Практическое занятие 2

Теоремы о вероятностях

Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

При решении задач часто возникают проблемы использования той или иной теоремы. Обобщим основные ситуации для правильного выбора теоремы и ее корректного использования.

Основные виды задач:

1. В задаче описывается один опыт, но связанный с цепочкой из некоторого количества небольших «подопытов». Вероятность одного из исходов, выражаемого через элементарные события, требуется вычислить.

Методика решения:

- вводят элементарные события, связанные с исходами «подопытов», вероятности которых известны (могут быть найдены);
- событие, вероятность которого требуется найти, выражается через эти события;
- от равенства событий переходят к равенству вероятностей этих событий, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

Возможные **ситуации** на примере трех элементарных событий $(A_1;\ A_2; A_3)$

A – **произошло хотя бы одно событие**	$A = A_1 + A_2 + A_3$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ совместны, независимы	$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ совместны, зависимы	$P(A) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}/\overline{A_1})P(\overline{A_3}/\overline{A_1}\ \ \overline{A_2})$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ несовместны	$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

B – **произошли все события**	$B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ независимы	$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ зависимы	$P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$

С – **произошло ровно одно событие**	$\mathrm{C} = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$
события $(A_1;\ A_2; A_3)$ независимы	$P(\mathrm{C}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\ \ \overline{A_3}) + \mathrm{P}(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot \mathrm{P}(\overline{A_3})$ $+P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2} \cdot)\ P(A_3)$

Пример 2.1. Для сигнализации об аварии установлены **два независимо** работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,9. Какова вероятность того, что при аварии сработает **хотя бы один** сигнализатор?

Решение. Введем в рассмотрение события:

A_1 – при аварии сработает первый сигнализатор;

A_2 – при аварии сработает второй сигнализатор;

B – при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

Тогда $B = A_1 \cdot + A_2$. Перейдем от равенства событий к равенству вероятностей этих событий $P(B) = P(A_1 + A_2)$.

События A_1 и A_2 **независимые** (по условию задачи сигнализаторы работают независимо).

Следовательно, $P(B) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2)$.

Из условия: $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ и $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Получим $P(B) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}995$.

Пример 2.2. В кармане 5 ключей, 2 из которых подходят к двери. **Человек последовательно достает ключи.** Какова вероятность, что первым будет вынут неподходящий ключ, а ключ, подходящий к двери, будет вынут вторым?

Решение. Введем в рассмотрение события:

A_1 – вынут неподходящий ключ первым;

A_2 – нужный ключ вынут вторым;

B – первым будет вынут неподходящий ключ, а ключ, подходящий к двери, будет вынут вторым. $B = A_1 \cdot A_2$

Так как в A_2 и A_1 **зависимы**, имеем $P(B) = P(A_1)P(A_2/A_1)$.

Таким образом, $P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

Пример 2.3. По каналу связи передаётся **сообщение из трех символов**, вероятности искажения которых при передаче сообщения соответственно равны 0,01, 0,005, 0,003. Сообщение считается принятым, если не искажено ни одного символа. Какова вероятность того, что сообщение будет принято?

Решение. Введем в рассмотрение события A_1, A_2, A_3, состоящие в том , что при передаче будут искажены первый, второй и третий символы соответственно и событие B, состоящее в том, что сообщение будет принято.

Тогда $B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$.

$P(B) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}99 \cdot 0{,}995 \cdot 0{,}997 \approx 0{,}97$.

Пример 2.4. Два стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность попадания каждого 0,8. Какова вероятность, что только один стрелок попадет в цель?

Решение. Введем в рассмотрение события:

A_1 – попадание первого стрелка;

A_2 – попадание второго стрелка;

B – только один стрелок попадет в цель. Выразим это событие через A_1 и A_2 :

$$B = A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2.$$

Так как $A_1 \cdot \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} \cdot A_2$ **несовместны,** A_2 и A_1 **независимы**, имеем

$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2)$..

Таким образом, $P(B) = 0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8 = 0.32$.

Пример 2.5. Вычислить надежность работы цепи (рис.2.1) , если надежность каждого элемента равна p.

