Практическое занятие 7.
Функции случайных величин. Числовые характеристики функции случайных величин

<table>
<tr><th colspan="2">Функция одной СВ $\eta=\varphi(\xi)$</th></tr>
<tr><td>ДСВ: Ряд распределения η</td><td>Случайная величина η принимает значения $y_k=\varphi(x_k)$ с соответствующей вероятностью для x_k.

x_i	x_1	$\cdots$	x_n		y_i	$\varphi(x_1)$	$\cdots$	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	$\cdots$	p_n		p_i	p_1	$\cdots$	p_n

Если значения получаются одинаковые, соответствующие вероятности суммируют. Ряд записывают в порядке возрастания.</td></tr>
<tr><td>НСВ: Плотность распределения η</td><td>$g(y)=\sum_{k=1}^{n} f(\psi_k(y))\cdot\lvert\psi_k'(y)\rvert$
или
$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(y-\varphi(x))dx$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Числовые характеристики</th></tr>
<tr><td>Общий случай:
$\eta=\varphi(\xi)$</td><td>НСВ:
$m_\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx \qquad D\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(x)-m_\eta\right]^2 f(x)dx$
Для ДСВ η находят числовые характеристики из ряда распределения η</td></tr>
<tr><td>Частный случай:
$\eta=a\xi+b$</td><td>$m_\eta=am_\xi+b.$
$D_\eta=a^2D_\xi.$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Числовые характеристики функции двух СВ $\eta=\varphi(\xi_1,\xi_2)$</th></tr>
<tr><td>Общий случай:
$\eta=\varphi(\xi_1,\xi_2)$</td><td>НСВ:
$M\eta=\int\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,x_2)f(x_1,x_2)dxdy$
$D_\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi(x_1,x_2)-m_\eta\right)^2\cdot f_{\xi_1\xi_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2.$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Частный случай
(линейная комбинация):
$\eta=a\xi_1+b\xi_2$</td><td>$M(\eta)=aM(\xi_1)+bM(\xi_2).$</td></tr>
<tr><td>$D(\eta)=a^2D(\xi_1)+2abK_{\xi_1\xi_2}+b^2D(\xi_2).$
Если ξ_1 и ξ_2 - независимые случайные величины,
$D(\eta)=a^2D(\xi_1)+b^2D(\xi_2).$</td></tr>
<tr><td>Частный случай (произведение)
$\eta=\xi_1\cdot\xi_2$</td><td>$M(\xi_1\xi_2)=M(\xi_1)M(\xi_2)+K_{\xi_1\xi_2}.$
Если ξ_1 и ξ_2 - независимые случайные величины:
$M(\xi_1\xi_2)=M(\xi_1)M(\xi_2),$
$D(\xi_1\cdot\xi_2)=D(\xi_1)\cdot D(\xi_2)+m_{\xi_1}^2D(\xi_2)+m_{\xi_2}^2D(\xi_1).$</td></tr>
</table>

Примеры

Пример 7.1. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $\eta=\dfrac{1}{\xi}$.

Решение. *1 способ.* $g(y)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\psi_k(y))\cdot|\psi_k'(y)|$

Решение задачи располагаем в виде двух столбцов; слева будем писать обозначения функций, принятые в общем случае; справа – конкретные функции, соответствующие данному примеру:

$f(x)$	$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$
$y=\varphi(x)$	$y=1/x$
$x=\psi(y)$	$x=1/y$
$x'=\psi'(y)$	$x'=-\dfrac{1}{y^2}$
$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$
$g(y)$	$g(y)=\dfrac{1}{\pi(1+1/y^2)}\cdot\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$.

2 способ.

$$g(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)}\delta\left(y-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(1+x^2)}\delta\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\delta\left(y-\frac{1}{x}\right)dx\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\dfrac{1}{x},\ \ x=\dfrac{1}{u},\ \ \dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+1/u^2}=\dfrac{u^2}{1+u^2},\\ dx=-\dfrac{1}{u^2}du,\ \ x=0\Rightarrow u=\infty,\ \ x=\pm\infty\Rightarrow u=0\end{array}\right|=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{-\infty}\frac{du}{1+u^2}\delta(y-u)-\int_{+\infty}^{0}\frac{du}{1+u^2}\delta(y-u)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\frac{\delta(y-u)du}{1+u^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{\delta(y-u)du}{1+u^2}\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(y-u)}{1+u^2}du=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 7.2. Бросаются 3 монеты. Пусть $\xi_i=1$, если i – ая монета выпала орлом вверх и $\xi_i=0$ в противном случае, $i=1,2,3$. Построить ряд распределения случайной величины $\eta=\xi_1+\xi_2-\xi_3$.

Решение.

1. Определяем пространство элементарных исходов.

Элементарными исходами рассматриваемого случайного эксперимента являются упорядоченные наборы чисел (n_1,n_2,n_3), где n_i либо нуль, либо единица $i=1,2,3$. Всего элементарных исходов $2^3=8$. Следовательно, вероятность элементарного исхода равна $1/8$.

