

# Моделирование колесных роботов

Лекция 5. Картирование

Олег Шипитько

Москва, 2022



ИППИ РАН

NATIONAL RESEARCH  
UNIVERSITY



# СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ

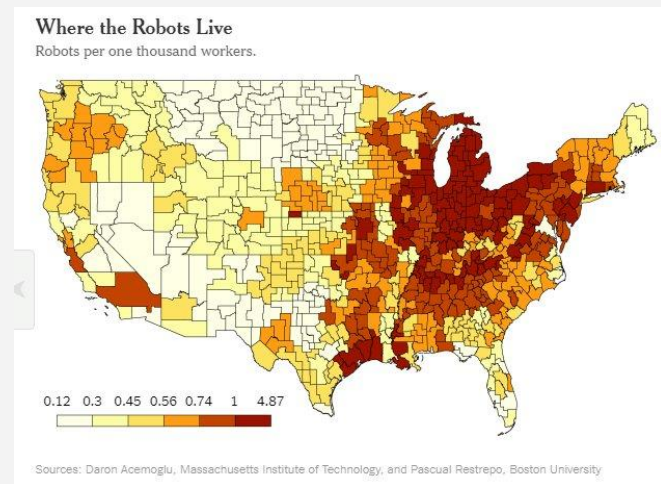
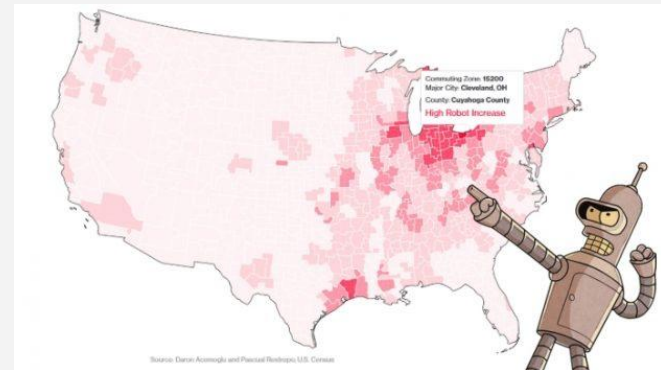
1. Определение
2. Какие бывают карты
3. Топологические карты
4. Карты признаков
5. Карты проходимости

# СХЕМА УПРАВЛЕНИЯ СОВРЕМЕННЫМ КОЛЕСНЫМ РОБОТОМ



# ЧТО ТАКОЕ КАРТИРОВАНИЕ?

**Картирование** (в робототехнике) обозначает процесс моделирования окружающей среды и представления ее в форме, удобной для дальнейшего использования при навигации (локализации, планировании и осуществлении передвижения).



# ПОЧЕМУ КАРТИРОВАТЬ СЛОЖНО?

- ❑ Ошибки измерений сенсоров порождают неполные и/или противоречивые данные
- ❑ Ошибки в определении собственного положения также приводят к аналогичным противоречиям
- ❑ Как интегрировать данные во времени?
- ❑ Как понять, что мы уже посещали какое-то место?

# ФОРМАЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КАРТИРОВАНИЯ

**Даны:**

$X_{1:t}$  — все состояния  
(положения) робота

$Z_{1:t}$  — измерения датчиков

**Определить:**

$map$  — карту



# КАКИЕ БЫВАЮТ КАРТЫ?

## Метрические

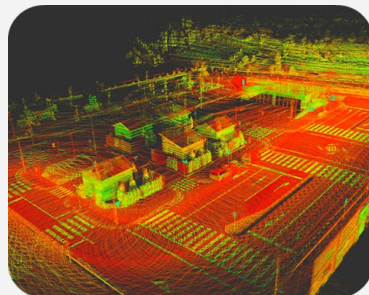
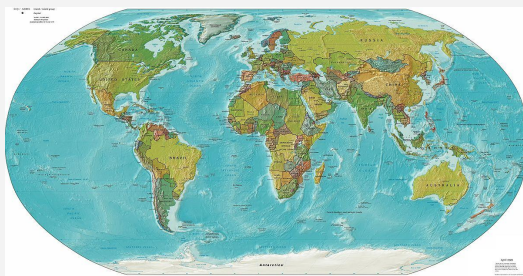
- ❑ Отражают мир в виде 2D или 3D пространства
- ❑ Объекты задаются своими координатами
- ❑ Расстояние между объектами измеряется в метрах

## Топологические

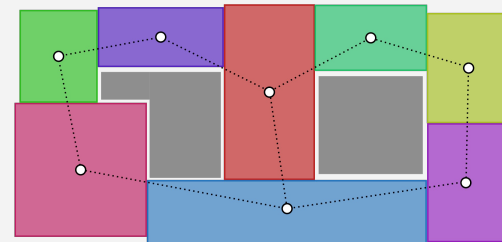
- ❑ Отражают мир в виде мест (локаций) и связей (переходов) между ними
- ❑ Расстояния между объектами могут храниться в связях

