**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет»**

С.И. РОДЗИН

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

ЛЕКЦИИ и ПРАКТИКУМ

Учебное пособие

Таганрог 2010

УДК 519.816

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой систем автоматического управления ТТИ ЮФУ **Финаев В.И.**,

доктор технических наук, профессор, профессор Волгоградского государственного технического университета **Заболеева-Зотова А.В**.

Родзин С.И. Теория принятия решений: лекции и практикум: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. – 336 с.

ISBN 978-5-8327-0372-5

Выбор и принятие решений являются междисциплинарными областями, объединяющими усилия инженеров и математиков, программистов и системотехников, психологов и лингвистов в деле разработки теории и практики создания интеллектуальных систем поддержки принятия решений. Эти области исследований, госстандарты по направлениям профессиональных образовательных программ определили содержание учебного пособия, которое включает систематическое изложение всех модулей учебной программы дисциплины «Теория принятия решений» и основано на образовательном контенте, используемом автором в учебном процессе ТТИ ЮФУ. В лекциях и практикуме нашли отражение современные представления о теории и практике выбора индивидуальных и групповых решений в условиях неопределенности, противодействия, нейтралитета и содействия, а также о задачах и методах многокритериальной оптимизации[1].

Пособие предназначено для бакалавров и магистрантов направления «Информатика и вычислительная техника», а также полезно студентам смежных направлений, интересующихся теорией и практикой автоматизации сложно формализуемых задач принятия решений в условиях многокритериальности и неопределенности, возможностями применения знаний математики и информатики для принятия технических решений. Пособие может быть полезно аспирантам, занимающимся проблематикой системного анализа, теоретической информатики, искусственного интеллекта, автоматизации управления, математического моделирования, систем автоматизации проектирования.

Ил. 71. Библиогр.: 45 назв.

ISBN 978-5-8327-0372-5

[1] *Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00492, РНП 2.1.2.1652*

Содержание

Введение

Информация об авторе курса

Родзин Сергей Иванович, профессор кафедры МОП ЭВМ ТТИ ЮФУ, член Российской ассоциации искусственного интеллекта, Европейского союза исследователей в области искусственного интеллекта (ECCAI), международной ассоциации «Fault-Tolerant Computing Systems». Награждён знаком отличия «Почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации».

Автор свыше 200 трудов, среди которых 9 монографий, 20 учебных пособий, свыше 150 статей в отечественных и зарубежных научных журналах. Научно-педагогический стаж – 30 лет.

В настоящее время читает курсы лекций:

- «Теория принятия решений» (для бакалавров направления «Информатика и вычислительная техника»);
- «Системы искусственного интеллекта» (для специальностей «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»);
- «Интеллектуальные системы» (для магистрантов направлений «Информатика и вычислительная техника», «Автоматизация и управление»).

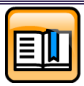
Контактная информация: e-mail – rodzin@mopevm.tsure.ru, тел. (8634) 371-673.

Принятые обозначения

В пособии используются следующие шрифты:

- **жирный** шрифт выделяет в основном тексте важную информацию;
- *курсив* используется для выделения отдельных значимых слов, фраз, пояснений, а также для указания информационных источников, в которых дано более детальное описание текущих вопросов, терминов глоссария, персоналий;
- подчеркивание используется, в основном, для указания гиперссылок.

Для того чтобы было легче работать с учебным пособием, в нём есть условные значки-пиктограммы, повышающие внимательность, а также ориентирующие на тот или иной вид работы с текстом:

Значок	Описание
 Внимание!	Принципиально важный момент. Не следует обходить его своим вниманием.
 Совет	Рекомендации по повышению эффективности работы.
 Справка	Справочная и факультативная информация.
 Пример	Поясняющий пример.
 Вопрос	Проблемный вопрос.

Комплексная цель пособия

Пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Теория принятия решений» (ТПР).

Внимание!	Цель пособия – дать представление о фундаментальных фактах и принципах теории принятия решений, познакомить с задачами ТПР, современными методами выбора решений, помочь овладеть способами выработки индивидуальных и групповых решений в условиях многокритериальности и неопределенности.

В пособии систематизирована учебная информация, соответствующая госстандарту, который включает основные понятия и методологические основы ТПР; задачи, функции и критерии выбора решений для различных типов задач скалярной оптимизации (детерминированных, стохастических, линейных, нелинейных, дискретных), а также многокритериальных задач, в том числе принятия решений в условиях неопределенности.

В результате изучения учебных модулей студент должен быть готов продемонстрировать следующие компетенции:

Внимание!	• **знание** и **понимание** основных фактов, концепций и принципов ТПР; • **знание** основ выработки индивидуальных и групповых решений, **умение** определять оптимальные решения при многих критериях и неопределенности; • **способность** применять знания математики и информатики для принятия технических решений, **умение** формулировать задачи экспертной поддержки принятия решений, анализировать результаты.

Модульная организация пособия

Пособие организовано по модульному принципу.

Внимание!	**Модуль** – это содержательно значимый структурный элемент программы курса, включающий лекционные занятия и практикум, а также самостоятельную работу. Модуль имеет чётко обозначенное время, объём и трудоёмкость, направлен на выработку определённых компетенций, степень овладения которыми фиксируется диагностическими средствами.

В пособии представлены четыре модуля дисциплины. Приведем их краткое содержание и трудоёмкость.

СПРАВКА

Модуль 1 – детерминированные задачи скалярной оптимизации. В модуле рассматривается общая постановка задачи и методы принятия решений, шкалы и методы измерений. Систематизируются задачи принятия решений, из которых выделяется группа детерминированных задач скалярной оптимизации. Приводятся примеры оптимальных решений для задач упорядочения и нелинейных распределительных задач. Трудоёмкость модуля – 1 кредит.

СПРАВКА

Модуль 2 – принятие решений в условиях противоборства. В данном модуле излагаются вопросы рационального выбора индивидуальным лицом, принимающим решение в условиях противоборства. Для решения задач привлекаются методы теории игр, линейного и эвристического программирования. Трудоёмкость модуля – 1 кредит.

СПРАВКА

Модуль 3 – принятие решений в условиях неопределенности, нейтралитета и содействия. В данном модуле излагаются вопросы рационального выбора индивидуальным лицом, принимающим решение в условиях противоборства. Для решения задач привлекаются методы теории игр, линейного и эвристического программирования. Трудоёмкость модуля – 1 кредит.

СПРАВКА

Модуль 4 – многокритериальные задачи, марковские модели, групповой выбор. В данном модуле рассматриваются задачи многокритериальной оптимизации, Парето-оптимальность, марковские модели принятия решений, проблемы группового выбора; излагаются парадоксы систем голосования, теорема невозможности Эрроу; описываются аспекты, связанные с оценкой риска и автоматизацией процесса принятия решений. Трудоёмкость модуля – 1 кредит.

На рис. 1 представлена взаимосвязь модулей с основными направлениями работ в ТПР и компетенциями.

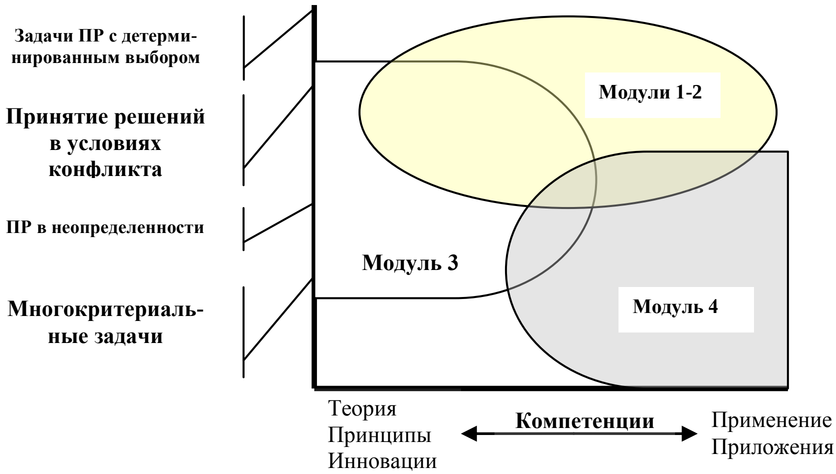


Рис. 1. Взаимосвязь модулей с направлениями в ТПР и компетенциями

В качестве критериальных показателей компетентности можно использовать тестовые задания для самопроверки, приводимые в каждом модуле. Сумма баллов, набранных в результате выполнения тестов, является количественным индикатором компетенций.

Общие сведения о дисциплине, план обучения, система контроля знаний и критерии оценки

Курс ТПР является важной составляющей фундаментальной математической и общепрофессиональной подготовки по целому ряду направлений, связанных с информатикой, вычислительной техникой, информационными системами и технологиями, программной инженерией. Поэтому программа курса учитывает профессиональную специфику этих направлений, а также рекомендации авторитетных международных и российских организаций в области экспертной поддержки принятия технических решений. Создаваемые на основе достижений ТПР технологии относятся к информационным технологиям, на базе которых строится «экономика знаний» в 21 веке.

Трудоемкость изучения дисциплины в академических часах определяется согласно учебному плану. Общая трудоемкость изучения дисциплины определяется в 5 кредитов.

Технология процесса обучения включает следующие обязательные элементы:

- модульное построение учебной программы;
- отражение взаимосвязей с задачами образовательной программы, с другими дисциплинами учебного плана;
- обоснованность распределения учебной нагрузки студентов;
- преимущественно самостоятельную работу студентов и формирование портфеля студенческих работ по дисциплине;
- педагогический контроль качества обучения путем объективной оценки учебных достижений студентов;
- достаточность, разнообразие и современность источников учебной информации, включая информационное обеспечение;
- периодический пересмотр рабочей программы курса.

ТПР является **междисциплинарным** курсом (рис. 2). Термин «принятие решений» встречается в различных научных дисциплинах таких, как искусственный интеллект, экономика, когнитивная психология, политология, исследование операций и др.

В информатике и вычислительной технике в последнее время уделяется большое внимание построению систем поддержки принятия решений, помогающих человеку в задачах выбора. Отличительной особенностью ТПР как научной дисциплины является то обстоятельство, что ее основной объект – исследование процесса выбора, средств его поддержки и обоснования. В этом состоит образовательная специфика и междисциплинарный характер теории принятия решений как научного направления.

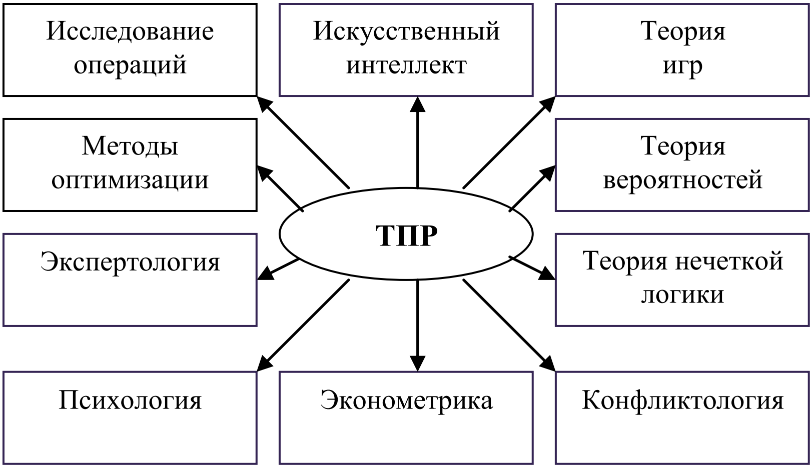
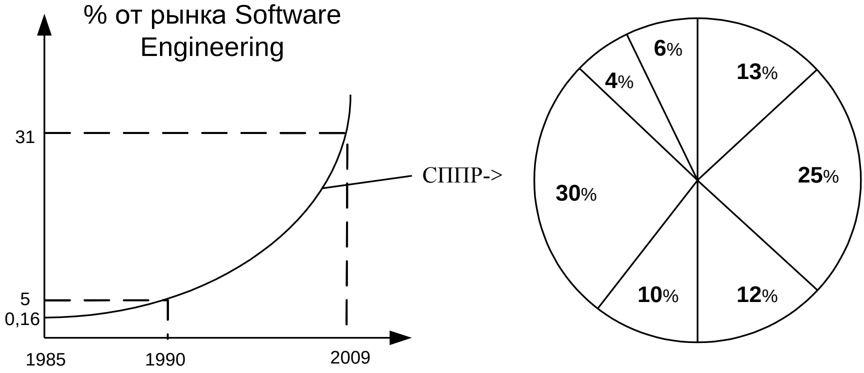


Рис. 2. Междисциплинарные взаимосвязи ТПР

Вклад дисциплины в образовательную программу состоит в профессиональном освоении методов принятия эффективных технических решений, понимании современных инженерных проблемах в этой области. Этому соответствуют цели ТПР как научного направления: помочь человеку в поиске лучших вариантов решений с учетом многокритериальности, случайных и неопределенных факторов, обострить интуицию лица, принимающего решения.

Справка	Изучение ТПР опирается на знания, умения и навыки, полученные при освоении таких дисциплин, как «Алгебра и геометрия», «Математическая логика и теория алгоритмов», «Дискретная математика», «Информатика», «Теория вероятности», «Структуры и алгоритмы обработки данных», «Педагогика и психология», «Программирование», «Базы данных», «Методы оптимизации».

С другой стороны, на рынке возрастает спрос на кадры, умеющие автоматизировать и оптимизировать процессы принятия решений и рационального выбора. Об этом свидетельствует динамика рынка систем поддержки принятия решений и области их применения, представленные на рис. 3.



Автоматизация программирования –**13%**
СППР в промышленности – **25%**
Финансы – **12%**
Информационные системы –**10%**
Медицина и образование – **30%**
Военные цели – **4%**
Другое – **6%**

Рис. 3. Динамика рынка систем поддержки принятия решений и области их применения

Поэтому одним из оснований к формированию содержания рабочей программы ТПР является приближение инженерной подготовки к ведущим мировым тенденциям и потребностям на российском рынке труда в области IT-технологий и систем.

В 2007 г. при поддержке Мининформсвязи и Минобрнауки РФ Ассоциацией предприятий компьютерных и информационных технологий (АПКИТ) при участии ведущих компаний IT-отрасли разработаны и утверждены профессиональные стандарты (квалификационные требования) по 9-ти наиболее массовым и востребованным профессиям в области информационных технологий (программист, специалист по информационным системам, системному администрированию, администратор баз данных и др.).

СПРАВКА

Стандарты имеют статус нормативного документа рекомендательного характера. Они отражают требования к профессии, должностные обязанности, компетенции, уровень образования, стаж работы и сертификации по квалификационным уровням.

Выпущена книга «Профессиональные стандарты в области информационных технологий» – М.: АП КИТ, 2008. Профессиональные стандарты с июня 2007 г. опубликованы для открытого доступа на сайте АП КИТ www.apkit.ru/ и сайте Мининформсвязи РФ www.minsvyaz.ru/industry/.

Приведем выдержки из некоторых стандартов.

«Специалист по системному администрированию»:

- Знание основ стратегического планирования;
- Знание приемов принятия технических и управленческих решений по модернизации программно-технических средств;
- Знание основ теории принятия решений и конфликтологии;
- Навыки подготовки презентаций.

«Программист» (должностные обязанности):

- Умение анализировать проектные решения и процесс их реализации;
- Знание конфликтологии и основ выработки решений;
- Планирование работ по совершенствованию процесса.

«Специалист по информационным системам»:

- Знание методов стратегического планирования и оптимизации;
- Умение распределять ресурсы и управлять рисками проекта;
- Знание основ процесса выработки решений и конфликтологии;
- Навыки разработки сетевого графика работ по этапам.

Тематика представленных в учебном пособии лекций и практических занятий учитывает требования профессиональных стандартов. Кроме того, при работе с пособием необходимо учитывать учебный календарно-тематический план дисциплины ТПР.

Основными элементами этого плана являются график освоения модулей дисциплин, а также система контроля и критерии оценки знаний. Для оценки степени достижения целей и задач дисциплины используются методы, основанные на систематическом контроле и мониторинге знаний, умений и практических навыков, которыми должны обладать студенты по окончании изучения дисциплины.

Внимание!	Выполнение студентом в течение семестра всей учебной нагрузки, предусмотренной программой, является необходимым, но не достаточным условием его аттестации по дисциплине. В процессе аттестации требуется продемонстрировать соответствующие компетенции.

Например, система контроля и мониторинга по ТПР предусматривает стартовый тест в начале семестра, тестирование по завершении каждого модуля, а также защиту индивидуального задания в конце семестра.

Тестирование служит для проверки готовности студентов к освоению дисциплины, контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов по усвоению программы дисциплины и достижения ожидаемых результатов. Самостоятельная работа студентов предусматривает освоение учебных модулей, образовательного контента, который наряду с рабочей программой и данным пособием включает также банк вопросов для самоконтроля, тестовых и исследовательских задач. Каждый модуль включает в себя формулировку его цели, проблемное изложение лекций, практикум, вопросы для самоконтроля, итоговый тест по модулю и список литературы.

Справка	Используя дидактические тесты для самоконтроля, можно самостоятельно измерить степень некоторых компетенций.

В конце пособия приводится **глоссарий** основных используемых терминов, касающихся ИИ, а также краткие сведения об учёных (**персоналии**), внёсших значительных вклад в развитие ТПР.

Оценка индивидуального задания осуществляется с учётом пяти критериев, которые отражают наиболее значимые аспекты этого вида самостоятельной работы. «Вес» каждого критерия колеблется от 3 до 5 баллов, численное значение критерия – от 0 баллов (критерий не выполнен) до максимального «веса» критерия (критерий полностью выполнен). Ниже приводятся краткие формулировки полноты выполнения каждого критерия.

ПРИМЕР	**Критерий 1**. Цель и задачи задания чётко сформулированы, полностью соответствуют выбранной теме. Структура работы чётко выражена и обоснована.
ПРИМЕР	**Критерий 2**. Содержание индивидуального задания полностью соответствует выбранной теме, при раскрытии которой проявлена самостоятельность и творческий подход, умение работать с информационными источниками.
ПРИМЕР	**Критерий 3**. Использованный стиль изложения полностью соответствует характеру выполненной работы, правильное и точное использование понятийного аппарата, чёткая логика рассуждений, наличие программной реализации, экспериментальных данных.
ПРИМЕР	**Критерий 4**. Все сделанные в заключении выводы свидетельствуют о самостоятельном выполнении работы, имеется обоснованная оценка степени достижения цели, выводы не подменяются перечислением сделанного, поддерживаются материалами соответствующих разделов работы, в выводах имеется критическая оценка проделанной работы.
ПРИМЕР	**Критерий 5**. Отчет оформлен аккуратно и в полном соответствии с установленными требованиями (правильное применение и оформление ссылок, составление библиографии, выполнение технических требований, ГОСТ и др.). Объём отчета полностью соответствует установленным требованиям, сдан в срок.

Итоговым видом контроля по ТПР является экзамен. Каждый билет содержит обязательные вопросы, при ответе на которые необходимо продемонстрировать знание основных понятий, принципов, задач и методов ТПР, умение решать практические задачи. Для уточнения и оценки полученных компетенций экзаменатором могут быть заданы дополнительные вопросы. Оценка соответствует наиболее значимому аспекту экзамена: самостоятельно даны полностью правильные и исчерпывающие ответы на все обязательные и дополнительные вопросы. Максимальным результатом экзамена является 50 баллов, минимальным – 30 баллов. Возможные варианты снижения баллов за ответы на экзамене:

Справка

- самостоятельно даны правильные, но не развёрнутые ответы (кратко, без дополнительной аргументации);
- на обязательный(е) вопрос(ы) экзаменационного билета даны основные тезисы ответов, отсутствует чёткая самостоятельная логика рассуждений, целостный подход к рассматриваемым вопросам;
- ответы были даны с помощью наводящих вопросов;
- ответа (правильного) на вопросы дано не было.

Примерная структура интегрального рейтинга по ТПР имеет следующий вид:

<table>
<tr><th colspan="3">Семестровые модули</th><th colspan="2">Экзамен</th><th colspan="3">Общий итог</th></tr>
<tr><td>Вид контроля</td><td>max</td><td>min</td><td>max</td><td>min</td><td>Оценка</td><td>max</td><td>min</td></tr>
<tr><td>Тестирование</td><td>33</td><td>17</td><td rowspan="3">50</td><td rowspan="3">29</td><td>«5»</td><td>100</td><td>85</td></tr>
<tr><td>Индивид. задание</td><td>17</td><td>9</td><td>«4»</td><td>84</td><td>70</td></tr>
<tr><td>Итого</td><td>50</td><td>26</td><td>«3»</td><td>69</td><td>55</td></tr>
</table>

Рейтинг и итоговая дифференциальная оценка по дисциплине определяются следующим образом:

Оценка	Отлично	Хорошо	Удовл.	Неуд.
Рейтинг (в баллах)	100–85	84–70	69–55	Менее 55
Обозначение оценки в кредитной системе	A	C	E	F

Кредиты зачисляются студенту после успешной сдачи экзамена. Их количество не зависит от полученной оценки – она должна быть просто положительной.

Справка	Кредиты оценивают не часы трудозатрат, а реально освоенные компетенции, необходимые для достижения результатов образования. Необходимым условием их зачисления является выполнение всех обязательных видов работ и положительная аттестация.

Таким образом, система оценки достигаемых каждым студентом результатов является накопительной, в итоге аттестации определяется максимальное и минимальное число баллов как количественная оценка степени выполнения задач дисциплины.

Междисциплинарный характер дисциплины позволяет в рамках выполнения индивидуального задания научиться самостоятельно «добывать» знания из разных областей, группировать их и концентрировать в контексте конкретной решаемой задачи, ассоциируя свой собственный опыт с предметом ТПР. Для поддержки данной цели служит также практикум с примерами конкретных проблемных ситуаций в области выбора и принятия решений.

Модуль 1. Детерминированные задачи скалярной оптимизации

Цель изучения модуля

Цель модуля 1 – дать представление об истории ТПР, процессе принятия решений, типичных ошибках, аксиоматике, познакомить с общей постановкой задач индивидуального и группового принятия решений, с классификацией задач и методов принятия решений, а также помочь овладеть алгоритмами решения детерминированных задач скалярной оптимизации.

В результате освоения модуля 1 студент должен быть готов продемонстрировать следующие *компетенции* и *уровень подготовки*:

 **Внимание!**	• знание основных понятий ТПР (общетеоретический уровень); • понимание процесса принятия решений, отдельных задач и методов и владение шкалами измерений в процессе принятия решений (уровень пользователя); • навыки проектирования и программирования отдельных методов и компонент СППР (уровень проектировщика).

Конспект лекций

Лекция 1. Процесс принятия решений

ТПР как учебная дисциплина присутствует в вузовских планах подготовки бакалавров, специалистов и магистров различных направлений. Учебные программы ТПР в этих планах имеют различное содержание, несмотря на то, что они направлены к единой цели – построению и всестороннему обоснованию методов принятия решений. Для специалистов в области техники и технологий интерес представляют так называемые нормативные методы принятия решений, предписывающие людям правила рационального выбора, для математиков – аксиоматические построения и изучение моделей выбора, для психологов – изучение субъективных, подсознательных и поведенческих факторов, сопровождающих процесс принятия решений, для экономистов и менеджеров – изучение и описание реальных процедур принятия управленческих решений.

Чтобы лучше понять разницу между нормативными и поведенческими моделями и методами принятия решений, рассмотрим пример из рассказа известного американского фантаста Р. Шекли:

ПРИМЕР

> Сервис-команда обслуживала раз в 10 лет по всей Галактике установки по локальному управлению климатом: меняли смазку, проверяли работу педали гироскопа и пр. Пользователи могли, нажав на кнопку, вызвать дождь на свои поля в радиусе до 100 км. По объективным причинам на отдаленную планету они не могли добраться 3000 лет, а когда добрались, то обнаружили там цивилизационную катастрофу. Вместо развитого общества обнаружили племя, шамана и ритуальные пляски: установка стояла на главной площади и продолжала работать, племя с ее помощью вызывало дождь. Вопрос в том, как оно это делало?!
>
> Племя давно забыло, откуда взялась эта установка. Когда нужен был дождь, начиналась ритуальная пляска 15 суток кряду. На 13-е сутки в ходе 638-го танца на 12-м па помощник главного шамана пяткой нажимал на педаль, что, собственно, и вызывало дождь (с рациональной точки зрения). Но в племени никто этого мнения не разделял. Если, скажем, в предпоследнем танце вечером 15-го дня кто-то споткнулся о корень и упал, то вся пляска считалась недействительной и переплясовывалась заново…

Это не смешно, потому что перед нами – довольно точная модель соотношения рационального и поведенческого пластов в принятии решения. С точки зрения прилетевшей сервис-группы, рациональным является только нажатие педали. На взгляд культуролога пляска и религиозные таинства куда важнее технологии воздействия на погоду. С точки зрения племени, танец – это не столько вызывание дождя, сколько акт сотрудничества или борьбы с духами, подтверждение статуса главного жреца, единство племени, сохранение его традиций.

Поведенческие модели, являясь дескриптивными, делают упор на личные качества ЛПР, описывают то, как он осуществляет выбор, пытаясь объяснить его поведение. Нормативные модели и методы, являясь, в основном математическими, исходят из рациональности (от лат. ratio – разум) поведения ЛПР и предусматривают выбор наилучших альтернатив, пытаясь формализовать принятие решения.

Основным объектом изучения ТПР для специалистов в области информатики и вычислительной техники, информационных систем и технологий, прикладной информатики и программной инженерии являются нормативные модели и методы принятия решений. Именно их наличие оправдывает самостоятельное существование ТПР. Если их исключить, то теория принятия решений распадется на частные направления в прикладной математике, психологии, экономике, искусственном интеллекте.

В многочисленных публикациях специалистов разных направлений понятие «принятие решений» трактуется, исходя из специфики рассматриваемых задач. Математики рассматривают принятие решения с позиций рекомендуемых ими формальных методов и алгоритмов; социологи – с точки зрения процессов, протекающих в обществе; психологи пытаются «заглянуть в подсознание», определяя мотивы принятия того или иного решения. Экономисты сосредотачиваются на вопросах распределения и использования ресурсов, определения рациональных объемов производства, повышения экономической эффективности и др. Юристы рассматривают принятие решения с точки зрения права. Обобщая различные взгляды на термин «принятие решений», отметим, что он употребляется в узком и широком смысле. В узком смысле – это заключительный акт некоторой деятельности (план работы, проекта и т.п.) по выбору лучшего варианта решения, осуществляемый с помощью определенных правил.

В широком смысле, принятие решения – это процесс рационального или иррационального (интуитивного) выбора альтернатив, имеющий целью достижение осознаваемого результата.

Этот процесс зависит не только от личности ЛПР, но также от методов и процедур разработки и обоснования решений. Именно этими методами и процедурами занимается теория принятия решений.

Внимание!	**Теория принятия решений** (ТПР) – это прикладная междисциплинарная наука, основанная на методах математики, искусственного интеллекта, статистики, экономики, менеджмента, психологии. ТПР изучает закономерности выбора людьми путей решения разного рода задач, а также исследует способы поиска наиболее выгодных из возможных решений. ТПР основана на потребности человека упрощать процедуру принятия решений и придавать решениям большую надежность.

Первые результаты в ТПР были получены еще до появления компьютеров:

Справка	Паскаль (1670) предложил процедуру вычисления ожидаемой ценности решения при выборе в условиях неопределенности из нескольких вариантов. Эту идею он использовал в известном пари о вере в Бога. Личная вера или неверие в Бога — выбор каждого, однако даже если вероятность существования Бога невелика, согласно Паскалю, ожидаемая ценность веры превышает ценность неверия.

Справка	Бернулли (1738) опубликовал Санкт-Петербургский парадокс: голландский торговец решает, застраховать ли груз, посылаемый из Амстердама в Петербург зимой, при условии, что есть 5 %-ный шанс потери судна и груза. В решении он определил функцию полезности и показал, что теория ожидаемой ценности может быть нормативно неправильной.

Справка	Лагранж (1801) решил задачу, смысл которой заключался в следующем: сколько земли должен брать землекоп на лопату (см. рис. на обложке пособия), чтобы его сменная производительность была максимальной? Утверждение «бери больше, кидай дальше» оказалось неверным.

Справка	Вальд (1939) указал две важные задачи принятия решений: статистическое испытание и оценивание гипотез, а также ввел такие важные понятия ТПР, как максимин, риск, правило принятия решений.

Справка	Леманн (1950) впервые ввел термин «теория принятия решений».

Справка	Сэвидж, Алле (1953) продвинули теорию реального человеческого поведения и принятия решения при риске.

Свои исторические достижения имеются также в области введения ТПР в программы университетского образования, в деле разработки *систем поддержки принятия решений* (СППР):

Справка	1971 г. – опубликована книга Мортона, в которой впервые были описаны результаты внедрения СППР, основанной на математических моделях. 1975 г. – Литтл предложил критерии проектирования СППР в менеджменте. 1978 г. – опубликован учебник по СППР, в котором описаны аспекты их создания: анализ, проектирование, внедрение, оценка и разработка. 1979 г. – Канеман и Тверски разработали теорию проспектов, позволяющую избежать *парадоксов Алле*. 1981 г. – Bonczek, Holsapple и Whinston создали теоретические основы проектирования СППР, состоящей из баз данных и знаний, языковой системы, интерфейса и системы обработки и решения задач. 1993 г. – Кодд предложил для СППР механизм OLAP (оперативный анализ и онлайновая аналитическая обработка данных). Данные представляются в виде многомерного куба для получения отчётов с помощью OLAP-машины.

Справка	2000 г. – создана первая СППР на основе Web-технологии. 2005 г. – в Москве представлена СППР нового класса – PSTM (Personal Information Systems of Top Managers). Ее основное отличие от существующих СППР – построение системы для конкретного ЛПР с предварительной логико-аналитической обработкой информации.

Принятие решения – это процесс, а не одномоментный акт.

Справка	Психологи установили, что решение не является начальным процессом творческой деятельности. Акту решения предшествует тонкий подсознательный процесс «предрешения»: мотивация, возможность неоднозначных результатов, способов достижения цели и свобода выбора. Типичные «нарушения» в этом процессе: необдуманное, эгоцентричное, «слепое» (без учета последствий), эмоциональное, самодовольное (игнорирование опыта экспертов), упрямое (повтор предыдущих ошибок) решение.

ТПР выделяет в процессе принятия решения следующие этапы (рис. 4).

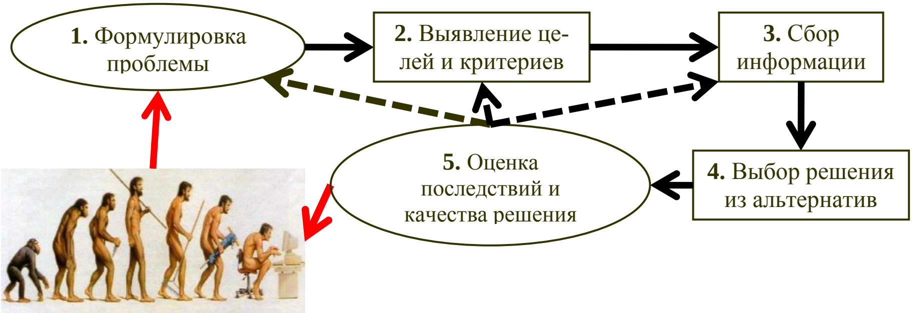


Рис. 4. Этапы процесса принятия решений

Рассмотрим процесс принятия решения на хрестоматийном историческом примере.

К иудейскому царю Соломону (IX в. до н.э.) пришли судиться две женщины. Они жили в одном доме и родили по сыну. Ночью одна из женщин случайно удушила своего ребенка и подложила его второй, взяв себе ее сына. Перед царем каждая утверждала, что является матерью оставшегося в живых ребенка.

Соломон, не зная ТПР, интуитивно выполнил все этапы процесса рационального принятия решений и не допустил ошибки (рис. 5).

1. Формулировка проблемы:
Неизвестна мать ребенка

2. Цель: **Найти мать ребенка**
Критерии: **Информативность, материнский**

3. Сбор информации:
Выяснить реакцию женщин на свое **предложение**: принести меч, разрубить ребенка и отдать им по половине (1-я женщина - не убивайте его, отдайте ей. 2-я женщина - пусть поделят ребенка, он никому не достанется).

4. Выбор по дереву альтернатив:

5. Оценка решения проблемы:
Мудрое, безошибочное

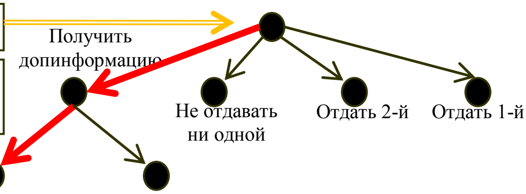


Рис. 5. Соломоново решение

Любопытны взгляды и рекомендации к процессу принятия решений исторических личностей:

Совет	«Повеления мои не исполнялись бы с точностью, если бы не были удобны к исполнению. Я советуюсь и потому заключаю, какое действие указ мой произвесть должен. И когда уверена в общем одобрении, то выпускаю мое повеление и имею удовольствие наблюдать его исполнение. Это основание моей неограниченной власти». (*Императрица Екатерина Великая*)

Совет	«Пусть никто не думает, будто можно всегда принимать безошибочные решения, напротив, всякие решения сомнительны, так как, стараясь избежать одной неприятности, попадаешь в другую. Мудрость заключается только в том, чтобы взвесив все возможные неприятности, наименьшее зло почесть за благо». *Н.Макиавелли («Государь»)*

Более сложное дерево решений получается, если допускается изменение средств достижения целей. Например, программист расширил сферу своей деятельности на базы данных. Тогда процесс принятия решений схематично представляется в виде, представленном на рис. 6.

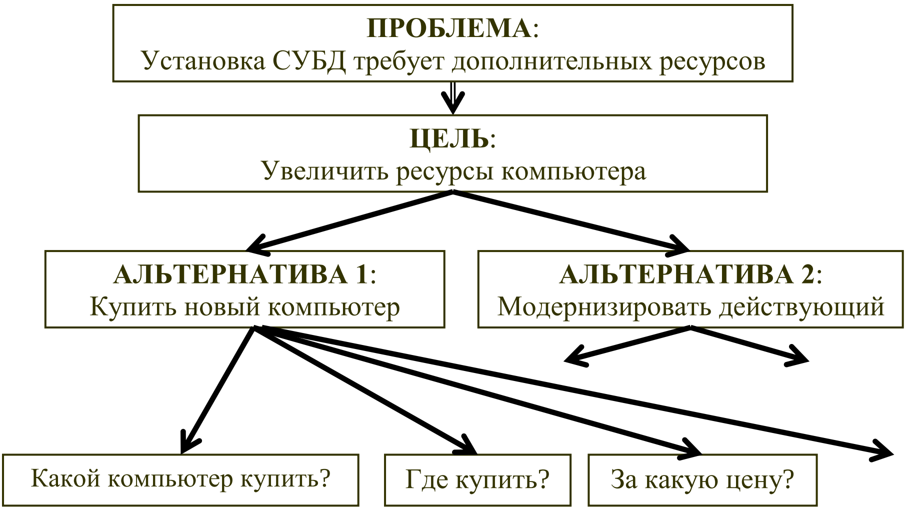


Рис. 6. Дерево принятия решений программистом

Учебный план по курсу ТПР предусматривает решение творческих задач в рамках индивидуального задания. На рис. 7 схематично представлена рекомендуемая модель процесса принятия решений.

Приведем примеры ошибок, допускаемых в процессе принятия решений:

ПРИМЕР

1. ВЫ ПОСТОЯННО ОТКЛАДЫВАЕТЕ РЕШЕНИЕ. Например, не можете решить, стать программистом или дантистом, и откладываете решение. Скорее всего, через какое-то время придется зарабатывать себе на жизнь неквалифицированным физическим трудом. В данном случае любое решение будет лучше, чем никакое.

ПРИМЕР

2. ВЫ ПРИНИМАЕТЕ РЕШЕНИЕ СЛИШКОМ ПОСПЕШНО. Риск ошибки возрастает, вы уязвимы для манипулирования.

ПРИМЕР

3. ВЫ ПОЛНОСТЬЮ ПОЛАГАЕТЕСЬ НА ИНТУИЦИЮ. Интуитивные решения имеют существенный недостаток: их нельзя заново обдумать.

ПРИМЕР

4. ВЫ НЕ ОТДЕЛЯЕТЕ ГЛАВНОЕ ОТ ВТОРОСТЕПЕННОГО. Возрастет риск принять ошибочное решение, вы не сможете узнать, в чем состояла ошибка.

ПРИМЕР

5. ЧРЕЗМЕРНЫЕ ЗАТРАТЫ НА РЕШЕНИЕ. Любое решение обладает собственной экономикой: расходы на него должны разумно согласовываться с его значением. Известен случай, когда фирма несколько недель коллективно выбирала и купила прекрасную офисную мебель. Но за это время у нее начались трудности – сотрудники уделяли слишком мало времени своим клиентам.

ПРИМЕР

6. ВЫ ЗАНИМАЕТЕСЬ ТОЛЬКО ЛЕГКИМИ ПРОБЛЕМАМИ. Рискуете, что важные для вас решения начнет принимать кто-то другой (эффект *миманса*).

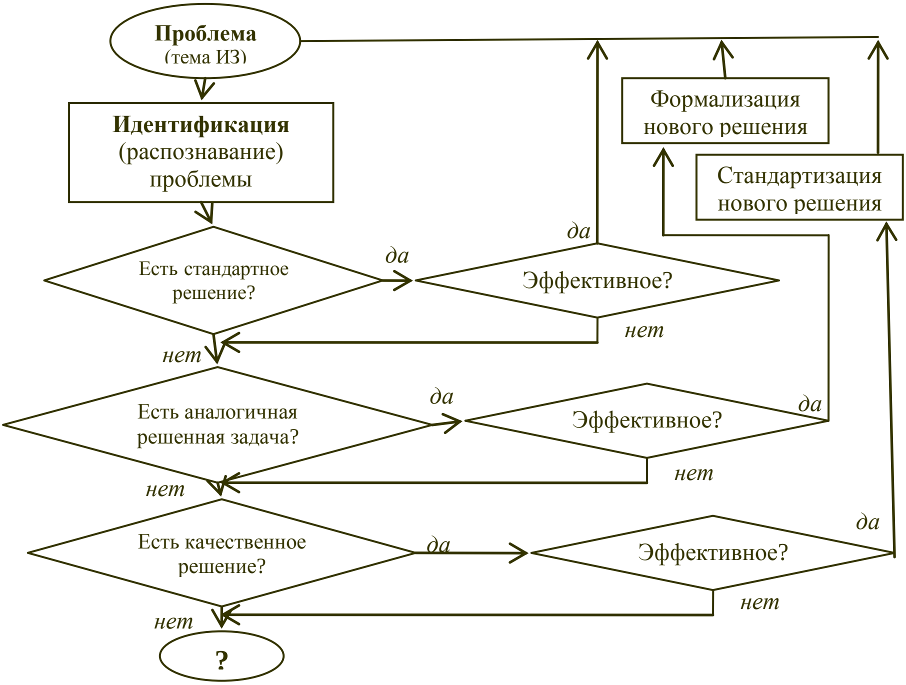


Рис. 7. Модель процесса принятия решений в ходе выполнения индивидуального задания по ТПР

Дать точную оценку в процессе решения часто затруднительно, даже используя самые современные методики, однако точность оценивания во многом зависит от объема априорной информации о проблеме.

Пример	Из пруда выловили 100 лещей, пометили несмываемой краской и выпустили обратно. Через день снова поймали 100 лещей, из них 5 оказались помеченными.

Вопрос	Сколько лещей в пруду? Ответ: в улове второго дня каждый 20-й лещ – меченый, всего же меченых 100. Лещ – не стайная рыба, поэтому по закону больших чисел в пруду примерно 100*20=2000 лещей.

Интуиция – это мощный инструмент принятия решений. Более обоснованными считаются решения, основанные на логике и опыте. Однако если проблемная ситуация уникальна и сложна, то логических суждений или интуиции может оказаться недостаточно для принятия качественного решения.

В целом классификация видов решений по различным признакам имеет следующий вид:

Признаки	Виды решений
Содержание решаемых задач	Научно-технические, технологические, экономические, политические, социальные, правовые
Уровень принятия решения	Государство, регион, организация, малая группа, личность
Количество целей	Одноцелевые, многоцелевые
Субъект, принимающий решение	Индивидуальное ЛПР, групповое ЛПР
Время действия	Стратегические, тактические, оперативные
Цикличность	Разовые, повторяющиеся
Степень формализации и программируемости	Запрограммированные (на основе стандартных процедур и правил); незапрограммированные (требующие новых процедур или правил принятия решений)
Способ обоснования	Интуитивные (основанные на чувствах и ощущениях человека), логические (основанные на знаниях, опыте и логических рассуждениях), рациональные (основанные на объективном анализе проблемных ситуаций с использованием научных методов и компьютерных технологий)
Степень сложности, соответствие ограничениям и цели	Простые, сложные, уникальные, допустимые, удовлетворительные, оптимальные

Признаки	Виды решений
Условия принятия решений	Принимаемые в условиях определенности, вероятностной определенности (риска), неопределенности (природы, человека, целей)
Размерность решения	Один или много критериев принятия решений, количество вариантов решений
Требования к виду решения	Один наилучший вариант, разделение вариантов решений на классы, упорядоченные по качеству варианты

Рациональные решения не зависят от прошлого опыта. Они основаны на объективном анализе сложных проблемных ситуаций с использованием научных методов и компьютерных технологий. Термин «рациональное» характеризует способ разработки решения, а не его качество. Рациональные решения принимаются с помощью многоэтапного аналитического процесса, но они тоже могут быть ошибочными. Вместе с тем рациональный выбор не исключает использование логики и интуиции, которые всегда активно вовлечены в процесс принятия решений. Поэтому рациональные решения считаются наиболее обоснованными, так как в процессе их разработки и принятия используются все доступные человеку механизмы – интуиция, логика и расчет.

Лекция 2. Задачи и методы принятия решений

В ТПР *выработка решения* в основном направлена на определение наилучшего (оптимального) способа действий для достижения поставленной цели.

Под целью понимается идеальное представление желаемого состояния или результата деятельности. Если фактическое состояние не соответствует желаемому, то имеет место проблема. Выработка плана действий по устранению проблемы – одна из центральных задач ТПР.

Вопрос

Когда возникают проблемы?

1. Если функционирование системы в данный момент не обеспечивает достижение цели.
2. Если функционирование системы в будущем не обеспечит достижение цели.
3. Если необходимо изменить цель.

Возникновение проблемы связано с определенными условиями. Эти условия в ТПР называют ситуациями. Совокупность проблем и ситуаций образуют проблемную ситуацию.

Субъектом всякого решения является индивидуальное или групповое *лицо, принимающее решение* (ЛПР).

В процессе принятия решения формируются *альтернативы* или варианты, а также оценивается их предпочтительность. Для этого:

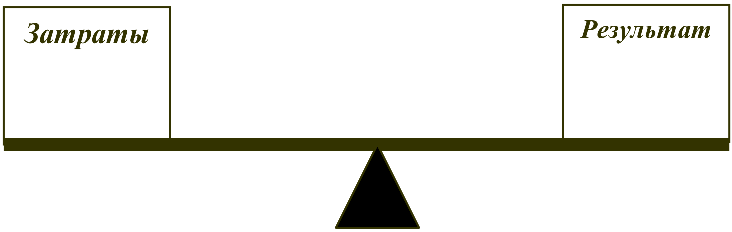
Внимание!

- индивидуальное ЛПР определяет *критерий выбора*,
- групповое ЛПР вырабатывает *принцип согласования* группового выбора.

Вырабатываемое решение считается *допустимым*, если оно удовлетворяет исходным ограничениям. Допустимое решение считается *оптимальным*, если оно обеспечивает экстремум критерия выбора или удовлетворяет принципу согласования при групповом выборе. Решение считается тем эффективнее, чем больше степень достижения целей и чем меньше затрат на их реализацию:

Пример

Баланс ресурсных затрат и результата с точки зрения производителя:



Пример

Баланс ресурсных затрат и результата с точки зрения менеджера:

Для индивидуального ЛПР общая постановка задачи принятия решения записывается в виде:

$$ИЛПР := < S_0, T, Q \,|\, S, A, B, Y, f, K, Y^* >$$

Внимание!

Слева от вертикальной черты находятся исходные данные задачи принятия решения, справа – неизвестные:

S_0 – проблемная ситуация, ***T*** – время для принятия решения, ***Q*** – ресурсы;

S – множество альтернативных ситуаций, доопределяющих ситуацию до полной группы взаимоисключающих, независимых или гипотетических ситуаций, причем сумма вероятностей их возникновения равна 1;

A – множество целей,

B – множество ограничений при принятии решений;

Y – множество альтернативных вариантов решений, из которых должно быть выбрано единственное оптимальное решение ***Y****;

f = f(A, S, Y) – функция предпочтения для оценки решений;

K – критерий выбора решения ***Y****.

Вербальная формулировка задачи принятия решений индивидуальным ЛПР: в условиях проблемной ситуации ***S_0***, располагаемого времени ***T*** и ресурсов ***Q*** необходимо доопределить ситуацию множеством альтернативных ситуаций ***S***, сформулировать множество целей ***A***, ограничений ***B***, альтернативных решений ***Y***, произвести оценку предпочтений функции $\boldsymbol{f}$ и найти оптимальное решение $\boldsymbol{Y^*}$ из множества $\boldsymbol{Y}$, руководствуясь критерием $\boldsymbol{K}$.

Для группового ЛПР общая постановка задачи принятия решения имеет вид, представленный на рис. 8, где $\boldsymbol{F(f) = F(f_1, f_2, \ldots, f_d)}$ – функция группового предпочтения, зависящая от индивидуальных предпочтений лиц, входящих в ГЛПР; $\boldsymbol{L}$ – принцип согласования индивидуальных предпочтений (например, *принцип большинства*).

Вербальная формулировка задачи принятия решений групповым ЛПР: в условиях проблемной ситуации $\boldsymbol{S_0}$, располагаемого времени $\boldsymbol{T}$ и ресурсов $\boldsymbol{Q}$ необходимо доопределить ситуацию множеством альтернативных ситуаций $\boldsymbol{S}$, сформулировать множество целей $\boldsymbol{A}$, ограничений $\boldsymbol{B}$, альтернативных решений $\boldsymbol{Y}$, произвести оценку функции группового предпочтения $\boldsymbol{F(f)}$ и найти оптимальное решение $\boldsymbol{Y^*}$ из множества $\boldsymbol{Y}$, руководствуясь принципом согласования $\boldsymbol{L}$.

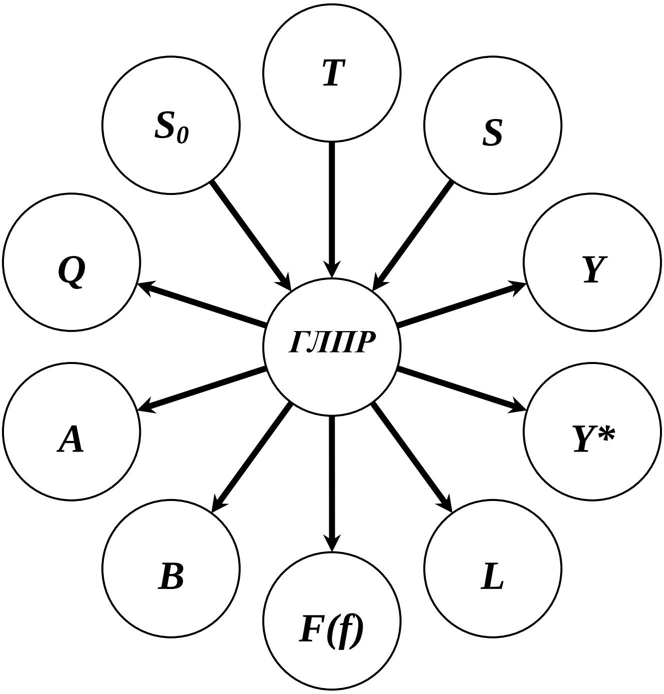


Рис. 8. Постановка задачи принятия решений для группового ЛПР

Постановка задач принятия решений для *индивидуального* и *группового* ЛПР позволяет сформулировать ряд утверждений, которые характеризуют большинство технических, управленческих и организационных решений:

СОВЕТ	**1.** Количество неизвестных элементов задачи принятия решений может быть существенно больше, чем известных.

СОВЕТ	**2.** Эксперты, привлекаемые ЛПР для принятия решений, выполняют вспомогательную роль, однако в реальности несут ответственность за свои рекомендации.

СОВЕТ	**3.** Оценка решения должна производиться на основе сравнения альтернативных вариантов решений.

СОВЕТ	**4.** В условиях неопределенности может не существовать единственного оптимального решения.

СОВЕТ	**5.** Для ЛПР с различными предпочтениями оптимальные решения могут оказаться различными.

Сложность задачи принятия решений во многом определяется степенью формализации модели проблемной ситуации. Поэтому задачи принятия решений целесообразно разделить на три группы: *хорошо структурированные*, *неструктурированные* и *слабоструктурированные* задачи.

Внимание!

1. *Хорошо структурированные* задачи, в которых наиболее существенные зависимости между факторами среды, альтернативами и их последствиями определены настолько хорошо, что допускают строгое количественное описание. Поэтому такие задачи иначе называют *формализуемыми*. Для их решения можно построить математическую модель, исследовать с ее помощью различные варианты выбора и принять оптимальное решение. К хорошо структурированным относятся задачи математического программирования, исследования операций, массового обслуживания.

2. *Неструктурированные* задачи, имеющие только качественное описание. Информация, необходимая для принятия решений, является неточной, неполной, неколичественной, а формальные модели исследуемой системы либо слишком сложны, либо отсутствуют. Задачи этого класса называют неформализуемыми. Для их решения используются субъективные суждения, интуиция, догадки, предположения, помогающие ЛПР выявить свои предпочтения и определить основные взаимосвязи между элементами задачи. Примерами являются проблемы выбора профессии, места работы, кандидата на замещение вакантной должности, перспективных проектов научных исследований и разработок, стратегии развития фирмы и многие другие.

3. *Слабоструктурированные*, т.е. смешанные задачи выбора в условиях неопределенности при многих критериях, которые частично описываются некоторой математической моделью, но в силу недостатка информации о проблеме и предпочтениях ЛПР не имеют однозначного алгоритмического решения, например, задачи планирования. В таких задачах недостаток объективной информации принципиально неустраним на момент принятия решения и восполняется субъективными суждениями ЛПР, отражающими его знания, интуицию и предпочтения.

На практике реальные задачи принятия решений, как правило, являются слабоструктурированными, т.е. такими, в постановке которых далеко не все зависимости выявлены четко, являются детерминированными, выражены количественно или символьно, а процесс принятия решений в условиях неопределенности не всегда основан на рациональном подходе и последовательном поиске оптимального решения.

Отображение множества решений **Y** в множество критериев **K** может иметь детерминированный, вероятностный или неопределенный характер, в соответствии с которым задачи и методы принятия решений можно разделить на детерминированные, в условиях риска и задачи в условиях неопределенности. Если множество критериев **K** состоит только из одного элемента, то говорят о задачах скалярной оптимизации, если множество **K** включает несколько критериев, то это задача векторной оптимизации (многокритериальная задача принятия решений). В любом случае, при наличии ситуации выбора, многокритериальности и осуществлении выбора в условиях неопределенности или риска задача принятия решений является нетривиальной.

Методы оценивания и выбора решений разделяются на *количественные* и *качественные*. Количественные методы весьма разнообразны и хорошо проработаны, в том числе в рамках таких научных дисциплин, как методы оптимизации, *исследование операций, системный анализ*:

Справка

К количественным относятся следующие методы:

• классические методы математического программирования и вычислительной математики (сфера их применения зачастую ограничена условиями дифференцируемости и унимодальности целевых функций);

Справка	• *перечислительные* методы, основанные на переборном поиске в дискретном пространстве решений, зачастую приводящие к проблеме комбинаторного взрыва («проклятье размерности»); • методы, использующие элемент случайности (*вероятностные, игровые, эволюционные*), доказавшие свою эффективность при решении трудных задач, но не гарантирующие получение глобально оптимального решения.

Вместе с количественными методами в ТПР применяются методы, которые позволяют получать и анализировать качественную информацию, например методы содержательного (вербального) анализа ситуаций, многокритериального анализа, экспертного оценивания и т.д. Применение современных методов и технологий принятия решений – жизненно важная задача ЛПР. В жесткой конкурентной борьбе, при иных равных условиях, достигают успеха и стабильно развиваются лишь те организации, которые поставили себе на службу дополнительные возможности, предоставляемые современными технологиями и СППР.

Справка	За разработку концепции «черного ящика» в процессе принятия управленческих решений *Саймон* получил Нобелевскую премию по экономике. Главный смысл его концепции заключается в том, что структура организации и принятие решений рассматриваются с точки зрения группового кооперативного поведения (рис. 9).

Методы ТПР образуют инструментарий этой науки. Что касается объектов применения ТПР, то к ним относятся любые научные и предметные области такие, как *информатика*, *САПР*, *искусственный интеллект*, *теория игр*, *теория оптимизации*, *исследование операций*, *теория управления*, *экономическая теория полезности* и др.

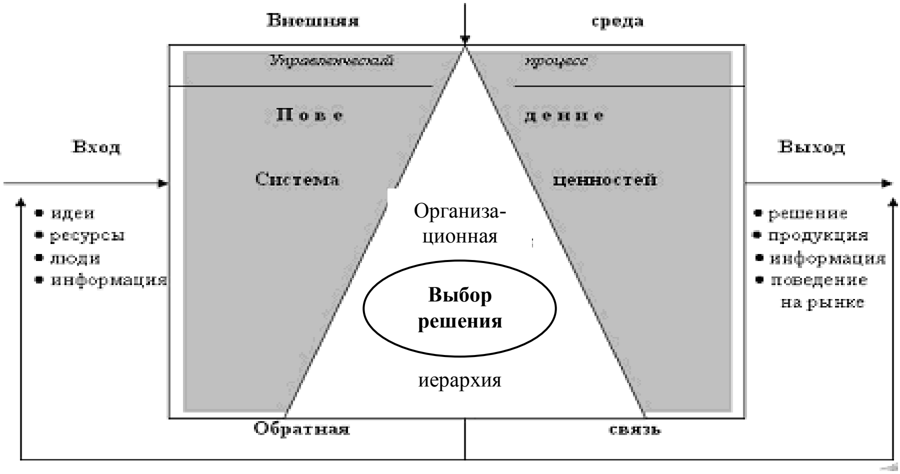


Рис. 9. Концепция «черного ящика» в процессе принятия управленческих решений (Г. Саймон)

Это влечет огромное разнообразие задач, решаемых методами ТПР, перечислить которые не представляется возможным. Поэтому укажем лишь наиболее известные задачи по следующим классифицирующим признакам: по степени определенности информации, по количеству лиц, принимающих решение, по количеству целей и критериев в задаче, по содержанию решения, а также по длительности действия решений и значимости:

Внимание!	По степени определенности информации различают: • ***общую задачу принятия решения***, если в постановке задачи неопределенными (неизвестными) являются множество альтернативных вариантов решений ***Y***, критерий выбора наилучшего решения ***K*** и принцип согласования предпочтений ***L***; • ***задачу выбора решения***, если известно множество ***Y***, а критерий выбора ***K*** или принцип согласования ***L*** являются неопределенными; • ***задачу оптимизации***, если ***Y***, ***K*** и ***L*** известны и определены.

ВНИМАНИЕ!

По числу ЛПР:

- ***задачу принятия решения индивидуальным ЛПР***, если ЛПР состоит из одного лица, принимающего решение;
- ***задачу принятия решения групповым ЛПР***, если ЛПР включает более одного лица, принимающего решение.

ВНИМАНИЕ!

По количеству целей и критериев принятия решения:

- ***одноцелевые и многоцелевые задачи***;
- ***однокритериальные и многокритериальные задачи*** (многокритериальные являются наиболее сложным и трудным классом задач принятия решений).

ВНИМАНИЕ!

По содержанию решения:

- ***технические задачи***;
- ***экономические задачи***;
- ***политические задачи*** и т.п.

ВНИМАНИЕ!

По времени и значимости:

- ***долговременные задачи***;
- ***среднесрочные задачи***;
- ***краткосрочные задачи***;
- ***тактические задачи***;
- ***стратегические задачи***.

Актуальность, массовый характер и трудность многих задач ТПР стимулировали интерес ученых к поиску их решения.

СПРАВКА

Видная роль в решении *оптимизационных задач принятия решений* принадлежит Л. Канторовичу, А. Колмогорову, а также зарубежным ученым Данцигу, Форду, Беллману и др.

Возрастание роли человеческого фактора в решениях, принимаемых в эргатических системах, исследовалось в работах О. Ларичева, Д. Поспелова, С. Воробьева, Б. Миркина, Дж. фон Неймана, Моргенштерна, Саймона и др.

Справка	Междисциплинарные связи ТПР с *искусственным интеллектом* способствовали исследованиям интеллектуальной компоненты при решении задач оптимального выбора. Из работ, повлиявших на сближение ТПР и ИИ, отметим также работы Нильсона (универсальный решатель задач) и Заде, предложившего формализацию субъективной неопределенности, Д. Поспелова, изучавшего проблему выбора в рамках *ситуационного управления*. Выбор наилучших объектов по их атрибутам сейчас является одной из разновидностей *интеллектуального анализа данных* (*Data Mining*), теория и практика которого исследовалась Н. Загоруйко.

Разнообразие задач принятия решений и междисциплинарные связи привели к разнообразию методов, на которые опирается ТПР. Ниже перечисляются основные методы и алгоритмы, изучаемые в модулях 1 – 4 дисциплины ТПР:

Модуль 1	Методы математического программирования, метод ранжирования, метод динамического программирования, алгоритм Джонсона, эволюционные алгоритмы, метод роевого интеллекта.
Модуль 2	Метод платежных матриц, геометрический метод, метод последовательных приближений, симплекс-метод.
Модуль 3	Байесовский метод, методы статистических решений, деревья решений, венгерский метод.
Модуль 4	Метод «эффективность-стоимость», метод суперкритерия, метод идеальной точки, метод анализа иерархий, методы группового выбора, методы сетевого планирования и управления.

Справка	Психологи из нескольких университетов США установили, что людям, которые постоянно сталкиваются с необходимостью решения задач выбора, сложнее сосредоточить затем внимание на повседневных задачах. Даже если выбор доставляет удовольствие, ресурсы человеческого мозга истощаются с каждым принятым решением, считают исследователи.

Лекция 3. Шкалы и методы измерения в процессе принятия решений

Эксперт или ЛПР в ходе принятия решений формируют проблемную ситуацию, цели, ограничения, альтернативы. При этом они должны *измерять* их характеристики. Измерения могут быть качественными или количественными, объективными или субъективными. Теория объективных измерений достаточно проработана. Субъективная роль человека как измерительного «прибора» изучена недостаточно.

Внимание!	Под ***измерением*** будем понимать *процедуру сравнения объектов* по определенным *показателям* (числам, символам или номерам).

Объектами измерения могут быть предметы, явления, события, решения и т.п. Показатели сравнения объектов – это свойства объектов (пространственные, временные, физические, физиологические, социологические и т.д.).

Процедура сравнения включает отношения между объектами и способ их сравнения. Различимым объектам соответствуют разные показатели, а тождественным – одинаковые.

Совет	Всякое рациональное творчество должно основываться на числе и мере (*академик А.Н. Крылов*)

Вопрос	В каких отношениях могут находиться объекты измерения?

Пример	Отношение ***тождества*** между объектами А, В и С удовлетворяет следующим аксиомам: • А = В либо А ≠ В; • Если А = В, то В = А (симметрия); • Если А = В и В = С, то А = С (транзитивность).

Кроме тождества существуют много других отношений между объектами: «больше», «меньше», «равны», «хуже», «предпочтительнее» и т.д.

Различными являются также способы сравнения объектов: сравнение объектов с одним эталоном; сравнение объектов друг с другом и т.п.

Чтобы сравнивать показатели объектов измерения и отношения между ними, введем следующее понятие:

Внимание!	Эмпирическая система $\boldsymbol{M = \langle X, R \rangle}$, где $\boldsymbol{X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}}$ – множество объектов измерения; $\boldsymbol{R = \{r_1, r_2, \ldots r_s\}}$ – множество отношений между объектами $\boldsymbol{X}$.

Функция – это частный случай отношения. Запись вида $\boldsymbol{x_i R x_j}$ означает, что объекты $\boldsymbol{x_i}$ и $\boldsymbol{x_j}$ находятся между собой в бинарном отношении $\boldsymbol{R}$. Если все объекты Х между собой сравнимы, то бинарное отношение является *полным* (*совершенным*, *линейным*), иначе – *неполным* (*несовершенным*, *нелинейным*).

При измерении часто используются свойства бинарных отношений. Полное и неполное отношения могут обладать следующими свойствами:

- *рефлексивность* ($\boldsymbol{xRx}$);
- *антирефлексивноть* (если $\boldsymbol{xR\,y}$, то $\boldsymbol{x \neq y}$);

- *симметричность* (если $\boldsymbol{xR\,y}$, то $\boldsymbol{yR\,x}$);
- *антисимметричность* (если $\boldsymbol{xR\,y}$ и $\boldsymbol{yR\,x}$, то $\boldsymbol{x=y}$);
- *транзитивность* (если $\boldsymbol{xR\,y}$ и $\boldsymbol{yR\,z}$, то $\boldsymbol{xR\,z}$).

Внимание

В теории измерений чаще всего применяются следующие типы отношений:

- тождественность
(рефлексивность + симметричность + транзитивность);
- строгий порядок
(антирефлексивность + транзитивность);
- нестрогий порядок
(рефлексивность + антисимметричность + транзитивность).

Однако на практике при реальных измерениях в эмпирических системах объекты, показатели их сравнения и виды отношений весьма разнообразны. Это привело к необходимости установления *универсальной* числовой системы $\boldsymbol{N = (C,\ S)}$, где $\boldsymbol{C}$ – множество действительных чисел; $\boldsymbol{S}$ – множество отношений между числами.

Используем универсальную числовую систему, чтобы унифицировать процесс измерения. Для этого она должна быть *изоморфной* или, хотя бы, *гомоморфной* эмпирической системе $\boldsymbol{M}$.

Справка

Системы изоморфны, если они подобны и существует взаимно однозначное отображение $\boldsymbol{f}$ объектов измерения одной системы в другую: $\boldsymbol{M = (X, R) \leftrightarrow^{f} N = (C, S)}$.

Главными проблемами измерений при формировании решений являются их *представление* и *единственность*.

Справка

Проблема представления состоит в доказательстве, что любую эмпирическую систему $\boldsymbol{M}$ можно изоморфно или гомоморфно представить с помощью числовой системы $\boldsymbol{N}$. Доказано, что всегда существует числовая система $\boldsymbol{N}$ для описания эмпирических объектов, если между ними существуют отношения *эквивалентности, строгого* или *нестрогого порядка*.

Справка

Проблема единственности заключается в представлении эмпирической системы М различными типами *шкал измерений*.

Внимание!

Шкала измерений – это числовая ось, показывающая как элементы множеств отображаются в числа.

Шкалы измерений бывают качественными и количественными.

Пример

Пусть в базе данных содержатся две таблицы: R (1000 элементов) и S (250). Измерение в количественной шкале отношений зафиксирует, что таблица R содержит в 4 раза больше элементов, чем S. Измерение в качественной шкале порядков даст информацию, что таблица R содержит больше элементов, чем S, измерение в качественной номинальной шкале – таблицы R и S содержат разное число элементов. Таким образом, измерение в количественных шкалах дает информации больше, чем в качественных шкалах.

Качественными шкалами являются номинальная шкала и шкала порядков.

Внимание!

Номинальная шкала служит для указания принадлежности объекта некоторому классу.

Объектам одного класса присваивается одно число или имя, а объектам разных классов – разные числа или имена. В номинальной шкале нет масштаба и точки отсчета. Для компьютерной обработки данных в шкале используют только операцию их совпадения или несовпадения. Операция включает подсчет числа или частоты совпадений. Степень различия объектов по шкале определить невозможно. Номинальные шкалы: названия болезней, почтовые, телефонные индексы регионов и стран, пол человека.

Внимание!

Шкала порядков используется для измерения предпочтения одного объекта перед другим (например, шкала твердости минералов, воинских званий, силы землетрясения, вузовских отметок). Если сопоставление пары объектов лишено смысла, то оно не выполняется (частичный порядок). Шкала широко используется при экспертном оценивании расстояния между парой объектов. Разновидности порядковой шкалы: ранговые и балльные шкалы. В шкале нет масштаба и начала отсчета. Числа в шкале определяют порядок следования объектов, но не степень предпочтения.

Разновидностью порядковой шкалы также считается **полярная шкала**, которая используется для различения полюсов («холодно – жарко», «белое – черное», «за – против», {– 1; +1} и т.п.) и имеет середину.

Количественными являются шкалы интервалов и отношений.

Внимание!

Шкала интервалов используется, если известны расстояния между объектами. Примером шкалы является измерение температуры. Свойством шкалы является равенство интервалов измерения. Величины, измеряемые в этой шкале, зависят от начала отсчета. **Шкала разностей** или **периодическая шкала** являются частным случаем шкалы интервалов. Время, расстояние и температура имеют свободу выбора начала отсчета. Например, началом летоисчисления принято считать Рождество Христово, хотя существуют и другие точки отсчета; температура может измеряться по шкалам Цельсия и Фаренгейта.

Внимание!

Шкала отношений является частным случаем шкалы интервалов при выборе нулевой точки отсчета. Она используется для измерения длины, массы объекта, величины тока, денег и т.п. Числа шкалы отражают во сколько раз свойство одного объекта превосходит свойство другого. **Абсолютная шкала** – частный случай шкалы отношений, в ней имеется нулевая точка отсчета и единичный масштаб, над величинами в этой шкале можно выполнять любые действия.

Информации в количественной шкале достаточно для ее отображения в качественную шкалу. Обратное не верно.

Вопрос

Много ли информации теряется при переходе от количественных шкал к качественным?

Пример

Пусть измерительный прибор может различать *m* состояний. Сопоставим абсолютную (*Ша*), порядковую (*Шп*) и номинальную (*Шн*) шкалы.

Оказалось, что с ростом количества объектов измерения (*n*) различия в информативности шкал уменьшаются! Величина *Шн/Ша* остается малой и почти не меняется. Отношение *Шп/Ша* быстро растет и при $n>5m$ достигает величины *0.9*, т.е. информативность шкалы порядка приближается к информативности абсолютной шкалы.

Совет

При использовании простых приборов и процедур измерения можно получить почти столько же информации, сколько с помощью сложных и дорогих. Если измерительным «прибором» является эксперт, использование порядковой шкалы проще, нежели абсолютной. Количественную оценку целесообразно делать лишь для объектов с самым низким и высоким рангом (этой калибровки достаточно, чтобы средние значения в качественной шкале перевести в средние значения в количественной).

Методы субъективных измерений в ТПР предполагают, что дано конечное число измеряемых объектов $\boldsymbol{X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}}$ и сформулированы один или несколько признаков, по которым они сравниваются. Методы различаются только *процедурой сравнения*.

Процедура сравнения включает построение отношений между объектами эмпирической системы ***M***, выбор отображающей функции ***f*** и шкалы измерений.

Внимание!

На практике применяют следующие методы субъективных измерений:

- ***ранжирование***;
- ***парное сравнение***;
- ***непосредственная оценка***;
- ***последовательное сравнение.***

Ранжирование – это различные процедуры измерения для упорядочения объектов в порядке предпочтений эксперта или ЛПР.

Если между объектами нет одинаковых, то это означает строгий порядок:

$x_1 > x_2 > \ldots > x_n$.

Тогда ранжированию объектов в порядковой шкале соответствуют упорядоченные числа (ранги):

$c_1 > c_2 > \ldots > c_n$.

Если некоторые объекты тождественны, то это означает нестрогий порядок.

Пример

Пусть имеется *m* экспертов. Поставлена задача провести ранжирование *n* объектов.

Результатом ранжирования будет матрица, в которой ранги определяют только порядок объектов, а не то, насколько один объект предпочтительнее другого:

	x_1	x_2	…	x_n
Э$_1$	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
Э$_2$	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	c_{ij}	…
Э$_m$	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

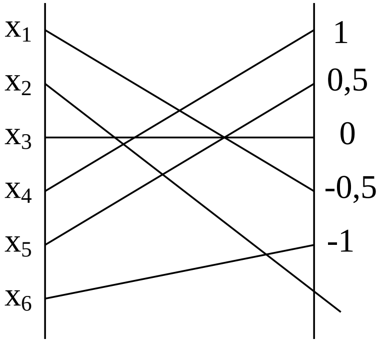
Достоинство метода ранжирования – простота. Недостаток – трудность ранжирования большого числа объектов ($n > 10$), т.к. число связей объектов быстро растет, что влечет ошибки в процессе ранжирования.

Парное сравнение, как и ранжирование, проводится в порядковой шкале, но путем сравнения всех возможных *пар объектов*. Для этого используются разные формы числового представления:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, если\, x_i \succ x_j; \\ 0, x_i \prec x_j. \end{cases} \qquad C_{ij} = \begin{cases} 2, x_i \succ x_j; \\ 1, x_i \infty x_j; \\ 0, x_i \prec x_j. \end{cases}$$

Здесь знак «$\succ$» означает, что один объект предпочтительнее другого. Метод парного сравнения часто применяется для отображения результатов спортивных состязаний.

Метод непосредственной оценки представляет собой процедуру приписывания объектам числовых значений в шкале интервалов. Иногда в качестве шкалы интервалов используются 5-, 10- или 100-балльные шкалы:



Метод последовательных приближений является комбинацией методов ранжирования и непосредственной оценки. Алгоритм последовательного сравнения следующий:

Пример

1. Ранжируем объекты.

2. Присваиваем объектам числовые значения по методу непосредственной оценки. Первому из них присваиваем некоторое значение наивысшего ранга, например по шкале [0, 1] значение *единица*.

3. Решаем вопрос о том, будет ли 1-й объект превосходить по предпочтительности все остальные

	объекты вместе взятые? Если – да, то ЛПР увеличивает числовую оценку 1-го объекта так, чтобы она стала больше суммы числовых оценок остальных объектов. В противном случае, при необходимости, ЛПР изменяет оценку так, чтобы она стала меньше, чем сумма непосредственных оценок остальных объектов. **4.** Повторяем вопрос для 2-го объекта: будет ли он предпочтительнее, чем все последующие вместе взятые, и т.д.

Справка	21 июня 2010 г. будет 62 года со дня запуска первого компьютера. Машина была построена исследователями из Университета Манчестера. Компьютер занимал большую комнату и весил тонну. Он получил неофициальное название *Baby*. Объем памяти составлял 128 байт.