2. Определяем множество возможных значений η.

Случайная величина η на элементарном исходе (n_1,n_2,n_3) принимает значение $\eta=n_1+n_2-n_3$.

3. Составляем таблицу элементарных исходов и соответствующих им значений η.

n_1	0	1	0	0	1	1	0	1
n_2	0	0	1	0	1	0	1	1
n_3	0	0	0	1	0	1	1	1
$\eta=n_1+n_2-n_3$	0	1	1	–1	2	0	0	1

4. Определяем вероятности значений η и строим ее ряд распределения. Имеем

η	-1	0	1	2
p	1/8	3/8	3/8	1/8

Пример 7.3.
Задан закон распределения ДСВ:

X	-1	1	2
p	0.1	0.3	0.6

Найти $M\eta$, если а) $\varphi(x) = x^2$ б) $\varphi(x) = 2x + 10$.

Решение а) СВ принимает η значения $y_1 = \varphi(x_1) = (-1)^2 = 1$, $y_2 = \varphi(x_2) = 1^2 = 1$, $y_3 = \varphi(x_3) = 2^2 = 4$
$M\eta = 1\cdot(0{,}1 + 0{,}3) + 4\cdot 0{,}6 = 2{,}8$

б) 1 способ: а) СВ принимает η значения $y_1 = \varphi(x_1) = 2\cdot(-1) + 10 = 8$, $y_2 = \varphi(x_2) = 2\cdot 1 + 10 = 12$, $y_3 = \varphi(x_3) = 2\cdot 2 + 10 = 14$

$M\eta = 8\cdot 0{,}1 + 12\cdot 0{,}3 + 14\cdot 0{,}6 = 0{,}8 + 3{,}6 + 8{,}4 = 12{,}8$

2 способ. Найдем математическое ожидание ξ:
$M(\xi) = -0.1 + 0.3 + 1.2 = 1.4$. Воспользуемся формулой
$M(\eta) = M(ax + b) = am_\xi + b$ и тогда $M(\eta) = M(2x + 10) = 2m_\xi + 10 = 2{,}8 + 10 = 12{,}8$.

Пример 7.4. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = \cos\xi$, не находя плотность распределения.

Решение

Используем формулу $M\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$, где $f(x) = \frac{1}{\pi}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi(x) = \cos x$. Тогда

$$M\eta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Пример 7.5. . Непрерывная случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $x \in [1;\ 3]$.
Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 3\xi + 1$

Решение.

Для равномерно распределенной случайной величины $m_\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

$$D_\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Тогда для $\eta = 3\xi + 1$ имеем $m_\eta = 3m_\xi + 1$ =7

$D_\eta = 9D_\xi = 3$

Пример 7.6.. Непрерывная случайная величина ξ распределена по нормальному закону с $m_\xi = 1$ и $D_\xi = 2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2\xi + 1$.

Решение

Тогда для $\eta = 2\xi + 1$ имеем $m_\eta = 2m_\xi + 1$ =3. $D_\eta = 4D_\xi = 8$

Пример 7.7.. Для независимых случайных величины ξ_1 и ξ_2 с известными числовыми характеристиками $M_{\xi_1} = -2$, $M_{\xi_2} = 3$, $D_{\xi_1} = 3$, $D_{\xi_2} = 2$ найдите математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины $\eta = -\xi_1 + 2\xi_2$.

Решение

Так как ξ_1 и ξ_2 - независимы, то $M(\eta) = -M(\xi_1) + 2M(\xi_2)$. $D(\eta) = D(\xi_1) + 4D(\xi_2) = 3 + 8 = 11$

$\sigma(\eta) = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{11}$

Пример 7.8.

Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1 - \xi_2$ и $M(\eta)$, если известно распределение случайного дискретного вектора (ξ_1, ξ_2)

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	0,2	0	0,1
$\xi_2 = -1$	0	0,1	0,6

.

$\xi_1 = 2, \xi_2 = -2, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 4, p = 0.2$

$\xi_1 = 2, \xi_2 = 0, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 2, p = 0$

$\xi_1 = 3, \xi_2 = -2, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 5, p = 0$

$\xi_1 = 3, \xi_2 = -1, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 4, p = 0.1$

$\xi_1 = 4, \xi_2 = -2, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 6, p = 0.1$

$\xi_1 = 4, \xi_2 = -1, \eta = \xi_1 - \xi_2 = 5, p = 0.6$

η	4	5	6
p	0.3	0.6	0.1

Пример 7.9. Независимые случайные величины X и Y имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Найти коэффициент корреляции случайных величин

$$K(2X + Y, 2X - Y) = 4D_x + 2K_{xy} - D_y - 2K_{xy} = 4D_x - D_y = 3$$

$D(2X + Y) = 4D_x + 4K_{xy} + D_y = 5 \quad \sigma_u = \sqrt{5}$

$D(2X - Y) = 4D_x - 4K_{xy} + D_y = 5 \quad \sigma_v = \sqrt{5}$

$r_{uv} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$=0.6

Задачи для самостоятельного решения

7.1.
Задан закон распределения ДСВ:

X	-2	0	2
p	0.2	0.3	0.5

Найти $M\eta$, $D\eta$, если а) $\varphi(x) = x^2$ б) $\varphi(x) = 2x - 5$.

