Практическое занятие 4. Дискретная случайная величина. Способы задания. Основные числовые характеристики Основные законы распределения

<table>
<tr><td colspan="2">Дискретная случайная величина (ДСВ)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Способы задания</td></tr>
<tr><td>1. Ряд распределения

| x_i | x_1 | … | x_n |
| p_i | p_1 | … | p_n |</td><td>x_i - значение, которое может принять ДСВ
Основное свойство: $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$</td></tr>
<tr><td>2.Функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$:
$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le x_1, \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \le x_3, \\ \dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$</td><td>$F(x)$ имеет n разрывов первого рода
(график принимает ступенчатый вид)
$F(x)$ - неубывающая функция</td></tr>
<tr><td colspan="2">Числовые характеристики</td></tr>
<tr><td colspan="2">Математическое ожидание</td></tr>
<tr><td>$M(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$</td><td>$x_1 \le M(\xi) \le x_n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дисперсия</td></tr>
<tr><td>$D(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(\xi)$</td><td>$D(\xi) \ge 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Среднеквадратическое отклонение (СКО)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sigma = \sqrt{D(\xi)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вероятность</td></tr>
<tr><td>Искомую вероятность лучше непосредственно находить из ряда распределения</td><td>(реже, используя соотношения)
$P(\xi < a) = F(a)$
$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$
$P(\xi \ge a) = 1 - F(a)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Основные законы распределения</td></tr>
<tr><td>Биномиальный
(схема Бернулли,
СВ – количество успехов)</td><td>$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
k=0,1,…n</td><td>$m_\xi = np$
$D_\xi = npq$</td></tr>
<tr><td>Геометрический
(СВ – количество опытов до первого успеха)</td><td>$P(\xi = k) = pq^{k-1}$
k=1,2,…</td><td>$m_\xi = 1/p$
$D_\xi = q/p^2$</td></tr>
<tr><td>Гипергеометрический
Пусть имеется конечная совокупность, состоящая из N элементов (D из них обладают нужным свойством, оставшиеся N-D этим свойством не обладают).
Случайным образом из общей совокупности выбирается n элементов.
СВ - количество выбранных элементов, обладающих нужным свойством.</td><td>$P(\xi = k) = \dfrac{C_D^k \cdot C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$
k=0,1,…n</td><td>$m_\xi = nD/N$
$D_\xi = \dfrac{n(D/N)(1-D/N)(N-n)}{N-1}$
Лучше находить, построив ряд распределения</td></tr>
</table>

ПРИМЕРЫ

4.1. Абитуриент сдаёт два вступительных экзамена: по математике и физике. Составить ряд распределения случайной величины x - числа полученных пятёрок, если вероятность получения пятёрки по математике равна 0,8, а по физике – 0,6.

Решение. Обозначим A_1 и A_2 – события, заключающиеся в том, что и математика, и физика сданы на 5. Очевидно, возможные значения СВ есть 0, 1, 2, причём

$$p(x=0) = p(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}) = p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2}) = 0.2\cdot 0.4 = 0.08;$$

$$p(x=1) = p(A_1\cdot\overline{A_2} + \overline{A_1}\cdot A_2) = 0.8\cdot 0.4 + 0.2\cdot 0.6 = 0.44;$$

$$p(x=2) = p(A_1\cdot A_2) = p(A_1)\cdot p(A_2) = 0.8\cdot 0.6 = 0.48$$

Полученные результаты сведём в таблицу:

x_i	0	1	2
p_i	0.08	0.44	0.48

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}08 + 0{,}44 + 0{,}48 = 1.$$

4.2. Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти: 1) функцию распределения, 2) $p(\xi < 2)$, $p(\xi > 4)$, $p(2 \le \xi \le 4)$, 3) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение.

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 1 \\ 0.1, \quad 1 < x \le 2 \\ 0.1 + 0.2 = 0.3, \quad 2 < x \le 3 \\ 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.7, \quad 3 < x \le 4 \\ 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 = 0.9, \quad 4 < x \le 5 \\ 0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.1 = 1, \quad x > 5 \end{cases},$$

2) $p(\xi < 2) = 0{,}1$; $p(\xi > 4) = 0{,}1$; $p(2 \le \xi \le 4) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}8$.

