图像处理与分析

——频域内滤波

授课教师：孙剑

jiansun@mail.xjtu.edu.cn

http://jiansun.gr.xjtu.edu.cn

西安交通大学 数学与统计学院

目录

- 傅立叶变换
- 低通、高通滤波器
- 带通和带阻滤波器
- 同态滤波器

[注：该章节ppt主要来自于清华大学章毓晋老师课件，特此致谢]

参考章节：教材第4章频域技术原理

傅里叶变换

2-D傅里叶变换

傅里叶变换定理

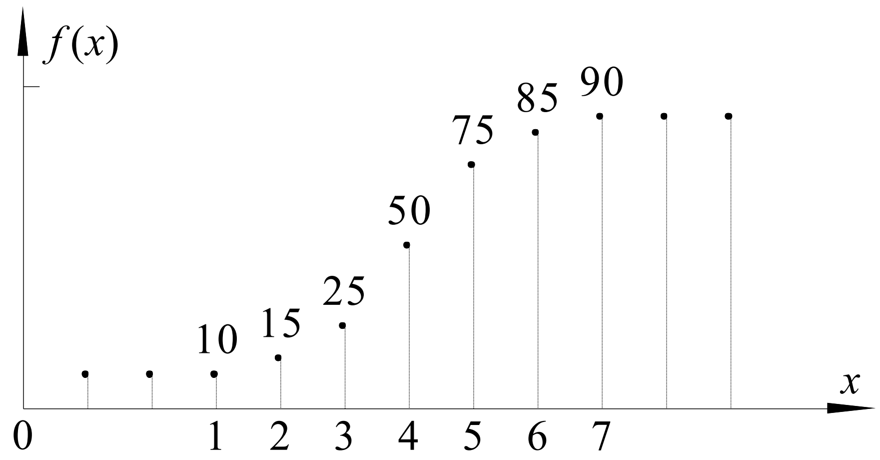
快速傅里叶变换

2-D傅里叶变换

1-D正变换

$$F\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

对1个连续函数 $f(x)$ 等间隔采样



2-D傅里叶变换

1-D反变换

$$F^{-1}\{F(u)\}=f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}F(u)\exp[j2\pi ux/N]$$

变换表达

$$F(u)=R(u)+jI(u)=|F(u)|\exp[j\varphi(u)]$$

频谱（幅度）

$$|F(u)|=\left[R^2(u)+I^2(u)\right]^{1/2}$$

相位角

$$\varphi(u)=\arctan[I(u)/R(u)]$$

2-D傅里叶变换

2D傅里叶变换公式

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi(ux+vy)/N]$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi(ux+vy)/N]$$

频谱（幅度） $|F(u,v)|=\left[R^2(u,v)+I^2(u,v)\right]^{1/2}$

相位角 $\varphi(u,v)=\arctan[I(u,v)/R(u,v)]$

功率谱 $P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$

傅里叶变换定理

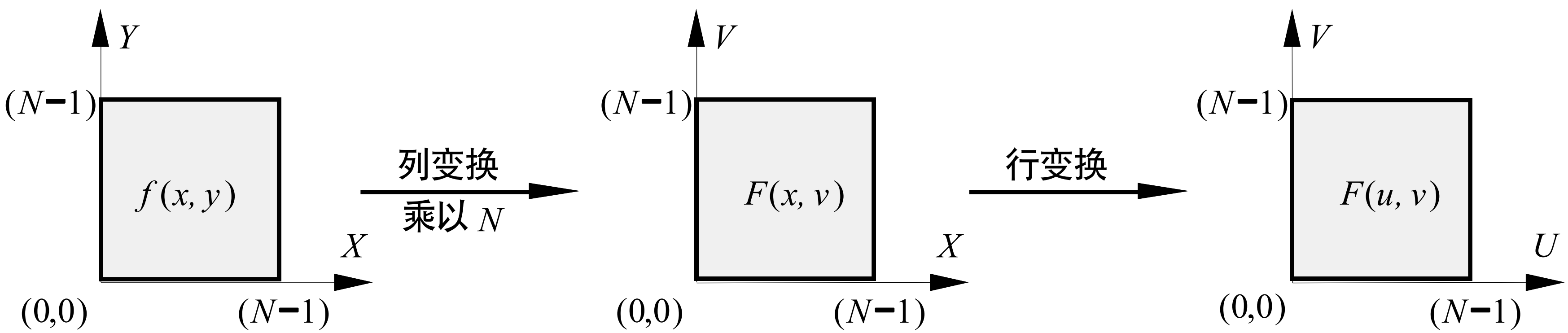
分离性质

$$F(x,v) = N\left[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-j2\pi vy/N]\right]$$

