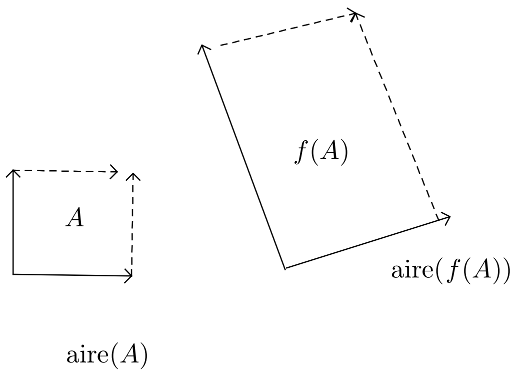
Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapIV. DETERMINANTS



Question 1. Nous connaissons l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs $x\vec{i}$ + y$\vec{j}$ et $x'\vec{i}$ + y'$\vec{j}$ et qui peut se calculer par la formule xy'-yx'

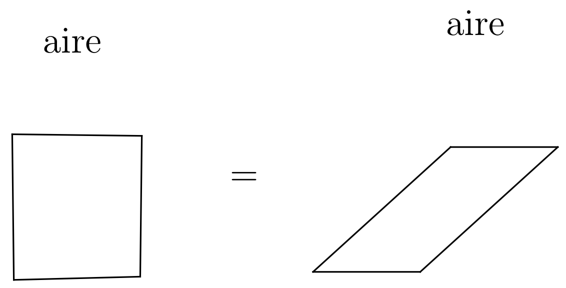
Nous concevons l'idée d'un parallélépipède (en clair une « boîte ») construit sur trois vecteurs de l'espace

$x\vec{i}$ + y$\vec{j}$ + $z\vec{k}$, $x'\vec{i}$ + y'$\vec{j}$ + $z'\vec{k}$ et $x''\vec{i}$ + y"$\vec{j}$ + $z''\vec{k}$

et nous aimerions calculer son volume

et même continuer dans des dimensions plus grandes.

Remarque 1.



LES QUATRE GRANDS PRINCIPES

1. Le déterminant d'une matrice diagonale doit être le produit des termes de la diagonale

2. Le déterminant doit être conservé lorsqu'on ajoute à un « côté » un multiple d'un autre; donc le déterminant d'une matrice triangulaire doit être le produit des termes de la diagonale

3. Si on multiplie une colonne de la matrice A par le réel k le déterminant est multiplié par k.

4. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(R)^2$ det(AB)=det(A)det(B)

1 1. Le déterminant d'une matrice carrée.

Définition 2.

1. Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$*:*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *det(A)=* $a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$

2. Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ *(règle de Sarrus):*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

det(A)= $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$.

Que l'on retient par un petit schéma.

1.1 ATTENTION : cette règle ne convient que pour le cas n=3 !!!!

Exemple 3. Calcul du déterminant de $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Règle de Sarrus

Définition 4. *Le Déterminant d'une matrice CARREE de taille n*

AVANT TOUT

1. Si A possède une ligne ou une colonne nulle det(A)=0.

2. Si A est triangulaire supérieure ou inférieure det(A)=$\prod_{i=1\ldots n} a_{\mathrm{ii}_{i\in\{1,\ldots,n\}}}$.

3. Si A possède deux lignes égales det(A)=0.

DE MANIERE GENERALE

4. Le déterminant de A ne change pas si on ajoute à une ligne un multiple d'une autre.

5. Le déterminant est multiplié par -1 si on échange deux lignes.

6. Le déterminant est multiplié par k lorsqu'on multiplie une de ses lignes par k.

Exemple 5.

Soit $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; montrer par un minimum de calculs que det(B)=0.

Solution. Si on soustrait deux fois la première ligne de la deuxième ligne on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est nul donc det(B)=0

Proposition 6. *Stratégie de calcul d'un déterminant*

Soit une matrice carrée A

pour calculer det(A)

on peut effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes afin d'aboutir à une matrice triangulaire

(en appliquant les 4, 5 et 6)

si en route on trouve une ligne nulle, on peut s'arrêter, det(A)=0

si on aboutit à une matrice triangulaire son déterminant est immédiat

.

Exemple 7.

Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 4 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 23 & 0 \end{vmatrix}$$

.