3) $M(\xi) = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}4 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}1 = 3$;

$D(\xi) = 12\cdot 0{,}1 + 22\cdot 0{,}2 + 32\cdot 0{,}4 + 42\cdot 0{,}2 + 52\cdot 0{,}1 - 32 = 1{,}2$

$\sigma(\xi) = \sqrt{1{,}2} = 1{,}095$

4.3. Монета подбрасывается 10 раз. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ – количества выпавших орлов.

Решение. Случайная величина имеет биномиальное распределение. Здесь n=10, p=0,5, q=0,5. Находим: $M_\xi = 10\cdot 0{,}5 = 5$, $D\xi = 10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 2{,}5$.

4.4. Охотник-любитель стреляет из ружья по неподвижной мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле является величиной постоянной и равна 0,65. Стрельба по мишени ведется до первого попадания. Определить числовые характеристики числа израсходованных охотником патронов.

Решение. Случайная величина подчиняется геометрическому закона распределения, поэтому вероятность попадания в каждой попытке постоянна и составляет *p=0,65;q=1-p=0,35*.

По формулам вычисляем математическое ожидание $m_\xi = 1/p = 1/0{,}65 \approx 1{,}538$

Дисперсию $D_\xi = q/p^2 = 0{,}35/0{,}65^2 \approx 0{,}828$

среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{0{,}828} \approx 0{,}91$

4.5 В ящике содержится 10 однотипных деталей, из них 7 стандартных, а остальные являются бракованными. Наугад из ящика берут 3 детали. Построить закон распределения целочисленной случайной величины X — числа стандартных деталей, вычислить математическое ожидание, дисперсию и СКО

Решение. Построим гипергеометрический закон распределения:

I. Имеем следующие начальные условия для случая выбора трех деталей

n = 3; N=10; D= 7; N-D= 3; k = 0, 1, 2, 3.

В табличной форме гипергеометрический закон для этих данных имеет вид

$X = x_k = k$	0	1	2	3
$P_k = \frac{C_7^k C_3^{3-k}}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^0 C_3^3}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^1 C_3^2}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^2 C_3^1}{C_{10}^3}$	$\frac{C_7^3 C_3^0}{C_{10}^3}$

в виде ряда распределения

k	0	1	2	3
$P_k = \frac{C_7^k C_3^k}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

Числовые характеристики можно вычислить, конечно, и непосредственно из ряда распределения.

Математическое ожидание $m_\xi = nD/N = 3 \cdot 7/10 = 2{,}1$

Дисперсия $D_\xi = \frac{n(D/N)(1-D/N)(N-n)}{N-1} = \frac{3 \cdot \frac{7}{10} \cdot (1-7/10)(10-3)}{9} = 0{,}49$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$

Задачи для самостоятельного решения:

4.1. Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти: 1) значение a; 2) функцию распределения, 2) $p(\xi > 4)$, 3) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	2	3	5
p_i	0,1	2a	a

4.2. Закон распределения случайной величины задан таблично. Найти: 1) значение a; 2) функцию распределения, 2) $p(\xi \leq 3)$, 3) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

x_i	2	3	10
p_i	a	4a	5a

4.3. В коробке 5 красных карандашей, 3 синих. Вынимают два карандаша. Составить ряд распределения СВ – количества вынутых карандашей красного цвета. Найти: 1) функцию распределения, 2) $p(\xi < 2)$, $p(2 \leq \xi \leq 4)$, 3) математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

4.4. В группе 7 человек: 4 отличника, 2 хорошиста, 1 троечник. Выбирают четырех человек. Составить ряд распределения СВ – количества выбранных отличников. Найти числовые характеристики.

4.5. Монету бросают 3 раза. СВ – число выпавших гербов. Построить для нее: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения. Найти числовые характеристики.

4.6. Производится 2 независимых выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. СВ – разность между числом попаданий и числом промахов. Построить для нее: 1) ряд распределения, 2) функцию распределения. Найти числовые характеристики.

4.7. Известно, что $M(\xi) = 2{,}7$ $D(\xi) = 0{,}21$. Ряд распределения имеет вид

x_i	X1	X2
p_i	0,3	0,7

Найти X1, X2.

4.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	–5	2	4
p	0,2	0,7	0,1

Найти дисперсию.