# КАКИЕ БЫВАЮТ КАРТЫ?

## Метрические



## Топологические





# КАКИЕ БЫВАЮТ КАРТЫ?

## Метрические

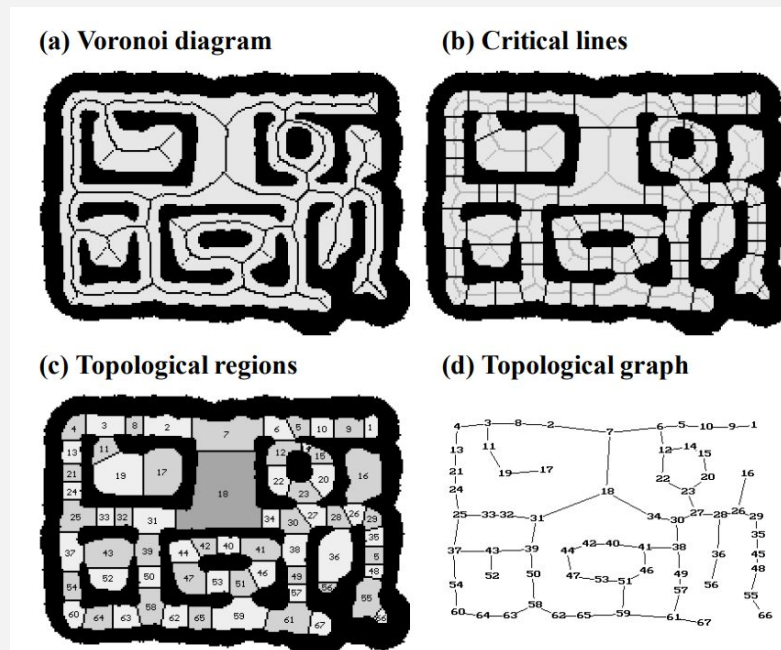
- ❑ Карты проходимости (occupancy grid maps)
- ❑ 3D карты, облака точек (point clouds)
- ❑ Карты признаков / особенностей / ориентиров (feature-based maps, landmark-based)
- ❑ (Иногда) Семантические карты

## Топологические

- ❑ Графы

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ КАРТЫ

- ❑ Представляет собой набор локаций (**узлов**) и переходов между ними (**ребер**).
- ❑ Локация — обычно пространство, в котором робот может надежно позиционироваться и/или точка принятия решения о направлении дальнейшего движения. Например, комната в случае здания.
- ❑ Локации связаны между собой переходами, содержащими некий закон управления роботом, по которому переход может быть осуществлен.



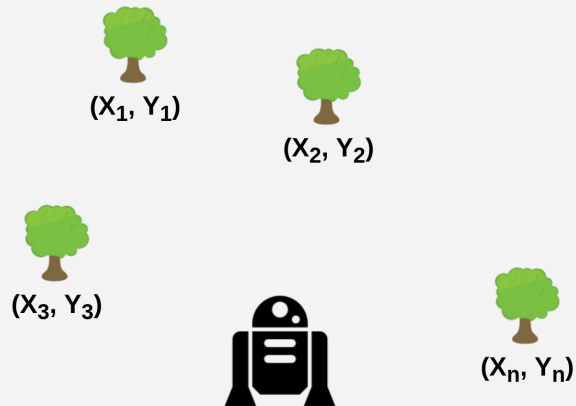
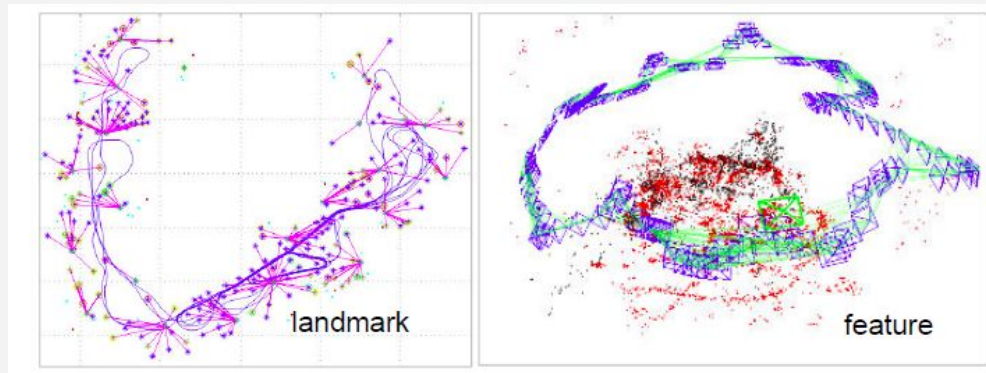
# ОСНОВНОЙ НЕДОСТАТОК

- ❑ Топологическое представление не существует (или труднодостижимо) для больших открытых пространств



# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

- ❑ Хранят признаки, заданные своими координатами в пространстве
- ❑ В качестве признаков и ориентиров может выступать что угодно:  
деревья, дорожные знаки, двери, особые точки...
- ❑ Очень компактное представление пространства



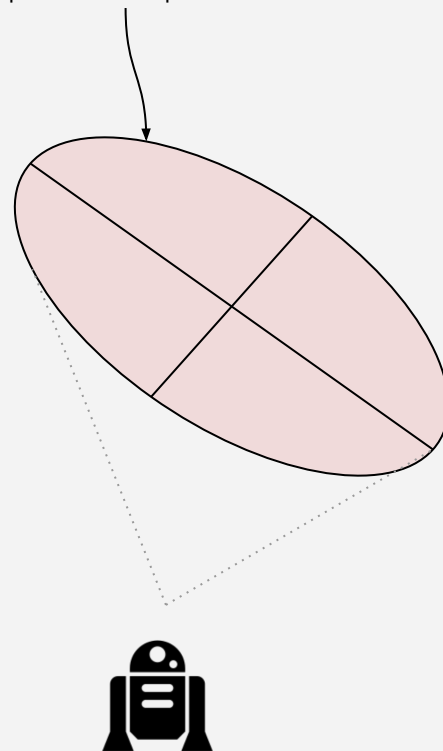
# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

- ❑ Чаще всего для построения карт признаков используется фильтр Калмана и его модификации
- ❑ Каждый признак кодируется своими пространственными координатами
- ❑ Оценка положения ориентира итеративно уточняется с каждой новой детекцией

# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

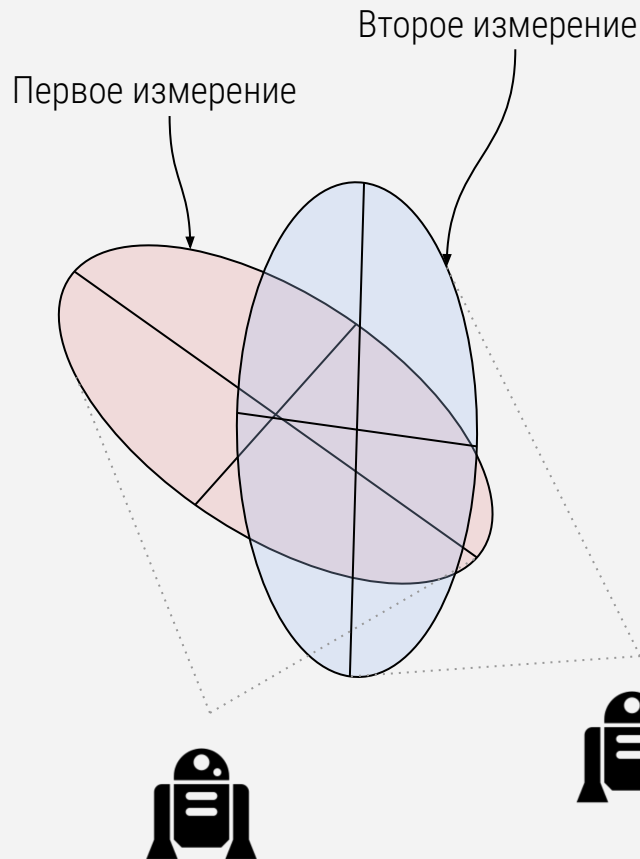
- ❑ Чаще всего для построения карт признаков используется фильтр Калмана и его модификации
- ❑ Каждый признак кодируется своими пространственными координатами
- ❑ Оценка положения ориентира итеративно уточняется с каждой новой детекцией

Первое измерение



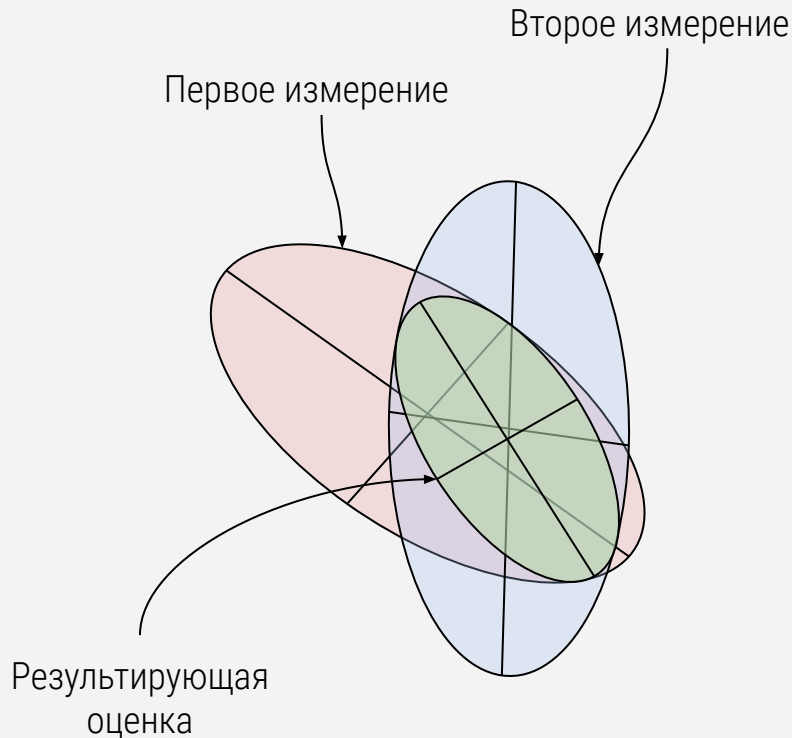
# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

- ❑ Чаще всего для построения карт признаков используется фильтр Калмана и его модификации
- ❑ Каждый признак кодируется своими пространственными координатами
- ❑ Оценка положения ориентира итеративно уточняется с каждой новой детекцией



# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

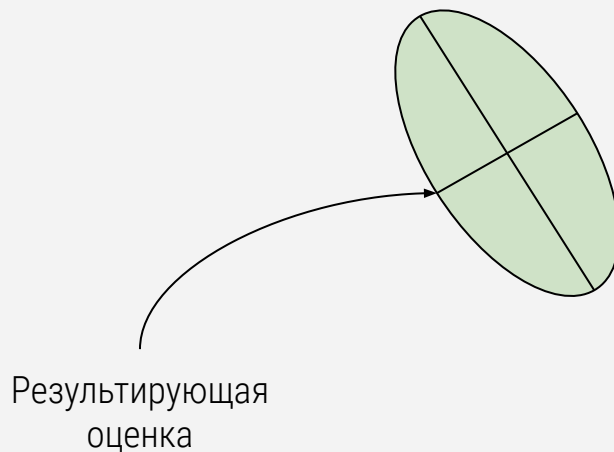
- ❑ Чаще всего для построения карт признаков используется фильтр Калмана и его модификации
- ❑ Каждый признак кодируется своими пространственными координатами
- ❑ Оценка положения ориентира итеративно уточняется с каждой новой детекцией





