

图像处理与分析

— 图像投影重建

授课教师：孙剑

jiansun@mail.xjtu.edu.cn

<http://jiansun.gr.xjtu.edu.cn>

西安交通大学 数学与统计学院

目录

- 投影重建概述
- 傅里叶反变换重建
- 逆投影重建
- 级数展开重建
- 综合重建方法
- 离散周期重建

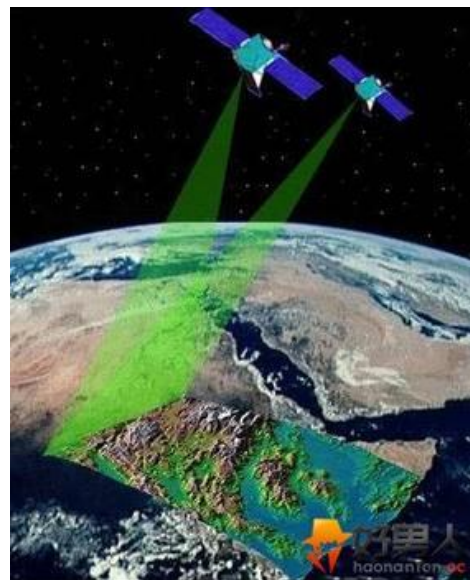
本章课件内容主要来自于章毓晋教授课件

投影重建概述

图像重建：指从一个物体的多个（轴向）投影图重建目标图像过程。输入是一系列投影图，通过投影重建直接看到原来被投影物体的某种特性的空间分布。



MRI成像设备



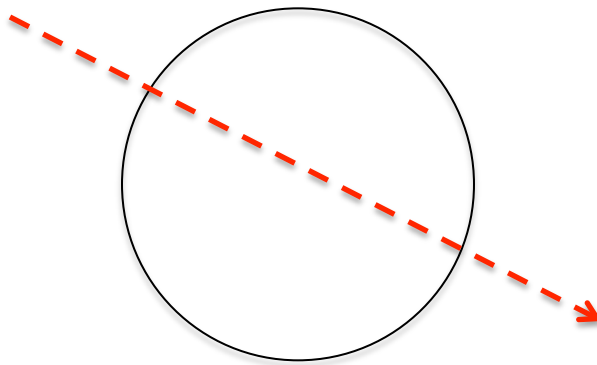
SAR雷达成像设备

利用投影重建方式工作的系统有许多种类，原理不完全相同但有一些共性。

投影重建方式

1、透射断层成象

TCT（transmission computed tomography, CT）：发射源射出的射线穿透物体到达接收器。穿透过程中部分能量被物体吸收，由于物体内部各部分对射线吸收成不同，接收强度反映了物体各部分对射线的吸收情况。



$$I = I_0 \exp\left(-\int k(s) ds\right)$$

I_0 :射线源强度

$k(s)$:沿射线方向物体电 s 的线性衰减系数

例子：CT系统（教材图7.1.1）

投影重建方式

2、发射断层成象

ECT (emission computed tomography)

发射源在物体内部，接受器在物体外部。一般将具有放射性的离子注入物体内部，从物体外部接收辐射，以检测到与生理有关的状况/信息

① PET (positron emission tomography)

正电子与负电子相撞湮灭而产生一对光子

② SPECT (single positron emission CT)

使用在衰减中能产生 γ 射线的放射性离子

投影重建方式

2、发射断层成像

PET（positron emission tomography）：采用放射性物质衰减时放出正电子的放射性离子，放出的正电子与副电子相撞湮灭产生一对光子，并以相反方向射出，产生一条射线。

