# 图像处理与分析
## ——图像几何变换与点操作

授课教师：孙剑
jiansun@mail.xjtu.edu.cn
http://jiansun.gr.xjtu.edu.cn

西安交通大学 数学与统计学院

# 目录

- 图像几何坐标变换
- 图像点操作
- 图像直方图变换

# 图像的几何变换

- 像素点的坐标 $v=(X,Y,Z,1)$，经过变换后坐标为 $v'=(X',Y',Z',1)$

$$v' = Av$$

平移变换 (3D):

$$X' = X + X_0$$

$$Y' = Y + Y_0$$

$$Z' = Z + Z_0$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 图像的几何变换

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

平移变换 (2D):

$$X' = X + X_0$$
$$Y' = Y + Y_0$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 图像的几何变换

尺度变换 (3D):

$$X' = sX$$

$$Y' = sY$$

$$Z' = sZ_0$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 图像的几何变换

## 旋转变换（绕*X*轴，*Y*轴，*Z*轴）

$$
\boldsymbol{R}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\boldsymbol{R}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

# 图像的几何变换

**变换级连：** 对一个坐标为 $\boldsymbol{v}$ 的点的平移、放缩、绕 $Z$ 轴旋转变换可表示为：

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{R}_\gamma[\boldsymbol{S}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v})] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 & Y_0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X' = s(X + X_0)\cos\gamma + s(Y + Y_0)\sin\gamma$$

$$Y' = -s(X + X_0)\sin\gamma + s(Y + Y_0)\cos\gamma$$

$$Z' = s(Z + Z_0)$$

# 图像的几何变换

拉伸变换:

$$L=\begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

剪切变换:

$$J_h=\begin{bmatrix} 1 & j_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J_v=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ j_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

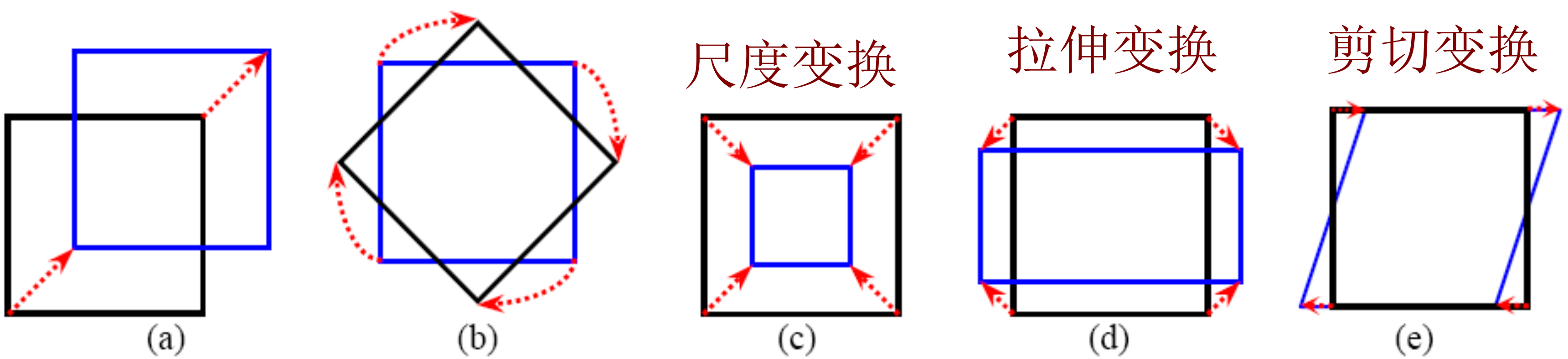



图 3.2.1　五种变换示意

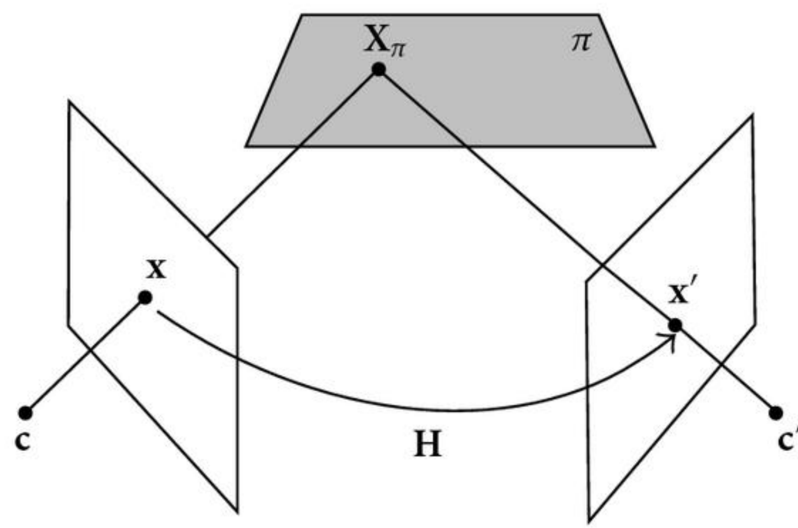
# 多视角几何
# （Multiple View Geometry）

- Homography变换

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u' = \frac{h_{11}u + h_{12}v + h_{13}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}$$

$$v' = \frac{h_{21}u + h_{22}v + h_{23}}{h_{31}u + h_{32}v + h_{33}}$$




参考书：Richard Hartley and Andrew Zisserman, Multiple view geometry in computer vision，Cambridge university press.