Лекция 4. Принятие решений в нелинейных распределительных задачах

Представьте, что вы руководитель группы разработчиков софта, которого не устраивают показатели работы группы. Необходимо осуществить мероприятия по увеличению объема выпуска программной продукции, повышению его качества, снижению себестоимости, обеспечению ритмичности и т.п. Если добиваться всех этих целей сразу, то задача может оказаться некорректной, поскольку достижение целей зависит от множества различных факторов (количества исполнителей, уровня их квалификации и т.п.). Если вам известны формы зависимостей целей от факторов, которыми можно управлять, то возникает задача поиска сочетания факторов, обеспечивающего оптимум для поставленной цели.

Задача поиска экстремума (максимума или минимума) некоторой функции при наличии ограничений на значения ее переменных называется общей задачей математического программирования. Одним из первых исторических упоминаний об этой задаче является поэма Вергилия «Энеида».

Справка

На свою просьбу продать ей участок земли у моря королева Дидо получила согласие. Размеры этого участка должны были быть такими, чтобы участок земли можно было опоясать шкурой одного вола. Она разрезала шкуру на тонкие полоски, сплела из них длинный канат и решила задачу поиска участка с максимальной площадью с учетом прямой формы примыкающего побережья моря. Такой фигурой, как известно, является полукруг. По легенде на месте участка королевы Дидо был основан Карфаген.

(*Вергилий «Энеида»*)

Представляет ли какие-либо трудности решение общей задачи математического программирования?

Пример

Найти максимум функции F(x) при простейших условиях A< x <B.

Классическая математика предлагает взять производную от F(x), приравнять её нулю и решить полученное уравнение (как, каким методом решать и сколько времени займет решение – это, кстати, тоже вопрос).

Если этот путь вас не устраивает, то с помощью компьютера можно разбить отрезок [A, B] на 100 частей, вычислить значения функции F(x) в образовавшихся интервалах и найти среди них максимальное. Напрашивается вывод о том, что решение этой задачи в случае одной переменной не представляет особых затруднений.

Если у вас задача максимизации F(x, y) две переменные с условиями A< x <B, C< y <D, то попытка воспользоваться аппаратом классической математики будет успешной лишь в случае, когда есть уверенность, что максимум достигается внутри прямоугольника, определяющего множество допустимых точек (граничных точек здесь множество). Если использовать численное решение, то при той же точности придется разбить интервалы по x и y на 100 частей и вычислять значения функции в 100×100 точках. В случае n переменных аналогичный подход к решению потребует объем вычислений порядка 100 n (при $n > 10$ трудности будут даже у суперкомпьютера).

Ни в одном учебнике вы не найдете простого универсального метода решения таких задач математического программирования. Однако изобретены оригинальные методы для отдельных классов задач.

Так, для решения задач линейного программирования (задач с линейной целевой функцией и линейными ограничениями) существует универсальный симплекс-метод, имеющий множество модификаций и дающий решение задачи небольшой размерности в приемлемое время даже вручную.

Для решения целочисленных линейных задач существует несколько методов (метод Гомори, метод ветвей и границ), которые, тем не менее, не гарантируют получение оптимального целочисленного плана в приемлемые сроки.

Для решения задач выпуклого программирования (минимизации нелинейной выпуклой функции или максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве допустимых решений) разработаны различные методы, базирующиеся на теореме Куна – Таккера и понятии градиента функции.

Детерминированные задачи скалярной оптимизации относятся к классу хорошо структурированных задач принятия решений, о которых имеется достаточная и достоверная количественная информация. Это означает, что задача должна быть хорошо формализована (имеется адекватная математическая модель реального объекта); существует единственная целевая функция (критерий оптимизации), позволяющая судить о качестве рассматриваемых альтернативных вариантов; имеется возможность количественной оценки значений целевой функции; задача имеет определенные степени свободы (ресурсы оптимизации), т.е. некоторые параметры функционирования системы можно произвольно изменять в некоторых пределах в целях улучшения значений целевой функции.

Детерминированные распределительные задачи – один из наиболее распространенных классов задач принятия решений – имеют свои методы решения. В частности, в 1957 г. опубликована монография Р. Беллмана, положившая начало одному из оригинальных методов исследования многошаговых процессов принятия решений – методу динамического программирования. Большой вклад в развитие методов оптимизации подобных задач внесла группа советских математиков во главе с Л.С. Понтрягиным.

В самых различных областях деятельности приходится иметь дело с необходимостью поэтапного принятия решений для достижения некоторой конечной цели. Элементарными примерами такого рода процессов могут служить любые игры с целью достижения максимального возможного выигрыша, управление космическим кораблем путем поэтапной корректуры режимов с целью поддержания заданного удаления от Земли, все виды хозяйственной деятельности и т.п.

Если для одношаговых процессов принимаемые решения, как правило, относительно просты, то в многошаговых процессах структура решения несравнимо сложнее. Для иллюстрации математических проблем, возникающих при исследовании многошаговых процессов принятия решений, рассмотрим следующую идеализированную постановку нелинейной распределительной задачи:

Пусть необходимо выполнить некоторый объем работ V. В распоряжении имеется N видов оборудования. Задана (аналитически или таблично) нелинейная зависимость эксплуатационных затрат каждого вида оборудования от объема выполняемых работ. Требуется так распределить объемы работ по N видам оборудования, чтобы суммарные затраты были минимальными.

Если зависимость эксплуатационных затрат от объемов работ задана аналитически, то для решения задачи можно, например, применить метод неопределенных множителей Лагранжа. Если же зависимость задана таблично, то применяют, как правило, метод динамического программирования. Он основан на принципе Беллмана:

Внимание!	Оптимальные по Беллману стратегии принятия решений обладают следующим свойством: каковы бы ни были начальные состояния и начальные решения, все последующие решения должны приниматься исходя из оптимальной стратегии на данном этапе, с учетом состояния, вытекающего из первого решения.

Обозначим зависимость эксплуатационных затрат оборудования i-го вида от объема работ x_i, выполняемого оборудованием i-го вида, через $Y_i(x_i)$. В данной распределительной задаче в качестве ограничения примем $\sum_{i=1}^{n} x_i = V, x_i \geq 0$. Необходимо минимизировать функцию $Y = \sum Y_i(x_i) \to \min$.

Обозначим через $f_N(x)$ величину минимальных затрат при оптимальном распределении объема работ x по N видам оборудования. Если $x = 0$, то $f_N(0) = 0$, где N = 1, 2,… (при нулевом объеме работ оборудование не работает, поэтому затраты равны 0).

Пусть N=1. Тогда при любом объеме работ x справедливо: $f_1(x) = Y_1(x)$.

Используя принцип Беллмана, можно найти рекуррентное соотношение между $f_N(x) \sim f_{N-1}(x)$, что позволит по индукции вычислять каждое последующее значение $f_i\ (x)$, i = 2,..., N, по известному начальному значению $f_1(x)$.

Действительно, если начальный объем работ для N-го вида оборудования равен x_N , то затраты составят величину $Y_N\ (x_N)$, а минимальные затраты при оптимальном распределении оставшегося объема работ $(x - x_N)$ для $(N-1)$-го вида оборудования, составят $f_{N-1}\ (x - x_N)$. Оптимальным решением будет такой выбор x_N, при котором затраты составят величину

$$f_N(x) = \min\left[Y_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)\right], \quad 0 \leq x_N \leq x \leq V, \qquad (1)$$

причем $f_1(x) = Y_1(x)$.

Это соотношение позволяет упростить вычислительную сложность задачи, сводя N-мерную многошаговую задачу принятия решений к решению N-одномерных задач оптимизации согласно указанному рекуррентному соотношению (1). Таким образом, метод отражает пошаговый процесс принятия решений.

Существуют две вычислительные схемы метода: алгоритм прямой и обратной прогонки. Согласно алгоритму прямой прогонки расчеты ведутся в естественном порядке $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow \ldots \rightarrow f_N$, в отличие от обратной прогонки, где вычисления начинаются с последнего этапа. Процедура прямой прогонки представляется более ясной и логичной, однако практика показывает, что обратная прогонка в ряде случаев более эффективна (задачи управления запасами, планирования и т.п., где хронология событий в обратном порядке более удобна).

Вопрос	Какова эффективность метода динамического программирования?

Из приведенных выше замечаний и решений можно сделать некоторые выводы относительно метода динамического программирования, базирующегося на принципе оптимальности Беллмана.

1. Метод динамического программирования позволяет свести N-мерную задачу оптимизации к совокупности задач меньшей размерности (очевидно, что легче решить 10 одномерных задач оптимизации, чем одну 10-мерную).

2. Метод ориентирован на решение не конкретной задачи, а целого класса подобных задач.

3. Появление дополнительных ограничений подчас облегчает решение задачи за счет уменьшения объема перебора вариантов.

4. Главным недостатком метода является, говоря словами Беллмана, «проклятие размерности» – сложность метода существенно возрастает с увеличением размерности задачи.

Лекция 5. Принятие решений в задачах упорядочения

С задачами упорядочения при поиске наиболее привлекательного решения в условиях различных ограничений мы сталкиваемся постоянно. Это трудные комбинаторные задачи, связанные с построением расписаний, определением оптимальной последовательности обработки изделий, массивов информации, выбором наилучших маршрутов движения и т.п. В задачах упорядочения от порядка выполнения работ зависит распределение ресурсов по шагам.

Методологическую основу для решения задач упорядочения последовательности работ предоставляет теория расписаний. Теория расписаний – один из разделов исследования операций, в котором изучаются математические постановки и методы решения задач календарного планирования и оперативного управления, упорядочения во времени фиксированной системы ресурсов для выполнения определенной совокупности работ. В теории расписаний основное внимание уделяется вопросам оптимального распределения и упорядочения конечного множества требований, обслуживаемых детерминированными системами (планирование производства, выполнение потока вычислительных задач, составление расписания учебных занятий и т.п.). При этом учитываются структура и временные параметры технологического процесса.

Временная увязка всего множества действий, сопряженных с достижением заданной цели, уже сама по себе сложная задача. Если же необходимо найти оптимальное упорядочение или построить наилучшее расписание, да еще в кратчайший срок, то сложность задачи неизмеримо возрастает. Рассмотрим идеализированную постановку задачи упорядочения:

	Имеется m изделий, каждое из которых вначале должно быть обработано на первой машине, а затем на второй. Известно время обработка j-го изделия (j = 1, 2,..., m) на первой машине $\mathrm{t}_{1,j}$ и на второй машине $t_{2,j}$. Найти порядок с минимальным суммарным временем обработки всех изделий на двух машинах.

Перечислим основные ограничения в данной задаче:

- первая машина работает без простоев;

- время перехода изделия от одной машины к другой незначительно, и им можно пренебречь;

- нельзя начинать обработку очередного изделия, не завершив обработку предыдущего.

Обозначим через $t_{\text{п}j}$ время простоя второй машины, если она уже свободна, а обработка очередного изделия на первой машине еще не завершена. Тогда целевая функция, которую необходимо минимизировать, имеет вид

$$T = \sum t_{nj} + \sum t_{2j} \to \min .$$

Справка	Задача минимизации суммарного времени обработки всех изделий на двух машинах, по существу, сводится к минимизации суммарного времени простоя второй машины (это справедливо лишь для двух машин!)

Общее число вариантов решения этой задачи равно *m*! Задачу можно решать методом динамического программирования. Однако для двух машин известен эффективный алгоритм Джонсона:

Внимание	1. Поиск минимального элемента среди $t_{1,j}$ и $t_{2,j}$. 2. Перестановка изделий. Если минимальный элемент относится к первой машине, то соответствующее *j*-е изделие поставить на первое место. Если минимальный элемент относится ко второй машине, то на последнее место. Если же несколько одинаковых минимальных элементов относятся к 1-й (2-й) машине, то на первое (последнее) место ставят изделие, которому соответствует больший элемент, относящийся ко 2-й (1-й) машине. 3. Вычеркиваем переставленные изделия и переходим к п.1 до тех пор, пока не будет исчерпан список изделий. В результате получим оптимальную последовательность обработки изделий на двух машинах.

Алгоритм Джонсона можно применить для трех машин лишь при соблюдении одного из следующих двух неравенств:

1) min $\{t_{1j}\} \geq$ max $\{t_{2j}\}$ (если при заданном технологическом порядке обработки изделий данное условие выполняется, то суммируются t_{1j} и t_{2j}, и задача сводится к двум машинам);

2) min $\{t_{3j}\} \geq$ max $\{t_{2j}\}$ (если при заданном технологическом порядке обработки изделий данное условие выполняется, то суммируются t_{2j} и t_{3j}, и задача сводится к двум машинам).

Промышленные системы и программные продукты, реализующие решение реальных, а не идеализированных задач упорядочения, составления расписаний и планирования, используют разнообразные методы эвристического программирования. Эти методы позволяют найти оптимизированные, а не оптимальные решения. К современным методам поиска оптимизированных решений, не гарантирующим нахождение глобального оптимума, относятся *эволюционные алгоритмы*, *алгоритмы роевого интеллекта*, *моделирования отжига* и др.

В ***эволюционных алгоритмах*** применяются понятия, традиционно относящиеся к биологии, такие, как популяция, кроссинговер, мутация и естественный отбор, для создания лучших решений задачи. В эвристике этих алгоритмов используется гипотеза об аналогии между естественным отбором и процессом выбора наилучшего решения из множества возможных. Например, в генетических алгоритмах носителями решений являются особи, в «хромосомах» которых закодированы те или иные существенные параметры. Моделируя отбор лучших особей как процесс эволюции в популяции особей, можно получить оптимизированное решение задачи, задав начальные условия эволюционного процесса, сформировав популяцию и указав цель эволюционного процесса. Ключевой вопрос здесь – возможность задать функции оценки приспособленности особей (*fithess function*) или целевые функции.

Общая схема работы ЭА включает следующие шаги:

Внимание!

1. Задается способ кодирования параметров задачи в «хромосомах».
2. Создается исходная популяция (начальное решение).
3. Рассчитывается функция приспособленности каждой особи.
4. Для наиболее приспособленных особей производится скрещивание (кроссинговер) и рождение новых особей, содержащих признаки обоих родителей. При этом передача признаков осуществляется в соответствии с одним из выбранных способов «обмена участками хромосом». Наименее приспособленные особи «отмирают» и заменяются новорожденными. Случайно осуществляется мутация отдельных особей.
5. Шаги 2 – 4 итерационно повторяются заданное число раз.
6. Из полученной популяции выбираются лучшие особи, «хромосомы» декодируются, а получаемое решение соответствует локальному оптимуму.

Преимущества эволюционных алгоритмов в простоте реализации, относительно высокой скорости работы, параллельном поиске решений, недостатки – в некоторой сложности выбора схемы кодирования и описания ограничений в задаче, возможном вырождении популяции.

В эвристических ***алгоритмах роевого интеллекта*** многомерное пространство поиска населяется роем частиц (решений). Помимо координат каждая частица обладает скоростью перемещения и ускорением. Определяются координаты частицы с лучшим текущим оптимумом, к которому на следующем шаге устремляются остальные частицы. Элемент случайности моделируется некоторым числом «сумасшедших» частиц, закон движения которых отличается от закона движения остальных.

Общая схема работы алгоритма роя включает следующие шаги:

ВНИМАНИЕ!	1. Создается исходная «случайная» популяция частиц. 2. Рассчитывается целевая функция для каждой частицы. 3. Лучшая частица с точки зрения целевой функции объявляется «центром притяжения». Векторы скоростей всех частиц, за исключением «сумасшедших», устремляются к этому центру. Чем дальше частица находится от центра, тем большим ускорением она обладает. 4. Рассчитываются новые координаты частиц в пространстве решений. 5. Шаги 2 – 4 итерационно повторяются заданное число раз. 6. Последний «центр тяжести» соответствует найденному локальному оптимуму.

Муравьи, пчёлы, птицы умеют выполнять работу совместными усилиями. В отличие от людей, они обходятся без руководящего центра. Интернет тоже децентрализован, и, возможно, решение его сетевых проблем стоит искать именно у общественных насекомых.

СПРАВКА	Склонность людей строить иерархические структуры принятия решений иногда только вредит. Чтобы решать свои сложные проблемы, муравьям и пчёлам не нужно их понимать. Э. Бонобо специально изучил, каким образом муравьи прокладывают дорожку к источнику пищи. Выяснилось, что эта дорожка – кратчайший путь к цели. Способ, которым насекомые достигают этого, прост, но эффективен. Муравей, добравшийся до еды, возвращается, источая запах феромонов. Поскольку кратчайший путь одновременно и самый быстрый, по нему успеют пробежать больше муравьёв, и феромонный след станет самым сильным. Вот и всё.

Эта схема была успешно применена для задачи маршрутизации информации в сети, а также для разработки более эффективных схем кэширования данных в Интернете, для оптимизации цифровых фотографий. Алгоритм роевого интеллекта может давать результаты, даже лучшие чем при использовании эволюционных алгоритмов и нейронных сетей. Рой не знает, где именно находится пища, но на каждой итерации рой знает, как далеко она находится. Эффективной стратегией будет следование за особью, которая на данный момент находится к пище ближе всего.

ПРИМЕР

Обозначим через f_t – текущее значение целевой функции i-й частицы на итерации t, через f_{best} – лучшее значение целевой функции i-й частицы, F_t – лучшее значение целевой функции среди всех частиц. Тогда скорость частицы на следующем шаге v_{t+1} вычисляется по формуле

$$v_{t+1} = v_t + k_1 * rnd(0,1) * (f_{best} - f_t) + k_2 * rnd(0,1) * (F_t - f_t),$$

а значение целевой функции i-й частицы – по формуле

$$f_{t+1} = f_t + v_{t+1} ,$$

где v_t – скорость частицы на итерации t, rnd(0,1) – случайное число на интервале (0,1), k_1 , k_2 – коэффициенты (обычно $k_1 = k_2 = 2$).

Таким образом, согласно алгоритму роя после случайной инициализации популяции частиц для каждой из них вычисляется значение целевой функции f_t. Если оно окажется лучше, чем f_{best} , то f_{best} обновляется. Далее среди f_{best} выбирается лучшее значение F_t и затем вычисляются согласно приведенным выше формулам новые значения скоростей частиц и текущие значение их целевых функций. Итерационный процесс повторяется.

Для большинства задач упорядочения объем популяции в 10 частиц достаточен, чтобы получить хорошие результаты. Типичный размер популяции – 20÷40 частиц. Для некоторых специальных задач упорядочения размер популяции может достигать от 100 до 200 частиц. Число итераций t_{max} выбирается следующим образом. Если, например, целочисленная переменная *x* изменяется на интервале [–10, 10], то $t_{max} = 20$. Коэффициенты k_1 и k_2 обычно выбираются равными 2, либо варьируются на интервале [0, 4].

Метод отжига был предложен в начале 80-х годов для решения комбинаторных задач оптимизации (Киркпатрик, 1983). В качестве природного аналога был взят процесс кристаллизации эмалевой субстанции. В ходе ее охлаждения степень свободного движения молекул постепенно становится ограниченной, достигая точки равновесия с минимальным энергетическим уровнем в кристаллической структуре. Важной особенностью данного процесса является скорость охлаждения. Обозначим через S множество состояний системы, через T температуру системы при термическом равновесии. Тогда $p_{T(a)}$ является вероятностью того, что система при температуре T находится в состоянии a, независимо от энергетического уровня E_a этого состояния. Согласно распределению Больцмана

$$p_T(a) = \frac{1}{\sum\limits_{b \in S} \exp(-E_b / k \cdot T)} \cdot \exp(-E_a / k \cdot T),$$

где k является константой Больцмана. Предположим, что система находится в момент времени t в состоянии a с энергетическим уровнем E_a. Путем небольшого случайного изменения в момент времени $t+1$ система переходит в состояние b с энергетическим уровнем E_b. Если разница $\Delta E = E_b - E_a \leq 0$, то актуальным становится состояние b, если $\Delta E > 0$, то состояние b запоминается и селектируется с вероятностью $exp((E_a - E_b)/(k \cdot T))$. При больших t данное правило обеспечивает переход системы в состояние равновесия путем генерации последовательности решений задачи оптимизации. Аналогия с физическим процессом здесь заключается в следующем:

- решения оптимизационной задачи соответствуют состояниям системы в процессе охлаждения физической субстанции;
- целевая функция F соответствует энергетическому уровню субстанции;
- процедура поиска оптимального решения аналогична поиску состояния системы с минимальным энергетическим уровнем;
- температура T является параметром для управления процедурой оптимизации.

Общая схема работы алгоритма моделирования отжига включает следующие шаги:

Внимание!	1 выбор начальной температуры $T_0>0$ 2 установка начального числа итераций I_0 3 t:=0 4 выбор начального решения **x** 5 вычисление F(**x**) 6 for i=1 to I_t 7 begin 8 копирование (репликация) **x** 9 переход в соседнюю точку **x′** путем мутации (вариации) копии **x** 10 вычисление F(**x′**) 11 если ΔE=F(**x′**) – F(**x**)≤0, то замена **x** на **x′**. Иначе, если $\exp(-\Delta E/T_t)>$random(0,1), то **x′** запоминается и селектируется с вероятностью $\exp(-\Delta E/T_t)$ 12 end 13 t:=t+1 14 установка T_t 15 установка I_t 16 если выполняются условия останова, то стоп

Значительное влияние на результативность метода отжига оказывает «план охлаждения», который устанавливает динамику изменения параметра T_t и количество проводимых итераций I_t. Один из вариантов плана состоит в установке высокого начального значения T_0, для того чтобы вначале практически каждое решение запоминалось и селектировалось с определенной вероятностью. Благодаря этому на начальном этапе процесса оптимизации можно избежать преждевременного сокращения пространства поиска. В дальнейшем обычно применяется пропорциональное уменьшение параметра T: $T_{t+1} = \alpha \cdot T_t$, где α – некоторая константа (как правило, $0{,}8 \le \alpha \le 0{,}99$). Таким образом, обеспечивается асимптотическое приближение к значению $T_{min} = 0$. Отметим, что данный план является далеко не единственным. На практике метод отжига демонстрирует толерантность к неоптимальным решениям: вероятность «выживания» решения тем выше, чем выше значение T и чем меньше разница между сравниваемыми решениями (это помогает избежать попадания в локальный экстремум целевой функции). Напротив, на завершающей фазе оптимизационного процесса, чем меньше значение T, тем меньше пространство поиска, а при $T = 0$ «выживают» только лучшие решения. Медленное «охлаждение», в отличие от быстрого, приводит к лучшим результатам, т.е. выбирать необходимо между скоростью сходимости и результативностью метода.

Процесс, моделируемый по методу отжига, является марковским, и при определенных допущениях относительно применяемого «плана охлаждения» можно доказать его сходимость к глобальному оптимуму с экспоненциальным ростом времени его поиска. Поэтому при ограничении на время оптимизации метод рассматривается как эвристический, допускающий в зависимости от применяемого «плана охлаждения», что глобальный оптимум не будет найден.

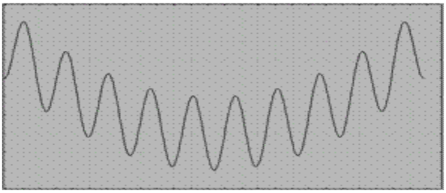
Другой важной особенностью при реализации метода отжига является установление отношения соседства и механизма, с помощью которого осуществляется переход от одного решения к другому. Определение отношения соседства зависит от решаемой задачи, а выбор новой точки среди соседних в большинстве случаев делается случайно.

Показателями эффективности эвристических алгоритмов являются скорость и робастность (устойчивость, нечувствительность к различным помехам) поиска. Скорость поиска определяется временем работы алгоритма и временем достижения решением заданного качества. Робастность означает устойчивость поиска к попаданию в точки локальных экстремумов.

Какие особенности целевых функций в наибольшей степени влияют на скорость работы рассмотренных эвристических алгоритмов решения задачи упорядочения? К числу таких особенностей целевых функций относятся многоэкстремальность и изолированность.

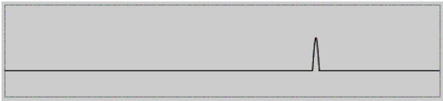
Многоэкстремальность создает множество ложных аттракторов – асимптотически устойчивых точек, не являющихся глобальным оптимумом в пространстве поиска, к которым стремится траектория поиска (зачастую, если траектория поиска подходит достаточно близко к аттрактору, то со временем она уже не покидает его окрестность и подходит к нему всё ближе и ближе). Наблюдается эффект притяжения к аттрактору, который проверяется на сложных функциях с известным оптимумом. Эти функции обычно используются для сравнительного анализа алгоритмов по времени и качеству поиска. Известной многоэкстремальной функцией является функция Растригина:

$F(x)=10n+\sum_{i=1..n} (x^2_i - 10\cos(2\pi x_i))$.



При числе переменных **x**, равном 10, данная функция обладает $10^{10} - 1$ локальных и одним глобальным экстремумом.

Другой особенностью целевых функций, влияющей на скорость работы рассмотренных эвристических алгоритмов, является *изолированность* («поиск иголки в стоге сена»).



Это означает, что функция не предоставляет никакой информации, «подсказывающей», в какой области искать экстремум. Лишь случайное попадание особи в глобальный экстремум может решить задачу.

В целом сравнение конкурирующих эвристических алгоритмов для решения задач скалярной оптимизации с точки зрения их результативности показывает следующее. Пусть $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$ – два конкурирующих эвристических алгоритма, $\boldsymbol{F}$ – множество целевых функций (задач) оптимизации, $\boldsymbol{H}$ – гистограмма их значений $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{m}$ – количество полученных решений, $\boldsymbol{p(H|F, m, A)}$ – вероятность получения с помощью $\boldsymbol{A}$-алгоритма $\boldsymbol{m}$ различных значений $\boldsymbol{F}$, имеющих вид гистограммы $\boldsymbol{H}$.

Вольперт и Макрид сформулировали и доказали следующую *NFL*-теорему *(No-Free-Lunch)*: для любой пары эвристических алгоритмов поисковой оптимизации ($\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_2}$) справедливо следующее соотношение:

$$\sum_F p(H \mid F, m, A_1) = \sum_F p(H \mid F, m, A_2).$$

Это означает, что все эвристические алгоритмы принятия решений для задач скалярной оптимизации в среднем одинаково результативны при их сравнении по всем $\boldsymbol{F}$. Если по алгоритму $\boldsymbol{A_1}$ получаются результаты лучшие, чем по алгоритму $\boldsymbol{A_2}$, то существуют оптимизационные задачи с другой целевой функцией, для которых лучшие результаты дает алгоритм $\boldsymbol{A_2}$. При этом время решения задачи конкурирующими алгоритмами не учитывается.

Например, известный эвристический алгоритм *JPEG* позволяет сжимать изображение в 2÷200 раз, причём при степенях сжатия около 10÷20 потери для изображений фотографического качества практически незаметны. Вычислительно более трудоёмкий *Wavelet-алгоритм* даже при сжатии в 100 раз не приводит к искажениям. Это же изображение будет сжато общим (универсальным) алгоритмом лишь в 2÷3 раза. Однако JPEG плохо сжимает рисунки малого размера (либо теряется качество, либо сжатия почти не происходит).

Не все эвристические алгоритмы принятия решений приводят к неоптимальному решению или потере информации. Алгоритм хеширования (ассоциативное отображение ключей путем их кодирования через рекуррентную функцию) эффективно решает задачу поиска элемента в массиве. Вычисление хеш-функции требует *O(n)* времени, где *n* – длина ключа. Поскольку *n* варьируется в малых пределах, то хеш-функция имеет константное время, а поиск идет даже быстрее, чем *O(log n)*, т.е. быстрее бинарного поиска.

Алгоритмы JPEG, хеширования, распознавания спама объединяет то, что они решают задачу, постулируя некоторые её особенности, а не в общем виде. Это свойство всех эвристических методов. Оно дает практическую возможность реализации алгоритмов, для задач, общее решение которых вообще неизвестно (например, распознавание речи). Это подтверждает известный закон информатики: чем больше общность алгоритма, тем меньше его эффективность. Таким образом, к эвристическим приемам принятия решений относятся все алгоритмы с аксиоматически недоказанными особенностями задачи, т.е. использующие эмпирически построенную модель принятия решений в задаче, вместо точной модели.

Практикум

Практикум по модулю 1 включает две темы: «Принятие решений для нелинейных распределительных задач» и «Принятие решений для задач упорядочения».

Тема: «Принятие решений для нелинейных распределительных задач»

Целью практикума является выявление особенностей постановки нелинейных распределительных задач (лекция 4), приобретение навыков их решения методом динамического программирования.

Для демонстрации метода динамического программирования сформулируем классическую задачу об оптимальном распределении некоторого объема работ между имеющимися видами оборудования.

Пример 1

Пусть необходимо выполнить объем работ V = 4 усл. ед. В распоряжении имеются N = 4 вида оборудования. Зависимость эксплуатационных затрат оборудования *i*-го вида от объема работ x_i обозначим через $Y_i(x_i)$ и представим в виде следующей таблицы:

Вид оборудования	Затраты $Y_i(x_i)$ при объеме работ x = 1,2, 3 или 4			
	1	2	3	4
1	10	25	36	46
2	10	22	30	34
3	4	15	25	33
4	8	17	23	28

СОВЕТ

В данной задаче в качестве ограничения примем $\sum_{i=1}^{n} x_i = 4, x_i \geq 0$. Используя метод динамического программирования, необходимо минимизировать целевую функцию: $Y = \sum Y_i(x_i) \rightarrow min$.

Обозначим через $f_N(x)$ величину минимальных затрат при оптимальном распределении объема работ x по N видам оборудования. Если $x = 0$, то $f_N(0) = 0$, где $N = 1, 2,\ldots$ (при нулевом объеме работ оборудование не работает, поэтому затраты тоже равны 0). При $N = 1$ и при любом объеме работ x справедливо $f_1(x) = Y_1(x)$. В общем случае

$$f_N(x) = \min[Y_N(x_N) + f_{N-1}(x - x_N)], \quad 0 \leq x_N \leq x \leq V. \quad (2)$$

Чтобы проиллюстрировать метод динамического программирования, выполним все необходимые итерации.

1. Пусть весь объем работ x выполняется только первым видом оборудования. Тогда $f_1(x) = Y_1(x)$, $x = x_1 = 1, 2, 3$ или 4. Поэтому вычисления по формуле (2) можно не производить.

2. Пусть теперь объем работ x выполняется первым и вторым видами оборудования.

Тогда $f_2(x) = min\ [Y_2(x_2) + f_1(x - x_2)]$, $x = x_1 + x_2$.

Результаты расчетов сведем в следующую таблицу:

x	1		2			3				4				
x_2	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$Y_2(x_2)$	0	10	0	10	22	0	10	22	30	0	10	22	30	34
$f_1(x-x_2)$	10	0	25	10	0	36	25	10	0	46	36	25	10	0
Y_2+f_1	10	10	25	20	22	36	35	32	30	46	46	47	40	34
$f_2(x)$	***10***		***20***			***30***				***34***				

3. Пусть теперь объем работ x выполняется первым, вторым и третьим видами оборудования.

Тогда $f_3(x) = min\,[Y_3(x_3) + f_2(x - x_3)],\ x = x_1 + x_2 + x_3$.

Результаты расчетов сведем в следующую таблицу:

x	1		2			3				4				
x_3	0	1^+	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
$Y_3(x_3)$	0	4	0	4	15	0	4	15	25	0	4	15	25	33
$f_2(x-x_3)$	10	0	20	10	0	30	20	10	0	34	30	20	10	0
Y_3+f_2	10	4	20	14	15	30	24	25	25	34	34	35	35	33
$f_3(x)$	***4***		***14***			***24***				***33***				

4. Пусть теперь объем работ x выполняется всеми четырьмя видами оборудования.

Тогда $f_4(x) = min\,[Y_4(x_4) + f_3(x - x_4)],\ x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Результаты расчетов сведем в таблицу:

x	1		2			3				4				
x_4	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3^+	4
$Y_4(x_4)$	0	8	0	8	17	0	8	17	23	0	8	17	23	28
$f_3(x-x_4)$	4	0	14	4	0	24	14	4	0	33	24	14	4	0
Y_4+f_3	4	8	14	12	17	24	22	21	23	33	32	31	**27**	28
$f_4(x)$	***4***		***12***			***21***				***27***				

Итак, минимальное значение суммарных затрат равно ***27***. Определим, как распределяется объем работ $V = 4$ по $N = 4$ видам оборудования.

Для этого отметим знаком «+» соответствующий столбец в последней таблице при $x = 4$. Он определяет объем работ, распределяемых 4-му виду оборудования, и равен $x_4 = 3$. Вычисляем оставшийся объем работ: $x = V - x_4 = 4 - 3 = 1$. Отметим знаком «+» соответствующий столбец в предыдущей таблице в зоне, где $x = 1$. Он определяет объем работ, который выполняется третьим видом оборудования: $x_3 = 1$. Поскольку оставшийся объем $V - x_4 - x_3 = 0$, то $x_1 = x_2 = 0$, иначе анализ таблиц необходимо было бы продолжить.

Таким образом, оптимальное распределение работ для данной задачи имеет вид: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3$.

Совет	В случае решения задачи максимизации целевой функции в формуле (2) необходимо заменить минимум на максимум, без изменения алгоритма.

Тема: «Принятие решений для задач упорядочения»

Целью практикума является выявление особенностей постановки задач упорядочения (лекция 5), приобретение навыков их решения по алгоритму Джонсона.

Для демонстрации работы алгоритма Джонсона решим следующую задачу упорядочения:

Пример	Имеется программа для сжатия данных (архиватор), которая включает два метода для кодирования и сжатия данных – *MTF* (Move To Front) и *LZSS* (Лемпеля–Зива). Каждый метод реализован в виде нити (thread), поэтому оба алгоритма могут выполняться квазипараллельно на одноядерном процессоре и параллельно на двуядерном. Архиватору поручено сжать 7 файлов. Причем обработка каждого файла сначала должна быть выполнена с помощью алгоритма *MTF*, а затем *LZSS*. Требуется определить такой порядок обработки файлов, при котором суммарное время обработки будет минимальным, если исходя из размеров каждого файла известны апостериорные оценки продолжительности обработки файлов каждым из методов:

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
t_{1j}	5	4	8	9	3	7	4
t_{2j}	3	5	5	7	4	6	7

Используя алгоритм Джонсона, обрабатываем исходные данные и получаем следующий порядок обработки файлов: 5-7-2-4-6-3-1. В соответствии с полученным порядком, делаем перестановки столбцов и получаем следующую таблицу:

j	**5**	**7**	**2**	**4**	**6**	**3**	**1**
t_{1j}	3	4	4	9	7	8	5

t_{2j}	4	7	5	7	6	5	3

Изобразим время обработки файлов графически (рис. 10) в соответствии с найденным оптимальным порядком их обработки.

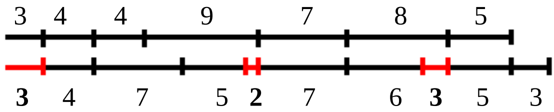


Рис. 10. Временная диаграмма обработки файлов

Минимальное общее время обработки составляет 45 единиц. К достоинствам алгоритма Джонсона можно отнести возможность нахождения оптимальной последовательности обработки за один проход алгоритма, а многовариантность перестановок (при совпадении минимальных элементов) в конечном счете не оказывает влияния на значение целевой функции. В сравнении с алгоритмами Гомори, ветвей и границ или динамическим программированием алгоритм Джонсона имеет заметное преимущество во времени нахождения оптимальной последовательности, однако область его применения ограничена двумя машинами.

Заключение по модулю 1

Прежде чем приступать к выбору методов решения детерминированных задач скалярной оптимизации, следует четко представлять себе, какие результаты необходимо достичь с их помощью.

Внимание!	Вышеописанные методы и алгоритмы являются эффективными инструментами для поддержки принятия решений в области оперативного планирования и управления производственной деятельности. Это предполагает последовательное решение ряда задач анализа имеющихся у ЛПР возможностей, формулирование планов, предусматривающих распределение и упорядочение работ, составление расписания и контроль хода его выполнения.

Каковы наиболее важные аспекты выбора метода и создания механизма поддержки принятия решений ?

Самым важным аспектом является реалистичность планирования. Она зависит от ограничений в постановке задачи и модели ее решения. Любой оптимальный план интересен только тогда, когда его можно выполнить.

Вопрос	На какие ограничения модели следует обращать внимание ?

Следует обращать внимание на ограничения, связанные с типами оборудования, с технологическими маршрутами и спецификациями, с ресурсами и т.п.

Немаловажный фактор – время принятия решений, которое зависит от реализуемых алгоритмов. Любая система поддержки принятия решений не может полностью заменить ЛПР. Ручные корректировки в подготовленном плане распределения работ или в порядке их выполнения – это только способ внести дополнительные ограничения, которые программа не поддерживает. Однако одной из задач программной системы должна быть оценка правомочности вносимых изменений в режиме реального времени.

Важным аспектом является то, в какой форме программа предоставляет результаты (таблицы, диаграммы и т.п.). Кроме того, в ходе выполнения производственной задачи могут возникнуть отклонения от плана. Периодичность перепланирования – один из важнейших аспектов поддержки принятия решений. Многие данные могут поступать от внешних систем, поэтому для их беспрепятственной передачи необходимо применять современные средства интеграции приложений.

В производственной практике дальнейшее развитие описанных в данном модуле подходов связано с ***идеологией кайдзен*** – предприятия, управляемого по измеримым и понятным целям, выраженным в терминах ключевых показателей эффективности. При этом используются многочисленные алгоритмы оптимизации, часть из которых описана в лекциях и представлена в практикуме.

Вопросы для самоконтроля

1. Каковы основные этапы процесса принятия решений?
2. В чем заключаются типичные ошибки, допускаемые в процессе принятия решений?
3. Чем отличаются рациональные решения от интуитивных решений?
4. Дайте определения следующих понятий: принятие решений, проблема и условия ее возникновения.
5. Сформулируйте общую постановку задач принятия решений индивидуальным и групповым ЛПР.
6. Что характерно для большинства технических, управленческих и организационных решений?
7. Дайте характеристику хорошо структурированным, неструктурированным и слабоструктурированным задачам принятия решений.
8. Как классифицируются методы принятия решений?
9. Как классифицируются задачи принятия решений по степени определенности информации, по количеству лиц, принимающих решение, по количеству целей и критериев в задаче, по содержанию решения, а также по длительности действия решений и значимости?
10. Что в ТПР понимается под измерением?
11. В каких отношениях могут находиться объекты измерения?
12. Что такое эмпирическая система?
13. Какие свойства и типы бинарных отношений часто используются при измерении?
14. В чем заключаются проблемы представления и единственности измерений при формировании решений?
15. Что такое шкала измерений?
16. Дайте характеристику качественным шкалам измерения.
17. Дайте характеристику количественным шкалам измерения.
18. Много ли информации теряется при переходе от количественных шкал измерения к качественным?
19. Охарактеризуйте основные методы субъективных измерений.
20. Каковы особенности детерминированных задач скалярной оптимизации?

21. Приведите идеализированную постановку нелинейной распределительной задачи.

22. Каким свойством обладают оптимальные по Беллману стратегии принятия решений?

23. Приведите основное рекуррентное соотношение, используемое в методе динамического программирования.

24. Какие задачи относятся к классу задач упорядочения?

25. В чем заключается постановка задачи о двух машинах?

26. К какой задаче сводится минимизация суммарного времени обработки изделий на двух машинах?

27. В чем заключается алгоритм Джонсона при поиске оптимального решения задачи упорядочения для двух машин?

28. При каких условиях задача о трех машинах сводится к задаче о двух машинах?

29. Какова общая схема эволюционного алгоритма поиска оптимизированных решений?

30. Какова общая схема эвристического алгоритма роя при поиске оптимизированных решений?

31. Какова общая схема алгоритма отжига при поиске оптимизированных решений?

32. Каковы основные показатели эффективности эвристических алгоритмов поиска оптимизированных решений?

Исследовательские задачи

Вопрос	Самолет загружается предметами t = 1, …, T различных типов. Каждый предмет типа t имеет вес P(t) и стоимость C(t). Максимальная грузоподъемность самолета равна R. Определить максимальную стоимость груза, общий вес которого не должен превышать R.

Вопрос	Найти такое разбиение числа N (N>0), при котором произведение n его целых частей максимально.

Вопрос	Проектируется прибор, состоящий из N = 5 компонентов. Все компоненты соединены последовательно, поэтому выход из строя одного из них ведет к отказу всего прибора. Надежность прибора можно

повысить путем параллельного дублирования или троирования каждого компонента. Общая стоимость прибора не должна быть больше C = 32. Известны данные о надежности $0 < R_j(k_j) < 1$ и стоимости $C_j(k_j)$ j-й компоненты ($j = 1, 2,..., N$), включающей k_j ($k_j = 1, 2, 3$) одинаковых, соединенных параллельно компонентов. Определить такое количество блоков k_j в каждом компоненте j, при котором надежность прибора максимальна, а стоимость не выше C.

Вопрос

Найти оптимальный порядок обработки изделий и определить минимальное суммарное время, необходимое для обработки всех изделий, указанных в таблице:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_{1j}	12	11	6	4	7	21	3	10	15	9	5
t_{2j}	7	4	8	2	3	8	9	6	5	3	8
t_{3j}	11	10	10	9	17	21	13	12	14	16	9

Итоговый тест по модулю 1

1. Процесс рационального или иррационального (интуитивного) выбора альтернатив, имеющий целью достижение осознаваемого результата, называется…

2. Правильная последовательность этапов принятия решений: а) выбор решения из альтернатив, б) выявление целей и критериев, в) оценка последствий и качества решения, г) сбор информации, д) формулировка проблемы.

3. Соломоново решение является: а) антагонистическим, б) интуитивным, в) конфликтным, г) рациональным, д) трехходовым.

4. Отличие постановки задачи принятия решения индивидуальным ЛПР от задачи группового ЛПР состоит в необходимости определения: а) множества целей, б) множества ограничений, в) множества альтернатив, г) критерия выбора наилучшего решения.

5. Отличие хорошо структурированных проблем от неструктурированных состоит в том, что: а) имеется качественное описание проблемы, б) все зависимости определены, в) имеется количественное описание проблемы, г) проблема решается в условиях неопределенности.

6. Соответствие между типом задачи индивидуального принятия решений и степенью определенности информации:

тип задачи ПР (1-3)	степень определенности информации (А-В)
1) Задача выбора	А) Определены альтернативы ***Y*** и критерий ***K***
2) Общая задача	Б) Определены ***Y***, не определен критерий ***K***
3) Оптимизационная	В) Не определены ***Y*** и ***K***.

7. Процедура сравнения объектов по определенным показателям называется …

8. Качественными являются шкалы: а) абсолютная, б) интервальная, в) номинальная, г) отношений, д) полярная, е) порядка.

9. Количественными являются шкалы: а) абсолютная, б) интервальная, в) номинальная, г) отношений, д) полярная, е) порядка.

10. Правильная последовательность методов субъективных измерений в порядке убывания их трудоемкости: а) парное сравнение, б) последовательное сравнение, в) непосредственная оценка, г) ранжирование.

11. При проведении расчетов методом динамического программирования с помощью таблиц объем вычислений существенно зависит от числа значений переменной состояния: а) всегда верно, б) всегда неверно, в) иногда верно, иногда неверно.

12. Согласно принципу оптимальности Беллмана для динамического программирования последующие решения зависят от решений, принятых ранее: а) всегда верно, б) всегда неверно, в) иногда верно, иногда неверно.

13. Реализация алгоритмов прямой и обратной прогонки по методу динамического программирования для одной и той же задачи может привести к получению различных оптимальных решений: а) всегда верно, б) всегда неверно, в) иногда верно, иногда неверно.

14. Алгоритм Джонсона можно применить для решения задачи упорядочения трех машин: а)всегда верно, б) всегда неверно, в)иногда верно, иногда неверно.

15. Операторы эволюционных алгоритмов: а) дизъюнкция, б) импликация, в) кроссинговер, г) конъюнкция, д) мутация.

Список литературы по модулю 1

Основная литература

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах: Учебник. – М.: Логос, 2002.

2. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора: Монография. – М.: Маршрут, 2004.

3. Петровский А.Б. Теория принятия решений: Учебник. – М.: Изд. центр «Академия», 2009.

4. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

5. Родзин С.И. Руководство для самостоятельной работы, контрольные вопросы, индивидуальные задания по курсу «Теория принятия решений». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.

Дополнительная литература

6. Беллман Р., Дрейфус Х. Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965.

7. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений. – М.: МГТУ им. Баумана, 2006.

8. Дегтярев Ю. И. Системный анализ и исследование операций. – М.: Высшая школа, 1996.

9. Джонс М.Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях: Пер. с англ. – М.: ДМК Пресс, 2006.

10. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MatLab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

11. Катулев А.Н., Северцев Н.А. Математические методы в системах поддержки принятия решений. – М.: Высшая школа, 2005.

12. Королев В.Ю. и др. Математические основы теории риска. – М.: Физматлит, 2007.

13. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций. – М.: Юнити-Дана, 2005.

14. Орлов А. И. Теория принятия решений: Учебник. – М.: Экзамен, 2006.

15. Раппопорт Б.М. Оптимизация управленческих решений. – М.: Теис, 2001.

16. Шикин Е.В. Исследование операций: Учебник. – М.: Проспект, 2006.

Модуль 2. Принятие решений в условиях противоборства

Цель изучения модуля

Цель модуля 2 – дать представление об игровом подходе к рациональному выбору решений в условиях противоборства, познакомить с фундаментальными понятиями и результатами теории игр, а также помочь овладеть разнообразными методами решения игр.

В результате освоения модуля 2 студент должен быть готов продемонстрировать следующие *компетенции* и *уровень подготовки*:

- знание основной теоремы теории антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой (общетеоретический уровень);
- умение построить матрицу игры и владение методами анализа стратегий игроков (уровень пользователя);
- навыки решения игровых задач точными и приближенными методами (уровень проектировщика).

Конспект лекций

Лекция 6. История, задачи и разновидности игр

Добро и зло, свет и тьма, космос и хаос, Ян и Инь находятся в вечном противоборстве. В ТПР противоборство характеризуется нанесением конфликтующими сторонами взаимного ущерба и стремлением одержать победу над соперником. Конфликтная ситуация – это ситуация скрытого или открытого противоборства двух или нескольких участников, каждый из которых имеет свои цели и мотивы, средства и способы решения значимой проблемы.

Формальной моделью противоборства является игра.

Игра – модель конфликтной ситуации, включающая четкие правила действий игроков, для достижения выигрыша в результате принятия некоторой стратегии.

Теория игр (ТИГР) – это прикладная междисциплинарная наука, изучающая математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

В соответствии с определением теория игр занимается моделями принятия решений, а не их поведенческими, психологическими аспектами или вопросами реализации решений. Если интересы участников противоположны, то эти модели называются *антагонистическими* играми; если интересы не совпадают, но не противоположны, то речь идет об играх с непротивоположными интересами. В играх двух лиц речь идет о противоборстве только двух игроков. Если в игре участвуют n лиц, то они могут вступать между собой в постоянные или временные коалиции, а игра называется *коалиционной*.

Полная классификация разновидностей игр пока не разработана. Их перечень также включает *биматричные, дифференциальные, матричные*, *статистические* игры с природой и др.

Суть игры в том, что каждый из участников из множества *альтернатив* выбирает такую стратегию действий, которая, возможно, обеспечит ему наибольший выигрыш или наименьший проигрыш. Причем игроку ясно, что результат зависит не только от него, но и от действий противника. Это значит, что он принимает решение в условиях *неопределенности*.

Целью теории игр является выработка рекомендаций для разумного поведения игроков в конфликтных ситуациях, т.е. выработка оптимальных стратегий для каждого игрока. Одна из задач теории игр состоит в том, чтобы выяснить, возможно ли (если – да, то при каких условиях) некоторое *равновесие* (компромисс, *седловая точка*), в наибольшей степени устраивающее игроков.

Основной особенностью теории игр является расширение понятия *оптимальности*, включая в него компромисс, устраивающий игроков. Это используется, например, в экономике при выборе оптимальных решений для повышения качества продукции или определения запасов. «Конфликты» здесь заключаются: 1) в стремлении выпустить больше продукции, затратив на нее меньше труда, и сделать продукцию лучше; 2) в желании так запастись ресурсами, чтобы застраховаться от случайностей и не замораживать средства.

Подобные задачи решаются и другими способами. Это не случайно. Например, многие задачи теории игр могут быть сведены к задачам *линейного программирования*, и наоборот.

Другой особенностью игровых моделей является поиск *устойчивых решений*, когда отход от оптимальной стратегии невыгоден обоим игрокам. Доказано, что при многократном повторении игры и разных в каждом розыгрыше стратегиях, седловая точка и устойчивые решения существуют. Однако игрокам надо выбирать стратегию по жребию, иначе противник, обнаружив закономерности в решениях, может угадать ход и выиграть.

Справка

В 1944 году вышел знаменитый труд Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», где теорию игр впервые применили для решения бизнес-задач с неполной информацией.

1960-е годы были временем экспериментов и революционных знаний, полученных Нэшем и Гурвицом. Однако первая Нобелевская премия по теории игр была присуждена только в 1994 г. Затем было еще 3 премии. Джон Нэш получил премию через 45 лет после написания работы по играм. Викри (лауреат 1996 г.) не дожил до ее вручения. 90-летний Гурвиц дождался премии, но признался, что уже потерял всякую надежду.

В частности, в 2007 г. Нобелевскую премию получили Гурвиц, Майерсон и Маскин «за первопроходческий вклад в теорию игр и принятие решений». Они дали ответ на вопрос: как осуществить сделку с максимальной пользой для себя? Механизм оптимален, если для каждого игрока выгоднее сказать правду, чем солгать. Тогда каждый останется в выигрыше.

Сейчас теория игр очень популярна для решения разнообразных экономических задач (аукционы, реклама и др.).

Рассмотрим вначале игры с ненулевой суммой. Если для конечной бескоалиционной игры двух лиц ставить в соответствие стратегиям 1-го игрока строки некоторой таблицы, стратегиям 2-го игрока – её столбцы, а клетки таблицы заполнять значениями выигрыша 1-го игрока, то полученная таблица называется ***матрицей выигрыша*** 1-го игрока. Если клетки той же таблицы заполнить значениями функции выигрыша 2-го игрока, то получится ***матрица выигрышей*** 2-го игрока.

Эта пара матриц полностью описывает ***биматричную игру***. Если биматричная игра является антагонистической, то она полностью описывается единственной матрицей выигрышей одного из игроков и называется ***матричной*** игрой с ***нулевой суммой***. В ней выигрыш одного игрока означает проигрыш другого, а их сумма равна нулю.

Биматричная игра не обязательно является антагонистической, т.е. интересы игроков не полностью противоположны (имеется возможность сообщать друг другу о своих намерениях, координировать свои действия, а также применять блеф, угрозы и другие способы обмена информацией). Выигрыш одного игрока не обязательно означает проигрыш другого, а сумма выигрышей – не обязательно равна нулю. Это ***игры с ненулевой суммой***.

Справка

Доказано, что игру n лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру n+1 лиц с нулевой суммой путем добавления «фиктивного» игрока.

Приведем популярный пример биматричной игры с ненулевой суммой.

Пример

Студент сдает зачет преподавателю.

«Игроки»: студент и преподаватель.

Стратегии студента, готовящегося к зачету:

- x_1 – подготовиться хорошо;
- x_2 – подготовиться плохо.

Стратегии преподавателя, принимающего зачет:

- y_1 – поставить зачет;
- y_2 – не поставить зачет.

В зависимости от выбора стратегий в игре складываются четыре ситуации, которые могут приносить игрокам разное моральное удовлетворение. Оценки морального удовлетворения выставим в шкале с положительными и отрицательными баллами и примем их за выигрыши игроков. Получим, например, следующие две матрицы $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ и $\boldsymbol{B = (b_{ij})}$:

A= (a_{ij})	***Выигрыши студента***		**B= (b_{ij})**	***Выигрыши преподавателя***	
	$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$		$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{y_2}$
$\boldsymbol{x_1}$	**2** (оценили по заслугам)	**– 1** (обидно)	$\boldsymbol{x_1}$	**0** (все нормально)	**– 2** (проявил несправед-ливость)
$\boldsymbol{x_2}$	**1** (удалось словчить)	**0** (получил по заслугам)	$\boldsymbol{x_2}$	**– 3** (дал себя обмануть)	**– 1** (студент придет еще раз)

Оценки морального удовлетворения, указанные в матрицах, могут быть и другими. Например, некоторые студенты считают, что оценка выигрыша в 1 балл в ситуации, когда удалось словчить и получить зачет, явно занижена. Действительно, не вдаваясь в полемику о нравственности, отметим, что проблема адекватности математической модели и моделируемой ситуации, безусловно, есть, и о ней мы будем говорить позже. Отметим также, что в этой модели самый большой по модулю выигрыш (–3) соответствует случаю, когда у преподавателя остались сомнения в добросовестности студента, но зачет уже поставлен.

Будем считать, что целью каждого игрока является *максимизации индивидуального выигрыша*. Тогда приведенная пара матриц однозначно задает правила игры.

Внимание!

Ситуация (i^*, j^*), в которой для матриц выигрыша выполняются неравенства вида

$$\boldsymbol{a_{i^*j^*} \ge a_{ij^*}}, \quad \boldsymbol{b_{i^*j^*} \ge b_{i^*j}}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2,$$

называется ***равновесной***.

В равновесной ситуации игроки добиваются наибольших выигрышей стратегиями $i = i^*$, $j = j^*$. Их называют ***равновесными стратегиями***, а соответствующие элементы $\boldsymbol{a_{i^*j^*}}$, $\boldsymbol{b_{i^*j^*}}$ матриц выигрышей – ***равновесными выигрышами*** игрока.

Применим определение равновесных стратегий к исходным матрицам в биматричной игре «студент сдает зачет преподавателю»:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ситуация (i, j) = (1, 1) ***равновесная***, поскольку для первого столбца матрицы A и первой строки матрицы B имеем

$$2 = a_{11} \ge a_{21} = 1, \quad 0 = b_{11} \ge b_{12} = -2.$$

Ситуация (i, j) = (2, 2) тоже ***равновесная***, поскольку $0 \ge -1$ и $-1 \ge -3$.

Ситуации (1, 2) и (2, 1) ***не равновесные***.

Сравним равновесные выигрыши игроков. В первой равновесной ситуации выигрыши (2 и 0) превосходят аналогичные выигрыши (0 и –1) во второй равновесной ситуации, поэтому она предпочтительней для игроков. Содержательно в равновесных ситуациях воплощается «*закон Кармы*»: за хорошую подготовку к зачету студент получает зачет, а за плохую подготовку по справедливости не получает. Моральное удовлетворение студента и преподавателя в первой ситуации выше, чем во второй.

Другим примером биматричной игры является классическая задача теории игр «дилемма заключенного». Смысл этой задачи состоит в следующем.

ПРИМЕР

Дилемма заключенного

Игроками являются два узника, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения зависит от того, будут они говорить (***Г***) или молчать (***М***). Если в ходе следствия оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (1 год). Если оба сознаются, то получат срок 3 года, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство. Если же заговорит только один, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу, а сохранивший молчание получит 10 лет. Заключенных лишили контакта.

Ситуация иллюстрируется следующими платежными матрицами:

	Выигрыши А	
	Б молчит	*Б говорит*
А молчит	**– 1**	**– 10**
А говорит	**0**	**– 3**

	Выигрыши Б	
	Б молчит	*Б говорит*
А молчит	**– 1**	**0**
А говорит	**– 10**	**– 3**

Сравним ситуации (1, 1) и (2, 2). Выигрыш в ситуации (1, 1) выше, т.е. более выгодной стратегией является молчание. Однако, не имея контактов между собой и к тому же не очень доверяя друг другу, каждый из заключенных, поразмышляв, может прийти к выводу, что нужно сознаваться и получить 3 года, чем молчать, рискуя получить 10 лет.

Дилемма заключенного в экономике иллюстрирует ситуацию, когда решение ЛПР о максимизации выигрыша может обернуться вредом для него самого или для другого ЛПР. Дилемма также объясняет, почему продавцы зачастую стремятся к сговору на рынке вместо конкуренции, которая была бы выгоднее для общества.

Конфликтные ситуации разнообразны. Различны и способы их разрешения. Каждому приходилось принимать участие в переговорах.

Часто переговоры связаны с дележом (доходов, ответственности, ресурсов и пр.). Однако прежде чем делить, необходимо договориться о процедуре дележа.

Рассмотрим две пиратских процедуры дележа добычи (золото), которые выглядят вполне демократичными и открытыми, но происходят в атмосфере взаимного недоверия.

Пусть два пирата делят 1 кг золотого песка. Здесь лучшей процедурой считается «*дели – выбирай*»: один делит на две части, а другой выбирает любую из них.

Пусть теперь три пирата делят 1 кг золотого песка. Тогда процедура «дели – выбирай» состоит в следующем.

- первый пират выделяет часть, на которую он претендует.
- если второй и третий пираты одновременно согласны с выбором первого, то он получает свою долю и выбывает из дележа.
- если не согласны оба пирата, то право деления передается другому пирату.
- если же с предложением первого пирата согласен только один, то несогласному третьему пирату дается право выделить из доли первого пирата свою часть, и он выбывает из дележа.

Иначе выглядит процедура деления золотых слитков. Пусть n пиратов решили разделить 100 золотых слитков. Установлена следующая процедура дележа. Сначала дележ проводит старший пират. Его предложение принимается, если с ним согласна хотя бы половина пиратов, включая его самого. Если с ним не согласится больше половины, то он выбывает из дележа, а право дележа передается второму по старшинству пирату и т.д.

Итоги дележа при этом будут выглядеть следующим образом:

- для двух пиратов – (100; 0);
- для трех пиратов – (99; 0; 1) (если бы средний пират предложил младшему объединиться против старшего пирата, пообещав ему половину золота, то где гарантия, что он его не обманет, заняв место старшего пирата и забрав все?);

- для четырех пиратов – (99, 0, 1; 0) (старший пират рассуждает так: надо предложить дележ, который был бы выгоден хотя бы одному пирату, а мне давал бы наибольшую долю);
- для пяти пиратов – (98, 0, 1; 0; 1) и т.д.

Исход несколько неожиданный. Парадокс состоит в том, что процедура дележа демократична лишь с виду, однако слитки делятся далеко не поровну. Причина парадокса в том, что взаимное недоверие не дает возможности вступать в сговор и образовывать коалиции.

Итак, что же общего у шахмат, карточных игр, войн, переговоров, рыночной конкуренции, аукционов? Все эти ситуации можно описать при помощи теории игр. Как только имеет место противоборство субъектов, возникает игра. Главный вопрос заключается в предсказании поведения игроков: какие ходы сделают шахматисты, чем завершатся войны и переговоры, какие цены сформируются на рынке и т.д. Оказывается, теория игр позволяет сделать достаточно сильные предсказания.

Лекция 7. Основная теорема антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой

Пусть дана конечная антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой. При матричном способе задания она задается тройкой множеств

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{M}),$$

где $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – множество стратегий 1-го игрока; $\boldsymbol{Y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – множество стратегий 2-го игрока; $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(x, y)$ – *платежная функция* (ограниченная числовая функция одного из игроков, определенная на декартовом произведении множеств стратегий $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ и равная математическому ожиданию выигрыша/проигрыша игрока).

Поскольку антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой полностью описывается единственной матрицей выигрышей одного из игроков, то обычно функцию $\boldsymbol{M}$ задают в виде платежной матрицы *выигрышей 1-го игрока*:

$$\boldsymbol{Q} = \|q_{ij}\|_{m\times n}, \text{ где } q_{ij} = \boldsymbol{M}(x_i, y_j).$$

В ситуации противоборства цели игроков считаем противоположными: 1-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а 2-й игрок – минимизировать свой проигрыш (или наоборот). Трудность в этих задачах состоит в том, что ни один из игроков не контролирует полностью платежную функцию $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$. Существо рекомендаций теории игр состоит в преодолении этой трудности.

Сказанное справедливо лишь для игр двух лиц, так как если игроков больше двух, то возникает возможность образования коалиций с договорным распределением выигрыша! Рассмотрим на примере, как строится платежная матрица.

Пример: игра Морра

Каждый из двух игроков показывает один или два пальца и одновременно называет количество пальцев, которое, по его мнению, покажет противник. Если один из игроков угадывает правильно, то он выигрывает сумму, равную сумме пальцев, показанных им и его противником, иначе игра заканчивается вничью.

Чтобы построить матрицу игры, вначале необходимо определить, сколько стратегий у каждого игрока. В данной игре при указанных правилах очевидно, что их четыре: $\boldsymbol{X} = \{\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4}\ \} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$; $\boldsymbol{Y} = \{\ \boldsymbol{y_1, y_2, y_3, y_4}\ \} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$, где первое число указывает на то, сколько пальцев показывает игрок, а второе – сколько пальцев, по его мнению, покажет противник. Тогда игра состоит из 4×4 = 16 партий, а матрица выигрышей $\boldsymbol{Q}$ 1-го игрока имеет следующий вид:

		2-й игрок			
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
1-й игрок	(1, 1)	**0**	**2**	**–3**	**0**
	(1, 2)	**–2**	**0**	**0**	**3**
	(2, 1)	**3**	**0**	**0**	**–4**
	(2, 2)	**0**	**–3**	**4**	**0**

В антагонистических играх двух лиц с нулевой суммой единственным критерием выбора оптимальной стратегии является следующий критерий:

Внимание!

Оптимальной стратегией игрока является такая стратегия, использование которой при многократном повторении игры обеспечивает игроку максимально возможный средний выигрыш (или минимально возможный средний проигрыш).

Для поиска оптимальной стратегии в теории игр используется «пессимистический» критерий, называемый критерием *максимина/минимакса* и основанный на выборе наилучшей из наихудших возможностей. Почему? Теория исходит из предположения о том, что оба игрока одинаково сильны и не прощают ошибок. Предполагается также, что оптимальное решение достигнуто, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию (*точка равновесия* или *седловая точка*), т.е. достижение компромисса в реальном конфликте сторон, имеющих противоположные интересы, является выгодным для каждого из противников.

Проиллюстрируем критерий максимина/минимакса и понятие «седловая точка» на примере. Пусть задана игра со следующей платежной матрицей:

$Q=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	*min*
x_1	6	0	7	3	0
x_2	4	**3**	5	16	**3**
x_3	5	1	–6	8	–6
max	6	**3**	7	16	

Находим минимальный элемент в каждой строке матрицы и выбираем среди них максимальный (максимин равен 3).

Внимание!

Нижняя чистая цена игры (***максимин***) равна

$\boldsymbol{\alpha = \max_x \min_y M(x, y) = \max_i \min_j q_{ij}}$.

Находим максимальный элемент в каждом столбце матрицы и выбираем среди них минимальный (минимакс равен 3).

Внимание!	***Верхняя чистая цена*** игры (***минимакс***) равна $\boldsymbol{\beta = min_y\, max_x\, M(\, x, y\,) = min_j\, max_i\, q_{ij}}$.

Для данной матрицы $\boldsymbol{\alpha = \beta = \nu = 3}$, т.е. игра имеет седловую точку (*точка равновесия*, или *точка Нэша*). Здесь $\boldsymbol{\nu}$ – *чистая цена игры*. На рис. 11 представлено схематичное изображение седловой точки.

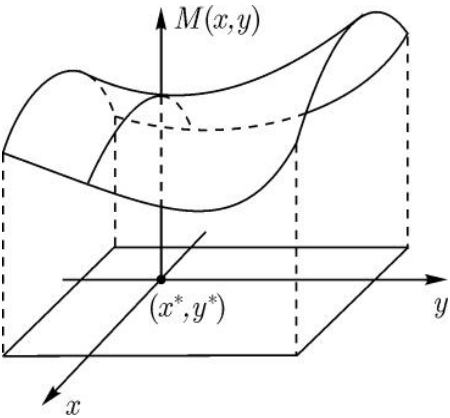


Рис. 11. Седловая точка

У седловой точки замечательное свойство: она одновременно является минимальным элементом строки и максимальным элементом в столбце платежной матрицы.

Если сравнить максимин и минимакс в любой антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой, то справедлива теорема, из которой вытекают практически полезные свойства оптимальных стратегий.

Внимание!	**Теорема** В антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой максимин всегда не больше минимакса: $\boldsymbol{\alpha \le \beta}$ или $\boldsymbol{max_x\, min_y\, M(\, x, y\,) \le min_y\, max_x\, M(\, x, y\,)}$.

Доказательство. Поскольку 1-й игрок стремится максимизировать свой выигрыш, а 2-й – минимизировать свой проигрыш, то в модели игры операция *максимизации* критерия всегда предполагает вариацию стратегий 1-го игрока, а операция *минимизации* – вариацию стратегий 2-го игрока.

По определению операций максимизации и минимизации имеем:

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \min_{y \in Y} M(x,y) \le M(x,y) \le \max_{x \in X} M(x,y),$$

или

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \min_{y \in Y} M(x,y) \le \max_{x \in X} M(x,y),$$

где левая часть не зависит от y . Отсюда следует, что

$$(\forall x \in X) \min_{y \in Y} M(x,y) \le \min_{y \in Y} \max_{x \in X} M(x,y).$$

Здесь правая часть не зависит от x и, следовательно, имеет место неравенство, справедливость которого и требовалось доказать.

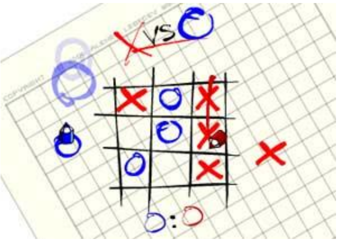
Из теоремы следует, что если седловая точка (***x****, ***y****) существует, то справедливо неравенство

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) M(x,y^*) \le M(x^*,y^*) \le M(x^*,y).$$

Внимание!	Необходимым и достаточным условием существования седловой точки (***x*, y****) является справедливость равенства $\boldsymbol{\alpha = \beta}$ или $\boldsymbol{\max_x \min_y M(x, y) = \min_y \max_x M(x, y)}$.

Исход игры, имеющей седловую точку, является предопределенным. Он не зависит от искусства или глубины анализа игроков, а зависит только от условий игры, которые исчерпываются заданием функции выигрыша ***M***(***x***, ***y***). Поэтому игры, имеющие седловые точки, называют *вполне определенными*, или играми с *полной информацией* (каждый игрок знает все предшествующие ходы, как свои, так и противника).

Доказано, что игры с полной информацией: шашки, шахматы, крестики/нолики, «выкладывание монет» (рис. 12) и др. имеют седловую точку.



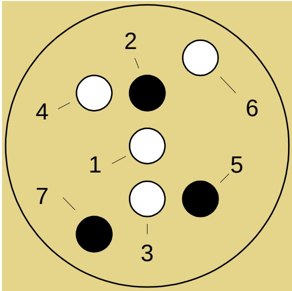


Рис. 12. Игры: крестики/нолики, «выкладывание монет»

На практике большинство антагонистических игр двух лиц с нулевой суммой не имеют седловой точки, т.е. нет решения в чистых стратегиях. Например, в игре Морра с платежной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

нет седловой точки. Действительно, $\alpha = -2$, $\beta = 2$, т.е. интервал $[-2, 2]$ является как бы ничейным и каждый из игроков может попытаться улучшить результат на этом интервале.

Вопрос

Если $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$, то существует ли в игре цена, и какие стратегии рекомендовать игрокам в качестве оптимальных стратегий?

Чтобы ответить на вопрос, рассмотрим платежную матрицу в известной игре «Орлянка».

Пример

Игра «Орлянка»

По условиям игры 1-й игрок выкладывает монету на стол, а 2-й игрок, не видя монеты, угадывает, какой стороной вверх она положена («орел» – $\boldsymbol{O}$ или «решка» – $\boldsymbol{P}$). В случае угадывания он получает от 1-го игрока 1 рубль, а в

	противном случае уплачивает ему 1 рубль.

Платежная матрица этой игры имеет следующий вид:

	О	***Р***
О	– 1	1
Р	1	– 1

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = -1 < \boldsymbol{\beta} = 1$. Седловой точки нет. Если игра проводится только один раз, то каждый из игроков может принять любое решение. О каких-то оптимальных стратегиях игроков здесь говорить не приходится. При многократном повторении игры положение меняется. Придерживаться одной стратегии невыгодно, их надо ***случайно смешивать*** (причем в данной игре – с одинаковой частотой). Мы подошли к важному понятию.

Внимание!	***Смешанной стратегией*** игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Если 1-й игрок имеет $\boldsymbol{m}$ чистых стратегий, то его смешанная стратегия $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, где ξ_i – вероятность применения чистой стратегии $\boldsymbol{x_i}$ при многократном повторении игры, причем

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = 1,\ \xi_i \geq 0,\ \ \boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, m}.$$

Аналогично, если 2-й игрок имеет $\boldsymbol{n}$ чистых стратегий, то его смешанную стратегию обозначим через $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, где η_j – вероятность применения чистой стратегии $\boldsymbol{y_j}$, причем

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = 1,\ \eta_j \geq \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{j = 1, 2, \ldots, n}.$$

Вопрос	Почему сумма вероятностей ξ_i и сумма вероятностей η_j равна 1?

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются несовместными событиями. Кроме того, они являются единственными возможными событиями.

Чистая стратегия – это частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии i-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока (лотерея).

Возможность нахождения каждым игроком своей оптимальной стратегии базируется на основной теореме теории игр. Она является доказательством существования решения для каждой конечной антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой. В 1927 г. Э.Борель сформулировал *основную теорему теории игр*, а в 1928 г. Дж.фон Нейман доказал эту теорему. Приведем формулировку теоремы (ее доказательство основано на теореме Брауэра о неподвижной точке и в силу этого является неконструктивным, т.е. не дает способа нахождения решения игры).

ВНИМАНИЕ!	**Основная теорема теории игр** Всякая конечная антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой имеет цену $\boldsymbol{v^*}$ и у каждого игрока имеется, по меньшей мере, одна оптимальная стратегия **(*ξ**, *η**)**.

Как и большинство фундаментальных математических теорем о существовании решения, теорема не дает ответа, в данном случае, на два вопроса:

ВОПРОС 1	Если известна некоторая смешанная стратегия, то как определить является она оптимальной или нет?

Вопрос 2

Если решение всегда существует, то чему равна цена игры и какие стратегии игроков являются оптимальными?

Попробуем вначале ответить на первый вопрос. Доказано, что для оптимальных стратегий игроков (ξ^*, η^*) выполняются следующие неравенства:

$$M\,(\xi, \eta^*) \le M\,(\xi^*, \eta^*) \le M\,(\xi^*, \eta)\,, \qquad (3)$$

где $M\,(\xi^*, \eta^*) = \nu^*$ – цена игры. Отсюда следует свойство, которое можно практически применить для определения того, является ли некоторая стратегия (ξ, η) оптимальной:

$$M\,(x_i, \eta^*) \le M\,(\xi^*, \eta^*) \le M\,(\xi^*, y_j)\,, \qquad (4)$$

справедливое для всех i = 1, 2,…, m; j = 1,2,…, n.

Как практически воспользоваться этим свойством для того, чтобы проверить оптимальность некоторой заданной смешанной стратегии?

Для этого можно применить следующий ***алгоритм***.