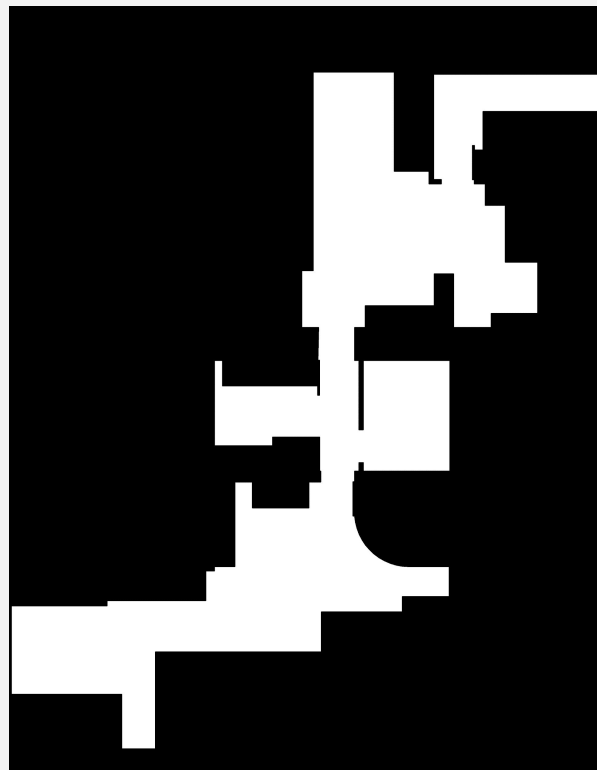
# КАРТЫ ПРИЗНАКОВ / ОРИЕНТИРОВ

- ❑ Чаще всего для построения карт признаков используется фильтр Калмана и его модификации
- ❑ Каждый признак кодируется своими пространственными координатами
- ❑ Оценка положения ориентира итеративно уточняется с каждой новой детекцией

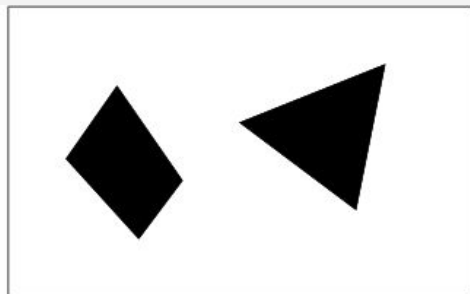


# КАРТЫ ПРОХОДИМОСТИ

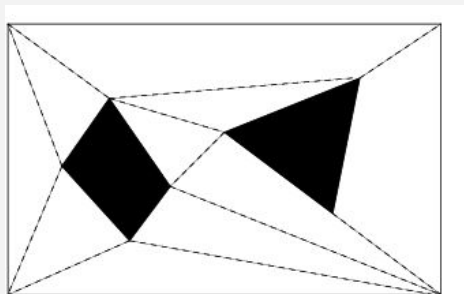
- ❑ Самый популярный формат карт
- ❑ Пространство разбивается на ячейки
- ❑ Оцениваются вероятность того, что ячейка свободна (проходима) или занята (непроходима)