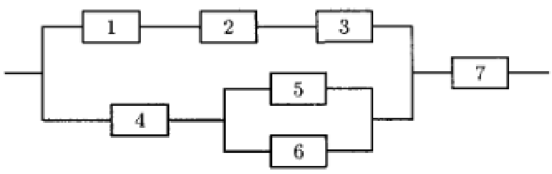


Рис. 2.1

Решение. Введем в рассмотрение события:

A_i – работает $i -$ й элемент $i = \overline{1,7}$; (независимые и совместные события).

A – работает участок 1-3; тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. $P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = p^3$.

B – работает участок 4-6; тогда $B = A_4 \cdot (A_5 + A_6)$.

$P(B) = P(A_4) \cdot P(A_5 + A_6) = P(A_4) \cdot (1 - P(\overline{A_5})P(\overline{A_6})) = p(1-(1-p)^2) = -p^3 + 2p^2$.

C – работает участок 1-6; тогда $C = A + B$.

$P(C) = P(A + B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (1-p^3)(1+p^3 - 2p^2) = p^6 - 2p^5 + 2p^2$

D – работает вся схема; тогда $D = C \cdot A_7$.

$P(D) = P(C \cdot A_7) = P(C) \cdot P(A_7) = p^7 - 2p^6 + 2p^3$.

2. В задаче описывается два опыта, каждый со случайными исходами, причем первый опыт чаще всего во временном масштабе первый. Вероятность одного из исходов второго (во временном масштабе) опыта требуется вычислить.

- Рассматривают все элементарные (несовместные) исходы первого опыта (гипотезы) $H_i \ (i=1,2,3,\ldots,n)$: $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ и $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, $i \neq j$, $P(H_i) > 0$.
- Вычисляют вероятности гипотез;
- Вводят событие, вероятность которого требуется найти;
- Вычисляют условные вероятности этого события;
- **Используют формулу полной вероятности** $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)$

Пример 2.6. На складе имеется 1000 изделий: 700 из одной партии и 300 из другой. Вероятность брака в первой партии равна 0,06, во второй – 0,04. Какова вероятность того, что одно наудачу взятое изделие окажется бракованным?

Решение. Возможны следующие гипотезы (предположения):

H_1 – изделие принадлежит первой партии, H_2 – изделие принадлежит второй партии.

Вероятности гипотез: $P(H_1) = \frac{700}{1000} = 0,7$, $P(H_2) = \frac{300}{1000} = 0,3$.

Обозначим через А событие, состоящее в том, что наудачу извлеченное изделие окажется бракованным.

Условные вероятности равны $P\left(A/H_1\right) = 0,06$, а $P\left(A/H_2\right) = 0,04$.

Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right) = 0,7 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,04 = 0,054.$$

3. В задаче описывается два опыта, каждый со случайными исходами. Результат второго (во временном масштабе) опыта известен. Требуется после этого вычислить вероятность одного из исходов первого опыта (переопределить вероятность гипотезы).

- Рассматривают все элементарные (несовместные) исходы первого опыта (гипотезы) $H_i \ (i=1,2,3,\ldots,n)$: $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ и $H_i \cdot H_j = \varnothing$, $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, $i \neq j$, $P(H_i) > 0$.
- Вычисляют вероятности гипотез;
- Вводят событие - результат второго опыта;
- Вычисляют условные вероятности этого события;
- По формуле полной вероятности находят $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)$;
- **Используют формулу Байеса**: $P\left(H_i/A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(A/H_i\right)}{P(A)}$.

Пример 2.7. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем первый завод поставляет 30% всех изделий, второй – 20%, а третий – 50%. Среди изделий первого завода 80% первосортных, второго – 90%, третьего – 70%. **Куплено одно изделие. Оно оказалось первосортным.** Какова вероятность того, что купленное изделие выпущено вторым заводом?

Решение. Введем в рассмотрение гипотезы:

H_1 – куплено изделие первого завода, H_2 – второго завода, H_3 – третьего завода.
$P(H_1)=0{,}3$, $P(H_2)=0{,}2$, $P(H_3)=0{,}5$.
Обозначим через А событие, состоящее в том, что куплено первосортное изделие.
Условные вероятности появления события А при выполнении той или иной гипотезы равны $P\left(A/H_1\right)=0{,}8$, $P\left(A/H_2\right)=0{,}9$, $P\left(A/H_3\right)=0{,}7$.