$$P = \exp\left(-\int k(s) ds\right) \int f(s) ds$$

$k(s)$ ：射线线性衰减系数

$f(s)$ ：是同位素的分布函数

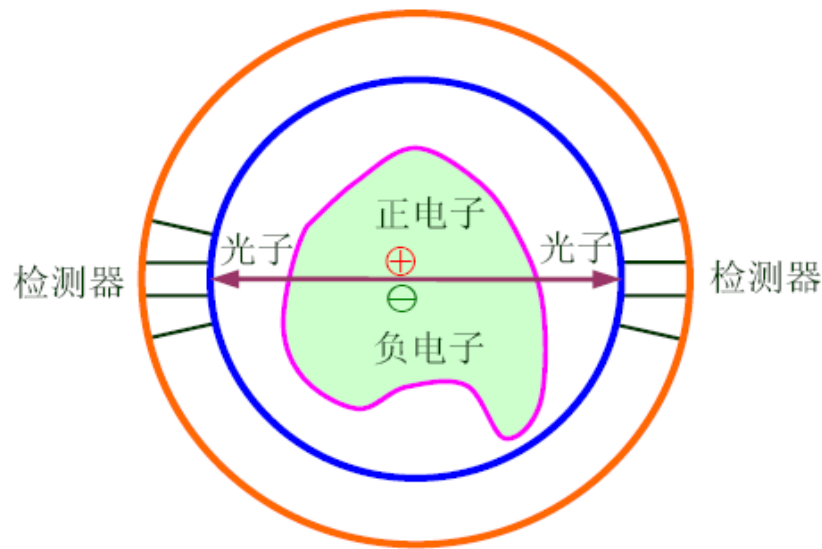


图 9.1.1 PET 成像系统构成示意图

投影重建方式

2、发射断层成像

SPECT（single positron emission CT）

将放射性物质注入物体内部，不同材料吸收后会发射 γ 射线，射线穿过准直器到达晶体，转化为光子并由光电倍增管转化为电信号。

发射断层成像灵敏度：

$$S \propto \frac{Ae^n k}{4\pi r^2}$$

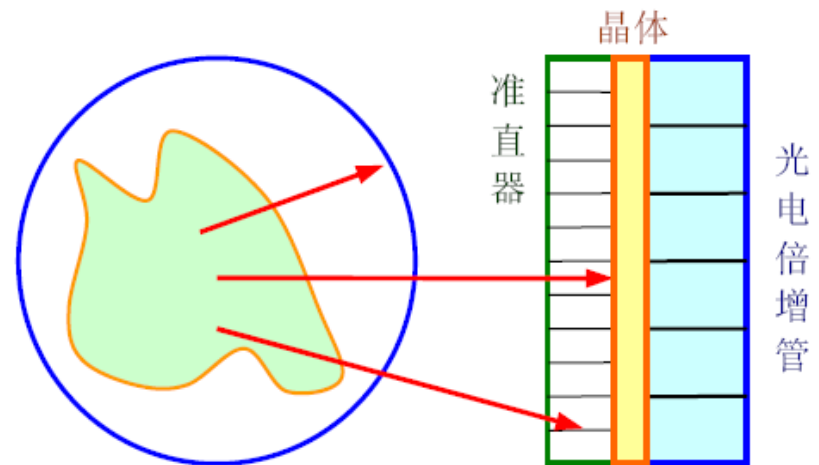
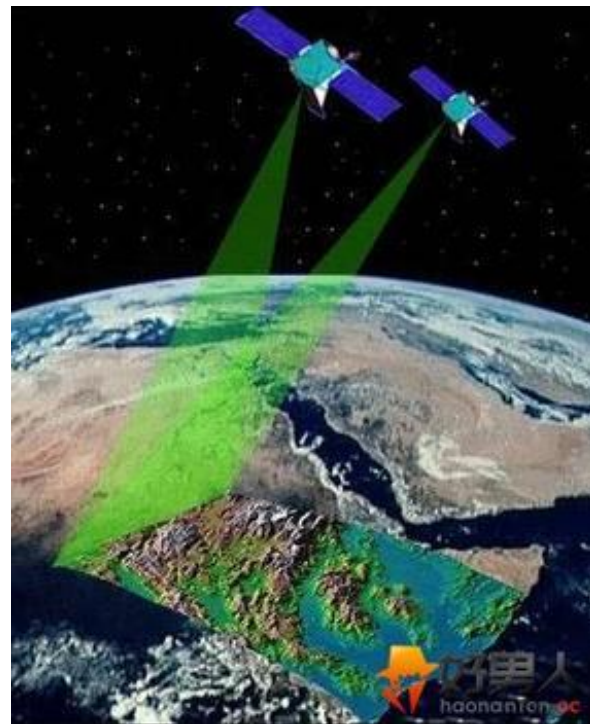


图 9.1.2 SPECT 成像系统构成示意图

投影重建方式

3、反射断层成像

RCT（reflection CT）：雷达系统中的雷达图是物体反射的回波所产生的。雷达接受器在特定角度所接受到的回波强度是地面反射量在一个扫描段的积分。投影重建就是要从这个积分获得地面（反射强度）的图象



投影重建方式

3、反射断层成像

非聚焦合成孔径雷达

$$\theta_B(t, d) = -\frac{4\pi}{\lambda} \frac{(vt - d)^2}{2R}$$

$$E(d) = \int_{-T/2}^{T/2} \exp\left[-\frac{j4\pi}{2R\lambda} (vt - d)^2\right] dt$$

