Часть 1. Элементы комбинаторики

Исходное (ые) множество (а)	Все ли элементы исходного множества используются в комбинации	Возможен ли повтор	Различны ли комбинации $\{a;b\}$ и $\{b;a\}$	Используемое комбинаторное понятие	Формула для вычисления числа комбинаций
Все элементы конечного n-элементного множества различны	Да	Нет	Да (порядок следования элементов важен)	Перестановка	$P_n = n!$
Все элементы конечного n-элементного множества различны	Не всегда. Выбирают k элементов из n $(k \leq n)$	Нет	Да (порядок следования элементов важен)	Размещение	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Все элементы конечного n-элементного множества различны	Не всегда. Выбирают k элементов из n $(k \leq n)$	Нет	Нет (порядок следования элементов не важен)	Сочетание	$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Среди элементов конечного n-элементного множества есть одинаковые (k_1 сорта 1, k_2 сорта 2, …, k_m сорта m: $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$)	Да	Да	Да (порядок следования элементов важен)	Перестановка с повторениями	$P_n(k_1; k_2; \dots; k_m) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}$
Имеется n **видов** элементов, число элементов каждого вида достаточно велико (может быть неизвестно)	Выбирают k **элементов**.	Да	Да (порядок следования элементов важен)	Размещение с повторениями	$\hat{A}_n^k = n^k$
Имеется n **видов** элементов, число элементов каждого вида достаточно велико (может быть неизвестно)	Выбирают k **элементов**.	Да	Нет (порядок следования элементов не важен)	Сочетание с повторениями	$\hat{\hat{C}}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Правило суммы. Если объект А можно выбрать m способами, объект В – k способами (не такими, как А), то выбор «А **или** В» можно провести $(m+k)$ способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать m способами, после каждого такого выбора объект В – k способами (не такими, как А), то выбор «А **и** В» можно провести $(m \cdot k)$ способами.

Для произвольных чисел a и b и любого натурального n справедлива формула:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = C_n^0\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} + C_n^1\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{b} + C_n^2\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-2}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + C_n^k\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n-k}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{k}} + \cdots + C_n^n\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех цветов?
2. Сколько различных слов, состоящих из трех букв, можно образовать из слова БУРАН?
3. Каким числом способов можно сдать 4 зачета в 8 дней, если сдавать в 1 день 1 зачет?
4. Каким числом способов можно выбрать из 10 различных книг 3 книги?
5. В общежитии проживает 50 студентов 2 курса. Ежедневно для дежурства из этой группы выделяются два человека. Можно ли составить расписание дежурств на год вперёд так, чтобы никакая пара студентов не дежурила дважды?
6. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, если цифры могут повторяться?
7. Шесть ящиков с разными видами материалов доставляются на пять этажей. Сколько вариантов распределений ящиков по этажам возможно? В скольких вариантах на второй этаж будет доставлен только один вид материала?
8. В соревнованиях участвует 18 команд, разыгрывая золотую, серебряную и бронзовую награды. Сколько вариантов итогов соревнований возможно?
9. Сколько различных чисел можно получить, переставляя цифры 2, 5, 7, 9?
10. Записать комплексное число $(2+i)^6$ в алгебраической форме.
11. В группе 30 человек. Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга?
12. На железнодорожной станции имеется 6 светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, жёлтый, зеленый?
13. Сколькими способами 4 одинаковых предмета можно разложить по 5 разным ящикам?
14. Сколькими способами можно разложить 12 одинаковых монет по пяти различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не остался пустым?
15. Сколько существует костей домино?
16. В магазине имеются ножи, вилки и ложки. Требуется составить подарочный набор из шести предметов. Сколько различных наборов можно составить?
17. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?
18. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор точек и тире. Сколько букв в азбуке Морзе, если одна буква содержит не более 4 знаков?
19. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий по 5 глав, второй – 4, четвертый 3 главы. Сколько способов распределения написания глав существует?
20. Сколько различных букв можно получить, переставляя буквы в словах: а) зебра, б) баран, в) водород, г) абракадабра?

Ответы. 1.1. 21. 1.2. 60. 1.3. 1680. 1.4. 120. 1.5. Можно. 1.6. 54. 1.7. 5^6; $6\cdot 4^5$. 1.8. 4896. 1.9. 24. 1.10. -117+44i. 1.11. 870. 1.12. 729. 1.13. 70. 1.14. 330. 1.15. 28. 1.17. 4060 1.18.30 1.19. 171531360 1.20. а) 120, б) 60, в) 420, г) 83160.

