| | |
|---|---|
| Неопределенность типа $\infty - \infty$ | Умножить на сопряженное |
| Неопределенность типа $\infty/\infty$ | Делим на наивысшую степень знаменателя |

$\mathrm{Lim}\,\frac{a}{b} = \frac{\lim a}{\lim b}$ Св-во непрерывности функции: $\lim f(x)^{g(x)} = \lim\ f(x)^{\lim\ g(x)}$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (или } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1\text{)}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$

## Следствия первого замечательного предела

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

## Следствия второго замечательного предела

**1)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$

**2)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0,\ a\neq 0;$

**3)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a},\ a>0,\ a\neq 0;$

**4)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th} x}{x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arsh} x}{x} = 1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arth} x}{x} = 1.$

**Ряд Тейлора** — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряд назван в честь английского математика Брука Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $a$, тогда ряд

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

называется рядом Тейлора функции $f$ в точке $a$.

В случае, если $a = 0$, этот ряд иногда называется **рядом Маклорена**.

Теорема:

- Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную в некоторой окрестности точки $a$, $U(a, \epsilon)$
- *Пусть $x \in U(a, \epsilon)$*
- *<I>Пусть $p$ — произвольное положительное число,*

*тогда:* $\exists$ *точка* $\xi \in (x, a)$ *при* $x < a$ *или* $\xi \in (a, x)$ *при* $x > a$*:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

## *Различные формы остаточного члена* Править

*В форме Лагранжа:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = n+1$$

*В форме Коши:*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)] \qquad p = 1$$

*Ослабим предположения:*

- *Пусть функция $f(x)$ имеет $n-1$ производную в некоторой окрестности точки $a$*
- *И $n$ производную в самой точке $a$, тогда:*

$R_{n+1}(x) = o[(x-a)^n]$ *— остаточный член в асимптотической форме (форме Пеано)*

| Разложение | Область сходимости |
| --- | --- |
| $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ | $x \in R$ |
| $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ | $x \in R$ |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ | $x \in R$ |
| $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots$ | $x \in (-1,1]$ |
| $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$ | $x \in [-1,1]$, если $m \geq 0$; $x \in (-1,1]$, если $-1 < m < 0$; $x \in (-1,1)$, если $m \leq -1$ |
| $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$ | $x \in [-1,1]$ |
| $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ | $x \in (-1,1)$ |

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{C}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1}, \text{для всех} |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} \text{ для всех} |x| < 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \text{ для всех} |x| < 1$$