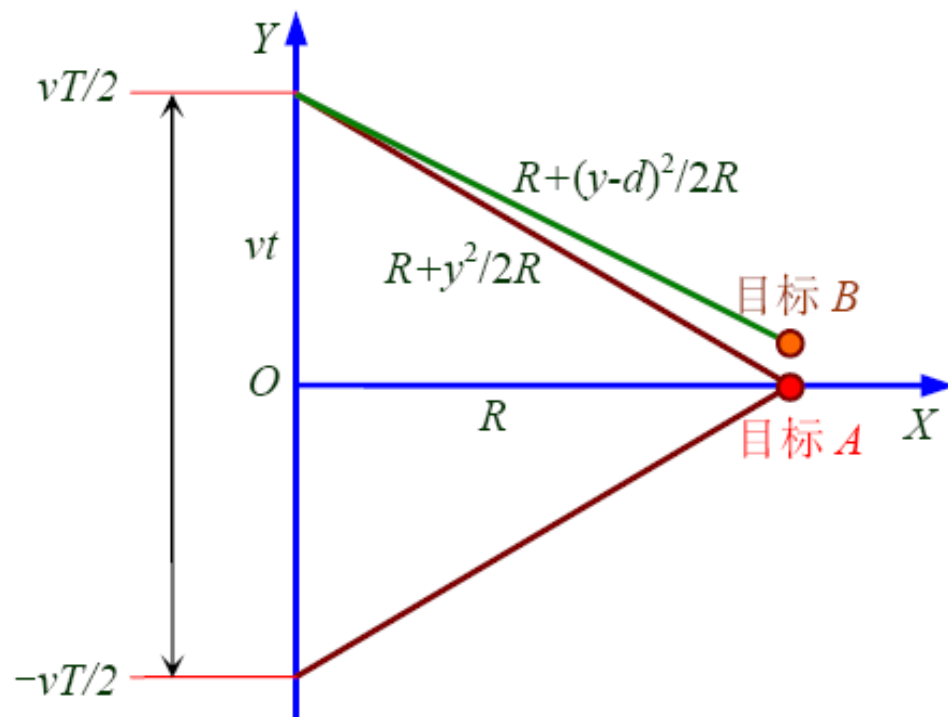


图 9.1.3 非聚焦合成孔径雷达成像的示意图

投影重建方式

4、磁共振成像

MRI（magnetic resonance imaging），早期称为核磁共振图像NMR。

质子在磁场中进动。当一定强度和频率的共振场信号作用于物体时，质子吸收能量并转向与磁场相交的朝向。当共振信号去除，质子吸收的能量释放并被接受器检测到。根据检测到的信号就可以确定质子的密度

检测到的信号是MRI信号沿直线的积分。所以检测目标的工作成了投影重建的问题

投影重建方式

5、电阻抗断层成象

EIT (electrical impedance tomography)

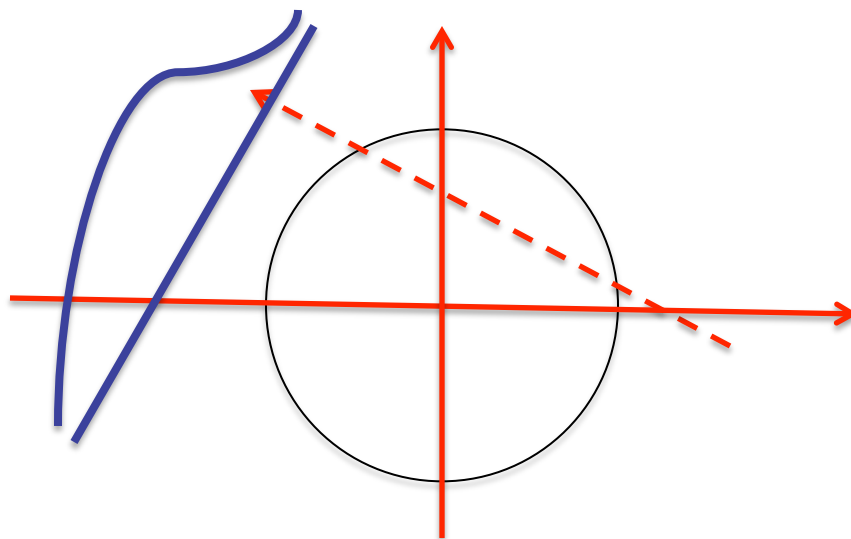
- 采用交流电场对物体进行激励
- 将低频率的电流注入物体内部并测量在物体外表处的电势场
- 用图象重建算法就可以重建出物体内部区域的电导和电抗的分布或变化的图象

EIT图象能反映组织或器官携带的病理和生理信息

投影重建原理

基本模型

如果测量到的数据具有物体某种感兴趣的物理特性在空间分布的积分的形式，那么就可以/需要用投影重建的方法来获得物体内部的图象（代某种物理量在2-D平面上的分布）



参考示意图：图7.2.1

投影重建原理

投影重建原理

由发射源到接受器的直线为 (s, θ) ，对函数沿直线积分

$$g(s, \theta) = \int_{(s, \theta)} f(x, y) dt = \int_{(s, \theta)} f(s \times \cos \theta - t \times \sin \theta, s \times \sin \theta + t \times \cos \theta) dt$$

上述积分就是 $f(x, y)$ 沿 t 方向的投影

设 Q 是单位圆，积分上下限分别为 t 和 $-t$

直线 (s, θ) 落在 Q 内部分 $t(s) = \sqrt{1 - s^2} \quad |s| \leq 1$

直线 (s, θ) 落在 Q 外部分 $g(s, \theta) = 0 \quad |s| > 1$

投影重建原理

投影重建

对给定的积分 $g(s, \theta)$ ，要确定目标 $f(x, y)$

解积分方程：
$$g(s, \theta) = \int_{(s, \theta)} f(x, y) dt$$

Radon变换：

$$R_f(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dl = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(p - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy$$

中心层定理： (参考图7.2.3)

$$F_{(1)}\{R[f(x, y)]\} = F_{(1)}\{R_f(p, \theta)\} = F_{(2)}[f(x, y)] = F(u, v)$$

傅里叶反变换重建

1、基本步骤和定义

(1) 建立数学模型，其中已知量和未知量都是连续实数的函数

(2) 利用反变换公式（可有多组等价的）解未知量

(3) 调节反变换公式以适应离散、有噪声应用的需求

重建算法：设图象区被1个直角网格所覆盖， K 为 X 方向上的点数， L 为 Y 方向上的点数

要通过 $M \times N$ 个测量值 $g(m\Delta s, n\Delta\theta)$ 估计出在 $K \times L$ 个采样点的 $f(k\Delta x, l\Delta y)$