# 多视角几何
# （Multiple View Geometry）

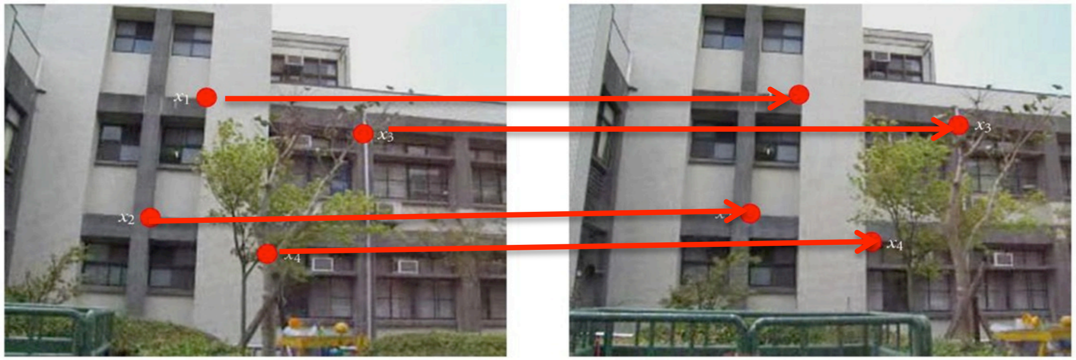
$$u'(h_{31}u+h_{32}v+h_{33})-h_{11}u+h_{12}v+h_{13}=0$$
$$v'(h_{31}u+h_{32}v+h_{33})-h_{21}u+h_{22}v+h_{23}=0$$

如果我们知道n对匹配点 $(u_i,v_i)\leftrightarrow(u'_i,v'_i)$ （$i$ = 1, … ,$n$ ）,通过如下方程求解Homography变换

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1u'_1 & -v_1u'_1 & -u'_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1v'_1 & -v_1v'_1 & -v'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & v_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_nu'_n & -v_nu'_n & -u'_n \\ 0 & 0 & 0 & u_n & v_n & 1 & -u_nv'_n & -v_nv'_n & -v'_n \end{bmatrix}_{2n\times 9} \times \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2n\times 1}.$$

8个自由度，只需要4对匹配点

# 多视角几何
# （Multiple View Geometry）




$$
\begin{bmatrix}
u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1u_1' & -v_1u_1' & -u_1' \\
0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -u_1v_1' & -v_1v_1' & -v_1' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
u_n & v_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_nu_n' & -v_nu_n' & -u_n' \\
0 & 0 & 0 & u_n & v_n & 1 & -u_nv_n' & -v_nv_n' & -v_n'
\end{bmatrix}_{2n\times 9}
\times
\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ 1 \end{bmatrix}_{9\times 1}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{2n\times 1}.
$$

$$
H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}
$$

# 图像的几何变换

- **仿射变换**

一个非奇异线性变换接上一个平移变换

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

一个平面上的仿射变换有6个自由度

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{A}} \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p}$$

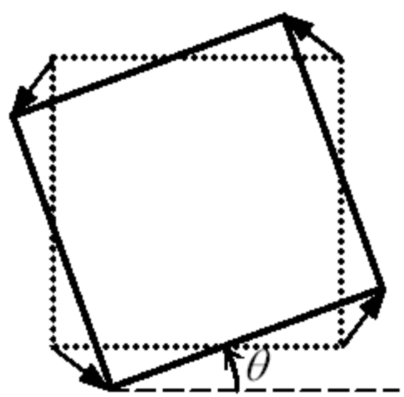
6个自由度，只需要3对匹配点

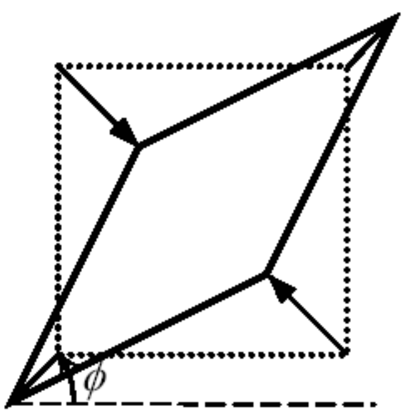
# 图像的几何变换

- **仿射变换**

　　线性分量$\boldsymbol{A}$可考虑成两个基本变换的组合：旋转和非各向同性放缩 ：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{R}(-\phi)\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}(\phi) \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$



# 图像的几何变换

## 仿射变换

性质：

(1) 仿射变换将有限点映射为有限点

(2) 仿射变换将直线映射为直线

(3) 仿射变换将平行直线映射为平行直线

(4) 当区域$P$和$Q$是没有退化的三角形（即面积不为零），那么存在一个唯一的仿射变换$\boldsymbol{A}$可将$P$映射为$Q$，即$Q = \boldsymbol{A}(P)$

# 图像的几何变换

- **相似变换**

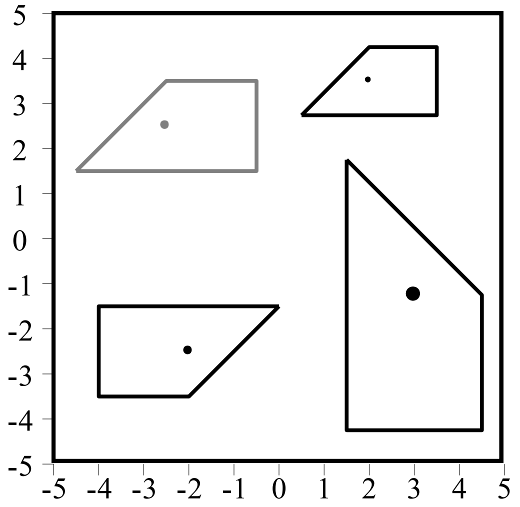
$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{S}}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{p}$$

$s\ (>0)$表示各向同性放缩，$\boldsymbol{R}$是一个特殊的$2\times 2$正交矩阵（$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}$），对应这里的旋转。典型特例为纯旋转（此时$\boldsymbol{t} = 0$）和纯平移（此时$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$）

# 图像的几何变换

- 相似变换
  - 保形性（保持形状）或保角性；
  - 相似变换可以保持两条曲线在交点处的角度
  - 平面上的相似变换有4个自由度，所以可根据2组点的对应性来计算