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} F(x,v)\exp[-j2\pi ux/N]$$

1次2-D 通过2次1-D计算

$O(N^4)$减为$O(N^2)$



傅里叶变换定理

1、平移定理

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

$$f(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(cx+dy)/N] \Leftrightarrow F(u-c,v-d)$$

$$F\left\{f(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(cx+dy)/N]\right\}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(cx+dy)/N]\exp[-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left\{-\mathrm{j}2\pi[(u-c)x+(v-d)y]/N\right\}$$

$$=F[(u-c),(v-d)]$$

傅里叶变换定理

4、剪切定理

（水平方向）纯剪切

$$x' = x + by$$

$$y' = y$$

$$f(x+by, y) \Leftrightarrow F(u, v-bu)$$

（垂直方向）纯剪切

$$x' = x$$

$$y' = dx + y$$

$$f(x, dx+y) \Leftrightarrow F(u-du, v)$$

傅里叶变换定理

5、组合剪切定理

平移＋旋转＋尺度

$$f(x+by,dx+y)\Leftrightarrow\frac{1}{|1-bd|}F\left(\frac{u-dv}{1-bd},\frac{-bu+v}{1-bd}\right)$$

$$x'=\begin{bmatrix}1 & b\\ d & 1\end{bmatrix}x$$

水平剪切 $\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

垂直剪切 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{bmatrix}$

傅里叶变换定理

6、卷积定理

$$f(x)*g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u)*G(u)$$

2-D

$$f(x,y)*g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p,q)g(x-p,y-q)dpdq$$

$$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$

$$f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

傅里叶变换定理

7、相关定理

1D相关运算 $$f(x)\circ g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f^{\text{¿}}(z)g(x+z)dz$$

$$f(x,y)\circ g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\text{¿}}(p,q)g(x+p,y+q)dpdq$$

$$f(x,y)\circ g(x,y)\Leftrightarrow F*(u,v)G(u,v)$$

$$f*(x,y)g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\circ G(u,v)$$

快速傅里叶变换(fft)

直接进行一个$N \times N$的2-D傅里叶变换需要N^4次复数乘法运算和$N^2(N^2-1)$ 次复数加法运算

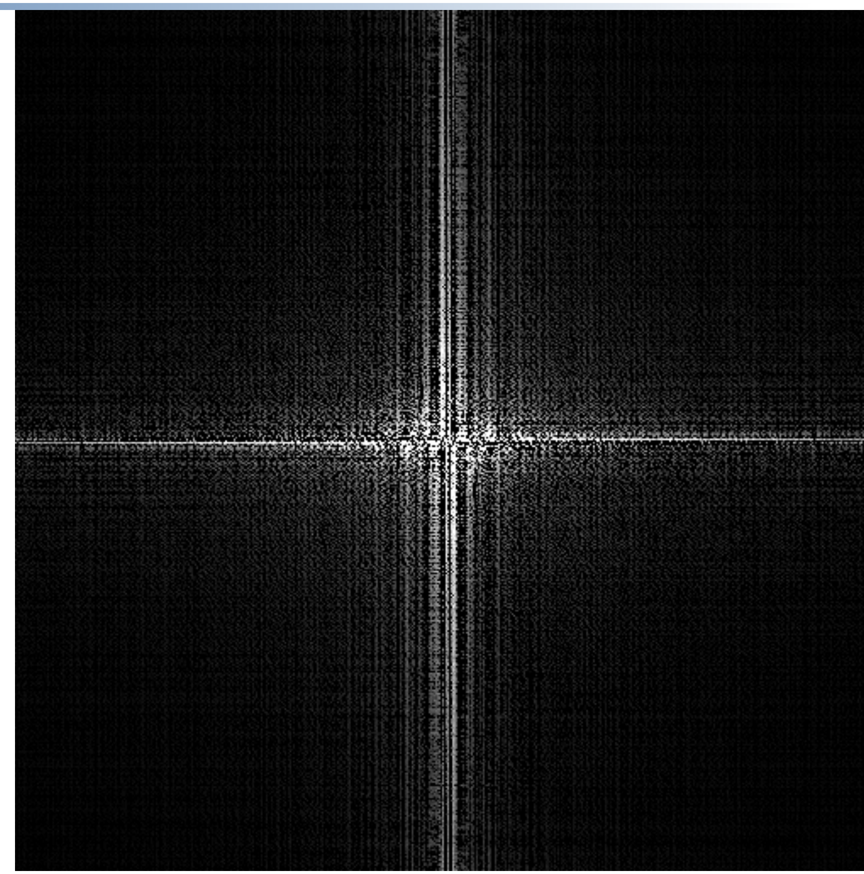
$$F\{f(x)\} = F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N] \qquad u = 0, 1, \cdots, N-1$$

1-D：复数乘法和加法的次数都正比于N^2

快速傅里叶变换（FFT）：

将复数乘法和加法的次数减少为正比于$N\log_2 N$

傅里叶变换例子



```
im = double(imread('lena.jpg'));
imfft = fft2(im(:,:,1));
imfftshift = fftshift(imfft);
R = real(imfftshift);
I = imag(imfftshift);
```

```
A1 = sqrt(R.^2 + I ^ 2);
A1=(A1-min(min(A1)))/(max(max(A1))-
min(min(A1)))*225;
figure,imshow(A1)
```

离散余弦变换

一种可分离、正交、对称的变换

1-D离散余弦变换（DCT）

$$C(u) = a(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad u = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u) C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad x = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{当} \quad u = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{当} \quad u = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases}$$