4.9. Случайная величина ξ принимает только целые значения 1,2,…,10. При этом вероятности возможных значений ξ пропорциональны значениям: $\boldsymbol{P(\xi = k) = ck}$. Найдите значение константы $\boldsymbol{c}$ и вероятность $P(\xi > 3)$.

4.10. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения 0,1,2,… . При этом $P(\xi = k) = c \cdot 6^{-k}$. Найдите значение константы c и вероятность $P(\xi < 3)$.

4.11. Случайная величина ξ принимает только целые значения 1, 4, 7, 10, 13, каждое с вероятностью $\frac{1}{5}$. Найдите математическое ожидание $m_\xi = M(\xi)$ и вероятность $P(\xi < m_\xi)$.

4.12. Для случайной величины ξ известно, что $M(\xi) = 4$, $M(|\xi|) = 8$, $D(|\xi|) = 20$. Найдите дисперсию $D(\xi)$.

4.13. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, а вероятность выигрыша одного билета 0,1. Найти дисперсию числа успехов в данном опыте.

4.14.Проводятся три независимых испытания, в каждом из которых вероятность наступления некоторого события постоянна и равна p. Пусть ξ – число появлений события A в этом опыте. Найти $D(\xi)$, если известно, что $M(\xi) = 2{,}1$.

4.15. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 80 попаданий в цель?

4.16. Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры 1. Определить все числовые характеристики для случайной величины ξ - числа осуществляемых подбрасываний.
4.17. В группе 10 человек: 6 отличников, 3 хорошиста, 1 троечник. Выбирают пять человек. Найти числовые характеристики СВ – количества выбранных хорошистов.
4.18. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти ее ряд распределения.
4.19. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Ответы. 4.1. $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ 0{,}1,\ 2 < x \le 3 \\ 0{,}7,\ 3 < x \le 5 \\ 1, \quad x > 5 \end{cases}$. a=0.3, $p(\xi > 4) = 0.3$, $M(\xi) = 3.5$ $D(\xi) = 1.05$ $\sigma(\xi) \approx 1.025$

4.2. $F(x) = \begin{cases} 0, x \le 2 \\ 0{,}1,\ 2 < x \le 3 \\ 0{,}5,\ 3 < x \le 10 \\ 1, \quad x > 10 \end{cases}$ a=0.1, $p(\xi \le 3) = 0.5$, $M(\xi) = 6.4$ $D(\xi) = 13.04$ $\sigma(\xi) \approx 3.61$

4.3.

x_i	0	1	2
p_i	3/28	15/28	5/14

$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 3/28,\ 0 < x \le 1 \\ 9/14,\ 1 < x \le 2 \\ 1, \quad x > 2 \end{cases}$ $p(\xi < 2) = 9/14$, $p(2 \le \xi \le 4) = 5/14$ $M(\xi) = 1{,}25$ $D(\xi) \approx 0{,}402$
$\sigma(\xi) \approx 0.634$

4.4.

x_i	1	2	3	4
p_i	4/35	18/35	12/35	1/35

$M(\xi) \approx 2.28$ $D(\xi) \approx 0.38$ $\sigma(\xi) \approx 0.62$

4.5.

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1/8,\ 0 < x \le 1 \\ 1/2,\ 1 < x \le 2 \\ 7/8,\ 2 < x \le 3 \\ 1, \quad x > 3, \end{cases}$ $M(\xi) = 3/2$ $D(\xi) = 3/4$ $\sigma(\xi) = \sqrt{3}/2$

4.6.

x_i	-2	0	2
p_i	0,04	0,32	0,64

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -2 \\ 0{,}04, \ -2 < x \le 0 \\ 0{,}36, \ 0 < x \le 2 \\ 1, \quad x > 2 \end{cases}. \ M(\xi) = 1{,}2 \ \ D(\xi) = 1{,}28 \ \ \sigma(\xi) = 1{,}13$$

4.7. X1=2, X2=3.
4.8. 8,76.
4.9. 1/55; 49/55
4.10.
4.11. 7; 2/5
4.12.60
4.13. 2, 0,18
4.14. 0,63
4.15. 200
4.16 $m_\xi = 6 \ \ D_\xi = 30$ 25. 0.3830
4.17
4.18.

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

4.19. 0,096