] = fg(\alpha)$

$\therefore$ $fg = f$

同理可得 $gf = g$

"$\Leftarrow$" $\forall\ \alpha \in K(f)$

$\therefore$ $f(\alpha) = \theta$

而 $g(\alpha) = gf(\alpha)$

$= g[f(\alpha)] = g[\theta] = \theta$

$\therefore$ $\alpha \in K(g)$

$\therefore$ $K(f) \subseteq K(g)$

同理可得 $K(g) \subseteq K(f)$

综上 $K(g) = K(f)$

1. 试证内积空间的“平行四边形定理”：

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=2(\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2).$$

$$\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2+\|\alpha-\beta\|^2$$

$$=\langle\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}+\vec{\beta}\rangle+\langle\vec{\alpha}-\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}\rangle$$

$$=\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle+\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle+\langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle+\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle$$
$$+\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle+\langle\vec{\alpha},-\vec{\beta}\rangle+\langle-\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle+\langle-\vec{\beta},-\vec{\beta}\rangle$$

$$=2\langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle+2\langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle$$

$$=2(\|\vec{\alpha}\|^2+\|\vec{\beta}\|^2)$$

2. 试证欧氏空间的“勾股定理”：

$$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\|\alpha+\beta\|^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2,$$

并讨论该命题在酉空间是否成立.

$$\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2 = \langle\vec{\alpha}+\vec{\beta},\ \vec{\alpha}+\vec{\beta}\rangle$$

$$= \langle\vec{\alpha},\vec{\alpha}\rangle + \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle + \langle\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle$$

$$= \|\vec{\alpha}\|^2 + \|\vec{\beta}\|^2 + 2\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle$$

而 $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = 0$

$\therefore\ \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2+\|\vec{\beta}\|^2 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

酉空间中 $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = \overline{\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}$

不妨设 $\vec{\alpha}=1 \quad \vec{\beta}=i$

$\therefore\ \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = -i$

$\langle\vec{\beta},\vec{\alpha}\rangle = i$

$\therefore\ \|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2+\|\vec{\beta}\|^2$

但 $\langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle = -i \neq 0$

$\therefore\ \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ 不成立

即在酉空间中不成立