Ряд Тейлора — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряд назван в честь английского математика Брука Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки a, тогда ряд

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называется рядом Тейлора функции f в точке a.

В случае, если $a = 0$, этот ряд иногда называется **рядом Маклорена**.

Теорема:

- Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную в некоторой окрестности точки a, $U(a, \epsilon)$
- *Пусть* $x \in U(a, \epsilon)$
- *<I>Пусть* p *— произвольное положительное число,*

тогда: $\exists$ *точка* $\xi \in (x, a)$ *при* $x < a$ *или* $\xi \in (a, x)$ *при* $x > a$:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

Различные формы остаточного члена Править

В форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = n+1$$

В форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = 1$$

Ослабим предположения:

- *Пусть функция* $f(x)$ *имеет* $n-1$ *производную в некоторой окрестности точки* a
- *И* n *производную в самой точке* a, *тогда:*

$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n]$ *— остаточный член в асимптотической форме (форме Пеано)*

Разложение	Область сходимости
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$x \in R$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$	$x \in R$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$x \in R$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$	$x \in (-1,1]$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$	$x \in [-1,1]$, если $m \geq 0$; $x \in (-1,1]$, если $-1 < m < 0$; $x \in (-1,1)$, если $m \leq -1$
$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$	$x \in [-1,1]$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$	$x \in (-1,1)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x \in \mathbb{C}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, x \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1}, \text{для всех } |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} \text{ для всех } |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \text{ для всех } |x| < 1$$