离散余弦变换

2-D离散余弦变换（DCT）

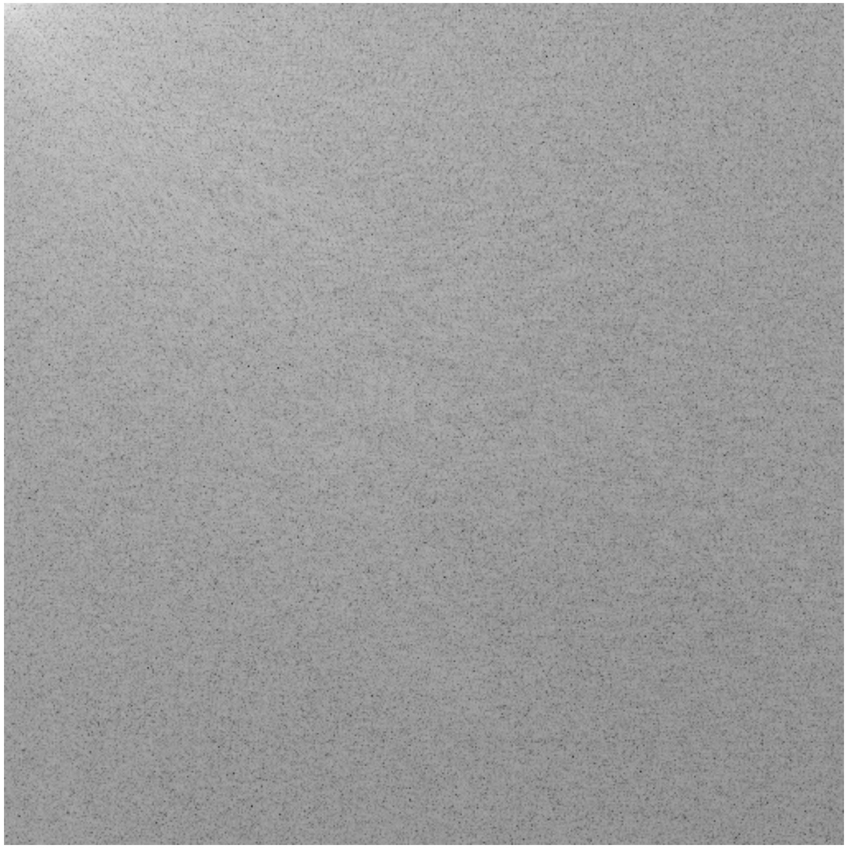
$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

+ 讨论可分离性和对称性

$$h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_2(y,v) \qquad h(x,y,u,v)=h_1(x,u)h_1(y,v)$$

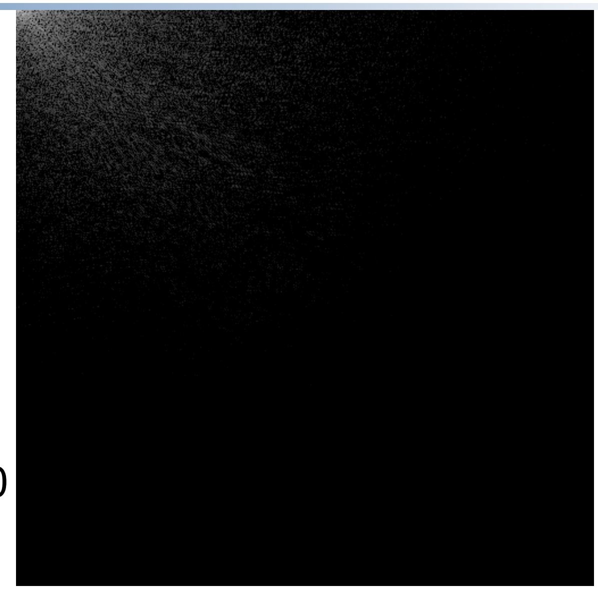
离散余弦变换例子



```
im = imread('lena.jpg');
gray = rgb2gray(im);
D = dct2(gray);
figure(2);imshow(log(abs(D)),[]);
```

离散余弦变换例子

变换域内信息压缩
D(abs(D) < 10) = 0



逆变换

```
D(abs(D)<10)=0;
I=idct2(D)/255;
figure(3);imshow(I)
```

频域图像增强

- 频域增强原理
- 低通滤波
- 高通滤波
- 带通和带阻滤波
- 同态滤波
- 频域技术与空域技术

频域增强原理

卷积理论是频域技术的基础

设函数$f(x, y)$与线性位不变算子$h(x, y)$的卷积结果是$g(x, y)$，即$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$，那么根据卷积定理在频域有：

$$G(u,v)= H(u,v)F(u,v)$$

其中$G(u, v)$，$H(u, v)$，$F(u, v)$分别是$g(x, y)$，$h(x, y)$，$f(x, y)$的傅里叶变换。用线性系统理论的话来说，$H(u, v)$是转移函数