傅里叶反变换重建

1、基本步骤和定义

考虑在 s 和 θ 上都均匀采样的情况

M 个间距为 Δs 的射线， N 个相差 $\Delta\theta$ 的角度

$$\left. \begin{array}{l} M^+ = (M-1)/2 \\ M^- = -(M-1)/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} M \text{ 为奇数} \\ \text{类似定义} \\ K^+ \text{ 和 } K^- \\ L^+ \text{ 和 } L^- \end{array}$$
$$\left. \begin{array}{l} M^+ = (M/2) - 1 \\ M^- = -M/2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} M \text{ 为偶数} \end{array}$$

一系列射线 $\{(m\Delta s, n\Delta\theta) : M^- \leq m \leq M^+, 1 \leq n \leq N\}$

选取 $\Delta\theta = \pi/N$ 和 $\Delta s = 1/M^+$

傅里叶反变换重建

2、傅里叶变换投影定理

$$G(R, \theta) = \int_{(s, \theta)} g(s, \theta) \exp[-j2\pi Rs] ds$$

$$F(X, Y) = \iint_Q f(x, y) \exp[-j2\pi(xX + yY)] dx dy$$

投影定理: $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

$f(x, y)$ 以 θ 角进行投影的傅里叶变换等于 $f(x, y)$ 的傅里叶变换在傅里叶空间 (R, θ) 处的值

$f(x, y)$ 在与 X 轴成 θ 角的直线上投影的傅里叶变换是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换在朝向角 θ 上的1个截面

傅里叶反变换重建

2、傅里叶变换投影定理

投影定理: $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

考虑 $\theta = 0$, 图象 $f(x, y)$ 在 X 轴上的投影为 $g_y(x)$

$$g_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$G_y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_y(x) \exp[-j2\pi ux] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi ux] dx dy$$

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

将 v 取为零, 则得到 $G_y(u) = F(u, 0)$

傅里叶反变换重建

2、傅里叶变换投影定理

投影定理： $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

对投影（Radon变换）的1-D傅里叶变换可得到定义在傅里叶空间的极坐标网格

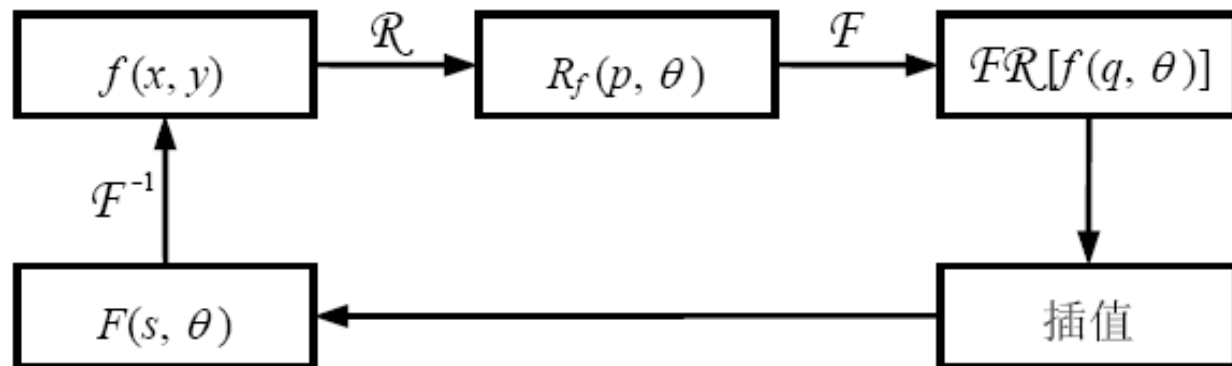


图 9.2.1 直接傅里叶反变换重建流程图

傅里叶反变换重建

3、傅里叶反变换重建公式


$$G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$$

在直角坐标系中取傅里叶反变换

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G \left[\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan \left(\frac{Y}{X} \right) \right] \exp [j2\pi(xX + yY)] dXdY$$

实用中加窗，带限逼近：

$$f_W(x, y) =$$

$$\iint_Q G \left[\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan \left(\frac{Y}{X} \right) \right] W \left[\sqrt{X^2 + Y^2} \right] \exp [j2\pi(xX + yY)] dXdY$$


傅里叶反变换重建

3、傅里叶反变换重建公式

实际中 $G(\cdot)$ 只在一系列 θ_n 角取值 (θ_n 代表 $n\Delta\theta$)

$G(R, \theta_n)$ 用在一系列采样点 $(m\Delta s, \theta_n)$ 对 $g(\cdot)$ 的求和得到

$$G_{\Sigma}(R, \theta_n) = \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m\Delta s, \theta_n) \exp[-j2\pi R(m\Delta s)]$$

令 $R = k\Delta R$ (k 为整数, ΔR 为采样间距)

取 $\Delta R = 1/(M\Delta s)$

$$G_{\Sigma}(k\Delta R, \theta_n) = \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m\Delta s, \theta_n) \exp\left[\frac{-j2\pi km}{M}\right]$$