1. Определить величину среднего выигрыша $M(\xi, \eta)$ для заданной смешанной стратегии.
2. Проверить, выполняются ли в (4) неравенства слева для всех I = 1, 2,…, m. Если для некоторого i неравенство не выполняется, то стратегия ξ не является оптимальной и останов.
3. Проверить, выполняются ли в (4) неравенства справа для всех j = 1, 2,…, n. Если для некоторого j неравенство не выполняется, то стратегия η не является оптимальной и останов.
4. Если неравенства (4) справедливы для всех индексов i, j, то стратегии ξ и η являются оптимальными, а цена игры равна $M(\xi, \eta)$.

Вернемся к ранее рассмотренному примеру платежной матрицы для игры Морра, в которой нет седловой точки. Определим, являются ли оптимальными в этой игре следующие стратегии 1-го и 2-го игрока:

$\xi = (0, 3/5, 2/5, 0)$ и $\eta = (0, 4/7, 3/7, 0)$.

Оценим вначале величину среднего выигрыша для заданных стратегий:

$\boldsymbol{M}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j \xi_i q_{ij} \eta_j = 0\times(0\times0+2\times4/7 - 3\times3/7+0\times0) + 3/5\times(-2\times0 + +0\times4/7+0\times3/7+ 3\times0) + 2/5\times(3\times0+0\times4/7+0\times3/7 - 4\times0) + 0\times(0\times0 - 3\times4/7+ +4\times3/7+0\times0) = 0.$

Проверим, выполняются ли неравенства $\boldsymbol{M}(x_i, \eta) \le \boldsymbol{M}(\xi, \eta)$ для $i = 1, 2, 3, 4$:

$\boldsymbol{M}(x_1, \eta) = 0\times0+2\times4/7 - 3\times3/7+0\times0 = -1/7 < 0,$

$\boldsymbol{M}(x_2, \eta) = -2\times0+0\times4/7+0\times3/7+3\times0 = 0,$

$\boldsymbol{M}(x_3, \eta) = 3\times0+0\times4/7+0\times3/7 - 4\times0 = 0,$

$\boldsymbol{M}(x_4, \eta) = 0\times0 - 3\times4/7+4\times3/7+0\times0 = 0.$

Проверим, выполняются ли неравенства $\boldsymbol{M}(\xi, \eta) \le \boldsymbol{M}(\xi, y_j)$ для $j = 1, 2, 3, 4$:

$\boldsymbol{M}(\xi, y_1) = 0\times0 - 2\times3/5+3\times2/5+0\times0 = 0,$

$\boldsymbol{M}(\xi, y_2) = 2\times0 +0\times3/5+0\times2/5 - 3\times0 = 0,$

$\boldsymbol{M}(\xi, y_3) = -3\times0 +0\times3/5+0\times2/5+4\times0 = 0,$

$\boldsymbol{M}(\xi, y_4) = 0\times0+3\times3/5 - 4\times2/5+0\times0 = 1/5 > 0.$

Неравенства справедливы для всех индексов i, j, следовательно, стратегии ξ, η являются ***оптимальными***, а цена игры равна 0.

При поиске решения игры иногда необходимо выполнять операции над платежными матрицами. Какое влияние это оказывает на решение игры (оптимальные стратегии и цену игры)?

Внимание!

Теорема

Оптимальные смешанные стратегии (ξ^*, η^*) в матричной игре $\|q_{ij}\|_{m\times n}$ с ценой $\boldsymbol{v}$ будут оптимальными и в матричной игре $\|aq_{ij}+b\|_{m\times n}$ с ценой $\boldsymbol{v^*=av+b}$, где $\boldsymbol{a}>0$.

Доказательство. Согласно свойству (4) оптимальных стратегий 1-го игрока справедливо

$\boldsymbol{M}(\xi^*, y_j) \ge \boldsymbol{M}(\xi^*, \eta^*)$, j=1, 2,…, n или $\sum_i \xi^*_i q_{ij} \ge v$.

Умножим обе части неравенства на число a>0 и к обеим частям полученного неравенства прибавим произведение $b\sum_i \xi^*_i$. Получим

$\sum_i a\xi^*_i q_{ij} + b\sum_i \xi^*_i \ge av+b\sum_i \xi^*_i$, $j = 1, 2,…, n$.

Так как $\sum_i \xi^*_i = 1$, то получим

$\sum_i (a\, q_{ij} + b)\xi^*_i \ \geq av + b = v^*$.

Что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается оптимальность смешанной стратегии 2-го игрока (попробуйте сделать это самостоятельно).

На основании данной теоремы платежную матрицу, имеющую отрицательные числа, можно преобразовать в матрицу с положительными числами, что полезно при поиске решения игр.

Поиск решения игры становится менее трудоемким, если ее платежную матрицу удается упростить путем удаления доминируемых и дублирующих строк (столбцов), что не влияет на решение игры.

Стратегии называются **дублирующими**, если в матричной игре имеются строки (столбцы) с одними и теми же элементами.

Рассматривая стратегии 1-го игрока, сравним поэлементно строки s и t. Целью 1-го игрока является максимизация выигрыша. Если все $q_{sj} \ \geq q_{tj}$ (j = 1, 2,…, n), то выигрыш 1-го игрока при стратегии x_s будет больше, чем при стратегии x_t. В этом случае стратегия x_t будет **доминируемой**, и ее можно исключить, упростив тем самым игру.

Поскольку 2-й игрок стремится минимизировать свой проигрыш, то, рассматривая его стратегии, сравним поэлементно столбцы r и p. Если все элементы $q_{ir} \ \geq q_{ip}$ (i=1, 2,…, m), то проигрыш 2-го игрока при стратегии y_r будет больше, чем при стратегии y_p. В этом случае стратегия y_r будет доминируемой, и ее можно исключить из матрицы, упростив игру.

На рис. 13 представлен пример упрощения матрицы игры.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Рис. 13. Пример упрощения матрицы игры

Лекция 8. Геометрическое решение игр

Чистые стратегии игрока, входящие в его оптимальную смешанную стратегию с вероятностями, отличными от нуля, называются *активными стратегиями* игрока. Понятие активной стратегии играет важную роль при поиске решения игры.

ВНИМАНИЕ!

Теорема

Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Доказательство. Пусть в матричной игре $[\boldsymbol{q_{ij}}]_{\boldsymbol{m\times n}}$ оптимальными смешанными стратегиями 1 и 2 игроков являются ($\boldsymbol{\xi^*, \eta^*}$). Цена игры равна $\boldsymbol{v^*}$. При этом 1-й игрок имеет $\boldsymbol{r}$ активных стратегий, а 2-й игрок – $\boldsymbol{k}$ активных стратегий. Расположив активные стратегии первыми, имеем

$$\sum_i \xi_i = 1,\ \ i=1, 2,\dots, r, \qquad \sum_j \boldsymbol{\eta_j} = 1,\ \ j = 1, 2,\dots, k.$$

Пусть 1-й игрок придерживается своей оптимальной стратегии $\boldsymbol{\xi^*}$, а 2-й игрок – чистой стратегии. Согласно свойству оптимальных стратегий имеем

$$\sum_i \boldsymbol{q_{ij}}\, \boldsymbol{\xi^*} \geq \boldsymbol{v^*} \ \text{ для } j = 1, 2,\dots, k. \qquad (5)$$

Если игроки используют свои оптимальные стратегии, то выигрыш 1-го игрока равен цене игры $\boldsymbol{v^*}$, т.е.

$$\boldsymbol{v^*} = \sum_i\sum_j \boldsymbol{q_{ij}}\, \xi_i{}^* \boldsymbol{\eta_j}^*, \qquad i=1, 2,\dots, r,\ \ j = 1, 2,\dots, k.$$

Учитывая (5), получаем

$$\boldsymbol{v^*} = \sum_i\sum_j \boldsymbol{q_{ij}}\, \xi_i{}^* \boldsymbol{\eta j^*} = \sum_j \boldsymbol{\eta_j}^* \sum_i \boldsymbol{q_{ij}}\, \xi_i{}^* \geq \sum_j \boldsymbol{\eta_j}\, \boldsymbol{v^*} = \boldsymbol{v^*}. \qquad (6)$$

Однако (6) выполнимо, только если все неравенства (5) превращаются в равенства. Что и требовалось доказать.

Теперь можно попробовать ответить на ранее сформулированный вопрос: если решение всегда существует, то чему равна цена игры и какие стратегии игроков являются оптимальными?

Общий подход к решению игровых задач состоит в следующем. Найти цену игры $\boldsymbol{v^*}$ и оптимальные стратегии игроков $\boldsymbol{\xi^*}$, $\boldsymbol{\eta^*}$ по имеющейся платежной матрице, действуя по следующей схеме:

- установить, имеется или нет в игре седловая точка, которая указывает на цену игры и определяет оптимальные чистые стратегии игроков;
- если седловая точка отсутствует, то выяснить, нельзя ли упростить игру;
- собственно поиск решения игры каким-либо методом.

Прежде чем рассмотреть геометрический метод решения игровых задач, попробуем найти аналитическое решение для простейшего случая игры (2×2), которая задана следующей матрицей $\boldsymbol{Q}$:

	y_1	y_2
x_1	q_{11}	q_{12}
x_2	q_{21}	q_{22}

В игре нет седловой точки и матрицу нельзя упростить (обе стратегии игроков являются активными, иначе игра имела бы седловую точку). Чему равна цена игры $\boldsymbol{v^*}$ и оптимальные стратегии игроков $\boldsymbol{\xi^*=(\xi^*_1, \xi^*_2)}$, $\boldsymbol{\eta^*=(\eta^*_1, \eta^*_2)}$?

Согласно предыдущей **теореме**, если 1-й игрок применяет свою оптимальную смешанную стратегию $\boldsymbol{\xi^*}$, а 2-й – одну из своих активных чистых стратегий, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры. Отсюда получаем два уравнения:

– для чистой стратегии $\boldsymbol{y_1}$ имеем $\boldsymbol{M(\xi^*, y_1) = q_{11}\,\xi^*_1 + q_{21}\,\xi^*_2 = v^*}$;

– для чистой стратегии $\boldsymbol{y_2}$ имеем $\boldsymbol{M(\xi^*, y_2) = q_{12}\,\xi^*_1 + q_{22}\,\xi^*_2 = v^*}$.

Кроме того, справедливо уравнение $\boldsymbol{\xi^*_1 + \xi^*_2} = 1$.

Решая эту систему из трех уравнений с тремя неизвестными, получим

- $\nu^* = (q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\xi^*_1 = (q_{22} - q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\xi^*_2 = (q_{11} - q_{12})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$.

Аналогично рассуждая, можно вычислить оптимальную стратегию для 2-го игрока, решив систему уравнений следующего вида:

– для стратегии x_1 имеем $M(x_1, \eta^*) = q_{11}\times \eta^*_1 + q_{12}\times \eta^*_2 = \nu^*$,

– для стратегии x_2 имеем $M(x_2, \eta^*) = q_{21}\times \eta^*_1 + q_{22}\times \eta^*_2 = \nu^*$,

кроме того, справедливо уравнение $\eta^*_1 + \eta^*_2 = 1$.

Решая эту систему из трёх уравнений с тремя неизвестными, получим

- $\nu^* = (q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\eta^*_1 = (q_{22} - q_{12})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$,
- $\eta^*_2 = (q_{11} - q_{21})/(q_{11} - q_{12} - q_{21} + q_{22})$.

Например, пусть дана следующая матрица игры:

	y_1	y_2
x_1	5	1
x_2	3	4

Для нее нижняя чистая цена игры α = 3, верхняя чистая цена игры β = 4 (седловой точки нет). Подставляя выигрыши из матрицы в решение, получим:

$\nu^* = (5 \times 4 - 1 \times 3)/(5 - 1 - 3 + 4) = 17/5 = 3{,}4$;

$\xi^*_1 = (4 - 3)/5 = 1/5$, $\xi^*_2 = (5 - 1)/5 = 4/5$;

$\eta^*_1 = (4 - 1)/5 = 3/5$, $\eta^*_2 = (5 - 3)/5 = 2/5$.

Оказалось, что смешанные стратегии игры (2×2) имеют простую интерпретацию на плоскости, а игры (3×3) – в пространстве. На этом основан геометрический способ решения для игр (2×2), (2×n), (m×2). Он позволяет находить приближенное решение этих игр.

Алгоритм геометрического решения игры включает следующие шаги.

1. На оси абсцисс выбирается отрезок длиной 1. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока x_1, правый край отрезка – чистой стратегии 1-го игрока x_2.

2. Через начало и конец отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если 2-й игрок применяет свои чистые стратегии y_1 и y_2.

3. В случае, если 1-й игрок применяет смешанную стратегию $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, а 2-й игрок отвечает своими чистыми стратегиями y_1 и y_2 , то выигрыш 1-го игрока соответственно будет равен

для y_1: $M(\xi, y_1) = q_{11}\xi_1+q_{21}\xi_2=q_{11}\xi_1+q_{21}(1-\xi_1) = \xi_1(q_{11}-q_{21})+q_{21}$,

для y_2: $M(\xi, y_2) = q_{12}\xi_1+q_{22}\xi_2=q_{12}\xi_1+q_{22}(1-\xi_1) = \xi_1(q_{12}-q_{22})+q_{22}$.

Видно, что функция выигрыша M линейно зависит от ξ_1, т.е. является прямой линией, соединяющей крайние точки соответствующие чистым стратегиям 1-го игрока.

4. Точки с координатами q_{11} и q_{21} соединяем отрезком прямой. Любая точка на этом отрезке равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет некоторую смешанную стратегию $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, а 2-й игрок отвечает своей чистой стратегией y_1. Аналогично строим прямую через точки с координатами q_{12} и q_{22} для стратегии y_2. Координаты любой точки на этом отрезке будут соответствовать среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет некоторую смешанную стратегию $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, а 2-й игрок отвечает стратегией y_2.

5. Находим точку *максимума* на *нижней огибающей двух прямых* (для заданной матрицы игры 2×2 на рис. 14 представлена точка максимума на нижней огибающей). Из этой точки строим перпендикуляр на ось абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры v, расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка – вероятности ξ^*_1, расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности ξ^*_2. Если абсциссой «пиковой» точки является 0 или 1, то 1-й игрок имеет чистую оптимальную стратегию. Если абсцисса «пиковой» точки лежит строго

между 0 и 1, то одна проходящая через нее прямая имеет положительной наклон, а другая – отрицательный наклон.

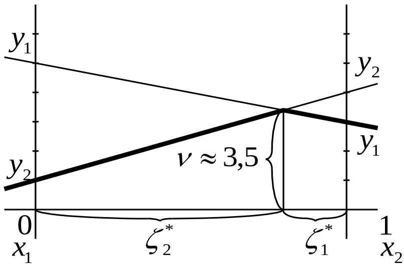


Рис. 14. Точка максимума на нижней огибающей двух прямых

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2)}$ 2-го игрока, можно или воспользоваться построенным графиком, или построить новый график для 2-го игрока. Рассмотрим обе возможности.

6.1. На существующем графике через точку максимина проведем прямую, параллельную оси абсцисс. Обозначим точки ее пересечения с осями ординат через ***M*** и ***N*** (рис. 15).

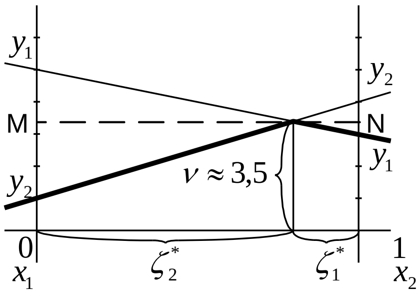


Рис. 15. Поиск оптимальной стратегии 2-го игрока с использованием построенного графика

Тогда оптимальная стратегия 2-го игрока равна отношению следующих отрезков:

$\boldsymbol{\eta^*_1 = My_2/y_1y_2 = Ny_2/y_1y_2 \approx 3/5}$,

$\boldsymbol{\eta^*_2 = 1 - \eta^*_1 \approx 2/5}$.

6.2. Более точное решение получается, если построить новый график для 2-го игрока по шагам, аналогичным пп. 1 – 4 данного алгоритма. Вначале на оси абсцисс выбирается отрезок длиной 1. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 2-го игрока $\boldsymbol{y_1}$, правый – $\boldsymbol{y_2}$. Далее через начало и конец отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$. Точки с координатами $\boldsymbol{q_{11}}$ и $\boldsymbol{q_{12}}$ соединяем отрезком прямой. Любая точка на этом отрезке равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет свою чистую стратегию $\boldsymbol{x_1}$, а 2-й игрок отвечает некоторой смешанной стратегией $\eta^*=(\eta^*_1,\ \eta^*_2)$. Аналогично строим прямую через точки с координатами $\boldsymbol{q_{21}}$ и $\boldsymbol{q_{22}}$ для стратегии $\boldsymbol{x_2}$. Координаты любой точки на этом отрезке будут соответствовать среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет некоторую свою чистую стратегию $\boldsymbol{x_2}$, а 2-й игрок отвечает некоторой смешанной стратегией $\eta^*=(\eta^*_1,\ \eta^*_2)$. Затем находим точку *минимума* на *верхней огибающей двух прямых* (для заданной матрицы игры 2×2 на рис. 16 представлена точка минимума на верхней огибающей), поскольку 2-й игрок стремится минимизировать свой максимальный проигрыш.

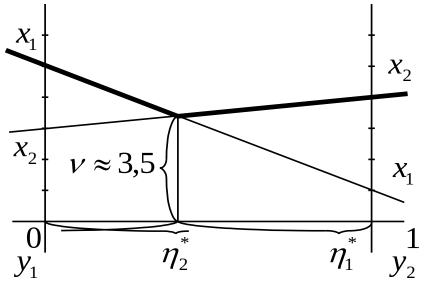


Рис. 16. Точка минимума на верхней огибающей двух прямых

Из точки минимума на верхней огибающей опускаем перпендикуляр на единичный отрезок оси абсцисс и определяем оптимальную стратегию 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^*} = (\boldsymbol{\eta^*_1}, \boldsymbol{\eta^*_2}) \approx (\boldsymbol{3/5,\ 2/5})$.

Оказалось, что геометрический метод можно применять при поиске решений игр (2×n) и (m×2). Для этого используется следующее утверждение, справедливость которого доказана.

ВНИМАНИЕ!	**Утверждение** В любой конечной игре существует решение, в котором количество активных стратегий каждого игрока не превосходит числа $\boldsymbol{min(m, n)}$.

Это означает, что игры (2×n) и (m×2) сводятся к решению игры (2×2). Их геометрический метод решения аналогичен рассмотренному выше.

Аналогично в трехмерном пространстве можно решать игры (3×n), (m×3), сводя их к игре (3×3). Однако получающиеся при этом построения оказываются весьма громоздкими и требуют привлечения методов начертательной геометрии.

Лекция 9. Решение игр методом последовательных приближений

В процессе сбора и анализа данных, построения модели в виде матрицы выигрышей производятся измерения. Любое измерение имеет определенную погрешность, ошибки могут накапливаться. К тому же поиск оптимального решения игры при большом количестве стратегий игроков представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Поэтому точность в определении значения игры и оптимальных стратегий игроков оправдана не всегда.

Погрешность в оценке игроком своего выигрыша не может привести к практически серьёзным последствиям и небольшое отклонение игрока от оптимальной стратегии не влечёт за собой существенного изменения в его выигрыше. Достаточно найти приближённое решение, которое даёт средний выигрыш, близкий к цене игры, и приближённые оптимальные стратегии игроков. Ориентировочное значение цены игры может дать уже простой анализ матрицы выигрышей и определение нижней и верхней цен игры. Если они близки, то поисками точного решения заниматься не обязательно, так как достаточно выбрать соответствующие чистые максиминную и минимаксную стратегии игроков. Если же они не близки, можно получить приемлемое для практики решение с помощью численных методов решения игр.

Одним из простейших последовательных приближенных методов решения матричной игры является метод Брауна–Робинсон (процесс поиска приближенного решения был сформулирован в работе Г. Брауна, а сходимость процесса была доказана Дж. Робинсон). Идея этого метода состоит в следующем. Имитируется многократное повторение игры и набирается статистика, показывающая, какие стратегии максимизируют выигрыш, и таким образом приближенно определяется оптимальная стратегия.

Для анализа антагонистической игры с некоторой платежной матрицей строится итерационный процесс, каждый шаг которого – розыгрыш игры. В первом розыгрыше у игроков ещё нет никакой информации, поэтому они выбирают свои стратегии произвольно. Далее каждый игрок выбирает такую чистую стратегию, которая является наилучшей с учетом всех предыдущих ходов противника, рассматриваемых как некоторая «смешанная» стратегия, т.е. последовательно, при каждом розыгрыше выбирается та стратегия, которая первому игроку дает максимальный средний выигрыш, а второму – минимальный средний выигрыш. После каждого розыгрыша вычисляется среднее значение выигрыша первого игрока, проигрыша второго игрока, и их среднее арифметическое принимается за приближенное значение цены игры. После завершения итерационного процесса вычисляются частоты использования игроками своих стратегий, которые являются приближенными значениями вероятностей в оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Например, пусть дана следующая матрица выигрышей 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3
x_1	2	1	0
x_2	2	0	3
x_3	–1	3	–3

В игре нет седловой точки (α = 0, β = 2). Результаты вычислений по методу последовательных приближений удобно представить в табличном виде:

N	**i(N)**	**L_1(N)**	**L_2(N)**	**L_3(N)**	**$\nu_\wedge$(N)**	**j(N)**	**U_1(N)**	**U_2(N)**	**U_3(N)**	**$\nu^\wedge$(N)**	**ν**
1	x_1	2	1	**0**	0	y_3	0	**3**	–3	3	1,5
2	x_2	4	**1**	3	0,5	y_2	1	**3**	0	1,5	1
3	x_2	6	**1**	6	0,3	y_2	2	**3**	**3**	1	0,7
4	x_2	8	**1**	9	0,25	y_2	3	3	**6**	1,5	0,9
5	x_3	7	**4**	6	0,8	y_2	4	3	**9**	1,8	1,3
6	x_3	6	7	**3**	0,5	y_3	4	**6**	**6**	1	0,75
7	x_2	8	7	**6**	0,9	y_3	4	**9**	3	1,3	1,1
8	x_2	10	**7**	9	0,9	y_2	5	**9**	6	1,1	1
9	x_2	12	**7**	12	0,8	y_2	6	**9**	**9**	1	0,9
10	x_2	14	**7**	15	0,7	y_2	7	9	**12**	1,2	0,95
11	x_3	13	**10**	12	0,9	y_2	8	9	**15**	1,4	1,1
12	x_3	12	13	**9**	0,75	y_3	8	**12**	**12**	1	**0,9**

В таблице приняты следующие обозначения столбцов:

N – номер розыгрыша (партии);

i(N) – номер чистой стратегии 1-го игрока, выбранной в партии **N**;

L_j(N) – общий выигрыш 1-го игрока после **N** партий, если 2-й игрок все время применяет стратегию **y_j**;

$\nu_\wedge$(N) = **$\min_j$ (L_j(N))/N** – наименьший средний выигрыш 1-го игрока за **N** ходов;

j(N) – номер чистой стратегии 2-го игрока в партии **N**;

$\mathbf{U_i(N)}$ – общий выигрыш 1-го игрока после **N** партий, если он все время использует стратегию $\mathbf{x_i}$;

$\mathbf{v^{\wedge}(N) = max_i\ (U_i(N))/N}$ – наибольший средний выигрыш 1-го игрока за **N** ходов;

$\mathbf{v = (v_{\wedge} + v^{\wedge})/2}$ – приближенное значение цены игры.

В таблице приведены розыгрыши для 12 партий. В результате цена игры $\mathbf{v} \approx 0{,}9$, приближенное значение оптимальной стратегии 1-го игрока $\boldsymbol{\xi} \approx (1/12,\ 7/12,\ 4/12)$, 2-го игрока – $\boldsymbol{\eta} \approx (0{,}8/12{,}4/12)$. Приведем для сравнения точное решение: $\mathbf{v^*} = 1$, $\boldsymbol{\xi^*} = \boldsymbol{\eta^*} = (0,\ 8/12,\ 4/12)$.

Данный метод легко автоматизировать (в электронных таблицах, в какой-либо среде программирования), поэтому он иногда предпочтительнее сведения матричной игры к задаче линейного программирования и использования симплекс-метода. Для остановки итерационного процесса компьютерного моделирования игры необходимо указать число итераций. Дополнительным условием остановки является достижение положения «*равновесия*», при котором все выигрыши $\mathbf{L_j(N)}$ или $\mathbf{U_i(N)}$ совпадают между собой.

Доказано, что процесс сходится при числе партий $N \to \infty$, причем приближенное значение $\boldsymbol{v}$ стремится к цене игры $\boldsymbol{v^*}$, а $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ могут «колебаться» около значения оптимальных стратегий $\boldsymbol{\xi^*}$ и $\boldsymbol{\eta^*}$. Итерационный процесс ведёт игроков к цели медленно, сходимость здесь не монотонная. При этом скорость сходимости уменьшается с ростом размерности матрицы и ростом числа стратегий игроков. Ее порядок пропорционален $\mathbf{N^{-1/(m+n-1)}}$. Однако наряду с таким недостатком можно выделить и достоинства метода: сложность и объём вычислений сравнительно слабо возрастают по мере увеличения числа стратегий игроков ($\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$). К тому же трудоемкость метода снижается, если в ходе розыгрышей определять не только номер очередной чистой стратегии, но и сколько раз подряд она должна применяться.

Лекция 10. Решение игр методом линейного программирования

В процессе сбора и анализа данных, построения модели в виде матрицы выигрышей производятся измерения.

Рассмотренные методы решения игр (геометрический и последовательных приближений) не гарантируют получение оптимального решения. Методом, позволяющим найти точное решение игры, является метод сведения игровой задачи к задаче *линейного программирования*.

В разговоре с Д. Данцигом (автор симплекс-метода в его матричной форме) Дж. фон Нейман за час изложил взаимосвязь теории двойственности в линейном программировании с основной теоремой матричных игр. Суть этой связи заключается в следующем:

- любая конечная игра двух лиц может быть сведена к паре двойственных задач линейного программирования;
- задача линейного программирования может быть представлена как игра двух лиц с нулевой суммой.

Это позволяет после сведения игровой задачи к паре двойственных задач линейного программирования применить любой известный метод (например, *симплекс-метод*) и получить оптимальное решение матричной игры. Отметим, что сведением задач линейного программирования к матричной игре пользуются реже.

Проанализируем процесс сведения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования. Пусть задана игра матрицей Q размером ($m \times n$):

	y_1	y_2	…	y_n
x_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}
x_2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	q_{m1}	q_{m2}	…	q_{mn}

Согласно ранее доказанной теореме (если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий), оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^*}$ гарантирует ему выигрыш не меньше $\boldsymbol{v}^*$, независимо от стратегии, выбранной 2-м игроком:

$$
\begin{aligned}
q_{11}\xi_1 + q_{21}\xi_2 + \ldots + q_{m1}\xi_m &\geq \nu,\\
q_{12}\xi_1 + q_{22}\xi_2 + \ldots + q_{m2}\xi_m &\geq \nu,\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots&\\
q_{1n}\xi_1 + q_{2n}\xi_2 + \ldots + q_{mn}\xi_m &\geq \nu,
\end{aligned}
$$

где $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m = 1; \quad \xi_i \geq 0, \quad I = 1, 2, \ldots, m.$ (7)

Будем считать, что $\boldsymbol{\nu} > 0$. Если это не так, то на основании ранее доказанной теоремы (оптимальные смешанные стратегии ($\boldsymbol{\xi^*}$, $\boldsymbol{\eta^*}$) в матричной игре $||\boldsymbol{q_{ij}}||_{\boldsymbol{m\times n}}$ с ценой $\boldsymbol{v}$ будут оптимальными и в матричной игре $||\boldsymbol{aq_{ij}+b}||_{\boldsymbol{m\times n}}$ с ценой $\boldsymbol{v^*=av+b}$, где $\boldsymbol{a}>0$) элементы матрицы $\boldsymbol{q_{ij}}$ всегда можно сделать положительными, прибавив некоторую константу (это повлияет на цену игры, но не на оптимальные стратегии). Цена игры $\boldsymbol{\nu^*}$ с положительными элементами матрицы не может быть отрицательной.

Преобразуем систему (7), разделив ее на положительное число $\boldsymbol{\nu}$. Введем новое обозначение: $\boldsymbol{p_i} = \boldsymbol{\xi_i} / \boldsymbol{v}$, i=1, 2,…, m. Получим

$$
\begin{aligned}
q_{11}p_1 + q_{21}p_2 + \ldots + q_{m1}p_m &\geq 1,\\
q_{12}p_1 + q_{22}p_2 + \ldots + q_{m2}p_m &\geq 1,\\
\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots&\\
q_{1n}p_1 + q_{2n}p_2 + \ldots + q_{mn}p_m &\geq 1,
\end{aligned}
$$

где $\boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} + \ldots + \boldsymbol{p_m} = 1/\boldsymbol{v}; \quad \boldsymbol{p_i} \geq 0, \quad i=1, 2, \ldots, m.$ (8)

Поскольку 1-й игрок стремится максимизировать цену игры $\boldsymbol{v}$, то в (8) величина, обратная $1/\boldsymbol{v}$, будет минимизироваться.

Отсюда оптимальная стратегия 1-го игрока определяется из *прямой* задачи линейного программирования: найти минимум функции $\boldsymbol{P_{min}} = \boldsymbol{p_1} + \boldsymbol{p_2} + \ldots + \boldsymbol{p_m} = 1/\boldsymbol{\nu}$ при ограничениях (8).

Аналогично рассуждая, оптимальная стратегия 2-го игрока гарантирует ему проигрыш не больше цены игры, независимо от выбора стратегии $\boldsymbol{x_i}$ 1-го игрока, т.е. справедлива следующая система неравенств:

$$q_{11}\eta_1 + q_{12}\eta_2 + \ldots + q_{1n}\eta_n \le \nu,$$

$$q_{21}\eta_1 + q_{22}\eta_2 + \ldots + q_{2n}\eta_n \le \nu,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots$$

$$q_{m1}\eta_1 + q_{m2}\eta_2 + \ldots + q_{mn}\eta_n \le \nu,$$

где $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n = 1$; $\eta_j \ge 0$, $j=1, 2,\ldots, n$. (9)

Преобразуем систему (9), разделив ее на положительное число $\boldsymbol{\nu}$. Введем новую переменную: $\boldsymbol{z_j} = \eta_{\boldsymbol{i}} / \boldsymbol{\nu}$, $j=1, 2,\ldots, n$. Получим

$$q_{11}z_1 + q_{12}z_2 + \ldots + q_{1n}z_n \le 1,$$

$$q_{21}z_1 + q_{22}z_2 + \ldots + q_{2n}z_n \le 1,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots$$

$$q_{m1}z_1 + q_{m2}z_2 + \ldots + q_{mn}z_n \le 1,$$

где $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1/\boldsymbol{\nu}$; $z_j \ge 0$, $j = 1, 2,\ldots, n$. (10)

Поскольку 2-й игрок стремится минимизировать свой проигрыш, то в (10) величина обратная $1/\boldsymbol{\nu}$ будет стремиться к максимуму. Отсюда оптимальная стратегия 2-го игрока определяется из *обратной задачи линейного программирования*: найти максимум функции $\boldsymbol{Z_{max}} = \boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} + \ldots + \boldsymbol{z_n} = 1/\boldsymbol{\nu}$ при указанных ограничениях.

Таким образом, решение матричной игры сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования. Из теории линейного программирования известно, что задача линейного программирования не всегда имеет решение. С другой стороны, согласно основной теореме теории матричных игр всякая конечная игра двух лиц с нулевой суммой всегда имеет решение. Следовательно, необходимо доказать, что в полученной паре двойственных задач всегда существует допустимое решение, а целевая функция является ограниченной.

Предположим, что в полученной прямой задаче линейного программирования нет допустимого решения. Чтобы это опровергнуть, нужно указать на существование хотя бы одной точки в пространстве поиска решений, в которой все условия-ограничения выполняются.

Найдем эту точку. Поскольку все $q_{ij} > 0$, то обозначим через $\mu = \min_i \min_j q_{ij}$. Тогда точка с координатами $p_1 = 1/\mu$, $p_2 = p_3 = \ldots = p_m = 0$ является допустимым решением, так как она удовлетворяет условиям (8), что легко проверить путем подстановки этого решения в условия-ограничения прямой задачи.

Целевая функция $\boldsymbol{P}$ для прямой задачи минимизируется, поэтому она должна быть ограниченной снизу. В самом деле, все $\boldsymbol{p_i} \geq 0$, а коэффициенты при переменных $\boldsymbol{p_i}$ в целевой функции (8) положительны, следовательно, целевая функция ограничена снизу нулем.

Таким образом, в полученной паре двойственных задач всегда существует допустимое решение, а целевая функция является ограниченной.

После сведения игровой задачи к паре двойственных задач линейного программирования и ее решения, например, симплекс-методом, необходимо вернуться к исходной игровой задаче, выполнив необходимые замены переменных, определить цену игры и оптимальные стратегии игроков.

Практикум

Практикум по модулю 2 включает следующие темы: «Решение игровых задач геометрическим методом» и «Принятие решений для задач упорядочения».

Тема: «Решение игровых задач геометрическим методом»

Целью практикума является выявление особенностей постановки игровых задач (лекции 6, 7), приобретение навыков их решения геометрическим методом (лекция 8).

Задача 1. Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	4	3	2	6
x_2	2	2	3	–1

В игре нет седловой точки (нижняя чистая цена игры $\alpha = 2$, верхняя чистая цена игры $\beta = 3$). Дублирующих стратегий нет, стратегия 2-го игрока y_2 доминирует над стратегией y_1, однако упрощать матрицу путем исключения доминируемой стратегии не будем.

Решение данной игры геометрическим методом сводится к решению игры 2×2 на основании доказанного утверждения о том, что в любой конечной игре существует решение, в котором количество активных стратегий каждого игрока не превосходит числа $\boldsymbol{min}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$. Найдем это решение.

1. Поиск оптимальной стратегии начнем с игрока, у которого две стратегии. Это 1-й игрок. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока x_1, правый – x_2.

2. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если 2-й игрок применяет свои чистые стратегии y_1, y_2, y_3 и y_4.

3. Точки с координатами $q_{11} = 4$ и $q_{21} = 2$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через $y_1\ y_1$. Любая точка на этом отрезке прямой равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет некоторую смешанную стратегию $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, а 2-й игрок отвечает своей чистой стратегией y_1. Аналогично строим прямые $y_2\ y_2$,

$\boldsymbol{y_3 y_3}$, $\boldsymbol{y_4 y_4}$ через точки с координатами соответственно $\boldsymbol{q_{12}} = 3$ и $\boldsymbol{q_{22}} = 2$, $\boldsymbol{q_{13}} = 2$ и $\boldsymbol{q_{23}} = 3$, $\boldsymbol{q_{14}} = 6$ и $\boldsymbol{q_{24}} = -1$. Получим график, состоящий из четырех прямых соответствующих смешанным стратегиям 1-го игрока, при условии, что 2-й игрок отвечает чистыми стратегиями y_1, y_2, y_3, y_4 (рис. 17).

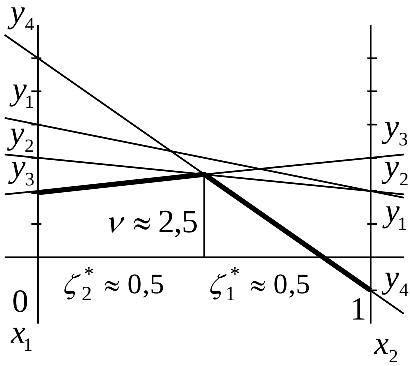


Рис. 17. График для определения цены игры и оптимальной стратегии 1-го игрока

4. Найдем на графике нижнюю огибающую (на рис. 17 она выделена жирной ломаной линией), а на ней – «пиковую» точку максимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры $\boldsymbol{\nu \approx 2{,}5}$. Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\boldsymbol{\xi^*_1 \approx 0{,}5}$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\boldsymbol{\xi^*_2 \approx 0{,}5}$.

5. Существует такая оптимальная стратегия 2-го игрока, у которой из четырех стратегий только две являются активными. На графике (рис. 17) в точке максимума пересеклись три прямых (y_2, y_3 и y_4), выбираем любую пару прямых с противоположными наклонами, например y_3 и y_4.

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^*}$=($\boldsymbol{\eta^*_1}$, $\boldsymbol{\eta^*_2}$, $\boldsymbol{\eta^*_3}$, $\boldsymbol{\eta^*_4}$) = (0, 0, $\boldsymbol{\eta^*_3}$, $\boldsymbol{\eta^*_4}$), построим новый график по шагам, аналогичным пп. 1–4. На оси абсцисс откладываем отрезок

единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 2-го игрока $\boldsymbol{y_3}$, правый – $\boldsymbol{y_4}$. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$. Точки с координатами $\boldsymbol{q_{13}} = 2$ и $\boldsymbol{q_{14}} = 6$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через $\boldsymbol{x_1 x_1}$. Аналогично, строим прямую $\boldsymbol{x_2\, x_2}$ через точки с координатами соответственно $\boldsymbol{q_{23}} = 3$ и $\boldsymbol{q_{24}} = -1$. Получим график, представленный на рис. 18. Найдем на нём верхнюю огибающую (она выделена на рис. 18 жирной ломаной линией), а на ней – «пиковую» точку минимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Цена игры ранее уже была найдена ($\boldsymbol{v \approx 2{,}5}$). Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\boldsymbol{\eta^*_3 \approx 0{,}9}$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\boldsymbol{\eta^*_4 \approx 0{,}1}$.

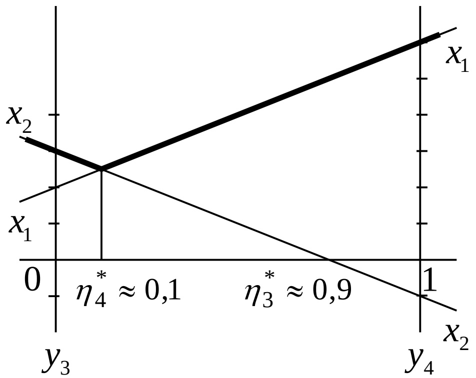


Рис. 18. График для определения оптимальной стратегии 2-го игрока

Ответ: цена игры $\boldsymbol{v \approx 2{,}5}$; оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2) \approx (0{,}5\ ; 0{,}5)}$; оптимальная стратегия 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2, \eta^*_3, \eta^*_4) \approx (0;\ 0;\ 0{,}9\ ; 0{,}1)}$.

<u>Задача 2</u>. Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2
x_1	–5	6
x_2	7	3
x_3	1	5
x_4	10	2

1. Поиск оптимальной стратегии начнем с игрока, у которого две стратегии. Это 2-й игрок. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 2-го игрока $\boldsymbol{y_1}$, правый – $\boldsymbol{y_2}$.

2. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ и $\boldsymbol{x_4}$.

3. Точки с координатами $\boldsymbol{q_{11}} = -5$ и $\boldsymbol{q_{12}} = 6$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через $\boldsymbol{x_1x_1}$. Любая точка на этом отрезке прямой равна среднему выигрышу 1-го игрока, если он применяет свою чистую стратегию $\boldsymbol{x_1}$, а 2-й игрок отвечает некоторой смешанной стратегией $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2})$. Аналогично строим прямые $\boldsymbol{x_2x_2}$, $\boldsymbol{x_3x_3}$, $\boldsymbol{x_4x_4}$ через точки с координатами соответственно $\boldsymbol{q_{21}} = 7$ и $\boldsymbol{q_{22}} = 3$, $\boldsymbol{q_{31}} = 1$ и $\boldsymbol{q_{32}} = 5$, $\boldsymbol{q_{41}} = 10$ и $\boldsymbol{q_{42}} = 2$. График, состоящий из четырех прямых, соответствующих смешанным стратегиям 2-го игрока, при условии, что 1-й игрок отвечает чистыми стратегиями x_1, x_2, x_3, x_4, представлен на рис. 19.

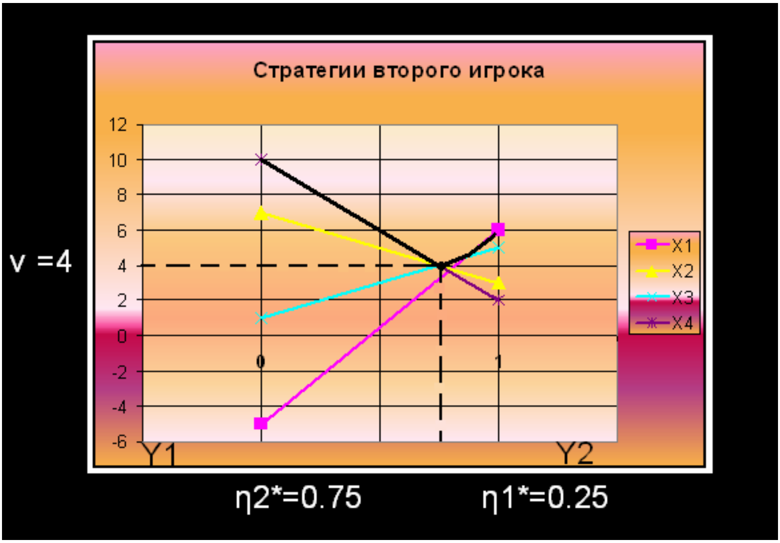


Рис. 19. График для определения цены игры и оптимальной стратегии 2-го игрока

4. Найдем на графике верхнюю огибающую, а на ней – «пиковую» точку минимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Его высота будет соответствовать цене игры $\boldsymbol{v \approx 4}$. Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\boldsymbol{\eta^*_1 \approx 0,25}$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\boldsymbol{\eta^*_2 \approx 0,75}$.

5. Существует такая оптимальная стратегия 1-го игрока, у которой из четырех стратегий только две являются активными. На графике в точке минимума пересеклись две прямых (x_3 и x_4).

6. Для того чтобы найти оптимальную стратегию 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^*=(\xi^*_1, \xi^*_2, \xi^*_3, \xi^*_4)} = (0, 0, \boldsymbol{\xi^*_3, \xi^*_4})$, построим новый график по шагам, аналогичным пп. 1–4. На оси абсцисс откладываем отрезок единичной длины. Левый край отрезка будет соответствовать чистой стратегии 1-го игрока $\boldsymbol{x_3}$, правый – $\boldsymbol{x_4}$. Через начало и конец единичного отрезка проводим две оси ординат, точки на которых будут соответствовать значениям выигрыша 1-го игрока, если он

применяет свои чистые стратегии $\boldsymbol{x_3}$ и $\boldsymbol{x_4}$. Точки с координатами $\boldsymbol{q_{31}} = 1$ и $\boldsymbol{q_{41}} = 10$ соединяем отрезком прямой. Обозначим эту прямую через $\boldsymbol{y_1 y_1}$. Аналогично строим прямую $\boldsymbol{y_2\, y_2}$ через точки с координатами соответственно $\boldsymbol{q_{32}} = 5$ и $\boldsymbol{q_{42}} = 2$. Получим график, представленный на рис. 20.

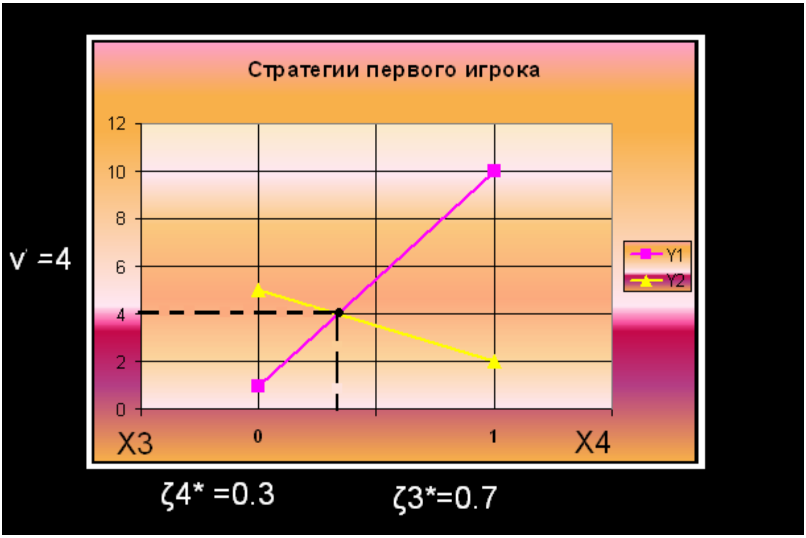


Рис. 20. График для определения оптимальной стратегии 1-го игрока

Найдем на графике нижнюю огибающую, а на ней – «пиковую» точку максимума. Из этой точки строим перпендикуляр к оси абсцисс. Цена игры ранее уже была найдена ($\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{4}$). Расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до правого края единичного отрезка соответствует вероятности $\boldsymbol{\xi^*_3} \approx \boldsymbol{0{,}7}$; расстояние от точки пересечения перпендикуляра с осью абсцисс до левого края единичного отрезка – вероятности $\boldsymbol{\xi^*_4} \approx \boldsymbol{0{,}3}$.

Ответ: цена игры $\boldsymbol{v} \approx \boldsymbol{4}$; оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^*} = (\boldsymbol{\xi^*_1}, \boldsymbol{\xi^*_2}, \boldsymbol{\xi^*_3}, \boldsymbol{\xi^*_4}) \approx (\boldsymbol{0}; \boldsymbol{0}; \boldsymbol{0{,}7}; \boldsymbol{0{,}3})$; оптимальная стратегия 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^*} = (\boldsymbol{\eta^*_1}, \boldsymbol{\eta^*_2}) \approx (\boldsymbol{0{,}25}; \boldsymbol{0{,}75})$.

Тема: «Решение игровых задач методом последовательных приближений»

Целью практикума является выявление особенностей постановки игровых задач (лекции 6, 7), приобретение навыков решения матричных игр $m \times n$ методом последовательных приближений (лекция 9).

Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3
x_1	1	2	0
x_2	–1	–2	3
x_3	2	0	–1

В игре нет седловой точки ($\alpha = 0$, $\beta = 2$), нет также доминирующих стратегий. Имитируем многократное повторение игры, построив итерационный процесс взаимного обучения игроков. Каждый шаг в этом процесс – это партия, которая включает ход 1-го игрока и ответ 2-го игрока. Игроки выбирают в очередной партии такую чистую стратегию, которая является наилучшей с учетом всех предыдущих ходов противника, рассматриваемых как некоторая «смешанная» стратегия. Иными словами, 1-й игрок выбирает стратегию, которая дает максимальный средний выигрыш, а 2-й игрок – минимальный средний выигрыш. После каждой партии будем вычислять среднее значение выигрыша 1-го игрока, проигрыша 2-го игрока, а также среднее арифметическое этих величин.

Для удобства результаты вычислений по методу последовательных приближений будем представлять в табличном виде:

N	**i**(N)	$\mathbf{L_1}$(N)	$\mathbf{L_2}$(N)	$\mathbf{L_3}$(N)	$\boldsymbol{\nu}_{\wedge}$(N)	**j**(N)	$\mathbf{U_1}$(N)	$\mathbf{U_2}$(N)	$\mathbf{U_3}$(N)	$\boldsymbol{\nu}$^(N)	$\boldsymbol{\nu}$

В таблице приняты следующие обозначения столбцов: N – номер партии; **i**(N) – номер чистой стратегии 1-го игрока, выбранной в партии N; $\mathbf{L_j}$(N) – общий выигрыш 1-го игрока после N партий, если 2-й игрок все время применяет стратегию $\mathbf{y_j}$; $\mathbf{v}^{\wedge}$(N) = $\mathbf{min_j}$ ($\mathbf{L_j}$(N))/N – наименьший средний выигрыш 1-го игрока за N ходов; **j**(N) – номер чистой стратегии 2-го игрока в партии N; $\mathbf{U_i}$(N) – общий выигрыш 1-го игрока после N партий, если он все время использует стратегию $\mathbf{x_i}$; $\mathbf{v}^{\wedge}$(N) = $\mathbf{max_i}$ ($\mathbf{U_i}$(N))/N – наибольший средний выигрыш 1-го игрока за N ходов; $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{\wedge} + \mathbf{v}^{\wedge})/2$ – приближенное значение цены игры.

В первой партии у 1-го игрока ещё нет никакой информации, поэтому он выбирает свою стратегию произвольно. Пусть это будет стратегия x_1. Таблица примет следующий вид:

N	**i**(N)	$\mathbf{L_1}$(N)	$\mathbf{L_2}$(N)	$\mathbf{L_3}$(N)	$\mathbf{v}_{\wedge}$(N)	**j**(N)	$\mathbf{U_1}$(N)	$\mathbf{U_2}$(N)	$\mathbf{U_3}$(N)	**v^**(N)	**v**
1	x_1	1	2	**0**	0						

Ответный ход 2-го игрока должен быть таким, чтобы выигрыш 1-го игрока был минимален. Это стратегия y_3. Тогда наибольший средний выигрыш 1-го игрока за один ход будет равен 3, а приближенное значение цены игры $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_{\wedge} + \mathbf{v}^{\wedge})/2$ = (0+3)/2 = 1,5:

N	**i**(N)	$\mathbf{L_1}$(N)	$\mathbf{L_2}$(N)	$\mathbf{L_3}$(N)	$\mathbf{v}_{\wedge}$(N)	**j**(N)	$\mathbf{U_1}$(N)	$\mathbf{U_2}$(N)	$\mathbf{U_3}$(N)	$\mathbf{v}^{\wedge}$(N)	**v**
1	x_1	1	2	**0**	0	y_3	0	**3**	–1	3	1,5

Ответный ход 1-го игрока должен обеспечивать ему максимальный средний выигрыш. Это стратегия x_2. В этом случае общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию y_1 , будет равен $\mathbf{L_1}$(2) = 1 – 1 = 0; общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию y_2, будет равен $\mathbf{L_2}$(2) = 2 – 2 = 0; общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если 2-й игрок применяет стратегию y_3, будет равен $\mathbf{L_3}$(2) = 0+3 = 3. Наименьший средний выигрыш 1-го игрока за две партии $\mathbf{v}_{\wedge}$(N) будет равен min ($\mathbf{L_1}$(2), $\mathbf{L_2}$(2), $\mathbf{L_3}$(2))/2 = 0/2 = 0. Он определяет наиболее выгодную ответную стратегию 2-го игрока – y_1 или y_2. Выбираем в качестве ответной стратегии 2-го игрока стратегию y_1 :

N	**i**(N)	**L**$_1$(N)	**L**$_2$(N)	**L**$_3$(N)	$\nu_\wedge$(N)	**j**(N)	**U**$_1$(N)	**U**$_2$(N)	**U**$_3$(N)	$\nu^\wedge$(N)	ν
1	x_1	1	2	**0**	0	y_3	0	**3**	–1	3	1,5
2	x_2	0	0	3	0	y_1					

В этом случае общий выигрыш 1-го игрока после двух партий, если он все время применяет стратегию x_1, будет равен $U_1(2) = 0+1 = 1$; если 1-й игрок применяет стратегию x_2, то $U_2(2) = 3 - 1 = 2$; если 1-й игрок применяет стратегию x_3, то $U_3(2) = -1+2 = 1$. Очевидно, что наибольший средний выигрыш 1-го игрока за две партии $\nu^\wedge(2)$ будет равен $\max(U_1(2), U_2(2), U_3(2))/2 = 2/2 = 1$. Он определяет наиболее выгодную ответную стратегию 1-го игрока в следующей партии – x_2 и позволяет найти приближенное значение цены игры $\nu = (\nu_\wedge + \nu^\wedge)/2 = (0+1)/2 = 0{,}5$:

N	**i(N)**	**L$_1$(N)**	**L$_2$(N)**	**L$_3$(N)**	**$\nu_\wedge$(N)**	**j(N)**	**U$_1$(N)**	**U$_2$(N)**	**U$_3$(N)**	**$\nu^\wedge$(N)**	**ν**
1	x_1	1	2	**0**	0	y_3	0	**3**	–1	3	1,5
2	x_2	0	0	3	0	y_1	1	**2**	1	1	0,5

Аналогично рассуждая, приведем в таблице результаты ещё для 17-ти партий:

3	x_2	–1	**–2**	6	-2/3	y_2	**3**	0	1	1	0,17
4	x_1	**0**	0	6	0	y_1	**4**	–1	3	1	0,5
5	x_1	**1**	2	6	1/5	y_1	**5**	–2	5	1	0,6
6	x_1	**2**	4	6	1/3	y_1	6	–3	**7**	7/6	0,75
7	x_3	**4**	4	5	4/7	y_1	7	–4	**9**	9/7	0,93
8	x_3	6	**4**	4	1/2	y_2	**9**	–6	9	9/8	0,8
9	x_1	7	6	**4**	4/9	y_3	**9**	–3	8	1	0,72
10	x_1	8	8	**4**	2/5	y_3	**9**	0	7	0,9	0,65
11	x_1	9	10	**4**	4/11	y_3	**9**	3	6	9/11	0,6
12	x_1	10	12	**4**	1/3	y_3	**9**	6	5	3/4	0,54
13	x_1	11	14	**4**	4/13	y_3	**9**	9	4	9/13	0,5

14	x_1	12	16	**4**	2/7	y_3	9	**12**	3	6/7	0,57
15	x_2	11	14	**7**	7/15	y_3	9	**15**	2	1	0,73
16	x_2	**10**	12	10	5/8	y_1	10	**14**	4	7/8	0,75
17	x_2	**9**	10	13	9/17	y_1	11	**13**	6	13/17	**0,65**

На графике (рис. 21) в качестве примера представлен процесс «колебания» цены игры на 17-ти итерациях по методу последовательных приближений.

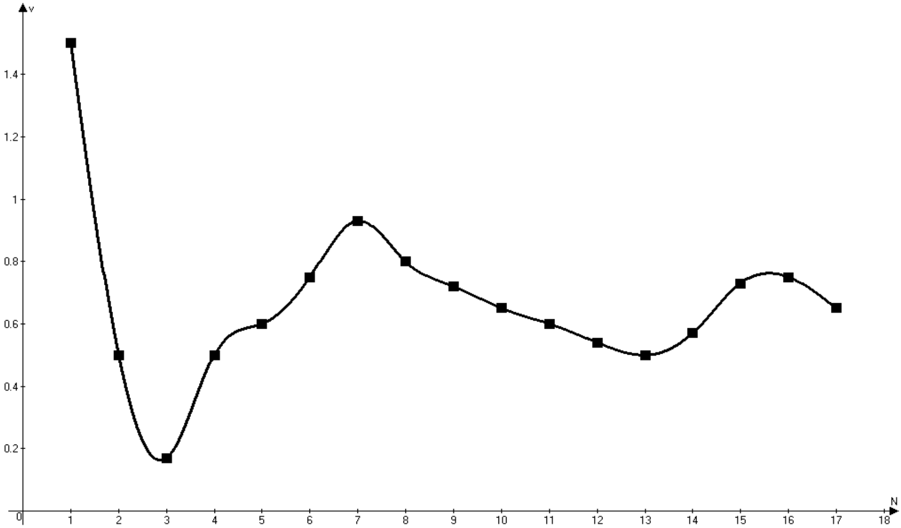


Рис. 21.Процесс «колебания» цены игры по методу последовательных приближений

Ответ: цена игры $\boldsymbol{v} \approx 0{,}65$; оптимальные стратегии игроков $\boldsymbol{\xi^*} = (\xi^*_1, \xi^*_2, \xi^*_3) \approx (10/17,\ 5/17,\ 2/17)$; $\boldsymbol{\eta^*} = (\eta^*_1, \eta^*_2, \eta^*_3) \approx (7/17,\ 2/17,\ 8/17)$.

Тема: «Решение игровых задач симплекс-методом»

Целью практикума является выявление особенностей постановки игровых задач (лекции 6, 7), приобретение навыков решения путем сведения игры к паре двойственных задач линейного программирования с последующим применением симплекс-метода (лекция 10).

Пусть игра задана следующей матрицей выигрыша 1-го игрока:

	y_1	y_2	y_3
x_1	0	1	2
x_2	–1	0	3
x_3	2	–3	0

Найти решение игры путем сведения ее к задаче ЛП.

Седловая точка в данной игре отсутствует ($\alpha = -1$, $\beta = 1$), доминирующих стратегий нет. В матрице имеются отрицательные элементы, поэтому прибавляем ко всем элементам матрицы число 3, это увеличит на 3 цену игры (цена игры $\mathbf{v^*}$ с положительными элементами матрицы не может быть отрицательной), но не повлияет на оптимальные стратегии игроков. Получим новую матрицу игры:

	y_1	y_2	y_3
x_1	3	4	5
x_2	2	3	6
x_3	5	0	3

Построим прямую задачу ЛП. Согласно теореме (лекция 10), оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^*}$ гарантирует ему выигрыш не меньше $\mathbf{v^*}$, независимо от стратегии, выбранной 2-м игроком:

$$3\xi_1+2\xi_2+5\xi_3 \geq v,$$

$$4\xi_1+3\xi_2 \geq v,$$

$$5\xi_1+6\xi_2+3\xi_3 \geq v,$$

где $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$; $\xi_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Преобразуем полученную систему, разделив ее на положительное число $\mathbf{v}$. Введем новое обозначение: $\boldsymbol{p_i = \xi_i / v}$, i=1, 2, 3. Получим

$$\mathbf{3}p_1 + \mathbf{2}p_2 + \mathbf{5}p_3 - \mathbf{1} \geq 0,$$

$$3p_1 + 2p_2 + 5p_3 - 1 \geq 0,$$

$$3p_1 + 2p_2 + 5p_3 - 1 \geq 0,$$

причем $\mathbf{p_i} \geq 0$, а поскольку 1-й игрок стремится максимизировать цену игры $\boldsymbol{v}$, то величина, обратная $1/\boldsymbol{v}$, будет минимизироваться:

$$\mathbf{P_{min}} = \mathbf{p_1} + \mathbf{p_2} + \mathbf{p_3}.$$

Отсюда оптимальные стратегии игроков и цену игры можно определить, решив, например, симплекс-методом прямую задачу ЛП.

Симплекс-таблица для рассматриваемого примера, приведенная к канонической форме (независимые и зависимые переменные неотрицательные, целевая функция максимизируется), имеет следующий вид:

	$\mathbf{p_1}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	**1**
$\mathbf{z_1}$	3	2	5	–1
$\mathbf{z_2}$	4	3	0	–1
$\mathbf{z_3}$	**1**	6	3	–1
$\mathbf{P}_{\mathrm{min}}$	–1	–1	–1	**0**

В приведенной к каноническому виду симплекс-таблице знаки в строке целевой функции $\mathbf{P}_{\mathrm{min}}$ изменены на обратные (в канонической задаче целевая функция максимизируется), значение функции равно 0 (правый нижний элемент таблицы), столбец свободных членов в ограничениях-неравенствах обозначен через **1**.

Поскольку 2-й игрок стремится минимизировать свой проигрыш, то величина, обратная $1/\boldsymbol{v}$, будет стремиться к максимуму. Отсюда оптимальная стратегия 2-го игрока определяется из обратной задачи линейного программирования следующего вида: максимизировать функцию $\boldsymbol{Z_{max}} = \boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} + \ldots + \boldsymbol{z_n} = 1/\mathbf{v}$ при указанных ограничениях.

Таким образом, решение матричной игры сведено к решению пары двойственных задач линейного программирования, которые, как было обосновано в лекции 10, всегда имеют решение.

Найдем *допустимое* (опорное) решение. Признаком того, что допустимое решение найдено, является неотрицательность столбца свободных членов (**1**). Воспользуемся известным из симплекс-метода критерием выбора *разрешающего элемента*:

$$max\{ \left| \boldsymbol{b_j} / \boldsymbol{a_{ij}} \right| \},$$

где $\boldsymbol{b_j}$ – элементы столбца свободных членов ($\boldsymbol{b_j}$<0), $\boldsymbol{a_{ij}}$ – элементы симплекс-таблицы ($\boldsymbol{a_{ij}}$ >0). Для полученной симплекс-таблицы разрешающим элементом будет элемент $\boldsymbol{a_{31}}$. Делаем шаг *жорданова исключения* с разрешающим элементом $\boldsymbol{a_{31}}$. Получим новую симплекс-таблицу в виде следующей матрицы:

	$\mathbf{z_3}$	$\mathbf{p_2}$	$\mathbf{p_3}$	**1**
$\mathbf{z_1}$	3	**–16**	–4	2
$\mathbf{z_2}$	4	–21	–12	3
$\mathbf{p_1}$	1	–6	–3	1
$\mathbf{P}_{\min}$	–1	5	2	**–1**

Найдено допустимое решение, поскольку в симплекс-таблице выполняется соответствующий признак – неотрицательность столбца свободных членов (**1**).

Найдем *оптимальное* решение. Признаком того, что оптимальное решение найдено, является выполнение условия: неположительность элементов строки целевой функции ($\mathbf{P}_{\min}$). Воспользуемся известным из симплекс-метода критерием выбора *разрешающего элемента* при поиске оптимального решения:

$$min\{ \left| \boldsymbol{b_j} / \boldsymbol{a_{ij}} \right| \},$$

где $\boldsymbol{b_j}$ >0, $\boldsymbol{a_{ij}}$ <0.

Для полученной симплекс-таблицы разрешающим элементом будет элемент $\boldsymbol{a_{12}}$. Делаем шаг *жорданова исключения* с разрешающим элементом $\boldsymbol{a_{12}}$. Получим новую симплекс-таблицу в виде следующей матрицы:

	z_3	z_1	p_3	**1**
p_2	3/16	–1/16	–4/16	2/16
z_2	1/16	21/16	**–27/4**	6/16
p_1	–2/16	6/16	–24/16	4/16
P_{min}	–1/16	–5/16	12/16	**–6/16**

Признак оптимальности для полученной матрицы не выполняется. Вновь определяем разрешающий элемент (a_{23}) и делаем шаг жорданова исключения. Получим новую симплекс-таблицу:

	z_3	z_1	z_2	**1**
p_2	5/27	–1/9	1/27	1/9
p_3	1/108	7/36	–4/27	1/18
p_1	–5/36	1/12	2/9	1/6
P_{min}	–1/18	–1/6	–1/9	**–1/3**

Признак оптимальности (неположительность элементов строки целевой функции) выполняется. Получено оптимальное решение одновременно прямой и двойственной задачи ЛП.

Вернемся к исходной игровой задаче, выполнив необходимые замены переменных и определив цену игры и оптимальные стратегии игроков.

Элемент в правом нижнем углу полученной таблицы равен **–1/3.** Следовательно, цена игры $\mathbf{v = 1/P_{min} = 1/Z_{max} = -3}$. Однако, поскольку в приведенной к каноническому виду таблице инвертировались знаки в строке целевой функции, то $\mathbf{v = 3}$.

Тогда оптимальная стратегия 1-го игрока определяется из следующих соотношений: $\xi^*_1 = \mathbf{v \times p_1 = 3\times1/6 = 1/2}$, $\xi^*_2 = \mathbf{v \times p_2 = 3\times1/9 = 1/3}$, $\xi^*_3 = \mathbf{v} \times p_3 = \mathbf{3\times1/18 = 1/6}$.

Оптимальная стратегия 2-го игрока также определяется из полученной симплекс-таблицы: $\eta^*_1 = \mathbf{v} \times z_1 = \mathbf{3\times1/6 = 1/2}$, $\eta^*_2 = \mathbf{v \times z_2 = 3 \times1/9 = 1/3, z_3 = 3\times1/18 = 1/6}$.

Ко всем элементам исходной игровой матрицы ранее прибавлялось число 3. Это не повлияло на оптимальность стратегий игроков, но изменило цену игры в исходной задаче. Поэтому окончательное значение цены игры **ν*** равно **ν – 3 = 0**.

Ответ: цена игры **ν*= 0**; оптимальная стратегия 1-го игрока $\boldsymbol{\xi^* = (\xi^*_1, \xi^*_2, \xi^*_3) = (1/2, 1/3, 1/6)}$; оптимальная стратегия 2-го игрока $\boldsymbol{\eta^* = (\eta^*_1, \eta^*_2, \eta^*_3) = (1/2, 1/3, 1/6)}$.

Заключение по модулю 2

Вся наша жизнь – игра, однако общая теория сразу для всех типов игр пока не создана. Модели конфликтов и ситуаций противоборства имеют естественные приложения как в сфере азартных и стратегических игр с тысячелетней историей, так и в военно-политической области, в экономике, в науке и технике, всюду, где в той или иной форме проявляется конфликтное взаимодействие, где требуется обеспечить наиболее надежный выбор решения, гарантирующего достижение желаемой цели, или найти наиболее устойчивое устраивающее всех равновесие.

Моментом зарождения теории игр многие считают публикацию в 1944 г. монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». С самого начала данная теория претендовала на описание рационального поведения при принятии решений в ситуациях противоборства, конкуренции и неопределенности, хотя первые работы по теории игр отличались упрощенностью предположений и высокой степенью формализации, что делало их малопригодными для практического использования. За последние десятилетия положение изменилось, значение теории игр существенно возросло, стала очевидной плодотворность игровых моделей и методов решения игр в прикладной сфере.

Чтобы построить модель игры, необходимо, прежде всего, выявить ее участников. Это легко выполнимо, когда речь идет об обычных играх типа шахмат. Иначе обстоит дело с «рыночными играми». Здесь не всегда просто распознать всех игроков, т.е.

действующих или потенциальных конкурентов. Практика показывает, что нет необходимости обязательно идентифицировать всех игроков, надо обнаружить наиболее важных.

Игры охватывают, как правило, несколько периодов, в течение которых игроки предпринимают некоторые стратегические решения или действия. Важна и форма предоставления игры. Обычно выделяют нормальную (матричную) форму и развернутую, заданную в виде дерева.

Существуют определенные границы для применения аналитического инструментария теории игр. Во-первых, они связаны с тем, что данный инструментарий зачастую может быть использован лишь при условии получения дополнительной информации, например, о возможностях игроков. Во-вторых, теорию игр трудно применять при множестве ситуаций равновесия. В-третьих, если ситуация принятия решений очень сложна и многоэтапна, то игроки не могут выбрать наилучшие для себя варианты. В частности, экспериментально доказано, что при расширении игры до десяти и более этапов игроки уже не в состоянии пользоваться соответствующими алгоритмами и выбрать равновесную стратегию. Дж. Нэш, пионер в «анализе равновесия в теории игр», увы, на этот вопрос не дал ответа.

Отнюдь не бесспорно и принципиальное, лежащее в основе теории игр с полной информацией, предположение: игра со всеми правилами известна игрокам, каждый из них знает, что все игроки осведомлены об этом, и такое положение сохраняется до конца игры.

В заключение отметим, что теория игр является достаточно сложной областью знания. При обращении к ней надо соблюдать известную осторожность и четко знать границы применения. Слишком простые толкования таят в себе скрытую опасность. Анализ и консультации на основе теории игр из-за их сложности рекомендуются лишь для особо важных проблемных областей. Пока практика показывает, что использование аналитического инструментария теории игр предпочтительно при принятии однократных, принципиально важных плановых стратегических решений.

Справка	Компьютеры в очередной раз не прошли проверку на «интеллект». В 2008 г. в ежегодном конкурсе-соревновании с большим денежным призом ни одна программа не смогла пройти игровой **тест Тьюринга**. Игра проводится в форме переписки судьи (человека) с машиной или другим человеком. Если судья при этом не может достоверно отличить машину от человека, то машина признается разумной. Компьютер должен пройти тест у не менее половины независимых судей. Переписка осуществляется путем обмена сообщениями. До настоящего времени пройти тест и получить главный приз не удалось никому.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое игра?
2. Что изучает и какова цель теории игр?
3. Перечислите основные разновидности игр.
4. Что собой представляет биматричная игра?
5. В чем отличие игр с нулевой суммой от игр с ненулевой суммой?
6. Опишите матрицы выигрышей в игре «студент сдает зачет преподавателю».
7. Какая ситуация в биматричной игре называется равновесной?
8. Опишите матрицы выигрышей в игре «дилемма заключенного».
9. На примере пиратов, делящих золото, объясните особенности переговорного процесса.
10. Постройте матрицу выигрышей для игры Морра.
11. Какая стратегия считается оптимальной в антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой?
12. Что такое седловая точка в платежной матрице, каким свойством она обладает?
13. Докажите, что в антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой максимин всегда не больше минимакса.
14. Что является необходимым и достаточным условием существования седловой точки?

15. Что такое смешанная стратегия игрока?

16. Как формулируется основная теорема теории игр?

17. Опишите алгоритм проверки оптимальности некоторой стратегии игроков.

18. Какое влияние на цену игры и оптимальные стратегии игроков оказывают операции над платежными матрицами?

19. Какие стратегии в матричной игре являются доминирующими?

20. Какие стратегии в матричной игре являются активными?

21. Докажите, что если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то его выигрыш остается неизменным и равным цене игры независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

22. В чем заключается общий подход к решению игровых задач?

23. Вычислите аналитически цену игры и оптимальные старегии игроков в игре 2×2.

24. Опишите алгоритм геометрического решения игры 2×2.

25. На каком утверждении основана возможность применять геометрический метод для решения игр 2×n, m×2?

26. В чем состоит идея метода Брауна–Робинсон?

27. Какие условия используются для остановки итерационного процесса в методе последовательных приближений?

28. Как связаны матричная игра и задача линейного программирования?

29. Опишите процесс сведения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.

30. Докажите, что после сведения матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования всегда существует допустимое решение, а целевая функция является ограниченной.

Исследовательские задачи

 **Вопрос 1**	Доказать, что если каждая (***2×2***) подматрица матрицы игры ***Q*** имеет седловую точку, то матрица ***Q*** также имеет седловую точку.

Вопрос 2

Обосновать ответ на вопросы, может ли строка матрицы игры, в которой все элементы не превосходят цену игры, а некоторые меньше этого значения, входить с ненулевой вероятностью:

(а) в некоторую оптимальную стратегию 1-го игрока?

(б) в любую оптимальную стратегию 1-го игрока?

Вопрос 3

Два одинаково метких игрока, один из которых вооружен бесшумным ружьем, а другой – обычным, могут, двигаясь с одинаковой скоростью, сделать пять шагов по направлению к мишени. Каждый из них может выстрелить либо сразу, либо на любом из шагов. Вероятность поражения мишени на ***s***-м шаге равна ***s*/5**. Каждый стрелок имеет только по одной пуле, но только 1-й может услышать звук выстрела 2-го (тогда он будет стопроцентно стрелять на последнем шаге). Первый, поразивший мишень, получает бонус от противника. Если никто не поразит мишень либо оба поразят одновременно, то выигрыш равен 0. Построить матрицу игры и найти решение.

Вопрос 4

Два конкурирующих продавца мороженого независимо выбирают места для своих ларьков на улице длиной 3 км. Цена у обоих продавцов составляет 10 руб. за порцию. Потребители равномерно распределены вдоль всей улицы. Прохождение 1 км пешком эквивалентно затрате 3 руб. Покупатель готов заплатить за мороженое 25 руб. Если расстояния до ларьков одинаковы (в частности, если ларьки находятся в одной точке), то место покупки выбирается случайно и равновероятно. Найти все равновесные расположения ларьков (в чистых стратегиях).