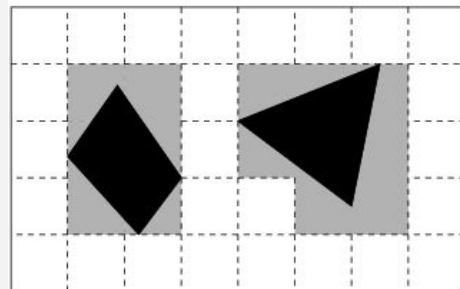
# ВИДЫ РАЗБИЕНИЙ ЯЧЕЕК



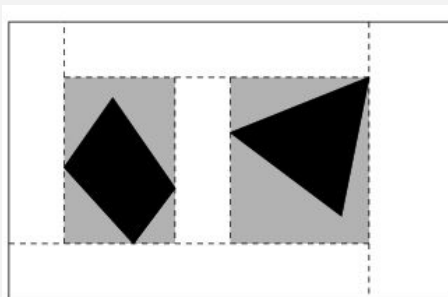
Metric map of the environment



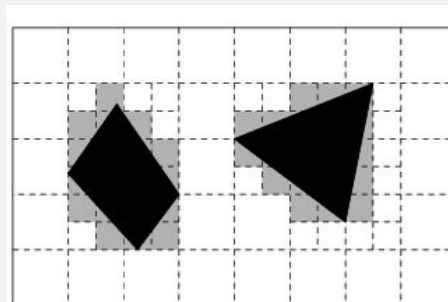
Exact cell decomposition



Regular cell decomposition



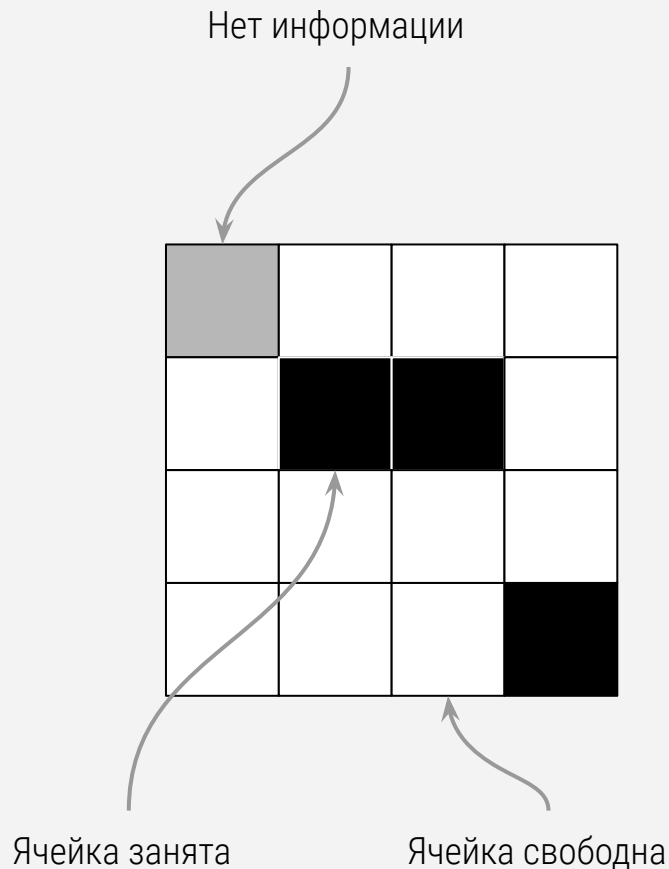
Rectangular cell decomposition



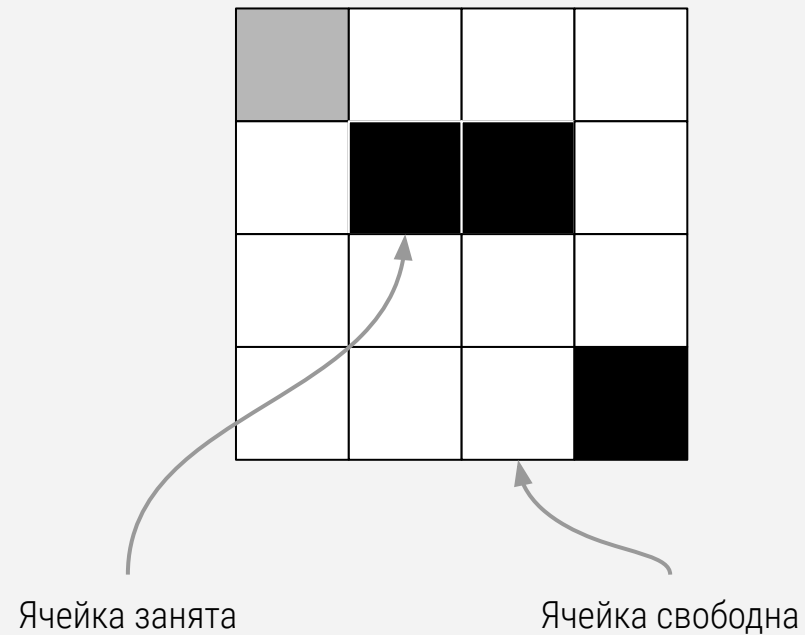
Quadtree decomposition

# КАРТЫ ПРОХОДИМОСТИ

- ❑ Каждая ячейка — бинарная случайная величина
  - ❑  $p(m_{x,y}) = 1$  — ячейка занята
  - ❑  $p(m_{x,y}) = 0$  — ячейка свободна
  - ❑  $p(m_{x,y}) = 0.5$  — мы ничего не знаем про состояние ячейки

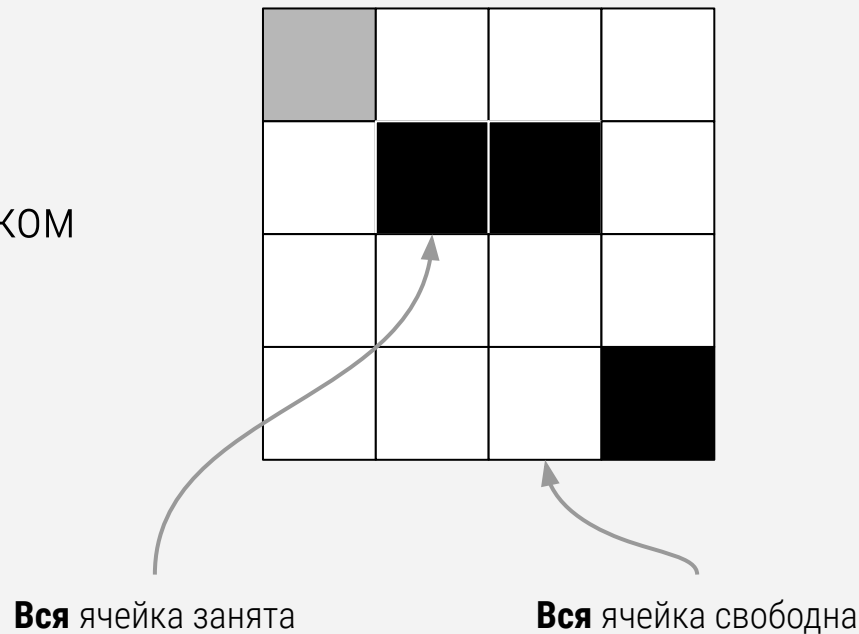


# ДОПУЩЕНИЯ



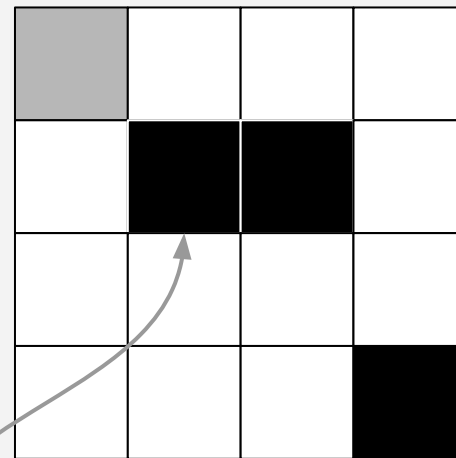
# ДОПУЩЕНИЯ

1. Область описываемая ячейкой целиком занята или свободна



# ДОПУЩЕНИЯ

1. Область описываемая ячейкой целиком занята или свободна
2. Мир статичен

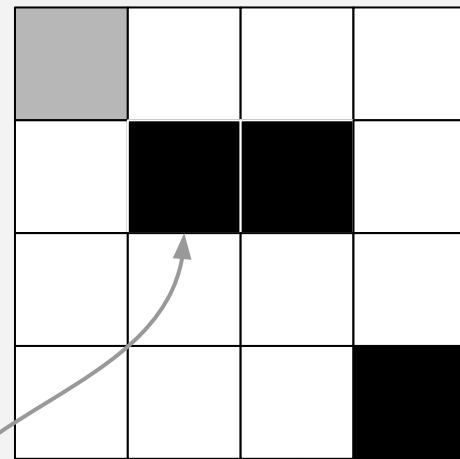


**Вся** ячейка **всегда** занята

**Вся** ячейка **всегда**  
свободна

# ДОПУЩЕНИЯ

1. Область описываемая ячейкой целиком занята или свободна
2. Мир статичен
3. Значения ячеек независимы