傅里叶反变换重建

3、傅里叶反变换重建公式

对任意的 (X, Y) 插值出 $G[(X^2+Y^2)^{1/2}, \arctan(Y/X)]$

$$G\left[\sqrt{X^2+Y^2}, \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)\right]W[\sqrt{X^2+Y^2}] = F_W(X, Y)$$

$$f_W(k\Delta x, l\Delta y) \approx \Delta X \Delta Y \sum_{u=U^-}^{U^+} \sum_{v=V^-}^{V^+} F_W(u\Delta x, v\Delta y) \exp\{j2\pi[(k\Delta x)(u\Delta X) + (l\Delta y)(v\Delta Y)]\}$$

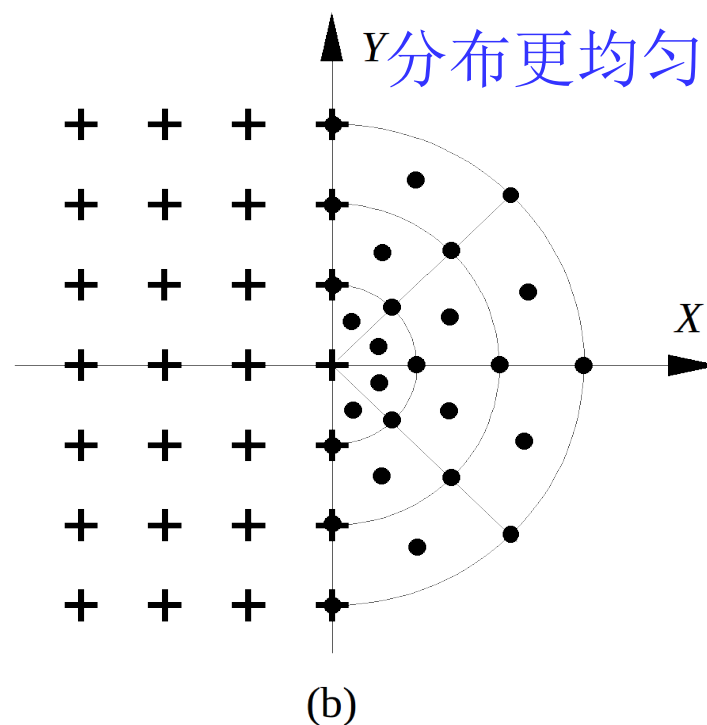
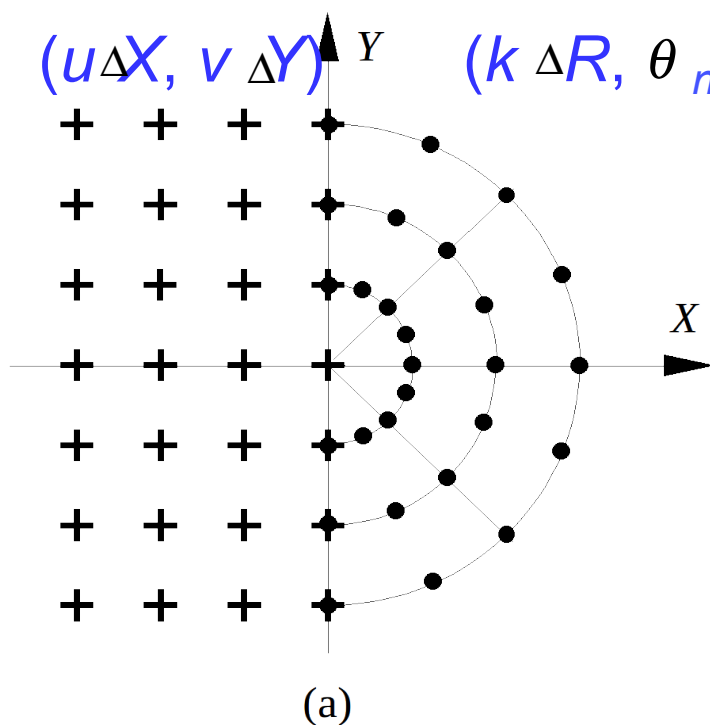
$$\text{令 } \Delta x = 1/(U\Delta X), \quad \Delta y = 1/(V\Delta Y)$$

$$f_W(k\Delta x, l\Delta y) \approx \Delta X \Delta Y \sum_{u=U^-}^{U^+} \sum_{v=V^-}^{V^+} F_W(u\Delta x, v\Delta y) \exp\left\{j2\pi\left[\frac{ku}{U} + \frac{lv}{V}\right]\right\}$$

傅里叶反变换重建

3、傅里叶反变换重建公式

傅里叶空间的直角和极坐标网格



傅里叶反变换重建

3、傅里叶反变换重建公式

基于傅里叶反变换的重建技术主要有3个步骤：

- (1) 对沿角 θ_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 方向的投影进行1-D傅里叶变换；
- (2) 在傅里叶空间从极坐标向直角坐标插值；
- (3) 进行2-D傅里叶反变换以得到重建图象。