频域增强原理

在具体增强应用中，$f(x, y)$是给定的（所以$F(u, v)$可利用变换得到），需要确定的是$H(u, v)$，这样具有所需特性的$g(x, y)$就可由算出$G(u, v)$而得到：

$$g(x, y) = T^{-1}\{E_H[T[f(x, y)]]\}$$

步骤：(1) 转换到频域

(2) 在频域增强

(3) 转换回空域

频域增强原理

卷积定理 $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

增 强 图 $g(x,y) = T^{-1}[H(u,v)F(u,v)]$

步 骤 (1) 计算图象的变换

(2) 在频域滤波

(3) 反变换回图象空间

频域滤波 低通，高通，带通/带阻，同态

低通滤波

低通滤波器

图象中的边缘和噪声都对应图象傅里叶变换中的高频部分，所以如要在频域中消弱其影响就要设法减弱这部分频率的分量；

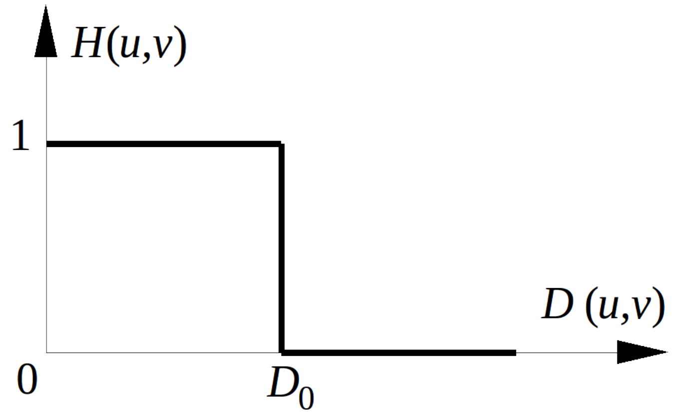
根据频域增强技术的原理，需要选择一个合适的$H(u, v)$以得到消弱$F(u, v)$高频分量的$G(u, v)$；

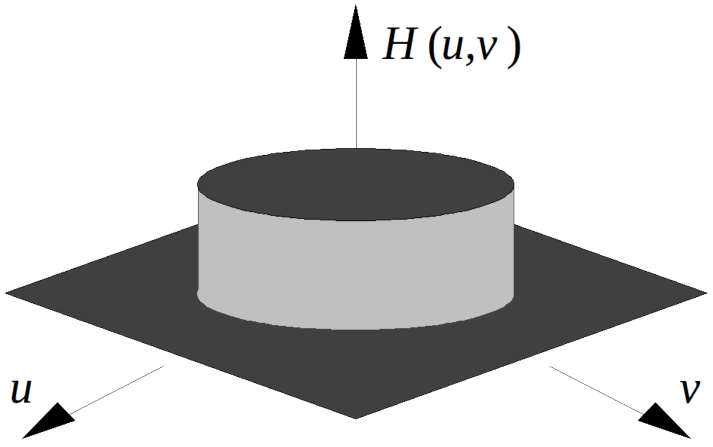
以下讨论对$F(u, v)$的实部和虚部影响完全相同的滤波转移函数。具有这种特性的滤波器称为零相移滤波器

低通滤波

1、理想低通滤波器

理想是指小于D_0的频率可以完全不受影响地通过滤波器，而大于D_0的频率则完全通不过





低通滤波

1、理想低通滤波器

$H(u, v)$：转移 / 滤波函数

$$H(u,v)=\begin{cases} 1 & if \quad D(u,v)\le D_0 \\ 0 & if \quad D(u,v)>D_0 \end{cases}$$

D_0：截断频率（非负整数）

$D(u, v)$是从点(u, v)到频率平面原点的距离

$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$

低通滤波

2、理想低通滤波器的模糊

理想低通滤波产生“振铃”现象

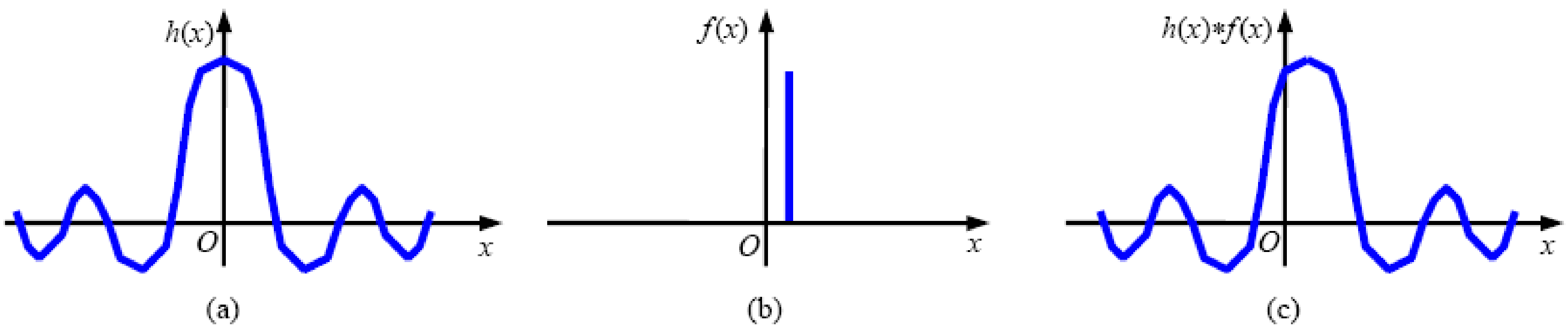


图 6.2.2　空间模糊示意图

低通滤波

2、理想低通滤波器的模糊

理想低通滤波所产生的“振铃”现象在2-D图象上表现为一系列同心圆环

圆环半径反比于截断频率

理想低通滤波产生模糊效应

B：能量百分比，R：圆周半径，$P(u,v)$：功率谱

$$B = 100 \times \left[\sum_{u \in R} \sum_{v \in R} P(u,v) \Big/ \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u,v) \right]$$