Вопрос 5

Решить геометрическим методом одну из следующих игр:

$$\begin{bmatrix}4 & 7 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 4 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}8 & 5 & 3 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 4 & 0 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5 & 3 & 6 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 5 & 1 & 4 & 6\\ 7 & 4 & 9 & 5 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 9 & 8 & 7 & 4 & 2\\ 10 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-2 & -6 & -5 & -1\\ -3 & -7 & -6 & -2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & -10 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\\ 3 & 7\\ 4 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7 & -1\\ 5 & 4\\ 1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\\ 0 & 6\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 5\\ 4 & 6\\ 2 & 7\\ 1 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 9\\ 5 & 4\\ 1 & 7\\ 4 & 5\\ 6 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\\ -1 & 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 7\\ 5 & 4\\ 1 & 9\\ 4 & 5\\ 6 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}7 & 10\\ 9 & 6\\ 8 & 9\\ 8 & 7\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 7\\ 4 & 6\\ 5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 3\\ 6 & 0\\ 0 & 7\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}8 & 3\\ 0 & 6\\ 6 & 3\\ 7 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 0\\ 7 & -3\\ 1 & 4\\ -2 & 2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & 7\\ 3 & 9\\ 6 & 5\\ 7 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 3\\ 0 & 8\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}.$$

Вопрос 6

Решить методами последовательных приближений и путем сведения к задачам линейного программирования одну из следующих игр:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 5 & -2\\ -3 & 0 & 4\\ 6 & -4 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5 & 6 & 3 & 0\\ 10 & 5 & 12 & 10\\ 10 & 0 & 5 & 20\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 6 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 4 & 2\\ 1 & 4 & 3 & 5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 5 & 6 & 3\\ 1 & 0 & 7 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}4 & 3 & 4 & 2\\ 3 & 4 & 6 & 5\\ 2 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}8 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 9\\ 7 & 7 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 2 & 5\\ 4 & 3 & 7\\ 5 & 5 & 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 5 & 3\\ 6 & 7 & 4\\ 5 & 2 & 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}8 & 3 & 9 & 4\\ 6 & 5 & 8 & 7\\ 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 6 & 4 & 5\\ 3 & 7 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 7 & 6\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

Итоговый тест по модулю 2

1. Биматричная игра состоит в нахождении стратегий, которые обеспечивают игрокам выигрыши: а) минимальные, б) максимальные, в) средние.

2. Максимизация выигрыша в матричной игре для каждого игрока является: а) желанием, б) мечтой, в) стратегией, г) целью.

3. Ситуация в биматричной игре (i*, j*), в которой выполняются неравенства $\boldsymbol{a_{i*j*} \geq a_{ij*}}$, $\boldsymbol{b_{i*j*} \geq b_{i*j}}$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, называется …

4. В следующей биматричной игре наиболее предпочтительной равновесной ситуацией (i, j) является: а) (1, 1), б) (1, 2), в) (2, 1), г) (2, 2)

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow B = \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$$

5. Гарантированные выигрыши игроков по определению: а) компромиссные, б) наилучшие в наихудших условиях, в) приемлемые.

6. Наилучший гарантированный выигрыш 1-го игрока в матричной игре $\boldsymbol{Q = \| q_{ij} \|_{m \times n}}$ определяется как: а) $\boldsymbol{min_i\ max_j\ q_{ij}}$, б) $\boldsymbol{min_j\ max_i\ q_{ij}}$, в) $\boldsymbol{max_i\ min_j\ q_{ij}}$, г) $\boldsymbol{max_j\ min_i\ q_{ij}}$.

7. В игре двух лиц с нулевой суммой для заданной матрицы выигрышей 1-го игрока $\boldsymbol{Q = \| q_{ij} \|_{m \times n}}$ верхняя чистая цена игры β определяется по формуле: а) $\boldsymbol{min_i\ max_j\ q_{ij}}$, б) $\boldsymbol{min_j\ max_i\ q_{ij}}$, в) $\boldsymbol{max_i\ min_j\ q_{ij}}$, г) $\boldsymbol{max_j\ min_i\ q_{ij}}$.

8. Если в матричной игре верхняя и нижняя чистая цена игры совпадают (α=β), то отвечающие им стратегии называются …

9. В игре с данной матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 8 & 7 \\ 11 & 3 & 0 & 2 \\ 14 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

количество седловых точек равно: а) 0, б) 1, в) 2, г) 3.

10. В антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой максимин всегда: а) меньше минимакса, б) не больше минимакса, в) не меньше минимакса, г) больше минимакса.

11. Необходимым и достаточным условием существования седловой точки является наличие в матрице элемента, который одновременно: а) максимальный в строке и минимальный в столбце, б) минимальный в строке и максимальный в столбце, в) максимальный в строке и в столбце.

12. Платежная матрица $\boldsymbol{Q = \| q_{ik} \|_{m \times n}}$, где $\boldsymbol{q_{ik} \leq q_{i,k+1}}$: а) не имеет решения, б) имеет седловую точку, в) не имеет седловой точки.

13. Согласно основной теореме теории игр, всякая конечная антагонистическая игра двух лиц с нулевой суммой имеет

…*(вставьте словосочетание)* и у каждого игрока имеется, по меньшей мере, одна … (*вставьте слово*) стратегия.

14. Если в игре двух лиц оптимальное решение предписывает одному игроку использовать только чистую стратегию, то это же верно и для другого игрока: а) верно, б) неверно, в) иногда верно, иногда неверно.

15. Прибавление одного и того же числа ко всем элементам платежной матрицы в игре двух лиц с нулевой суммой: а) влияет на оптимальность стратегий игроков, б) не влияет на оптимальность стратегий игроков, в) изменяет цену игры, г) не изменяет цену игры.

16. Банк стремится максимизировать свою прибыль и имеет два варианта выдачи кредита (под разные проценты) предприятию. Предприятие, неоднократно заимствующее ссуды в банке, имеет два варианта взятия ссуды. Антагонистическая игра с нулевой суммой задана матрицей выигрыша банка:

$$Q = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Смешанные стратегии банка $\boldsymbol{\xi = (0{,}6;\ 0{,}4)}$ и предприятия $\boldsymbol{\eta = (0{,}5;\ 0{,}5)}$ являются: а) оптимальными, б) неоптимальными, в) чистыми.

17. Оптимальная стратегия ξ^* 1-го игрока в матричной игре вида

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

найденная геометрическим методом, равна: а) (1/4, 3/4), б) (1/2, 1/2), в) (3/4, 1/4), г) (1, 0).

18. Правильная последовательность геометрического решения игры (2×2): а) найти точку максимума на нижней (минимума на верхней) огибающей двух прямых, б) опустить из найденной точки перпендикуляр на ось абсцисс, в) провести прямые для функций выигрыша y_1, y_2, г) установить координаты стратегий x_1, x_2 на отрезке длиной 1 оси абсцисс, д) через начало и конец единичного отрезка провести оси ординат.

Список литературы по модулю 2

Основная литература

1. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора: Монография. – М.: Маршрут, 2004.

2. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.

3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учебное пособие. – М.: Выс. школа, 1998.

4. Родзин С.И. Руководство для самостоятельной работы, контрольные вопросы, индивидуальные задания по курсу «Теория принятия решений». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.

Дополнительная литература

5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр: Учебное пособие. – М.: РХД, 2007.

6. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Едиториал УРСС, 2007.

7. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

8. Шикин Е.В. Исследование операций: Учебник. – М.: ТК Велби, Проспект, 2006.

Учебная литература на английском языке

9. Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. – Princeton Press, 1992. *Учебник вводного уровня по теории игр и её приложениям.*

10. Kreps D. Game Theory and Economic Modelling. Lectures. – Oxford Press, 1990. *Без лишней математизации обсуждаются вопросы теории игры и ее приложения*.

11. Fudenberg D. Game Theory. – MIT Press, 1991. *Отличный учебник продвинутого уровня по теории игр*.

12. Milgrom, P. and Roberts J. Economics, Organization and Management. *Хороший учебник по теории игр, современной теории информации и принятия решений при управлении организациями*.

Модуль 3. Принятие решений в условиях неопределенности, нейтралитета и содействия

Цель и задачи изучения модуля

Цель модуля 3 – дать представление о подходах к рациональному выбору решений в условиях неопределенности, нейтралитета и содействия, познакомить с фундаментальными понятиями и результатами теории статистических игр, а также помочь овладеть разнообразными методами решения задач теории статистических игр.

В результате освоения модуля 3 студент должен быть готов продемонстрировать следующие *компетенции* и *уровень подготовки*:

Внимание!	• знание основных видов неопределенности, статистических критериев принятия решений в игре с природой (общетеоретический уровень); • умение сделать выбор на основе эксперимента и в условиях содействия (уровень пользователя); • навыки принятия статистических решений в условиях неопределенности, принятия решений в задачах о назначении (уровень проектировщика).

Конспект лекций

Лекция 11. Игра с природой

Рассмотрим пример следующей задачи принятия решений.

Пример	Руководство предприятия должно принять решение: остановить работу конвейера и провести полную проверку его технического состояния или ограничиться текущей профилактикой без приостановки выпуска продукции? Эти решения отличаются затратами на проверку конвейера, ремонт, недополученной прибылью и т.п. Каждый из двух вариантов решения имеет свои плюсы и минусы.

Для принятия решения явно не хватает следующей количественной информации:

- насколько вероятна вовремя не обнаруженная неисправность, которая может привести к капитальной поломке конвейера?
- какова будет прибыль предприятия при различных вариантах сочетания: остановка и полная проверка конвейера – конвейер исправен; остановка и полная проверка конвейера – реальная угроза серьезной неисправности и поломки; текущая профилактика конвейера без приостановки выпуска продукции – конвейер исправен; текущая профилактика конвейера без приостановки выпуска продукции – реальная угроза серьезной неисправности и поломки?

На эти вопросы руководитель предприятия заранее поручил ответить соответствующим специалистам. Перед началом заседания руководство получило от специалистов нужные для принятия решения количественные данные, сведенные в таблицу, отражающую месячную прибыль предприятия (тыс. руб.):

Неисправность **Решение**	Нет (60 %)	Серьезная (40 %)
Остановка и проверка	250	200
Профилактика	400	10

На заседании в процессе принятия решения началась дискуссия. Рассмотрим ее ход и прокомментируем предлагаемые решения.

«Полагаю, надо получить максимум прибыли в самом плохом случае, – сказал бухгалтер. – Хуже всего будет, если оправдается риск серьезной неисправности конвейера. Прибыль предприятия в этом случае уменьшается при любом нашем решении. Останавливая конвейер, заработаем 200 тысяч, а ограничившись профилактикой – всего 10 тысяч. Надо временно остановить и провести ремонт конвейера».

Таким образом, бухгалтер предложил исходить из наихудшего случая – реальной угрозы серьезной неисправности и поломки конвейера. В терминологии теории игр он рассматривал внешний для предприятия мир (техническое состояние конвейера) как противника, который всячески будет стараться уменьшить прибыль предприятия. В условиях противоборства он предложил выбрать наиболее выгодный вариант решения – остановку и полную проверку конвейера. Этот пессимистический подход нам хорошо известен из теории антагонистических игр. В данном случае нет оснований считать внешний мир активным сознательным противником предприятия, тем более что вероятность неисправности равна 40 %.

«Нельзя быть таким пессимистом, – заявил технолог. Вероятность исправной работы конвейера равна 60 %. Надо быть оптимистами – исходить из того, что оборудование будет работать нормально. Тогда, останавливая конвейер, получим 250 тысяч в бюджет предприятия, а ограничившись профилактикой – 400 тысяч».

Подход технолога является прямо противоположным подходу бухгалтера. Он предлагает исходить из самого благоприятного стечения обстоятельств. Основание для такой позиции есть – вероятность исправной работы конвейера в полтора раза выше, чем вероятность неисправности. С точки зрения теории планирования это предложение можно было бы взять за основу, добавив возможности коррекции плана в случае возникновения неблагоприятных обстоятельств в процессе профилактики оборудования. Однако тогда необходимо расширять рамки дискуссии на заседании, рассмотрев решение о подготовке более гибкой производственной программы «двойного назначения». Оптимизм технолога не менее и не более оправдан, чем пессимизм бухгалтера: одни ЛПР предпочитают твердый доход, отказавшись от риска, другие – уверены, что им повезет, играя в лотерею.

Справка

В микроэкономической теории полезности на этот счет даже вводится парадоксальное понятие – полезность денег. Она равна логарифму имеющейся суммы.

«Бухгалтер и технолог обсуждают крайние ситуации, а надо подходить системно и всесторонне, учесть обе возможности, – начал свое выступление главный инженер, изучавший в вузе теорию вероятностей. – Рассмотрим сначала первый вариант – остановка и полная проверка конвейера. Мы получим 250 тысяч в 60 % случаев и 200 тысяч в 40 % случаев, значит, в среднем 250*0,6+200*0,4 = 150 + 80 = 230 тысяч. Для варианта текущей профилактики конвейера без приостановки выпуска продукции аналогичный расчет дает 400*0,6 + 10*0,4 = 240 + 4 = 244 тысячи, т.е. больше. Значит надо планировать текущую профилактику конвейера».

Это совсем другая позиция. Главный инженер исходит из предположения, что придется много раз принимать решение о приостановке конвейера. Он рассчитывает средний доход, что выглядит вполне обоснованным, когда принятие подобного рода технико-экономических решений происходит чуть ли не каждый день. Тогда оценка математического ожидания прибыли вполне корректна. Однако на заседании речь идет об одном-единственном выборе. Поэтому 60 % и 40 % – это не вероятности как пределы частот. Это шансы исправной работы конвейера и неисправности. Иногда их полезно свести вместе в одном критерии.

«Главный инженер рассуждает так, как будто мы ежедневно принимаем решение о приостановке конвейера, а все данные в таблице сто лет не будут изменяться, – вступил в дискуссию экономист. – Необходимо принять решение только один раз и потом не жалеть об упущенных возможностях. Если мы решим остановить конвейер, а окажется, что он исправен, то упущенная прибыль составит 400 – 250 = 150 тысяч. Если мы ограничимся профилактикой, а серьезная неисправность приведет к поломке конвейера, то упущенная выгода составит 200 – 10 = 190 тысяч, т.е. будет больше. Значит, надо останавливать конвейер».

Экономист вводит в обсуждение новый критерий – «упущенная выгода». При этом средний доход, рассчитанный главным инженером, больше при текущей профилактике, а упущенная выгода, наоборот, меньше при остановке конвейера. Эти два критерия в данном случае противоречат друг другу.

Теория антагонистических игр базируется на предположении о том, что интересы игроков являются противоположными, и они действуют активно и разумно.

Представим теперь, что один из игроков является абстрактным лицом, например *природой* (окружающая среда), которая не имеет своих интересов и, следовательно, не ведет себя антагонистично по отношению к ЛПР.

Справка

«Природа ведет себя коварно, но не злонамеренно. Она существует и меняет состояние по своим законам».

А.Эйнштейн

Отсутствие противоборства со стороны природы не исключает для ЛПР необходимости рационального поведения. ЛПР зависит от состояний природы и должен их учитывать, принимая решение. Кроме того, у ЛПР имеется возможность путем *эксперимента* изучать природу.

Как в антагонистической игре, взаимодействие ЛПР и природы можно оценить матрицей выигрыша ЛПР $\boldsymbol{E=(e_{ij})_{m\times n}}$ (если речь идет о потерях, то платежи в матрице будут отрицательными):

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	**…**	$\mathbf{F_n}$
$\mathbf{E_1}$	e_{11}	e_{12}	…	e_{1n}
$\mathbf{E_2}$	e_{21}	e_{22}	…	e_{2n}
…	…	…	e_{ij}	…
$\mathbf{E_m}$	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mn}

Информация о состоянии природы $\mathbf{F_j}$ ($j = 1,\ldots, n$) всегда неполная. Возникает неустранимая ***неопределенность*** в принятии решения ЛПР, связанная со случайным характером многих явлений. Принятие решения в этом случае связано с ***риском.***

Залог успешного принятия решения – правильное понимание сути задачи. Это особо актуально для слабо формализованных задач, к которым относится рациональный выбор в условиях неопределенности.

Принято различать ***статистическую*** и ***нечеткую*** неопределенность.

Статистическая неопределенность бывает частотной, объективной и субъективной. Различие между ними заключается в точности оценивания случайной величины.

Природа нечеткой неопределенности также субъективна. Однако в отличие от статистической неопределенности, нечеткая неопределенность связана с ограниченным опытом ЛПР, с отношением ЛПР к окружающей среде на основе особенностей личности.

С другой стороны, Л. Заде в нечеткой логике указал на ограничения теории вероятности: она не позволяет отразить присущее ЛПР *частичное* восприятие природы: частичное знание, ограниченную точность, неполную истину, элементы веры и т.п. Теория вероятности и математическая статистика моделирует лишь частичную определенность.

Пусть, например, некто по имени Франц имеет на три четверти немецкую, на четверть французскую кровь и считает себя немцем. Это утверждение можно оценить как истинное на 0,75. Но эта величина не имеет никакого отношения к вероятности! Вообще, теория вероятности ограничивается изучением стационарных или нестационарных, зависимых или независимых случайных процессов. При этом, например, сужение интервала случайной величины от [0, 10] до [2, 4] не приводит к уточнению вероятности, которая будет находиться на интервале [0, 1].

Теория игр с природой опирается на статистическую неопределенность. В зависимости от имеющейся информации о механизме выбора природой своих состояний различают случай *полной* и *частичной* статистической неопределенности. Различие между ними состоит в том, имеется или нет *априорная информация о состояниях природы*.

ПРИМЕР

При подготовке к сезону у фермера возникла проблема: «Что посадить – помидоры или картофель?».

Помидоры, в отличие от картофеля, дают высокий урожай только жарким летом. Фермер подсчитал, что при жарком лете прибыль от помидор состовит 2 млн руб., а от картофеля – 1 млн руб. При холодном лете прибыль составит соответственно 0,5 и 1,5 млн руб.

Синоптики дали фермеру прогноз погоды на лето: вероятность жаркого лета равна 0,6, а холодного – 0,4.

В соответствии с условиями задачи, получаем следующую матрицу выигрыша:

	$\mathbf{F_1}$ (ж.лето, р = 0,6)	$\mathbf{F_2}$ (х.лето, р = 0,4)	Прибыль
$\mathbf{E_1}$ (помидоры)	2	0,5	**1,4**
$\mathbf{E_2}$ (картофель)	1	1,5	1,2

Используя априорную информацию, фермер определил выигрыш по среднему значению прибыли. Оптимальным будет решение $\mathbf{E_1}$ – посадить помидоры.

Если бы фермер решил минимизировать риск, то необходимо было бы определить упущенную выгоду:

	$\mathbf{F_1}$ (ж.лето, р = 0,6)	$\mathbf{F_2}$ (х.лето, р = 0,4)	Риск
$\mathbf{E_1}$ (помидоры)	0	1	**0,4**
$\mathbf{E_2}$ (картофель)	1	0	0,6

В этом случае оптимальным будет также решение $\mathbf{E_1}$ – посадить помидоры.

В теории статистических игр критерий «средний выигрыш» называется критерием ***Байеса–Лапласа***, а в экономической теории – ***функцией полезности***.

Критерии выбора оптимального решения ЛПР в статистических играх, в отличие от антагонистических игр, могут быть различными.

Справка

Каждый, кто работает в области программной инженерии или занимается управлением этого процесса, рано или поздно начинает задавать себе непростые вопросы: почему при равных стартовых условиях один проект с треском проваливается, а другой приносит деньги и авторитет своим разработчикам?

Представим себе, что разработка софта – это не инженерная наука (Майерс), не математика (Хоар), не искусство (Кнут), а игра (Коуберн) со своими правилами, ограниченными ресурсами и целями (поставить заказчику систему, создать основу для следующей системы и т.п.).

Формулы, позволяющей всегда выигрывать в такой игре, пока не придумано. Однако есть некоторые приемы и принципы, которые могут быть полезны в той или иной ситуации. В самом деле, небезызвестный Линус Торвальдс не мог ведь сказать: «Выпустим приличную версию *Linux* – и по домам». Он в игре, игра ширится, развивается, пока не надоест своим участникам (похоже на игру с конструктором Lego).

Лекция 12. Статистические критерии и решения в игре с природой

Выбор оптимального решения в статистических играх обычно производится из условия ***максимизации выигрыша***:

$$E_0 = \{E_{i0} \mid \forall E_{i0} \in E \;\&\; e_0 = \max_i e_{i0}\}.$$

Примеры оценочных функций ЛПР для статистических игр:

а) пессимистическая оценка: $\max e_{i0} = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij}$;

б) позиция относительного пессимизма: $\min r_{i0} = \min_i \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$;

в) нейтральная оценка:

$$\max e_{i0} = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right);$$

г) позиция азартного игрока: $\max e_{i0} = \max\limits_i \max\limits_j e_{ij}$.

Пример

Необходимо выбрать оптимальное сечение кабеля ***A*** при неизвестной токовой нагрузке ***S***, используя приведенные выше примеры оценочных функций.

Представим влияние позиции ЛПР на выбор сечения кабеля при неизвестной токовой нагрузке в следующем виде:

Позиция ЛПР	**Оценочная функция**	**Решение**
Пессимизм	$\max e_{i0} = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij}$	$A = kS_{\max}$
Относительный пессимизм	$\min\ r_{i0} = \min_i \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})$	$A = k\sqrt{\frac{1}{3}\left(S_{\max}^2 + S_{\min}^2 + S_{\max}\cdot S_{\min}\right)}$
Нейтралитет	$\max e_{i0} = \max\limits_i \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij}\right)$	$A = k\sqrt{S_{\max}\cdot S_{\min}}$
Оптимизм	$\max e_{i0} = \max\limits_i \max\limits_j e_{ij}$	$A = kS_{\min}$

Здесь k – константа, S_{max}, S_{min} – максимальная и минимальная токовая нагрузка. Видно, что результирующее решение существенно зависит от позиции ЛПР.

В статистических играх к фундаментальным (классическим) относят три критерия: минимаксный критерий Вальда (***ММ***), критерий Сэвиджа (***S***), критерий Байеса–Лапласа (***BL***). Критерии ***ММ*** и ***S*** используют в условиях *полной* неопределенности, критерий ***BL*** – в условиях частичной неопределенности. Рассмотрим их подробнее.

***ММ*-критерий** отражает позицию крайнего пессимизма. Он использует оценочную функцию вида

$$Z_{MM} = \max_i e_{i0}, \qquad e_{i0} = \min_j e_{ij}.$$

Правило выбора решения по ***ММ***-критерию следующее:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} | E_{i0} \in E \,\&\, Z_{MM} = \max_i \min_j e_{ij} \right\},$$

т.е. исходная матрица выигрышей ***E*** дополняется столбцом, состоящим из минимальных элементов каждой строки, далее среди них выбирается максимальный элемент и, если их несколько, они образуют множество оптимальных по ***ММ***-критерию решений $\boldsymbol{E_0}$.

Выбранное множество решений $\boldsymbol{E_0}$ полностью исключает риск. Это означает, что ЛПР не может на практике столкнуться с худшим результатом, чем *Zмм* при любых состояниях природы $\boldsymbol{F_j}$. Это свойство позволяет считать ***ММ***-критерий фундаментальным, особенно для задач принятия технических решений.

Рекомендации по применению ***ММ***-критерия состоят в следующем:

- о вероятностях состояний природы $\boldsymbol{F_j}$ заранее ничего не известно (условия полной неопределенности);
- с возможностью появления отдельных состояний надо считаться;
- решение реализуется однократно или небольшое число раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск, т.е. ни при каких состояниях не допускается результат худший, чем $Z_{мм}$.

Однако применение ***ММ***-критерия при многократном принятии решений может стоить определенных потерь. Пусть, например, дана следующая матрица выигрыша ЛПР:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$
$\mathbf{E_1}$	1	100
$\mathbf{E_2}$	1,1	1,1

Здесь более выгодным представляется решение $\mathbf{E_1}$, однако по ***ММ*-критерию** оптимальным будет решение $\mathbf{E_2}$**,** что становится совсем невыгодным, если состояние $\mathbf{F_2}$ будет встречаться чаще, чем $\mathbf{F_1}$**,** а решение реализуется многократно.

Критерий Сэвиджа (***S***) так же, как ***MM*** используют в условиях *полной* неопределенности. ***S***-критерий отражает позицию относительного пессимизма, так как рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется при наихудшем состоянии природы.

Для оценки решения критерий использует величину потерь в виде недополученного выигрыша. Для этого от исходной матрицы $\boldsymbol{E=(e_{ij})}$ переходят к матрице $\boldsymbol{R} = (r_{ij})$, элементы которой определяются по формуле

$$r_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij} \cdot$$

В ***S***-критерии в качестве оценочной функции используется минимаксная функция следующего вида:

$$Z_S = \min_i r_{i0}, \quad где\ r_{i0} = \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij}).$$

Правило выбора решения по ***S***-критерию следующее:

$$E_0 = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \ \&\ Z_S = \min_i \max_j (\max_i e_{ij} - e_{ij})\},$$

т.е. ***S***-критерий подобен ***MM***-критерию. Различие между ними состоит лишь в использовании позиции пессимизма для недополученного выигрыша.

Рекомендации по применению ***S***-критерия те же, что и для ***MM***-критерия.

В практике принятия решений в условиях *полной* неопределенности, наряду с классическими ***MM***- и ***S***-критериями, применяются также *производные* критерии Гурвица (***HW***) и произведений (***P***).

Критерий Гурвица является критерием пессимизма–оптимизма. В качестве оптимальной он рекомендует выбирать ту стратегию, для которой выполняется следующее соотношение:

$$Z_{HW} = \max_i e_{i0} \qquad e_{i0} = \lambda \min_j e_{ij} + (1-\lambda)\max e_{ij}, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

где λ– весовой множитель Гурвица.

Правило выбора решения по ***HW***-критерию следующее:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \;\&\; Z_{HW} = \max_i \left[\lambda \min_j e_{ij} + (1-\lambda) \max_j e_{ij} \right] \& \; 0 \le \lambda \le 1 \right\}.$$

Критерий ***HW*** – это попытка занять компромиссную уравновешенную позицию между крайним оптимизмом и крайним пессимизмом.

Однако в задачах принятия технических решений проблема выбора λ также трудна, как и вообще проблема выбора какого-либо критерия. Чаще берут λ = 0,5. Бывает, что для «приглянувшегося» решения «подбирается» λ–множитель.

Рекомендации по применению ***HW***-критерия состоят в следующем:

• о вероятностях состояний природы ничего неизвестно;

• с появлением отдельного состояния $\boldsymbol{F_j}$ ЛПР необходимо считаться;

• ситуация принятия решения реализуется малое число раз;

• допускается некоторый риск.

Однако применение ***HW***-критерия принятия решений также может стоить определенных потерь. Пусть, например, дана следующая матрица выигрыша:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	…	$\mathbf{F_{n-1}}$	$\mathbf{F_n}$
$\mathbf{E_1}$	10000	1	…	1	1
$\mathbf{E_2}$	9999	9999	…	9999	0,999

Очевидно, что решение $\mathbf{E_2}$ является более предпочтительным, однако по критерию Гурвица при любом значении множителя $\boldsymbol{\lambda}$ оптимальным будет решение $\mathbf{E_1}$.

Критерий произведений часто применяется для задач фильтрации информации. Он применим только для матриц выигрыша с *положительными* значениями элементов. Оценочная функция ***P***-критерия имеет следующий вид:

$$Z_p = \max_i e_{i0}, \qquad e_{i0} = \prod_{j=1}^{n} e_{ij} .$$

Правило выбора решения по ***P***-критерию следующее:

$$E_{i0} = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E_0 \,\&\, Z_P = \max_i \prod_j e_{ij} \,\&\, e_{ij} > 0 \right\}.$$

Рекомендации по применению ***P***-критерия состоят в следующем:

• о вероятностях состояний природы ничего неизвестно;

• с появлением отдельных состояний необходимо считаться;

• критерий применим как для большого, так и для малого числа реализаций;

• допускается некоторый риск.

Критерий Байеса–Лапласа используют в условиях *частичной* неопределенности. Он основан на поиске решения, дающего максимальный средний выигрыш, при априорно известных вероятностях состояний природы q_j.

BL-критерий использует оценочную функцию вида

$$Z_{BL} = \max_i e_{i0}, \qquad e_{i0} = \sum_j e_{ij} q_j .$$

Правило выбора решения по ***BL***-критерию следующее:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} | E_{i0} \in E \& \quad Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \ , \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\},$$

т.е. исходная матрица выигрышей ***E*** дополняется столбцом, содержащим математическое ожидание элементов каждой строки, далее среди них выбирается максимальный элемент и, если их несколько, они образуют множество оптимальных по ***BL***-критерию решений E_0.

По ***BL***-критерию позиция ЛПР выглядит оптимистичнее, нежели в случае с ***ММ***-критерием. Однако она предполагает больший уровень информированности о ситуации и многократность реализации решений.

Рекомендации по применению ***BL***-критерия:

- вероятности состояний природы известны и не зависят от времени;
- решение реализуется многократно;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа–Лемана (***HL***) используют в условиях *частичной* неопределенности. Он опирается одновременно на критерии ***BL*** и ***MM*** путем введения некоторого параметра $0 \le \boldsymbol{\nu} \le 1$, выражающего степень доверия к используемому распределению вероятностей $\boldsymbol{q_j}$. Если это доверие велико, то акцент делается на ***BL***-критерий, иначе – на ***MM***-критерий.

HL-критерий использует оценочную функцию следующего вида:

$$Z_{HL} = \max_i e_{i0}, \quad e_{i0} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \cdot$$

Правило выбора решения по ***HL***-критерию следующее:

$$E_0 = \left\{ E_{i0} \mid E_{i0} \in E \;\&\; Z_{HL} = \max_i \left(\nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right) \& \; 0 \le \nu \le 1 \right\},$$

т.е. при абсолютном доверии к вероятностям $\boldsymbol{q_j}$ ($\boldsymbol{\nu} = 1$) ***HL***-критерий превращается в ***BL***, а при $\boldsymbol{\nu} = 0$ – в ***MM***-критерий. Выбор ЛПР параметра $\boldsymbol{\nu}$ отчасти субъективен.

Основными рекомендациями по применению ***HL***-критерия являются следующие:

- точные значения вероятностей $\boldsymbol{q_j}$ неизвестны, но некоторые предположения о них имеются;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

Критерий Гермейера (***G***) используют в условиях *частичной* неопределенности. Он применяется для оценки потерь ЛПР, т.е. в случае, если элементы матрицы выигрышей $\boldsymbol{e_{ij}}<0$. Критерий обладает эластичностью, так как ориентирован на поиск решений, которые не считаются заведомо худшими, чем другие.

Критерий Гермейера использует оценочную функцию вида

$$Z_G = \max_i e_{i0}; \quad e_{i0} = \min_j e_{ij} q_j.$$

Правило выбора решения по ***G*** -критерию следующее:

$$E_{i0} = \{E_{i0} \mid E_{i0} \in E \,\&\, Z_G = \max_i \min_j e_{ij} q_j \,\&\, e_{ij} < 0\}.$$

Критерий Гермейера можно применять и в том случае, если некоторые элементы матрицы ***E*** являются положительными. Для этого выбирается подходящая по величине константа, которая прибавляется ко всем элементам матрицы, после чего они становятся отрицательными.

G-критерий является обобщением ***ММ***-критерия. Он превращается в ***ММ***-критерий в случае равномерного распределения вероятностей, когда все $q_j = 1/n$.

Рекомендации по применению критерия Гермейера:

- известны значения вероятностей q_j;
- с появлением отдельных состояний природы F_j необходимо считаться;
- решение может реализовываться малое число раз или многократно;
- допускается некоторый риск.

Для рассмотренных критериев принятия решений существует наглядная геометрическая интерпретация для случая двух состояний природы (n = 2). Введем прямоугольную систему координат: ось абсцисс – значение оценочной функции e_{i1}, соответствующее состоянию F_1, а ось ординат – значение e_{i2}, соответствующее состоянию F_2. Тогда каждое решение в статистической игре соответствует точке (e_{i1}, e_{i2}) на плоскости (рис. 22).

На рис. 22 по осям указаны координаты граничных точек. В итоге получается прямоугольник, который называют ***полем выбора решений***, или ***полем полезности***. Все точки, представляющие возможные решения, лежат внутри поля полезности или на его границах.

Задача состоит в том, чтобы, используя критерий выбора, найти оптимальное решение. Поясним, как это сделать.

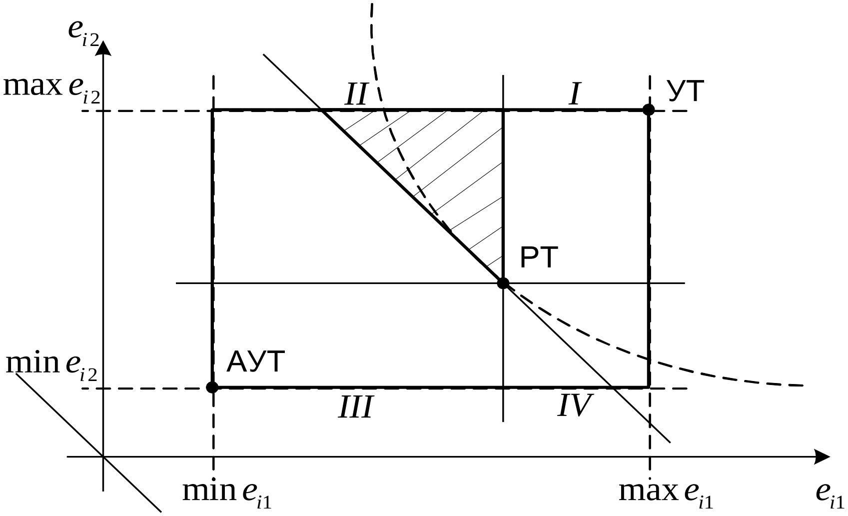


Рис. 22. Поле выбора решений

Для этого выберем в поле полезности произвольную точку, которую будем называть рассматриваемой точкой (РТ) и которая лежит внутри поля полезности. Проведем через нее прямые, параллельные осям координат. Они разделят плоскость на квадранты I, II, III и IV.

Как сравниваются два решения в поле полезности? – Для этого введем на множестве всех решений $\boldsymbol{E}$ *отношение частичного порядка*.

Будем говорить, что решение $\boldsymbol{E_i}$ не хуже, чем $\boldsymbol{E_j}$, если для соответствующих координат этих точек ($\boldsymbol{e_{i1}}$, $\boldsymbol{e_{i2}}$) и ($\boldsymbol{e_{j1}}$, $\boldsymbol{e_{j2}}$) выполняются следующие неравенства:

$$\boldsymbol{e_{i1}} \geq \boldsymbol{e_{j1}} \text{ и } \boldsymbol{e_{i2}} \geq \boldsymbol{e_{j2}}.$$

Решение $\boldsymbol{E_i}$ считается лучше, чем $\boldsymbol{E_j}$, если хотя бы одно из двух этих неравенств является строгим.

Сравним решение в произвольной точке *РТ* с решениями в поле полезности в квадрантах I,II,III и IV. Все решения из точек I квадранта будут лучше, чем *РТ*. Квадрант I – это *конус предпочтения*.

Все решения из точек квадранта III будут хуже *PT* – это *антиконус*. Таким образом, оценка качества решений из конусов предпочтения и антиконуса проста и однозначна. Этого нельзя сказать о точках из квадрантов II и IV. Эти квадранты называются *областями* (или *конусами*) *неопределенности*.

Для точек из конусов неопределенности сравнить решения можно лишь с помощью выбранного критерия ***K*** принятия решения. При n = 2 критерий ***K*** может быть выражен в виде следующего уравнения кривой:

$$K\left(e_{i1}, e_{i2}\right) = k\ .$$

Кривая называется *линией уровня* или *функцией предпочтения* (на рис. 16 она обозначена пунктирной линией, проходящей через точку PT) для фиксированного значения константы *k*.

Пусть, например, ЛПР выбран ***BL***-критерий принятия решения. Тогда функция предпочтений имеет следующий вид:

$$(e_{i1}+e_{i2})/2 = k.$$

Эта функция определяет все прямые на плоскости, параллельные биссектрисе квадрантов II и IV (на рис. 22 они обозначены прямыми, проходящими через начало координат и точку PT).

Любое решение, расположенное в поле полезности правее и выше проведенной через точку *PT* биссектрисы в квадрантах II и IV будет более предпочтительным, чем точки, лежащие слева и ниже. Это справедливо для любого критерия с другой функцией предпочтения. Кривая может быть вогнутой или выпуклой. Предельным случаем пессимистического подхода является конус на левой нижней границе квадранта I, а предельным случаем азартного подхода – конус на правой верхней границе квадранта III.

Для того чтобы сделать более понятным сходство и различие введенных критериев, сравним их с помощью графиков, с учетом того, что функция предпочтения в общем случае описывается кривой вида $K(e_{i1}, e_{i2}) = k$.

Точка в поле полезности, для которой максимизируется выигрыш, определяется при конкретном значении *k*. Часто бывает, что все семейство функций предпочтения для каждого *k* получается путем параллельного переноса функции предпочтения вдоль некоторой прямой, которую называют *направляющей* и обозначают *LG*. Оптимальный вариант решения получается после сдвига линии уровня до тех пор, пока она в последний раз касается поля полезности.

С учетом этого, множество рассмотренных статистических критериев принятия решений можно классифицировать по следующим видам функций предпочтения:

• критерии с прямоугольными конусами предпочтения (***MM***- и ***G***-критерии);

• критерии с прямыми предпочтения (***BL***-критерий);

• критерии с иными функциями предпочтений (***HL***-, ***P***-, ***HW***-критерии).

Приведем их графическую интерпретацию. Семейство функций предпочтения для ***MM***-критерия в двумерном случае имеет вид

$$\boldsymbol{min\ (e_{i1}, e_{i2}) = k},$$

что соответствует прямоугольному конусу предпочтений (рис. 23).

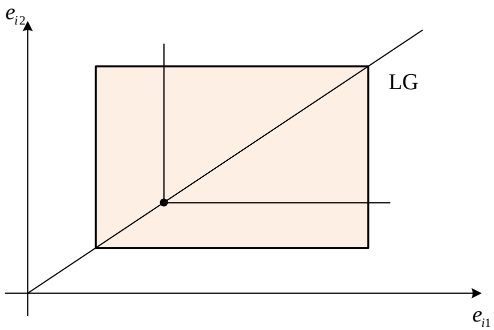


Рис. 23. Прямоугольный конус предпочтения ***MM***-критерия

Чтобы найти решение, оптимальное по MM-критерию, выбираем на биссектрисе квадранта I (направляющая LG) точку, близкую к началу координат, и строим в этой точке прямоугольный конус предпочтения, который затем сдвигаем вдоль LG до встречи в поле полезности точки с координатами максимального уровня (рис. 23).

Семейство функций предпочтения для ***G***-критерия имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{min\ (e_{i1}q_1,\ e_{i2}q_2) = k},$$

что соответствует прямоугольным конусам на направляющей LG, угол наклона которой зависит от $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_2}$ (на рис. 24 $\boldsymbol{q_1}$ =1/3, $\boldsymbol{q_2}$ =2/3).

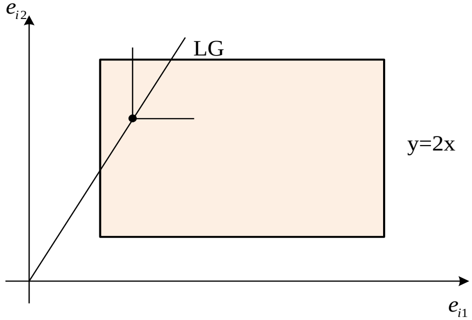


Рис. 24. Прямоугольный конус предпочтения ***G***-критерия

Семейство функций предпочтения для ***BL***-критерия в двумерном случае имеет вид

$$\boldsymbol{e_{i1}\ q_1 + e_{i2}\ q_2 = k},$$

что соответствует прямым линиям. Чтобы найти решение, оптимальное по ***BL***-критерию, строим направляющую *LG* под углом φ (tgφ = $\boldsymbol{q_1/q_2}$). Затем перпендикулярно к *LG* проводится прямая функции предпочтения, которая сдвигается вдоль *LG* до встречи в поле полезности точки с координатами максимального уровня (рис. 25).

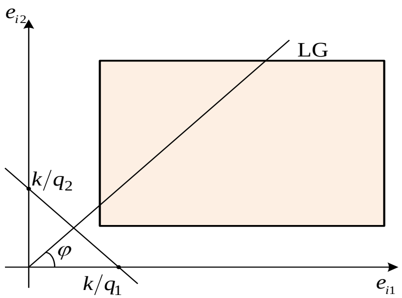


Рис. 25. Прямые линии функции предпочтения для ***BL***-критерия

Семейство функций предпочтения для ***P***-критерия имеет вид

$$\boldsymbol{e_{i1}\ e_{i2} = k},$$

что соответствует гиперболе, сдвигая которую вдоль биссектрисы *LG* можно найти ***P***-оптимальное решение (рис. 26).

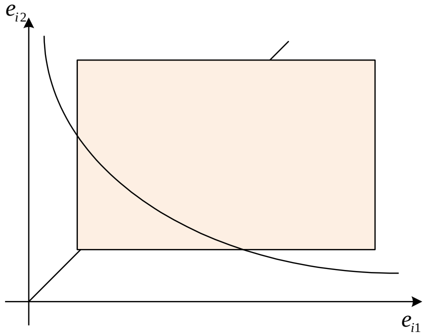


Рис. 26. Гипербола функции предпочтения для ***P***-критерия

Семейство функций предпочтения для ***HL***-критерия в двумерном случае имеет следующий вид:

$$\nu\left(q_1 e_{i1} + q_2 e_{i2}\right) + (1-\nu)\min\left(e_{i1}, e_{i2}\right) = k.$$

Это конусы с углом раствора от 90 до 180° на биссектрисе *LG* (рис 27).

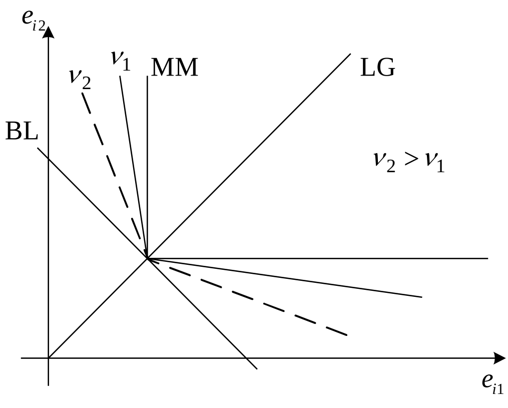


Рис. 27. Конусы функции предпочтения для ***HL***-критерия

Лучи конуса пересекают оси координат в в точках с отношением ***q₂/q₁***. При убывании ***ν*** лучи конуса теснее прилегают к прямоугольному конусу ***MM***-критерия, при возрастании меры доверия ***ν*** лучи конуса предпочтения теснее прилегают к прямой ***BL***-критерия.

Чтобы найти решение, оптимальное по ***HL***-критерию, сдвигаем конус вдоль LG до встречи в поле полезности точки с координатами максимального уровня.

Семейство функций предпочтения (рис. 28) для ***HW***-критерия имеет следующий вид:

$$\lambda \min\left(e_{i1}, e_{i2}\right) + (1-\lambda)\max\left(e_{i1}, e_{i2}\right) = k,$$

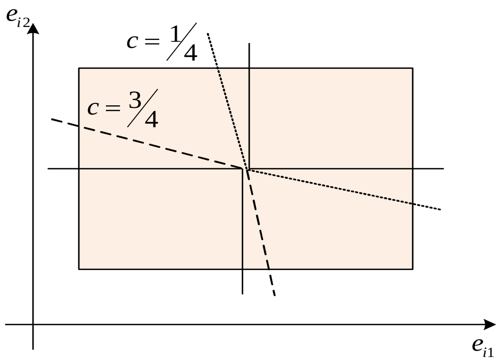


Рис. 28. Конусы функции предпочтения для ***HW***-критерия

что соответствует конусам с углом раствора от 90 до 270° на биссектрисе LG .

В заключение отметим следующее. Наличие нескольких критериев свидетельствует о том, что среди них нет универсального. Выбор критерия – прерогатива ЛПР. Это не является чисто рациональным процессом. Всякое техническое или экономическое решение в условиях неопределенности и неполной информации принимается в соответствии с выбранным критерием с учетом количественных характеристик проблемной ситуации. Иными словами, рациональный выбор ЛПР определяется поставленной целью, видом взаимодействия с другими ЛПР и окружающей средой. Природа нейтральна по отношению к ЛПР. Что касается функций предпочтения ЛПР в отсутствие информации о состоянии природы, то они характеризуют его индивидуальность: от пессимизма (***MM***-критерий) до оптимизма (***HW***-критерий при λ = 1). При известных вероятностях состояний природы применяют другие критерии (***BL***, ***HL***, ***G***).

Критерий выбора оптимального решения в статистических играх не является нормативным. Он зависит как от оцениваемых объектов (состояний природы), так и от предпочтений ЛПР. Чтобы он был принят ЛПР, необходимо доказывать его обоснованность.

Критерии выбора на основе матрицы выигрышей подлежат максимизации. В теории антагонистических игр единственным является принцип максимина/минимакса. В статистических играх вопрос о выборе критерия является открытым. Отличительной особенностью матрицы выигрышей в статистических играх также является однородность ее содержимого (денежные единицы, расстояния, веса и т.п.).

Рассмотренные задачи не допускают возможность проверки последствий решения. Можно лишь утверждать об оптимальности в данный момент при имеющейся информации. Это не гарантирует, что выбранное решение окажется наилучшим в будущем, поскольку в систему оценивания не вводятся прогнозные оценки.

Лекция 13. Аксиомы рационального выбора

Если цель принятия решений представляется в номинальной шкале, то количественная оценка цели (критерий) должна измеряться в более сильной шкале. Иначе невозможно оценить сопоставляемые альтернативы или объекты.

Неопределенность альтернатив или состояний может измеряться *вероятностью*, *возможностью* или *степенью принадлежности*. Неравная вероятность оказывает влияние на их выбор.

В теории статистических игр эта задача выбора решается путем нахождения выигрышей «в среднем» (***BL***-критерий), в экономической теории говорят о *лотерейном* характере выбора.

Лотерея L с двумя возможными исходами ***A*** и ***B*** и вероятностями их появления ***p*** и $\boldsymbol{1-p}$ обозначается как

$\boldsymbol{L = [p, A; 1-p, B]}$.

Рациональный выбор ЛПР в условиях неопределенности можно определить в строгой математической форме с помощью 6 аксиом.

1. ***Упорядочение***: $(A>B) \vee (B>A) \vee (A \equiv B)$.

Два объекта либо уступают один другому, либо одинаково предпочтительны.

2. ***Транзитивность по предпочтению***: $(A>B)\&(B>C)\rightarrow(A>C)$.

Отсутствие «порочного круга» в предпочтениях.

3. ***Неразрывность предпочтений***:

$(A > B > C) \rightarrow p\ [p, A; 1-p, C] \equiv B$.

Для крайних по предпочтениям объектов A и C найдется вероятность p, когда ЛПР безразличен выбор между средним объектом B и лотереей L.

4. ***Замещаемость***: $(A \equiv B)\rightarrow[p, A; 1 - p, C] \equiv [p, B; 1 - p, C]$.

Если два объекта A и B равнозначны, то их лотереи с участием третьего объекта C равнозначны.

5. ***Монотонность***: $(A>B)\rightarrow(p \geq q) \equiv [p, A; 1-p, B] \geq [q, A; 1-p, B]$.

Если ЛПР предпочитает $A > B$, то из лотерей с вероятностями исходов $p \geq q$ для A он выберет первую.

6. ***Декомпозиция***:

$[p, A; 1-p, [q, B; 1-q, C]] \equiv [p, A; (1-p)q, B; (1-p)(1-q), C]$.

Нельзя предпочесть одну лотерею другой только потому, что она имеет больше точек выбора (не шутите с риском). Эту мысль о равнозначности лотерей с разным числом точек выбора поясняет рис. 29.

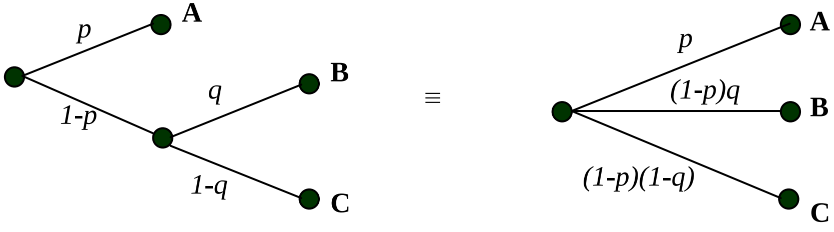


Рис. 29. Две равнозначные лотереи с разным числом точек выбора

Внимание!

Теорема о рациональном выборе

При соблюдении аксиом 1–6 рационального выбора существует единственная числовая функция $\boldsymbol{U(x)}$, определенная на множестве исходов лотереи $\boldsymbol{L}$, которая ставит в соответствие каждому исходу число и удовлетворяет следующим условиям:

1. $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ (нестрогое предпочтение) тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$;
2. $\boldsymbol{U(x, p, y) = pU(x)} + (1 - \mathrm{p})\boldsymbol{U(y)}$.

Причем функция $\boldsymbol{U(x)}$ – единственная с точностью до линейного преобразования, т.е. если $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$, то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{a}$ – целое положительное число.

Теория полезности не ограничивается изучением только линейных функций полезности $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$. Бернулли, например, доказал ее логарифмический характер для игры с подбрасыванием монет.

Существуют различные экспериментальные подтверждения теории полезности (например, задача о вазах, которая будет рассмотрена ниже). Однако известны также некоторые парадоксы, которые демонстрируют неприменимость теории максимизации ожидаемой полезности в реальных условиях риска и неопределённости. Реальное ЛПР, ведущее себя рационально, иногда предпочитает не поведение, направленное на получение максимальной ожидаемой полезности, а поведение, направленное на достижение абсолютной надежности. Иными словами, процедура принятия решения ЛПР (человеком) имеет свои особенности, иначе ЛПР можно было бы заменить автоматом принятия решений.

В качестве примера приведем парадоксы выбора решения ЛПР, автором которых является М. Алле.

1. Пусть имеются две лотереи, представленные на рис. 30. Анализ дерева слева показывает следующее:

$$U(5\,\text{млн}) = 1,$$
$$U(1\,\text{млн}) = U,$$
$$U(0) = 0.$$

При выборе между решением ***A*** (получить 1 млн) и ***B*** (согласие на лотерею) большинство ЛПР предпочитает ***A***. Из этого следует, что

$\boldsymbol{U} > 0{,}1\times 1 + 0{,}89\times\boldsymbol{U}$ или $\boldsymbol{U} > 10/11$.

Дерево решений справа – это выбор между лотереями ***C*** и ***D***. Большинство ЛПР предпочитают ***C***. Тогда

$0{,}1\times 1 > 0{,}11\times\boldsymbol{U}$ или $\boldsymbol{U} < 10/11$.

Таким образом, ЛПР, принимая решение ***C***, действует не в соответствии с функцией полезности.

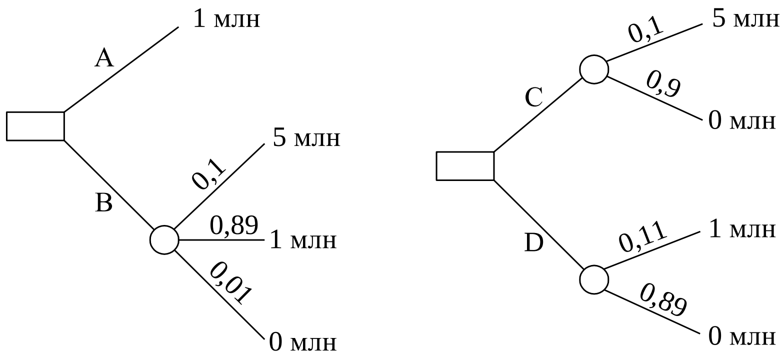


Рис. 30. Первый парадокс Алле

Известен еще более простой пример парадокса Алле.

2. Пусть имеются две лотереи, представленные на рис. 31.

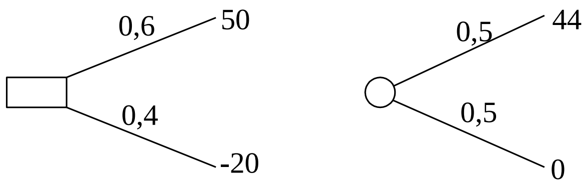


Рис. 31. Второй парадокс Алле

Нетрудно подсчитать, что средняя цена этих двух лотерей одинакова и равна 22. Парадокс состоит в том, что людям небезразлично, какую из лотерей выбрать. Большинство выбирает лотерею справа, опасаясь, что выбрав лотерею слева, придется отдавать цену 20.

3. Дилемма генерала (рис. 32). Генерал потерпел поражение в войне и хочет вывести свои войска (600 тыс. чел.) с территории противника. Есть две дороги и разведка дала оценки возможных потерь:

- первая дорога – спасти 200 тыс. чел.;
- вторая дорога – спасти всех (p = 1/3) или потерять всех (1 − p = 2/3).

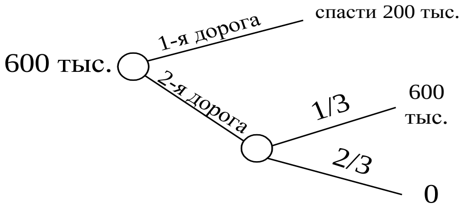


Рис. 32. Первый парадокс «дилемма генерала»

Эксперименты показали, что большинство людей выбирает первую дорогу.

Представим ту же самую дилемму в несколько ином виде (рис. 33).

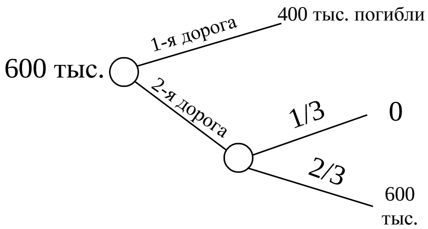


Рис. 33. Второй парадокс «дилемма генерала»

В этой формулировке задачи выбора большинство выбирает вторую дорогу.

Широко известны и другие парадоксы, связанные с выбором решений ЛПР. Приведем некоторые из них.

Справка

Буриданов осел. Парадокс, названный по имени Ж. Буридана (парадокс был известен ещё из трудов Аристотеля), где был поставлен вопрос: как осёл, которому предоставлены два одинаково соблазнительных угощения, может рационально сделать выбор. Буридан отстаивал позицию морального детерминизма – человек, столкнувшись с подобной дилеммой, должен выбирать в сторону большего добра. Позже другие утрировали эту точку зрения, приводя пример с ослом и двумя одинаковыми стогами сена и утверждая, что он непременно умрёт от голода, принимая решение (Г. Лейбниц).

Справка

Обманчивый успех единодушного принятия решения в команде. В один жаркий вечер семья играла в домино на крыльце до тех пор, пока тесть не предложил съездить в город пообедать. Жена сказала: «Звучит неплохо». Муж, несмотря на то, что поездка обещала быть долгой и жаркой, подумал, что надо бы подстроиться под других, и произнёс: «По-моему, неплохо; надеюсь, что и твоя мать не откажется». Тёща же ответила: «Конечно, поехали! Я не обедала в ресторане уже давно». Дорога была жаркой, пыльной и долгой. Когда же они наконец приехали, еда оказалась невкусной. Спустя 4 часа они, измученные, вернулись домой. Один из них произнёс неискренне: «Верно, неплохая была поездка?». В ответ тёща сказала, что лучше бы она осталась дома, а не поехала за компанию с остальными. Муж сказал: «Я поехал, чтобы всем доставить удовольствие». Жена произнесла: «А я тоже поехала, рассчитывая на радость остальных. Надо было быть сумасшедшим, чтобы добровольно отправиться в эту поездку». Тесть сказал: «Мне показалось, что остальным скучно». Парадокс заключается в том, что группа людей может принять решение, противоречащее возможному выбору любого из членов группы из-за того, что каждый индивидуум считает, что его цели противоречат целям группы, а потому не возражает. Это феномен *группового мышления*. Социология подтверждает, что человек редко совершает поступки, противоречащие его группе.

Справка

Вилка Мортона («выбор из двух зол») – выражение, описывающее ситуацию выбора между двумя одинаково неприятными альтернативами. Исходно выражение появилось из-за политики сбора налогов, разработанной Дж. Мортоном (Англия, 1487 г.). Его подход заключается в том, что если некто живёт в роскоши и, несомненно, тратит много денег на себя, то он, безусловно, обладает достаточным доходом, чтобы не жалеть его для короля. Если же кто-то живёт экономно, то у него, опять же, должны иметься деньги для передачи в казну. Эти два аргумента – как зубцы одной вилки, благоприятный выбор исключён независимо от доходов.

Парадокс двух конвертов. Демонстрирует как особенности субъективного восприятия вероятностей, так и границы её применимости. Эта задача ставит в тупик не только обычных людей, но также математиков. Суть в следующем. Проводится лотерея. Предлагаются два конверта, в которых находится две суммы денег, причём в одном из конвертов сумма отличается от суммы в другом конверте ровно в два раза. Никакие действия (измерительные и т. п.) совершать с конвертами нельзя. Можно лишь открыть один любой конверт и посчитать в нем деньги, после чего сделать выбор – взять этот конверт или взять другой конверт, чтоб получить бо́льшую сумму. В каждом последующем розыгрыше в конвертах находятся другие суммы, отличающиеся ровно в два раза. Предположим, что мы увидели в одном из конвертов $\boldsymbol{x}$ рублей. Тогда в другом может быть $0{,}5\boldsymbol{x}$ или $2\boldsymbol{x}$ руб. Таким образом, в другом конверте находится в среднем $1{,}25\boldsymbol{x}$ рублей (соответственно, разумнее выбирать именно его, хоть мы и не знаем, больше там денег или меньше), что противоречит интуитивной симметрии задачи.

ЛПР часто отклоняется от рационального поведения, используя различные предпочтения. Известны различные «отклонения» ЛПР от рационального поведения. Представим восемь типовых функций, характеризующих предпочтения ЛПР, в графическом виде, откладывая на оси абсцисс объективно измеряемый параметр $\boldsymbol{x}$ (выигрыш или проигрыш), а на оси ординат – значение субъективной функции полезности $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$.

1. ЛПР считает, что полезность прямо пропорциональна измеряемому параметру $\boldsymbol{x}$ (рис. 34). Это пример объективного ЛПР, однако реальные ЛПР такого графика предпочтений никогда не имеют.

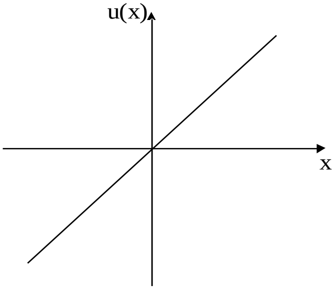


Рис. 34. Функция полезности объективного ЛПР

2. Психология мышления азартного ЛПР: с увеличением выигрыша ему придается большая ценность, а реакция на потери индифферентна (рис. 35).

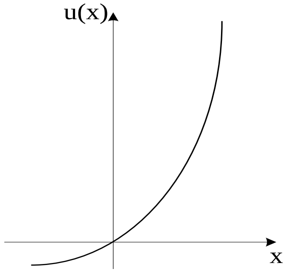


Рис. 35. Функция полезности азартного ЛПР

3. Осторожное ЛПР: паника при проигрыше и недооценка выигрыша (рис. 36).

4. ЛПР, паникующее при больших потерях и преувеличивающее ценность выигрыша (рис. 37).

5. ЛПР, индифферентно реагирующее как на потери, так и на выигрыш (рис. 38).

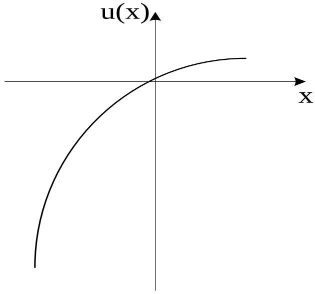


Рис. 36. Функция полезности осторожного ЛПР

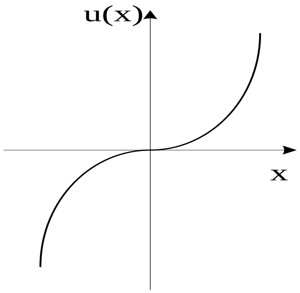


Рис. 37. Функция полезности ЛПР, паникующего при больших потерях и преувеличивающего ценность выигрыша

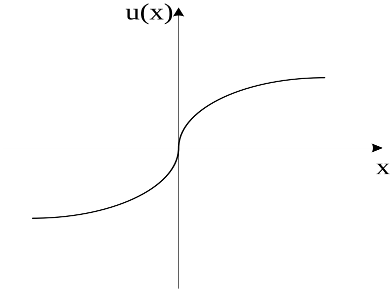


Рис. 38. Функция полезности индифферентного ЛПР

6. Нормальное ЛПР, объективное при небольших проигрышах/выигрышах, умеренно азартное при средних и индифферентное к большим проигрышам/выигрышам (рис. 39).

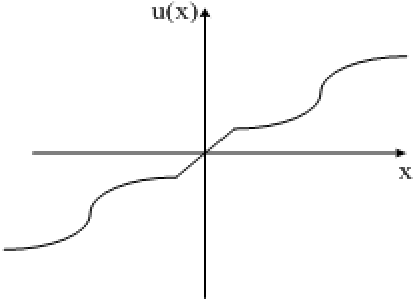


Рис. 39. Функция полезности нормального ЛПР

7. Выигрывающее ЛПР, добавляющее постоянную «премию» (+/-) за выигрыш/проигрыш (рис. 40).

8. ЛПР, которое считает полезным только выигрыш не менее величины ***a*** (рис. 41).

Причины нерационального поведения ЛПР разные: недостаток информации в процессе выбора, недостаточный опыт, стремление найти оптимальное решение сразу по нескольким критериям.

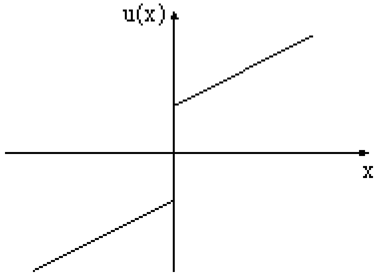


Рис. 40. Функция полезности выигрывающего ЛПР

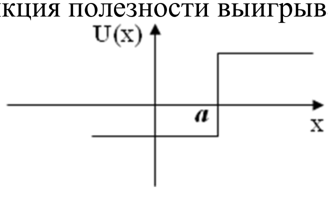


Рис. 41. Функция полезности ЛПР, который считает полезным только выигрыш не менее некоторой пороговой величины

Необходимо или нет учитывать нерациональность поведения ЛПР? Например, в задачах экономического выбора (предсказание поведения потребителя, чтобы определить спрос, объем производства, цену товара и т.п.) различают наблюдаемые и выявляемые предпочтения. Знание поведения ЛПР при наблюдаемых предпочтениях ничего не дает (для производителей чая неважно, что отдельный покупатель выбирает сорт чая нерационально; здесь важно знать спрос на тот или иной сорт чая большой группы покупателей). Иное дело, если требуется *предсказать* спрос. Для этого нужно вначале спрос выявить на основе мнений потребителей еще до их выбора.

В целом стремление учесть реальное поведение ЛПР привело к созданию *теории проспектов* (А. Тверский, Д. Канеман). Она позволяет учесть такие особенности поведения ЛПР, как тенденция придавать больший вес детерминированным исходам, изменять предпочтения при переходе от выигрыша к проигрышу, а также упрощать выбор.

В теории проспектов ситуация принятия решений представляется в виде игры (***x, p; y, q***), где ***p*** – вероятность исхода ***x***, ***q*** – вероятность исхода ***y***. Игра предусматривает также нулевой исход с вероятностью ***1–p–q***. Графически проспект имеет вид, представленный на рис. 42.

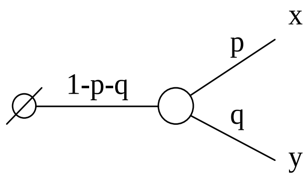


Рис. 42. Ситуация принятия решений в теории проспектов

В игре оценивается не полезность решения, а его *ценность* по формуле: $V=V(x)\times\Pi(p) + V(y)\times\Pi(q)$, где $V(x)$, $V(y)$ – ценность исходов ***x*** и ***y***, причем $V(0)=0$, $\Pi(p)$, $\Pi(q)$ – вес (важность) предпочтений ***p*** и ***q***.

В теории проспектов предполагается, что функция ценности ***V*** является выпуклой для выигрышей и вогнутой для потерь (рис. 43).

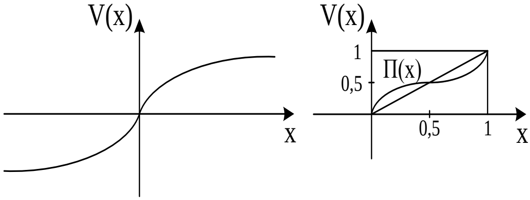


Рис. 43. Графики функции ценности (выпуклая для выигрышей и вогнутая для потерь) и функции веса предпочтений ЛПР в теории проспектов

В теории полезности вероятность умножается на полезность, а в теории проспектов используется специальная функция ***П(р)***, описывающая поведение ЛПР (см. рис. 37). В отличие от теории полезности, теория проспектов учитывает то, что у людей есть субъективные оценки, касающиеся выигрышей/потерь, доходов/расходов. Фактически у людей существует эвристическая пара, которую они применяют в компромиссах такого рода: гарантированный выигрыш лучше рискованного, но более высокого выигрыша («синица в руках лучше, чем журавль в небе»); гарантированная потеря хуже шанса потерять больше. Теория проспектов позволяет избежать парадокса Алле и ряда других, однако при ее применении возникают новые парадоксы, означающие систематическое отклонение человеческого поведения от поведения, предписанного теорией.

В заключение отметим следующее. Специалисты в области принятия решений признают противоречия и парадоксы между требованиями нормативных методов и возможностями человеческой системы переработки информации. Одна из причин этих противоречий состоит в том, что в аксиоматических и в эвристических методах неявно предполагается, что человек – это точное измерительное устройство, способное давать безошибочную информацию в количественном виде. Проверка согласия человека с аксиомами требует от него точных количественных измерений, при этом ошибки человека весьма вероятны. Не спасают и паллиативные подходы (например, теория нечетких множеств), при которых от человека требуется более простая, качественная информация, преобразуемая далее в числа (при этом никак не учитывается, что соотношения между словами и числами различны для разных людей, что подтверждается в экспериментах).

Для преодоления этих противоречий разрабатываются *вербальные* (порядковые) методы анализа решений (О.И. Ларичев), к которым предъявляются следующие требования:

- естественный язык описания проблемы, используемый ЛПР, должен сохраняться на всех этапах ее анализа без каких-либо преобразований в числа;
- способы получения информации от людей должны соответствовать возможностям человеческой системы переработки информации;
- логические операции преобразования словесных переменных (оценок альтернатив по критериям) должны быть математически корректны и определять тот или иной вид решающего правила;
- в методах принятия решений должны быть предусмотрены средства проверки информации на непротиворечивость и исключения этих противоречий.

На наш взгляд, методы вербального анализа решений имеют значительные преимущества по сравнению с другими методами применительно к *слабоструктурированным* проблемам, в которых оценки могут быть получены только от людей (ЛПР и экспертов), и правила принятия решений должны отражать предпочтения ЛПР.

Лекция 14. Выбор на основе эксперимента, в условиях содействия и нечеткой неопределенности

Существуют проблемные ситуации, когда имеется возможность определить состояние природы с помощью некоторого *эксперимента*. Возникает вопрос о целесообразности проведения эксперимента.

ВНИМАНИЕ!

Проведение эксперимента считается целесообразным, если его стоимость ***C*** меньше чем минимальный выигрыш, получаемый от устранения неопределенности:

$$C < \min_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij}, \ \textit{где} \ r_{ij} = \left(\max_{1\le i\le m} e_{ij} - e_{ij}\right).$$

ПРИМЕР

Найти цену эксперимента для модели игры с вероятностями состояний природы $q_1 = 0,6$ и $q_2 = 0,4$, представленной матрицей выигрышей:

	F_1	F_2	$\boldsymbol{R_I}$
$\mathbf{E_1}$	0	2	***0,8***
E_2	1	1	1
E_3	3	0	1,8

Элементы матрицы рисков $\boldsymbol{R_{ij}}$ рассчитываются на основе заданной матрицы выигрышей. В правом столбце $\boldsymbol{R_I}$ приведены значения средних рисков. Наименьшее значение имеет риск выбора решения $\boldsymbol{E_1}$. Следовательно, максимальная цена эксперимента не может быть более ***0,8***. Если стоимость его выше, следует выбрать решение, обеспечивающее максимальный средний выигрыш.

В более сложных случаях применяются формулы, основанные на ***теореме Байеса.***

Байес исходил из того, что состоянию природы может быть приписана априорная (безусловная) вероятность его появления. Проводя эксперименты, можно получить ***апостериорную вероятность*** состояния.

Примем для дальнейших рассуждений следующие обозначения:

q(F) – априорная вероятность состояния природы ***F***;

q(F:E) – апостериорная вероятность состояния ***F*** при условии, что получена уточняющая информация (факт) ***E*** в ходе эксперимента;

q(E:F) – вероятность получения факта ***E*** при условии, что имеет место состояние природы ***F***;

q(E:неF) – вероятность получения факта ***E*** при условии другого, нежели ***F*** состояния природы.

По определению условных вероятностей имеем

$$q(F:E)=\frac{q(F\,\&\,E)}{q(E)},\quad q(E:F)=\frac{q(E\,\&\,F)}{q(F)}.$$

Учитывая, что ***q(F& E) = q(E&F)***, получаем

Внимание!	$q(F:E)=\dfrac{q(E:F)q(F)}{q(E)}$ **Теорема Байеса**

Учитывая, что ***q***(***E***) = ***q***(***E:F***) ***q***(***F***) + ***q***(***E:***не***F***) ***q***(не***F***), а ***q***(не***F***) = 1 – ***q***(***F***), получаем формулу, позволяющую уточнять вероятность состояния природы ***F*** с учетом проведенных экспериментов ***E***:

$$q(F:E)=\frac{q(E:F)q(F)}{q(E:F)q(F)+q(E:неF)(1-q(F))}. \tag{11}$$

Процесс уточнения вероятности ***q***(***F***) можно повторять снова, каждый раз обращаясь к одной и той же формуле. В конечном счете, можно получить окончательный вывод о состоянии природы, уменьшив неопределенность. Таким образом, зная априорную вероятность ***q***(***F***), а также условные вероятности ***q***(***E:F***) и ***q***(***E:***не***F***), можно вычислить по формуле Байеса (11) апостериорную вероятность ***q***(***F:E***).

Вопрос	Как применять теорему Байеса, если проводится несколько экспериментов E_1, E_2,…, E_n, на основе которых необходимо уточнять различные состояния природы F_1, F_2,…, F_m ?