# 图像的几何变换

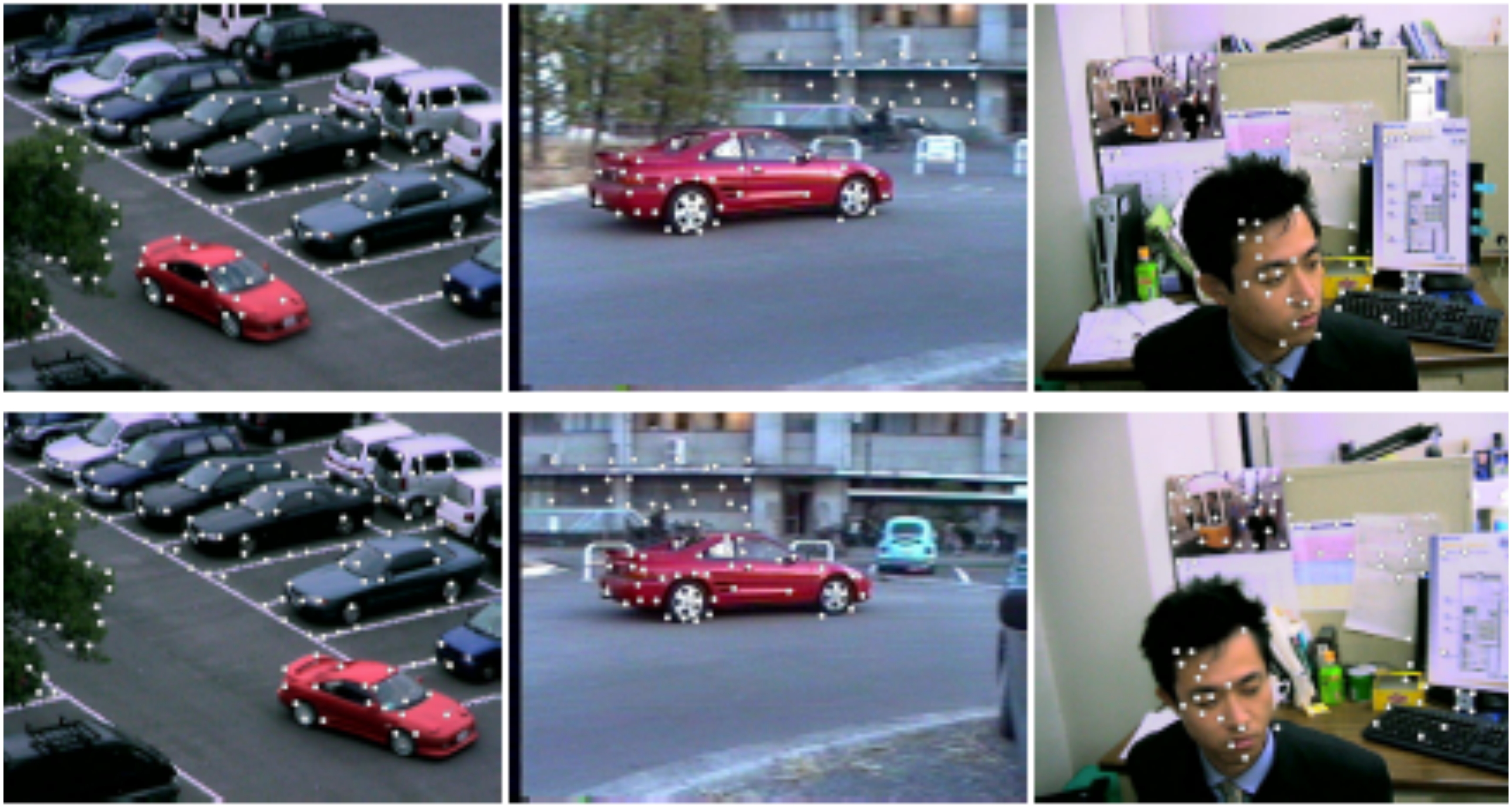
- 刚体变换：保持向量空间的每一对点的距离，包括旋转、平移、反射或它们的组合

$$q = H_{\mathrm{I}}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{p}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\cos\theta & -e\sin\theta & t_x \\ e\sin\theta & e\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

e = 1，那么等距还能保持朝向且是欧氏变换。e = –1，将反转朝向，即变换矩阵相当于一个镜像与一个欧氏变换的组合

# 图像特征匹配与运动估计



Rene Vidal, et al., Generalized Principal Component Analysis (GPCA)，IEEE PAMI 2005.

# 目录

- 图像几何坐标变换
- 图像点操作
- 图像直方图变换

# 图像的点运算

- **图像像素点上的加法运算：对图像的逐像素点进行操作，例如：**

模型 $$g(x,y)=f(x,y)+e(x,y)$$

运算 $$\bar{g}(x,y)=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}g_i(x,y)$$