**Вся ячейка всегда занята**  
(вне зависимости от  
соседних)

**Вся ячейка всегда  
свободна (вне  
зависимости от соседних)**



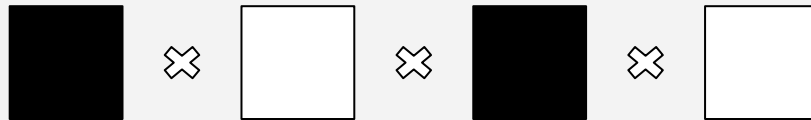
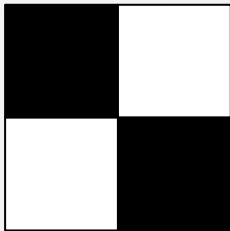
## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Вероятность карты — задается произведением (независимых) вероятностей всех ее ячеек.

$$p(\text{map}) = \prod_{x,y} p(m_{x,y})$$

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

$$p(\text{map}) = \prod_{x,y} p(m_{x,y})$$



# ВЕРОЯТНОСТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КАРТИРОВАНИЯ

Имея вектор всех последовательных измерений сенсоров  $\mathbf{z}_{1:t} = \mathbf{z}_0 \dots \mathbf{z}_t$ , и поз робота (сенсора)  $\mathbf{x}_{1:t} = \mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_t$ , необходимо найти наиболее вероятную карту.

$$p(\text{map} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \prod_{x,y} p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})$$

# АЛГОРИТМ КАРТИРОВАНИЯ HIT-MISS (COUNTING MODEL)

1. Будем считать два числа:
  - а. Сколько раз мы наблюдали ячейку —  $C_{x,y}$
  - б. Будем увеличивать или уменьшать  $O_{x,y}$  на 1 каждый раз, когда наблюдаем в ячейке препятствие или свободную зону соответственно
2. Рассчитаем вероятность занятости ячейки как:

$$p(m_{x,y}) = \frac{O_{x,y} + C_{x,y}}{2C_{x,y}}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) =$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$\begin{aligned} & p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \\ \text{Теорема Байеса} \quad & = \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t}) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \end{aligned}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$\begin{aligned} & p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t}) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ \text{Марковское свойство} \quad &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \end{aligned}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$\begin{aligned} & p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t}) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ \text{Теорема Байеса} \quad &= \frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(m_{x,y} | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \end{aligned}$$



# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$\begin{aligned} p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) &= \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t}) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ &= \frac{p(\mathbf{z}_t | m_{x,y}, \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ &= \frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(m_{x,y} | \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} = \\ &= \frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(m_{x,y}) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})} \end{aligned}$$

Свойство  
независимости

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

$$p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) =$$

Аналогично, для противоположного события

$$= \frac{p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\neg m_{x,y}) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

Вычислим отношение вероятностей:

$$\frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{\frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(m_{x,y}) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}}{\frac{p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t) p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\neg m_{x,y}) p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

Вычислим отношение вероятностей:

$$\frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{\frac{p(m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) \cancel{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)} p(m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(m_{x,y}) \cancel{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}}}{\frac{p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) \cancel{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{x}_t)} p(\neg m_{x,y} | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{p(\neg m_{x,y}) \cancel{p(\mathbf{z}_t | \mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t})}}}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

Вычислим отношение вероятностей:

$$\frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)} \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})} \frac{1 - p(m_{x,y})}{p(m_{x,y})}$$

# БАЙЕСОВСКАЯ ОЦЕНКА

Вычислим отношение вероятностей:

$$\frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)} \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})} \frac{1 - p(m_{x,y})}{p(m_{x,y})}$$

Отношение вероятностей  
занятости и свободности  
ячейки при условии новых  
измерений

Рекурсивный член (то же  
самое, для предыдущего  
измерения)

Отношение априорных  
вероятностей (например  
 $p(m_{x,y})=0.5$ , если мы ничего  
не знали о карте в начале)

# ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ШАНСЫ

Будем называть шансом (odds):

$$\text{odds}(X) = \frac{p(X)}{1 - p(X)}$$

Будем называть логарифмическим шансом (logarithmic odds):

$$\text{logodds}(X) = \log \frac{p(X)}{1 - p(X)}$$

# КАРТИРОВАНИЕ С ОБРАТНОЙ МОДЕЛЬЮ В ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Посчитаем логарифмические шансы от:

$$\frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)} \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})} \frac{1 - p(m_{x,y})}{p(m_{x,y})}$$

И получим:

$$\text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) + \text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1}) - \text{logodds}(m_{x,y})$$



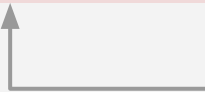
# КАРТИРОВАНИЕ С ОБРАТНОЙ МОДЕЛЬЮ В ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Посчитаем логарифмические шансы от:

$$\frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})}{p(\neg m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t})} = \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t)} \frac{p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})}{1 - p(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1})} \frac{1 - p(m_{x,y})}{p(m_{x,y})}$$

И получим:

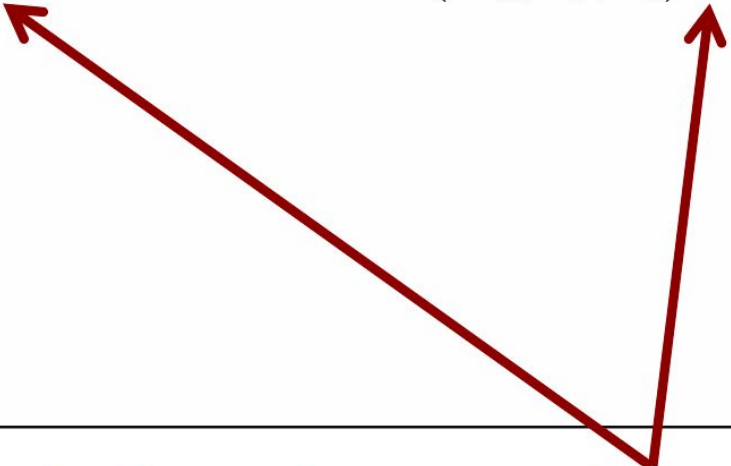
$$\text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t}, \mathbf{x}_{1:t}) = \text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_t, \mathbf{x}_t) + \text{logodds}(m_{x,y}|\mathbf{z}_{1:t-1}, \mathbf{x}_{1:t-1}) - \text{logodds}(m_{x,y})$$