Часть 2. Классическое и геометрическое определение вероятности.

Классическое определение	Геометрическое определение
Опыт производится один раз. Число его исходов конечно, исходы равновозможны.	Опыт производится один раз. Число его исходов бесконечно, исходы равновозможны.
$P(A)=\frac{m}{n}$ m - число благоприятных исходов n – общее число равновозможных исходов	$P(A)=\frac{mesA}{mes\Omega}, mes=\begin{bmatrix} l, R_1 \\ S, R_2 \\ V, R_3 \end{bmatrix}$

Задача о выборе (гипергеометрическое распределение).

Пусть имеется N предметов, среди которых M одного сорта, остальные – другого сорта. Выбирают k предметов. Какова вероятность, что среди выбранных l предметов будет из исходных M?

Это задача для случая классического определения вероятности, то есть $P(A)=\frac{m}{n}$. Количество благоприятных исходов (l нужного сорта, остальные k-l другого) определяется через понятие сочетаний и принципа умножения, т.е. $m=C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}$. Всего исходов в описанном опыте $n=C_N^k$. Таким образом,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Задачи для самостоятельного решения:

21. Кубик, все грани которого окрашены, распиливают на 27 частей. Найти вероятность, что случайно выбранная часть имеет: 1) одну окрашенную грань; 2) две окрашенных грани; 3) ни одной окрашенной грани.
22. В картотеке из 80 фотороботов содержится фоторобот преступника. Случайно отбирают 5 фотороботов. Какова вероятность, что среди них фоторобот разыскиваемого преступника?
23. Абонент забыл последние две цифры телефонного номера, помня, что они разные. Какова вероятность, что с первого раза он наберет нужный номер?
24. В состав ученого совета избрали 21 человека, среди них 4 студента. Какова вероятность избрать председателем и секретарём или только секретарём совета студентов, если будут избираться из числа членов совета жребием?
25. Десять книг случайным образом расставляют на книжной полке. Какова вероятность, что 3 конкретные книги окажутся рядом?
26. На шести карточках написано по одной букве М, О, С, К, В, А. После перемешивания карточки последовательно выкладывают. Какова вероятность получить «МОСКВА»?
27. В партии из 13 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 7 деталей. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей: ровно 5 стандартных; ровно 5 нестандартных
28. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найдите вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 3 нестандартных.
29. В группе учатся 13 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найдите вероятность того, что все дежурные окажутся юношами.
30. В ящике 3 белых и 4 черных шаров. Найдите вероятность того, что из двух вынутых наудачу шаров оба будут белыми. Вынутый шар в урну не возвращается.
31. Колода карт произвольным образом делится на две стопы по 26 карт в каждой. Какова вероятность того, что в каждой стопе окажется по два туза?
32. Какова вероятность того, что в январе наугад выбранного года окажется пять воскресений?
33. На отрезок AB длины 240 наудачу поставлена точка x. Найдите вероятность того, что меньший из отрезков Ax и xB имеет длину большую, чем 48.
34. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 20 и 100 соответственно. Найдите вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями.

35. Внутрь круга радиуса 50 наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника
36. В квадрат с вершинами в точках $(-1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$, $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$ наудачу поставлена точка $(x;\ y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют условию $y > x^3$?
37. В квадрат со стороной 1 вписан равнобедренный треугольник так, что его основание совпадает со стороной квадрата. В квадрат случайным образом бросается точка. Найдите вероятность того, что точка не попадет в треугольник.
38. Какова вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2bx + c = 0$ вещественные числа, если b и c равномерно распределены в интервалах $|b| < 4$, $|c| < 4$?
39. В прямоугольник с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(2;\ 1)$, $(2;\ 0)$ наудачу поставлена точка $(x;\ y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют условию $y \le x$?
40. В куб со стороной 10 наудачу бросается точка. Найдите вероятность того, что эта точка попадет во вписанный в куб шар.
41. В прямоугольник с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(2;\ 1)$, $(2;\ 0)$ наудачу поставлена точка $(x;\ y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют условию $y \le \frac{x^2}{4}$?

20.1) 2/9 2) 4/9 3) 1/27
21.1/16
22.1/90
23.0,38
24.1/15
25.1/720
26.0,117
27.0,114
28.0,186
29.1/7
30. $1{,}2 \cdot 10^{-14}$
31.3/7
32.96/240
33.. 0,96
34.. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$
35.. 0,5
36.. 0,5
37.. 0,83
38.. 0,75
39.1/3