均值 $$E\{\bar{g}(x,y)\}=f(x,y)$$

方差 $$\sigma_{\bar{g}(x,y)}=\sqrt{1/M}\times\sigma_{e(x,y)}$$

# 图像增强—灰度映射

灰度映射：一种点操作，将图像 $f(x, y)$中的每个像素点的灰度按特定映射关系进行变换得到$g(x, y)$

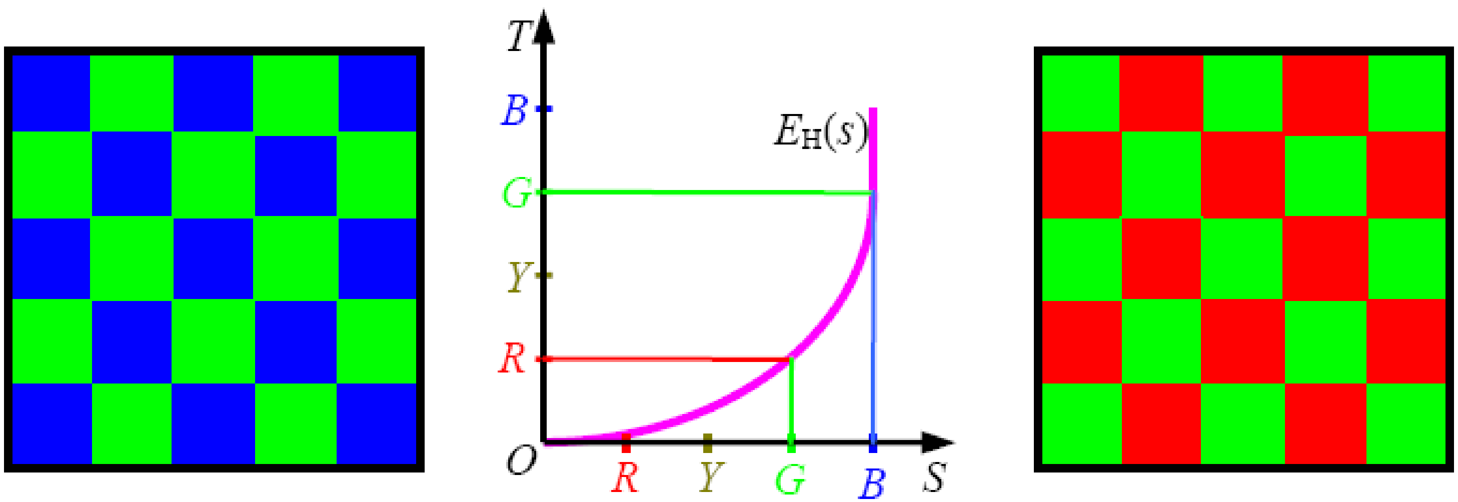



图 4.3.1　直接灰度映射原理

# 图像增强—灰度映射

1、图象求反　　2、 增强对比度

3、动态范围压缩　　4、灰度切分

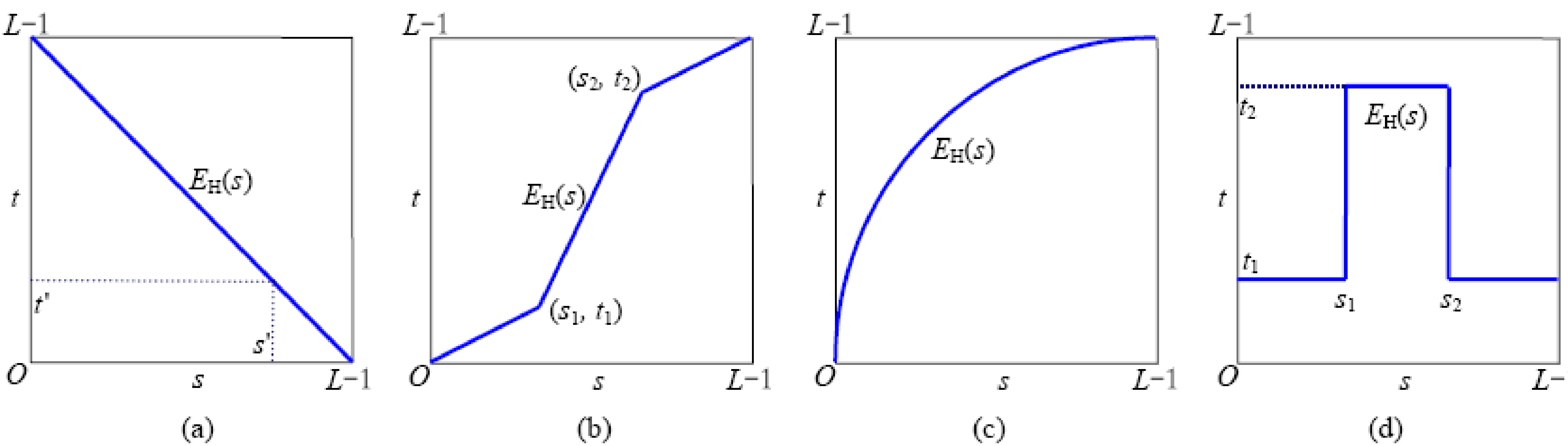
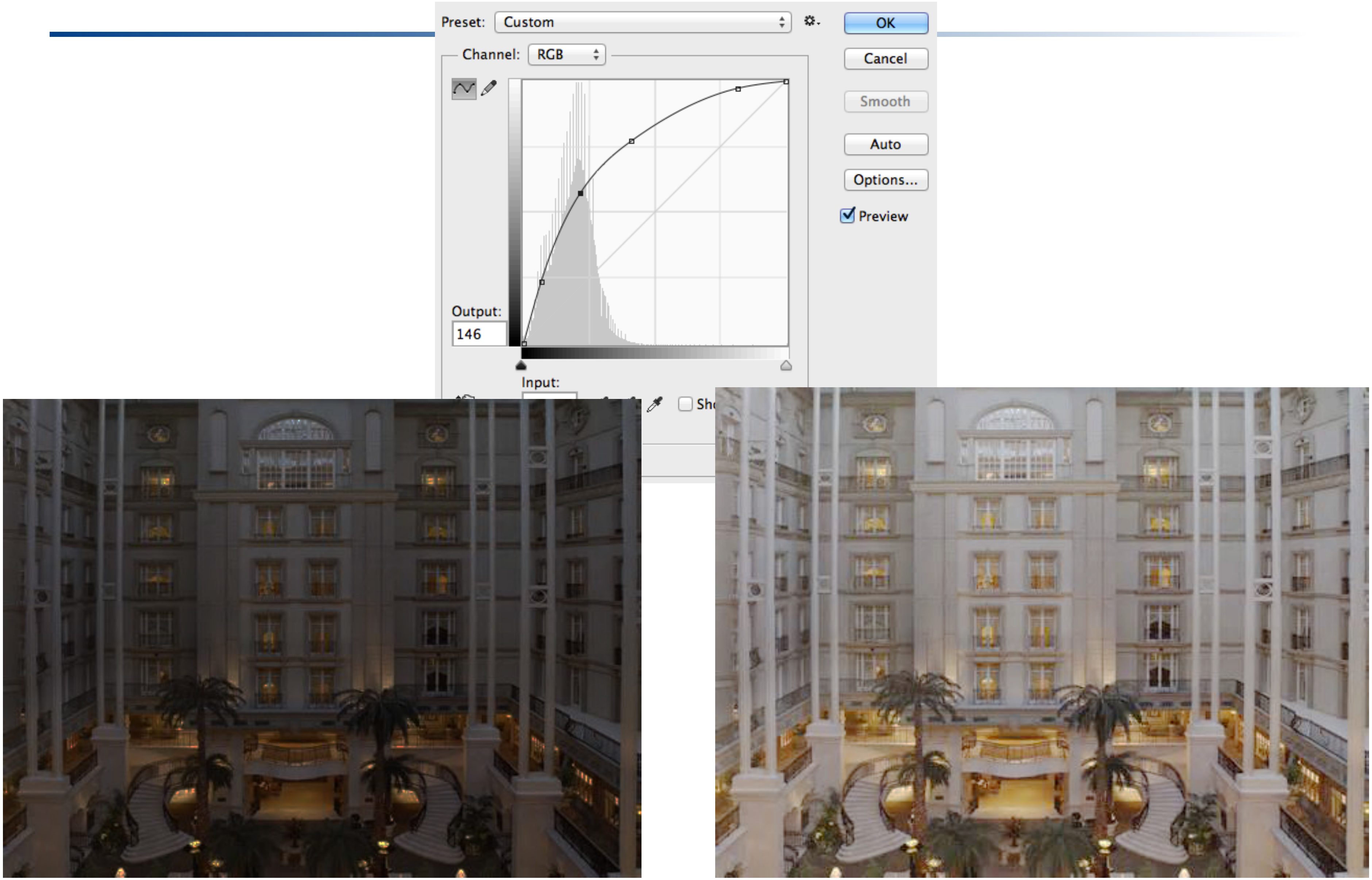