低通滤波

3、巴特沃斯低通滤波器

物理上可实现（理想低通滤波器在数学上定义得很清楚，在计算机模拟中也可实现，但在截断频率处直上直下的理想低通滤波器是不能用实际的电子器件实现的）

减少振铃效应，高低频率间的过渡比较光滑

阶为n

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

低通滤波

3、巴特沃斯低通滤波器

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D(u,v)/D_0\right]^{2n}}$$

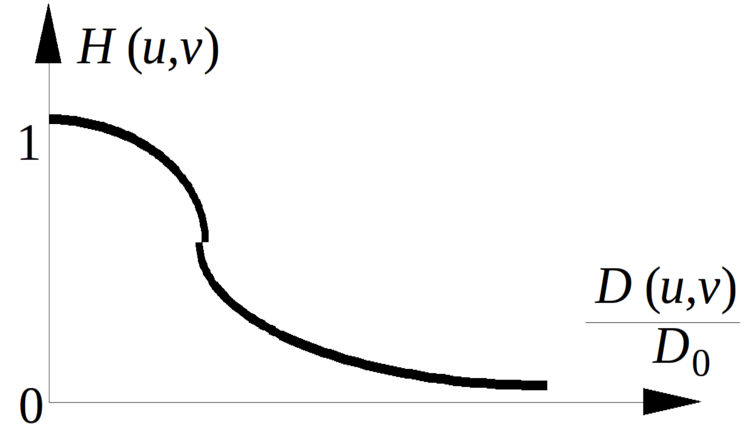
截断频率

使H最大值降到

某个百分比的频率

在$D(u,v)=D_0$时

$H(u,v)=1/2$



低通滤波

3、巴特沃斯低通滤波器

图象由于量化不足产生虚假轮廓时常可用低通滤波进行平滑以改进图象质量

效果比较（相同截断频率）：教材图4.3.6

低通滤波

4、其他低通滤波器

梯形

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & 如 \quad D(u,v)\le D' \\ \dfrac{D(u,v)-D_0}{D'-D_0} & 如 \quad D'<D(u,v)<D_0 \\ 0 & 如 \quad D(u,v)>D_0\end{cases}$$

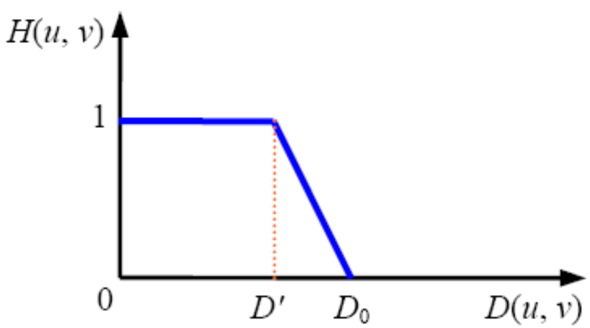


图 6.2.7　梯形低通滤波器转移函数的剖面示意图

指数

$$H(u,v)=\exp\{-[D(u,v)/D_0]^n\}$$

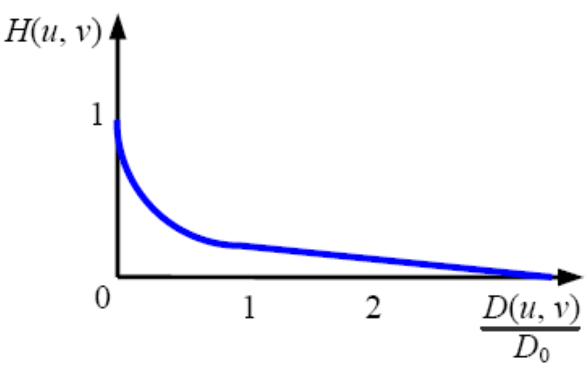


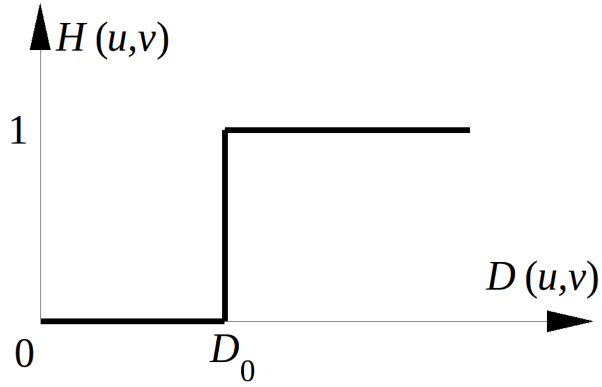
图 6.2.8　指数低通滤波器转移函数的剖面示意图

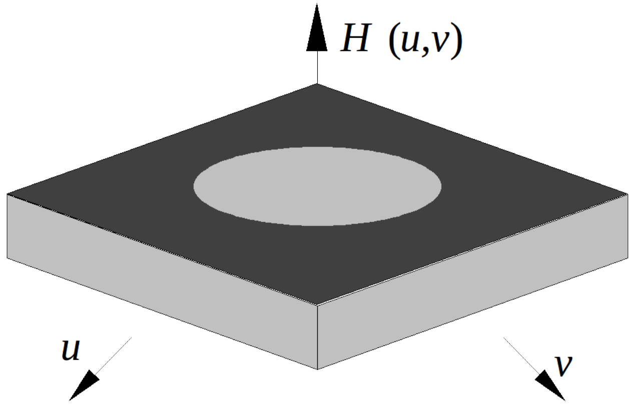
高通滤波

1、理想高通滤波器

形状与低通滤波器的形状正好相反

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & if \quad D(u,v)\le D_0\\ 1 & if \quad D(u,v)>D_0\end{cases}$$