DEUX GRANDES PROPRIETES DES DETERMINANTS

Théorème 8. *det(A) et l'inversibilité*

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$*, A est inversible si et seulement si det(A)*$\neq 0$.
2. ***Dans ce cas*** *det(*A^{-1}*)=1/det(A).*

Exemple 9.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; déterminer à l'aide de son déterminant si B est inversible

2. Soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; déterminer à l'aide de son déterminant si T est inversible

3. Si l'une de ces deux matrices est inversible, que feriez-vous pour la calculer ?

Théorème 10. *Le déterminant est multiplicatif*

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})^2, \det(\mathrm{AB}) = \det(A)\det(B).$

Exemple 11. Soient les deux matrices

A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer leurs déterminants

2. Calculer leur produit.

3. Vérifier que det(A)det(B)=det(AB)

Théorème 12. *le déterminant est invariant par transposition*

$\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R}), \det({}^tA) = \det(A).$

Remarque 13. Ceci est très important

Donc toutes les propriétés des déterminants relatives aux lignes sont aussi vraies pour les colonnes.

Exemple 14.

1. M=$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \end{pmatrix}$; prouver que det(M)=0.

2. N=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a & 0 & 2 \end{pmatrix}$; choisir une valeur de a pour que det(N)=0

Proposition 15. *Stratégie de calcul d'un déterminant*

Soit une matrice carrée A

pour calculer det(A)

on peut effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes afin d'aboutir à une matrice triangulaire

si en route on trouve une ligne ou une colonne nulle, on peut s'arrêter, det(A)=0

si on aboutit à une matrice triangulaire son déterminant est immédiat

Exemple 16.

R=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 24 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; calculer det(R)

Problème 1.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; montrer par un minimum de calculs que det(B)=0.

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 4 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 23 & 0 \end{vmatrix}$.

Problème 2. Fil d'Ariane

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2 Travaux Dirigés

Exercice 1. Soit les matrices M=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calculer det(M) et det(N).*

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ et d=det(A) (n>1) *

a. Déterminer det(-A).

b. Déterminer det(kA), où k est un réel.

Exercice 3. Pour montrer que la matrice suivante a un déterminant nul *

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 111 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 121 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 132 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 157 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 158 \end{pmatrix}$.

Soustraire la troisième colonne de la quatrième puis la première de la deuxième.

Conclure.

Exercice 4. Soient les matrices de $\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ A et B; on suppose que le déterminant de la matrice produit AB est nul, montrer que l'une au moins n'est pas inversible.*

Exercice 5. Trouver le déterminant de la matrice suivante en effectuant une suite d' opérations élémentaires:
A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. *

Exercice 6. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, montrer que le déterminant de ^{t}AA est positif.

Exercice 7. Soit les matrices $(A, B, M) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})^3$, où M est inversible; on suppose que A=M^{-1}BM, comparer det(A) et det(B).*

3 Mineurs et Cofacteurs

Définition 17. *Mineurs, cofacteurs*

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A = (a_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\}}$

On appelle mineur de l'élément a_{ij} *le déterminant de la matrice extraite obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne; on le note* M_{ij}.

On appelle cofacteur de l'élement a_{ij} *la quantité* C_{ij}=$(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

Exemple 18.

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

mineur de a_{11}: M_{11}=$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 15$; cofacteur de a_{11}: C_{11}=$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 15$

mineur de a_{12}: M_{12}=$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15$; cofacteur de a_{12}: C_{12}=$(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15$

mineur de a_{13}: M_{13}=$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$=0; cofacteur de a_{13}: C_{13}=$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$=0

mineur de a_{31}: M_{31}=$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$=$-5$; cofacteur de a_{13}: C_{13}=$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$= -5

etc..

Théorème 19. *Calcul d'un déterminant par la méthode des cofacteurs*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$

1. (développement par rapport à la i-ème ligne)

Quel que soit $i\in\{1,\ldots,n\}$, *det(A)*=$\sum_{j=1\ldots n} a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

2. (développement par rapport à la j-ème colonne)

Quel que soit $j\in\{1,\ldots,n\}$, *det(A)*=$\sum_{i=1\ldots n} a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

Exemple 20.

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; calculer det(A) en développant suivant une ligne ou une colonne, choisie parce qu'elle contient beaucoup de 0.

4 Systèmes de Cramer, formules de Cramer

Définition 21.

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$, $B\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, *où* $B=(b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ *et le système AX=B.*

On désignera pour tout j par A_j *la matrice A, modifiée en remplaçant la j-ième colonne par la colonne B.*

Théorème 22. *Formules de Cramer*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$, $B\in\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, *où* $B=(b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ *et le système AX=B.*

Le système sera dit de Cramer lorsque det(A)$\neq$0.

Dans ce cas le système possède une solution unique $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et pour tout i* $x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

Exemple 23.