图 4.3.3　典型灰度映射函数示例

# 图像的点运算—灰度映射


Preset:
Custom
OK
Channel:
RGB
Cancel
Smooth
Auto
Options...
Preview
Output:
146
Input:

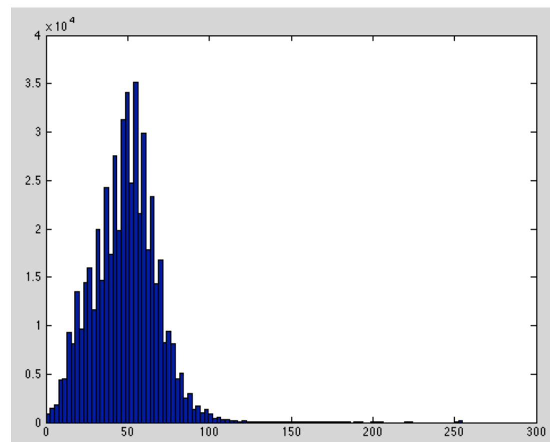
# 目录

- 图像几何坐标变换
- 图像点操作
- 图像直方图变换

# 图像增强—直方图映射

- 直方图：反映了图像统计量（灰度等）的统计分布规律。

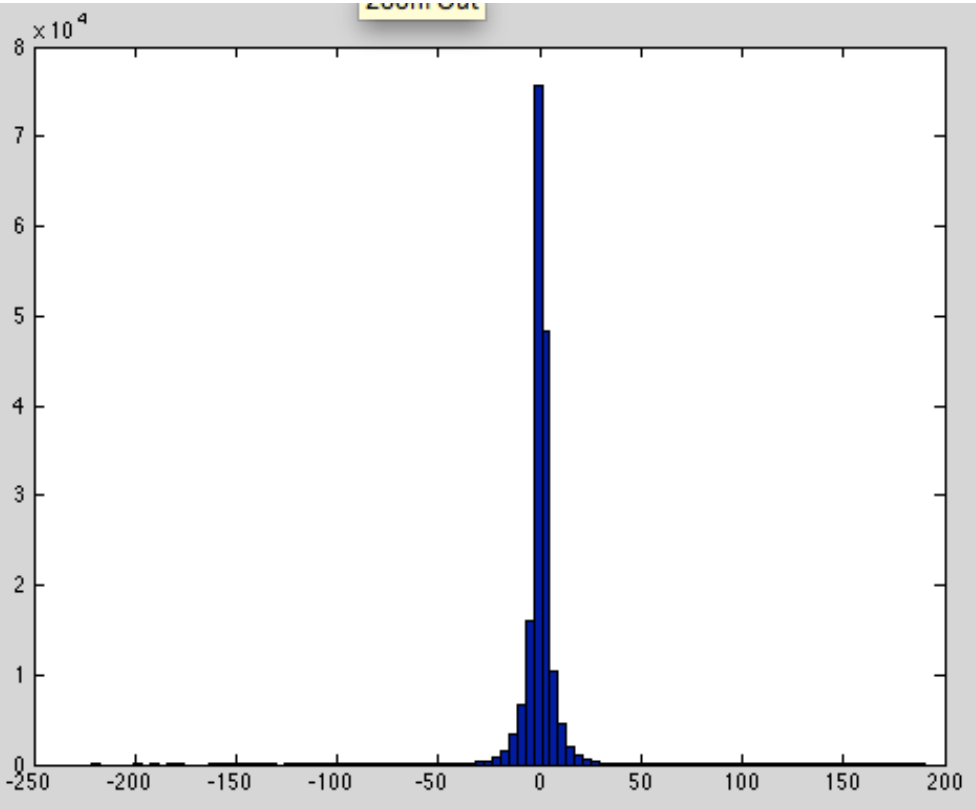
灰度直方图




```
im = imread('th12.jpg');
figure,hist(double(im(:)), 100)
```