高通滤波

2、巴特沃斯高通滤波器

形状与巴特沃斯低通滤波器的形状正好相反

截断频率

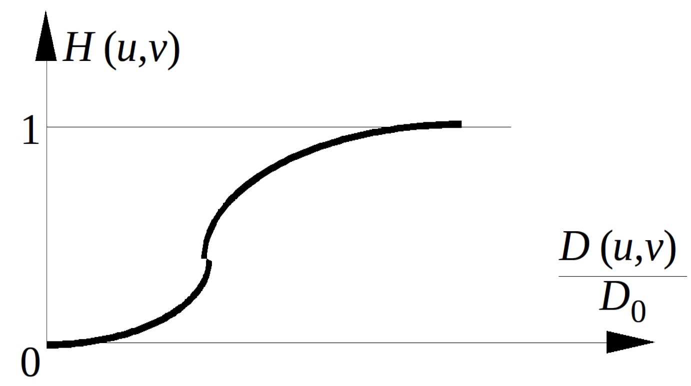
使H值上升到最大值

某个百分比的频率

$$H(u, v) = 1/2$$

$$H(u, v) = 1/2^{1/2}$$

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D_0/D(u,v)\right]^{2n}}$$



高通滤波

3、高频增强滤波器

傅里叶变换：$G(u, v) = H(u, v)F(u,v)$

高频增强转移函数：$H_e(u, v) = k \times H(u, v) + c$

高频增强输出图的傅里叶变换：

$$G_e(u, v) = k \times G(u, v) + c \times F(u, v)$$

反变换回去：

$$g_e(x, y) = k \times g(x, y) + c \times f(x, y)$$

高通滤波

4、高频提升滤波器

用原始图减去低通图得到高通滤波器的效果

把原始图乘以一个放大系数A再减去低通图就可构成高频提升（high-boost）滤波器

$$G_{\mathrm{HB}}(u,v)=A\times F(u,v)-F_{\mathrm{L}}(u,v)=(A-1)F(u,v)+F_{\mathrm{H}}(u,v)$$

高通滤波器：$A=1$

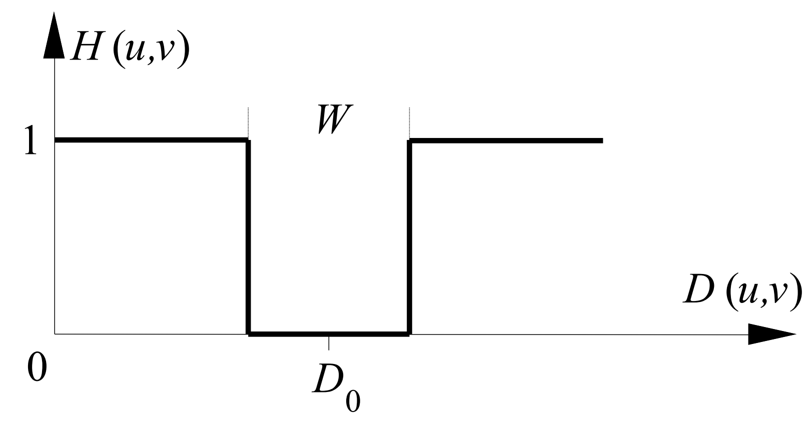
高频增强滤波器：？

带通和带阻滤波

带阻滤波器

阻止一定频率范围

（允许其它频率范围）



$$D(u,v)=\left[(u-u_0)^2+(v-v_0)^2\right]^{1/2}$$

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & \text{如} \quad D(u,v)\leqslant D_0\\ 1 & \text{如} \quad D(u,v)>D_0\end{cases}$$

带通和带阻滤波

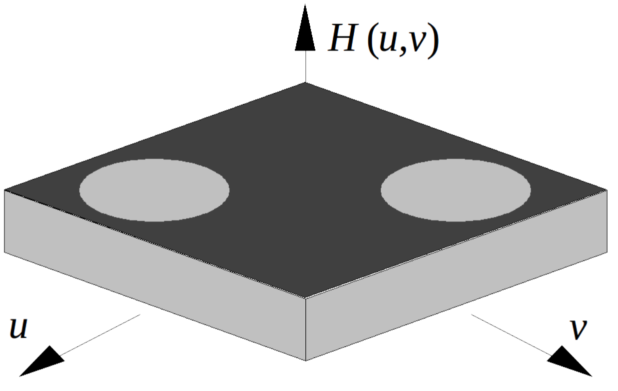
带阻滤波器

傅里叶变换的对称性 ———> 两两工作

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & if\ D_1(u,v)\le D_0 \quad or \quad D_2(u,v)\le D_0\\ 1 & else\end{cases}$$