Если состояния природы являются взаимоисключающими, то для одного факта, полученного в ходе эксперимента ***E*** , и нескольких состояний природы апостериорная вероятность будет равна

$$q(F_i : E) = \frac{q(E : F_i) \times q(F_i)}{\sum\limits_{k=1}^{m} q(E : F_k) \times q(F_k)}. \tag{12}$$

Для нескольких фактов, полученных в ходе экспериментов $E_1, E_2, \ldots, E_n$, и нескольких состояний природы апостериорная вероятность будет равна

$$q(F_i : E_1, E_2, \ldots, E_n) = \frac{q(E_1, E_2, \ldots, E_n : F_i) \times q(F_i)}{\sum\limits_{k=1}^{m} q(E_1, E_2, \ldots, E_n : F_k) \times q(F_k)}. \tag{13}$$

Однако применение формулы (13) требует знания ЛПР условных вероятностей для всех комбинаций фактов и состояний. Это делает задачу практически невыполнимой. Поэтому в реальных системах поддержки принятия решений принимается предположение о независимости фактов и вместо 1(3) используют следующую формулу:

$$q(F_i : E_1, E_2, \ldots, E_n) = \frac{q(E_1 : F_i) \times q(E_2 : F_i) \times \ldots \times q(E_n : F_i) \times q(F_i)}{\sum\limits_{k=1}^{m} q(E_1 : F_k) \times q(E_2 : F_k) \times \ldots \times q(E_n : F_k) \times q(F_k)}. \tag{14}$$

Чтобы понять эти формулы Байеса рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР

Предположим, что эксперт или ЛПР на основе трех экспериментов E_1, E_2 и E_3 уточняет три состояния природы F_1, F_2, F_3, не доверяя их априорным вероятностям. По результатам экспериментов эксперт также определяет условные вероятности каждого из трех фактов для каждого состояния $q(E_j{:}F_i)$.

В таблице указаны все исходные значения вероятностей:

	F_1	F_2	F_3
$q(F_i)$	0,4	0,35	0,25
$q(E_1{:}F_i)$	0,3	0,8	0,5
$q(E_2{:}F_i)$	0,9	0	0,7
$q(E_3{:}F_i)$	0,6	0,7	0,9

Пусть вначале наблюдается факт E_3. Тогда согласно (12) имеем:

$q\ (F_1{:}E_3) = 0{,}6\times0{,}4/(0{,}6\times0{,}4+0{,}7\times0{,}35+0{,}9\times0{,}25) = 0{,}34;$

$q\ (F_2{:}E_3) = 0{,}7\times0{,}35/(0{,}6\times0{,}4+0{,}7\times0{,}35+0{,}9\times0{,}25) = 0{,}34;$

$q\ (F_3{:}E_3) = 0{,}9\times0{,}25/(0{,}6\times0{,}4+0{,}7\times0{,}35+0{,}9\times0{,}25) = 0{,}32.$

Состояния природы после проведения уточняющего эксперимента стали практически равновероятными.

Предположим теперь, что наблюдается факт $\boldsymbol{E_1}$. По формуле (14) получим:

$q\ (F_1{:}E_3,E_1) = 0{,}3\times0.6\times0.4/(0.3\times0.6\times0.4+0.8\times0.7\times0.35+0.5\times0.9\times0.25) = 0{,}19;$

$q\ (F_2{:}E_3,E_1) = 0{,}8\times0{,}7\times0{,}35/(0{,}3\times0{,}6\times0{,}4+0{,}8\times0{,}7\times0{,}35+0{,}5\times0{,}9\times0{,}25) = \mathbf{0{,}52};$

$q\ (F_3{:}E_3,E_1) = 0{,}5\times0{,}9\times0{,}25/(0{,}3\times0{,}6\times0{,}4+0{,}8\times0{,}7\times0{,}35+0{,}5\times0{,}9\times0{,}25) = 0{,}29.$

Состояние $\boldsymbol{F_2}$ после проведения уточняющего эксперимента $\boldsymbol{E_1}$ стало наиболее вероятным.

Наконец, после проведения нового эксперимента и наблюдения по его результатам факта $\boldsymbol{E_2}$, апостериорные вероятности, вычисленные по формуле (14), равны:

$q(F_1{:}E_3,E_1,E_2) = 0{,}9\times0{,}3\times0{,}6\times0{,}4/(0{,}9\times0{,}3\times0{,}6\times0{,}4+0+0{,}7\times0{,}5\times0{,}9\times0{,}25) =0{,}45;$

$q(F_2{:}E_3,E_1,E_2) = 0\times0{,}8\times0{,}7\times0{,}35/(0{,}9\times0{,}3\times0{,}6\times0{,}4+0+0{,}7\times0{,}5\times0{,}9\times0{,}25) = 0;$

$q(F_3{:}E_3,E_1,E_2) =0{,}7\times0{,}5\times0{,}9\times0{,}25/(0{,}9\times0{,}3\times0{,}6\times0{,}4+0+0{,}7\times0{,}5\times0{,}9\times0{,}25) =\mathbf{0{,}55}.$

При сравнении полученных апостериорных вероятностей с исходными априорными вероятностями удалось существенно уточнить вероятности состояний природы.

Рассмотрим еще один классический пример – задачу о вазах.

ПРИМЕР

Имеется *700* ваз *типа I*, внутри каждой из которых находятся *6* красных шаров и *4* черных шара; а также *300* ваз *типа II*, внутри каждой из которых находятся *3* красных шара и *7* черных шаров. Экспериментатор случайно выбирает вазу и предлагает ЛПР угадать ее тип.

Выигрыши ЛПР представлены следующей матрицей:

	Тип I	*Тип II*	**q(B)**
$\mathbf{d_1}$	350	–50	0,7
$\mathbf{d_2}$	–100	500	0,3

Обозначим решения ЛПР через $\mathbf{d_1}$ (назвать вазу *типа I*), $\mathbf{d_2}$ (назвать вазу *типа II*), **q(B)** – априорная вероятность выбора одного из двух типов ваз.

Если не проводить экспериментов, то «средний» выигрыш, получаемый ЛПР при выборе решений $\mathbf{d_1}$ и $\mathbf{d_2}$, определяется как

$$U(d_1) = 350\times0{,}7 - 50\times0{,}3 = \mathbf{230};$$

$$U(d_2) = -100\times0{,}7 + 500\times0{,}3 = 80.$$

Ясно, что оптимальным решением ЛПР будет назвать вазу *типа I* (решение $\mathbf{d_1}$).

Усложним задачу. Предположим, что экспериментатор дает возможность перед выбором типа вазы вытащить один шар из вазы, увидеть какого он цвета и, положив его обратно в вазу, назвать ее тип. Цена эксперимента $\boldsymbol{C = 60}$. Таким образом, задача ЛПР усложняется. Необходимо понять, выгодно или нет участвовать в эксперименте, и, если – выгодно, то каким будет тип вазы? – Проведем расчеты. Вероятность вытащить красный шар из вазы *типа I* равна 0,6, а из вазы *типа II* равна 0,3. Соответствующие вероятности для черных шаров равны 0,4 и 0,7.

Тогда совместная вероятность вытащить красный шар, если это ваза *типа I* : $P_к(B_1) = 0{,}7*0{,}6 = 0{,}42$, а если ваза окажется вазой *типа II*: $P_к(B_2) = 0{,}3*0{,}3 = 0{,}09$. Общая вероятность вытащить красный шар: $P_к = 0{,}42 + 0{,}09 = 0{,}51$.

Соответствующие вероятности для черных шаров: $P_ч(B_1) = 0{,}7*0{,}4 = 0{,}28$; $P_ч(B_2) = 0{,}3*0{,}7 = 0{,}21$. Общая вероятность вытащить черный шар: $P_ч = 0{,}28 + 0{,}21 = 0{,}49$.

Применим формулу Байеса. Вероятность того, что ваза окажется *типа I* после вытаскивания красного шара определяется как

$$P(B_1/k) = \frac{Pk(B_1)*P(B_1)}{Pk(B_1)*P(B_1)+Pk(B_2)*P(B_2)} = \frac{0{,}42*0{,}7}{0{,}42*0{,}7+0{,}09*0{,}3} = 0{,}92.$$

Аналогично получаем $P(B_1/ч) = 0{,}57$; $P(B_2/к) = 0{,}08$; $P(B_2/ч) = 0{,}43$.

Теперь, имея всю информацию, можно построить дерево поиска и принять решение (рис. 44).

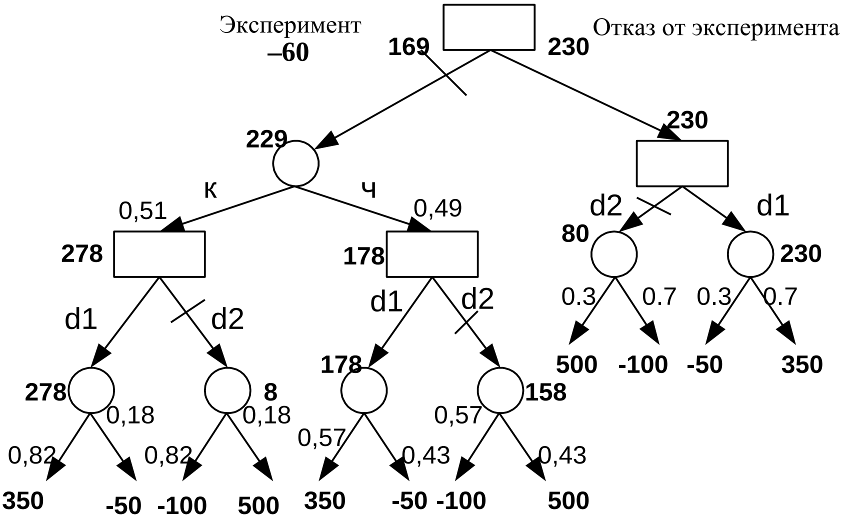


Рис. 44. Дерево принятия решения в задаче о вазах

Прямоугольник на дереве поиска обозначает решение ЛПР, круг – лотерейный выбор, знак «\» – отсечение неперспективных ветвей.

Алгоритм оптимального выбора по дереву следующий:

1) двигаемся от конечных вершин к корню дерева;

2) там, где встречается круг, определяется средний выигрыш,

3) там, где встречается прямоугольник, выбирается ветвь с максимальным выигрышем, иначе она отсекается.

Если применить алгоритм к построенному дереву, то необходимо при данных условиях принимать следующее решение: шар не вытаскивать и сразу сделать выбор в пользу решения $\mathbf{d_1}$.

Вернемся теперь к представленному в предыдущей лекции *парадоксу о двух конвертах*. В 2009 г. был найден перспективный подход к 80-летней загадке, объяснение которой может иметь последствия для массы теоретических и прикладных областей ТПР: от термодинамики и оптимизации работы технических систем до улучшения электронных схем и составления оптимальной стратегии игры на фондовом рынке.

Напомним формулировку парадокса.

Предлагаются два конверта (***A*** и ***B***) с деньгами (взвешивать, ощупывать и просвечивать их, понятно, нельзя). Вы знаете только, что в одном из них содержится сумма ровно вдвое большая, чем во втором, но в каком и какие именно суммы – неизвестно. Можно открыть любой конверт на выбор и взглянуть на деньги в нём. После чего вы должны выбрать – взять себе этот конверт или обменять его на второй (уже не глядя).

Как вам поступить, чтобы выиграть, получив большую сумму денег? Кажется, что шанс на выигрыш и проигрыш всегда одинаков (50 %) вне зависимости от того, оставите ли вы себе открытый конверт или возьмёте вместо него второй. Ведь вероятность нахождения большей суммы в конверте ***A*** изначально такая же, как вероятность, что более внушительные деньги лежат в конверте ***B***. Вскрытие одного из конвертов (***A***) ничего не говорит вам о том, видите вы наибольшую или наименьшую сумму из двух предложенных. Однако вычисление средней ожидаемой «стоимости» второго конверта говорит об ином.

Допустим, вы увидели 10 руб. Стало быть, в другом конверте лежат либо 5 руб., либо 20 руб., с вероятностью 50 на 50. По теории вероятности средневзвешенная сумма в конверте ***B*** равна: 0,5*5 + 0,5*20 = 12,5 руб. Разумеется, открыв альтернативный конверт, вы увидите не эту сумму, а либо 20, либо 5 рублей по условиям игры. Но 12,5 руб. – такова вычисленная средняя сумма выигрыша на кон при проведении достаточно большого числа раундов, если вы всегда будете менять конверты. Этот результат не зависит от первоначальной суммы денег. Ведь в разных раундах могут использоваться разные пары (10 и 20, 120 и 60, 2000 и 4000 и т.д.). В общем виде, если в конверте ***A*** лежит сумма ***C***, то статистически ожидаемая сумма в конверте ***B*** составит $0{,}5 \cdot C/2 + 0{,}5 \cdot 2C = 5/4\ C$.

Таким образом, теория говорит, что всегда выгодно менять свой первоначальный выбор (12,5 больше 10), хотя в отдельных раундах вы будете проигрывать. Но против такого вывода протестует интуиция, которая говорит о принципиальном равенстве конвертов (поменяв конверты, вы можете начать все рассуждения сначала, не открывая второй конверт, и поменять их снова). На разрешение данного парадокса не один раз претендовали различные учёные. Однако математическое сообщество до сих пор не пришло к консенсусу, так что задача остаётся открытой. Теперь же своё видение данной проблемы предложили М. Макдоннел и Д. Эбботт. Заключается оно в следующем. Нужно менять или не менять конверты в каждом заходе случайным образом, но с вероятностью, которая зависит от суммы, увиденной в первом конверте. То есть чем меньше сумма в конверте ***A***, тем с большей вероятностью следует сменить конверт и наоборот, несколько большая сумма в ***A*** говорит о том, что скорее следует оставить первый конверт себе. До открытия конвертов ситуация является симметричной. Не имеет значения, будете вы менять потом конверт или нет. Однако после того как открывается конверт, нарушается симметрия (оба конверта уже не равноценны), а затем обмен конвертов позволяет получить выгоду в долгосрочном плане (при большом числе заходов).

Свыше 20 миллионов компьютерных экспериментов показали, что данная стратегия позволяет получить больше денег в игре с конвертами, чем простой обмен. Кроме того, работает стратегия предопределённого обмена, когда игрок выбирает альтернативный конверт только в том случае, если увиденная в первом сумма меньше заранее и наугад выбранного им самим значения. Это так же против интуиции, поскольку о минимальной планке «переключения» знает игрок, но не те, кто кладёт деньги в конверты.

Интересным выглядит прикладной аспект парадокса двух конвертов в электронных системах. Речь идет о загадочном эффекте *стохастического резонанса* – парадоксального, на первый взгляд, явления усиления полезного (периодического) сигнала в нелинейных системах при добавлении к нему белого шума. Откуда «природа» знает, какую часть импульса усиливать? Это так же неизвестно, как и то, в каком из двух конвертов большая сумма денег. Однако при ряде условий вероятность правильного усиления сигнала оказывается выше, чем вероятность подавления полезной составляющей добавленными помехами. Так же как вероятность выигрыша в игре с конвертами может быть повышена, несмотря на внешнюю неопределённость исхода этой простой игры.

Другой пример того, как ТПР помогает решать практические проблемы, приведем из области программной инженерии. Томас Байес жил в XVIII веке. Об Интернете и электронной почте он ничего не знал. Однако его теорема помогает бороться со спамом. Проблема спама очевидна. Разработчики профессионального антиспамерского софта вынуждены сейчас искать способы отождествления искаженного и «нормального» текстов. Используются, как минимум, два пути решения этой проблемы:

1. Совершенствование алгоритмов "вычленения" текста письма, например добавление анализа цветовых различий фона и шрифтов.

2. Составление своеобразных вариативных словарей, где в явном виде перечисляются все варианты искаженного написания отдельно взятого слова.

Проблема в том, что намеренные искажения текста, позволяющие эффективно обойти почтовые фильтры, практически не влияют на его восприятие за счет образного характера мышления человека. Намеренное искажение может существовать как на уровне слова, так и на уровне текста в целом. Примерами здесь являются следующие спамерные приемы:

1. **viagra → vi@gra** (замена одних букв слова на другие: @ вместо а);
2. **д**ос**т**ав**к**а →**g**ос**m**ав**k**а;
3. телефон 1058164 → 10пять8один6четыре;
4. рассылка → р а с с ы л к а, р-а-с-с-ы-л-к-а;
5. Пр ед ла га ем, СЕ КСУАЛ ЬН ОЕ СР ЕД СТ ВО.. моментально РА СТ ВО РЯ ЕТ СЯ В ЛЮ БО М НА ПИ ТК Е, не ос та вл яя пр ив ку са!

6. «Фрегат» досставит на доом, в офис, на банкет икру чеерную, красную, крабы по ценам ниже рыноочных (используется «дребезг» клавиатуры).

Вопрос	Как построить Байесовский антиспам-фильтр ?

Согласно теореме Байеса, вероятность события можно довольно точно вычислить, если известна статистика совершения события в прошлом. Например, если 80 % писем, содержащих словосочетание "разговорный английский", являлись спамом, то и следующее письмо с этим словосочетанием – спам с большой вероятностью. Как оценить эту вероятность? – Алгоритм принятия решения в данном случае имеет следующий вид.

1. Выбирается множество признаков $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, характеризующих документ (слова, теги письма, область их расположения и т.п.).

2. Устанавливается «вес» w_i признака (w_i равен 1 или 0, что означает наличие или отсутствие признака).

3. Фильтр обучается на заранее классифицированных документах.

4. Принимается решение по правилу байесовского *классификатора* (предложен П. Грэмом):

$$p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + (1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p) \ > \ W,$$

$$p_i = \frac{s_i}{g_i + s_i},$$

где p_i – вероятность признака в спаме; s_i – количество «плохих» документов, содержащих x_i признак; g_i – количество «хороших» документов, содержащих x_i признак; W – заданный пользователем порог. При этом используются вероятности только тех признаков, которые встретились в документе. Принятие решения о конкретном письме не должно быть связано с количеством спама в почтовом ящике, а должно вычисляться исключительно по содержимому самого письма.

Спамеры должны написать в письме нечто понятное, призывающее нас к какому-то действию. Этот признак спам-сообщения и является основой для работы байесовских фильтров. Слову или тегу присваивается два значения: вероятность его наличия в спаме и вероятность его присутствия в обычных письмах. Баланс этих двух значений определяет вероятность того, что письмо, в котором встречаются данные слова или теги, является спамом.

Задача выявления спама – это задача выбора и принятия решения. Качество принятия решений характеризуется ошибками *1-го рода* (пропущен спам) и *2-го рода* (обычное письмо принято за спам).

Чтобы *обучить* фильтр, берутся два набора электронной почты: спамовская и обычная. Каждому слову или тегу письма присваивается вероятность его наличия в спаме. Например, высокая спам-вероятность присваивается словам вроде *sexy*, *promotion* или тегам типа *ff0000* (код ярко-красного цвета в языке HTML).

Для фильтрации не нужно вычислять вероятности для всех слов письма (берется их относительно небольшая выборка). Программа обучения по специальному словарю вычисляет частоту появления признака в письмах из двух наборов. Вычисление вероятности принадлежности конкретного нового письма к тому или иному типу производится по формуле Байеса. Суммированием и нормализацией вероятностей слов получают вероятности для всего письма. Как правило, вероятность принадлежности электронного письма к одной из категорий на порядок выше, чем к другим.

Для того чтобы понять, как работает антиспам-фильтр, рассмотрим пример.

Возьмем письма из почтового ящика и разделим их на две «кучи». В одну отложим нужную корреспонденцию, в другую – спам.

Оценим, с какой частотой те или иные слова встречаются в «хороших» письмах и в спаме. Пусть в тех и в других письмах примерно с одинаковой частотой встречаются общеупотребительные слова. Их наличие в письме ничего не говорит о том, к какому разряду его отнести. Присвоим этим словам нейтральную оценку «спамности», скажем **0**,**5**. Допустим, оказалось, что словосочетание «*разговорный английский*» встречается в восьми спам-письмах и только в двух нормальных. Поставим этому словосочетанию оценку **0**,**8**. И наоборот, выяснилось, что слово «*дружище*» девять раз встречалось в нормальных письмах и только один раз – в спаме. Поставим ему оценку **0**,**1**.

Открываем почту. Там короткое письмо:

"Дружище! Как твой разговорный английский?"

Оценим его "спамность". Слова *как* и *твой* являются общеупотребительными. Поставим им оценку **0**,**5**. Общую оценку письма (**Z**) вычислим по упрощенной формуле Байеса:

$$Z = s/(g + s), \text{ где } s = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n,\ g = (1-p_1)\times(1-p_2)\times\ldots\times(1-p_n),$$

где p_i – спам-оценка каждого слова, входящего в письмо.

Для нашего письма получаем:

$s = 0{,}1\times0{,}5\times0{,}5\times0{,}8 = 0{,}02$,

$g = (1-0{,}1)\times(1-0{,}5)\times(1-0{,}5)\times(1-0{,}8) = 0{,}045$,

$Z = 0{,}02/0{,}065 = 0{,}3$.

Письмо получило оценку с акцентом в сторону «неспамности».

Пример показывает принцип расчета вероятности спама. С другими исходными данными и более объемным текстом оценка была бы точнее. Математически подход представляется несколько «наивным», так как предполагает независимость появления отдельных слов в письме. Однако на практике он доказал свою эффективность.

Еще одной интересной прикладной областью принятия статистических решений являются так называемые *многоагентные системы*. Мы рассмотрели модель «ЛПР – природа» в условиях нейтралитета. Сравним эту модель с моделью «агент – среда».

Пусть группа индивидуальных ЛПР (агентов) решает общие задачи. Под решением задачи в теории многоагентных систем (МАС) понимается воздействие агентов на среду с учетом ее состояния.

Модель «агенты – среда» аналогична модели «ЛПР – природа», а агентно-ориентированный подход широко применяется в распределенных вычислениях, реинжиниринге бизнеса, имитационном моделировании, электронной торговле, организации работы коллективов программных роботов и т.д. Работы в этой области сейчас ведутся на стыке двух направлений: интеллектуальные системы поддержки принятия решений и сетевые технологии.

На способ решения задачи МАС влияют следующие факторы:

- характеристика среды;
- характеристика агентов;
- степень самостоятельности агентов.

Основными характеристиками *среды* являются следующие.

1. Среда может быть статической или динамической. Примерами статической среды могут быть, скажем, предметы, которые должен собрать робот; примерами динамической среды – транспорт, движением которого надо управлять.

2. Динамическая среда может изменяться как по детерминированным, так и по случайным законам (стационарным или нестационарным).

3. Среда может быть замкнутой или открытой.

4. Под воздействием агентов среда может быть неизменной или изменяемой.

Базовыми свойствами *агента*, характеризующими его активность, являются:

- целенаправленность;
- автономность.

Помимо этого агенты, как и среда, могут быть *статическими* (станции метро, управляющие движением поездов) и *динамическими* (поисковые роботы в Интернете). Основными функциями агента принято считать воздействие на среду и *кооперацию* с другими агентами. Относительно реакции на среду агенты бывают *реактивными* и *когнитивными*. Реактивный агент непосредственно реагирует на поступающую информацию о среде (автомат без памяти, условие – действие и т.п.). Когнитивный агент имеет *базу знаний, механизм рассуждений* и способен к рациональному выбору на основе функции полезности при анализе альтернатив.

Степень самостоятельности агентов определяется сочетанием двух способов управления:

• по вертикали (*субординация, централизованное управление*);

• по горизонтали (*координация*).

В информатике и вычислительной технике проблемы при взаимодействии агентов возникают в случае решения общей задачи: они вынуждены конкурировать за ресурсы. Ее решение зависит от ответа на вопросы: «Кому что делать?» или «Кому что достанется?» и связано с конфликтами. Базовая схема разрешения конфликтов имеет вид, представленный на рис. 45.

Рис. 45. Различные схемы разрешения конфликтов

Вопрос «Кому что делать» решается путем специализации агентов. Вопрос «Кому что достанется» предполагает соперничество, если у агентов совпадают средства достижения цели. Пусть, например, одному агенту в Сети необходимо найти прогноз погоды, а другому – расписание самолетов. Они будут пользоваться одинаковыми ресурсами: поисковыми машинами, серверами, т.е. соперничать за ресурсы. Соперничество тем более неизбежно, если цели агентов будут совпадать.

Пусть соперничающие за ресурсы агенты составляют множество $\boldsymbol{X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}}$, а ресурсы – множество $\boldsymbol{Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}}$. Если каждой паре $(\boldsymbol{x_i, y_j})$ поставить в соответствие «вес» $\boldsymbol{c_{ij}}$, то получим матрицу, которую можно представить в виде двудольного графа (рис. 46).

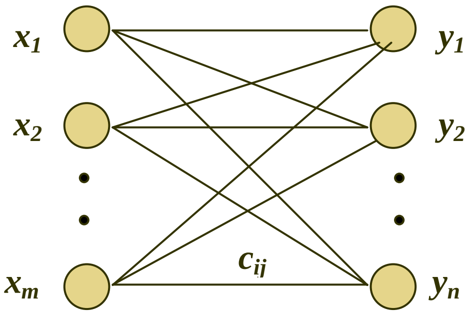


Рис. 46. Двудольный граф, представляющий множества ресурсов и агентов, соперничающих за ресурсы

Типовая задача распределения ресурсов на взвешенном двудольном графе состоит в поиске таких пар «исполнитель–работа», которые обеспечивают минимум суммарных затрат на все работы, когда каждый исполнитель выполняет только одну работу. Эта задача эквивалентна другой широко известной в ТПР задаче – *о назначениях*.

Одним из наиболее известных методов решения задачи распределения между агентами ресурсов является *алгоритм Крускала*:

1. В каждой строке матрицы $(c_{ij})_{m\times n}$ $(m \le n)$ находим $c_{ij,min,1}$.
2. Если все $c_{ij,min,1}$ принадлежат разным столбцам, то решение найдено.
3. Иначе при совпадении столбца в соответствующих строках находим $c_{ij,min,2}$ и $c_{kj,min,2}$. Вычисляем разницу: $\Delta 1 = c_{ij,min,1} - c_{ij,min,2}$ и $\Delta 2 = c_{kj,min,1} - c_{kj,min,2}$. Если $\Delta 2 - \Delta 1 \ge 0$, то $c_{ij,min,2}$, иначе – $c_{kj,min,2}$.

Найдем, например, минимальное паросочетание в задаче «агенты – ресурсы», заданной в виде следующей матрицы:

	y_1	y_2	y_3	y_4	$C_{min,1}$	$C_{min,2}$	ΔC_{min}
x_1	4	5	6	7	4	**5**	***1***
x_2	3	6	5	9	**3**	5	2
x_3	3	8	7	1	**1**	1	

Решение задачи, в соответствии с алгоритмом Крускала, приведено в трех последних столбцах таблицы. Результатом является следующее распределение ресурсов между агентами: ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_2}$), ($\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_1}$), ($\mathbf{x_3}$, $\mathbf{y_4}$) с минимальной суммой затрат 9. Ресурс $\mathbf{y_3}$ остался невостребованным.

Рассмотрим теперь задачу выбора в условиях нечеткой неопределенности. Природа неопределенности при принятии решений может иметь не только вероятностный, но и нечеткий субъективный характер. На это обстоятельство одним из первых обратил внимание в своей *нечеткой логике Л.Заде*. Нечеткая логика имеет свою аксиоматику и набор базовых операторов, действующих несколько иначе, чем аналогичные операторы булевой алгебры. Ее преимущества при программировании систем поддержки принятия решений состоят в применении приблизительных экспертных правил и лингвистических переменных в условиях неопределенности. Нечеткая логика является многозначной, базируется на нечетких множествах и правилах.

Нечеткое правило – это условное высказывание вида «*Если X есть A, то Y есть B*» или «*A→B*», где *A* и *B* – нечеткие множества. Правила указывают на связь между нечеткими множествами и служат для выбора решений в условиях нечеткой неопределенности. Выбор в условиях нечеткой неопределенности представляет собой процесс рассуждений, основанный на нечеткой логике и использующий нечеткие *функции принадлежности*. Существуют прямая и обратная модели нечеткого выбора. Рассмотрим их на примерах.

Пусть имеется совокупность нескольких правил:

Если A есть R , то B есть L;

Если A есть C, то B есть C;

Если A есть L, то B есть R.

Графически эти правила представлены на рис. 47.

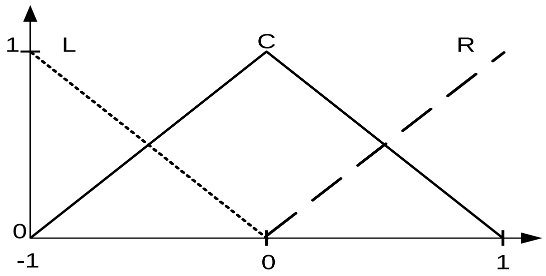


Рис. 47. Графическое представление функций принадлежности в треугольной форме

Здесь ***R, C, L*** – функции принадлежности нечетких множеств *A* и *B* (***R*** – быть справа; ***C*** – быть в центре; ***L*** – быть слева). Зададим их в треугольной форме. Например, пусть наблюдается некоторая информация **A**, тогда *прямая задача нечеткого выбора* заключается в последовательном пересечении функций принадлежности ***R, C*** и ***L*** с множеством **A**.

Согласно нечеткой логике, операция пересечения трактуется как *минимум*. Полученные результаты объединяются (по Заде операция объединения трактуется как *максимум*), и на основании **A** можно получить выводы о **B** (**B** – фигура, получаемая объединением заштрихованных на рис. 48 областей).

Другими способами нечеткого выбора являются выбор по Мамдани и Суджено. В системах с выбором по Мамдани используется база правил вида ***«Если* X1 = *низкий и* X2 = *средний, то* Y = *высокий»***. В системах с выбором по Суджено применяются правила вида «***Если* X1 = *низкий и* X2 = *средний, то* Y = *a0* + *a1*X1 + *a2*X2**», где ***a0*** – константа, ***a1, a2*** – весовые коэффициенты влияния **X1** и **X2** на **Y**. Отличие выбора по Мамдани от Суджено – в определении значений **Y** в правилах. Значения **Y** по Мамдани задаются нечеткими термами, а по Суджено – как линейная комбинация входных переменных.

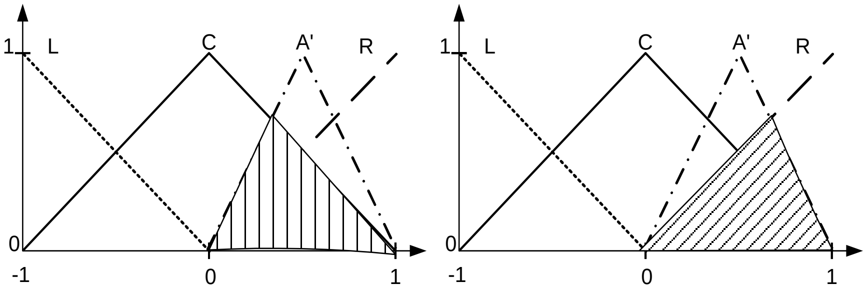


Рис. 48. Пример прямого нечеткого вывода

Рассмотрим теперь пример обратной задачи нечеткого выбора решений.

Пусть дано множество неисправностей автомобиля $\mathbf{X = \{x_1, x_2\}}$, где $\mathbf{x_1}$ – неисправность аккумулятора, $\mathbf{x_2}$ – неисправность, связанная с отработкой машинного масла. Имеется множество симптомов $\mathbf{Y = \{y_1, y_2, y_3\}}$, где $\mathbf{y_1}$ – затруднения при запуске двигателя, $\mathbf{y_2}$ – ухудшение цвета выхлопных газов, $\mathbf{y_3}$ – недостаток мощности двигателя. Свяжем симптомы с неисправностями. Например, путем опроса экспертов выясним степени принадлежности каждого симптома **Y** неисправности **X**. После этого построим матрицу нечетких отношений «симптомы–неисправности»:

R:	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$	$\mathbf{y_3}$
$\mathbf{x_1}$	0,9	0,1	0,2
$\mathbf{x_2}$	0,6	0,5	0,5

Пусть наблюдается симптом $\mathbf{y_1}$ (не запускается двигатель). Так как $\mathbf{0{,}9/(x_1y_1) > 0{,}6/(x_2y_1)}$, то состояние автомобиля оценивается следующим образом: $\mathbf{S = 0{,}9/y_1 + 0{,}1/y_2 + 0{,}2/y_3}$.

Требуется определить неисправность из множества $\mathbf{A=\mu_1/x_1+\mu_2/x_2}$, где $\mathbf{\mu_1}$ и $\mathbf{\mu_2}$ – шансы неисправностей $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$ соответственно. Для этого решим уравнение следующего вида:

$$\mathbf{S=A\times R} \text{ или}$$

$$\begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}.$$

Из этого матричного уравнения следует, что

$$\mathbf{0{,}9 = 0{,}9\times\mu_1 + 0{,}6\times\mu_2,}$$

$$\mathbf{0{,}1 = 0{,}1\times\mu_1 + 0{,}5\times\mu_2,}$$

$$\mathbf{0{,}2 = 0{,}2\times\mu_1 + 0{,}5\times\mu_2}.$$

С учетом особенностей выполнения операторов умножения и сложения в нечеткой логике, из первого уравнения этой системы следует $\boldsymbol{\mu_1} \geq \mathbf{0{,}9}$; из второго уравнения – $\boldsymbol{\mu_2} \leq 0{,}1$; анализируя третье уравнение, получаем $\boldsymbol{\mu_2} \leq \mathbf{0{,}2}$.

Таким образом, $\boldsymbol{\mu}\mathbf{1} > \boldsymbol{\mu}\mathbf{2}$. Рекомендуемое ЛПР решение**:** *желательно заменить аккумулятор*.

В заключение отметим следующее. При известной, но не очень надежной информации о вероятностях состояний природы используется критерий Байеса и эксперимент. Формула Байеса применяется для определения цены эксперимента, чтобы уточнить состояния природы.

Рациональный выбор индивидуального ЛПР в условиях содействия определяется интересами других членов группы. Эта задача сводится к задаче распределения ресурсов. Поскольку ЛПР в текущий момент может потреблять только один ресурс, она сводится к задаче о назначениях. Эта задача решается известными методами.

Специальной разновидностью задачи о назначениях является многокритериальная задача о назначениях. Она заключается в нахождении максимального соответствия между свойствами исполнителя и потребностями ресурсов.

Нечеткая неопределенность основана на субъективном и частичном восприятии ЛПР окружающей среды. Ее математической моделью является нечеткое множество, которое имеет две составляющих: четкую (принадлежность объекта множеству) и нечеткую (объект частично обладает свойством множества). Наиболее сложной проблемой нечеткого выбора является задание функции принадлежности нечеткому множеству (аксиоматически или эмпирически). Понятия функции принадлежности и вероятности часто путают, ведь они имеют одинаковый диапазон изменения от 0 до 1, и оба описывают меру неопределенности. Однако эти меры совершенно различны: функция принадлежности является описанием сложного состояния; дополнительные данные не изменяют её значения, а вероятности зависят от частоты события, поэтому последующие выборки могут изменить вероятность.

Пример

Имеются два стакана воды и одна попытка утолить жажду. О воде в первом стакане известно, что её функция принадлежности к питьевой воде равна 0,9. Вода во втором стакане с вероятностью 0,9 является питьевой. Какой стакан выбрать для питья?

Вода в первом стакане похожа на питьевую, но не вполне пригодна для питья (возможна, она грязная). Вода во втором стакане с вероятностью 10% может оказаться непитьевой (например, ядом). Поскольку попытка утолить жажду у нас одна, а вода в первом стакане по большей части является питьевой, то предпочтительно выпить воду из первого стакана.

Интерпретация нечетких отношений таблицами типа «симптомы – неисправности» позволяет применять известные методы для решения задач нечеткого выбора.

Совет

<u>Робот-агент крадет информацию о пользователях Сети</u>.

Эксперты рекомендуют быть внимательнее при общении на сайтах знакомств или в чатах. Появилась программа-робот *CyberLover*, собирающая информацию о своих собеседниках. «Киберлюбовник» демонстрирует высокий уровень социального «интеллекта», его собеседники не сразу понимают, что общаются с компьютерной программой. *CyberLover* может организовывать до 10 связей за полчаса. Он создает цифровой портрет собеседников с контактной информацией. Затем досье могут применяться злоумышленниками при проведении фишинг-махинаций, формировании персональных спамерских рассылок и т.д.

Специалисты рекомендуют пользователям представляться ненастоящим именем и не оставлять о себе персональные данные.

Лекция 15. Принятие решений в задаче о назначениях

Постановка классической задачи о назначениях состоит в следующем. Пусть имеется $\boldsymbol{n}$-работ и $\boldsymbol{n}$-кандидатов для их выполнения. Назначение i-кандидата на j-работу связано с затратами $\boldsymbol{c_{ij}}$. Найти назначение с минимумом суммарных затрат при условии, что один кандидат может выполнять лишь одну работу, а одна работа может выполняться одним кандидатом.

В терминах теории графов задача состоит в нахождении *минимального паросочетания* двудольного графа. С позиций теории игр матрица затрат $(\boldsymbol{c_{ij}})_{\boldsymbol{n*n}}$ – это матрица стоимости, целевая функция которой минимизируется.

Принятие решения в задаче о назначении – это типичная комбинаторная $\boldsymbol{NP}$-задача (частный случай транспортной задачи), оценка сложности которой при полном переборе равна $\boldsymbol{n!}$. Принятие решения в задаче о назначениях имеет широкую область применения в различных областях. История решения задачи о назначениях показывает, как постепенно математики приходили к пониманию вычислительной сложности методов решения этой задачи, как далеко не сразу была осознана необходимость поиска эффективных алгоритмов, удобных для практического применения.

Впервые задача о назначениях была рассмотрена Г. Монжем в 1784 г. Он предложил геометрический способ решения задачи: перемещать молекулы по прямым, касательным к обеим областям. Позднее, в начале XX века, была показана некорректность решения Монжа.

Следующие шаги в решении задачи о назначениях относятся к первой трети XX века и связаны с именами Кёнига и Эгервари. Они переформулировали задачу о назначениях как задачу поиска совершенного паросочетания минимального веса во взвешенном двудольном графе. При этом вершины графа соответствуют строкам и столбцам матрицы стоимостей, а ребра имеют веса, равные элементам матрицы стоимости. Кёниг доказал теорему о том, что максимальный размер паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия, а Эгервари впервые рассмотрел паросочетание во взвешенном графе и доказал теорему для оценки максимальной суммы весов ребер в паросочетании. Доказательство теоремы содержало алгоритм, позволяющий путем последовательного преобразования матрицы найти эту сумму. Работы Кёнига и Эгервари стали основой для «венгерского» метода решения задачи о назначениях, разработанного Куном и его учениками в 50-х годах прошлого века.

Тем временем, в 1947 г. Данциг и Канторович предложили очень эффективный метод для решения общей задачи линейного программирования, получивший название симплекс-метод. Задача о назначениях может быть сведена к задаче линейного программирования, если ввести для каждого элемента матрицы стоимостей свою переменную, принимающую значения 0 или 1, и записать $2\times n$ ограничений, что в каждом столбце и каждой строке сумма элементов строго равна единице. В 1951 г. Данциг замечает, что при решении задачи о назначениях симлекс-методом решение автоматически получается целочисленным. Сразу после этого появились сообщения о том, что удалось решить с помощью симплекс-метода задачу о назначениях с матрицей стоимости размером 10×10. Однако при этом пришлось решать задачу со 100 неизвестными и 20 ограничениями, что было на пределе возможностей компьютеров того времени.

Кун пишет, что «в тот момент в мире не было компьютера, способного решать задачи такого размера». Кроме того, в то время еще не было известно доказательство полиномиальной оценки сложности симплекс-метода для задач транспортного типа. Это доказательство было получено только в 1973 г. В 1955 г. Кун опубликовал алгоритм решения задачи о назначениях – венгерский метод. Изучив работы Кёнига и Эгервари, Кун совмещает метод чередующихся цепей Кёнига для поиска наибольшего паросочетания с преобразованием Эгервари.

Рассмотрим венгерский метод решения задачи о назначении подробнее.

Введем булеву переменную $\boldsymbol{x_{ij}}$, которая будет отражать факт назначения $\boldsymbol{i}$-го кандидата на выполнение $\boldsymbol{j}$-й работы:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если } i - \textit{й кандидат назначен на } j - \textit{ю работу}, \\ 0, \textit{ в противном случае}. \end{cases}$$

Тогда, исходя из постановки задачи, математическая формулировка целевой функции будет иметь следующий вид:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min .$$

Условия-ограничения в задаче следующие:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1.$$

Венгерский метод решения задачи о назначении гарантирует получение оптимального решения, используя при этом доказанный авторами метода *принцип оптимальности*.

Принцип оптимальности (венгерский метод)

Оптимальность решения задачи о назначении не нарушается при уменьшении (увеличении) элементов строки (столбца) исходной матрицы о назначении на одну и ту же величину.

Рассмотрим работу венгерского алгоритма на примере.

Пусть для выполнения четырех программ выделено четыре машины. Известно, какое время нужно i-й машине для выполнения некоторой j-программы:

i \ j	1	2	3	4
1	3	7	5	8
2	2	4	4	5
3	4	7	2	8
4	9	7	3	8

Необходимо так распределить машины, чтобы суммарное время выполнения всех программ было минимальным, при условии, что одна машина может быть назначена на выполнение только одной программы, а одна программа должна выполняться только одной машиной.

1. Получим нули в каждой строке и столбце исходной матрицы путем вычитания минимальных элементов. Вначале определим минимальные элементы в каждой строке матрицы и разность между текущим элементом строки и ее минимальным элементом. Получим следующую матрицу:

i \ j	1	2	3	4
1	0	4	2	5
2	0	2	2	3
3	2	5	0	6
4	6	4	0	5

Затем определим минимальные элементы в каждом столбце полученной матрицы и разность между текущим элементом столбца и ее минимальным элементом. Получим следующую матрицу:

i \ j	1	2	3	4
1	0	2	2	2
2	0	0	2	0
3	2	3	0	3
4	6	2	0	2

2. Поиск оптимального решения. Для этого выберем в полученной матрице строку с наименьшим количеством нулей. Отметим знаком «+» один из нулей этой строки, а знаком «–» – все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль. Повторяем эту процедуру для остальных строк, пока есть неотмеченные нули. Если назначение является полным (число нулей со знаком «+» равно $\boldsymbol{n}$), то получено оптимальное решение, в противном случае переходим к п. 3. В результате получим матрицу:

i \ j	1	2	3	4
1	0+	2	2	2
2	0–	0+	2	0–
3	2	3	0+	3
4	6	2	0–	2

Поскольку число нулей со знаком «+» в этой матрице меньше 4, то переходим к следующему пункту алгоритма.

3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули. Для этого необходимо отметить знаком "+":

а) все строки, в которых нет отмеченного знаком "+" нуля;

б) все столбцы, содержащие нуль со знаком "–", хотя бы в одной из отмеченных знаком "+" строк;

в) все строки, содержащие отмеченные знаком "+" нули, хотя бы в одном из отмеченных знаком "+" столбцов.

г) действия б) и в) повторять поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

Минимальный набор строк и столбцов, содержащих все нули, образуют все непомеченные знаком "+" строки и помеченные знаком "+" столбцы. Все входящие в этот набор строки и столбцы необходимо вычеркнуть. В рассматриваемом примере знаком «+» необходимо пометить 3-ю и 4-ю строки, а также 3-й столбец. Соответственно, необходимо вычеркнуть 1-ю, 2-ю строки и 3-й столбец. В итоге получим следующую матрицу:

i \ j	1	2	3+	4
1	0+	2	2	2
2	0–	0+	2	0–
+3	2	3	0+	3
+4	6	2	0–	2

4. Выбрать среди оставшихся элементов матрицы минимальный элемент, затем вычесть его из каждого элемента невычеркнутых

столбцов и прибавить его к каждому элементу вычеркнутых строк. Выполняя указанные действия, получим следующую матрицу:

i \ j	1	2	3	4
1	0	2	4	2
2	0	0	4	0
3	0	1	0	1
4	4	0	0	0

Переходим к п.2 алгоритма, выполняя действия которого получим следующую матрицу:

i \ j	1	2	3	4
1	**0**+	2	4	2
2	0–	0–	4	**0**+
3	0–	1	**0**+	1
4	4	**0**+	0–	0–

Получено оптимальное решение исходной задачи о назначении: $\{\boldsymbol{x_{11}, x_{24}, x_{33}, x_{42}}\}$, целевая функция $\boldsymbol{Y_{min}=17}$ единиц.

В заключение отметим следующее. Оптимальное назначение может быть не единственным. Кроме того, если целевую функцию необходимо максимизировать, то перед применением венгерского метода целесообразно преобразовать исходную матрицу о назначении: инвертировать знаки всех элементов матрицы или найти максимальный элемент матрицы и вычесть из него все остальные. В случае $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$ для решения задачи о назначении требуется дополнительная информация.

Если исполнители характеризуются множеством критериев, а каждая работа – перечнем требований к исполнителю, то при совпадении множества критериев и требований получается ***многокритериальная задача о назначениях***, методами решения которой являются метод мягких притязаний, метод согласования интересов агентов путем переговоров, аукционы и др. Многокритериальные задачи принятия решений являются предметом изучения в следующем модуле 4.

Практикум

Практикум по модулю 3 включает следующие темы: «Решение статистических игр» и «Принятие решений для задачи о назначении».

Тема: «Решение статистических игр»

Целью практикума является приобретение навыков решения статистических игр ЛПР с «природой» в условиях неопределенности, используя различные критерии принятия решения (лекции 11, 12).

Машину (станок, технологическую установку, конвейер и т.п.) требуется подвергнуть проверке с приостановкой ее эксплуатации и выпуска продукции. Вовремя не обнаруженная неисправность может привести к капитальной поломке машины.

У ЛПР имеется три варианта решения:

$\boldsymbol{E_1}$ – полная проверка; $\boldsymbol{E_2}$ – минимальная проверка; $\boldsymbol{E_3}$ – отказ от проверки.

Машина может находиться в следующих состояниях:

$\boldsymbol{F_1}$ – исправна; $\boldsymbol{F_2}$ – незначительная неисправность; $\boldsymbol{F_3}$ – серьезная неисправность.

Необходимо найти оптимальное решение ЛПР по ***MM***-, ***S***-, ***HW***-, ***P***-, ***BL***-, ***HL***-, ***G***-критериям.

Предположим, что экспертно удалось оценить возможные результаты и представить их в виде матрицы выигрыша ЛПР (результаты включают затраты на проверку машины, ремонт, недополученную продукцию и т.п.).

Эта матрица выигрыша ЛПР и результаты поиска оптимального решения по ***MM***-критерию представлены в виде следующей таблицы:

	F_1	F_2	F_3	$Z_{MM} = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij}$
E_1	–20	–22	–25	***–25***
E_2	–14	–23	–31	–31
E_3	0	–24	–40	–40

Из таблицы видно, что для получения оптимального решения ЛПР по критерию ***ММ*** исходная матрица выигрышей ***E*** дополняется столбцом, состоящим из минимальных элементов каждой строки, далее среди них выбирается максимальный элемент. Соответствующее решение является оптимальным по ***ММ***-критерию. В данном случае это решение $\mathbf{E_1}$. Оно полностью исключает риск.

Найдем оптимальное решение по ***S***-критерию Сэвиджа. Он так же, как ***ММ***-критерий, используется в условиях полной неопределенности. ***S***-критерий отражает позицию относительного пессимизма, поскольку рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется при наихудшем состоянии природы. Для оценки решения по ***S***-критерию вначале вычислим величину потерь, т.е. от исходной матрицы $\boldsymbol{E=(e_{ij})}$ переходим к матрице недополученного выигрыша $\boldsymbol{R=(r_{ij})}$, а затем используем минимаксную функцию и правило выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$Z_S = \min\limits_i \max\limits_j (\max\limits_i e_{ij} - e_{ij})$
$\mathbf{E_1}$	–20	–22	–25	20	0	0	20
$\mathbf{E_2}$	–14	–23	–31	14	1	6	**14**
$\mathbf{E_3}$	0	–24	–40	0	2	15	15

Оптимальным по ***S***-критерию является решение $\mathbf{E_2}$.

Найдем оптимальное решение по ***HW***-критерию Гурвица. Это компромиссный критерий пессимизма-оптимизма. Для его применения необходимо задать значение λ – весовой множитель Гурвица. Пусть $\lambda = 0{,}5$. Для оценки решения по ***HW***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	$\mathbf{F_1}$	$\mathbf{F_2}$	$\mathbf{F_3}$	$\lambda \min\limits_j e_{ij}$	$(1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}$	$\max\limits_i[\lambda \min\limits_j e_{ij} + (1-\lambda)\max\limits_j e_{ij}]$

E_1	–20	-22	-25	–12,5	–10	–22,5
E_2	–14	-23	-31	–15,5	–7	–22,5
E_3	0	-24	-40	–20	0	**–20**

Оптимальным по ***HW***-критерию является решение **E_3**. Однако при $\lambda > 0{,}57$ оптимальным по Гурвицу становится решение ***E_2***.

Найдем оптимальное решение по ***P***-критерию произведений. Он применим только для матриц выигрыша с *положительными* значениями элементов. Поскольку в исходной таблице элементы матрицы выигрыша являются неположительными, то для применения P-критерия необходимо вначале прибавить ко всем элементам матрицы некоторое достаточно большое положительное число c. Рассмотрим два варианта: $c = 41$ и $c = 200$. Для оценки решения по ***P***-критерию необходимо воспользоваться правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F_1	**F_2**	**F_3**	**F_1**	**F_2**	**F_3**	$Z_{P(c=41)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$	$Z_{P(c=200)} = \max \prod_{j=1}^{n} e_{ij}$
E_1	–20	–22	-25	21	16	16	***6 384***	5 607 000
E_2	–14	–23	-31	27	18	10	4 860	5 563 818
E_3	0	–24	-40	41	17	1	697	**5 632 000**

Из таблицы ***P***-критерия следует, что принимаемое решение зависит от величины константы (c), которая прибавляется ко всем элементам исходной матрицы с целью выполнения условия ***$e_{ij}>0$***. При $c = 41$ оптимальным будет решение ***E_1*** , при $c = 200$ – ***E_3***.

Найдем оптимальное решение по ***BL***-критерию Байеса–Лапласа, который используют в условиях *частичной* неопределенности и котрый основан на поиске решения, дающего максимальный средний выигрыш при априорно известных вероятностях состояний природы ***q_j***. Пусть состояния природы ***F_1***, ***F_2***, ***F_3*** равновероятны: ***q_1***=***q_2***=***q_3***=1/3. Для оценки решения по ***BL***-критерию воспользуемся правилом выбора решения по данному критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F_1	F_2	F_3	$Z_{BL} = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, q1 = q2 = q3 = 1/3$
E_1	–20	–22	–25	–22,33
E_2	–14	–23	–31	–33,67
E_3	0	–24	–40	***–21,33***

Согласно ***BL***-критерию оптимальным будет решение E_3 – отказ от проверки.

Найдем оптимальное решение по ***HL***-критерию Ходжа–Лемана, который используют в условиях частичной неопределенности. Он опирается одновременно на критерии ***BL*** и ***MM*** путем введения некоторого параметра $0 \le \nu \le 1$, выражающего степень доверия к используемому распределению вероятностей q_j. Если это доверие велико, то акцент делается на ***BL***-критерий, иначе – на ***MM***-критерий. Пусть $\nu = 0{,}5$, а состояния природы F_1, F_2, F_3 равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Для оценки решения воспользуемся правилом выбора решения по ***HL***-критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F_1	F_2	F_3	$Z_{HL} = \max\limits_i \left(\nu \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min\limits_j e_{ij} \right); \nu = 0{,}5; qi = 1/3$
E_1	-20	-22	-25	***–23,67***
E_2	-14	-23	-31	–26,84
E_3	0	-24	-40	–30,76

Согласно ***HL***-критерию оптимальным будет решение E_1 – полная проверка машины. При степени доверия $\nu > 0{,}94$ оптимальным будет другое решение.

Найдем оптимальное решение по ***G***-критерию Гермейера, который также рекомендуется использовать в условиях частичной неопределенности при оценке потерь ЛПР (элементы матрицы выигрышей $e_{ij} < 0$). Критерий ориентирован на поиск решений, которые не считаются заведомо худшими, чем другие. Пусть состояния природы F_1, F_2, F_3 равновероятны: $q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$. Оценим решения по ***G***-критерию. Результаты сведем в таблицу следующего вида:

	F₁	**F₂**	**F₃**	$Z_G = \max\limits_i \min\limits_j e_{ij} q_j \quad , q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$
E_1	–20	–22	–25	***–8,33***
E_2	–14	–23	–31	–10,33
E_3	0	–24	–40	–13,44

Согласно ***G***-критерию оптимальным будет решение $\mathbf{E_1}$ – полная проверка машины.

Анализ решений, полученных по всем критериям, показывает, что критерии не дают единогласного решения:

- решение E_2 не выгодно с различных точек зрения, его рекомендуют только ***S-*** и ***HW***-критерии (при $\lambda > 0{,}57$);
- решение E_1 рекомендуют ***MM-***, ***P-***, ***HL-*** и ***G***-критерии;
- решение E_3 рекомендуют ***HW-***, ***P-***, ***BL-*** и ***HL***-критерии.

Если число реализаций решения невелико, то более надежным будет решение E_1.

Тема: «Принятие решений в задаче о назначениях»

Целью практикума является приобретение навыков постановки и решения задачи о назначении, используя различные критерии принятия решения (лекции 14, 15).

Компания имеет 8 сбытовых баз (Б1, Б2,…, Б8) и 8 заказов, которые необходимо доставить потребителям (П1, П2,…, П8). Складские помещения каждой из баз достаточны для размещения любого из этих заказов. Известна стоимость доставки заказов с каждой базы:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	68	72	75	83	84	86	92	91
Б2	56	60	58	63	64	61	55	59
Б3	38	40	35	45	38	38	43	39
Б4	47	42	40	45	48	43	41	46
Б5	84	79	88	90	77	79	78	80
Б6	22	33	45	47	30	40	48	47
Б7	44	52	63	49	16	55	59	63
Б8	77	78	89	84	75	74	85	90

Необходимо найти такое назначение, распределив заказы по базам, чтобы суммарная стоимость выполнения всех заказов была минимальной, при условии, что одна база выполняет один заказ, а один заказ выполняется одной базой.

Применим венгерский метод для решения поставленной задачи.

Если в исходной задаче о назначении целевую функцию необходимо максимизировать, то для того чтобы воспользоваться венгерским методом, целесообразно преобразовать исходную матрицу о назначении. Например, найти максимальный элемент матрицы и вычесть из него все остальные элементы матрицы. В данной задаче целевую функцию необходимо минимизировать, поэтому перейдем к непосредственному выполнению итераций венгерского метода.

1. Получим нули в каждой строке и столбце исходной матрицы путем вычитания минимальных элементов. Вначале определим минимальные элементы в каждой строке матрицы и разность между текущим элементом строки и ее минимальным элементом. Затем определим минимальные элементы в каждом столбце полученной матрицы и разность между текущим элементом столбца и ее минимальным элементом. Получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	0	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	0	1
Б3	3	3	0	5	3	3	8	1
Б4	7	0	0	0	8	3	1	3
Б5	7	0	11	8	0	2	1	0
Б6	0	9	23	20	8	18	26	22
Б7	28	34	47	28	0	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	0	11	13

2. Приступаем к поиску оптимального решения. Для этого выберем в полученной матрице строку с наименьшим количеством нулей. Пометим знаком «+» один из нулей этой строки, а знаком «–» отметим все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль. Повторяем эту процедуру для остальных строк, пока есть неотмеченные нули. В результате получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	**+0**	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	3	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	7	**+0**	–0	–0	8	3	1	3
Б5	7	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
Б6	–0	9	23	20	8	18	26	22
Б7	28	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	**+0**	11	13

Подсчитываем в полученной матрице число нулей со знаком «+». Оно равно 7, т.е. назначение не является полным (число нулей со знаком «+» не равно 8), поэтому переходим к п. 3 венгерского алгоритма.

3. Определим минимальный набор строк и столбцов, содержащих все нули. Для этого необходимо отметить знаком "+":

а) все строки, в которых нет ни одного отмеченного знаком "+" нуля;

б) все столбцы, содержащие нуль со знаком "–", хотя бы в одной из отмеченных знаком "+" строк;

в) все строки, содержащие отмеченные знаком "+" нули, хотя бы в одном из отмеченных знаком "+" столбцов.

г) действия б) и в) повторять поочередно до тех пор, пока есть что отмечать.

В итоге получим следующую матрицу:

Б/П	**+П1**	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
+Б1	**+0**	2	7	10	16	18	24	20
Б2	1	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	3	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	7	**+0**	–0	–0	8	3	1	3
Б5	7	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
+Б6	–0	9	23	20	8	18	26	22
+Б7	28	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	3	2	15	5	1	**+0**	11	13

Минимальный набор строк и столбцов, содержащих все нули, образуют все непомеченные знаком "+" строки и помеченные знаком "+" столбцы. Все входящие в этот набор строки и столбцы, необходимо мысленно вычеркнуть. В задаче знаком «+» помечены строки Б1 и Б6, а также столбец П1. Соответственно, необходимо мысленно вычеркнуть 2–5-ю и 7–8-ю строки, а также 1-й столбец (выделены цветом).

4. Выбрать среди оставшихся элементов матрицы минимальный элемент, затем вычесть его из каждого элемента невычеркнутых столбцов и прибавить его к каждому элементу вычеркнутых строк. Выполняя указанные действия, получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	0	0	5	8	14	16	22	18
Б2	3	3	3	3	9	6	0	1
Б3	5	3	0	5	3	3	8	1
Б4	9	0	0	0	8	3	1	3
Б5	9	0	11	8	0	2	1	0
Б6	0	7	21	18	6	16	24	20
Б7	30	34	47	28	0	39	43	44
Б8	5	2	15	5	1	0	11	13

5. Вновь приступаем к поиску оптимального решения. Для этого выберем в полученной матрице строку с наименьшим количеством нулей. Отметим знаком «+» один из нулей этой строки, а все остальные нули этой строки и того столбца, в котором находится этот нуль, отметим знаком «–». Повторяем эту процедуру для остальных строк, пока есть неотмеченные нули. В результате получим следующую матрицу:

Б/П	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7	П8
Б1	–0	**+0**	5	8	14	16	22	18
Б2	3	3	3	3	9	6	**+0**	1
Б3	5	3	**+0**	5	3	3	8	1
Б4	9	–0	–0	**+0**	8	3	1	3
Б5	9	–0	11	8	–0	2	1	**+0**
Б6	**+0**	7	21	18	6	16	24	20
Б7	30	34	47	28	**+0**	39	43	44
Б8	5	2	15	5	1	**+0**	11	13

Подсчитываем в полученной матрице число нулей со знаком «+». Оно равно 8, т.е. назначение является полным. Получено оптимальное решение исходной задачи о назначении: {$\boldsymbol{x_{12}}$, $\boldsymbol{x_{27}}$, $\boldsymbol{x_{33}}$, $\boldsymbol{x_{44}}$,

$x_{58}, x_{61}, x_{75}, x_{86}\}$, целевая функция $Y_{min}=72 + 55 + 35 + 45 + 80 + 22 + 16 + 74 = 399$ единиц стоимости.

Заключение по модулю 3

Рациональный выбор ЛПР во многом определяется поставленной целью, информированностью и видом взаимодействия с другими ЛПР и окружающей средой. Видами взаимодействия являются противодействие, нейтралитет, содействие.

Задачи принятия решений в условиях неопределённости могут быть описаны матричными играми особого типа, где ЛПР взаимодействует с окружающей средой (природой), которая является нейтральной и объективно не заинтересована в его проигрыше. Как выбрать наиболее выгодный вариант поведения, если ЛПР имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени? Для этого необходимо ввести оценочную функцию и критерий выбора. При этом каждой стратегии ЛПР приписывается некоторый результат, характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент, который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

Критерии принятия статистических решений различны. Многое зависит от того, насколько полной и достоверной информацией о вероятностях состояний природы обладает ЛПР, от числа реализаций решений, от степени риска. При отсутствии информации о состоянии природы критерий принятия решений характеризует индивидуальность ЛПР – от крайнего пессимизма (***MM***-критерий) до крайнего оптимизма (***HW***-критерий). При статистически известной вероятности состояния природы в качестве критерия могут использоваться критерии Байеса–Лапласа, Ходжа–Лемана, Гермейера, произведений и др. Все они имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Рациональный выбор определяется через аксиомы упорядочения, транзитивности и неразрывности предпочтений, замещаемости, монотонности и декомпозиции. На основе этих аксиом доказана теорема о рациональном выборе, согласно которой, осуществляя рациональный выбор, ЛПР максимизирует свою функцию полезности.

Теорема Байеса применяется для определения цены эксперимента с целью уточнения состояния природы, на ее основе построены многие современные фильтры, помогающие бороться со спамом. Классическим примером применения теоремы Байеса является задача о вазах, в которой выбор оптимального решения осуществляется с помощью дерева решений, представляющего все возможные варианты действий ЛПР.

Психологи и экономисты обнаружили ряд парадоксов, демонстрирующих, что поведение людей отличается от рационального. Были найдены эвристические приемы, используемые ЛПР в процессе принятия решений. Нерациональность человека является общепризнанным фактом, который должен учитываться при анализе решений. В частности, теория проспектов была построена с целью разрешения противоречий между поведением ЛПР и аксиомами рациональности. Это позволило устранить ряд известных парадоксов.

Рациональный выбор ЛПР в условиях содействия определяется интересами других ЛПР. Эта задача аналогична задаче распределения ресурсов. Поскольку отдельный ЛПР в текущий момент может потреблять только один ресурс, то задача распределения ресурсов сводится к задаче о назначениях, для решения которой имеются известные алгоритмы, такие, как венгерский метод.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое статистическая игра? В каких ситуациях возникает необходимость решения статистических игр?

2. Как называется игрок в статистической игре? С чем взаимодействует игрок в статистической игре?

3. Является ли статистическая игра игрой с нулевой суммой?

4. Какие существуют виды неопределенности?

5. От чего зависит выбор критерия принятия решения в статистической игре?

6. По каким критериям принятия решения определяется наиболее выгодная стратегия ЛПР в ситуации, когда известны вероятности состояний окружающей среды?

7. Какие критерии принятия решения применяются в случае отсутствия информации о вероятностях состояний окружающей среды?

8. Какие критерии принятия решения используются в условиях значительного риска потери выигрыша?

9. Какие критерии принятия решения используются в условиях необходимости получения минимально гарантированного выигрыша?

10. Какие критерии принятия решения используются в условиях недостоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды?

11. Что такое критерий азартного игрока? В каких случаях он применяется?

12. Что такое коэффициент Гурвица? Как он определяется?

13. Что такое матрица рисков? Как она рассчитывается?

14. Каковы рекомендации по применению ***MM***-, ***S***-, ***HW***-, ***P***-критериев?

15. Каковы рекомендации по применению ***BL***-, ***HL***-, ***G***-критериев?

16. Задайте матрицу выигрышей в статистической игре размером 4×2. Постройте прямоугольное поле выбора решений и отметьте на нем точки, представляющие возможные решения. Сравните решения.

17. Как классифицируются статистические критерии по видам функций предпочтения?

18. Что собой представляет и как обозначается лотерея с двумя возможными исходами?

19. Сформулируйте в математической форме 6 аксиом рационального выбора ЛПР в условиях неопределенности.

20. Сформулируйте теорему о рациональном выборе.

21. В чем заключаются парадоксы выбора решений ЛПР, автором которых является М.Алле?

22. Представьте графическую интерпретацию 8 типовых функций предпочтения ЛПР.

23. В чем состоит отличие теории проспектов от теории полезности?

24. Когда проведение эксперимента в статистических играх считается целесообразным?

25. Как формулируется теорема Байеса?

26. Какая формула применяется для практических расчетов, если проводится несколько экспериментов $E_1, E_2, \dots, E_n$, на основе которых необходимо уточнять различные состояния природы $F_1, F_2, \dots, F_m$?

27. Каков алгоритм оптимального выбора по дереву решений?

28. В чем заключается парадокс о двух конвертах?

29. Как построить байесовский антиспам-фильтр ?

30. Опишите модель «агенты – среда» и сравните ее с моделью «ЛПР – природа».

31. Назовите основные характеристики среды в модели «агенты – среда».

32. Перечислите основные характеристики, типы и функции агентов в модели «агенты – среда».

33. Чем отличаются реактивный и когнитивный агенты?

34. Какова базовая схема возможных вариантов разрешения конфликтов между агентами?

35. Опишите типовую задачу распределения ресурсов на взвешенном двудольном графе при поиске наилучшего сочетания пар «исполнитель–работа».

36. Опишите алгоритм Крускала для задачи распределения между агентами ресурсов.

37. Что представляет собой нечеткое правило? Каковы формы представления нечетких правил?

38. Что представляют собой прямая и обратная задачи нечеткого выбора?

39. Опишите словесно и математически постановку задачи о назначении.

40. Как формулируется принцип оптимальности в венгерском методе решения задачи о назначении?

41. Перечислите основные шаги в венгерском методе решения задачи о назначении.

Исследовательские задачи

1. Планируется выпуск новой продукции, для чего необходимо закупить станки. Система оптовой торговли может поставить не более 50 станков; комплект поставки – 10 станков. Минимальный объем поставок – 20 станков. Соответственно, вектор решений об объеме поставок E = (20,30,40,50).

Ежегодный доход от продукции, снимаемой с одного станка, составляет 21,9 тыс. руб. Оптовая цена одного станка 4,775 тыс. руб., эксплуатационные расходы – 3,6 тыс. руб., затраты на подготовку производства – 25,5 тыс. руб., причём они не зависят от числа станков и объема выпуска. Пусть спрос пропорционален количеству продукции, снимаемой с $\boldsymbol{n}$ работающих станков, и для простоты ограничимся вектором состояний спроса F = (0, 10, 20, 30, 40, 50).

Если решающее правило сформулировать как «доход – издержки», то можно рассчитать элементы матрицы выигрыша по формуле

$$\boldsymbol{e_{ij}} = (21{,}9 - 3{,}6) * \min(\boldsymbol{E_i}, \boldsymbol{F_j}) - 4{,}775\, \boldsymbol{E_i} - 25{,}5.$$

Исследовать и решить задачу, используя различные критерии при отсутствии информации о вероятности спроса (для критерия Гурвица выбрать несколько значений вероятности успеха), а также при наличии равномерного и неравномерного распределения вероятностей различных состояний.

2. У экспериментатора имеется 600 ваз типа I и 400 ваз типа II. Если перед испытуемым находится ваза типа I и он угадает это, то получит выигрыш 200 руб., если не угадает, то его проигрыш составит 100 руб. Если перед ним ваза типа II и он это угадает, то получит выигрыш 400 руб., если не угадает, то его проигрыш составит 400 руб. Испытуемый может сразу попробовать угадать тип вазы или же до своего ответа вытащить за 30 руб. один шар из вазы, положив затем его обратно (в вазах типа I содержатся по 7 красных и 3 черных шара, а в вазах типа II – по 4 красных и 6 черных шаров). Построить дерево решений и определить стратегию достижения наибольшего выигрыша.

3. Оцените «спамность» следующего письма: «Сударь! Ваш заказ по модернизации сайта выполнен! Можете протестировать». Слова «Ваш», «выполнен» и «можете» – общеупотребительные. Слово «сударь» 9 раз встречалось в нормальных письмах и только один раз – в спаме. Слово «протестировать» 7 раз встречалось в нормальных письмах и 3 раза – в спаме. Словосочетание «модернизация сайта» встречается в 9 спам-письмах и только в одном нормальном, а слово «заказ» – в 8 спам-письмах и двух нормальных.

4. Взаимодействие программных агентов в многоагентной системе представлено через взвешенный неориентированный граф. Требуется найти такое поддерево этого графа, которое бы соединяло все его вершины, и при этом обладало наименьшим суммарным весом из всех возможных. Для решения задачи используется алгоритм Крускала. Алгоритм помещает каждую вершину в своё дерево, а затем постепенно объединяет эти деревья, объединяя на каждой итерации два некоторых дерева некоторым ребром. Перед началом выполнения алгоритма все рёбра сортируются по неубыванию. Затем начинается процесс объединения: перебираются все рёбра от первого до последнего (в порядке сортировки), и если у текущего ребра его концы принадлежат разным поддеревьям, то эти поддеревья объединяются, а ребро добавляется к ответу. По окончании перебора рёбер все вершины окажутся принадлежащими одному поддереву, и ответ найден. Программная реализация алгоритма Крускала имеет вид

```
int m;
vector < pair < int, pair<int,int> > > g (m); // вес -
вершина 1 - вершина 2

int cost = 0;
vector < pair<int,int> > res;

sort (g.begin(), g.end());
vector<int> tree_id (n);
for (int i=0; i<n; ++i)
        tree_id[i] = i;
for (int i=0; i<m; ++i)
{
        int a = g[i].second.first,  b =
g[i].second.second,  l = g[i].first;
        if (tree_id[a] != tree_id[b])
        {
                cost += l;
                res.push_back (make_pair (a, b));
                int old_id = tree_id[b],  new_id =
tree_id[a];
                for (int j=0; j<n; ++j)
                        if (tree_id[j] == old_id)
                                tree_id[j] = new_id;
        }
}
```

Оцените вычислительную трудоемкость алгоритма как функцию от *n*, *m*. Используя иную структуру данных, попробуйте написать более быструю реализацию алгоритма с асимптотикой *O(m*logn)*.

5. Дано множество заболеваний ***X*** = {***x1***, ***x2***} = {грипп, атеросклероз} и множество симптомов ***Y*** = {***y1***, ***y2***, ***y3***} = {повышенная температура, высокое артериальное давление, повышенное содержание холестерина в крови}. В таблице представлены экспертные значения степени принадлежности, связывающие симптомы и заболевания:

	y1	***y2***	***y3***
x1	0,9	0,3	0,1
x2	0,2	0,8	0,9

Диагностировать болезнь, используя метод обратного нечеткого выбора решений.