# 图像增强—直方图映射

梯度直方图-(x方向)




```
im = double(imread('th12.jpg'));
gx = im(:, :, 1) - im([1, 1 : end-1], :, 1);
figure,hist(gx(:), 100)
```

# 直方图计算

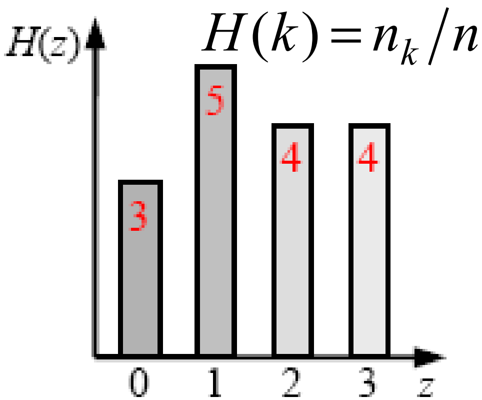
- 灰度统计直方图计算

  计算图像像素的灰度值分布情况

直方图是包含 $L$ 个元素的数组（每个元素称为bin），对原图的灰度值统计每个bin对应灰度出现的频率

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 2 |

(a)

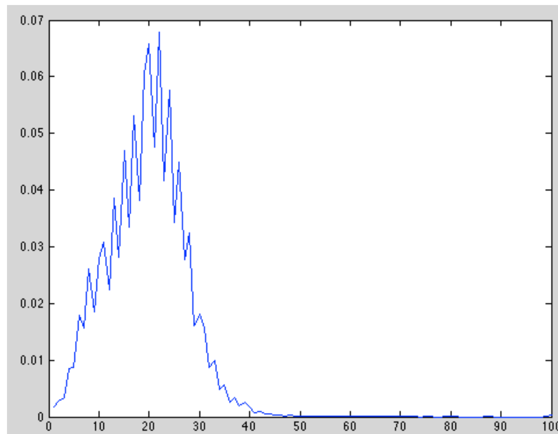


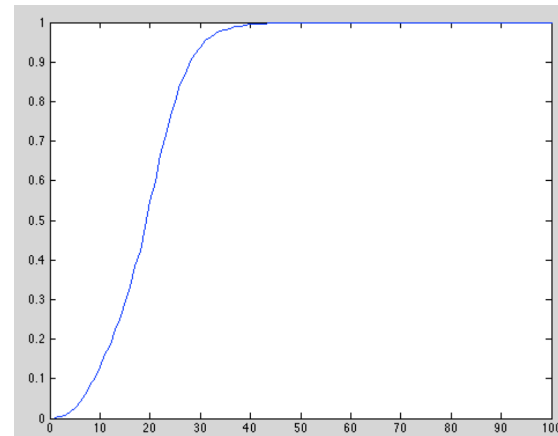

(b)

图 4.4.1　图像和直方图

# 直方图计算

- 灰度累积统计直方图计算




灰度直方图：

$$p_s(s_k) = n_k / n$$

$$0 \leqslant s_k \leqslant 1$$

$$k = 0, 1, \cdots, L-1$$

累积直方图：

$$t_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i}{n} = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i)$$

```
im = double(imread('th12.jpg'));
[h, x] = hist(im(:), 100);
h = h / length(im(:));
ch = cumsum(h);
figure, plot(x, h);
figure, plot(x, ch);
```

# 图像增强：直方图均衡化

- 直方图均衡化：借助直方图变换实现（归一的）灰度映射

均衡化基本思想：

变换原始图象的直方图使其为均匀分布

==> 大动态范围

可以使象素灰度值的动态范围最大

==> 增强图象整体对比度（反差）

# 图像增强：直方图均衡化

- 直方图均衡化：将图像累积直方图作为增强函数

$$t_k = E_H(s_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{n_i}{n} = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i)$$