$$D_1(u,v)=\left[(u-u_0)^2+(v-v_0)^2\right]^{1/2}$$

$$D_2(u,v)=\left[(u+u_0)^2+(v+v_0)^2\right]^{1/2}$$

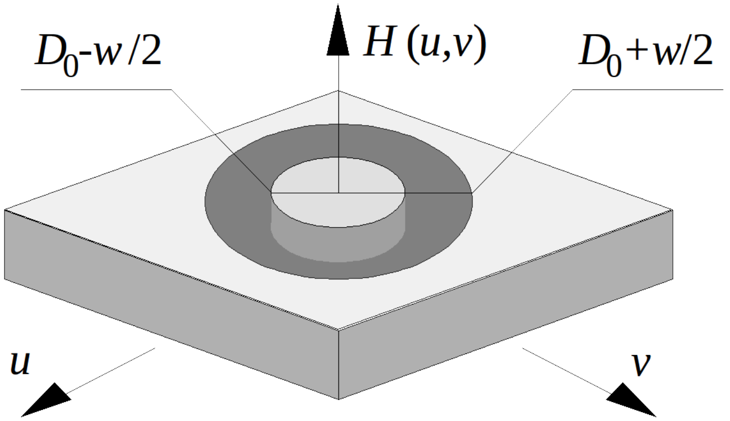


带通和带阻滤波

放射对称的带阻滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & D(u,v)<D_0-W/2\\ 0 & D_0-W/2\le D(u,v)\le D_0+W/2\\ 1 & D(u,v)>D_0+W/2\end{cases}$$

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\dfrac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-D_0^2}\right]^{2n}}$$



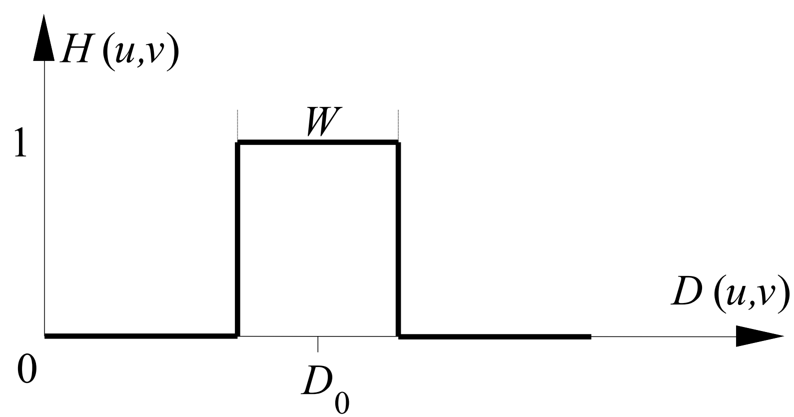
带通和带阻滤波

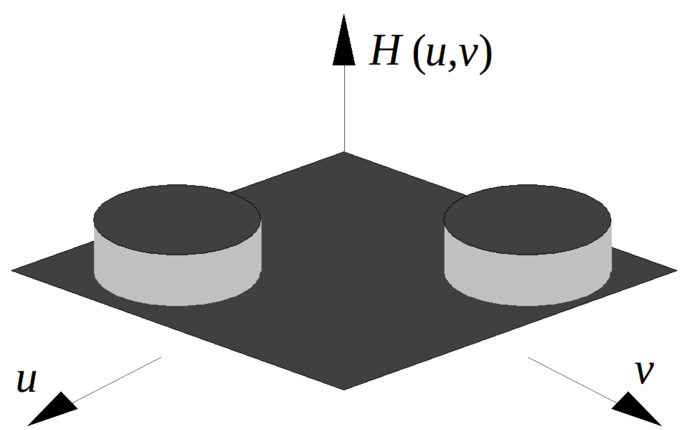
带通滤波器

与带阻滤波器互补

允许一定频率范围（阻止其它频率范围）

$$H_P(u,v) = -\left[H_R(u,v) - 1\right] = 1 - H_R(u,v)$$



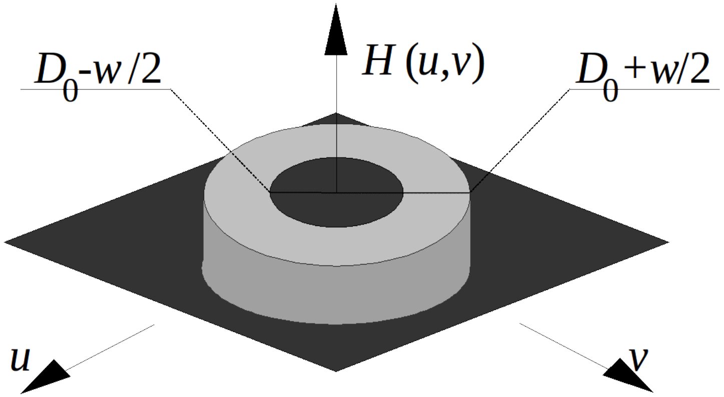


带通和带阻滤波

放射对称的带通滤波器

$$H(u,v)=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad D(u,v) < D_0 - W/2 \\ 1 & \text{if} \quad D_0 - W/2 \le D(u,v) \le D_0 + W/2 \\ 0 & \text{if} \quad D(u,v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$