Апостериорная вероятность того, что **купленное первосортное изделие выпущено вторым заводом**, найдем по формуле Байеса:

$$P\left(H_2/A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P\left(A/H_2\right)}{\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot H\left(A/H_i\right)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}5\cdot 0{,}7}=\frac{18}{77}\approx 0{,}23.$$

Задачи для самостоятельного решения:

2.1. В коробке находится 4 белых, 3 синих, 2 черных шара. Последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность, что 1-й шар белый, 2-й – синий, 3-й – черный?

2.2. Прибор состоит из четырех узлов, которые за время работы прибора могут независимо друг от друга выйти из строя. Надежность каждого узла равна 0,8. Найти вероятности следующих событий:

A – все узлы работают;

B – первый узел отказал, остальные нет;

C – один узел отказал, остальные нет;

D –отказало ровно два узла;

E – хотя бы один узел отказал.

Ответ округлите до сотых.

2.3. В первой урне –5 белых, 2 синих и 3 красных шаров, во второй урне – 5 белых, 3 синих и 2 красных шаров, в третьей урне – 3 белых, 2 синих и 5 красных шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров: а) хотя бы один будет красный шар? б) будет только один красный шар? в) все извлеченные шары будут одного цвета?

2.4. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в твердом переплете. Библиотекарь наудачу взял 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете

2.5. Для повышения надёжности прибор дублируется двумя другими точно такими же приборами. Надёжность (вероятность безотказной работы) каждого прибора равна 0,8. Определить надёжность системы.

2.6. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости хотя бы один раз появится шестёрка?

2.7. Вероятность отказа элемента равна 0,15. Для повышения надежности этот элемент дублируется таким же, включаемым, если вышел из строя основной элемент. Какова вероятность безотказной работы системы?

2.8. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов, вероятности отказа которых равны соответственно 0,03 и 0,15. Устройство выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один элемент. Какова вероятность отказа устройства?

2.9. В первой партии 500 деталей, 80% которых качественные, во второй – 200 деталей, 10% которых бракованные, в третьей – 300 деталей, 95% которых качественные. Из каждой партии извлекли наудачу по одной детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей будут: а) все качественные? б) одна качественная и две бракованные? в) хотя бы одна качественная?

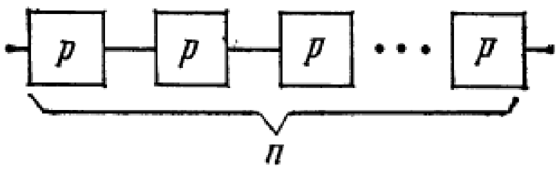
2.10. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы первого, второго и третьего соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

2.11. В Таганроге среднее число дождливых дней в ноябре равно 9. Какова вероятность того, что 7-го и 8-го ноября будет дождь, если до седьмого ноября дождя не было?

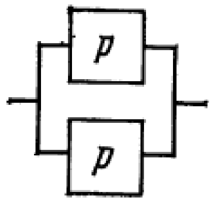
2.12. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

2.13. Студент знает 20 из 25 вопросов. Найти вероятность, что он знает заданные три вопроса.

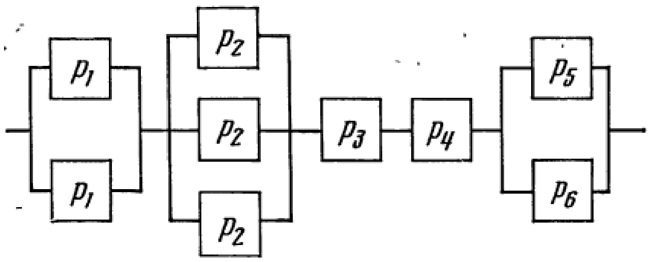
2.14. Вычислить надежность работы цепи (схема указана на рис.). Надежность каждого элемена равна p=0.8.



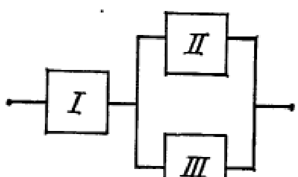
а)



б)



в)



г)

2.15. Детали с двух станков поступают на склад. Производительности станков относятся как 3:7. Первый станок дает в среднем 2% брака, второй – 5%. Какова вероятность того, что наудачу взятая со склада деталь окажется доброкачественной?