$s_k$ :原图灰度值； $t_k$ :均衡化图像灰度值。

- 增强函数需要满足的条件

(1)　$E_{\mathrm{H}}(s)$：　单值单增函数，　$0 \leqslant s \leqslant L-1$

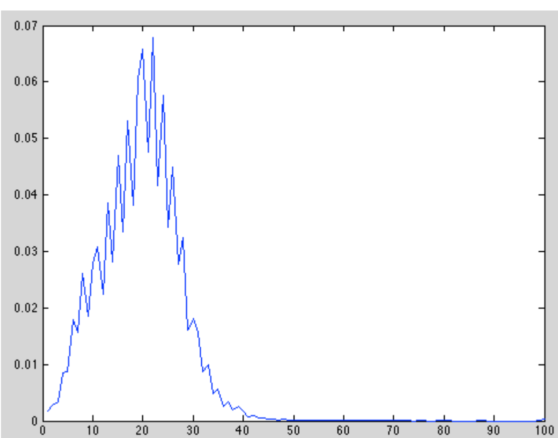
各灰度级在变换后仍保持排列次序

(2)　$0 \leqslant E_{\mathrm{H}}(s) \leqslant L-1$

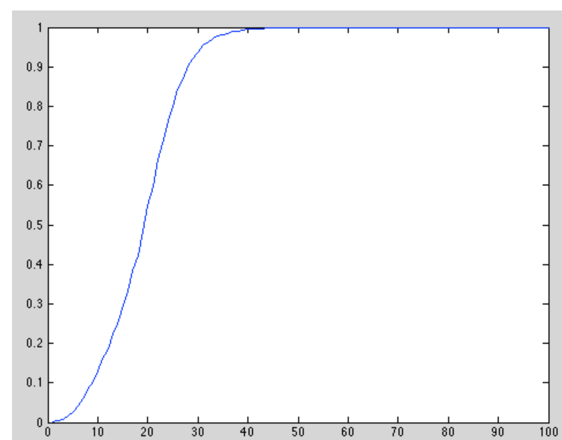
变换前后灰度值动态范围一致

# 直方图均衡化

第一步：计算
归一化直方图



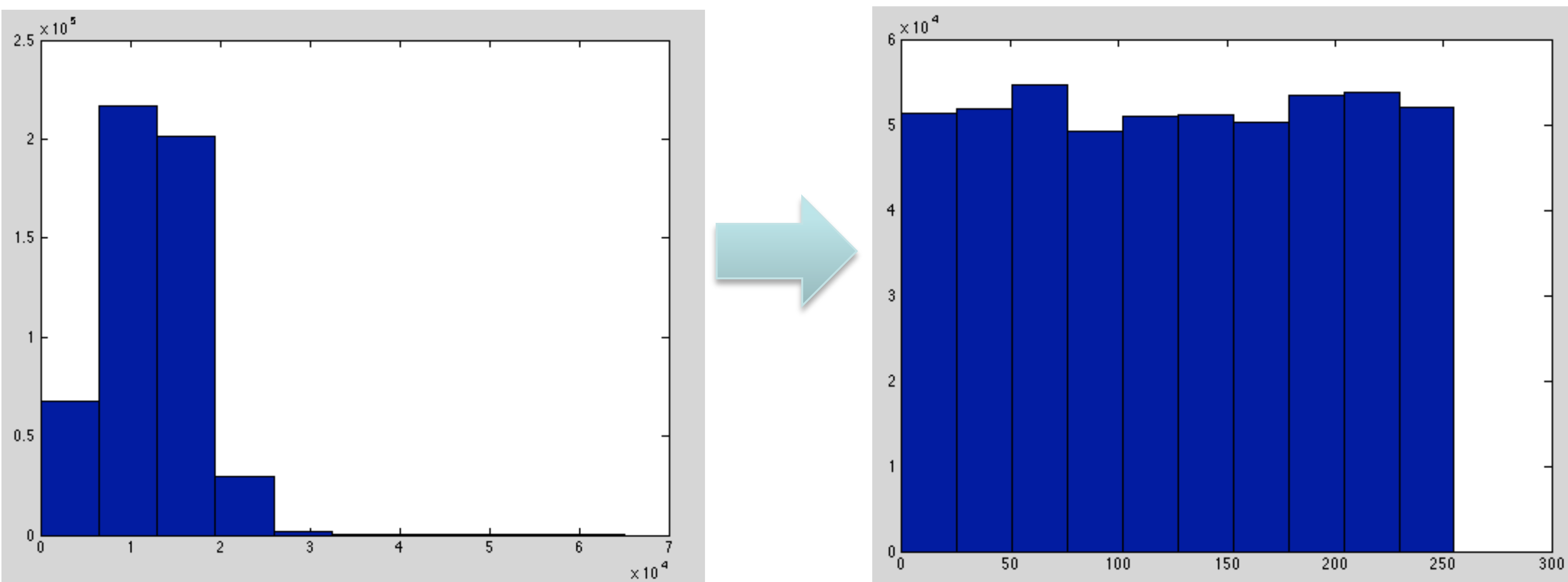

第二步：计算
累积直方图




第三步：灰度
映射

# 直方图均衡化

- 直方图均衡化例子



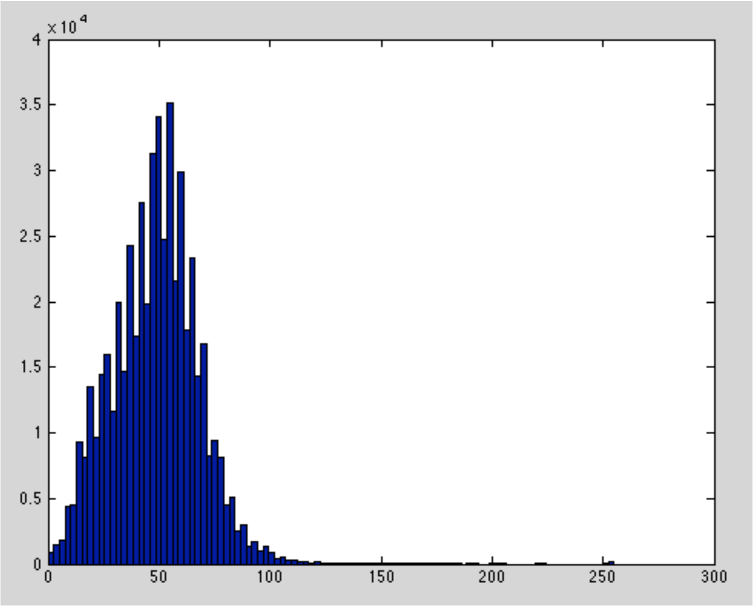
# 直方图均衡化

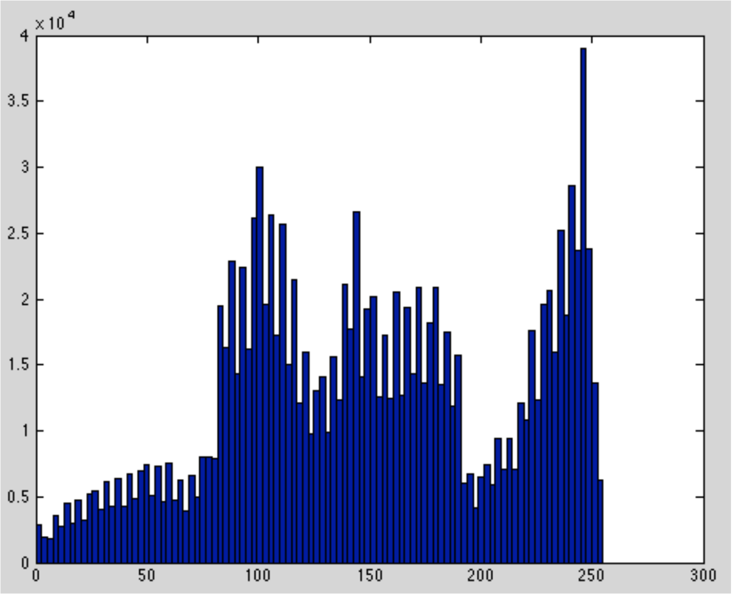
## 直方图均衡化程序 (histeq)

```
im = double(imread('th12.jpg'));
R = histeq(double(im(:,:,1)/255), 100);
G = histeq(double(im(:,:,2)/255), 100);
B = histeq(double(im(:,:,3)/255), 100);
imeq(:,:,1) = R;
imeq(:,:,2) = G;
imeq(:,:,3) = B;
figure,imshow(uint8(imeq * 255))
figure, hist(imeq(:) * 255)
figure, hist(im(:) * 255)
```