$$H(u,v)=\frac{1}{\left[\frac{D^2(u,v)-D_0^2}{D(u,v)W}\right]^{2n}-1}$$



频域技术与空域技术

空间滤波器的工作原理可借助频域进行分析

- 空间平滑滤波器

　　消除或减弱图象中灰度值具有较大较快变化部分的影响，这些部分对应频域中的高频分量，所以可用频域低通滤波来实现

- 空间锐化滤波器

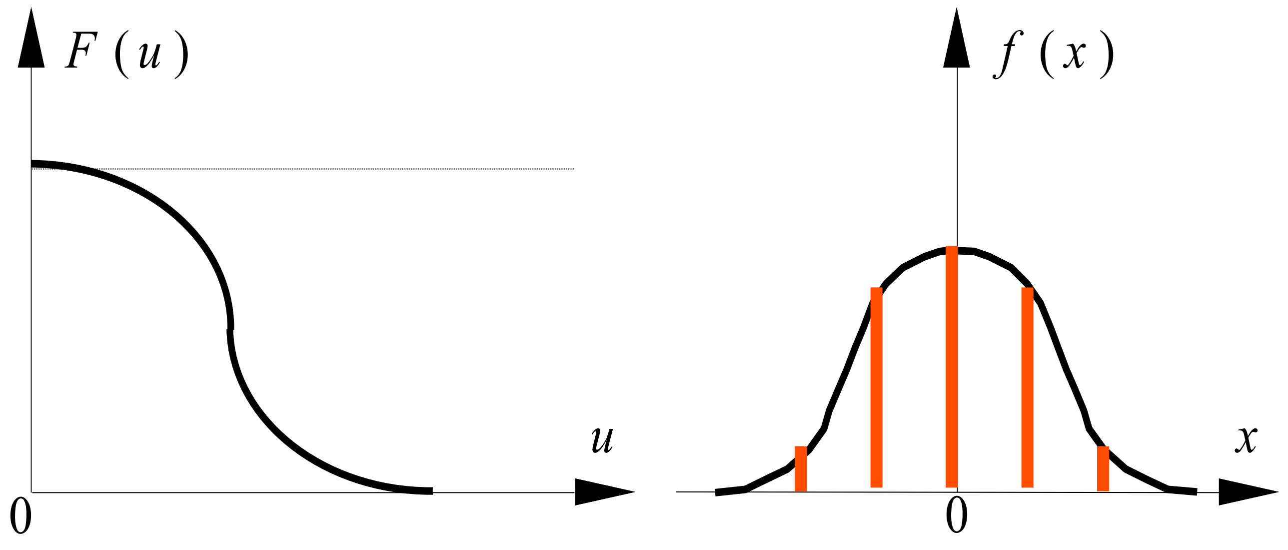
　　消除或减弱图象中灰度值缓慢变化的部分，这些部分对应频域中的低频分量，所以可用频域高通滤波来实现

频域技术与空域技术

空域中的平滑滤波器在频域里对应低通滤波器

频域越宽，空域越窄，平滑作用越弱

频域越窄，空域越宽，模糊作用越强

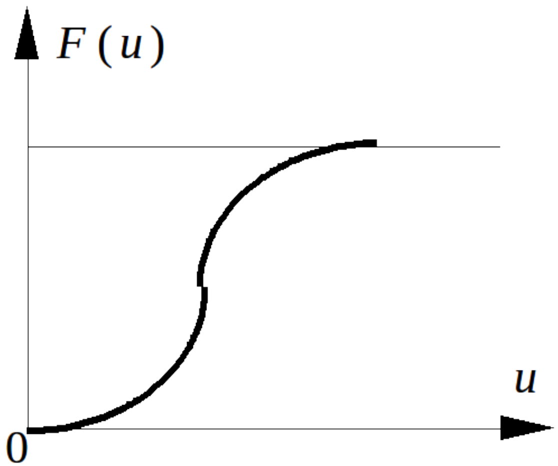


频域技术与空域技术

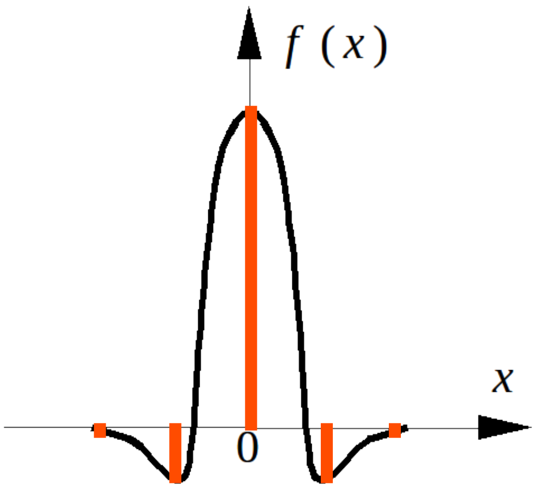
空域中的锐化滤波器在频域里对应高通滤波器

空域有正负值，一旦变为负数不再变为正数

频域/空域的宽窄有什么关系和含义？



(c)



(d)

作业和练习

1. 基于Matlab,尝试将图像进行fft变换；在变换域内进行低通、高通滤波等操作，并将滤波后信号用逆fft变换获得图像。

2. 课后题4-1