Appliquer le résultat au-dessus au système $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 101x_1-52x_2-32x_3=49 \\ 46x_1+42x_2+23x_3=111 \end{cases}$

4.1 Travaux Dirigés

Exercice 8. *

a. Le système suivant est-il de Cramer, le résoudre $\begin{cases} x1+x2+x3+x4=4 \\ x1+x3=2 \\ x2-x4=-2 \\ x1+x4=4 \end{cases}$?

b. Et celui-ci ? (soyez paresseux) $\begin{cases} x1+x2+x3+x4=4 \\ x1+x4=2 \\ x2-x4=-2 \\ x1-x3=4 \end{cases}$?

Problème 3. avec Maxima

la commande pour calculer le déterminant de la matrice a est « determinant(a) »

1. A l'aide de Maxima calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{vmatrix}$

2. Déterminer si la matrice M=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{pmatrix}$ est inversible

3. A l'aide de Maxima calculer det(A)=$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, déterminer si A est inversible

Problème 4. Fil d'Ariane

Soit n un entier>2 et les reels (x1,x2,...,xn), (y1,y2,....,yn)

que vaut le determinant $\begin{vmatrix} x1y1 & x1y2 & ... & ... & x1\text{yn} \\ x2y1 & x2y2 & ... & .... & x2\text{yn} \\ x3y1 & .... & ... & .... & ... \\ ...... & ... & .... & .... & .... \\ ...... & .... & .... & .... & .... \\ \text{xny1} & \text{xny2} & .... & .... & \text{xnyn} \end{vmatrix}$?

Problème 5.

Soit un entier n>2 que vaut $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & ... & .... & 2 & 0 \\ ... & ... & 0 & ... & 0 & ... \\ .... & 0 & n-2 & .... & ... & .... \\ 0 & n-1 & 0 & ... & ... & ... \\ n & 0 & .... & ... & ... & 0 \end{vmatrix}$?

Objectifs:

1. Savoir calculer immédiatement le déterminant d'une matrice triangulaire.

2. Savoir que le déterminant est nul lorsqu'une ligne ou une colonne est nulle, ou deux lignes (ou colonnes) sont égales.

3. Connaître et savoir utiliser les propriétés du déterminant (produit, inverse, transposée).

4. Savoir ce que sont les mineurs, les cofacteurs.

5. Connaître, comprendre et appliquer les formules de développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne pour effectuer des calculs de déterminants.

6. Connaître la caractérisation des matrices carrées inversibles par le déterminant; savoir ce qu'est l'adjointe d'une matrice carrée, savoir que l'inverse d'une matrice carrée inversible à droite est le même qu'à gauche.

7. Savoir reconnaître un système de Cramer; connaître les formules de Cramer et savoir les utiliser (en basse dimension).

5 Travaux Dirigés

Exercice 9. Que pensez-vous de l'égalité det(A+B)=det(A)+det(B) ? **

Exercice 10. Soit les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 66 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 77 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 99 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5.6 & 5 & 0 & 0 \\ 87 & 120 & -65 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; calculer det(C) et det(D) en développant suivant une ligne ou une colonne bien choisie.**

Exercice 11. On désignera par A_n la matrice à n lignes et n colonnes **

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & .. & ... & ... \\ 0 & -1 & 0 & 1 & .. & ... & ... \\ 0 & 0 & -1 & 0 & .. & ... & ... \\ ... & .... & 0 & -1 & .. & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & .. & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer det(A_2)

b. Calculer det(A_3)

c. Calculer det(A_4)

d. Conjecturer la valeur de det(A_n) en fonction de n; démontrer la conjecture.

Exercice 12. Soit une matrice A dont les termes sont des entiers et dont le déterminant est égal à -1, montrer que A^{-1} existe et ses termes sont des entiers.

Exercice 13. Soit $\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 1 & 2 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer det(A_1) et det(A_2).

b. En développant det(A_{n+2}) suivant la première ligne (ou la première colonne) et en répétant l'opération, déterminer une relation exprimant det(A_{n+2}) en fonction de det(A_{n+1}) et det(A_n).

c. Déterminer l'expression de det(A_n).

Exercice 14. Soit A_n=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & -1 & 1 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & -1 & 1 & -1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $\det(A_1)$ et det(A_2).

b. En développant $\det(A_{n+2})$ suivant la première ligne (ou la première colonne) et en répétant l'opération, déterminer une relation exprimant $\det(A_{n+2})$ en fonction de $\det(A_{n+1})$ et $\det(A_n)$.

c. Déterminer l'expression de $\det(A_n)$.

6 Les matrices de tournoi !!

On considère un ensemble de n joueurs qui participent à une compétition où chacun rencontre chaque autre joueur (exemple: championnat de foot, coupe de rugby); on appelle matrice du tournoi la matrice $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ par $T_{ij}=1$ si le joueur i bat le joueur j, $T_{ij}=-1$ si le joueur i est battu par le joueur j et, bien sûr, $T_{ii}=0$.