# 直方图规定化

- 直方图规定化：将图像的直方图映射到规定的直方图，实现图像增强



# 直方图规定化

借助直方图变换实现规定/特定的灰度映射

三个步骤

(1) 对原始直方图进行灰度均衡化

$$t_k = EH_s(s_i) = \sum_{i=0}^{k} p_s(s_i)$$

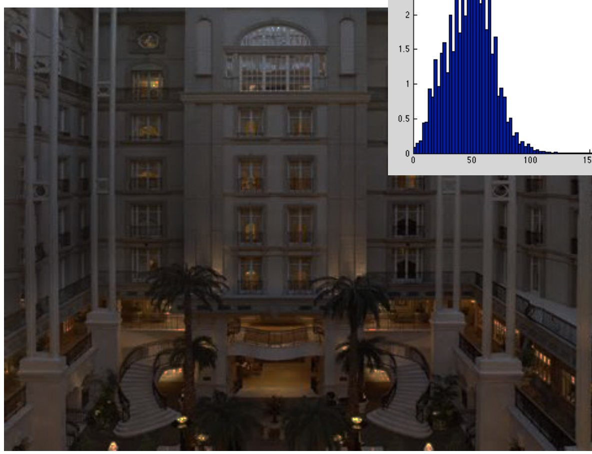
(2) 规定需要的直方图，计算能使规定直方图均衡化的变换

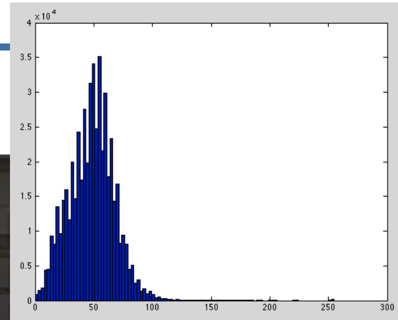
$$v_l = EH_u(u_j) = \sum_{j=0}^{l} p_u(u_j)$$

(3) 将原始直方图对应映射到规定直方图

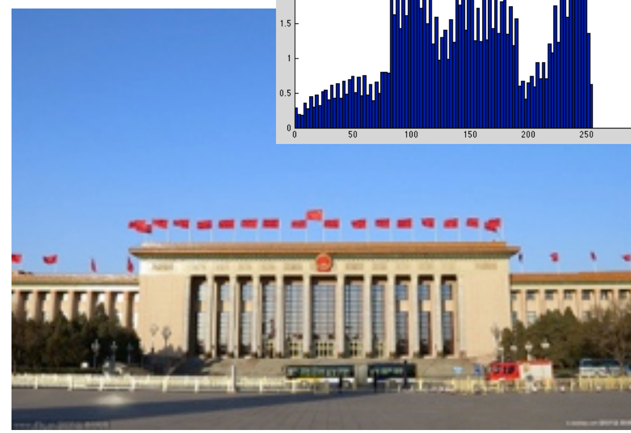
$$t_i = EH_u^{-1}(EH_s(s_i))$$

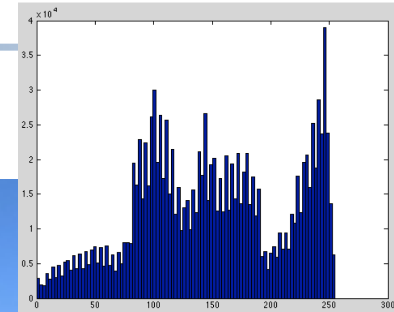
# 直方图规定化



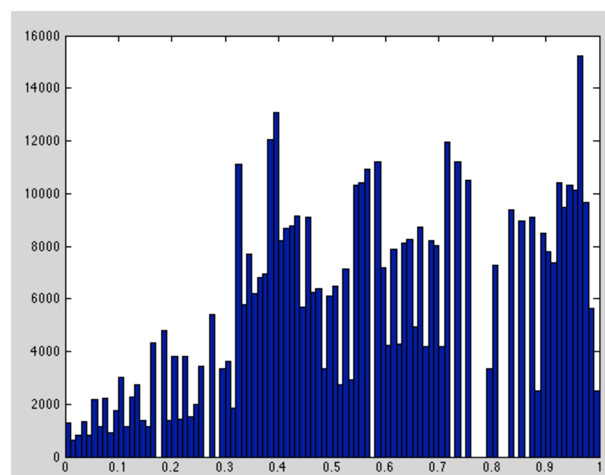


x 10⁴
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
50
100
150
200
250
300



x 10⁴
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
50
100
150
200
250
300

16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

# 直方图规定化

## 直方图规定化程序 (histeq)

```
im = imread('th12.jpg');
imt = imread('target.jpg');
ht = hist(double(imt(:)), 100);
R = histeq(double(im(:,:,1)/255), ht);
G = histeq(double(im(:,:,2)/255), ht);
B = histeq(double(im(:,:,3)/255), ht);
imeq(:,:,1) = R;
imeq(:,:,2) = G;
imeq(:,:,3) = B;
figure,imshow(uint8(imeq * 255))
```

# 作业和练习

1. 拍摄或选取一幅低光条件下拍摄的相片，通过程序实现直方图均衡化、规定化，并观察效果；

2. 尝试图像处理软件Photoshop的图像调节软件
Image -> Adjustments -> Brightness / contrast、Levels、Curves、Exposure

3. 查阅文献，复习和了解Multi-view Geometry。