6. В 10-балльной шкале заданы предпочтения кандидатов А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И при замещении вакансий V1 – V8 (10 – наибольшая предпочтительность, 1 – наименьшая предпочтительность). Заполнить вакансии, обеспечив максимум суммарной предпочтительности:

	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
А	10	8	7	6	5	4	3	3
Б	7	7	2	10	9	2	1	8
В	4	9	9	8	7	5	6	7
Г	7	1	6	5	4	2	8	3
Д	8	5	3	6	2	1	7	4
Е	3	9	9	10	4	2	1	9
Ж	10	5	7	6	4	3	2	1
И	7	5	6	6	1	1	8	8

Итоговый тест по модулю 3

1. В случае отсутствия информации о вероятностях состояний окружающей среды применяются следующие критерии принятия решения: а) ***BL,*** б) ***G,*** в) ***HL,*** г) ***HW,*** д) ***MM,*** е) ***P ,*** ж) ***S.***

2. В условиях значительного риска потери выигрыша применяются следующие критерии принятия решения: а) ***BL,*** б) ***G,*** в) ***HL,*** г) ***HW,*** д) ***MM,*** е) ***P ,*** ж) ***S.***

3. В условиях недостоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды применяются следующие критерии принятия решения: а) ***BL,*** б) ***G,*** в) ***HL,*** г) ***HW,*** д) ***MM,*** е) ***P ,*** ж) ***S.***

4. Соответствие между критериями принятия статистических решений: 1) Байеса–Лапласа, 2) Гермейера, 3) Гурвица 4) максимин и оценочной функцией критерия: а) $\max\limits_i \min\limits_j e_{ij} q_j \; \& \, e_{ij} < 0$,

б) $\max\limits_i \min\limits_j e_{ij}$, в) $\max\limits_i [\lambda \min\limits_j e_{ij} + (1-\lambda) \max\limits_j e_{ij}] \, \& \, 0 \le \lambda \le 1$,

г) $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} e_{ij} q_j$.

5. Соответствие между критериями принятия статистических решений: 1) Гермейера, 2) Гурвица, 3) произведений, 4) Ходжа–Лемана и оценочной функцией критерия:
а) $\max_i \min_j e_{ij} q_j \ \& \, e_{ij} < 0$,

б) $\max_i [\nu \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \cdot \min_j e_{ij} \ \& \, 0 \le \nu \le 1]$,

в) $\max_i [\lambda \min_j e_{ij} + (1-\lambda) \max_j e_{ij}] \, \& \, 0 \le \lambda \le 1$, г) $\max_i \prod_{j=1}^{n} e_{ij} \ \& \, e_{ij} > 0$.

6. К каким из статистических критериев принятия решений: а) BL, б) G, в) HL, г) HW, д) MM, е) P, ж) S подходят следующие рекомендации по применению: неизвестны вероятности состояний природы; с вероятностью появления отдельных состояний природы надо считаться; допускается некоторый риск; решение реализуется многократно.

7. К каким из статистических критериев принятия решений: а) BL, б) G, в) HL, г) HW, д) MM, е) P, ж) S подходят следующие рекомендации по применению: известны вероятности состояний природы; с вероятностью появления отдельных состояний природы необходимо считаться; допускается некоторый риск; решение может реализовываться один или много раз.

8. Соответствие между критериями принятия статистических решений: 1) BL, 2) G, 3) HL, 4) HW, 5) MM, 6) P и видом их функции предпочтения: а) прямоугольный конус, б) прямая, в) конусы с углом раствора от 90 до 180°, г) гипербола, д) конусы с углом раствора от 90 до 270°.

9. Известны: p(H) = 0,4 – априорная вероятность истинности гипотезы H, p(E|H) = 0,7 – вероятность факта E при условии, что H верна, p(E|¬H) = 0,2 – вероятность факта E, при условии, что H не верна. Вычислить по формуле Байеса апостериорную вероятность p(H|E) истинности гипотезы H при условии, что получен факт E.

10. $(A>B)\&(B>C)\rightarrow(A>C)$ – это аксиома: а) декомпозиции, б) замещаемости, в) монотонности, г) неразрывности предпочтений, д) транзитивности по предпочтению, е) упорядочения.

11. $(A \,\square\, B)\rightarrow[p,\ A;\ 1-p,\ C] \,\square\, [p,\ B;\ 1-p,\ C]$ – это аксиома: а) декомпозиции, б) замещаемости, в) монотонности, г) неразрывности предпочтений, д) транзитивности по предпочтению, е) упорядочения.

12. $(A>B)\mathrm{v}(B>A)\mathrm{v}(A \,\square\, B)$ – это аксиома: а) декомпозиции, б) замещаемости, в) монотонности, г) неразрывности предпочтений, д) транзитивности по предпочтению, е) упорядочения.

13. $(A>B>C)\rightarrow p[p,\ A;\ 1-p,\ C] \,\square\, B$ – это аксиома: а) декомпозиции, б) замещаемости, в) монотонности, г) неразрывности предпочтений, д) транзитивности по предпочтению, е) упорядочения.

14. $(A>B)\rightarrow(p\geq q)\equiv[p,\ A;\ 1-p,\ B]\geq [q,\ A;\ 1-p,\ B]$ – это аксиома: а) декомпозиции, б) замещаемости, в) монотонности, г) неразрывности предпочтений, д) транзитивности по предпочтению, е) упорядочения.

15. Теория нечеткой логики разработана: а) Аристотелем, б) Булем, в) Заде, г) Тьюрингом.

16. В нечеткой логике степень истинности конъюнкции нескольких высказываний определяется: а) наиболее правдоподобным, б) наименее правдоподобным, в) средним значением.

17. В нечеткой логике степень истинности дизъюнкции нескольких высказываний определяется: а) наиболее правдоподобным, б) наименее правдоподобным, в) средним значением.

18. Тип задачи нечеткого выбора решения по следующей цепочке рассуждений: «Поскольку это животное ест бананы, висит обычно на хвосте и громко кричит, то, возможно, это обезьяна»: а) прямая цепочка, б) обратная цепочка, в) силлогизм.

19. Тип задачи нечеткого выбора решения по следующей цепочке рассуждений: «Если это крокодил, то у него должен быть хвост и сам он должен быть зеленый»: а) прямая цепочка, б) обратная цепочка, в) силлогизм.

20. Транспортная задача является частным случаем задачи о назначении: а) верно, б) неверно, в) иногда верно, а иногда неверно.

21. Задачу о назначении можно решить методом, используемым для решения транспортной задачи: а) верно, б) неверно, в) иногда верно, а иногда неверно.

22. Если все элементы исходной таблицы назначений уменьшить на одно и то же число, то оптимальное значение целевой функции уменьшится на ту же величину: а) верно, б) неверно, в) иногда верно, а иногда неверно.

23. Задача о назначении может не иметь оптимального решения: а) верно, б) неверно, в) иногда верно, а иногда неверно.

Список литературы по модулю 3

Основная литература

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. – М.: Логос, 2002.

2. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора: Монография. – М.: Маршрут, 2004.

3. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.

4. Родзин С.И. Руководство для самостоятельной работы, контрольные вопросы, индивидуальные задания по курсу «Теория принятия решений». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.

Дополнительная литература

5. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Сборник задач и упражнений по теории игр: Учебное пособие. – М.: РХД, 2007.

6. Борисов А.Н. и др. Принятие решений на основе нечетких моделей. – Рига: Зинанте, 1990.

7. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990.

8. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Едиториал УРСС, 2007.

9.Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

10. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. – М.: Синтег, 1998.

Учебная литература на английском языке

11. Gibbons R. Game Theory for Applied Economists, Princeton University Press, 1992. *Учебник вводного уровня по теории игр с множеством приложений*.

12. Kreps D. Game Theory and Economic Modelling Clarendon Lectures on Economics. – Oxford University Press, 1990. *Без лишней математизации обсуждаются основные вопросы теории игры, ее приложения, а также перспективы развития*.

13. Fudenberg D. Game Theory. – MIT Press, 1991. *Отличный учебник продвинутого уровня по теории игр*.

14. Milgrom P., Roberts J. Economics, Organization and Management. *Очень хороший учебник, излагающий теорию игр, современную теорию информации и принятия решений при управлении организациями для студентов, не владеющих математическим аппаратом*.

Модуль 4. Многокритериальные задачи. Марковские модели. Групповой выбор

Цель и задачи изучения модуля

Цель модуля 4 – дать представление о подходах к решению задач многокритериальной оптимизации, познакомить с фундаментальными понятиями Парето-оптимальных и марковских моделей принятия решений, а также помочь овладеть разнообразными методами принятия групповых решений.

В результате освоения модуля 4 студент должен быть готов продемонстрировать следующие ***компетенции*** и ***уровень подготовки***:

ВНИМАНИЕ!

- знание постановок многокритериальных задач, парадоксов и аксиом систем голосования (общетеоретический уровень);
- умение находить Парето-оптимальные решения и применять марковские модели принятия решений (уровень пользователя);
- навыки принятия стратегических решений методом анализа иерархий (уровень пользователя).

Конспект лекций

Лекция 16. Многокритериальные задачи

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР

ЛПР является проектировщик некоторой сложной инженерной системы. ЛПР имеет различные варианты системы, из которых он должен выбрать один, желательно наилучший. Такой выбор сложен – каждый вариант имеет оценки по разнообразным критериям: стоимость, сложность проектирования и производства, безопасность и т.д. Найти компромисс между противоречивыми оценками подчас достаточно трудно, однако необходимо: нет идеального варианта, превосходящего остальные по всем критериям.

Пример

ЛПР является ректор вуза, распределяющий средства на научное оборудование для нескольких научных коллективов, проводящих исследования, требующие современной аппаратуры. Средства для приобретения оборудования ограничены, и их нельзя разделить поровну, так как оборудование часто неделимо и стоит дорого. Приобретение оборудования может повлиять на успех важнейших исследований. При этом научные коллективы характеризуются многими разнородными характеристиками: средним возрастом, уровнем квалификации сотрудников, актуальностью темы исследований и т.д. Задача ректора в таких условиях выглядит непростой.

Пример

ЛПР – это покупатель, которому нужно совершить достаточно дорогостоящие покупки при естественных ограничениях в средствах. Есть несколько вариантов выбора, отличающихся такими характеристиками, как стоимость, тип, соответствие моде, удобство пользования и т.д. Получается, что потребительский выбор при наличии нескольких вариантов покупки также достаточно сложен.

Что же общего в рассмотренных примерах принятия решений проектировщиком, ректором и покупателем? – Общим является характер решаемой задачи. Нужно принять решение, последствия которого станут до конца ясными лишь в будущем. Эти последствия не могут быть объективно оценены при помощи математических расчетов. В каждой проблемной ситуации варианты решений имеют оценки по многим критериям. Эти оценки могут быть противоречивыми, т.е. одни варианты лучше по одним критериям, а другие – по другим. Поэтому необходимы методы, позволяющие определить наилучший компромисс между критериями. По образному выражению Х. Маккея, «критерии, как и мелочи, не играют решающей роли, они решают все». Что же такое критерий?

ВНИМАНИЕ!

Критерий (от греч. κριτηριου – мерило) – это количественная оценка цели, величина, на основании которой сравниваются и выбираются лучшие решения. Цель обычно измеряется в номинальной шкале, а ее критерий – в более сильной шкале, что дает возможность сопоставлять альтернативные решения.

ПРИМЕР

Пусть студент поставил перед собой цель – *получить наивысший рейтинг по ТПР*. Этой цели сопоставим суммарный рейтинг R, который измеряется в шкале отношений целыми числами от 0 до 100. Среди студентов A и B побеждает A, если R(A) > R(B).

Студент использует единственный критерий, это ***однокритериальная задача.***

ПРИМЕР

Пусть лектор поставил цель – *повысить качество преподавания курса ТПР*. Критерию достижения этой цели можно сопоставить экспертную оценку лекций по ТПР известными специалистами в этой области, коллегами-преподавателями. Другой критерий – число студентов (% от потока), посещающих лекции по ТПР. Оба критерия имеют свою область применения.

Если ЛПР использует несколько критериев принятия решений, то это ***многокритериальная задача***.

В отличие от ранее рассмотренных задач скалярной оптимизации в задачах многокритериального выбора всегда существует неопределенность, связанная с сопоставлением оценок по различным критериям. Эта неопределенность является принципиальной и не может быть исключена на основе использования моделей и объективных расчетов. ЛПР являются единственным источником информации, позволяющим оценить варианты решений и выбрать из них наилучший.

На первый взгляд кажется, что в способе решения проблемы произошли сравнительно небольшие изменения – для устранения неопределенности, возникающей из-за наличия многих критериев, используются предпочтения ЛПР. Однако это не так. Информация ЛПР, основанная на его опыте или интуиции, является субъективной и зависит от личности ЛПР. Субъективность не означает, что ЛПР «делает, что хочет». В деловых решениях человек обязан быть рациональным, а субъективная модель – устойчивой. В такой субъективности нет ничего плохого. Мы постоянно принимаем решения, значительная часть из них не может быть названа научно обоснованной, если понимать под словом «научно» точные аналитические критерии. В типичной ситуации с недостаточно определенными последствиями принимаемых решений, с динамически меняющейся обстановкой только умение людей строить гипотезы и дополнять ими отсутствующую информацию может спасти положение. Опытные руководители, принимающие неплохие решения, хорошо осознают, сколько личного и субъективного они вносят в эти решения. По-иному многие решения просто нельзя принять.

Итак, в многокритериальных задачах чаще всего «объективное» невозможно, а качество «субъективного» решения сильно зависит не только от личности ЛПР, но и от методов и процедур разработки и обоснования решений. Именно этими методами и процедурами занимается теория многокритериальных решений.

В теории многокритериальных решений приняты следующие требования к критериям.

- **Полнота**. Совокупность критериев $K_1, K_2, \ldots, K_m$ обеспечивает объективность оценки множества решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, в том числе отражение личных интересов ЛПР.

- **Независимость**. Критерии одного уровня ортогональны (это проверяется путем расчета коэффициента попарной корреляции).

- **Непротиворечивость**. Критерии противоречивы, если они близки по смыслу, но их направления оптимизации противоположны (максимизировать площадь комнат и минимизировать общую площадь).

- **Неизбыточность**. Критерий избыточен, если он не обеспечивает различение решений.

Многокритериальное оценивание решений выполняется в условиях *определенности*, если оцениваются все варианты на каждом уровне дерева решений (поиск в ширину). Многокритериальное оценивание решений сопряжено с *неопределенностью*, если варианты решений на следующем шаге зависят от результатов выбора на предыдущем шаге (поиск в глубину).

Поставим в соответствие критерию K_j ($j = 1,\ldots, n$) j-ю ось пространства E^n, а каждому i-му решению Y_i ($i = 1,\ldots, m$) – точку с координатами $<K_1(Y_i), K_2(Y_i),\ldots, K_n(Y_i)>$. Тогда ***пространством критериев*** называют пространство E^n, координаты точек которого рассматриваются как оценки альтернативных решений по соответствующим критериям.

Принятие решений удобно интерпретировать как *задачу поиска* в пространстве критериев. Если поиск является целенаправленным, а не случайным, то используется модель графа в виде И/ИЛИ-дерева. Задается множество начальных вершин графа, с которых поиск может начинаться, и множество конечных (целевых) вершин, при достижении которых поиск прекращается. И/ИЛИ-граф обладает следующими свойствами:

- при движении к некоторой вершине реализуется либо конъюнкция (И- вершина), либо дизъюнкция (ИЛИ-вершина);
- при активизации вершины активными становятся либо все выходящие из вершины дуги (И-вершина), либо только одна (ИЛИ-вершина).

Известны различные методы поиска по дереву решений. Они различаются в способе обхода путей на графе:

- поиск в глубину и в ширину, которые различаются порядком обхода вершин (рис. 49),
- прямой (от корня к висячей вершине) и обратный поиск,

• поиск без возврата и с возвратом,

• безусловный или условный поиск (очередной ход зависит от предыдущего),

• полный и сокращенный перебор ходов в дереве,

• поиск без прогнозной оценки (методом проб и ошибок) или поиск с прогнозной оценкой (метод ветвей и границ, симплекс-метод).

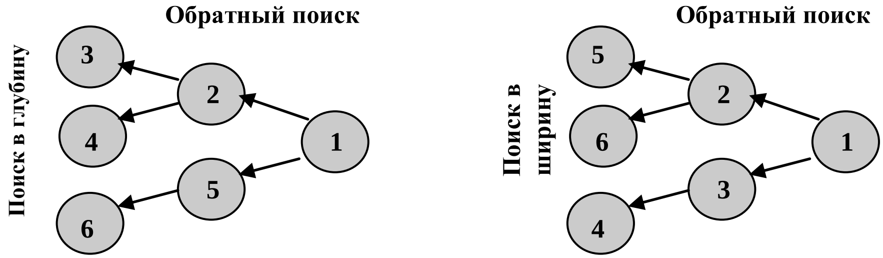


Рис. 49. Поиск по дереву решений в глубину и ширину

Для NP-задач дерево поиска может стать вычислительно необозримым, экспоненциально растущим при линейном увеличении размерности задачи (комбинаторный взрыв).

В зависимости от числа шагов и числа вариантов одного шага в ходе поиска решения по дереву принята следующая классификация задач:

Число шагов	**Число вариантов одного шага поиска**	**Тип задачи поиска**
1	1	*Задача о назначении*
1	Больше 1	*Одноходовая альтернативная задача*
Больше 1	Больше 1, известны целевые состояния	*Задачи классификации и распознавания*
Больше 1	Больше 1, неизвестны целевые состояния	*Задачи оптимизации, игровые задачи*
Больше 1	Больше 1, единственное целевое состояние	Например, игра «15». Если целевое состояние является единственным, то решается *задача верификации, изоморфизма* и т.п.

Если в процессе поиска решений нет альтернатив, то нет и выбора. Поэтому для постановки задачи принятия решений необходимо иметь хотя бы две альтернативы. Альтернативы могут быть зависимыми и независимыми. Если альтернативы заданы и надо найти лучшую из них, то это **задача выбора**. Однако существуют задачи, где часть альтернатив появляется в процессе принятия решений.

Пусть Y_i $(i = 1,\dots, m)$ – общее пространство альтернативных решений. Чтобы осуществить выбор единственного оптимального решения Y^*, используется последовательное сужение множества альтернатив. В частности, вначале исходное множество Y сужается до множества *допустимых* решений.

Внимание!	**Областью допустимых решений $\mathbf{Y_{доп}}$** называется множество решений, удовлетворяющих ресурсным ограничениям задачи и целевым критериям, для которых удалось дать количественную оценку.

Многокритериальность приводит к необходимости одновременного рассмотрения пространства допустимых решений $\mathbf{Y_{доп}}$ и критериев **K**. Причем множество решений отображается в множество критериев и наоборот:

$$\mathbf{f : Y \rightarrow K} \quad \text{и} \quad \mathbf{f^{-1} : K \rightarrow Y}.$$

Отметим, что обратное отображение не обязательно однозначно, так как разные решения могут иметь одинаковую критериальную оценку.

Внимание!	**Областью достижимости в пространстве критериев $\mathbf{K_{дос}}$** называется образ множества допустимых решений $\mathbf{Y_{доп}}$, задаваемый отображением $\mathbf{f : Y \rightarrow K}$.

Между областью допустимых решений и областью достижимости в пространстве критериев существует взаимосвязь, которую иллюстрирует рис. 50.

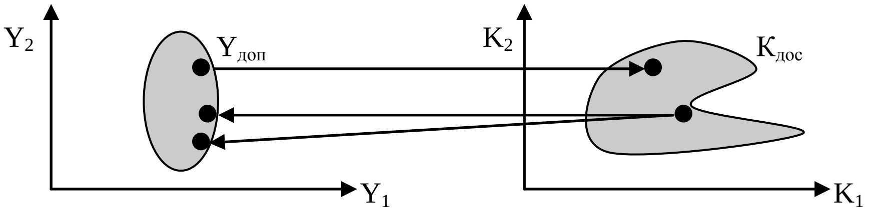


Рис. 50. Взаимосвязь между областью допустимых решений и областью достижимости в пространстве критериев

Рассмотрим эту взаимосвязь на следующем примере. Из множества переменных, описывающих экономическую систему государства, выберем два решения: Y_1 – *увеличение объема денежной массы*; Y_2 – *увеличение количества рабочих мест* ($Y_1, Y_2 \in [0,1]$). Предположим, что определенное число рабочих мест можно создать без увеличения денежной массы. После превышения некоторого порога увеличение занятости происходит пропорционально увеличению денежной массы. Введем два критерия: *уменьшение безработицы* (%) $K_1 = 0{,}1 {*} Y_1 + 0{,}9 {*} Y_2$ и *увеличение ВНП* (%) $K_2 = 0{,}5 {*} Y_1 + 0{,}5 {*} Y_2$. Построим два пространства $\mathbf{Y_{доп}}$ и $\mathbf{K_{дос}}$ (рис. 51).

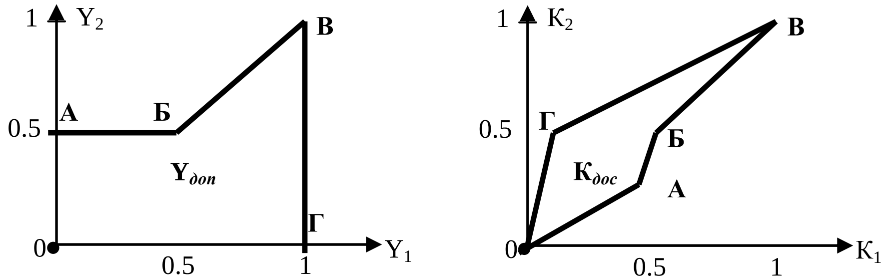


Рис. 51. Взаимосвязь между пространствами $\mathbf{Y_{доп}}$ и $\mathbf{K_{дос}}$

Чтобы осуществить выбор единственного оптимального решения Y^* из множества допустимых $\mathbf{Y_{доп}}$, Парето выдвинул следующее требование: они должны обладать не худшими показателями критериев по сравнению с другими допустимыми решениями.

Внимание!

Предпочтение одному решению перед другим отдается только в том случае, когда это решение по всем критериям не хуже другого и хотя бы по одному из критериев лучше.

При истинности этого условия первое решение считается ***доминирующим***, а второе – ***доминируемым.***

Множество $\mathbf{Y^P}$**,** состоящее из недоминируемых решений, называется множеством ***Парето-оптимальных решений***.

Лекция 17. Парето-оптимальные решения

Чтобы установить отношение доминирования между решениями в n-критериальном пространстве, необходимо каждому критерию **K** задать направление оптимизации. Каждому сочетанию направлений оптимизации соответствует своя область Парето. Оптимум по Парето считается «демократическим» по отношению к критериям, поскольку «права» любого из них не могут ущемляться за счет других критериев.

На языке исчисления предикатов *доминирование* решения Y_i над Y_j $(Y_i \geq Y_j)$ можно записать через представляющие их значения критериев. В частности, $K_i \geq K_j$, если для любой пары (k_{ir}, k_{jr}) справедливо следующее условие:

$$k_{ir} \geq k_{jr},\ k_{ir} \in K_i,\ k_{jr} \in K_j, \qquad (15)$$

где символ «$\geq$» интерпретируется как НЕ ХУЖЕ в качественной шкале измерений и как БОЛЬШЕ ИЛИ РАВНО в количественной шкале.

Аналогично записывается обратное условие доминирования $Y_i \leq Y_j$, т.е. $K_i \leq K_j$, если для любой пары (k_{ir}, k_{jr}) справедливо следующее условие:

$$k_{ir} \leq k_{jr},\ k_{ir} \in K_i,\ k_{jr} \in K_j\,. \qquad (16)$$

Если оба условия (15), (16) ложны, то решения Y_i и Y_j *несравнимы*. Чтобы получить Y^P, необходимо из $Y_{доп}$ исключить все доминируемые решения. Эта цель реализуется путем попарного сопоставления альтернативных решений через их сравнение в n-критериальном пространстве векторов K_i (i = 1,…, m). Таким образом, для того чтобы найти Парето-оптимальные решения, необходимо попарно сравнить все решения из $Y_{доп}$:

- если $Y_i \geq Y_j$ (выполняется условие (15)), то решение Y_j отсеивается и не входит в Y^P;
- если $Y_i \leq Y_j$ (выполняется условие (16)), то решение Y_i отсеивается и не входит в Y^P.

В результате отсеиваются доминируемые решения, а остаются несравнимые, которые нельзя улучшить по какому-нибудь критерию без ухудшения по другому критерию. Максимальная сложность сопоставления всех m решений равна m(m–1)/2. Кроме того, очевидно, что множество Y^P не может быть пустым.

Рассмотрим на примерах получение множества Парето Y^P как в дискретном, так и в непрерывном случае.

Известны результаты сдачи экзаменов по дисциплинам «Объектно-ориентированное программирование» (ООП), «Организация ЭВМ и систем» (ОЭВМ), «Теория принятия решений» (ТПР), «Метрология, стандартизация и сертификация» (МСС). Необходимо из шести студентов выбрать наиболее успевающих. Результаты экзаменов приведены в таблице:

ФИО	ООП	ОЭВМ	ТПР	МСС
Алимов	***4***	***5***	4	3
Бодров	3	3	***5***	4
Волков	***4***	4	3	3
Громов	3	4	3	***5***
Дёмкин	***4***	***5***	3	4
Ерёмин	3	3	***5***	***5***

Лучшие оценки по каждому предмету выделены ***шрифтом***. Естественным направлением оптимизации для выбора лучших студентов является максимизация полученных ими оценок. Поэтому для получения множества Парето используется предикат НЕ ХУЖЕ. Максимальное число операций попарного сравнения студенческих оценок равно 30, реальное – меньше, так как Волков отсеивается при сопоставлении с Алимовым, а Бодров – при сопоставлении с Ерёминым:

$$Y^P = \{\text{Алимов, Громов, Дёмкин, Ерёмин}\}.$$

Рассмотрим пример области Парето в континуальном множестве. Для этого изобразим на плоскости двухкритериальное пространство достижимости, которое ограничено частично выпуклой замкнутой кривой (рис. 52).

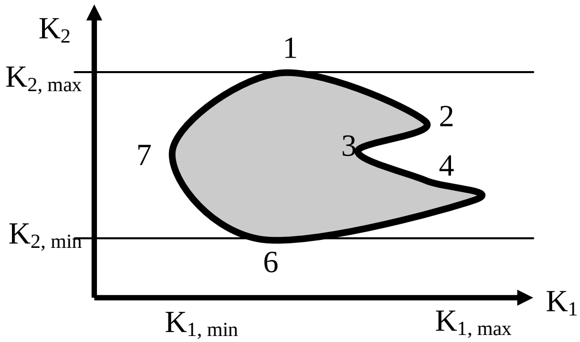


Рис. 52. Пример области Парето в континуальном множестве

Чтобы найти Y^P, необходимо задать для каждого критерия направление оптимизации. Здесь возможны 4 варианта:

1. $K_1 \to \max$, $K_2 \to \max$;
2. $K_1 \to \max$, $K_2 \to \min$;
3. $K_1 \to \min$, $K_2 \to \min$;
4. $K_1 \to \min$, $K_2 \to \max$.

Каждому варианту соответствует своя область Парето. Найдем Y^P для всех вариантов. Проведем касательные, параллельные осям координат, ко всем точкам перегиба: {1, 2, 3, 5, 6, 7}. Они с точкой 4 задают границы Y^P:

$$Y^{P1} = \{[1, 2], [4+\varepsilon, 5]\},\ \ Y^{P2} = [5, 6],\ \ Y^{P3} = [6, 7],\ \ Y^{P4} = [7, 1].$$

Доказано, что Y^P располагается на *границах*, а все области охватывают *выпуклые части кривой* (участок [2, 4] не входит в Y^P).

Если количество критериев ограничено двумя, то задача имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Например, пусть имеется 10 вариантов компьютеров (С1 – С10), среди которых для проектируемой вычислительной сети необходимо выбрать наилучший. Они оценивались экспертами по критериям *производительности* (П) и *надежности* (Н) по балльной шкале [0, 10]. Результаты экспертных оценок приведены в таблице:

Критерии	Оценки экспертов (балл) по критериям П и Н									
	С1	С2	С3	С4	С5	С6	С7	С8	С9	С10
Производительность (П)	6	4	10	3	10	0	2	4	6	7
Надежность (Н)	6	2	1	7	4	4	10	4	8	2

Представим множество оценок компьютеров в пространстве критериев (рис. 53).

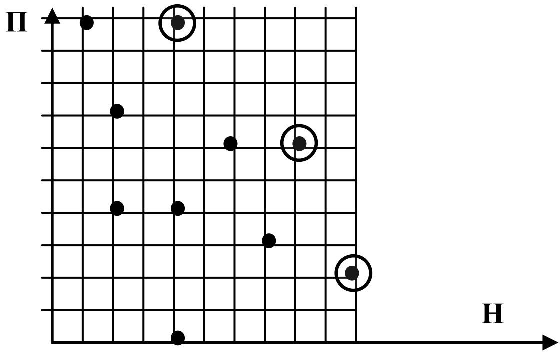


Рис. 53. Множество оценок компьютеров в пространстве критериев

Таким образом, Y^P={С5, С7, С9}.

Возможна также игровая трактовка многокритериальных задач. Пусть игроки производят выбор решения сразу в пространстве критериев, зная множество достижимости $K_{дос}$. Каждый i-й игрок распоряжается одним критерием, а его функция выигрыша, которую он стремится максимизировать, – тот же критерий, т.е. решение.

Например, участниками игры могут быть отделы фирмы, ответственные за ее материально-техническую, финансовую или социальную деятельность. Их взаимодействие можно моделировать как игру с непротивоположными интересами. Конфликт определяется наличием общего ограничения на выбор решения всеми игроками: увеличение значений одного критерия требует уменьшения значений других! Однако Парето-оптимальное решение должно устраивать все стороны. Находясь в паретовской точке, каждый участник знает, что он не может увеличить свой выигрыш, не ущемляя интересов других.

К сожалению, точек Парето, как правило, много, и они существенно отличаются величинами критериев для разных участников. Невозможно предложить универсальный механизм выбора единственного решения, устраивающего всех. Требуются *переговоры* между участниками.

Согласно теории игр можно попробовать найти седловые точки (равновесие по Нэшу). Ни в одной из них невыгодно менять решение при условии, что остальные игроки оставляют свои решения неизменными. Это означает, что по каждой координате (критерию) при фиксированных остальных координатах, в точке Нэша должен достигаться максимум критерия.

Чтобы найти точки равновесия Нэша, нужно найти максиминные смешанные стратегии каждого игрока. Затем нужно найти общую точку графиков этих смешанных стратегий, т.е. решить систему уравнений

$$\xi_1 = \varphi_1(\xi_2,\ldots,\xi_m),\ \ldots,\ \xi_m = \varphi_m(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1}).$$

Корни этой системы будут паретовскими точками Y^P, поскольку по определению в них достигается максимум каждой координаты.

Таким образом, паретовские точки являются обобщением точек Нэша для игр с непротивоположными интересами. Если игрок действует независимо, то все вычисления он делает сам. В итоге решение по Нэшу может быть неединственным. Опять потребуются переговоры сторон о выборе единственной точки и соблюдении достигнутого соглашения.

Вопрос	Каких решений меньше: по Парето или по Нэшу?

Согласно определению Парето-оптимальной точки любое ее смещение может привести в выходу за пределы пространства достижимости $K_{дос}$. Согласно определению точки равновесия по Нэшу любое ее смещение по координатным осям делает положение неравновесным. Следовательно, любое решение, оптимальное по Парето, будет равновесным по Нэшу. Таким образом, *точек Нэша не меньше, чем точек Парето*.

Смена принципа принятия решений на игровой не помогла в достижении возможности индивидуальных действий участников игры. Это косвенно свидетельствует о том, что идея Парето о поиске решений, неулучшаемых одновременно по всем заданным критериям, логически безупречна. Однако Парето-решений, как правило, много, и проблема выбора единственного решения остается.

Предложено большое число способов разрешения этой проблемы. Они базируются на наличии у ЛПР определенных *предпочтений*. Но обилие различных подходов свидетельствует об их аксиоматической уязвимости. Тем не менее, эти подходы широко применяются на практике. Рассмотрим их подробнее.

Метод суперкритерия. Суть метода заключается в том, что отдельные критерии K_j, j = 1,…, n каким-либо образом объединяются в один суперкритерий **К**, а затем находится максимум или минимум данного критерия. Суперкритерий – это результат чисто формального объединения частных критериев и оптимальное решение не всегда будет корректным. В зависимости от того, каким образом критерии объединяются в один, различают следующие виды суперкритериев:

- ***аддитивный*** критерий;
- ***мультипликативный*** критерий;
- ***максиминный*** (***минимаксный***) критерий.

В любом случае многокритериальная (векторная) задача принятия решений сводится к однокритериальной (скалярной) задаче. При этом векторная оценка решений в n-мерном пространстве заменяется скалярной оценкой.

Суперкритерию придается направление оптимизации (**К**→max или **К**→min). Если отдельные критерии разнонаправлены, то их надо сводить к единому направлению.

Целевая функция *F(X)* аддитивного суперкритерия **К** получается сложением нормированных значений частных критериев для вариантов альтернативных решений *X*:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \frac{F_i(X)}{F_i^0(X)} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot f_i(X) \to \max(\min),$$

где n – количество объединяемых частных критериев; C_i – весовой коэффициент i-го критерия; $F_i(X)$ – числовое значение i-го критерия; $F_i^0(X)$ – i-й нормирующий делитель; $f_i(X)$ – нормированное значение i-го критерия.

Что такое *нормирующий делитель*? Отдельные критерии имеют разную физическую природу и поэтому различную размерность. Просто суммировать их некорректно. В связи с этим назначают нормирующие делители:

• *директивно* заказчиком (в техническом задании и т.п.);

• *максимальные* (*минимальные*) значения критериев, достигаемые в области допустимых решений.

Размерности отдельных критериев и соответствующих нормирующих делителей одинаковы, поэтому в итоге аддитивный суперкритерий получается безразмерной величиной.

Например, определим оптимальный вариант компьютера с использованием аддитивного суперкритерия. Пусть варианты оцениваются по максимальной *производительности* и *надежности*:

Критерии ($\mathbf{F_i}$)	«Вес» критерия $\mathbf{C_i}$	Значения $\mathbf{F_i}$		
		Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Производительность (F_1)	0,6	1000	2000	**4000**
Надежность (F_2)	0,4	**1500**	1000	500

Тогда целевая функция аддитивного суперкритерия равна

$$F(X) = C_1 \cdot \frac{F_1(X)}{F_1^0(X)} + C_2 \cdot \frac{F_2(X)}{F_2^0(X)} \to \max.$$

Нормирующие делители равны максимальным значениям F_i (4000 и 1500).

Вычисляем для разных вариантов значения аддитивного суперкритерия:

- Вариант 1. $F(X) = 0{,}6(1000/4000) + 0{,}4(1500/1500) = 0{,}55$.
- Вариант 2. $F(X) = 0{,}6(2000/4000) + 0{,}4(1000/1500) = 0{,}558$.
- Вариант 3. $F(X) = 0{,}6(4000/4000) + 0{,}4(500/1500) = \mathbf{0{,}732}$.

Оптимальным является вариант 3. Отметим, что если бы веса критериев были равны $C_1 = 0{,}4$, $C_2 = 0{,}6$, то оптимальным был бы признан вариант 1.

Мультипликативный суперкритерий. Целевая функция *F(X)* мультипликативного суперкритерия записывается следующим образом:

$$F(X) = \prod_{i=1}^{n} C_i F_i(X) \to \max(\min),$$

где П – знак произведения; C_i – весовой коэффициент i-го частного критерия; $F_i(X)$ – числовое значение i-го частного критерия.

Преимущества мультипликативных и аддитивных суперкритериев заключаются в следующем:

- практически всегда определяется единственный оптимальный вариант решения;
- мультипликативный критерий, в отличие от аддитивного, не требует нормирования частных критериев.

Недостатками мультипликативных и аддитивных суперкритериев считаются следующие:

- трудности (субъективизм) в определении весовых коэффициентов C_i;
- аддитивный суперкритерий требует нормирования частных критериев (в отличие от мультипликативного) и является формальным математическим приёмом, позволяющим уменьшение одного из критериев компенсировать увеличением другого критерия;
- в мультипликативном суперкритерии перемножаются разные размерности и взаимно компенсируются значения частных критериев.

Суперкритерий максимина/минимакса. Этот критерий заимствован из теории игр, где основным является компромиссный принцип гарантируемого результата. Если проектируется сложная система, то установить аналитическую взаимосвязь между большим числом частных критериев проектирования очень сложно. Поэтому стараются найти такие значения параметров решений $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$, при которых нормированные значения всех частных критериев $f_i(X)$ равны между собой: $C_i \cdot f_i(X) = const$.

Однако добиться этого не просто. Если частные критерии необходимо максимизировать, то, последовательно варьируя переменные проектирования $x_1, x_2,\ldots, x_m$, надо «подтянуть» те критерии, значения которых в исходном решении оказались минимальными. Подтягивание «отстающего» критерия приводит к снижению значений части остальных критериев. За несколько шагов можно добиться определенной степени уравновешивания частных критериев, что и является целью суперкритерия максимина: выбрать такой набор переменных, при котором реализуется максимум из минимальных нормированных значений частных критериев:

$$F(X) = \max\min\ f_i(X).$$

Если частные критерии необходимо минимизировать, то наоборот, надо выбрать такой набор переменных, при котором

$$F(X) = \min\max\ f_i(X).$$

Какой же критерий выбрать? Это – сложная задача, так как цели при проектировании любого объекта, как правило, противоречивы (обеспечение минимальной стоимости и максимальной надежности, максимальной производительности и минимальной энергоемкости).

Если требуется оптимизировать один из показателей качества проектируемого объекта при соблюдении ограничительных требований на остальные показатели, то нужно сформировать один частный критерий. Задача оптимизации при этом сводится к задаче максимизации (минимизации) данного критерия с учетом заданных ограничений.

При наличии нескольких критериев выбирают:

• аддитивный критерий, если существенное значение имеют абсолютные значения критериев при выбранном векторе параметров X;

• мультипликативный критерий, если существенную роль играет изменение абсолютных значений частных критериев при вариации вектора X;

• максиминный (минимаксный) критерий, если стоит задача достижения равенства нормированных значений противоречивых (конфликтных) частных критериев.

Рассмотрим пример двухкритериальной задачи, предложенный В.В. Подиновским.

Пример	Предприятие выпускает два вида продуктов в объемах $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$. Первый продукт – адсорбирующий, он поглощает вредные отходы, образующиеся при выпуске второго, загрязняющего, продукта. Уровень загрязнения окружающей среды определяется разностью в объемах их производства $\boldsymbol{y_1 = x_2 - x_1}$, а прибыль – суммой $\boldsymbol{y_2 = x_1 + x_2}$ (все – в безразмерных переменных). Предприятие при планировании выпусков продуктов стремится ***уменьшить загрязнение*** и ***увеличить прибыль***.

Приведем оба критерия к стандартной схеме максимизации:

$$y_1 = x_1 - x_2 \to \max, \quad y_2 = x_1 + x_2 \to \max. \qquad (17)$$

Множество $X_{доп}$ допустимых решений ($\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$) задается ограничениями по производственным мощностям и условиями неотрицательности выпусков:

$$X_{доп} = \{(x_1 + x_2): x_1 + x_2 \le 8,\ 0 \le x_1 \le 7, \quad 0 \le x_2 \le 6\}.$$

Рынки сырья и готовой продукции считаются неограниченно емкими, ограничение по трудовым ресурсам даже при полной загрузке производственных мощностей предполагается выполненным.

Решим задачу «прибыль–загрязнение», последовательно выполняя следующие действия.

1. Преобразование (17) пространства решений в пространство критериев – линейное и взаимно однозначное. Обратное преобразование находится разрешением системы линейных равенств (17) относительно $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_2}$:

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1)\cdot$$

2. Подстановка решения в неравенства, задающие множество допустимых решений $X_{доп}$, определяет пространство достижимости критериев $Y_{дос}$:

$$Y_{дос} = \{(y_1, y_2) : y_2 \le 8, \quad 0 \le y_1 + y_2 \le 14, \quad 0 \le y_2 - y_1 \le 12\}\,.$$

3. Проверка линейной независимости критериев ($\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$) путем вычисления определителя матрицы критериев:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ne 0.$$

4. Преобразование точек (x_1, x_2) для $X_{доп}$ в точки (y_1, y_2) для $Y_{дос}$:

$X^0 = (0, 0) \rightarrow Y^0 = (0–0, 0+0) = (0, 0)$;

$X^1 = (0, 6) \rightarrow Y^1 = (0–6, 0+6) = (–6, 6)$;

$X^2 = (2, 6) \rightarrow Y^2 = (2–6, 2+6) = (–4, 8)$;

$X^3 = (7, 1) \rightarrow Y^3 = (7–1, 7+1) = (6, 8)$;

$X^4 = (7, 0) \rightarrow Y^4 = (7–0, 7+0) = (7, 7)$.

5. Поиск на графике (рис. 54) Парето-оптимальных решений, по критериям «максимум прибыли – минимум загрязнения»:

$Y^P=\{Y_3, Y_4\}$, $\quad X^P=\{X_3, X_4\}$.

Таким образом, $x_1 = 7$, $0 \le x_2 \le 1$. Это означает, что адсорбирующий продукт нужно выпускать на пределе производственных возможностей ($x_1 = 7$), а загрязняющий либо не выпускать совсем ($x_2 = 0$), либо пойти на малые объемы его производства ($0 < x_2 \le 1$), пока прибыль не перестанет увеличиваться (от 7 до максимума, равного 8). Загрязнение при этом будет возрастать от [–7] до [–6] (в примере все числа безразмерные и условные).

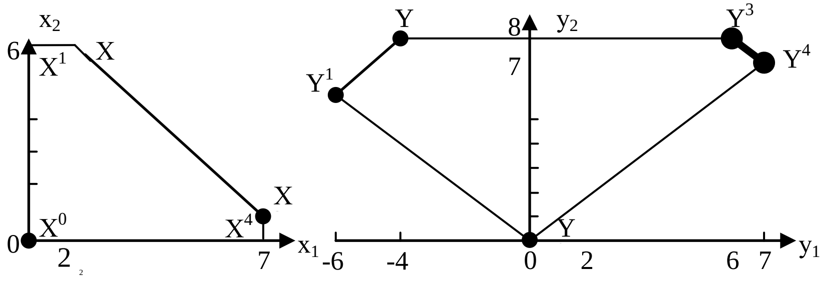


Рис. 54. Парето-оптимальные решения для задачи «прибыль–загрязнение»

Как выбрать единственное решение из множества Парето-оптимальных? Это можно осуществить, например, методом «идеальной» точки. Экспертно формируется «идеальное» решение, например, чтобы прибыль была не меньше заданной, загрязнение окружающей среды не выше некоторого уровня и т.д. Как правило, все эти цели одновременно недостижимы на множестве допустимых решений. Однако можно попробовать найти решение, наиболее близкое к идеальному.

В этом заключается идея *метода идеальной точки*. Решение задачи при этом зависит не только от идеального, но и от используемой функции расстояния $\rho(y, y^{и})$ между точками пространства критериев (разные функции расстояний дают различные решения). Понятно, что бессмысленно задавать ЛПР прямой вопрос: «Какой способ измерения расстояний вы предпочитаете?» Следует набрать статистику попарных сравнений конкретных точек с ответами: лучше, хуже, эквивалентны, и, обработав статистику, извлечь подходящую функцию ρ.

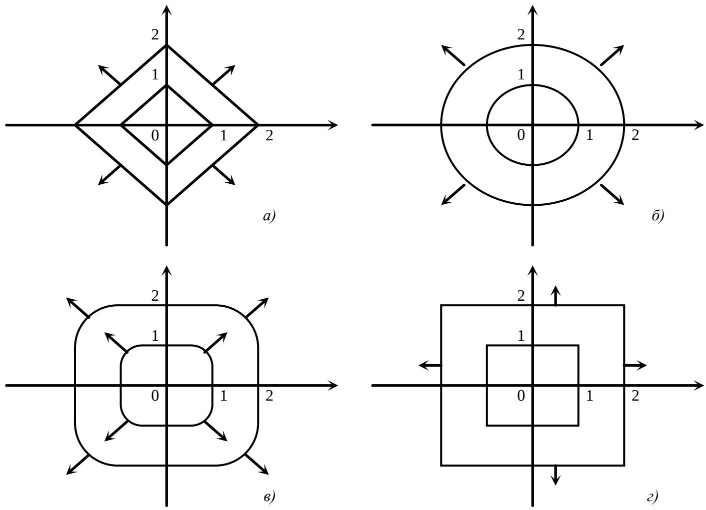
Метод идеальной точки можно использовать как средство борьбы с возможной пустотой множества допустимых решений по причине слишком амбициозных целей. Метод не требует знания Парето-множества Y^P.

Например, для задачи «прибыль–загрязнение» идеальная точка $Y^И = (7, 8)$.

На практике применяются различные способы измерения расстояния ρ в пространстве критериев:

$$\rho_{L^P} = \left(\sum_{j=1}^{m} \left| y_j^1 - y_j \right|^p \right)^{1/p}, \text{ где } p \ge 1; \; \rho_C = \max_{j=1,\dots,m} \left| y_j^1 - y_j \right|.$$

Вид поверхностей, равноудаленных от идеальной точки расстояний (ρ = const) получается для разных способов различным. Разными будут и решения, которые представлены на рис. 55.



а) ρ_{L1} (архимедово)
б) ρ_{L2} (евклидово)
в) ρ_{L3}
г) ρ_C (p→ ∞)
стрелками показан градиент ▼ρ(y, 0)

Рис. 55. Вид поверхностей, равноудаленных от идеальной точки

В формулах для измерения расстояния ρ могут использоваться весовые коэффициенты μ_j , например:

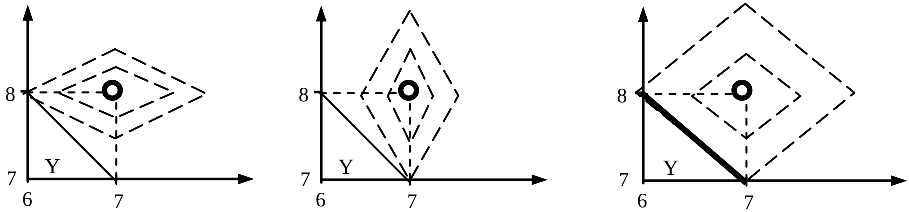
$$\rho_{L^1} = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left| y_j^1 - y_j \right|, \quad \mu_j = const > 0.$$

Это нужно делать обязательно, если критерии имеют несовпадающие размерности: прибыль в рублях, вредные выбросы в килограммах и т.п. Как делать? – Путем перехода к относительным отклонениям, исчисляемым в долях от максимума соответствующего критерия:

$\mu_j = 1/y_j^И$, если $y_j^И > 0$.

Весовые коэффициенты деформируют линии равноудаленности, растягивая их в направлении менее важных критериев и сжимая в направлении более важных. После этих подготовительных действий формируется окончательная задача о поиске допустимой точки, ближайшей к идеальному решению.

Для разных весовых коэффициентов (важность критерия) в формуле расстояния до идеальной точки $Y^{И} = (7, 8)$ могут получиться различные решения задачи. Продемонстрируем геометрически реакцию решения задачи «прибыль–загрязнение» на соотношение между коэффициентами важности критериев в формуле расстояния ρ_{L1} (рис. 56).



а) $\mu_1<\mu_2$ б) $\mu_1>\mu_2$ в) $\mu_1=\mu_2$

Рис. 56. Различные решения задачи для разных весов критериев

На рис. 56 представлены множества достижимости $Y_{дос}$ на плоскости критериев (y_2, y_1) с Парето-границей, где только и могут располагаться решения задачи. Светлой точкой показано идеальное решение $Y^{И} = (7, 8)$. Штрихами нанесены линии равноудалённости от идеала по расстоянию. Решение выделено жирными точками (для рис. 56, а, б) или отрезком (для рис. 56, в).

Лекция 18. Принятие решений в задачах планирования

Принятие решений в задачах планирования имеет свою историю. Считается, что появление задач планирования связано с формированием крупных централизованных образований, городов, в которых было необходимо координировать работу большого числа людей: строительных рабочих при возведении зданий и сооружений, военных при проведении боевых операций, пожарных при тушении пожаров, жрецов во время богослужений и т.д.

Внимание!	В самых общих словах задача планирования может быть сформулирована следующим образом: как с учётом временных факторов наилучшим образом распорядиться имеющимися ресурсами (людьми, орудиями труда, материалами, информацией и пр.), чтобы достигнуть поставленных целей?

На современных предприятиях также имеется проблема синхронизации как отдельных подразделений, так и производственных линий внутри них. Для повышения ритмичности производства применяются конвейеры, карточки канбан, средства автоматизированного синхронного планирования, при этом ритм всего процесса определяется самой медленной технологической цепочкой.

В новом ракурсе, отличном от принятого в современных учебниках, воспринимается победа в Отечественной войне 1812 г., когда запланированно нарушив систему снабжения 300-тысячной Наполеоновской армии, Кутузову удалось втянуть войска неприятеля в глубь территории России, уничтожив предварительно местные источники пополнения запасов продовольствия.

В области техники и технологий проблема планирования заключается в распределении работ между имеющимся ресурсами с учётом различных ограничений. Например, при производственном планировании в качестве ресурсов в первую очередь рассматриваются машины, программное обеспечение, персонал, сырьё и технологическая оснастка. С точки зрения ТПР все решения, получаемые в результате многокритериальной выработки планов, можно разделить на оптимальные по всем критериям, оптимизированные по одному или нескольким критериям, а также приемлемые по всем ограничениям. Весьма разнообразными являются постановки задач планирования. Рассмотрим наиболее трудные из них: задачи сетевого планирования и управления, а также задачи так называемого стратегического планирования.

Сетевое планирование и управление включает три основных этапа: структурное планирование, календарное планирование и оперативное управление. *Структурное планирование* заключается в разбиении всей программы работ на четко определенные операции. Затем определяются оценки продолжительности операций и строится сетевой график, отражающий взаимосвязи между операциями. *Календарное планирование* позволяет выявить критические операции и резервы времени путем расчета сетевого графика. *Оперативное управление* является процессом реализации программы работ, когда сетевой график подвергается анализу и в случае необходимости корректируется.

Рассмотрим подробнее правила построения и расчета сетевого графика (метод *PERT*).

С математической точки зрения сетевой график – это взвешенный ориентированный ациклический граф без мультиребер. Вершинами графа являются события, соответствующие времени начала или окончания одной или нескольких операций. Ориентированными ребрами графа являются операции. Различают исходное, завершающее и промежуточные события. Пока не выполнены все входящие в событие операции, не может завершиться само событие. Встречаются следующие разновидности операций:

●———— > действительные, требующие затрат времени и ресурсов на их выполнение;

● ·–·–·–·–> ожидания, требующие только затрат времени, но не ресурсов;

●- - - - -> фиктивные, не требующие затрат времени, отражающие лишь логическую или ресурсную зависимость между событиями.

Построение сетевого графика начинается с составления списка операций, подлежащих выполнению, и оценки продолжительности этих операций. После этого определяются операции, непосредственно предшествующие той или иной операции. Затем приступают к построению сетевого графика, имея в виду следующие условия.

1. Каждая операция представляется только одним ориентированным ребром.

2. Ни одна пара операций не должна определяться одинаковыми начальным и конечным событиями. Если это так, то вводится фиктивная операция, не требующая ни времени, ни ресурсов. Фиктивные операции позволяют также правильно отображать логические связи в сети.

3. При включении операции в сеть для обеспечения правильного упорядочения операций по важности необходимо знать, какие операции нужно завершить непосредственно перед началом рассматриваемой операции и какие операции должны непосредственно следовать после завершения данной операции.

Построение сети – это лишь первый шаг для получения календарного плана. Далее необходимо выявить критические пути на сетевом графике и резервы времени для всех некритических операций.

Операция считается *критической*, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всего плана. Некритическая операция имеет *резерв времени*, т.е. промежуток времени между ее ранним началом и поздним окончанием больше ее фактической продолжительности.

Критический путь определяет кратчайшую продолжительность плана в целом и является непрерывной цепочкой критических операций. Для его определения делаются специальные расчеты.

Обозначим через D_{ij} продолжительность операции, связывающей событие *i* с событием *j*; через ES_i – ранний срок наступления i-го события (раннее начало всех операций, выходящих из события i, для начального события $ES_0 = 0$); через LC_i – поздний срой наступления i-го события (позднее окончание всех операций, входящих в событие i, для завершающего события $LC_n = ES_n$). Расчет критического пути производится с помощью процедур прямого и обратного хода: вначале, двигаясь по сетевому графику от исходного к завершающему событию, вычисляем ранний срок наступления всех событий, затем, двигаясь от завершающего события к исходному, вычисляем поздний срок наступления всех событий:

$$ES_i = \max_j\{ES_j + D_{ij}\}$$

(чтобы вычислить ES_i для некоторого события i, необходимо сначала определить ES_j начальных событий для ребер-операций (i, j), входящих в событие i,

$$LC_i = \min_j\{LC_j - D_{ij}\}$$

(чтобы вычислить LC_i для некоторого события i, необходимо сначала определить все LC_j конечных событий для ребер-операций (i, j), выходящих из события i).

Операция (i, j) принадлежит критическому пути, если выполняются следующие условия:

- $ES_1 = LC_i$,
- $ES_j = LC_j$,
- $ES_j - ES_j = LC_j - LC_i = D_{ij}$,

т.е. у критической операции резерв времени равен нулю, ранний срок наступления события i совпадает с поздним сроком наступления этого же события (то же самое можно сказать относительно события j), разность между ранними сроками (или поздними сроками) наступления событий i, j равна продолжительности операции D_{ij}.

Для некритических операций (i, j) сетевого графика необходимо определить полный (TF) и свободный (FF) резервы времени:

$TF_{i,j} = (LC_j - ES_i) - D_{i,j}$,

$FF_{i,j} = (ES_j - ES_i) - D_{ij}$.

Если полный резерв операции равен нулю, то свободный резерв $FF_{i,j}$ также равен нулю. Однако обратное – неверно.

Построенный по изложенным выше правилам сетевой график может быть по ряду причин не совсем удовлетворительным. В нем может оказаться неудачным распределение ресурсов по времени или слишком большим срок выполнения всего комплекса операций и т.п. Эти недостатки можно устранять, путем применения методов оперативного управления, корректируя сетевой график за счет некритических операций. В частности, если начинать все операции в наиболее ранние из возможных сроков, то распределение ресурсов но времени (интенсивность работ) получается, как правило, неравномерным. Распределение ресурсов можно сделать значительно более равномерным, сместив начало некоторых операций, имеющих значительные резервы времени. Процедура смещения начала операций представляет собой коррекцию сетевого графика и относится к задаче оперативного управления.

Может также оказаться, что время выполнения плана в целом чрезмерно велико и стоит задача сократить его на некоторую величину. С этой целью необходимо уменьшить продолжительность некоторых операций путем вложения дополнительных ресурсов. При этом следует добиваться такого распределения дополнительных ресурсов, при котором требуемое сокращение длительности всего плана в целом достигается при минимальной общей сумме дополнительных ресурсов. Эта задача может быть решена методами линейного программирования. При этом неизвестными являются дополнительные ресурсы и сроки начала каждой операции, лежащей на критическом пути.

В заключение отметим, что рассмотренные методы построения сетевого графика исходят из того, что заранее точно известна продолжительность каждой операции. На самом деле продолжительность операций зависит от множества различных факторов и является случайной величиной. Если не учитывать это обстоятельство при оперативном управлении, то возможны значительные ошибки в определении общего срока выполнения плана. Оценка продолжительности каждой операции производится экспертами, хорошо знающими все особенности технологии и организации проведения данной операции. При использовании вероятностных методов эксперт обычно дает три оценки продолжительности каждой операции:

- оптимистическую оценку a_{ij}, указывающую время выполнения операции при наиболее благоприятных условиях;
- пессимистическую оценку b_{ij}, указывающую время выполнения операции при наиболее неблагоприятных условиях;
- вероятностную оценку t_{ij}, указывающую наиболее вероятное время выполнения операции.

При этом предполагается, что продолжительность операции является случайной величиной, подчиняющейся закону β-распределения. На основании оценок a_{ij}, b_{ij}, t_{ij} определяется ожидаемая продолжительность операции:

$$m_{ij} = (a_{ij}, + 4*t_{ij} + b_{ij})/6.$$

Все дальнейшие расчеты ведутся так же, как и ранее, только вместо заданной продолжительности d_{ij} используется ожидаемая продолжительность $m_{i,j}$. Отличие заключается в том, что одновременно с определением ожидаемых сроков окончания операций подсчитываются дисперсии этих сроков по обычному правилу: дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Знание дисперсий позволяет интегрально оценить вероятность выполнения той или иной операции или всего плана в целом в заданный срок.

Несколько иначе выглядит постановка задач *стратегического планирования*. К задачам стратегического планирования относятся сложные неформализованные многокритериальные задачи принятия решений, основанные на субъективных измерениях экспертов, которые можно представить в виде иерархической декомпозиции: цели – критерии – альтернативы и т.п. К подобного рода задачам относятся разнообразные задачи проектного планирования, разработки природоохранных мероприятий, прогнозирования развития образования или, скажем, цен на нефть, выдвижения кандидатов на выборы и т.п. Для решения таких задач используются различные подходы, например метод Дельфи, методы теории многомерной полезности и т.д. Одним из наиболее эффективных методов решения задач принятия решений при стратегическом планировании считается метод анализа иерархий (МАИ), который объединяет лучшие стороны многих традиционных методов.

Рассмотрим подробнее особенности метода МАИ, который принадлежит к категории математических методов и основан на следующих аксиомах:

– парные сравнения,

– обоснованная шкала сравнений,

– обратносимметричные отношения,

– однородная кластеризация иерархии,

– иерархическая композиция,

– соответствие заложенных в иерархии и ожидаемых результатов.

Сильная сторона МАИ – важная роль экспертных знаний, а также возможность использования для определения Парето-оптимального состояния, т.е. точки, в которой лица, принимающие решение, не могут улучшить своего состояния, не ухудшив состояния других.

МАИ основан на иерархическом представлении задачи принятия решения и поэтапном установлении приоритетов. Простейшая иерархия состоит из трех уровней: корневой вершины (цель), промежуточных вершин (критерии) и концевых вершин (альтернативы, прогнозы, сценарии). Метод включает следующие этапы.

1. Формулирование задачи и определение цели плана.

2. Построение иерархии: цель → критерии → альтернативы.

3. Построение множества матриц парных сравнений (критериев, альтернатив и т.п.), уточнение шкалы сравнения.

4. Вычисление векторов приоритетов, индексов согласованности (ИС) и отношений согласованности (ОС). Повторение пп. 3, 4 метода для всех уровней иерархии.

5. Иерархический синтез всей иерархии.

После иерархического представления задачи возникает вопрос: как установить приоритеты критериев и оценить каждую из альтернатив, выявив самую важную из них? В МАИ это производится путем парных сравнений. Например, экспертам предлагается построить матрицу попарного сравнения имеющихся критериев между собой по отношению к цели и соответствующее числу критериев определенное количество матриц попарного сравнения альтернатив между собой по отношению к каждому из критериев.

Все матрицы должны обладать свойством обратной симметричности:

$$\boldsymbol{a_{ji} = l/a_{ji},}$$

где j – номер столбца, i – номер строки.

Какова шкала сравнений и чему равны $\boldsymbol{a_{ij}}$? В МАИ рекомендуется следующая шкала относительной важности, которая оказалась не только эффективной на практике, но и обоснована теоретически:

1 – равная важность;

3 – умеренное превосходство;

5 – существенное превосходство;

7 – значительное превосходство;

9 – очень сильное (абсолютное) превосходство;

2,4,6,8 – промежуточные значения превосходства;

1/2, 1/3, 1/4...1/9 – обратные величины превосходства.

Заполнение матриц происходит путем опроса или экспертных оценок. При сравнении критериев по отношению к цели обычно спрашивают, какой из них более важен; при сравнении альтернатив по отношению к критерию – какая из них более желательна; при сравнении сценариев прогноза событий – какой из сценариев более вероятен.

Внесем уточнение: сравниваются i-я строка матрицы с j-м столбцом, и если строка важнее, то элемент матрицы $\boldsymbol{a_{ji}}$ равен целому числу от одного до девяти; в противном случае – дробному числу на интервале от 1/2 до 1/9. Диагональные элементы матрицы $\boldsymbol{a_{ii}} = 1$. Симметричные элементы матрицы $\boldsymbol{a_{ji}} = 1/\boldsymbol{a_{ji}}$. В случае спорных оценок можно брать среднее геометрическое значение, решающим фактором является лишь согласие участников опроса по цели.

Возникает вопрос: что означают все эти числа в матрицах и как они помогут решить задачу принятия решения? Для ответа на вопрос из сформированных матриц парных сравнений необходимо определить векторы локальных приоритетов, которые отражают влияние элементов нижних уровней иерархии на элементы верхних уровней. Для этого необходимо вычислить собственный вектор каждой из матриц, а затем нормализовать их к единице. Это и будет вектор локальных приоритетов.

Отметим, что вычисление вектора собственных значений матрицы – это алгоритмически простая, но вычислительно трудоемкая процедура. Существуют приближенные методы поиска собственных значений. Лучшим из них является метод среднего геометрического, когда вычисление собственных значений матрицы размером (n×n) заменяется вычислением среднего геометрического в каждой строке матрицы путем перемножения всех элементов строки и извлечения из произведения корня n-й степени. Полученный таким образом вектор собственных значений нормализуется к единице путем деления каждого собственного значения на сумму всех чисел вектора собственных значений. Это позволяет определить «вес» приоритета.

Другим полезным показателем является индекс согласованности (ИС). Он вычисляется следующим образом. Вначале суммируются элементы каждого столбца матрицы парных сравнений. Далее сумма j-го столбца умножается на j-й элемент нормализованного вектора приоритетов. Наконец, все полученные n чисел суммируются, и эта сумма равна $\boldsymbol{h_{max}}$. После этого вычисляется ИС по формуле

$$\boldsymbol{ИС = (h_{max} – n) / (n – 1)}.$$

Отметим, что для обратносимметричных матриц всегда $\boldsymbol{h_{max} \geq n}$.

Чтобы вычислить отношение согласованности (ОС) в полученных матрицах, необходимо сравнить величину ИС с той, которая получилась бы при случайном формировании обратносимметричной матрицы размером ($\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$) из чисел указанной выше шкалы сравнения. Известны экспериментально полученные путем компьютерного моделирования значения случайной согласованности в зависимости от размера обратносимметричной матрицы:

Размер матрицы (***n***)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Индекс случайной согласованности	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Если разделить полученное значение индекса согласованности матрицы на индекс случайной согласованности матрицы того же размера, то получим отношение согласованности. Умножив полученное число на 100, получим результат в процентах. Отметим, что для матриц с ***n*** = 7, 8, 9,… зачастую затруднительно достигнуть высокого уровня согласованности даже после пересмотра соответствующих матриц. Приемлемым считается значение ОС около 10 %, допустимым значением – 20 %.

После этого переходим к заключительному этапу МАИ – иерархическому синтезу приоритетов, начиная с верхних уровней в направлении к нижним уровням. Для этого необходимо сформировать вектор глобального приоритета. Элементы этого вектора получают путем умножения локальных приоритетов низшего уровня на приоритет критерия стоящего выше уровня с последующим суммированием полученных произведений по всем критериям. В результате получаем значение глобального приоритета по каждой из альтернатив.

В заключение отметим, что не следует сравнивать более чем (7±2) элементов иерархии на одном уровне. При большом числе критериев лучше их сгруппировать в классы. При большом числе альтернатив не всегда нужно проводить парные сравнения между ними.

Лекция 19. Марковские модели принятия решений

Основные понятия теории марковских цепей ввел в 1907 г. выдающийся российский математик А.А. Марков (1856–1922). С тех пор эту теорию развивали многие учёные. В последнее время обнаружилась важная роль марковских цепей не только в технических науках, но также в биологии, социологии и других науках, где с их помощью решаются разнообразные задачи. Особое значение марковские процессы приобрели у специалистов, занимающихся теорией принятия оптимальных технических решений, благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений. Очень часто аппарат марковских процессов используется при моделировании компьютерных игр, действий компьютерных героев.

Во многих областях деятельности возникают ситуации, связанные с необходимостью пребывания в состоянии ожидания (очереди в кассах, в ожидании освобождения линии абонента, в ожидании ремонтного обслуживания, разгрузки или погрузки транспортных средств и т.п.). Изучением ситуаций выполнения требований, связанных с массовостью и обслуживанием, занимается теория систем массового обслуживания (СМО) и случайных процессов. В СМО под требованием обычно подразумевается запрос на удовлетворение некоторой потребности (покупка билета, разговор с абонентом, ремонт, доступ к ресурсам и т.п.).

Случайные процессы. В процессе принятия оптимальных технических решений должен учитываться фактор случайности. Фактор «случайности» не адекватен фактору «неопределенности», так как при учете случайности необходимо, чтобы массовые случайные явления обладали свойством статической устойчивости. Это означает, что учитываемые случайные явления подчиняются определенным статическим закономерностям, требования которых не обязательны при учете неопределенности. Условие статической устойчивости позволяет использовать в процессе принятия решений эффективные математические методы теории случайных процессов, в частности теорию марковских процессов, которую сам Марков называл «динамикой вероятностей».

Напомним основные понятия случайных процессов.

Случайной функцией называется функция, значение которой при любом значении аргумента является случайной величиной. Другими словами, случайной можно назвать функцию, которая при каждом испытании принимает какой-либо заранее неизвестный вид. Примерами случайных функций в технике и технологиях являются: колебания напряжения в электрической цепи, скорость движения автомобиля на участке дороги с ограничением скорости, шероховатость поверхности детали на определенном участке и т.д. Считается, что если аргументом случайной функции является время, то процесс, соответствующий этой функции, будет случайным.

В ТПР используется несколько иное определение случайного процесса. Под *случайным процессом* понимают процесс случайного изменения состояний какой-либо физической или технической системы по времени $\boldsymbol{t}$ или какому-либо другому аргументу. Если обозначить через $\boldsymbol{S_i}$ состояние системы, то зависимость $\boldsymbol{S_i(t)}$ и будет случайной функцией.

Случайные процессы принято классифицировать по видам состояний $\boldsymbol{S_i}$ и аргумента $\boldsymbol{t}$ на процессы с дискретными или непрерывными состояниями или временем. Например, любое выборочное тестирование продукции будет относиться к случайным процессам с дискретными состояниями ($\boldsymbol{S_1}$ – годная, $\boldsymbol{S_2}$ – негодная продукция) и дискретным временем ($\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$ – времена проверки). С другой стороны, случай отказа любой машины можно отнести к случайному процессу с дискретными состояниями, но непрерывным временем. Проверки температуры термометром через определенное время будут относиться к случайным процессам с непрерывным состоянием и дискретным временем. В свою очередь, например, любая осциллограмма будет записью случайного процесса с непрерывными состояниями и временем.

Кроме того, случайные процессы часто классифицируют по ещё одному важному свойству. Это свойство описывает вероятностную связь между состояниями случайного процесса. Так, например, если в случайном процессе вероятность перехода $\boldsymbol{P_{i,i+1}}$ системы в каждое последующее состояние $\boldsymbol{S_{i+1}}$ зависит только от предыдущего состояния $\boldsymbol{S_i}$, то такой процесс называется *марковским процессом*, или *процессом без последействия*, или *простой цепью Маркова*. Вероятность $\boldsymbol{P_{i,i+1}}$ называется *переходной вероятностью*. Однако можно представить себе случайный процесс, в котором вероятностная связь существует не только с предшествующими, но и более ранними – $\boldsymbol{S_{i-1}}$**,** $\boldsymbol{S_{i+2}}$ **…** состояниями. Это обстоятельство должно обязательно учитываться при составлении математических моделей принятия решений.

Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности $\boldsymbol{P_{i,i+1}}$ остаются постоянными в ходе процесса. Цепь Маркова считается заданной, если заданы следующие условия:

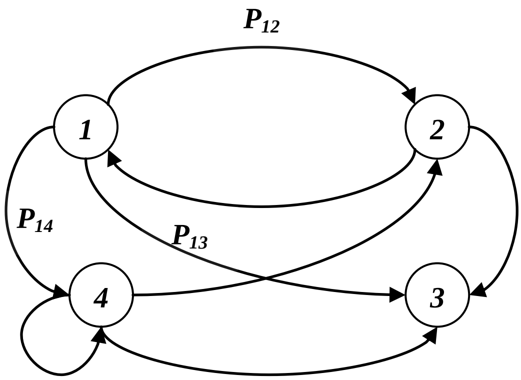
- имеется совокупность переходных вероятностей в виде матрицы:

$$P[n] = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1z} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nz} \end{vmatrix}.$$

Элементами переходной матрицы являются вероятности перехода из i-го в j-е состояние за один шаг процесса, причем сумма вероятностей переходов из i-го состояния равна 1, поскольку предполагается, что переходы из i-го состояния являются полной группой событий;

- вектор начальных вероятностей $P[0] = |P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0n}|$, описывающий начальное состояние системы.

Кроме матричной формы модель марковской цепи может быть представлена в виде ориентированного взвешенного графа. Вершины графа обозначают состояние $\boldsymbol{S_i}$, а дуги – переходные вероятности $\boldsymbol{P_{ij}}$. (рис. 57).



$$\boldsymbol{P_{12} + P_{13} + P_{14} = 1}$$

Рис. 57. Пример графа переходов

Вероятность $\boldsymbol{P_{ij}}$ показывает, как часто после попадания в i-е состояние осуществляется переход в j-е состояние. Понятно, что переходы происходят случайно, но если измерить частоту переходов за достаточно большое время, то окажется, что эта частота будет совпадать с заданной вероятностью перехода, а у каждого состояния сумма вероятностей всех переходов (исходящих стрелок) из него в другие состояния должна быть всегда равна 1.

Моделирование марковского процесса представляет собой вычисление последовательности (цепи) переходов из состояния в состояние. Например, пусть имеется марковский граф переходов, представленный на рис. 58.

Тогда цепь на рис. 59, смоделированная по марковскому графу на рис. 58, является случайной последовательностью и может иметь также и другие варианты реализации.

Чтобы определить, в какое новое состояние перейдет процесс из текущего i-го состояния, достаточно разбить интервал $[0; 1]$ на подынтервалы величиной P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}, … ($P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \ldots = 1$), как это, например, представлено на рис. 60.

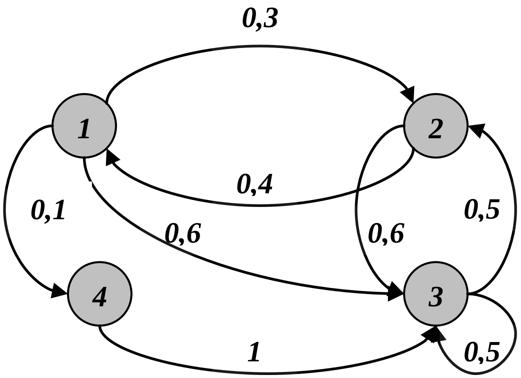


Рис. 58. Пример марковского графа переходов

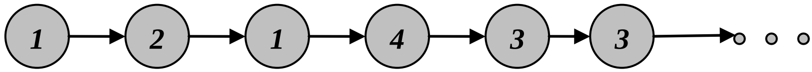


Рис. 59. Пример марковской цепи, смоделированной по марковскому графу переходов, изображенному на рис. 58

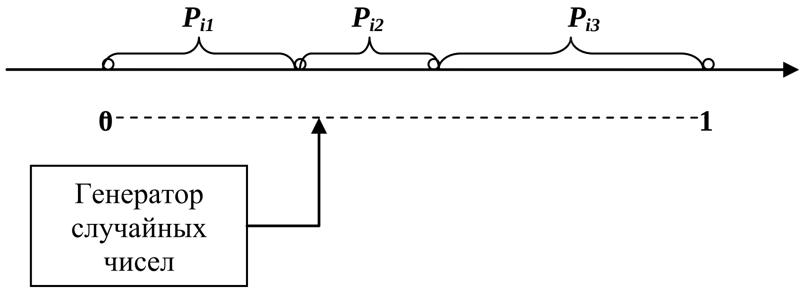


Рис. 60. Процесс моделирования перехода из i-го состояния марковской цепи в j-е с использованием генератора случайных чисел

Далее с помощью генератора случайных чисел надо получить очередное равномерно распределенное в интервале [0; 1] случайное число и определить, в какой из интервалов оно попадает. После этого осуществляется переход в состояние, определенное генератором, и повтор описанной процедуры для нового состояния. Результатом работы модели является марковская цепь (см. рис. 59).