第3步需要用到2-D变换，所以不能根据所获得的部分投影数据重建图象，必须在获得全部投影数据后再重建图象？

傅里叶反变换重建

4、模型重建

人为设计的模型（phantom，幻影）：

10个圆/椭圆

不同：中心坐标

长短轴长

旋转倾角

密度/灰度



图 9.2.3 改进的 Shepp-Logan 头部模型图

逆投影重建

逆投影：将从各个方向得到的投影逆向投影回到该方向的各个位置

卷积逆投影重建

其他逆投影重建

逆投影重建原理，参考图7.4.1-7.4.2

卷积逆投影重建

1、连续公式推导

投影定理: $G(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$

在直角坐标系中取傅里叶反变换

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} G(R, \theta) \exp[j2\pi R(x \cos \theta + y \sin \theta)] |R| dR d\theta$$
$$G(R, \theta) = \int_{(s, \theta)} g(s, \theta) \exp[-j2\pi Rs] ds$$

在有限带宽 $|R| < 1/(2\Delta s)$ 的情况下对 $G(R, \theta)$ 进行估计

卷积函数

$$h(s) = \int_{-1/(2\Delta s)}^{1/(2\Delta s)} |R| W(R) \exp[j2\pi Rs] dR$$

卷积逆投影重建

1、连续公式推导

交换对 s 和 R 的积分次序

$$\begin{aligned} f_W(x, y) &= \int_0^\pi \int_{-1/(2\Delta s)}^{1/(2\Delta s)} G(R, \theta) W(R) \exp[j2\pi R(x \cos \theta + y \sin \theta)] |R| dR d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 g(s, \theta) h(x \cos \theta + y \sin \theta - s) ds d\theta \end{aligned}$$

卷积（滤波）过程: 逆投影过程

$$g'(s, \theta) = \int_{-1}^1 g(s, \theta) h(s' - s) ds \quad f_W(x, y) = \int_0^\pi g'(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta$$

卷积逆投影重建

2、离散计算

逆投影过程的近似

$$f_W(k\Delta x, l\Delta y) \approx \Delta\theta \sum_{n=1}^N g'(k\Delta x \cos \theta_n + l\Delta y \sin \theta_n, \theta_n)$$

卷积过程的近似

离散卷积
$$g'_C(m'\Delta s, \theta_n) \approx \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} g(m\Delta s, \theta_n) h[(m' - m)\Delta s]$$

一次插值
$$g'_I(s', \theta_n) \approx \Delta s \sum_{n=1}^N g'_C(m\Delta s, \theta_n) I(s' - m\Delta s)$$

卷积逆投影重建

3、扇束投影重建

缩短投影时间，使用1个发射器和1组接受器

$$f_W(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} g(s, \theta) e^{\{j2\pi R[r\cos(\theta-\varphi)-s]\}} W(R) |R| d\theta ds dR$$



(s, θ) 换成 (α, β)

$$f_W(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

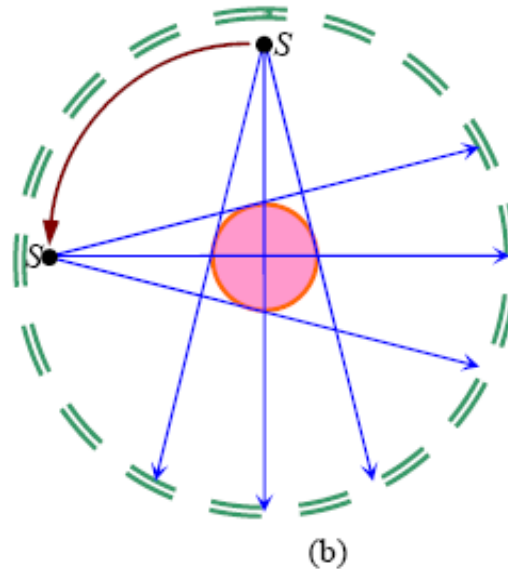
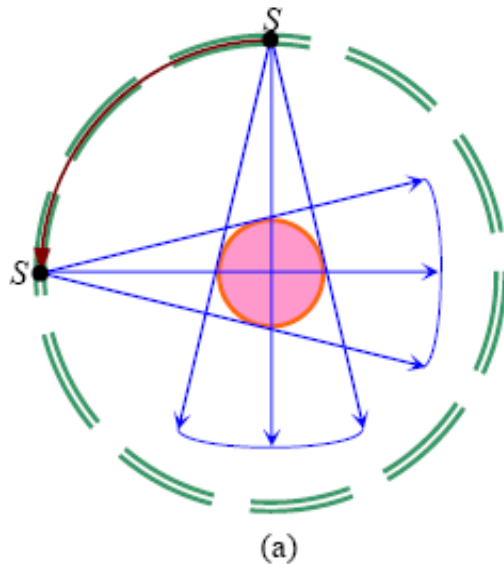
$$= \frac{D}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} p(\alpha, \beta) \cos\alpha \exp\{j2\pi RU \sin(\varphi - \alpha)\} W(R) |R| d\beta d\alpha dR$$