Exercice 15.

Comparer T et sa transposée, montrer que si n est impair det(T)=0.

Exercice 16.

Montrer que dans tous les cas $\det(T)\in\mathbb{Z}$.

Exercice 17.

Soit J la matrice dont les termes de la diagonale sont nuls et tous les autres sont égaux à 1; montrer que $\det(T)\equiv\det(J)[2]$.

Exercice 18.

Expliquer pourquoi det(J)=$\det\begin{pmatrix} n-1 & ... & n-1 & ... & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & ... & 1 & 0 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} n-1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & ... & .... & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & 0 & -1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19.

Montrer que det(T)=0 $\Longleftrightarrow n$ pair.

7 Activité informatique Maxima

Problème 6. avec Maxima !!

la commande pour calculer le déterminant de la matrice a est « determinant(a) »

1. A l'aide de Maxima calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$; « factor » vous permettra de le factoriser.

2. A l'aide de Maxima calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$; « factor » vous permettra de le factoriser.

3. On considère le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & ... & ... & .... & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & .... & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ .... & .... & ... & .... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & ... & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$; essayer d'énoncer l'expression de ce déterminant (sous la forme d'un produit).

4. Démonstration par récurrence:

On pose D(X)= $\begin{vmatrix} 1 & ... & ... & .... & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & .... & ... & x_{n-1} & X \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & ... & ... & ... & . \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... & ... \\ .... & .... & ... & .... & ... & ... & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & ... & ... & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$.

a. Montrer que D(X) est un polynôme en X; trouver le degré et le coefficient de X^{n-1}.

b. Expliquer pourquoi les xi sont racines de D(X).

c. En déduire l'hérédité de la formule proposée au 3 lorsque les xi sont distincts deux à deux.

5. Montrer que cette même formule est exacte lorsque des xi sont égaux entre eux.

6. On appelle Vandermonde la formule $\begin{vmatrix} 1 & ... & ... & .... & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & ... & .... & ... & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ .... & .... & ... & .... & ... & ... \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & ... & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$

Avertissement 24. syntaxe maxima

determinant(A); donne le déterminant (pas d'accent, c'est de l'anglais)

Pour résoudre un système

1. Ecrire les équations comme suit E1:x+2*y+6*z=4, ...
2. solve([E1,E2,...],[x,y,z]);

Exercice 20.

Pour toute liste de réels $(a_1, a_2, ..., a_n)$ on désigne par D$(a_1, a_2, ..., a_n)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & & & & & \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & & & \\ 0 & -a_3 & a_3+a_4 & .... & .... & & \\ ... & 0 & & ... & ... & -a_{n-1} & \\ ... & ... & & & & a_{n-1}+a_n & -a_n \\ 0 & 0 & & & & -a_n & a_n \end{pmatrix}$. !!

1. Etudier sur des exemples les affirmations suivantes:

a. Si les $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sont des entiers le déterminant aussi.

b. Si les $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sont des entiers positifs le déterminant aussi

c. Si l'un des $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est nul le déterminant aussi

2. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ \dots \\ \dots \\ -x_8 + 2x_9 - x_{10} = 1 \\ -x_9 + x_{10} = 1 \end{cases}$. avec Maxima bien sûr

3. Etudier sur des exemples l'inversion de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & .... & .... & & \\ ... & 0 & & ... & ... & -1 & \\ ... & ... & & & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$. avec Maxima

4. En déduire l'expression possible de son inverse; vérifier.

Problème 7. Fil d'Ariane

. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

c. On pose B=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; B est-elle inversible ? Justifier votre réponse

d. En vous aidant d'un théorème du cours répondre à la même question pour A

2. On désigne par C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Montrer que la matrice C est inversible.

b. Déterminer les solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

c. Déterminer la matrice inverse C^{-1}.

d. Sachant que le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ possède comme solution le quadruplet (1,0,0,0) déterminer toutes ses solutions.

e. Déterminer le determinant de C

Problème 8. Fil d'Ariane

. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

c. On pose B=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; B est-elle inversible ? Justifier votre réponse

d. En vous aidant d'un théorème du cours répondre à la même question pour A

2. On désigne par C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Montrer que la matrice C est inversible.

b. Déterminer les solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

c. Déterminer la matrice inverse C^{-1}.

d. Sachant que le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ possède comme solution le quadruplet (1,0,0,0) déterminer toutes ses solutions.

e. Determiner le determinant de C