В качестве примера рассмотрим процесс моделирования стрельбы из пушки по мишени.

Вначале строится модель марковского случайного процесса. Определим следующие три состояния: S_0 – цель не повреждена; S_1 – цель повреждена; S_2 – цель разрушена. Зададим вектор начальных вероятностей P_0:

	S_0	S_1	S_2
P_0	0,8	0,2	0

Значение P_0 для каждого из состояний показывает, какова вероятность каждого из состояний объекта до начала стрельбы. Зададим теперь матрицу вероятностей перехода состояний дискретного марковского процесса:

	в S_0	в S_1	в S_2	Сумма вероятностей переходов
из S_0	0,45	0,40	0,15	0,45 + 0,40 + 0,15 = 1
из S_1	0	0,45	0,55	0 + 0,45 + 0,55 = 1
из S_2	0	0	1	0 + 0 + 1 = 1

Граф переходов для заданной матрицы имеет вид, представленный на рис. 61.

Используя модель и метод статистического моделирования, попытаемся решить следующую задачу: определить среднее количество снарядов, необходимое для полного разрушения цели.

Проимитируем процесс стрельбы. Пусть начальное состояние будет S_0. Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел:

- **0,31** – цель находится в состоянии S_0 и остается в состоянии S_0, так как $0 < \mathbf{0{,}31} < 0{,}45$;
- **0,53** – цель находится в состоянии S_0 и переходит в состояние S_1, так как $0{,}45 < \mathbf{0{,}53} < 0{,}45 + 0{,}40$;
- **0,23** – цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1, так как $0 < \mathbf{0{,}23} < 0{,}45$;

- **0,42** – цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1, так как $0 < \mathbf{0,42} < 0,45$;
- **0,63** – цель находится в состоянии S_1 и переходит в состояние S_2, так как $0,45 < \mathbf{0,63} < 0,45 + 0,55$.

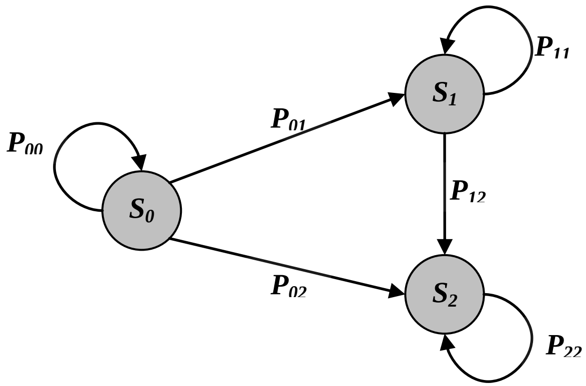


Рис. 61. Граф марковского процесса, моделирующего стрельбу из пушки по мишени

Так как достигнуто состояние S_2 (далее цель переходит из S_2 в состояние S_2 с вероятностью 1), то цель поражена. Для этого в данном эксперименте потребовалось 5 снарядов.

На рис. 62 приведена временная диаграмма описанного процесса моделирования. Диаграмма показывает, как во времени происходит процесс изменения состояний.

Такт моделирования для данного случая имеет фиксированную величину. Нам важен сам факт перехода системы в очередное состояние и не важно, когда это происходит. Марковская цепь этой реализации моделирования выглядит следующим образом: S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2 . Это означает, что мишень уничтожена за 5 тактов.

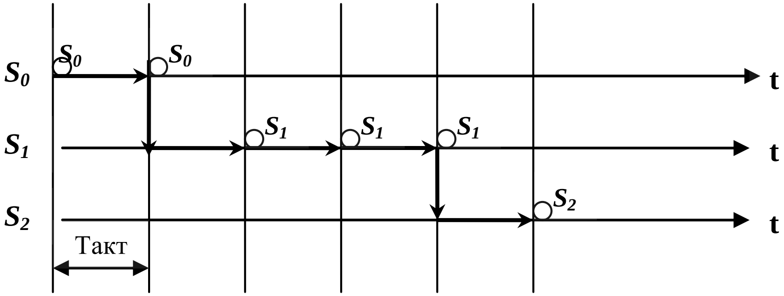


Рис. 62. Временная диаграмма переходов в марковском графе (пример моделирования)

Однако это число не является ответом в задаче, поскольку в разных реализациях модели получаются разные ответы (это зависит от того, какие конкретно случайные числа выпадут), а ответ у задачи может быть только один.

Поэтому необходимо повторить моделирование определенное число раз. Пусть, например, были получены еще 7 реализаций со следующими результатами:

- (S_0—S_0—S_1—S_1—S_2) – 4 такта;
- (S_0—S_0—S_0—S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2) – 11 тактов;
- (S_1—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2) – 5 тактов;
- (S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2) – 6 тактов;
- (S_1—S_1—S_1—S_1—S_2) – 4 такта;
- (S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_1—S_2) – 6 тактов;
- (S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2) – 5 тактов.

Таким образом, за 8 экспериментов было уничтожено восемь мишеней. Среднее число тактов в процедуре стрельбы составило: (5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5,75 или, округляя, 6. Именно столько снарядов, в среднем, рекомендуется иметь в боевом запасе пушки для уничтожения мишени при таких вероятностях попаданий.

Теперь следует определить точность. Именно точность может показать, насколько следует доверять полученному ответу. Для этого проследим, как сходится последовательность случайных (приближенных) ответов к правильному (точному) результату. Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, сумма случайных величин есть величина неслучайная. Поэтому для получения статистически достоверного ответа необходимо следить за средним числом снарядов, получаемых в ряде случайных реализаций.

На первом этапе вычислений средний ответ составил 5 снарядов, на втором этапе средний ответ составил $(5 + 4)/2 = 4,5$ снаряда, на третьем – $(5 + 4 + 11)/3 = 6,7$. Далее ряд средних величин, по мере накопления статистики, выглядит следующим образом: 6,3; 6,2; 5,8; 5,9; 5,8. Если изобразить этот ряд в виде графика (рис. 63) среднего числа выпущенных снарядов, необходимых для поражения мишени, в зависимости от номера эксперимента, то обнаружится, что данный ряд сходится к некоторой величине, которая и является ответом.

Отметим, что в рассмотренном примере использовалась модель марковских случайных процессов с дискретным временем (такт за тактом). Если важно указать, в какой именно момент времени произойдет переход, сколько времени система пробудет в каждом из состояний, требуется применить модель с непрерывным временем.

Такой моделью так же, как и в дискретном случае, является граф марковского процесса, однако каждый переход процесса с непрерывным временем из i-го состояния (вершины) в j-е состояние будет характеризоваться *плотностью вероятности* перехода $\boldsymbol{\lambda_{ij}}$ (рис. 64).

По определению

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

При этом под плотностью вероятности понимается распределение вероятности во времени: переход из i-го состояния в j-е происходит в случайные моменты времени, которые определяются интенсивностью перехода λ_{ij} (процесс непрерывный, т.е. распределен во времени).

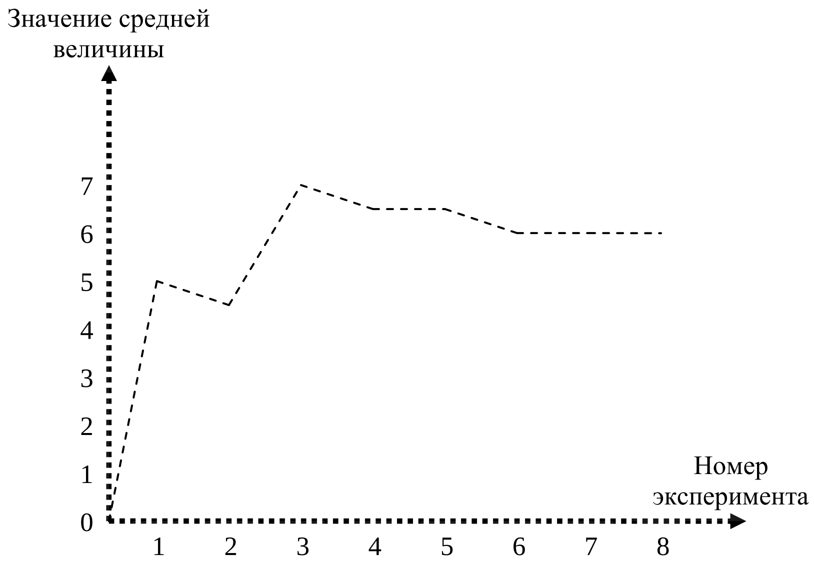


Рис. 63. Изменение средней величины в зависимости от номера эксперимента

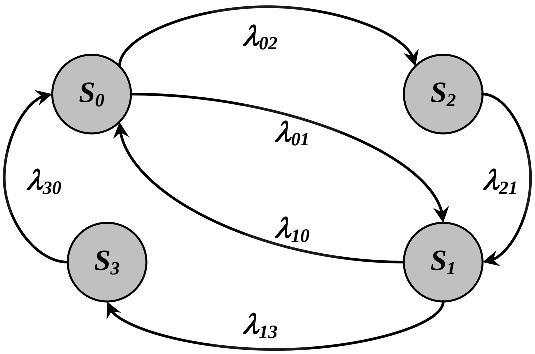


Рис. 64. Пример графа марковского процесса с непрерывным временем

Переходы – это поток событий с определенной интенсивностью. Зная интенсивность λ_{ij} появления событий, порождаемых потоком, можно сымитировать случайный интервал между двумя событиями в этом потоке:

$$\tau_{ij} = -\frac{1}{\lambda_{ij}} \cdot Ln(R),$$

где τ_{ij} – интервал времени между нахождением системы в i-м и j-м состояниях. Система из i-го состояния может перейти в одно из нескольких состояний $j, j+1, , j+2\ldots$, связанных с ним переходами λ_{ij}, λ_{ij+1}, λ_{ij+2}, … В j-е состояние она перейдет через τ_{ij}; в $(j + 1)$-е состояние – через τ_{ij+1}; в $(j + 2)$-е состояние – через τ_{ij+2} и т. д. Ясно, что система может перейти из i-го состояния в то, переход в которое наступит раньше. Поэтому из последовательности времен: τ_{ij}, τ_{ij+1}, τ_{ij+2} и т. д. надо выбрать минимальное и определить индекс j, указывающий, в какое именно состояние произойдет переход.

Рассмотрим пример моделирования работы машины, которая может находиться в следующих состояниях:

- S_0 – машина исправна, свободна (простой);
- S_1 – машина исправна, занята (обработка);
- S_2 – машина исправна, идет переналадка $\lambda_{02} < \lambda_{21}$;
- S_3 – машина неисправна, идет ремонт $\lambda_{13} < \lambda_{30}$.

Соответствующий граф марковского процесса представлен на рис. 64. Зададим значения параметров λ, используя экспериментальные данные, получаемые в производственных условиях: λ_{01} – поток на обработку (без переналадки); λ_{10} – поток обслуживания; λ_{13} – поток отказов оборудования; λ_{30} – поток восстановлений. Тогда реализация модели будет иметь вид, представленный на рис. 65.

На временной диаграмме черными точками указаны запрещенные состояния, светлыми точками – реализовавшиеся состояния. Из рис. 65 видно, как из последовательности времен τ выбирается минимальное:

$$\min\begin{cases}\tau_{01} = -1/\lambda_{01} \cdot \ln r,\\ \tau_{02} = -1/\lambda_{02} \cdot \ln r;\end{cases}$$

$$\min\begin{cases}\tau_{10} = -1/\lambda_{10}\cdot\ln r,\\ \tau_{13} = -1/\lambda_{13}\cdot\ln r.\end{cases}$$

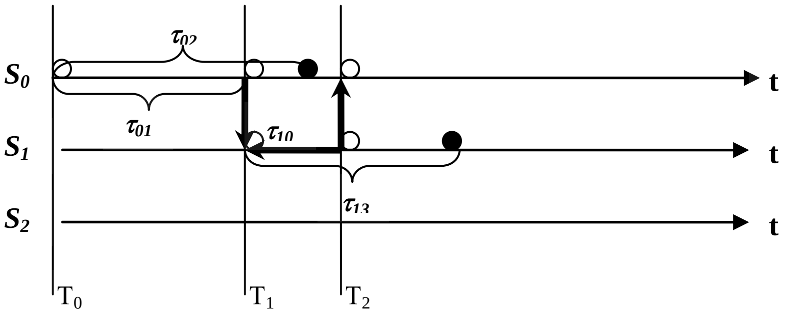


Рис. 65. Пример моделирования непрерывного марковского процесса

Реализовавшаяся цепь выглядит так: S_0—S_1—S_0—… Переходы произошли в следующие моменты времени: T_0—T_1—T_2—T_3—…, где $T_0 = 0$, $T_1 = \tau_{01}$, $T_2 = \tau_{01} + \tau_{10}$. В целом отметим, что, используя построенную марковскую модель, можно ставить и решать задачу принятия далеко не очевидных решений.

Множество состояний системы марковской цепи определенным образом классифицируются с учетом дальнейшего поведения системы:

- в случае невозвратного множества возможны любые переходы внутри этого множества (система может покинуть это множество, но не может вернуться в него);
- в случае возвратного множества также возможны любые переходы внутри множества (система может войти в это множество, но не может покинуть его);
- в случае эргодического множества возможны любые переходы внутри множества, но исключены переходы из множества и в него;
- при попадании системы в поглощающее множество процесс заканчивается.

Кроме описанной выше классификации множеств различают следующие состояния системы: существенное состояние (возможны переходы из S_i в S_j и обратно), несущественное состояние (возможен переход из S_i в S_j, но невозможен обратный переход).

В некоторых случаях, несмотря на случайность процесса, имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей (управляемые марковские цепи). С их помощью особенно эффективным становится процесс принятия решений. В частности, как указывалось выше, основным признаком дискретных марковских цепей является детерминированность временных интервалов между отдельными этапами процесса. Однако часто в реальных процессах это свойство не соблюдается, и интервалы оказываются случайными с каким-либо законом распределения, хотя марковские свойства процесса сохраняются. Кроме того, марковские цепи могут быть эргодическими, если переходные вероятности образуют эргодическое множество. В свою очередь, эргодические цепи могут быть регулярными или циклическими. Циклические цепи отличаются от регулярных тем, что в процессе переходов через определенное количество шагов (цикл) происходит возврат в какое-либо состояние. Регулярные цепи этим свойством не обладают.

Рассмотрим пример, поясняющий особенности рекуррентного метода принятия решений для подобного рода задач. Пусть некоторая IT-фирма выпускает новый вид продукции. После выпуска пробной партии фирма может оказаться в двух состояниях:

- $\boldsymbol{S_1}$ – продукция оказалась удачной и пользуется спросом;
- $\boldsymbol{S_2}$ – продукция оказалась неудачной.

Допустим, что предполагается выпускать данный вид продукции в течение года. Руководство фирмы должно реагировать на то или иное состояние путем выбора определенной стратегии, которую по условиям производства можно менять не чаще и не реже, чем один раз в квартал. Очевидно, что стратегия зависит от состояния, в котором оказалась фирма в начале текущего квартала. Предположим, что в распоряжении руководства имеется некоторый набор стратегий, включающий использование (или не использование) рекламы;

проведение (или не проведение) дополнительных исследований требований потребителя и своих возможностей.

Предположим также, что в том или ином состоянии возможно объединение этих стратегий:

- в состоянии S_1 – реклама не используется, и исследования не проводятся (стратегия 1);
- в состоянии S_2 – используются и реклама и дополнительные исследования (стратегия 2).

Очевидно, что переходы из состояния в состояние образуют случайную последовательность, обладающую свойством последействия. Кроме того, здесь нет поглощающих состояний и возможны любые переходы, т.е. дискретная марковская цепь обладает свойством эргодичности. Допустим также, что из опыта фирмы известны переходные вероятности такой цепи, значения доходов (расходов), связанные с применением той или иной стратегии и с вероятностями успешного или неуспешного выпуска продукции.

Обозначим через P^k_{ij} – вероятность перехода из i-го состояния в j-е состояние при стратегии k; u^k_{ij} – доходы (расходы) при переходе из i-го в j-е состояние при стратегии k (в условных единицах).

Все исходные данные сведем в таблицу следующего вида:

Состояния	Стратегии	Вероятность перехода		Доходы	
i	k	P^k_{i1}	P^k_{i2}	u^k_{i1}	u^k_{i2}
S_1	Без рекламы	0,5	0,5	8	2
	С рекламой	0,9	0,1	4	4
S_2	Без исследований	0,3	0,7	3	–5
	С исследованиями	0,7	0,3	1	–20

Требуется найти вектор совокупности стратегий, который обеспечит максимум суммы среднего годового дохода с учетом всех возможных вариантов случайных событий, которые могут произойти в течение года. При этом следует учесть, что поскольку в самом начале мы можем оказаться в одном из двух состояний, то этому будут соответствовать и два значения суммы среднего дохода, которые обозначим как $v_1(n)$ и $v_2(n)$, где n – количество шагов (этапов) до окончания процесса. В нашем случае $n = 4$. Поскольку величина среднего дохода за n этапов равна

$$v_i(n) = q_i + v_i(n–1), \text{i} = 1, 2,...,$$

где q_i – непосредственно ожидаемый доход; $v_i(n–1)$ – полный средний ожидаемый доход в течение оставшихся (n–1) этапов процесса, то для стратегий «без рекламы» и «без исследований» получаем:

$q(1)_{\text{без рекламы}} = 0,5*8 + 0,5*2 = 5;$

$q(1)_{\text{без исследований}} = 0,3*3 + 0,7*(–5) = – 2,6.$

При подсчете величины v_i $(n – 1)$ удобнее начинать с конца процесса, так как при снятии продукции с производства ожидаемый доход равен нулю. Тогда за один квартал (шаг) до конца процесса средний доход при стратегиях «без рекламы» и «без исследований» будет равен

$v(1)_{\text{без рекламы}} = q(1)_{\text{без рекламы}} = 5;$

$v(1)_{\text{без исследований}} = q(1)_{\text{без исследований}} = –2,6.$

Для определения полного ожидаемого дохода за два квартала до смены продукции надо учесть, что система может оказаться в одном из двух состояний. При этом величины ожидаемых доходов v_i $(n – 1)$ определяются с учетом переходных вероятностей:

$v(1)_{\text{без рекламы}} = 0,5*5 + 0,5*(-2,6) = 1,2;$

$v(1)_{\text{без исследований}} = 0,3*5 + 0,7*(–2,6) = –0,32.$

Тогда полный суммарный доход за два квартала при стратегии «без рекламы» будет равен: 5 + 1,2 = 6,2; а при стратегии «без исследований»: –2,6 –0,32 = –2,92.

Аналогично подсчитывается доход за три квартала:

0,5*6,2 + 0,5*(–2,92) = 1,64,

0,3*6,2 + 0,7*(–2,92) = –0,184,

а также, соответственно, полный доход:

5 + 1,64 = 6,64;

–2,6 – 0,184 = –2,784.

Окончательный доход при стратегиях «без рекламы» и «без исследований» будет равен:

0,5*6,64 + 0,5*(–2,784) = 1,928;

0,3*6,64 + 0,7*(–2,784) = –0,044.

Наконец, полный окончательный доход будет равен:

5 + 1,928 = 6,928;

–2,6 –0,044 = –2,644.

Аналогичные расчеты должны быть теперь проделаны и для остальных стратегий.

Можно сделать следующие выводы. Оптимальность стратегии на всем многошаговом процессе обеспечивается применением принципа оптимальности Беллмана, согласно которому оптимальное управление в многошаговом процессе должно быть оптимальным на каждом шаге с учетом предыстории процесса; в данном случае на основании расчетов при начале процесса из состояния $\boldsymbol{S_1}$ вектор оптимальных стратегий будет иметь вид: $\boldsymbol{f_1}$ = < 2, 2, 2, 1> , а если начальным было состояние $\boldsymbol{S_2}$, то $\boldsymbol{f_2}$ = < 2, 2, 1, 1>.

Это означает, что, если фирма начала выпускать сразу удачный продукт, то первые три квартала выгодно применять стратегию «реклама и исследование». За один квартал до перехода на новый продукт целесообразно прекратить и рекламу и исследования. Если же начальным было состояние $\boldsymbol{S_1}$, то стратегию «реклама и исследование» следует применять лишь два первых квартала, затем следует освободившиеся средства употребить на подготовку к созданию нового продукта. Таким образом, и при удачном, и при неудачном продуктах оказывается всё же выгодным начинать производство, обеспеченное как рекламой, так и исследованиями. Заметим, что в данном случае был не ясен вопрос о том, с какой вероятностью наступят состояния $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$. Для этого следовало бы ввести вектор начальных вероятностей, что несколько усложнило бы вычисление. Описанный метод прост, но пригоден лишь при малом числе этапов.

Лекция 20. Парадоксы и аксиомы системы голосования

К задачам группового выбора, затрагивающим интересы многих людей, относятся выборы органов власти. Их особенность состоит в том, что к ЛПР (избирателям) не предъявляются, как к экспертам, высокие требования компетентности. Хотя ценз компетентности применяется в двухступенчатых избирательных системах. К задачам группового выбора относятся многие производственные задачи, судейство спортивных соревнований, военные и ученые советы и т.п. В силу специализации задач в малых группах ценз компетентности гораздо выше.

Участники группового ЛПР могут придерживаться разных точек зрения. Поэтому главной проблемой группового выбора является поиск согласованных оценок о *принципах предпочтения* рассматриваемых объектов на основе индивидуальных мнений.

Постановка задачи группового выбора состоит в следующем. Пусть групповое ЛПР состоит из $\boldsymbol{d}$ участников. Каждый может выбирать предпочтительное решение из $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y_1}, \ldots, \boldsymbol{Y_m})$. Оценка группового решения – это вектор предпочтений вида $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}, \ldots, \boldsymbol{f_d})$. Чтобы его найти, необходимо *согласовать* принцип группового выбора $\boldsymbol{L}$. Рассмотрим наиболее распространенные принципы группового выбора решений.

Принцип большинства голосов. Участники ЛПР могут образовывать коалиции $V=\{v_1, \ldots, v_s\}$, т.е. объединения с совпадающими интересами (это характерно для партийных и общественных организаций). Каждая коалиция имеет свою функцию предпочтения, которая при измерении в количественных шкалах является взвешенной суммой индивидуальных предпочтений: $f_{Vj} = \sum k_j * f_{ij}$, где k_i – «весовой» коэффициент i-го участника, f_{ij} – функция предпочтения i-го участника в j-й коалиции. Если обозначить через nV_j – количество участников коалиции V_j, то $nV_1 + \ldots + nV_s = d$.

Внимание!	Принцип большинства утверждает, что групповое предпочтение должно соответствовать предпочтению коалиции, которая имеет число голосов больше некоторого порогового значения: $F(f_{V1},\dots,f_{Vs})=f_{Vj}$ при $nV_j > C*d/2$, $1 \le C \le 2$.

Если пороговое значение $C = 1$, то это принцип *простого большинства* голосов. Если $C = 4/3$, то говорят о *квалифицированном большинстве*. При $C = 2$ порог равен d, это – *абсолютное большинство* голосов.

Принцип диктатора. В качестве группового предпочтения принимается предпочтение одного лица. Следовательно, функция группового предпочтения равна $F(f_1,\dots,f_d) = f_k$, где f_k – функция предпочтения диктатора. Этот принцип характерен для военных организаций.

Принципы большинства голосов и диктатора не учитывают интересы всех участников группы, поэтому часто группа ЛПР теряет устойчивость и происходит ее распад. Существуют принципы, в большей степени обеспечивающие учет интересов всех участников группы. Эти принципы основаны на понятии V-оптимальности.

Решение называется *V-оптимальным*, если оно оптимально для каждой коалиции $v_1,\dots, v_s$, т.е. ни одной коалиции не выгодно менять это решение, так как не существует лучшего. К подобного рода принципам относятся принципы Курно, Парето и Эджворта:

Внимание!	Все коалиции являются одноэлементными, а ЛПР состоит из независимых участников. V-оптимальным является решение, получаемое по принципу Курно: никому из участников группы не выгодно менять решение, поскольку лучшего не существует.

Внимание!	ЛПР – это одна большая коалиция, в которой существует сильная зависимость между участниками группы. Группа может улучшать свои решения без нанесения ущерба каждому участнику в отдельности. Применение принципа Парето целесообразно при высокой общности целей всех участников группы.

Внимание!	Принцип Эджворта обобщает принципы Курно и Парето для произвольного числа коалиций. V-оптимальное по Эджворту решение – это решение, которое не выгодно менять ни одной коалиции, поскольку нет лучшего.

Конкретизировать и применить принципы **Курно, Парето** и **Эджворта** невозможно без учета характера межкоалиционных отношений. Между коалициями существуют три типа отношений:

- статус-кво;
- конфронтация (антагонизм);
- рациональность.

При отношении ***статус-кво*** каждая коалиция стремится сохранить существующее положение дел. Это отношение характерно для экономических моделей при слабосвязанных между собой участниках.

При отношении ***конфронтации*** коалиции пытаются навредить друг другу, иногда даже в ущерб себе. На основе анализа отношений конфронтации построена теория антагонистических и коалиционных игр. В коалиционных играх доказано, что большая коалиция имеет преимущество перед малыми. Основные вопросы коалиционных игр: насколько сильно стремление игроков вступить в коалицию, и какие взносы они платят друг другу?

При отношении ***рациональности*** каждая коалиция действует только в собственных интересах для получения максимального результата, что не обязательно приносит ущерб другим коалициям.

Пример	Игра «третий лишний» Играют трое. Каждый зажимает в кулаке 1 или 2 спички. По команде разжимают кулаки и сравнивают спички. Если все спрятали одинаковое количество спичек, то ничья. Иначе, оставшийся лишним, платит противникам 1 руб.

Пусть 2-й и 3-й игроки решили образовать коалицию. Тогда платежная матрица имеет следующий вид:

Стратегии 1-го игрока \ Стратегии коалиции	**(1, 1)**	**(1, 2)**	**(2, 1)**	**(2, 2)**
1	0	1	1	–2
2	–2	1	1	0

Ясно, что коалиция договорится выбирать стратегии (**1, 1**) и (**2, 2**). Тогда цена игры для 1-го игрока будет равна – 1. Остается только один вопрос: *как коалиция будет делить выигрыш*?

Рассмотрим примеры применения разных принципов принятия решений при различных отношениях между коалициями.

Пусть групповое ЛПР состоит из двух участников. Существует четыре различных сочетания вариантов решения проблемы. Участники ЛПР оценили их рангами от 1 до 3:

Предпочтения	Варианты решений (1 – 4)			
	$y_1^1 y_2^1$	$y_1^1 y_2^2$	$y_1^2 y_2^1$	$y_1^2 y_2^2$
f_1	1	3	3	2
f_2	2	3	3	1

Здесь нижний индекс – это номер решения, а верхний индекс – номер участника группового ЛПР. Тогда в зависимости от выбранного принципа принятия решений и характера взаимоотношений в группе будут оптимальными следующие варианты решений:

Характер отношений \ Принцип	Курно	Парето	Эджворт
Статус-кво	$y_1^1 y_2^1, \quad y_1^2 y_2^2$	$y_1^1 y_2^1, \quad y_1^2 y_2^2$	$y_1^1 y_2^1, \quad y_1^2 y_2^2$
Конфронтация	$y_1^1 y_2^2, \; y_1^2 y_2^1$		
Рациональность	$y_1^1 y_2^2, \; y_1^2 y_2^1$		

Изменим теперь в условии задачи ранговые оценки участников группового ЛПР:

Предпочтения	Варианты решений (1 – 4)			
	$y_1^1\ y_2^1$	$y_1^1\ y_2^2$	$y_1^2\ y_2^1$	$y_1^2\ y_2^2$
f_1	2	4	1	3
f_2	2	1	4	3

Тогда в зависимости от выбранного принципа принятия решений и характера взаимоотношений в группе будут оптимальными следующие варианты решений:

Принцип / Характер отношений	Курно	Парето	Эджворт
Статус-кво	$y_1^2\ \ y_2^2$ (вариант 4)	$y_1^1\ y_2^1$	Оптимального по Эджворту решения не существует
Конфронтация		$y_1^1\ y_2^2$	
Рациональность		$y_1^2\ y_2^1$	

Вариант 1 предпочтительнее варианта 4, но по Курно не является устойчивым. Если оба участника будут действовать согласованно, то им обоим выгодно принять решение y_1.

Внимание!

Принцип согласования предпочтений – это система правил, описывающая способ построения группового предпочтения. Принцип представляется функцией $F(f_1,\ldots, f_n) = R$ на множестве X. Аргументами функции являются индивидуальные предпочтения в ГЛПР.

Вопрос

Существует ли возможность построить групповое отношение $R \rightarrow X \times X$ на множестве объектов X, предпочтение которых определяется?

Для каких F групповое отношение $R = F(f_1,\ldots, f_n)$ также будет предпочтением на X, т.е. транзитивным бинарным отношением?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим различные виды мажоритарного отношения R^* (принцип большинства голосов): $x_i R^* x_j$

истинно тогда и только тогда, когда не менее половины участников (***n*/2 + 1**) группового ЛПР считают x_i предпочтительнее, чем x_j.

Мажоритарное отношение R* естественным образом реализуется в ситуациях, когда групповое решение принимается голосованием. Результаты голосования можно подсчитывать по методу парных предпочтений Кондорсе, по методу балльных оценок Борда, по методу подавляющего большинства голосов.

Примерно 200 лет назад французский ученый маркиз де Кондорсе предложил принцип, который позволял определить победителя при демократических выборах.

Принцип Кондорсе

Кандидат, который побеждает при сравнении один на один с любым из других кандидатов, является победителем на выборах.

В бюллетени для голосования заносятся списки кандидатов, различающиеся порядком их следования, поэтому принцип Кондорсе применяется к небольшому числу объектов (если число кандидатов n=3, то число списков равно n! = 6). Избиратель выстраивает кандидатов по степени предпочтений. Победитель определяется путем попарного сравнения кандидатов по числу голосов, поданных за них.

Рассмотрим исторический пример. При голосовании на выборах председателя национального собрания Франции, состоящего из 60 человек, применили метод Кондорсе. На голосование были поставлены 3 кандидата: A, B и C. Обнаружился парадокс, суть которого состояла в следующем. Было получено распределение голосов избирателей, представленное в таблице:

№ п/п	Списки кандидатов	Голоса «за»	Голоса, поданные за пары		
			(A, B)	**(B, C)**	**(C, A)**
1	(A, B, C)	19	19	19	
2	(A, C, B)	2	2		

3	(B, C, A)	13		13	13
4	(B, A, C)	3		3	
5	(C, A, B)	7	7		7
6	(C, B, A)	6			6
Сумма голосов		**50**	28	35	26

В трех столбцах правой части таблицы выделены голоса за пары, которые получили больше половины голосов (50/2 < 26). Граф предпочтений в этом случае имеет вид, представленный на рис. 66.

Граф предпочтений

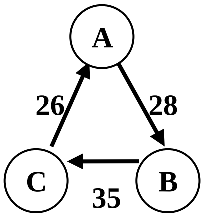


Рис. 66. Граф предпочтений кандидатов

Граф демонстрирует нетранзитивность групповых предпочтений! Кто победитель? Пара (**B, C**) получила максимум голосов – 35. За первое место **B** проголосовало только 16 избирателей, за **A** – 21. Ни **A** ни **B** не набрали половины голосов. Эта ситуация называется *парадоксом Кондорсе*. Парадокс Кондорсе может возникнуть и в отсутствие нетранзитивности предпочтений:

№ п/п	Списки кандидатов	Голоса «за»	Голоса, поданные за пары		
			(C, A)	**(C, B)**	**(B, A)**
1	(A, C, B)	19		19	
2	(B, C, A)	13	13		
3	(C, B, A)	16	16	16	16
4	(C, A, B)	2	2	2	
Сумма голосов		**50**	31	37	29

Граф предпочтений в этом случае имеет вид, представленный на рис. 67.

Граф предпочтений

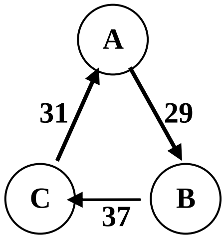


Рис. 67. Граф предпочтений кандидатов

Парадокс продемонстрирован на парах кандидатов, набравших наибольшее число голосов. Несмотря на то, что кандидат **C** в парах предпочтителен перед **A** и **B**, за его первое место проголосовало в сумме 18 человек, в то время, как за **A** – 19. При этом ни тот ни другой не набрал более половины голосов. Следует отметить, что перечень списков в таблице не полон (4 из 6). Отсутствие двух списков оказало влияние на результаты голосования!

Согласно ***методу балльных оценок Борда***, каждому голосу за ***r***-е место присуждаются баллы по формуле ***n–r+1*** (***n*** – число кандидатов). Затем подсчитывается сумма баллов, набранных каждым из кандидатов, по всем спискам с учетом места. В таблице представлен пример подсчета голосов по методу Борда:

№ п/п	Списки кандидатов	Голоса «за»	Оценка мест в баллах		
			A	**B**	**C**
1	(A, C, B)	26	26*3=78	26*1=26	26*2=52
2	(B, C, A)	10	10*1=10	10*3=30	10*2=20
3	(C, B, A)	12	12*1=12	12*2=24	12*3=36
4	(C, A, B)	2	2*2=4	2*1=2	2*3=6
Сумма голосов		**50**	104	82	**114**

Из таблицы видно, что победителем по баллам по методу Борда будет кандидат **С**.

Метод балльных оценок Борда не устраняет парадокса голосования по большинству голосов: за первое место кандидата **А** проголосовало больше половины (26) избирателей. Существуют и другие методы оценки результатов голосования: метод Симпсона (позволяет избежать парадокса Кондорсе), метод Доджсона (модификация подхода Кондорсе), метод Нансона и Кумбса (объединяет подход Борда и принцип Кондорсе), методы Коупленда, Фишберна и др. Все они в той или иной мере обладают следующими свойствами: результативностью, демократичностью, нейтральностью, монотонностью, единогласием, однородностью.

Рассмотрим пример того, как можно ухудшить жизнь избирателей, используя вполне демократический тотально-мажоритарный принцип (подавляющее большинство голосов) принятия групповых решений. Этот принцип состоит в следующем: тотально-мажоритарное отношение реализует принцип подавляющего большинства: отношение $\boldsymbol{x_i R x_j}$ истинно тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x_i}$ предпочтительнее, чем $\boldsymbol{x_j}$ для всех участников группового ЛПР, кроме, может быть, одного участника группы.

Пусть система в каждый момент времени $\boldsymbol{t}$ может находиться в одном из состояний $\{\boldsymbol{x_0,\dots, x_p}\}$. Каждое состояние характеризуется показателями $\{\boldsymbol{y_1,\dots, y_n}\}$. Предпочтения участников ЛПР на множестве $\boldsymbol{X}$ следующие: $\boldsymbol{x_{t+1} R x_t}$ истинно тогда и только тогда, когда показатель нового состояния лучше предыдущего!

При применении этого принципа также возникают парадоксы. Пусть в общем виде некоторое состояние системы $\boldsymbol{x_t} = (\boldsymbol{y_1, y_2, y_3, y_4})$ выражается через $\boldsymbol{S(x_t)}$ – сумму ресурсов, выделяемых каждому из четырех участников ЛПР.

Рассмотрим путь перехода состояний $x_0 \to x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4$:

$\boldsymbol{x_0} = (10, 10, 10, 10)$, $\boldsymbol{S(x_0)} = 40 \to \boldsymbol{x_1} = (11, 11, 11, 5)$, $\boldsymbol{S(x_1)} = 38 \to \boldsymbol{x_2} = (12,12,5,6)$, $\boldsymbol{S(x_2)} = 35 \to \boldsymbol{x_3} = (13,5,6,7)$, $\boldsymbol{S(x_3)} = 31 \to \boldsymbol{x_4} = (5,6,7,8)$, $\boldsymbol{S(x_4)}=26$.

Каждый переход состояния одобряется тремя из четырех участников, потому что их ресурс возрастает. Однако результатом является снижение, по сравнению с исходным состоянием, как их индивидуального ресурса, так и общего ресурса системы на 14 единиц! Таким образом, демократическим путем, манипулируя правилами выбора, можно ухудшить жизнь избирателей. Рассмотренный способ голосования отражает эгоистическую психологию ЛПР («лишь бы меня не трогали») и хитроумную «экономию» ресурсов.

В 1951 г. профессор из Стэнфорда К. Эрроу выполнил исследование возможных систем голосования. Он поставил вопрос так: можно ли создать систему голосования, чтобы она одновременно была демократической (один человек – один голос), не содержала парадоксов и позволяла осуществить выбор?

Вместо попыток изобретения такой системы он сформулировал ***аксиомы***, которым выборная система должна удовлетворять.

1. *Аксиома универсальности.* Система голосования должна учитывать все возможные распределения голосов уже на этапе подготовки к выборам при любых предпочтениях избирателей.

2. Акс*иома полноты.* Система голосования должна позволять сравнивать все пары кандидатов, определив, кто из них лучше, а также объявить двух кандидатов равнопривлекательными.

3. Акс*иома отсутствия диктатора.* Групповое предпочтение не должно всегда совпадать с предпочтением одного избирателя.

4. *Аксиома независимости.* Предпочтение избирателя для пары кандидатов А и В не должно зависеть от отношения избирателя к другим кандидатам.

5. Акс*иома ненавязанности группового решения.* Групповое решение должно приниматься на основе всех индивидуальных предпочтений.

6. Акс*иома транзитивности.* В системе голосования недопустимо нарушение транзитивности.

На основании аксиом Эрроу пришел к выводу об их несовместимости, т.е. невозможности одновременного их выполнения. Этот вывод постулируется следующей теоремой.

Внимание!

Теорема Эрроу (о невозможности)

Для $n \geq 3$ участников ЛПР и $N \geq 3$ кандидатов не существует принципа согласования, удовлетворяющего аксиомам 1–6.

Доказательство теоремы Эрроу фактически получается демонстрацией парадоксов голосования, рассмотренных ранее.

Следствие из теоремы Эрроу. Системы, удовлетворяющие аксиомам 1–6, обладают недопустимым с точки зрения демократии недостатком: каждая из этих систем является правилом диктатора – личности, навязывающей всем остальным избирателям свои предпочтения.

Результат Эрроу получил широкую известность и развеял надежды найти совершенную систему голосования: «Демократия является плохой формой правления, но человечество пока не придумало ничего лучшего» (У. Черчилль).

Предпринимаются, пусть пока безуспешно, попытки «смягчить» аксиомы, чтобы избежать неприятного для демократических выборов вывода. Суть этих предложений сводится к следующему:

- самый простой способ – отказаться от аксиомы диктатора;
- повысить компетентность участников;
- сочетать мажоритарные правила с фракционным подходом;
- принятие решения по результатам тестирования;
- поиск консенсуса;
- самый радикальный способ – заменить избирателей (экспертов).

В организациях ЛПР обязан объяснять свои решения. Даже диктаторы объясняли ближайшим помощникам мотивы своих решений. Возникает вопрос: насколько организации превосходят индивидуальных ЛПР по обоснованности и эффективности принимаемых решений? – Одним из первых попробовал ответить на этот вопрос Г. Саймон, который предложил теорию «ограниченной рациональности». Согласно этой теории, основными причинами отклонения поведения организаций от рационального, в отличие от индивидуальных ЛПР, являются:

• составные части организации предлагают несогласованные или противоречивые решения;

• стремление решить новую проблему привычными методами;

• стремление избежать неопределенности.

Недостатки систем принятия решений в организациях являются, по-видимому, общими для всех стран. Однако пути преодоления этих недостатков существенно зависят от национальной специфики. Наиболее известными системами принятия групповых решений являются японская система «ринго», западная система принятия решений, управление виртуальными организациями.

В системе «ринго» предложения об улучшениях, изменениях возникают на нижнем уровне иерархии управления организацией. Рядовой сотрудник разрабатывает во всех деталях предложение, возможно подсказанное ему сверху по специальной форме «Рингошо». Это – формуляр для представления новой идеи. Предложение идет снизу вверх, проходя по горизонтали и вертикали все уровни иерархии. Окончательное решение возвращается автору в виде приказа. Система ринго поощряет инициативу любого сотрудника, хотя решение готовится долго и требует единогласной поддержки. Однако исполняется решение очень быстро.

Отличный от ринго подход к принятию решений в организациях демонстрирует западный стиль принятия решений, характерный также для России: предложения поступают сверху и принимаются гораздо быстрее. Однако исполнение решения зачастую тормозится, в отличие от системы ринго, где исполнение решения подготавливается одновременно с его разработкой, где все участники чувствуют себя сопричастными к его подготовке.

Иное дело, принятие решений в нарождающихся современных организациях виртуального типа (руководство программистской фирмы находится на одном континенте, программисты – на других; аналогично – электронные магазины). Виртуальные организации с точки зрения принятия решений имеют существенные преимущества: ими руководит малое число людей, исчезает бюрократия, косность. Работа становится творческой, связанной с поиском новых решений. Главной проблемой в виртуальных организациях становится проблема управления знаниями, накопленными всеми членами организации.

Очевидно, что эта проблема может быть решена только путем создания общей для организации информационной системы, объединенной с помощью банков и баз знаний, в сочетании с развитой системой поиска, систематизации и распространения знаний опытных сотрудников.

Лекция 21. Автоматизация рационального выбора

Разработка автоматизированных систем поддержки принятия решений ведется по трем направлениям.

1. В рамках универсальных инструментальных систем (например, ***G2*** фирмы *Gensym Corp.)*
2. В рамках приложений к хранилищам баз данных и знаний с использованием технологии ***Data Mining***.
3. В рамках специализированных систем и методов (например, метода анализа иерархий).

В целом задача многокритериального выбора решается с помощью человекомашинных процедур (ЧМП). ЧМП включают *компьютерные расчеты* (метод Парето и т.п.) и *анализ решений* ЛПР. Для анализа решений используют различные методы: прямые методы, в которых ЛПР назначает веса критериев и корректирует их (например, алгоритм ***SIGMOP***); методы оценки векторов, в которых ЛПР сравнивает решения (например, алгоритм ***Дайера–Джиофриона***); методы поиска удовлетворительных решений, в которых ЛПР указывает ограничения на значения критериев и область достижимых значений (например, ***STEM***-алгоритм).

Понятие *Data Mining* появилось в 1978 г. О популярности DM говорит результат поиска термина DM в Google – свыше 20 млн страниц. Один из создателей DM, Шапиро так определил термин: Data Mining – это процесс поиска в сырых данных ранее неизвестных, нетривиальных, практически полезных знаний, необходимых для принятия решений в различных сферах деятельности. Наиболее известный сайт по DM – www.kdnuggets.com.

Процесс DM можно представить в следующем виде:

Выявление закономерностей (***абдукция***) → Прогноз (***дедукция***) → Анализ аномалий в закономерностях (***индукция***)

К настоящему времени разработаны стандарты, описывающие методологию DM: *CRISP-DM*, *SEMMA*, *PMML* и др. Согласно этим стандартам DM является непрерывным процессом со многими циклами и обратными связями.

Современная классификация задач принятия решений, решаемых с помощью методов DM, представлена на рис. 68. Собственно методы DM разделяются на следующие группы:

- *корреляционный анализ* – применяется для количественной оценки взаимосвязи разных наборов данных;
- *регрессионный анализ* – позволяет получать конкретные сведения о форме и характере зависимости между исследуемыми переменными;
- *деревья решений* – применяются для решения задач классификации и прогнозирования и включают алгоритмы CART, CHAID, NewId, Sprint;

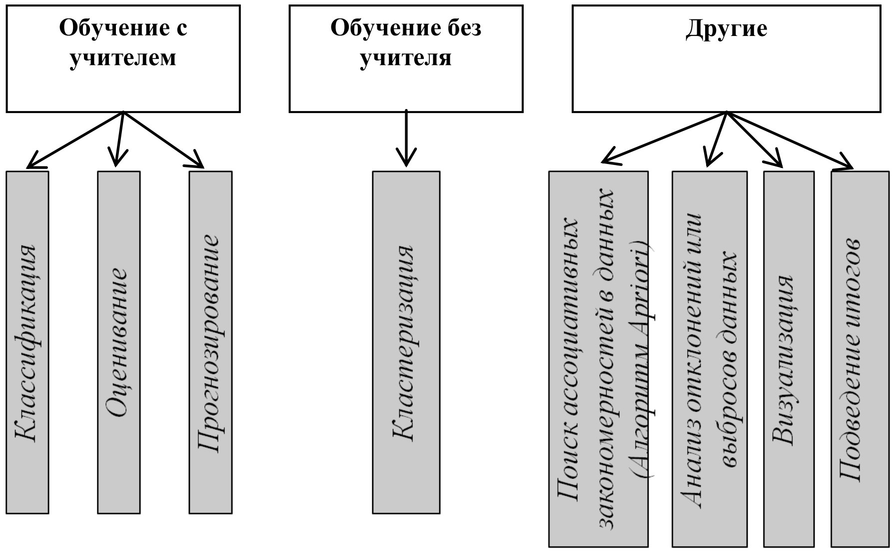


Рис. 68. Классификация задач, решаемых с помощью методов DM

- *метод k–ближайших соседей*;
- *метод байесовских сетей*;
- *методы кластерного анализа*;
- *методы поиска ассоциативных правил*;
- *методы визуализации данных* («лица Чернова» и др.).

К основным проблемам, связанным с автоматизацией процессов рационального выбора групповых решений, относятся:

1. Необходимость учитывать в решениях большое число противоречивых факторов и данных, пользуясь своей хорошо структурированной базой знаний.

2. Необходимость разбираться во всех аспектах деятельности предприятия или компании, а также их «окружения» (внешние организации, административные органы).

3. Нежелание «связываться» с информационными технологиями, поскольку они отнимают много сил, средств и приходится без конца учиться.

4. В сфере управления доминирует «старая культура» автоматизации, базирующаяся на техноцентрических подходах.

5. Существующие средства автоматизации принятия решений имеют «перекос» в сторону анализа ситуаций и систем. Необходима новая «ориентация» на синтез решений и новых знаний.

Приведем примеры наиболее известных программных инструментов для автоматизации принятия решений методами DM.

Пакет ***SAS Enterprise Miner*** предоставляет набор инструментов и алгоритмов прогностического и описательного моделирования, включающий деревья решений, нейронные сети, самоорганизующиеся нейронные сети, методы рассуждения, основанные на механизмах поиска в памяти, линейную и логистическую регрессии, кластеризацию, ассоциации, временные ряды и многое другое. Интеграция различных моделей и алгоритмов в пакете Enterprise Miner позволяет производить последовательное сравнение моделей, созданных на основе различных методов, и оставаться при этом в рамках единого графического интерфейса. Встроенные средства оценки формируют единую среду для сравнения различных методов моделирования, как с точки зрения статистики, так и с точки зрения бизнеса, позволяя выявить наиболее подходящие методы для имеющихся данных. Результатом является качественный анализ данных, выполненный с учетом специфических проблем ЛПР.

К достоинствам пакета относятся мощное интеллектуальное ядро; поддержка архитектур *клиент-сервер;* возможность доступа и интеграции данных из любых источников; наличие объектно-ориентированной технологии быстрой разработки приложений; высокая гибкость и переносимость. К недостаткам – громоздкость; высокие требования к статистической квалификации пользователя; жесткие требования к аппаратной части ЭВМ; высокая цена.

Пакет ***Oracle Data Mining*** поддерживает все этапы технологии принятия решений путем извлечения знаний из данных, включая постановку задачи, подготовку данных, автоматическое построение моделей, анализ и тестирование результатов, использование моделей в реальных приложениях. Пакет включает Oracle Data Mining Server (процедуры, реализующие различные алгоритмы извлечения данных) и Oracle Data Mining API (API для разработки). Технические характеристики пакета: архитектура клиент-сервер; широкое использование техники параллельных вычислений; высокая степень масштабируемости.

Пакет ***Oracle Real-Time Decisions*** создан для прогностической аналитики в режиме реального времени. Он построен полностью на SOA-архитектуре и публикует различные Web-сервисы, через которые осуществляется работа с сервером.

Пакет ***Deductor Warehouse*** – многомерное хранилище данных, аккумулирующее всю необходимую для анализа предметной области принятия решений информацию. Использование единого хранилища позволяет обеспечить непротиворечивость данных, их централизованное хранение и автоматически создает всю необходимую поддержку процесса анализа данных. Пакет оптимизирован для решения именно аналитических задач, что положительно сказывается на скорости доступа к данным. Алгоритмы DM в пакете представлены следующим набором: нейронные сети; линейная регрессия; прогнозирование; автокорреляция; деревья решений; самоорганизующиеся карты; ассоциативные правила.

Система ***STATISTICA Data Miner*** спроектирована и реализована как универсальное и всестороннее средство анализа данных – от взаимодействия с различными базами данных до создания готовых отчетов, реализующее так называемый графически-ориентированный подход. Ее особенностями являются большой набор готовых решений, удобный пользовательский интерфейс, гибкий механизм управления, многозадачность системы, а также открытая COM-архитектура, неограниченные возможности автоматизации и поддержки пользовательских приложений (использование промышленного стандарта Visual Basic, который является встроенным языком, Java, C/C++).

В целом на рынке имеется достаточно широкий ассортимент инструментов DM для поддержки принятия решений. У каждого есть свои особенности, достоинства и недостатки. Большинство современных пакетов DM поддерживают множество алгоритмов и имеют мощную систему визуализации. Многие пакеты имеют клиент-серверную архитектуру. Существуют решения для различных целей и различных масштабов деятельности.

Примерами отечественных систем поддержки принятия решений являются следующие разработки.

1. Асанов А.А., Ларичев О.И., Нарыжный Е.В. *Экспертная система ЭСТЕР для диагностики лекарственных отравлений*. Система работает с 19 группами распространенных препаратов и использует более 60 диагностических признаков. Она имитирует рассуждения и процесс принятия решения врачом-экспертом в токсикологии. Используется в Токсикологическом центре Министерства здравоохранения РФ.

2. Авдеев П.А., Еремеев А.П., Катович В.Н. *Диагностическая экспертная система предстартовой подготовки (ДЭС ПП) и её техническая реализация на основе высокоэффективного инструментального комплекса G2+GDA*. Система реализует принципы поддержки принятия решений для операторов, руководителей работ и экипажа при подготовке и эксплуатации сложных ракетно-космических комплексов.

3. Городецкий В.Н., Котенко И.В., Карсаев О.В. *Интеллектуальные агенты для обнаружения атак в компьютерных сетях*. Система создана на основе лицензионных программных продуктов типа G2, GDA, NeurOn-Line, Rethink и др., реализует многоагентную технологию, позволяющую динамически диагностировать состояние сложных технических систем и принимать решение об отражении компьютерных атак.

4. Тельнов Ю.Ф. *Технология реинжиниринга бизнес-процессов и конфигурации информационной системы предприятия на основе управления знаниями*. Технология основана на применении объектно-ориентированной модели и продукционных правил. Использует экспертный опыт принятия решений для задач интеллектуальной конфигурации объектов, накопленный в экспертных системах

(например, XCON, COCOS, VEXED, VT, DIDS и др.), может использоваться при конфигурировании бизнес-процессов.

Одной из наиболее интересных областей применения методов DM является задача прогнозирования и оценки ***риска***. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

По данным ООН, за последние 20 лет на планете в результате чрезвычайных ситуаций техногенного и природного характера погибло более 3 млн человек.

Оценка риска – это многокритериальная проблема выбора решения. Различают три вида риска:

- риск как вероятность нежелательных последствий;
- риск как величина возможных потерь;
- риск как комбинация вероятности и величины потерь.

Сейчас в этой области исследуются не только вопросы безопасности и надежности технических систем, но и все аспекты поведения человека. Основными направлениями исследований риска являются измерение риска и способы его количественного определения; повышение безопасности крупномасштабных технологических систем; аварии и их анализ.

В измерениях коллективного и индивидуального риска существуют следующие три подхода: инженерный, модельный и экспертный.

Инженерный подход применяется при вероятностной оценке риска в промышленных технологиях. Оценка производится с использованием метода построения *дерева отказов* и *дерева событий*.

И/ИЛИ дерево отказов строится с аварийного события в системе до событий, которые могут привести к аварии, и т.д. Его строят, чтобы понять причины аварии. Чтобы выяснить, к каким последствиям может привести авария, строится дерево событий (см. задачу о вазах, лекция 14).

Модельный подход состоит в имитации процессов, которые могут привести к нежелательным событиям. Применяется при установлении стандартов.

Экспертный подход основан на привлечении к оценке риска квалифицированных специалистов и согласовании их мнений.

Основными факторами, влияющими на субъективную оценку риска, являются следующие:

–*значимость последствий* (вначале угроза жизни и здоровью, далее угроза семейному благополучию, карьере и т.п.);

–*распределение угрозы во времени* (люди терпимее относятся к мелким частым авариям, чем к редким катастрофам, даже если суммарные потери в первом случае гораздо больше);

–*контролируемость ситуации* (люди идут на больший риск, когда многое зависит от их личного мастерства);

–*добровольность* (чем больше степень добровольности, тем выше уровень риска, на который согласны, например, курящие люди);

–*степень новизны технологии* (общество терпимее к старым технологиям, чем к новым);

–*характеристика субъекта*, оценивающего риск (пол, образование, эмоциональный настрой, обычаи, доверие), влияет на оценку уровня риска.

Сопоставляя разные подходы к измерению риска, можно сделать следующие выводы.

▪ Инженерный подход применим для старых изученных технологий. В современных технологиях надежность существенно определяется человекомашинным взаимодействием. Большинство крупных аварий связаны с ошибками человека. Вот почему традиционный инженерный подход вызывает недоверие: по его оценкам аварии почти невозможны, а в действительности они происходят.

▪ Существенные недостатки имеет и модельный подход: наших знаний в некоторых областях явно недостаточно для построения надежных моделей, следовательно, они строятся на гипотезах, а статистических данных для их проверки явно не хватает.

▪ Экспертный подход часто является единственным выходом из положения. Но и он имеет свои недостатки. Психологические исследования показывают, что люди плохо оценивают вероятность событий, а эксперты, например, не знают, как убедить людей в необходимости страхования, использовании ремней безопасности в автомобиле и др.

В настоящее время измерение риска используется при установлении стандартов на какую-либо технологию.

Это делается следующими способами: путем экспертных суждений; по аналогии с существующими стандартами; путем применения методов ТПР (многокритериальный анализ).

Например, иногда стандарты устанавливаются на основе экспертных суждений (бетонный купол атомного реактора должен выдержать прямое попадание самолета). Часто стандарты на новые источники риска устанавливаются по аналогии с известными. В случае аварии стандарты повышаются, а при длительной безопасной работе снижаются. Существенно более гибким является применение методов многокритериального принятия решений.

Для оценки надежности работы человека не существует общего метода. Правда, имеется методика прогнозирования ошибок, включающая как основной этап оценку частоты ошибок и их влияния на систему. При оценке частоты ошибок необходимо учитывать: качество подготовки, наличие инструкций, эргономику, степень независимости действий и психологические нагрузки. Например, один из выводов, к которому пришли разработчики человекомашинных систем, состоит в следующем: объем информации, который может быть хорошо усвоен оператором, не должен задаваться произвольно, оператор не должен долго бездействовать, желательно учебное проигрывание аварийных ситуаций на тренажерах и т.п. В МЧС РФ для профилактики чрезвычайных ситуаций все чаще применяется энтропийно-энергетическая концепция, суть которой в том, что катастрофы ведут к диффузии энергии в окружающую среду, росту хаоса и энтропии. Необходимо помнить, что рост энтропии связан только с самостоятельным процессом. Если процесс протекает вынужденно, за счет внешних факторов, то энтропия может уменьшаться. Поскольку аварии могут происходить при любом процессе, то чрезвычайная ситуация связана как с ростом, так и с уменьшением энтропии.

Системный подход заключается в том, что человекомашинная система должна рассматриваться как открытая динамическая система, в которой деятельность человека направлена на минимизацию риска аварии. В последнее время специалисты заговорили о «цене приемлемого риска», невозможности обеспечения нулевого риска и абсолютной безопасности. Величину риска понимают двояко: его нужно уменьшать, но помнить, что риск стимулирует развитие и самоорганизацию системы. Опираясь на историю, математик В.В. Пак сделал принципиальный вывод: «Если стремиться к долгосрочному точному прогнозу развития человечества и оценивать его риски, то на «стреле времени» нужно рассматривать гораздо больший интервал, чем охватывает официальная наука, включать в него те экспериментальные данные, которые человечество ассимилировало в виде легенд, мифов, религиозных заветов и др.».

Практикум

Практикум по модулю 4 включает тему «Принятие решений в многокритериальных задачах планирования».

Тема: «Принятие решений в многокритериальных задачах планирования»

Целью практикума является приобретение навыков постановки и решения задач сетевого планирования и управления, а также задач стратегического планирования по методу анализа иерархий (лекция 18).

Задача 1. При планировании некоторого проекта был составлен список операций, подлежащих выполнению, установлены оценки их продолжительности и определены операции, непосредственно предшествующие той или иной операции (столбцы 1–3):

Операция	Продолжи тельность	Непосредственно предшествующие	Непосредственно следующие	Вес
1	2	3	4	5
A	1	–	B,N	6
B	4	A, C, D	I	2
C	1	–	B, H, К	10
D	1	–	B, F, N	12
E	2	–	F	6
F	3	D, E	G,P	5
G	4	F	I	2
H	1	C	L,M	4
I	5	B, G, N	–	1
К	2	C	–	1
L	2	H	–	1
M	2	H	–	1
N	4	A,D	I	2
P	2	F	–	1
Q	6	–	R	2
R	3	Q	–	1

Очевиден недостаток такого рода таблиц – порядок следования операций в них носит случайный характер, неясно, какие операции более важные, какие должны непосредственно следовать после завершения данной операции и т.п. Упорядочим операции по важности, вычислив вес каждой операции наиболее простым способом.

Вначале заполним столбец 4 таблицы, указывая для каждой операции непосредственно следующие за ней операции путем просмотра столбца 3. Будем считать вес операции равным сумме числа непосредственно следующих за ней операций и весов этих операций. Вес конечных операций, которые не имеют списка непосредственно следующих операций, равен единице. Заполнение столбца 5 таблицы проводится путем просмотра столбца 4 снизу вверх, возможно, несколько раз.

Далее операции выстраиваются в порядке невозрастания их весов, и можно приступать к построению сетевого трафика, учитывая при этом продолжительность операций и правила построения графика, а также проверяя, чтобы вводимые фиктивные операции не влияли на непосредственно следующие. Если считать, что каждая операция начинается в наиболее ранний срок, то возможный вариант сетевого графика для рассматриваемого примера имеет вид, представленный на рис. 69.

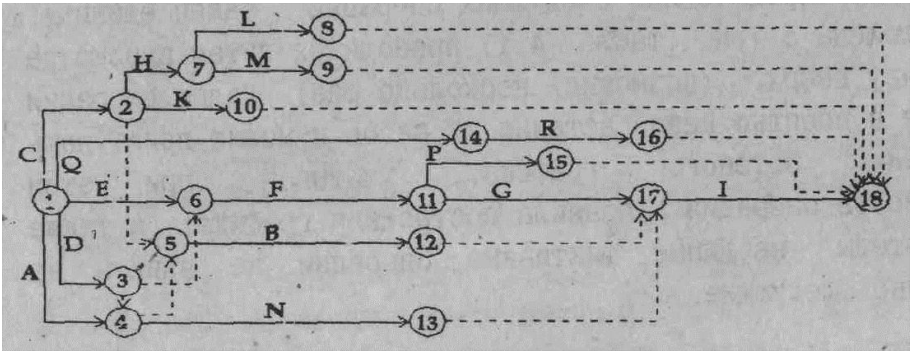


Рис. 69. Пример сетевого графика

Построение сети – это лишь первый шаг для получения календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой операция. Для выявления критических путей и резервов времени необходимо проделать специальные расчеты.

Согласно определению, операция считается *критической*, если задержка ее начала приводит к увеличению срока окончания всего плана. Для критической операции промежуток времени между ранним началом и поздним окончанием равен ее фактической продолжительности, в отличие от некритических операций, которые имеют *резерв времени*. *Критический путь* является непрерывной цепочкой критических операций. Метод его определения проиллюстрируем на числовом примере.

Пусть для некоторой задачи был построен сетевой график (рис. 70).

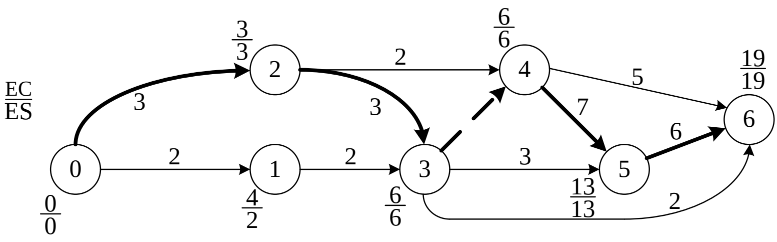


Рис. 70. Сетевой график и критический путь

Исходное событие – 0, конечное событие – 6. Продолжительность каждой операции D_{ij} указана на ориентированных ребрах графа. Расчет критического пути производится при прямом и обратном ходе. Двигаясь от исходного к завершающему событию, вычисляем ранний срок наступления событий (он указан рядом с событием под дробной чертой). Затем, двигаясь от завершающего события к исходному (обратный ход), вычисляем поздний срок наступления события (он указан над дробной чертой).

Рассмотрим вначале процедуру прямого хода. Обозначим через ES ранний срок начала всех операций, выходящих из события i. Иными словами, ES_i является также ранним сроком наступления i-го события. Если i = 0, то $ES_0 = 0$. В общем случае, имеем:

$$ES_i = \max_j\{ES_j + D_{ij}\},$$

т.е. чтобы вычислить ES_i для некоторого события i, необходимо сначала определить все ES_j начальных событий для операций (i, j), входящих в событие j. В частности, для сети на рис. 70 имеем:

$$ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0+2 = 2,$$
$$ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0+3 = 3,$$
$$ES_3 = \max_{i = 1,2}\{ESi + D_{13}) = \max(2+2 ; 3+3\} = 6,$$
$$ES_4 = \max_{i=2,3}\{ESi + D_{14}\} = \max\{3+2 ; 6+0) = 6,$$
$$ES_5 = \max_{i = 3,4}\{ESi + D_{15}\} = \max\{6+7 ; 6+3\} = 13,$$
$$ES_6 = \max_{i=3,4,5}\{ESi + D_{16}) = \max\{6+2 ; 6+5 ; 13+6\} = 19.$$

Обозначим через LC_i поздний срой окончания всех операций, входящих в событие i. При i = n имеем $LC_n = ES_n$ – это отправная точка для обратного хода. В общем случае, имеем:

$$LC_i = \min_j\{LC_j - D_{ij}\},$$

т.е., чтобы вычислить LC_i для некоторого события i, необходимо сначала определить все LC_j конечных событий для операций (i, j), выходящих из события i. В частности, для сети (см. рис. 70) имеем:

$$LC_6 = ES_6 = 19;\ LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19–6 = 13,$$

$$LC_4 = \min_{j=5,6}\{LC_j - D_{4j}\} = \min\{13–7\ ;\ 19–5\} = 6,$$

$$LC_3 = \min_{j=4,5,6}\{LC_j - D_{3j}\} = \min\{6–0\ ;\ 13–3\ ;\ 19–2\} = 5,$$

$$LC_2 = \min_{j=3,4}\{LC_j - D_{2j}\} = \min\{6–3\ ;\ 6–2\} = 3,$$

$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6–2 = 4,$$

$$LC_0 = \min_{j=1,2}\{LC_j - D_{0j}) = \min\{4–2\ ;\ 3–3\} = 0.$$

Операция (i, j) принадлежит критическому пути, если

$$ES_1 = LC_i\,,$$

$$ES_j = LC_j\,,$$

$$ES_j - ES_j = LC_j - LC_i = D_{ij}\,,$$

т.е. нет резерва времени для ее выполнения. Иными словами, для критических операций ранний срок наступления события i совпадает с поздним сроком наступления этого же события и то же самое можно сказать относительно события j. Разность между ранними сроками (или поздними сроками) наступления событий i, j равна продолжительности операции (i, j). Для рассмотренного примера сетевого графика (см. рис. 70) критический путь включает операции **(0, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)** и определяет кратчайшую продолжительность плана в целом, являясь непрерывной цепочкой операций.

Для критических операций резерв времени равен нулю. Чтобы определить резерв времени некритических операций введем следующие определения:

Срок позднего начала операций (i, j) равен

$LS_{i,j} = LC_j – D_{ij}$.

Срок раннего окончания операции (i, j) равен

$EC_{ij} = ES_i + D_{ij}$.

Полный резерв времени (TF) операции (i, j) равен разности между максимальным отрезком времени, в течение которого может быть выполнена операция:

$TF_{i,j} = (LC_j – ES_i) – D_{i,j} = LC_j – EC_{i,j} = LS_{i,j} – ES_i$.

Свободней резерв времени определяется при условии, что все операции в сети начинаются в ранние сроки. При этом условии свободный резерв (FF) операции (i, j) равен

$$FF_{i,j} = (ES_j – ES_i) – D_{ij}.$$

Результаты расчета критического пути и резервов времени для сетевого графика, представленного на рис. 70, сведем в таблицу:

(i,j)	D_{ij}	Раннее		Позднее		TF_{ij}	FF_{ij}
		начало ES_i	окончание EC_{ij}	начало LS_{ij}	окончание LC_j		
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	0	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	0*	0
(2.4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	0*	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	0*	0
(4, 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	0*	0

Отметим, что если полный резерв операции $TF_{i,j}$ равен нулю (критическая операция, помечена в таблице знаком *), то свободный резерв $FF_{i,j}$ также равен нулю (обратное – неверно).

Рассмотрим теперь задачу стратегического планирования и метод МАИ для ее решения. Напоминаем, что МАИ включает следующие этапы.

1. Формулирование задачи и определение цели плана.

2. Построение иерархии: цель → критерии → альтернативы.

3. Построение множества матриц парных сравнений (критериев, альтернатив и т.п.), уточнение шкалы сравнения.

4. Вычисление векторов приоритетов, индексов согласованности (ИС) и отношений согласованности (ОС). Повторение пп. 3, 4 метода для всех уровней иерархии.

5. Иерархический синтез всей иерархии.

Сформулируем задачу и определим цель плана на примере следующей задачи планирования.

Задача 2. Семья решила купить дом (цель плана). Обсудив, определили 8 критериев, которым должен удовлетворять дом:

- $К_1$ – размеры дома (жилая и общая площади, число комнат);
- $К_2$ – транспортные удобства;
- $К_3$ – окрестности (безопасность, вид, экология);
- $К_4$ – год постройки дома;
- $К_5$ – двор;
- $К_6$ – оборудованность дома;
- $К_7$ – потребность в ремонте;
- $К_8$ – стоимость и условия продажи.

Задача заключается в выборе и покупке одного из трех альтернативных домов: А, Б или В.

Построим вначале иерархию задачи: цель – критерии – альтернативы (рис. 71).

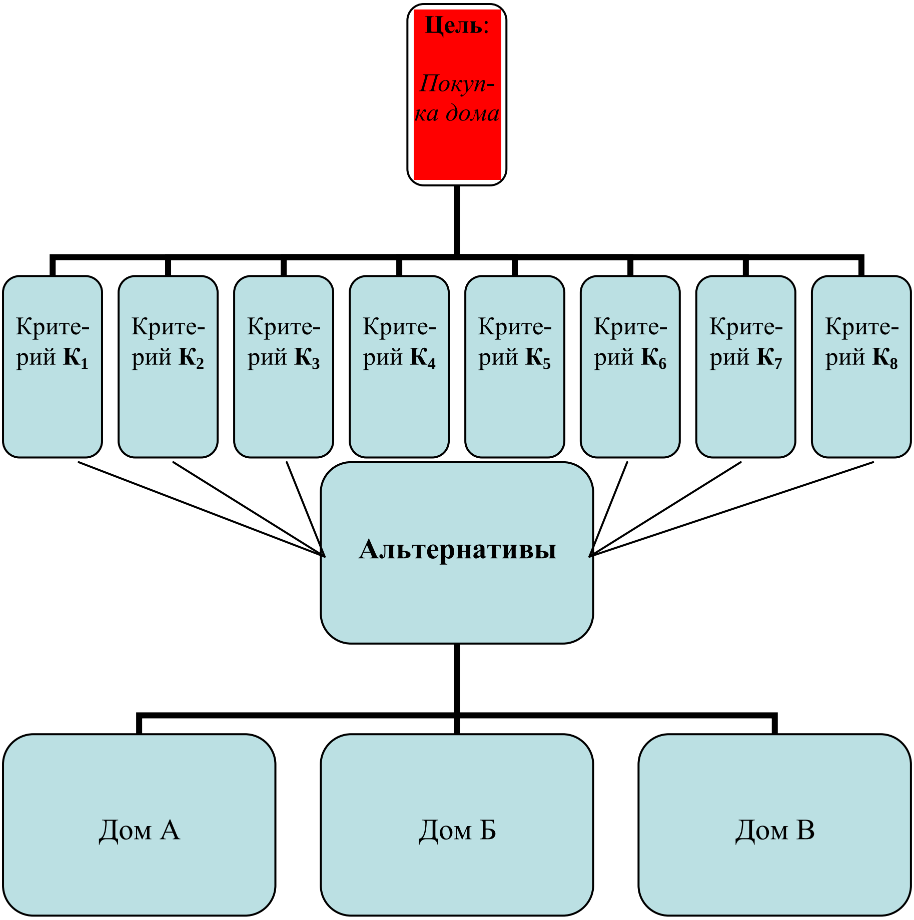


Рис. 71. Иерархическое дерево задачи

Построим множество матриц парных сравнений критериев и альтернатив, используя 9-балльную шкалу сравнения. Все матрицы должны обладать свойством обратной симметричности, т.е. $\boldsymbol{a_{ji}=l/a_{ji}}$, где j – номер столбца, i – номер строки.

Вначале необходимо построить одну матрицу размером 8×8, попарно сравнив восемь критериев между собой по отношению к цели, взяв за основу выработанные семьей экспертные оценки.