7.2.
Задан закон распределения ДСВ:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,25	0,1	0,05

Найти закон распределения случайных величин: а) $\eta = 2x^2 - 3$ б) $\eta = \sin\frac{\pi}{3}x$ в) $\eta = 3x - 3$

Найти числовые характеристики.

7.3.
НСВ распределена равномерно при $x \in (1;5)$. Найти числовые характеристики СВ, если : а) $\varphi(x) = x^2$ б) $\varphi(x) = 2x - 5$.

7.4. Случайная величина X равномерно распределена от 0 до 1. Определить математическое ожидание и дисперсию величины $Y = X - 0,2$.

7.5. Случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вектор математических ожиданий $\overline{m}(2;3)$ и корреляционную матрицу $K = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\eta_1 = 2\xi_1 + \xi_2, \ \eta_2 = \xi_1 - 3\xi_2.$$

Вычислить вектор математических ожиданий $m_\eta = (M\eta_1, M\eta_2)$ случайного вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ и корреляционную матрицу вектора $\bar{\eta}$.

7.6. Случайный вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ имеет вектор математических ожиданий $\overline{m}(2;3)$ и корреляционную матрицу $K = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\eta_1 = 3\xi_1 + \xi_2,\ \eta_2 = \xi_1 - 2\xi_2.$$

Вычислить вектор математических ожиданий $m_\eta = (M\eta_1, M\eta_2)$ случайного вектора и вектор дисперсий и корреляционный момент вектора $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$

7.7. Случайные величины X и Y независимы. X имеет нормальное распределение ($N(1;2)$), Y – равномерное при $x \in (-1;5)$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$

7.8. ДСВ X и Y независимы. X имеет биномиальное распределение (n=4, p=0.4), Y – распределение Пуассона ($\lambda = 2$). Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$

7.9. Даны две независимые дискретные случайные величины X и Y :

x_i	1	2
p	0.2	0.8

y_i	3	5
p	0.4	0.6

Составить закон распределения вероятностей суммы Z=X + Y . Найти числовые характеристики Z.

7.10. СВ распределена равномерно при $x \in (1;5)$. Найти плотность распределения и числовые характеристики СВ $\eta = \xi^2$

7.11.. Непрерывная случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $x \in [-2;\ 2]$.

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2\xi - 2$.

7.12.. Непрерывная случайная величина ξ распределена по нормальному закону с $m_\xi = 2$ и $D_\xi = 1$

. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 3\xi + 1$.

7.13. Распределение дискретной случайной величины ξ задано таблицей

ξ	3	4	5
P	0,3	0,2	0,5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2\xi + 1$.

7.14. Распределение дискретной случайной величины ξ задано таблицей

ξ	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 3\xi + 1$.

7.15. Распределение дискретной случайной величины ξ задано таблицей

ξ	1	2	3
P	0,1	0,3	0,6

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 3\xi^2 - 2$.

7.16. Найдите распределение случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$ и $M(\eta)$, если известно распределение случайного дискретного вектора $(\xi_1,\ \xi_2)$

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	$0,2$	0	$0,1$
$\xi_2 = -1$	0	$0,1$	$0,6$

.

7.17. Найдите распределение случайной величины $\eta = \max(\xi_1,\ \xi_2)$ и $M(\eta)$, если известно распределение дискретного случайного вектора $(\xi_1,\ \xi_2)$

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	$0,2$	0	$0,1$
$\xi_2 = -1$	0	$0,1$	$0,6$

.

7.18. Найдите распределение случайной величины $\eta = \min(\xi_1,\ 4 - \xi_2)$ и $M(\eta)$, если известно распределение дискретного случайного вектора $(\xi_1,\ \xi_2)$

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	$0,2$	0	$0,1$
$\xi_2 = -1$	0	$0,1$	$0,6$

.

7.19. Найдите распределение случайной величины $\eta = \max(5,\ \xi_1 - \xi_2)$ и $M(\eta)$, если известно распределение дискретного случайного вектора $(\xi_1,\ \xi_2)$

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	$0,2$	0	$0,1$
$\xi_2 = -1$	0	$0,1$	$0,6$

.

7.20. Найдите распределение случайной величины $\eta = \dfrac{\xi_1}{\xi_2}$ и $M(\eta)$, если известно распределение дискретного случайного вектора $\left(\xi_1,\ \xi_2\right)$

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 2$	$\xi_1 = 3$	$\xi_1 = 4$
$\xi_2 = -2$	$0,2$	0	$0,1$
$\xi_2 = -1$	0	$0,1$	$0,6$

.