卷积逆投影重建

3、扇束投影重建

(a) 发射器和接受器均旋转

(b) 发射器旋转，接受器固定



卷积逆投影重建

4、傅里叶反变换和卷积逆投影重建法的比较

傅里叶反变换重建：直角坐标

卷积逆投影重建：极坐标

主要优点：

卷积逆投影重建基本算法：

容易用软件和硬件实现

可重建出准确清晰的图象

傅里叶反变换重建：

计算量比较小

其他逆投影重建

1、逆投影滤波

逆投影滤波器（filter of the back-projections）

先逆投影，再滤波（/卷积）

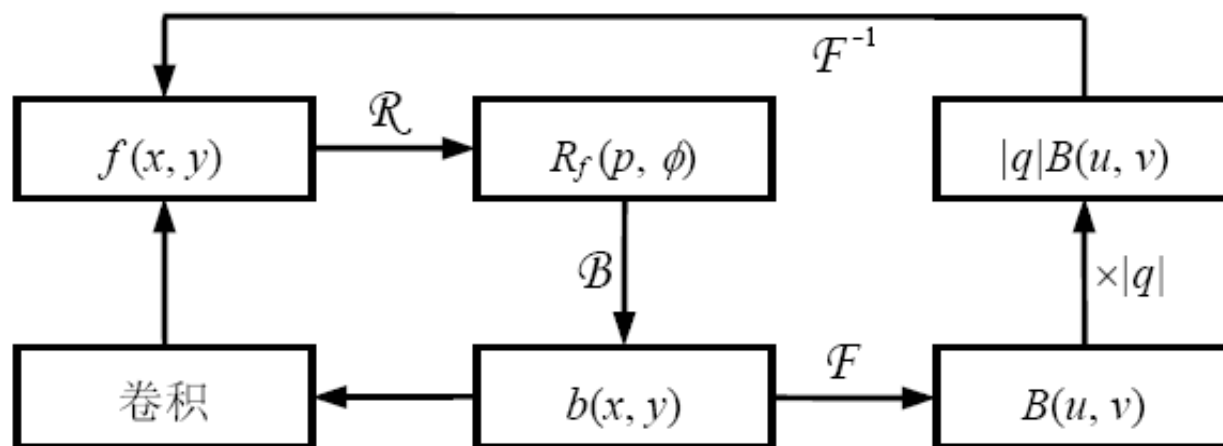


图 9.3.3 逆投影滤波重建流程图

其他逆投影重建

2、滤波逆投影

(backprojection of the filtered projections)