Пусть эти оценки выражаются следующей матрицей:

Цель	К1	К2	К3	К4	К5	К6	К7	К8
К1	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4
К2	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7
К3	1/3	3	1	6	3	4	6	1/5
К4	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8
К5	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6
К6	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6
К7	3	5	1/6	7	5	5	1	1/2
К8	4	7	5	8	6	6	2	1

Для построения восьми матриц размером 3×3 необходимо иметь детальное описание каждой альтернативы. Приведем в качестве примера краткое описание альтернативных вариантов дома.

Дом А. Большой, с хорошими окрестностями. Двор больше, чем у домов Б и В, необходим основательный ремонт. Дорогой.

Дом Б. Размеры меньше, чем у дома А. Расположен вдали от остановок общественного транспорта. Не полностью оборудован, но в отличном состоянии и дешевый.

Дом В. Небольшой, в хорошем состоянии, рядом парк. Двор средний по размерам. Недорогой, но и не дешёвый.

Семья попарно сравнила три альтенативных варианта дома по отношению к каждому из восьми критериев. В результате опроса мнений были получены следующие матрицы:

$К_1$	А	Б	В	$К_2$	А	Б	В	$К_3$	А	Б	В	$К_4$	А	Б	В
А	1	6	8	А	1	7	1/5	А	1	8	6	А	1	1	1
Б	1/6	1	4	Б	1/7	1	4	Б	1/8	1	1/4	Б	1	1	1
В	1/8	1/4	1	В	5	1/4	1	В	1/6	4	1	В	1	1	1
$К_5$	А	Б	В	$К_6$	А	Б	В	$К_7$	А	Б	В	$К_8$	А	Б	В
А	1	5	4	А	1	8	6	А	1	1/2	1/2	А	1	1/7	1/5
Б	1/5	1	1/3	Б	1/8	1	1/5	Б	2	1	1	Б	7	1	3
В	1/4	3	1	В	1/6	5	1	В	2	1	1	В	5	1/3	1

Из сформированных матриц парных сравнений определим векторы локальных приоритетов, которые отражают влияние элементов нижних уровней иерархии на элементы верхних уровней. Для этого необходимо вычислить собственный вектор каждой из матриц, а затем нормализовать их к единице. Это и будет вектор локальных приоритетов.

Воспользуемся для вычисления вектора собственных значений приближенным методом среднего геометрического. Согласно этому методу вычисление собственных значений матрицы размером (n×n) заменяется вычислением среднего геометрического в каждой строке матрицы путем перемножения всех элементов строки и извлечения из произведения корня n-й степени. Полученный таким образом вектор собственных значений нормализуется к единице путем деления каждого собственного значения на сумму всех чисел вектора собственных значений. Это позволяет определить "вес" приоритета.

Для матрицы критериев после вычислений получаем вектор локальных приоритетов критериев: (0,173; 0,054; 0,188; 0,018; 0,031; 0,036; 0,167; 0,333). Как интерпретировать эти локальные приоритеты?

– Критерий $К_8$ (стоимость и условия продажи дома) равен 0,333, т.е. этот критерий является наиболее весомым. Он в два раза важнее значения критерия размера дома (0,173) и намного важнее года постройки (0,018). Вообще говоря, после этого можно сократить число критериев до трех или четырех, выбрав наиболее приоритетные из них. Для этого необходимо найти сумму критериев и вновь нормализовать сокращенный вектор к единице. Однако, решая вопрос об исключении каких-то критериев после первых вычислений, следует быть предельно осторожным. Для рассматриваемого примера сохраним все критерии.

Для восьми матриц альтернатив после вычислений получаем векторы: (0,754; 0,181; 0,065), (0,233; 0,005; 0,713), (0,745; 0,065; 0,181), (0,333; 0,333; 0,333), (0,674; 0,101; 0,226), (0,747; 0,060; 0,193), (0,2; 0,4; 0,4), (0,072; 0,650; 0,278).

Далее для каждой матрицы необходимо вычислить индекс согласованности (ИС): вначале суммируются элементы каждого столбца матрицы парных сравнений, затем сумма j-го столбца умножается на j-й элемент нормализованного вектора локальных приоритетов, наконец, все полученные n чисел суммируются. Если полученную сумму обозначить через h_{max}, то ИС = (h_{max} – n) / (n – 1). Например, для 8 матриц альтернатив значения h_{max} соответственно равны: 3,136; 3,247; 3,133; 3,0; 3,086; 3,197; 3,0; 3, 065. Проверяем выполнение свойства обратно симметричных матриц: $h_{max} \geq 3$. Видно, что оно выполняется. Тогда значения индексов согласованности для 8 матриц альтернатив соответственно равны: 0,068; 0,124; 0,068; 0,0; 0,043; 0,099; 0,0; 0,032.

Вычислим отношение согласованности (ОС) в полученных матрицах по формуле

$$ОС = ИС/ИС_{сл} \times 100\ \%.$$

Значения индекса случайной согласованности $ИС_{сл}$ выбираем из таблицы:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$ИС_{сл}$	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Например, значения ОС для 8 матриц альтернатив соответственно равны: 11,7 %; 21,3 %; 11,7 %; 0 %; 7,4 %; 17 %; 0 %; 5,6 %. Приемлемым считается значение ОС около 10 %, допустимым значением – 20 %. Таким образом, значение ОС при сравнении альтернативных решений по критерию $К_2$ оказалось несколько хуже допустимого уровня согласованности. Это означает желательность пересмотра соответствующей матрицы с целью добиться большей согласованности в экспертных оценках. Однако семья не стала пересматривать данную матрицу парных сравнений.

Переходим к заключительному этапу МАИ – иерархическому синтезу приоритетов, начиная с верхних уровней в направлении к нижним уровням. Для этого необходимо сформировать вектор глобального приоритета. Элементы этого вектора получают путем умножения локальных приоритетов низшего уровня на приоритет критерия соседнего верхнего уровня иерархии с последующим суммированием полученных произведений по всем критериям. В результате получаем значение глобального приоритета по каждой из альтернатив. В таблице представлены результаты расчетов:

Критерии	$К_1$	$К_2$	$К_3$	$К_4$	$К_5$	$К_6$	$К_7$	$К_8$	Глобальный приоритет
Приоритет критериев	0,173	0,054	0,188	0,018	0,031	0,036	0,167	0,333	
А	0,754	0,233	0,745	0,333	0,674	0,747	0,2	0,072	**0,396**
Б	0,181	0,005	0,065	0,333	0,101	0,06	0,4	0,65	0,341
В	0,065	0,713	0,181	0,333	0,226	0,193	0,4	0,278	0,263
h_{max}	3,136	3,247	3,133	3,0	3,086	3,197	3,0	3,065	
ИС	0,068	0,124	0,068	0,0	0,043	0,099	0,0	0,032	
ОС	0,117	0,213	0,117	0,0	0,074	0,170	0,0	0,056	

Например, глобальный приоритет для дома А вычисляется по следующей формуле:

$$0{,}754\times0{,}173 + 0{,}233\times0{,}054 + 0{,}745\times0{,}188 + 0{,}333\times0{,}018 + 0{,}674\times0{,}031 + 0{,}747\times0{,}036 + 0{,}2\times0{,}167 + 0{,}072\times0{,}333 = 0{,}396.$$

Таким образом, с небольшим перевесом «победителем» стал дом А, который является наименее желательным с финансовой точки зрения. Это неочевидное решение объясняется тем, что дом А превосходит остальные альтернативы по четырем из восьми критериев.

Заключение по модулю 4

Важной характеристикой проблемы принятия решений является ее размерность. Под размерностью мы понимаем количество критериев, количество альтернативных вариантов решений. Ясно, что размерность проблемы влияет на выбор метода ее решения. Если ЛПР использует несколько критериев принятия решений, то это многокритериальная задача, в которой одни варианты могут быть лучше других по одним критериям, и – наоборот. Поэтому необходимы методы, позволяющие определить наилучший компромисс между критериями.

Трудность их разработки состоит в том, что в задачах многокритериального выбора всегда существует неопределенность, связанная с сопоставлением оценок по различным критериям. Эта неопределенность является принципиальной и не может быть исключена на основе использования моделей и объективных расчетов. Для решения многокритериальных задач в последние годы стремятся применить подход, основанный на идее выявления предпочтений критериев одновременно с исследованием допустимого множества действий для отыскания эффективных решений.

В теории многокритериальных решений к критериям предъявляются определенные требования, а многокритериальность приводит к необходимости одновременного рассмотрения пространства допустимых решений и критериев. Чтобы осуществить выбор оптимального решения из множества допустимых, Парето выдвинул следующее требование: они должны обладать не худшими показателями критериев по сравнению с другими допустимыми решениями. Каждому сочетанию направлений оптимизации соответствует своя область Парето. Парето-оптимальное решение должно устраивать все стороны, а находясь в паретовской точке, каждый участник ЛПР знает, что он не может увеличить свой выигрыш, не ущемляя интересов других. Точек Парето, как правило, много, и они существенно отличаются величинами критериев для разных участников группового ЛПР. Не существует универсального механизма выбора единственного решения, устраивающего всех. Требуются переговоры между участникам ЛПР.

Смена принципа принятия решений на игровой не помогает в достижении возможности индивидуальных действий участников игры. Это подтверждает обоснованность идеи Парето о поиске решений, неулучшаемых одновременно по всем заданным критериям. Однако

Парето-решений, как правило, много, и проблема выбора единственного решения остается. Предложено большое число способов разрешения этой проблемы, базирующихся на наличии у ЛПР определенных предпочтений. Обилие подходов свидетельствует об их аксиоматической уязвимости. Тем не менее, эти подходы широко применяются на практике, в частности, к ним относятся рассмотренные разновидности метода суперкритерия, метод «идеальной точки», метод анализа иерархий.

Фундаментальным подходом к многоэтапному выбору в условиях вероятностной неопределенности является марковский процесс принятия решений, основная особенность которого заключается в том, что «будущее» и «прошлое» случайного управляемого процесса не влияют друг на друга. Примерами марковских задач принятия решений служат практические проблемы, где конечный результат зависит от начальной ситуации и влияния случайных факторов – управление запасами при стохастическом выполнении заказов, управление финансовыми операциями, ресурсами, ремонт и замена оборудования, планирование эксперимента.

В процессе практического применения методов многокритериальной оптимизации не всегда результаты, получаемые этими методами, отражают истинную картину. С другой стороны, справедлив вопрос: «А кому известна эта картина, кто обладает истиной в последней инстанции?». – «Любая человеческая оценка обладает определенной долей субъективизма и никогда не может претендовать на абсолютную истинность» (С.С. Микони). Парадоксы группового выбора не должны смущать. Их следует рассматривать как поверхностное восприятие результатов, не учитывающее ряда скрытых факторов. Анализ этих факторов методами теории принятия решений позволяет дать объяснение многим парадоксам. ТПР охватывает очень широкий круг задач группового рационального выбора в организациях, исходя в том числе из запросов экономики, техники, технологий и военных нужд. Однако возможности применения методов группового выбора в ещё большей степени, чем в случае индивидуального выбора ограничены неполнотой, неточностью и нечёткостью исходных данных.

В настоящее время спектр применения ее результатов значительно расширился – от новых информационных технологий (проектирование интеллектуальных систем поддержки принятия решений, систем и методов Data Mining, анализа риска) до многоагентных систем и роботов, действующих в информационной и физической среде. В ТПР ведутся разработки единого подхода к построению моделей рационального выбора альтернатив, экспертных систем различного назначения и человекомашинных процедур. С их помощью ЛПР проясняет характерные черты задачи, выявляет и уточняет свои предпочтения, благодаря чему ЭВМ вырабатывает более совершенные решения, самообучается на реальных задачах, что и объясняет потенциальную эффективность подобных систем принятия решений. Процесс заканчивается, когда ЭВМ вырабатывает приемлемое для ЛПР решение или ЛПР убеждается в нецелесообразности дальнейших попыток получить лучшее решение при данной модели. На ключевые вопросы, возникающие при создании человекомашинных процедур: как распределить обязанности между человеком и ЭВМ и как организовать процесс их взаимодействия? – обычно даются рекомендации самого общего характера без учета специфики решаемой задачи, изучения характеристик человека в процессе принятия решений и т.п. Таким образом, в данной области ТПР наряду с решенными вопросами имеется много интересных теоретических проблем и актуальных, но не имеющих удовлетворительного решения практических задач.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоят особенности многокритериальных задач принятия решений?
2. Каковы основные требования к критериям?
3. Как интерпретируется пространство критериев?

4. Охарактеризуйте задачи и методы поиска по дереву решений.

5. Что собой представляет область допустимых решений и пространство достижимости критериев?

6. Какие решения называются Парето-оптимальными?

7. Приведите пример поиска Парето-оптимальных решений в дискретном пространстве.

8. Приведите пример поиска Парето-оптимальных решений в континуальном пространстве.

9. Приведите игровую трактовку многокритериальных задач.

10. Охарактеризуйте аддитивный метод суперкритерия.

11. В чем состоит мультипликативный метод суперкритерия.

12. Охарактеризуйте максиминный метод суперкритерия.

13. Приведите постановку и подход к решению задачи «прибыль–загрязнение».

14. Охарактеризуйте метод идеальной точки и особенности его применения.

15. Сформулируйте общую постановку задачи планирования.

16. Охарактеризуйте основные этапы сетевого планирования.

17. Как строится сетевой график и находится критический путь.

18. Опишите этапы решения задач стратегического планирования методом МАИ.

19. Что собой представляет матрица парных сравнений в МАИ и какова шкала сравнений при заполнении матриц парных сравнений?

20. Как определяется вектор локальных приоритетов по матрице парных сравнений?

21. Что такое индекс и отношение согласованности?

22. Как производится синтез иерархии и вычисляется вектор глобального приоритета?

23. Какой процесс называется марковским и что собой представляет его моделирование?

24. Приведите примеры моделей марковского случайного процесса с дискретным и непрерывным временем.

25. Каковы основные принципы группового выбора решений?

26. Каковы основные типы, характеризующие возможные отношения между коалициями группового ЛПР?

27. В чем состоит принцип и парадокс Кондорсе.

28. В чем состоит метод балльных оценок Борда?

29. Сформулируйте аксиомы и теорему Эрроу.

30. Сформулируйте основные подходы к автоматизация многокритериального выбора.

31. Что такое Data Mining?

32. Какова классификация задач и методов DM?

33. Что такое риск при принятии решений?

34. Как принято измерять и оценивать риск?

35. Каковы основные факторы, влияющие на риск?

Исследовательские задачи

1. Самостоятельно очертить постановку задачи стратегического планирования. Построить иерархическое дерево, указав цель плана, критерии, от которых зависит достижение цели, и несколько альтернатив. Применить к поставленной задаче метод анализа иерархий для выбора наиболее желательной альтернативы.

2. На голосование поставлены три кандидата: X, Y и Z. В голосовании участвовало 100 человек. Предпочтения голосовавших распределились следующим образом: $X \to Y \to Z$ – 40 голосов, $Z \to Y \to X$ – 32 голоса, $Y \to Z \to X$ – 19 голосов, $Z \to X \to Y$ – 9 голосов. Определить победителя: по большинству голосов, по принципу Кондорсе, по методу Борда.

3. Самостоятельно выбрать несколько программных продуктов. Воспользовавшись экспертными оценками их функциональных и технических характеристик по некоторому множеству критериев, выбрать по методу суперкритерия лучший вариант.

4. ЛПР формирует инвестиционный портфель, принимая решение о покупке некоторого объема из двух видов ценных бумаг. Первый вид характеризуется невысоким уровнем доходности и риска,

второй вид – высоким уровнем доходности и риска. Уровень риска определяется разностью в объемах инвестиций, а доходность – их суммой. ЛПР при планировании объемов инвестиций стремится уменьшить риск и увеличить доходность. Заданы инвестиционные ограничения по доходности и риску портфеля. Суть работы по управлению портфелем заключается в распределении инвестиционной суммы в определенных долях в каждый вид ценных бумаг. Построить графически область допустимых решений и пространство достижимости критериев, проверив линейную независимость критериев. Найти и проинтерпретировать Парето-оптимальные решения. Если Парето-оптимальное решение будет не единственным, то найти идеальную точку, опустить перпендикуляр из нее на множество Парето и определить единственное решение.

Итоговый тест по модулю 4

1. Классификация человекомашинных процедур (ЧМП) принятия многокритериальных решений включает: а) венгерский метод, б) процедуры оценки векторов, в) поиск удовлетворительных значений критериев, г) метод Борда, д) прямые ЧМП.

2. Принципы группового выбора решений: 1) Парето, 2) Курно и 3) Эджворта – основаны на общем предположении, что решение будет оптимальным, если ни одной коалиции невыгодно менять это решение, так как не существует лучшего. Укажите соответствие между указанными принципами и их отличительными особенностями: а) все коалиции являются одноэлементными, группа состоит из независимых участников, б) коалиции состоят из произвольного числа участников, в) в одной большой коалиции высокая степень общности целей всех участников группы.

3. Различают следующие виды риска: а) величина возможных потерь, б) вероятность выбора наилучшего решения, в) вероятность нежелательных последствий или потерь, г) мера отклонения от средней величины возможных потерь, д) средняя ожидаемая величина потерь за определенный период.

4. Укажите соответствие между методами Data Mining: 1) деревья решений; 2) кластерный анализ; 3) корреляционный анализ; 4) регрессионный анализ и их назначением: а) оценка взаимосвязи двух наборов данных; б) выявление формы и характера зависимости между переменными; в) представление правил поиска решений в иерархической структуре; г) выделение среди множества объектов схожих между собой на основе измерения «расстояния».

5. Множество Парето-оптимальных решений между собой несравнимы, т. е. нельзя сказать, какое из них предпочтительнее: а) верно, б) не верно, в) иногда верно, иногда не верно.

6. Экспертные системы поддержки принятия решений – это класс интеллектуальных систем, ориентированный на тиражирование опыта высококвалифицированных специалистов в областях, где качество принятия решений зависит от уровня экспертизы: а) верно, б) не верно, в) иногда верно, иногда не верно.

7. Решение называется Парето-оптимальным, если не существует решения строго лучшего для всех участников при коллективном принятии решения: а) верно, б) не верно, в) иногда верно, иногда не верно.

8. Главное отличие экспертных систем поддержки принятия решений от других программных средств – это наличие базы знаний: а) верно, б) не верно, в) иногда верно, иногда не верно.

9. Допустимые решения, несравнимые между собой по множеству критериев, называются …

10. Количественная оценка цели, величина, на основании которой сравниваются и выбираются лучшие решения, – это …

11. Правильная последовательность этапов метода анализа иерархий: а) вычисление вектора приоритета и согласованности матриц; б) иерархический синтез; в) определение цели плана; г) построение иерархии; д) построение множества матриц парных сравнений.

12. Предпочтение избирателя для пары кандидатов А и В не должно зависеть от отношения избирателя к другим кандидатам. Это – аксиома …

13. Групповое предпочтение не должно всегда совпадать с предпочтением одного избирателя. Это – аксиома …

14. Система голосования должна позволять сравнивать все пары кандидатов, определив, кто из них лучше, а также объявить двух кандидатов равнопривлекательными. Это – аксиома …

15. Кандидат, который побеждает при сравнении один на один с любым из других кандидатов, является победителем на выборах. Это – принцип …

16. По методу МАИ построена иерархия, включающая цель плана, 5 критериев ее достижения и 4 альтернативных варианта. Согласно МАИ необходимо построить матриц парных сравнений: а) 4, б) 5, в) 6, г) 7, д) 8.

Список литературы по модулю 4

Основная литература

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. – М.: Логос, 2002.

2. Микони С.В. Теория и практика рационального выбора: Монография. – М.: Маршрут, 2004.

3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

4. Родзин С.И. Руководство для самостоятельной работы, контрольные вопросы, индивидуальные задания по курсу «Теория принятия решений». – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1996.

5. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. – М.: Радио и связь, 1992.

Дополнительная литература

6. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-пресс, 2002.

7. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970.

8. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.

9. Лотов А.В., и др. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. – М.: Наука, 1997.

10. Смоляков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. – М.: Едиториал УРСС, 2005.

11. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений. – М.: Синтег, 1998.

Веб-источники, электронные образовательные ресурсы

12. **Сайт журнала «International Journal of Game Theory»** [интернет-ресурс], страничка журнала на сайте издательства: http://www.springerlink.com/app/home/jou...
http://www.springeronline.com/sgw/cda/fr...
Журнал «International Journal of Game Theory» публикуется издательством Physica Verlag, выходит ежеквартально с 1997 года. Главный редактор – William Thomson, профессор экономического факультета University of Rochester. В журнале можно найти статьи, обзоры, результаты исследований, посвященные теории и методологии игр, а также приложениям в различных областях теории принятия решений и других наук.

13. **Сайт журнала «International Game Theory Review» (IGTR)** [интернет-ресурс] http://ejournals.wspc.com.sg/journals/ig...
Журнал «International Game Theory Review» выпускается издательством World Scientific Publishing Co с 1999 года ежеквартально. Главный редактор – David W.K. Yeung – Centre of Game Theory, профессор Hong Kong Baptist University. В журнале регулярно публикуются статьи, обзоры, результаты исследований, посвященные теории и методологии игр, а также приложениям в различных областях теории принятия решений и других наук.

14. **Конфликтующие структуры** [книга] Лефевр В.А. – М.: Институт психологии РАН, 2000. В книге рассматривается подход к исследованию систем, «наделенных разумом». Несмотря на всю дискуссионность этого подхода, на спорность многих положений и необычную терминологию автора, книга очень интересная и полезная, как в разработке практических приложений этой теории, так и в детальной критической оценке применимости модели рефлексии в различных областях науки. Некоторые иллюстрации, приводимые автором, может быть не совсем удачны. В частности, это относится к объяснению различных религиозных феноменов с помощью особых операторов осознания. Книга не рассчитана на читателя, способного воспринимать лишь абсолютные истины. Она заставляет читателя думать – лучшее средство, чтобы рано или поздно преодолеть те трудности, которые сейчас испытывают специалисты в области теории принятия решений. Построить немедленно, как хотелось бы, «мыслящий автомат» или машину для автоматического перевода с одного языка на другой оказалось не так-то просто, как это казалось лет 10 – 15 тому назад. Делается все более очевидным, что необходимо искать новые пути, новые подходы. Одной из таких попыток наметить некоторые пути выхода из этого тупика и является данная книга.

15. **Мифы и реальности использования научных методов принятия решений в бизнесе** [книга] Горский П.

В книге представлены введение, принятые термины и сокращения, а также анализ следующих, по мнению автора, мифов: 1 "Руководители и управленческий аппарат и так выбирают наилучшие варианты из всех возможных в каждой ситуации", 2 "Принятие важных экономических или политических решений осуществляется совершенно по иному, чем решения другого уровня", 3 "В принятии решений самое главное – удача. Научный анализ вряд ли добавит что-то существенное", 4 "Систематический сбор и анализ ситуации требует больших усилий, средств, но мало что дает", 5 "Компьютеры нужны лишь для сбора информации. Они не могут помочь руководителю при принятии решений", 6 "Для современного руководителя самое главное – создать аналитические группы. Они подготовят и подадут ему наилучшие варианты решений", 7 "Варианты решения проблемы чаще всего очевидны. Надо лишь выбрать один из них", 8 "Принятию решений невозможно научиться. Общеобразовательный курс лекций ничего не дает". Кроме того, книга включает анализ видов задач принятия решений; учет мнений аналитиков и экспертов; методы оценки сравнительной важности критериев; основные этапы процесса подготовки решения; принятие решений без экспертизы и на основе экспертизы, а также построение обобщенного мнения.

16. **The Value of Information in Monotone Decision Problems** [статья] Athey S., Levin J.D. Massachusetts Institute of Technology Department of Economics Working Paper Series. Ноябрь 2001. No. 98-24. This paper studies decision problems under uncertainty where a decision-maker observes an imperfect signal about the true state of the world. We analyze the information preferences and information demand of such decision-makers, based on properties of their payoff functions. We restrict attention to “monotone decision problems”, whereby the posterior beliefs induced by the signal can be ordered so that higher actions are chosen in response to higher signal realizations. Monotone decision problems are frequently encountered in economic modeling. We also provide conditions under which two decision-makers in a given class can be ranked in terms of their marginal value for information and hence information demand. Applications and examples are given.

17. **Понятие риска и его классификация** [книга], **Методики принятия группового решения** [книга], **Процесс разработки и принятия решения** [книга] Титова Н.Л. – М., 2004.

18. **Организационное поведение** [книга] Моргунов Е.Б. – М., 2004.

Динамические аспекты функционирования организации рассматриваются достаточно популярной дисциплиной, называемой "Организационное поведение". Организационное поведение – это систематическое изучение поведения людей внутри организаций, а также отношений внутри организации. Поведение людей в организации не случайно. Каждый человек уникален, но отношения и поведение сотрудников в организации можно объяснить и даже предсказать, если анализировать его на трех уровнях: индивидуальном, групповом и организационном. Одно из самых популярных определений организационного поведения было предложено С. Коссеном: «…дисциплина, изучающая поведение людей и их взаимоотношения в организации с целью объединения нужд и устремлений каждого сотрудника в отдельности с нуждами и целями организации в целом».

19. **Управленческие решения** [книга] Балдин К.В., Уткин В.Б., Воробьев С.Н. – М.: Юнити, 2003.

Учебник содержит систематизированное изложение методологических, организационных и технологических основ принятия управленческих решений. Большое внимание уделено математическим основам процесса разработки управленческих решений, описанию конкретных технологий разработки решений в условиях определенности по скалярному и векторному показателям, а также в условиях стохастической, природной и поведенческой неопределенности; вопросам автоматизации технологии информационного обследования управленческой деятельности и основам разработки и использования систем поддержки принятия решений. Для студентов вузов.

20. **Является ли математика аргументом в экономике?** [статья] Жак С.В. Экономический вестник Ростовского государственного университета. 2003. Т. 1. № 3. С. 95 – 97.

В статье рассмотрены некоторые математические модели и подходы, которые, не претендуя на роль универсальных моделей анализа экономических процессов, тем не менее, демонстрируют возможности использования даже упрощённых математических моделей при анализе вероятных последствий принятия решений в области экономики.

Глоссарий

Назначение глоссария

Глоссарий является одним из ключевых элементов в процессе самостоятельной работы по освоению образовательного контента дисциплины. В данном пособии глоссарий представлен в виде тезауруса, охватывающего всю учебную программу дисциплины. *Тезаурус* – это система понятий, семантических отношений и связей между ними в виде множества дескрипторов (терминов, определений, ключевых слов и т.п.). Приведем методические рекомендации по его применению.

Без тезауруса невозможно эффективно овладевать знаниями в процессе обучения. Важно ведь не столько накапливать информацию (что чаще всего ассоциируется с механическим заучиванием), сколько научиться структурировать, систематизировать, конструировать и усваивать знания. Преимущество учебного тезауруса перед другими формами представления знаний состоит в его компактности, минимальной достаточности, чётко выраженной иерархичности и наличии внутренних логических связей. В качестве информационной базы тезауруса используются литературные источники и рабочая программа дисциплины.

Наличие тезауруса стимулирует способность студента к некоторому самостоятельному исследованию, структурированию своих личных знаний, помогает более осмысленно подходить к изучению дисциплины. У преподавателя появляется возможность оценивать не только уровень знаний студента, но и характер его мышления.

В тезаурусе данного учебного пособия информация представляется по схеме: понятие – определение – семантические отношения данного понятия с другими. Понятия (термины) и семантические связи между ними составляют «скелет» дисциплины. В отличие от традиционно построенного учебного процесса, когда студент усваивает терминологию постепенно, а взаимосвязи между понятиями начинают проясняться только после изучения курса, работа с тезаурусом по дисциплине ТПР выносится на первый план и позволяет буквально управлять знаниями, регулируя их по количественным или смысловым критериям. К другим преимуществам тезауруса в процессе самостоятельной работы относится систематизация терминологической лексики дисциплины, возможность разрабатывать личные тезаурусы и обмениваться моделями знаний в форме глоссария-тезауруса.

Типы понятий глоссария

Систематизация позволяет выделить следующие основные понятия ТПР как учебной дисциплины:

ВНИМАНИЕ	***Объекты*** – понятия, отражающие реальные этапы принятия решений, например анализ данных, выбор; различные виды систем поддержки принятия решений.
ВНИМАНИЕ	***Процессы*** – понятия, отражающие схему, динамику представления решений или их содержание, например выработка решений, дерево решений, игра, организация, равновесие, ситуационное управление.
ВНИМАНИЕ	***События*** и ***факты*** – понятия, отражающие конкретное событие или факт (выбор и оценка объектов, результатов, количественных характеристик), например вероятность, критерий, неопределенность, оптимум, риск.
ВНИМАНИЕ	***Абстрактные понятия*** – понятия, отражающие наиболее общие свойства объектов и связей между ними, например граф, критический путь, седловая точка, синергетика, целевая функция, шкала.
ВНИМАНИЕ	***Законы*** (гипотезы, правила, теории) и ***задачи*** – понятия, отражающие устойчивую связь между объектами или понятиями на математическом и/или логическом уровне, например задача о назначении, закон Парето, максимин, теория Холланда, эвристика.

Внимание	***Процедуры*** (технологии, методы, алгоритмы) – понятия, отражающие действия ЛПР, в том числе на основе применения математического аппарата, например метод Лагранжа, программирование, ранжирование.

Отметим также, что при отнесении понятий к тому или иному типу имеются сложности. Это вызвано тем, что многие объекты в ТПР зачастую принимают абстрактную форму: их содержанием становится не материальный субстрат, а функция объекта в системе.

Кроме того, необходимо учитывать как внешние, так и внутренние взаимосвязи основных дескрипторов тезауруса.

Справка	С помощью тезауруса, которым вы овладели, изучая ТПР, можно определить уровень вашей подготовки в данной области: ***1 – общетеоретический уровень*** (знание основных понятий ТПР), ***2 – уровень пользователя*** (понимание процесса принятия решений, отдельных задач и методов), ***3 – уровень проектировщика*** (навыки проектирования и программирования отдельных методов и компонент СППР).

Термины глоссария

Аксиоматика – набор относительных истин в какой-либо науке, принимаемых на веру, но имеющих рациональное толкование (*Яценко Н.Е. Толковый словарь обществоведческих терминов. – СПб., 1999*).

Аксиомы предпочтений – предположение, что потребители подчиняются аксиомам рационального поведения (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*).

Алгоритм – система вычислительных операций, выполняемых по определенным правилам для решения задач сходного типа; совокупность четко определенных правил, процедур или команд, обеспечивающих решение поставленной задачи за конечное число шагов (*Терминологическая база данных по информатике [Электронный ресурс]*).

Альтернатива – одна из двух или нескольких взаимоисключающих возможностей, один из имеющихся вариантов действий, одно из решений, которое надо выбрать (*Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш. Экономика и управление. – М., 2005*).

Анализ данных – направление статистических исследований, включающее комплекс методов обработки многомерных данных (*Юнг Г.Б., Таль Г.К., Григорьев В.В.* (*Словарь по антикризисному управлению. – М., 2003*). В отличие от классических математико-статистических методов, предполагающих известную вероятностную модель порождения данных, методы анализа данных используют только сведения, зафиксированные в этих данных.

Анализ кластерный – совокупность математических методов, предназначенных для формирования информации о расстояниях или связях между объектами (*Большой экономический словарь / Под ред. А.Н. Азрилияна. – 5-е изд., доп. и перераб. – М., 2002*).

Анализ регрессионный – исследование статистических данных посредством построения уравнения регрессии, отражающего в аналитической форме связь между зависимыми и независимыми переменными, установленную статистически (*Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. – 5-е изд., перераб. и доп. – М., 2006*).

Анализ рисков – включает их идентификацию и классификацию, определение вероятности их возникновения и возможных потерь, а также выбор наиболее эффективных мер управления рисками (*Управление организацией: Энциклопедический словарь – М., 2001*).

Анализ системный – совокупность методов и средств исследования сложных, многоуровневых и многокомпонентных систем, объектов, процессов, опирающихся на комплексный подход, учет взаимосвязей и взаимодействий между элементами системы (*Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. – 5-е изд., перераб. и доп. – М., 2006*). В основе системного анализа лежит разделение сложной цели для последующего рассмотрения вариантов выбора средств достижения каждой из целей.

Априори – знание о фактах, полученное до изучения их на опыте (*Современный словарь иностранных слов. – М., 2001*).

Бизнес-решения в Интернете – система, обеспечивающая функционирование бизнеса, вся деятельность которого основана на интернет-технологиях, например порталы, каталоги, интернет-СМИ, электронные магазины, аукционы и т.п. (*Словарь прикладной интернетики / С.А Нехаев, Н.В Кривошеин, И.Л Андреев, Я.С .Яскевич [Электронный ресурс]*).

Вариант – разновидность, одна из нескольких возможностей (*Большой экономический словарь / Под ред. А.Н. Азрилияна. – 5-е изд., доп. и перераб. – М., 2002*).

Веб-решение – методы, способы ведения деятельности предприятий, организаций через Всемирную паутину; необходимое для этого программное обеспечение (*Ваулина Е.Ю. Мой компьютер: Толковый словарь. – М., 2005*).

Вербальный – выраженный словами, словесный. Обеспечение эффективного образовательного процесса связывается с умелым сочетанием вербального (словами) и невербального (мимика, жесты, интонации голоса преподавателя) способов передачи информации.

Вероятность – количественная мера возможности осуществления события при наличии неопределенности, т.е. в ситуации, когда это событие характеризуется как возможное (*Словарь прикладной интернетики / С.А Нехаев, Н.В Кривошеин, И.Л Андреев, Я.С .Яскевич [Электронный ресурс]*). В 1960-е годы Л. Заде ввел отличное от вероятности понятие для количественной характеристики неопределенности (нечеткость или размытость).

Выбор – одна из важнейших стадий процессов принятия решений, заключающаяся в отборе одного из вариантов действий из набора возможных альтернатив (*Райзберг Б.А., Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь.* – *5-е изд., перераб. и доп.* – *М., 2006*).

Выбор групповой – решение, принятое группой или от ее имени. Особый интерес вызывает оптимальность принятия коллективных решений по принципу Парето и степень отражения такими решениями личных предпочтений отдельных лиц. Теорема невозможности К.Дж. Эрроу указывает на то, что имеют место серьезные трудности при формировании коллективного выбора на основании индивидуальных предпочтений.

Выработка решений – процесс подготовки и обоснования решений, в котором участвуют лицо, принимающее решение, эксперты; предшествует принятию решений.

Гипотеза решений – элемент процесса выработки решений, связывающий исходные данные и цели решения.

Гордиев узел – трудно разрешимое, запутанное дело. (*Современный словарь иностранных слов.* – *М., 2001*). Чрезвычайно запутанный узел, которым согласно легенде царь Фригии Гордий прикрепил ярмо к дышлу колесницы. Распутавший этот узел, должен был стать властителем Азии. Александр Македонский вместо распутывания разрубил узел мечом.

Граф – непустое конечное множество узлов (вершин), а также ребер (дуг), соединяющих пары различных вершин. Если ребро $\mathbf{l}$ соединяет вершины $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$, то принято говорить, что $\mathbf{V_1}$ и $\mathbf{V_2}$ *инцидентны*, а сами вершины называются *смежными*. Если каждому ребру приписано направление, то граф называется *ориентированным*, или *орграфом*. Граф обычно представляют в наглядной форме, изображая вершины точками, а ребра – линиями. Такое представление наглядно, но непригодно для машинной обработки. При компьютерной обработке используется представление графа в виде матрицы инцидентности. Граф является удобной моделью различных математических процессов, протекающих в системах, и имеет ряд практических приложений. Граф используется в определении таких понятий, как сеть, система, алгоритм, в электронике, электротехнике. Графы находят широкое применение при описании процессов анализа и обработки данных. Здесь вершины соответствуют некоторым объектам, а ребра и дуги показывают физические либо логические связи между ними. Специальными видами графов являются деревья решений (*Терминологическая база данных по информатике [Электронный ресурс]*).

График Ганта – один из наиболее распространенных методов графического изображения состояния и хода производства в процессе оперативного планирования (*Румянцева Е.Е. Новая экономическая энциклопедия. – М., 2005*). В таком графике (обычно линейной структуры) по вертикали показан перечень всех подлежащих выполнению работ и их исполнителей, а по горизонтали – отрезки времени, отведенные для выполнения каждой работы. Эти отрезки в единицах времени соответствуют объему работ, выполняемых каждым исполнителем. Основной принцип графика – максимальное сокращение времени за счет параллельного выполнения работ. График назван по имени разработавшего его американского ученого и инженера Г.Л. Ганта, одного из ближайших сотрудников Ф. Тейлора.

Дерево решений – схематическое представление процесса принятия решений по определенной проблеме, изображаемое графически в виде древовидного графа.

Дилемма – необходимость выбора из двух (обычно нежелательных) возможностей.

Задача неструктурированная – неформализованная модель проблемной ситуации на основе "мягкого" подхода, заключающегося в том, что в процессе решения задачи не пренебрегают какими-либо факторами ситуации и рассматривают их все (*Управление организацией: Энциклопедический словарь. – М., 2001*).

Задача о назначении – задача о наилучшем распределении некоторого числа работ между таким же числом исполнителей при условии взаимно однозначного соответствия между множествами работ и исполнителей. При ее решении ищут оптимальное назначение из условия общего минимума стоимости или максимума производительности. Стоимость назначения или производительность каждого исполнителя при выполнении каждой из имеющихся работ задается заранее. Задача представляет собой частный случай транспортной задачи. Наиболее эффективным методом ее решения является венгерский метод. Задача о назначениях имеет много интерпретаций.

Задача структурированная – модель проблемной ситуации, построенная в предположениях рациональности и последовательного поиска в принятии решения на основе формализации проблемной ситуации в соответствии с целью построения модели.

Игра – процесс взаимодействия двух лиц, групп лиц, человека с природой, с машиной, машины с машиной, при котором одна из сторон или все могут выбирать стратегию поведения. Целью игры является выигрыш, а средством – выбор оптимальных стратегий (*Конкуренция: Словарь [Электронный ресурс]*).

Игра антагонистическая – модель конфликтной ситуации в игре двух участников с прямо противоположными интересами; игра, моделирующая ситуацию противоборства, конкуренции двух сторон с взаимно противоположными интересами.

Игра с нулевой суммой – игровая ситуация, в которой соперники претендуют на получение заданной суммы, так что выигрыш одного игрока влечет адекватный проигрыш другого (других).

Искусственный интеллект (ИИ, Artificial Intelligence) – одно из направлений информатики, цель которого разработка программно-аппаратных средств, позволяющих выполнять действия, требующие человеческого интеллекта, имитировать некоторые виды интеллектуальной деятельности, ставить и решать интеллектуальные задачи принятия решений, общаясь с компьютером на ограниченном подмножестве естественного языка. Теоретической базой ИИ является работа со знаниями: модели знаний; методы, средства и системы представления знаний и баз знаний; методы извлечения и обработки знаний (вывод, поиск, верификация, систематизация, аргументация и объяснение на основе знаний). Прикладные разработки ведутся по следующим основным направлениям: решение отдельных интеллектуальных задач (компьютерное доказательство теорем, поиск знаний в Интернете, семантический анализ и обработка информации на естественном языке, машинный перевод и реферирование, синтез речи, распознавание образов, моделирование поведения бионических систем, игры и т.д.); интеллектуальное программирование (языки ИИ, языки представления знаний, языки семантической разметки, языки многоагентного взаимодействия и т.п.), инструментальные средства для автоматического синтеза программ; интеллектуальный интерфейс; проектирование и разработка интеллектуальных систем (экспертные системы, интеллектуальные СППР, САПР, обучающие системы, системы интеллектуального анализа данных, нейропакеты и интеллектуальные роботы).

Исследование операций – научный подход к решению задач организационного управления. При решении любой конкретной задачи применение методов исследование операций предполагает:

- построение моделей принятия решений и управления в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;
- изучение взаимосвязей, определяющих возможные последствия принимаемых решений, а также установление критериев эффективности и относительных преимуществ того или иного варианта действий.

Термин «Исследование операций» имеет многочисленные синонимы, получившие широкое распространение. В Великобритании более употребительно выражение «*операционные исследования*» (*operational research*). Американцы часто используют термин "*наука об управлении*" (*management science*).

Критерий – признак, на основании которого производится оценка, определение или классификация чего-либо, мерило оценки (*Современный словарь иностранных слов*. – *М., 2001*).

Критерий интегральный – критерий оптимальности, представляющий собой комбинацию частных локальных критериев в виде их суммы или произведения.

Критерий оптимальности – признак, по которому вариант функционирования системы признается наилучшим из возможных.

Критерий Парето – максимум благосостояния, при котором невозможно улучшить положение кого бы то ни было путем изменения объема производства без ухудшения положения кого-то другого (*Словарь современной экономической теории Макмиллана*. – *М., 1997*).

Критерий принятия решений – нормы, значения показателя, с которыми можно соотнести альтернативные варианты решения.

Лицо, принимающее решение (ЛПР) – собирательное понятие; им может быть один человек или группа, коллектив, организация. Современные технологии принятия решений, в том числе возможности экспертного оценивания, позволяют при выработке и принятии решений ЛПР учитывать основные аспекты взаимодействия "*ситуация–ЛПР*" за счет возможности использования качественных и количественных оценок как формализуемых, так и неформализуемых составляющих ситуации (*Междисциплинарный словарь по менеджменту / Общ. ред. С.П. Мясоедова. – М., 2005. – С. 104*).

Максимин – правило осуществления выбора в условиях неопределенности в теории принятия решений. При различных "состояниях мира", которые могут иметь место, и различных линиях поведения, которые могут быть приняты, принцип максимина предлагает сначала исследовать все минимальные выигрыши, а затем выбрать наибольший из них. В приведенной таблице **S** – состояния мира (вероятность неизвестна), **С** – линии поведения, а содержание ячеек – выигрыши. Выделены минимальные выигрыши для каждой линии поведения. В соответствии с принципом максимина следует выбрать максимальный из минимальных выигрышей:

S / C	1	2	3	4
1	2	5	2	5
2	1	2	1	0
3	5	***4***	6	5
4	1	0	4	7

Таковым является выигрыш 4, соответствующий линии поведения 3 (*Словарь современной экономической теории Макмиллана*. – М., 1997).

Матрица платежная – один из методов теории принятия решений, который оказывает помощь ЛПР в выборе одного из нескольких вариантов. Полезен, когда ЛПР должно установить, какая стратегия в наибольшей мере способствует достижению целей. Платеж представляет собой выигрыш или полезность. Если платежи представить в форме таблицы, то получится платежная матрица. Она полезна в тех случаях, когда имеется разумно ограниченное число решений; с полной определенностью невозможно предвидеть будущее; результаты принятого решения зависят от того, какие события в действительности имели место.

Метод Дельфи – метод прогнозирования, согласно которому группу экспертов просят приписать различным факторам, способным оказать влияние на развитие событий в будущем, их степень важности и оценить вероятность наступления событий.

Метод Лагранжа – метод решения задачи условной оптимизации, при котором ограничения, записываемые как неявные функции, объединяются с целевой функцией в форме нового уравнения, называемого *лагранжианом*. Если задача состоит в максимизации функции $\mathbf{Y = f(X_1, X_2)}$ с ограничением $\mathbf{g(X_1, X_2) = 0}$, то лагранжиан будет иметь вид

$\mathbf{L = f(X_1, X_2) +}$ **лямбда**$\mathbf{[g(X_1, X_2\ )]}$.

Максимизация **L** относительно $\mathbf{X_1, X_2}$ и **лямбды** даст значения $\mathbf{X_1}$ и $\mathbf{X_2}$, при которых достигается максимальное значение **Y** с учетом ограничений. **Лямбда** называется множителем Лагранжа.

Неопределенность – ситуация, когда полностью или частично отсутствует информация о состояниях системы или внешней среды, возможны события, вероятностные характеристики которых не существуют или неизвестны. Неопределенность – фундаментальное понятие в информатике, ее меру обычно называют *энтропией*. В теории принятия решений, теории игр принято различать три типа неопределенности: неопределенность природы (внешней среды), неопределенность целей, неопределенность действий противника (в случае конфликтных ситуаций, противоборства, конкуренции и т. п.).

Оптимальность, оптимум – термин «оптимум» в технике употребляется, по меньшей мере, в трех значениях: 1) наилучший из найденных вариантов состояний системы; 2) наилучшее направление изменения поведения системы; 3) цель развития системы. Термин “оптимальность” в ТПР может означать характеристику качества принимаемых решений, характеристику состояния системы или ее поведения и т. п. Нельзя говорить об оптимальности вообще, вне условий и без точно определенных критериев оптимальности. Решение, наилучшее в одних условиях и с точки зрения одного критерия, может оказаться далеко не лучшим в других условиях и по другому критерию. Иногда приходится считаться с фактором устойчивости решения. В общей задаче математического программирования оптимум функции означает такое ее экстремальное значение, которое либо больше других значений той же функции (глобальный максимум), либо меньше других значений (глобальный минимум. Соответственно, о локальном оптимуме говорят в некоторой окрестности значений.

Организация – этот термин может употребляться в различных смыслах: 1) социальный институт, искусственное объединение, занимающее определенное место в обществе и предназначенное для выполнения более или менее ясно очерченной функции; 2) процесс, определенная организационная деятельность, включающая в себя распределение функций, налаживание устойчивых связей, координацию и т.п.; 3) упорядоченность структуры, строения и типа связей какого-либо объекта (формулировка термина дается по монографии А.И. Пригожина «Методы развития организаций»).

Парадокс Алле – выбор ЛПР, сравнивающего пары рискованных проектов, систематически и неоднократно вступает в конфликт с прогнозами, которые дает теория максимизации ожидаемой полезности (*Словарь современной экономической теории Макмиллана*. – М., 1997).

Полезность – условная характеристика, отражающая степень удовлетворенности субъекта результатом деятельности, значение полезности определяется функцией полезности.

Правило принятия решений – критерии, используемые при выборе решения.

Предпочтения – совокупность свойств и способностей субъекта по определению ценности, полезности и т.д. альтернатив (действий, результатов деятельности и т.д.), а также – их сравнения.

Принцип большинства – способ принятия решения в организованных группах, союзах и т.п., при котором участвовавшее в голосовании меньшинство, высказавшееся "против", должно подчиняться принятому большинством решению (*Социологический энциклопедический словарь* / *Ред. Г.В. Осипов*. – М., 1998).

Принцип Оккама – принцип, согласно которому более простым теориям следует отдавать предпочтение перед сложными, если и те и другие в равной степени согласуются с эмпирическими, опытными данными.

Принцип Парето (Правило «80 на 20») – утверждает, что в пределах данной группы некоторая малая часть является более важной, чем ее относительный вес в этой группе. Этот принцип сформулирован итальянским экономистом Вильфредо Парето и получил свое подтверждение в самых различных сферах деятельности:

- *20 % клиентов (товаров) приносят 80 % оборота или прибыли*,
- *80 % клиентов (товаров) приносят 20 % оборота или прибыли,*
- *20 % ошибок вызывают 80 % потерь,*
- *80 % ошибок вызывают 20 % потерь.*

Проекция этого правила на некоторую работу выглядит следующим образом: в процессе работы 80 % результата достигается за 20 % рабочего времени. Остальные 80 % потраченного времени дают только 20 % от всего результата.

Принятие решения – выражение воли субъекта, заключительная операция процесса организации; осуществляется единолично либо коллегиально (*Управление организацией*: Энциклопедический словарь. – М., 2001).

Программирование динамическое – совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения (вычисляются последствия каждого решения и вырабатываются оптимальные стратегии для последующих решений).

Программирование линейное – метод формализации и анализа задач условной оптимизации, в которых целевая функция является линейной и максимизируется или минимизируется при ограничениях в виде набора линейных неравенств. Вследствие линейности рассматриваемых функций и того, что ограничения представляются в форме неравенств, в системе невозможно использование стандартных методов оптимизации (таких, например, как метод Лагранжа), и поэтому в линейном программировании используются специальные методы решения (например, симплекс-метод).

Программирование математическое – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Программирование целочисленное – раздел математического программирования, в котором изучаются методы нахождения экстремумов функций в пространстве параметров, где все или некоторые переменные являются целыми числами.

Путь критический – непрерывная последовательность работ и событий от начального до конечного события, требующая наибольшего времени для ее выполнения (*Управление организацией*: Энциклопедический словарь. – М., 2001). Центральное понятие методов сетевого планирования и управления. Работы критического пути не имеют резервов времени. Знание критического пути позволяет сосредоточить на соответствующих работах дополнительные силы и средства и, сократив этот путь, ускорить достижение общей цели всего комплекса мероприятий.

Равновесие – общее понятие, относимое к различным ситуациям, характеризующимся взаимодействием разнонаправленных сил, воздействие которых таково, что наблюдаемые свойства системы остаются неизменными. В теории игр синонимом равновесия является сбалансированность, а также такое состояние, когда ни один из игроков не заинтересован в изменении этого состояния, так как при этом он не может ничего выиграть, но может проиграть. Понятие равновесия тесно связано (но не тождественно) с понятиями *устойчивости* и *гомеостаза*. Если при внешнем воздействии на систему неизменность ее равновесных свойств сохраняется, то говорят об устойчивом равновесии, в обратном случае — о неустойчивом равновесии. В экономических работах равновесие часто отождествляют с понятием оптимума. Однако равновесие есть необходимое, но недостаточное условие оптимальности, т.е. равновесие в системе еще не доказательство ее оптимальности.

Равновесие Нэша – ситуация игры, одностороннее отклонение от которой не выгодно ни одному из игроков. Равновесие Парето – такая ситуация игры, что не существует другой ситуации, в которой все игроки получили бы не меньший выигрыш и хотя бы один игрок – строго больший.

Ранжирование – способ оценки переменной, когда ее значению приписывается место в последовательности величин (ранг), определяемое при посредстве порядковой шкалы. Хотя результаты ранжирования имеют численную форму, они не обладают некоторыми фундаментальными свойствами натуральных чисел, вследствие чего операции над ними требуют обращения к специальным аналитическим и вычислительным методам (неметрическое многомерное шкалирование). Например, в социологии ранжирование является основным источником количественной информации, т.е. выполняет такие же функции, как и измерение в естественных науках.

Распределение вероятности – результат вычислений в форме таблицы чисел или математического соотношения, показывающий вероятность, с которой случайная величина, следующая данному распределению, принимает определенные значения или попадает в интервал между определенными пределами. Иногда бывает полезно рассматривать распределение вероятности как распределение частот, где размер выборки бесконечен. К примерам можно отнести распределение *хи-квадрат*.

Распределение хи-квадрат – распределение вероятностей с n степенями свободы.

Риск – опасность возникновения непредвиденных потерь в связи со случайным изменением условий, неблагоприятными обстоятельствами.

Седловая точка в математическом программировании – точка, в которой функция Лагранжа достигает максимума по исходным переменным (прямой задачи) и минимума по множителям Лагранжа. При некоторых условиях оказывается возможным заменить исходную задачу задачей разыскания седловой точки функции Лагранжа, поскольку существование такой точки — необходимое и достаточное условие оптимальности решения. Вообще в математике седловая точка соответствует случаям, когда значение функции двух переменных представляет собой одновременно максимум относительно одной переменной и минимум относительно другой переменной. В антагонистической игре двух лиц с нулевой суммой седловая точка (минимакс или максимин) — это наибольший элемент столбца матрицы игры, который одновременно является наименьшим элементом соответствующей строки. В этой точке, следовательно, максимин одного игрока равен минимаксу другого. Седловая точка есть точка равновесия.

Синергетика – взаимодействие компонентов в открытых системах, характеризующееся тем, что совокупное их действие превышает эффект, оказываемый каждым из них. Научное направление, исследующее закономерности, лежащие в основе процессов самоорганизации в системах самой разной природы: физических, химических, биологических, социальных, технических, экономических. Математическая модель самоорганизующихся процессов была построена в школе И. Пригожина. Синергетика строится на следующих предположениях.

1. Переход от прошлого к будущему (проявление "стрелы времени") совершается через достаточное проявление случайности и переход от неустойчивости к устойчивости, "порядку". Именно необратимые, неповторимые процессы являются источником порядка.

2. Детерминизм в таких неравновесных системах проявляется лишь в отдельных случаях в противовес рациональной модели, где детерминизм представляется неизбежным следствием. Детерминизм вступает в силу после того, как один из возможных путей развития неравновесной системы выбран и на смену неустойчивости приходит новый порядок. Смесь необходимости и случайности составляет "историю".

3. В состояниях, когда прежний порядок и основанная на них структура достаточно "расшатана" и система далека от равновесия,

даже очень слабые флуктуации (случайные отклонения или возмущения) способны усиливаться до волны, способной разрушить старую сложившуюся структуру. Возникают ситуации, когда малые причины порождают большие следствия.

4. Анализ причин усиления слабых флуктуаций, а также обоснование возможных вариантов развития системы, далекой от равновесия, вполне рациональный и необходимый акт.

5. Осмысление последствий вмешательства (даже слабого) человека в характер развития многих природных (например, экологических) и социальных (например, возникающих на национальной или религиозной почве) процессов ставит человека перед необходимостью всестороннего "проигрывания" возможных вариантов развития этой системы и анализа причин ее неустойчивости.

Система поддержки принятия решений (СППР) – комплекс математических и эвристических методов и моделей, объединенных общей методикой формирования альтернативных решений в организационных системах, определения последствий реализации каждой альтернативы и обоснования выбора наиболее приемлемого решения (*Экономико-математический энциклопедичесский словарь* / *Гл. ред. В.И. Данилов-Данильян*. – М., 2003). При решении периодически возникающих проблемных ситуаций с высокой степенью неопределенности и не имеющих аналогов в прошлом СППР разрабатываются индивидуально под каждую проблему, в их состав включают преимущественно логикоэвристические и экспертные методы и модели, главную роль начинают играть диалоговые процедуры.

Система экспертная – особый класс систем искусственного интеллекта, включающих знания об определенной слабо структурированной и трудно формализуемой узкой предметной области и способных предлагать и объяснять разумные решения (*Словарь прикладной интернетики* / *С.А Нехаев, Н.В Кривошеин, И.Л Андреев, Я.С .Яскевич* [*Электронный ресурс*]).

Смешанная стратегия – распределение вероятностей на множестве допустимых действий игрока.

Спам – в российском законодательстве – телематическое электронное сообщение, предназначенное неопределенному кругу лиц, доставленное пользователю без предварительного согласия и не позволяющее определить отправителя этого сообщения, в том числе ввиду указания в нем несуществующего или фальсифицированного адреса отправителя (правила оказания телематических услуг связи утверждены Постановлением Правительства РФ от *10.10.2007 № 575*.).

Статус-кво – положение в какой-то области или во взаимоотношениях, существующее в данный момент или существовавшее в какое-либо время в прошлом. Поддерживать или восстановить статус-кво – сохранять существующее положение или вернуться к тому, что существовало ранее.

Стиль принятия решений – различные подходы к процессу принятия решений. Модель стиля решений выделяет четыре основных типа: директивный, аналитический, концептуальный, поведенческий.

Стратегия – совокупность (для каждого момента принятия решений) отображений истории игры и информированности игрока во множество его допустимых действий.

Теория игр – использует аппарат математического моделирования в целях предсказания, выработки лучших вариантов действий в условиях неопределенности, в ситуациях противоборства и конфликта. Такое моделирование используется для оценки воздействия решений на конкурентов. Для любой организации способность прогнозировать действия означает конкурентное преимущество. Теория игр полезна, когда требуется определить наиболее важные и требующие учета факторы в ситуации принятия решений в условиях конкурентной борьбы. Эта информация важна, поскольку позволяет ЛПР учесть дополнительные переменные или факторы, которые могут повлиять на ситуацию, и тем самым повышает эффективность решения.

Теория полезности Неймана–Моргенштерна – подход, применимый в ситуациях с наличием риска. Подход включает следующие аксиомы предпочтений:

1) все альтернативы являются предметом предпочтений или безразличия (полнота);

2) имеет место транзитивность предпочтений;

3) если вероятность **X** равна **p**, а вероятность **D** равна **(1–p)** и если **X** предпочитается **Y**, когда оба события являются достоверными, то лотерея **pX + (1–p)D** предпочитается **pY + (l–p)D**;

4) если **X** предпочитается **Y**, а **Y** предпочитается **Z**, то существует некоторая вероятность **p***, при которой потребитель рассматривает ситуацию **p*X** как имеющую равную полезность с ситуацией **(1–p*)Z** и с достоверным значением **Y** (непрерывность). Проще говоря, потребитель готов "обменять" риск на потерю дохода.

Теория утверждает, что потребители ведут себя таким образом, чтобы максимизировать ожидаемую полезность, т.е. сумму отдельных полезностей, взвешенных по их вероятностям (*Словарь современной экономической теории Макмиллана*. – М., 1997).

Теория принятия решений – изучает способы анализа, выработки образа действий в зависимости от целевой установки и условий, в которых осуществляется деятельность, располагаемых ресурсов, состава исполнителей. Анализ решений ведет к выбору соответствующих критериев, с помощью которых можно оценить образ действий.

Теория Холланда гласит, что люди наиболее преуспевают в профессиях, соответствующих их индивидуальности и чертам характера. «Шестиугольник Холланда» – схема, представляющая профессии, наиболее подходящие человеку на основании принадлежности к одному из шести типов индивидуальности, наиболее точно описывающему его.

Управление по ситуации (ситуационное управление) – оперативное управление, заключающееся в принятии управленческих решений по мере возникновения проблем в соответствии со складывающейся ситуацией.

Функция целевая – функция, связывающая цель (оптимизируемую переменную) с управляемыми переменными в оптимизационной задаче.

Шкала – система чисел или иных элементов, принятых для оценки или измерения каких-либо величин.

Шкала приоритетов – выстроенная по рангу совокупность признаков, характеризующая их важность для ЛПР, исходя из этих признаков и с учетом предпочтений того или иного признака перед другими.

Эвристика – простые правила принятия решения (принцип здравого смысла), используемые для принятия быстрых решений, касающихся сложных проблем. Эвристика доступности – тенденция людей основывать свои суждения на имеющейся в их распоряжении информации, хотя она может быть неточной и ставящей под угрозу качество принимаемого решения. Эвристика репрезентативности – тенденция воспринимать других людей в рамках стереотипов, если они являются типичными представителями категории, к которой принадлежат.

Эффект миманса – нежелание принимать «плохие» решения, перепоручая это другим.

Персоналии

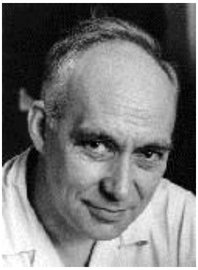
Алле Морис – французский экономист, удостоенный Нобелевской премии (1988). Родился в 1911 г. По мнению Нобелевского комитета, основные достижения состоят в фундаментальных исследованиях в области экономической теории, а его главным вкладом являются строгие математические формулировки рыночного равновесия и эффективности рынков. Известны также его работы по теории риска. Наибольшую известность Алле принес результат проведенного им эксперимента по практической проверке теории ожидаемой полезности Неймана–Моргенштерна, получивший название парадокса Алле.

Его основные работы: "*A la recherche d'une discipline economique*" ("В поисках экономической науки", 1943), переиздана в 1952 г. под названием "*Traite d'economie pure*" ("Трактат чистой экономической теории") и "*Economic et interet*" ("Экономика и процент", 1947). (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*).

Альтшуллер Генрих Саулович (1926 – 1998) – автор ТРИЗ (теории решения изобретательских задач – теории развития технических систем), изобретатель, писатель. Основной постулат ТРИЗ: технические системы развиваются по определенным законам, эти законы можно выявить и использовать для создания алгоритма решения изобретательских задач. Основные книги: «Алгоритм изобретения»; «Творчество как точная наука»; «Найти идею»; «Поиск новых идей: От озарения к технологии (теория и практика решения изобретательских задач)»; «Как стать гением: Жизненная стратегия творческой личности» (*Альтшуллер Генрих Саулович*: Биография [*Электронный ресурс*]).

Байес Томас (1702 – 1761) – английский математик и пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества. Математические интересы Байеса относились к теории вероятностей. Он сформулировал и решил одну из основных задач этого раздела математики (теорема Байеса). Работа, посвящённая этой задаче, была опубликована в 1763 году, уже после его смерти. Формула Байеса, дающая возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике и теории вероятностей. Другая крупная его работа — «Очерки к решению проблемы доктрины шансов». Широко используется терминология: байесовская оценка решения, бейесовский подход к статистическим законам и т. п.

Беллман Ричард (1920 – 1984) – американский математик. Получил многочисленные результаты, связанные с применением динамического программирования в разных областях математики (вариационное исчисление, автоматическое регулирование, теория аппроксимации, исследование операций и др.). В вариационном исчислении важную роль играет функциональное уравнение Беллмана. В математических методах оптимального управления известны Беллмана функция и уравнение. Р. Беллман опубликовал 619 статей и 39 книг. Многие его работы переведены на русский язык.



Гермейер Юрий Борисович (1918 – 1975) – внес выдающийся вклад в разработку математических основ теории принятия решений и сыграл большую роль в становлении отечественной школы исследования операций и теории игр. Новизна и теоретическая глубина его результатов, их практическая значимость знаменовали собой важный этап в развитии этой науки. Сформулировал принцип наилучшего гарантированного результата, заложил основы теории игр с непротивоположными интересами.

Канторович Леонид Витальевич (1912 – 1986) – российский математик и экономист, создатель в 1930-е годы линейного программирования; лауреат Нобелевской премии (1975) (совместно с Т. Купмансом). Канторович применил теорию линейного программирования не только к проблеме сочетания производственных ресурсов предприятия для максимизации производства, но также и к проблеме оптимального макроэкономического планирования в социалистической экономике. Главный вывод из его работ состоит в том, что успешная централизованная плановая экономика должна использовать специально разработанную систему цен. Он предлагал реформировать методы планирования, используемые в СССР. Его основные работы: «Математические методы организации и планирования производства», «Наилучшее использование экономических ресурсов», «Оптимальные решения в экономике». (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*)

Ларичев Олег Иванович (1934 – 2003) – российский ученый, академик РАН, д-р техн. наук, профессор МФТИ. Многочисленные труды по теории принятия решений и созданию методов решения многокритериальных задач, получившие широкое международное признание, в том числе учебник «Теория и методы принятия решений, или Хроника событий в Волшебных странах». В круг его научных интересов входили психология сознания, теория и практика построения баз экспертных знаний, разработка человекомашинных процедур консультирования и обучения.

Микони Станислав Витальевич (род. в 1940 г.) – д-р техн. наук, профессор Петербургского государственного университета путей сообщения. Автор монографии «Теория и практика рационального выбора», учебных пособий по дискретной математике, базам знаний, диагностированию ЭВМ и др. Автор программной системы выбора и ранжирования решений СВИРЬ.

Нейман Джон (1903 – 1957) – выдающийся математик, сделавший важный вклад в квантовую логику, функциональный анализ, теорию множеств, информатику, экономику и другие отрасли науки. Ещё при жизни Нейман стал легендой. Наиболее известен как праотец современной архитектуры компьютеров, применением теории операторов к квантовой механике, а также как участник Манхэттенского проекта и как создатель теории игр. С 1933 года работал в Принстонском университете. Отвечая в 1954 г. на анкету Академии наук США, назвал три своих наивысших научных достижения: математическое обоснование квантовой механики; теорию неограниченных операторов и эргодическую теорию. Скромно не включил в список то, что вошло в золотой фонд математической науки и по праву обессмертило имя своего создателя. Среди «отвергнутых» работ оказались и частичное решение знаменитой пятой проблемы Гильберта, и теория игр, и основополагающие работы по теории автоматов.

Нэш Джон (род. в 1928 г.) – американский математик, удостоенный в 1994 г. Нобелевской премии в области экономики за вклад в разработку теории игр и ее приложение к экономике. Работы Нэша посвящены теории игр и теории равновесия. Автор концепции "равновесия в смысле Нэша". Основные его труды: «Точки равновесия в играх с n участниками» (Equilibrium Points in N-Person Games, 1950), «Проблема торгов» (The Bargaining Problem, 1950), «Некооперативные игры» (Non-cooperative Games, 1951). (*Энциклопедия кругосвет [Электронный ресурс]*).

Парето Вильфредо (1848 – 1923) – итальянский экономист. В работе «*Курс политической экономии*» (Cours D'Economique Politique) он изложил свое понимание системы общего равновесия, основанной на общей взаимозависимости всех экономических величин. Подчеркивая формальный характер позитивной экономической теории, очищенной от всех этических элементов, Парето тем не менее отвергал социализм с нормативных позиций и оправдывал неравномерность распределения доходов на основе предполагаемого постоянства их распределения во времени и по странам (*закон Парето*). В «*Учебнике политической экономии*» (Manual of Political Economy, 1906) Парето отрицал целесообразность сравнения полезностей для разных лиц. В его исследовании оптимальных условий обмена были использованы кривые безразличия, впервые предложенные Ф. Эджвортом. (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*).

Поспелов Дмитрий Александрович (род. 1932) – д-р техн. наук, профессор, разработал подход к принятию решений, опирающийся на семиотические модели. Работы в области ситуационного управления большими системами. Создана теория псевдофизических логик, моделирующих рассуждения "здравого смысла" о времени, пространстве, действиях, каузальных цепочках и т.п., позволившая в интеллектуальных системах поддержки принятия решений рассуждать о закономерностях физического мира и действиях в нем. Заведующий отделом ВЦ РАН, заведующий Международной лабораторией ЮНЕСКО по искусственному интеллекту, президент российской Ассоциации искусственного интеллекта.

Саймон Герберт (род. в 1916 г.) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии в области экономики (1978) за новаторские исследования процесса принятия решений в экономических организациях, в фирмах. Он заменил классического предпринимателя группой ЛПР, способности которых к рациональным действиям ограничены недостатком знания о всех последствиях их решений, а также личными и общественными связями. Так как ЛПР не могут выбрать наилучшую альтернативу, они должны быть согласны с удовлетворительной альтернативой. Поэтому отдельные фирмы не стремятся к максимизации прибыли, а стараются найти приемлемые решения острых проблем. В работе по исследованию процессов принятия сложных решений он вышел за рамки экономической теории и использовал методы других наук, в частности психологии. (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*).

Тьюринг Алан – его роль в истории информатики отнюдь не исчерпывается одним лишь изобретением "машины Тьюринга". Он вполне может быть причислен к плеяде величайших математических и философских умов, составляющих гордость человечества, таких, как Р. Декарт, Г.В. Лейбниц, Б. Рассел, Д. Гильберт, А. Витгенштейн и др. Был безразличен к борьбе за приоритет в научных открытиях. Мемориальная доска, установленная на стене одной из лондонских гостиниц, гласит: «Здесь родился Алан Тьюринг (1912 – 1954), взломщик кодов [Code-breaker] и пионер информатики [computer science]». Только сейчас (но отнюдь не при жизни!) Тьюринг признан одним из основателей информатики и теории искусственного интеллекта, его считают первым теоретиком современного программирования и, наконец, первым в мире «хакером» (внес во время Второй мировой войны существенный вклад в победу союзных войск над германским флотом, расшифровав «Энигму»).

Эрроу Кеннет (род. в 1921 г.) – американский экономист, лауреат Нобелевской премии в области экономики (1972). Хорошо известны его работы в области систем общего равновесия и по определению математических условий, необходимых для того, чтобы такие системы обладали единственным и имеющим экономический смысл решением, а также новаторские работы в области группового выбора решений в условиях неопределенности. В работе "Общественный выбор и индивидуальные ценности" (Social Choice and Individual Values, 1951) он предположил, что через суверенитет и рациональность потребителя невозможно определить общественные приоритеты, которые соответствовали бы индивидуальным приоритетам. Вот почему невозможно разработать функцию общественного благосостояния, позитивно связанную с индивидуальным выбором. Общество не в состоянии вынести коллективное мнение о том, что оно хочет. Его основные работы:

"Исследования по математической теории запасов и производства" (Studies in Mathematical Theory of Inventory and Production, 1958),

"Общественный выбор и индивидуальные ценности" (Social Choice and Individual Values, 1951),

"Очерки по теории риска" (Essays in the Theory of Risk-Bearing, 1970), (*Словарь современной экономической теории Макмиллана. – М., 1997*).

Список сокращений и аббревиатур

ИИ – искусственный интеллект.

ИС – индекс согласованности.

ЛПР – лицо, принимающее решения.

МАИ – метод анализа иерархий.

ОС – отношение согласованности.

САПР – системы автоматизированного проектирования конструкций и технологий с применением компьютерной техники и специализированного программного обеспечения.

СМО – система массового обслуживания.

СППР – системы поддержки принятия решений.

ТПР – теория принятия решений.

ABC-анализ исходит из опыта, который показывает, что процентное соотношение более важных и менее важных дел всегда примерно одно и то же. Используя буквы A, B, C, все задачи распределяются по трем классам согласно их важности по отношению к достижению профессиональных и персональных целей. Базируется на следующих трех правилах, исходящих из опыта: 1) наиболее важные задачи (категория A) составляют около 15 % от всех задач, которыми занимается менеджер, однако эти задачи обеспечивают около 65 % вклада в достижение цели; 2) важные задачи (категория B) в среднем составляют 20 % от общего числа задач и 20 % важность работы менеджера; 3) менее важные задачи (категория C) составляют 65 % от общего количества задач, но имеют меньший относительный вес – около 15% от общей «ценности» результата.

DM – Data Mining.

IQ (Ай-кью) – аббревиатура из первых букв английских слов "*Intellect quality*" – уровень, коэффициент интеллекта, показатель умственного развития, уровня имеющихся знаний и осведомленности, получаемый на основе комплексного тестирования (*Райзберг Б.А.,* *Лозовский Л.Ш., Стародубцева Е.Б. Современный экономический словарь. – М., 2006*).

ISO (International Organization for Standardization, Международная организация по стандартизации, МОС). Международная неправительственная организация, осуществляющая разработку международных стандартов и сотрудничество в области стандартизации. Учреждена в 1946 г. в Лондоне на совещании представителей 25 стран. Сейчас членами МОС являются многие национальные организации по стандартизации.

IT – информационная технология.

STEP-анализ – анализ влияния социальных, технологических, экономических и политических факторов внешней среды (**STEP-**факторов) за пределами контроля самой организации, которые могут оказывать существенное влияние на деятельность организации и ее перспективу (*Управление организацией: Энциклопедический словарь. – М., 2001*).

PERT (Метод программной оценки и рассмотрения проектов, англ. **Program evaluation and review technique)** – метод, помогающий внедрению (новых разработок и проектов), использующий детализированные графические схемы, показывающие, какие работы/задачи могут быть выполнены только после завершения других работ/задач (и каких именно), а какие работы/задачи могут выполняться параллельно.

SWOT-анализ (сокращение от английских слов Strengths – сильные стороны, Weaknesses – слабые стороны, Opportunities – возможности, Threats – угрозы). Один из наиболее часто используемых методов сопоставления альтернатив. Суть метода заключается в следующем. Выявляются и по мере возможности устраняются слабые стороны. Целенаправленно используются и развиваются сильные стороны. Выявляются и по мере возможности предотвращаются угрозы. Целенаправленно развиваются выявленные возможности. Вырабатывается стратегия и составляется перечень мероприятий, позволяющих максимально полно реализовать цели.