2.16. В первой урне – 6 белых и 4 черных шара, во второй – 1 белый и 4 черных шара. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну, после чего из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что извлеченный из второй урны шар окажется белым.

2.17. По каналу связи, состоящему из передатчика, ретранслятора и приемника передается сигнал, состоящий из символов 0 и 1. Из-за помех символы независимо друг от друга могут искажаться: 0 переходит в 0 с вероятностью 0,96 и в 1 с вероятностью 0,04 на участке передатчик – ретранслятор и 0 переходит в 0 с вероятностью 0,95 и в 1 с вероятностью 0,05 на участке ретранслятор – приемник; 1 переходит в 1 с вероятностью 0,95 и в 0 с вероятностью 0,05 на участке передатчик – ретранслятор и 1 переходит в 1 с вероятностью 0,96 и в 0 с вероятностью 0,04 на участке ретранслятор – приемник. Какова вероятность того, что отправленный передатчиком сигнал 01 будет принят как 01? (Ответ округлите до сотых)

2.18. На двух заводах изготавливаются одинаковые часы, причем первый завод производит 75% всей продукции. Вероятность того, что часы, изготовленные на первом заводе, не потребуют дополнительной регулировки, равна 0,96, а изготовленные на втором – 0,98. Наудачу взятые часы отстают. С какой вероятностью они произведены на первом заводе?

2.19. В урну, содержащую 2 шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе шаров.

2.20. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

2.21. Легковых автомобилей у бензоколонки проезжает в шесть раз больше, чем грузовиков. Вероятность того, что проезжающая машина подъедет на заправку, равна для грузовика 0,01, для легкового автомобиля – 0,15. Только что от бензоколонки отъехала заправленная машина. Чему равна вероятность того, что это грузовик?

2.22. Прибор имеет 6 ламп, вероятность выхода из строя каждой из которых при повышении напряжения в цепи равна 0,3. При перегорании трёх или меньшего числа ламп прибор из строя не выходит. При перегорании четырёх ламп прибор выходит из строя с вероятностью 0,3, при перегорании пяти ламп – с вероятностью 0,7, а при перегорании шести ламп – с вероятностью 1. Определить вероятность выхода прибора из строя при повышении напряжения

2.23. Красная Шапочка, заблудившись в лесу, вышла на поляну, откуда вело 5 дорог к дому бабушки. Известно, что вероятности дойти из леса до дома бабушки за 1 час для различных дорог равны соответственно 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 и 0,1. Чему равна вероятность того, что Красная Шапочка пошла по первой дороге, если через час она кормила бабушку пирожками?

2.24. По каналу связи передается один из сигналов S_1 или S_2. Сигнал S_1 передается в среднем в 7 раз чаще, чем S_2. При наличии помех вероятности искажения сигналов S_1 и S_2 равны соответственно 0,02 и 0,09. Принят искаженный сигнал. Какова вероятность, что был послан сигнал S_1 ?

2.25. Два из трёх независимо работающих элементов вычислительного устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого и третьего элементов соответственно равны 0,2; 0,4 и 0,3.

2.26. В больницу поступают 50% больных с заболеванием К, 30% - с заболеванием Т, 20% - с заболеванием М. Вероятность излечения К – 0,7; Т- 0,8; М – 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Какова вероятность, что он был болен К?

Ответы. **2.1.** 1/21 **2.2.** $P(A) = 0{,}41$. $P(B) = 0{,}10$ $P(C) = 0{,}41$ $P(D) = 0{,}10$. $P(E) = 0.59$. **2.3.** а) 0,720 б) 0,470 в) 0,095 **2.4.** 67/91. **2.5.** 0,992. **2.6.** 0,838 **2.7.** 0,9775. **2.8.** 0,1755 **2.9.** а) 0,684 б) 0,032 в) 0,999 **2.10.** а) 0,188. Б) 0,452. В) 0,336. **2.11.** 0,13. **2.12.** 0,5. **2.13.** 57/115 **2.14.**а) $0{,}8^n$ б) 0,96 в) 0,585 г) 0,768 **2.15.** 0,959 **2.16.** 4/15. **2.17.** 0,86 **2.18.** 6/7. **2.19.** 2/3. **2.20.** 20/21 **2.21.** 1/91. **2.22.** 0,026. **2.23.** 0,462. **2.24.** 14/23. 2.25. 0,298. **2.26** 5/11