先对投影滤波，再逆投影

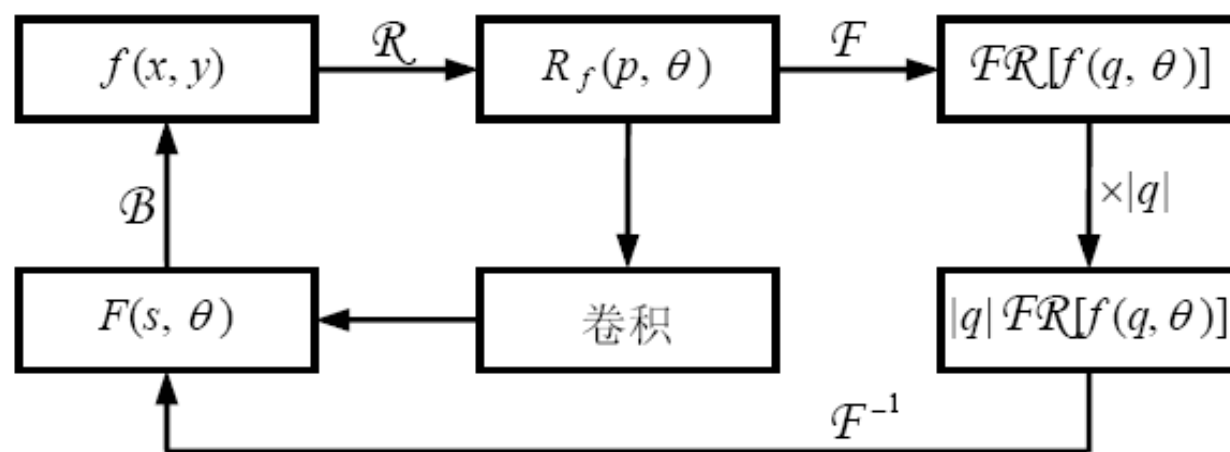


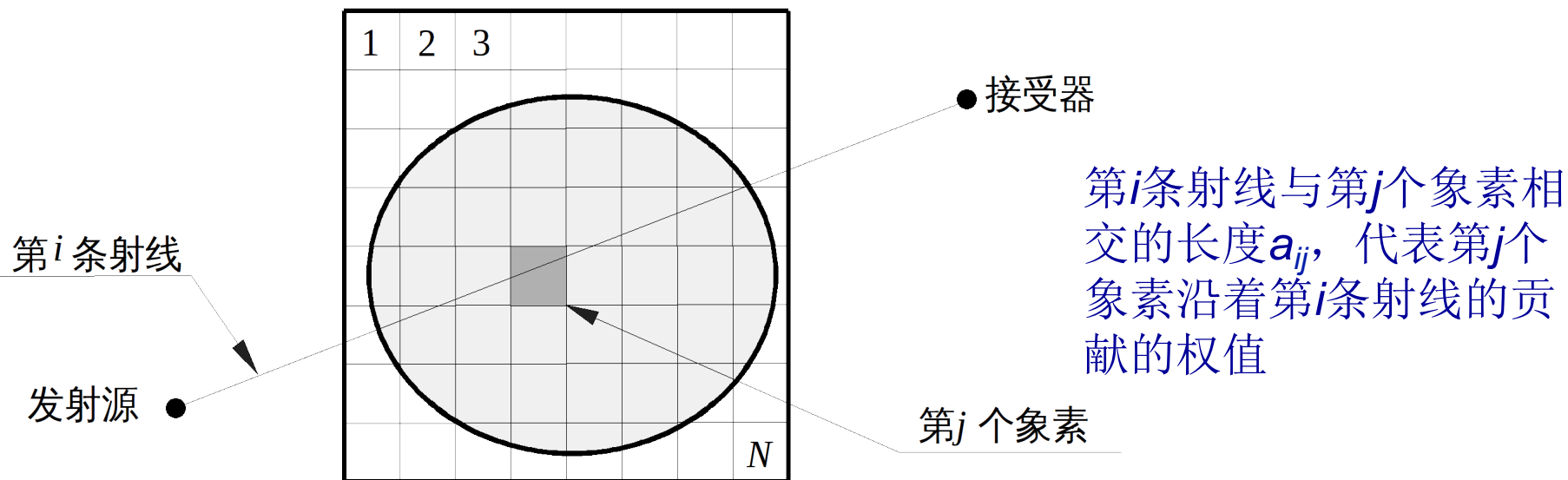
图 9.3.5 滤波投影的逆投影重建流程图

级数展开重建

1、离散模型

代数重建法（ART），迭代算法，优化技术

$$y_i \approx \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad y = \mathbf{A} \mathbf{x}$$



级数展开重建

2、无松弛的代数重建技术

先初始化1个图象矢量 $\mathbf{x}^{(0)}$ ，然后用下式进行迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{y_i - \langle a^i, x^{(k)} \rangle}{\|a^i\|^2} a^i \quad a^i = (a_{ij})_{j=1}^n$$

思路：

每次取1条射线，改变图象中与该线相交的像素的值，从而把当前的图象矢量 $\mathbf{x}^{(k)}$ 更新为 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 。具体运算中就是将测量值与由当前算得的投影数据 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)}$ 的差正比于 a_{ij} 重新分配到各个像素上去

级数展开重建

3、松弛的代数重建技术

将无松弛的代数重建技术推广：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{y_i - \langle (a^i)^r, x^{(k)} \rangle}{\|a^i\|^2} a^i$$

r 是松弛系数，它控制了收敛的速度

级数展开重建

4、级数法的一些特点

- (1) 由于在空域中比较灵活，所以容易调整以适应新的应用
- (2) 能重建出较高对比度的图象（对密度突变的材料）
- (3) 借助多次迭代可从较少投射（ < 10 ）重建图象
- (4) 比变换法更适合于ECT
- (5) 比变换法更适合于3-D重建问题
- (6) 比变换法更适合于不完整投影情况

综合重建方法

迭代变换法（iterative transform）

$L(s, \theta_n)$ 是直线 (s, θ_n) 与 Q 相交段的长度

重建工作：

给定函数 $f(x, y)$

的投影 $g(s, \theta_n)$ ，其

中 s 可以取所有实

数， θ_n 是 1 组 N 个离

散角度，要重新得到 $f(x, y)$

参考图：图7.2.1

综合重建方法

迭代变换法 (iterative transform)

迭代公式

$$f^{(i+1)}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x, y) \notin Q \\ f^{(i)}(x, y) + \frac{g(s, \theta_n) - g^{(i)}(s, \theta_n)}{L(s, \theta_n)} & \text{else} \end{cases}$$

$$n = (i \bmod N) + 1, \quad s' = x \cos \theta_n + y \sin \theta_n$$

$g^{(i)}(s, \theta_n)$ 是 $f^{(i)}(x, y)$ 沿 θ_n 的投影

图象序列 $\{f^{(i)}(x, y) \mid i = 1, 2, \dots\}$ 将收敛

综合重建方法

迭代变换法 (iterative transform)

“半离散”函数 $g(\cdot, \theta_n)$ 的离散形式

引进插值函数 $q(\cdot)$ 从采样 $g(m\Delta s, \theta_n)$ 估计 $g(s, \theta_n)$

引进基函数 $B(x, y)$ 从采样 $f(k\Delta x, l\Delta y)$ 估计 $f(x, y)$

$$f_{k,l}^{(i+1)} = \begin{cases} 0 & \text{如 } (k\Delta x, l\Delta y) \text{ 不在 } Q \text{ 中} \\ f_{k,l}^{(i)} + \frac{\sum_m \left[g(m\Delta s, \theta_n) - \sum_{k,l} f_{k,l}^{(i)} G_{k,l}^{(B)}(m\Delta s, \theta_n) \right] q[s_{k,l}(\theta_n) - m\Delta s]}{L[s_{k,l}(\theta_n), \theta_n]} \end{cases}$$

作业

阅读教材第7章，复习课堂上讲解的图像投影重建内容