**Обратная модель измерения сенсора**

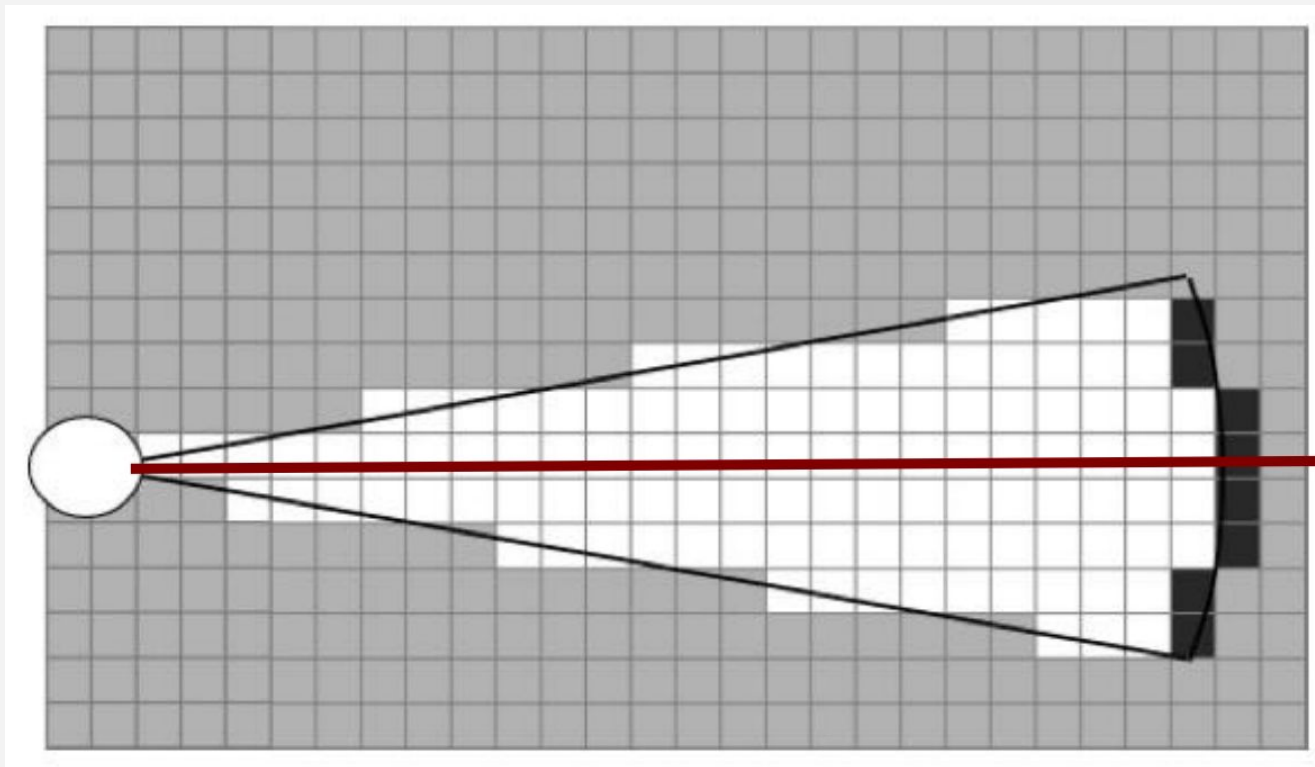
**occupancy\_grid\_mapping( $\{l_{t-1,i}\}, x_t, z_t$ ):**

```
1:   for all cells  $m_i$  do
2:       if  $m_i$  in perceptual field of  $z_t$  then
3:            $l_{t,i} = l_{t-1,i} + \text{inv\_sensor\_model}(m_i, x_t, z_t) - l_0$ 
4:       else
5:            $l_{t,i} = l_{t-1,i}$ 
6:       endif
7:   endfor
8:   return  $\{l_{t,i}\}$ 
```

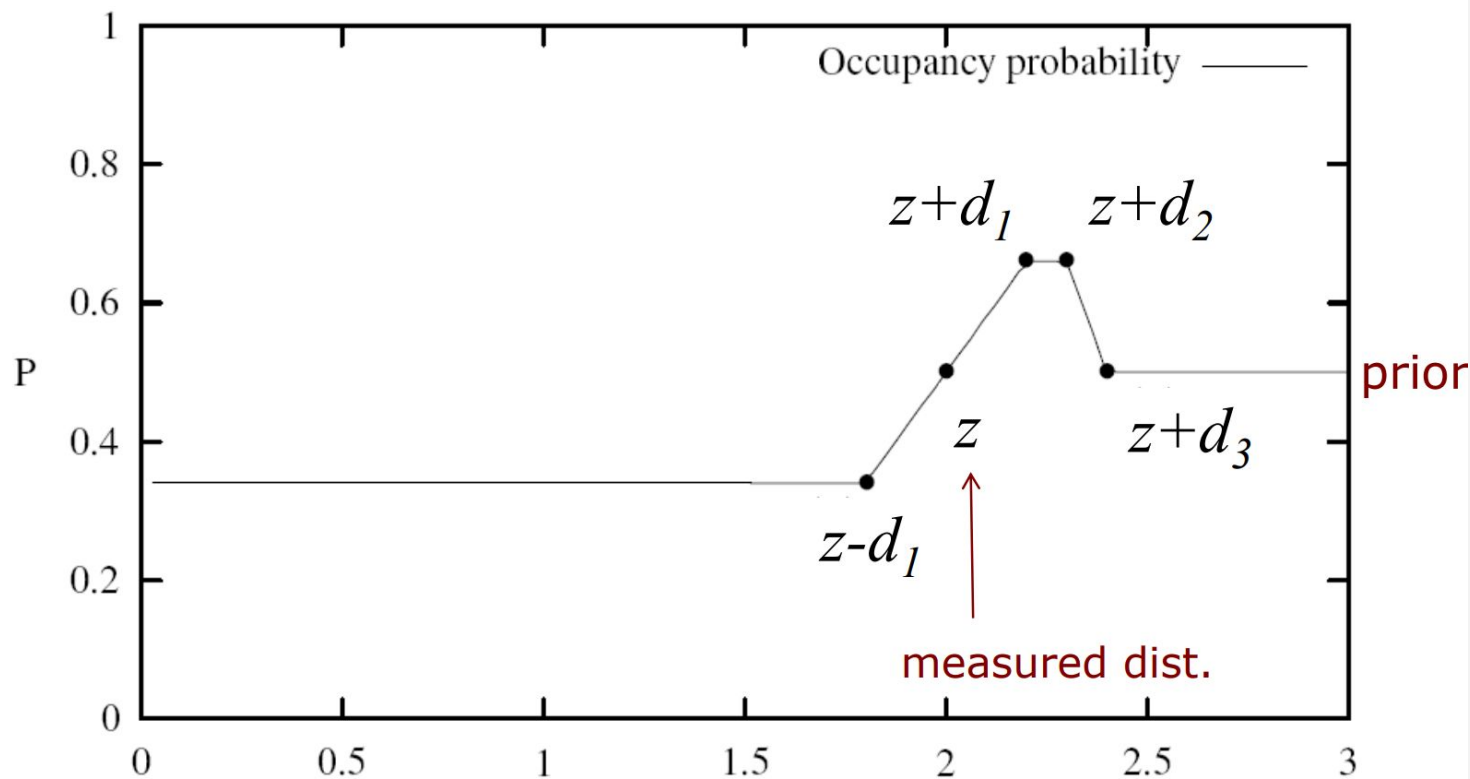


**highly efficient, we only have to compute sums**

# ПРИМЕР ПРОСТОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ СОНАРА

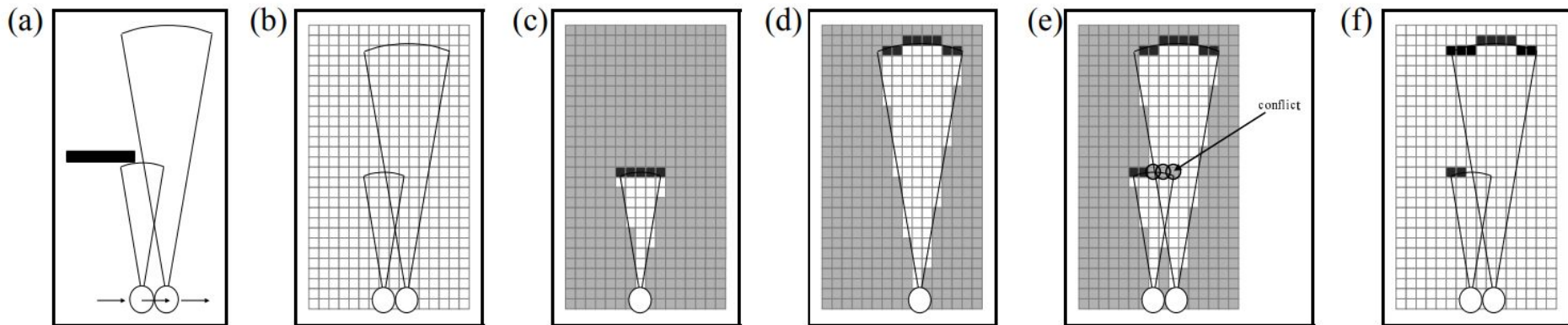


# ПРИМЕР ПРОСТОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРЕНИЯ СОНАРА



# В ЧЕМ НЕДОСТАТОК КАРТИРОВАНИЯ С ОБРАТНОЙ МОДЕЛЬЮ

- ❑ Обратная модель рассматривает клетки карты как **независимые** случайные величины
- ❑ Такой подход не способен объяснить противоречащие данные



# КАРТИРОВАНИЕ С ПРЯМОЙ МОДЕЛЬЮ

- ❑ В отличие от картирования с обратной моделью будем рассматривать поиск **всей карты** как оптимизационную задачу в пространстве всех возможных карт
- ❑ Будем пытаться найти такую карту *map*, которая максимизирует вероятность всех полученных измерений:

$$\hat{map} = \arg \max_{map} p(z|x, map)$$

## ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Probabilistic Robotics. Глава 9
2. Topological Mapping. Benjamin Kuipers
3. Robot Mapping. Gian Diego Tipaldi, Wolfram Burgard
4. Learning Occupancy Grids with Forward Models. Sebastian Thrun

# ИНФОРМАЦИЯ О ПРЕЗЕНТАЦИИ

Эта презентация была подготовлена Олегом Шипитько в рамках курса “Введение в мобильную робототехнику и Robot Operating System (ROS)” факультета компьютерных наук Высшей Школы Экономики (ВШЭ). Автор выражает благодарность, авторам, чьи материалы были использованы в презентации. В случае, если вы обнаружили в презентации свои материалы, свяжитесь со мной, для включения в список авторов заимствованных материалов.

This presentation was prepared by Oleg Shipitko as part of the “Introduction to Mobile Robotics and Robot Operating System (ROS)” course at the Faculty of Computer Science of Higher School of Economics (HSE). The author is grateful to the authors whose materials were used in the presentation. If you find your materials in a presentation, contact me to be included in the list of contributing authors.