Практическое занятие 6. Двумерные ДСВ и НСВ.

<table>
<tr><th>ДСВ</th><th>НСВ</th></tr>
<tr><td>

Ряд распределения

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline \xi \backslash \eta & x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ \hline y_1 & p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1m} \\ \hline y_2 & p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2m} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline y_n & p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nm} \\ \hline \end{array}$$

.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

</td><td>

Двумерная плотность распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

Плотность распределения вероятности компонент

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Вероятность

</td></tr>
<tr><td>

Смотрим по таблице

</td><td>

$$P((\xi,\eta)\in D) = \iint_D f(x,y)dxdy$$

</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Условные законы распределения</td></tr>
<tr><td>

$$P(x_i / y_j) = \frac{p_{ij}}{p(y = y_j)}$$

$$P(y_j / x_i) = \frac{p_{ij}}{p(x = x_i)}$$

</td><td>

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Для независимых СВ</td></tr>
<tr><td>

$$p_{ij} = p(\xi = x_i, \eta = y_j) = $$
$$= p(\xi = x_i)\cdot p(\eta = y_j)$$

</td><td>

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Математические ожидания</td></tr>
<tr><td>

$$M_\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$$

$$M_\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$$

</td><td>

$$M_\xi = \int\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)dx$$

$$M_\eta = \int\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)dy$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Точка с координатами (M_ξ, M_η) - центр рассеяния</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дисперсии</td></tr>
<tr><td>

$$D_\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - M_\xi^2$$

$$D_\eta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M_\eta^2$$

</td><td>

$$D_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - M_\xi^2$$

$$D_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dx - M_\eta^2$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

$$\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} \quad \sigma_\eta = \sqrt{D_\eta}$$

СКО

</td></tr>
</table>

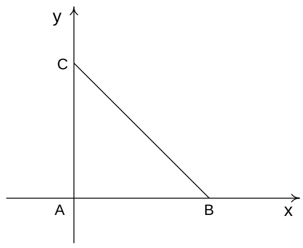
Корреляционный момент (ковариация)	
$K_{\xi\eta} = \text{cov}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_1 m_2$. где $m_1 = M_\xi$, $m_2 = M_\eta$.	$K_{\xi\eta} = \text{cov}(\xi,\eta) = \int\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - m_1 m_2$ где $m_1 = M_\xi$, $m_2 = M_\eta$
коэффициент корреляции $r_{\xi\eta} = \dfrac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D_\xi D_\eta}}$ Матрица ковариации $K = \begin{pmatrix} D_\xi & K_{\xi\eta} \\ K_{\xi\eta} & D_\eta \end{pmatrix}$	

Примеры.

Пример 6.1. Двумерная случайная величина (ξ,η) имеет равномерное распределение вероятностей в треугольной области ABC, то есть

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & (x,y) \in ABC, \\ 0, & (x,y) \notin ABC. \end{cases}$$

Найти постоянную c, одномерные плотности $f_1(x)$, $f_2(y)$ случайных величин ξ и η, коэффициент корреляции r, условную плотность $f(y/x)$ и условное математическое ожидание $M(\eta/x)$.



т. $A(0,0)$, т. $B(1,0)$, т. $C(0,1)$.

1) Постоянную c найдем из условия нормировки

$$1 = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int\int_{ABC} c \cdot dxdy = c \cdot S_\Delta = c \cdot 1/2, \quad c = 2,$$

где S – площадь треугольника ABC. Обозначим область, ограниченную треугольником ABC через D. Тогда

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

2) Уравнение прямой BC: $y = 1 - x$. Тогда область D можно задать аналитически следующим образом:

$$D = \left\{ \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{matrix} \right\} \quad \text{или} \quad D = \left\{ \begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 - y \end{matrix} \right\}.$$

3) $$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 2\int_0^{1-x} dy & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x \le 0, x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & x < 0, \ x > 1, \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & y < 0, \ y > 1. \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = 1/3.$$

$$M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = \int_0^1 y\cdot 2(1-y)dy = 1/3.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - m_x^2 = \int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx - \frac{1}{9} = 0{,}055.$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - m_y^2 = 0{,}055.$$

4) $K_{xy} = \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy - m_x m_y = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy - \frac{1}{9} \cong -0{,}0278.$

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \cong \frac{-0{,}0278}{(0{,}055)} \cong -0{,}5.$$

5) $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0<x<1, \quad 0<y<1-x, \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$

$$M(\eta/x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} y\frac{1}{1-x}dy, & 0<x<1, \\ 0, & x<0,\ x\ge 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{1-x} y\frac{1}{1-x}\,dy = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x} = \frac{1-x}{2}.$$

$$M(\eta/x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2}, & 0<x<1, \\ 0, & x\le 0,\ x\ge 1. \end{cases}$$

Пример 6.2. Дискретная двумерная случайная величина (ξ,η) распределена по закону, приведенному в таблице

ξ \ η	–1	0	2
–1	0,2	0,1	0,3
1	0,1	0,1	0,2

Определить:

1) Законы распределения составляющих ξ и η;

2) Условный закон распределения случайной величины ξ при условии, что $\eta = -1$;

3) $M(\xi/\eta = -1)$;

4) Коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

5) $P(\xi<1;\eta<2)$

Решение. Имеем

ξ	–1	1
	0,6	0,4

η	–1	0	2
	0,3	0,2	0,5

$M\xi = -1\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}4 = -0{,}2$, $\quad M\eta = -1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 = 0{,}7$,

$D\xi = (-1)^2 0{,}6 + 1^2\cdot 0{,}4 - (-0{,}2)^2 = 0{,}96$,

$D\eta = (-1)^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}5 - (0{,}7)^2 = 1{,}81$.

$P(\xi=-1/\eta=-1)=\dfrac{P(\xi=-1,\eta=-1)}{P(\eta=-1)}=\dfrac{0,2}{0,3}=2/3$. $P(\xi=1/\eta=-1)=\dfrac{P(\xi=1,\eta=-1)}{P(\eta=-1)}=\dfrac{0,1}{0,3}=1/3$

$\xi/\eta=-1$	-1	1
	$2/3$	$1/3$

.

$M(\xi/\eta=-1)=-1\cdot\dfrac{2}{3}+1\cdot\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}$;

$K(\xi,\eta)=\sum\limits_{i,j}P_{ij}x_iy_i-m_1\cdot m_2=(-1)\cdot(-1)\cdot 0,2+(-1)\cdot 2\cdot 0,3+1\cdot(-1)\cdot 0,1+$

$+1\cdot 2\cdot 0,2+0,2\cdot 0,7=0,2-0,6-0,1+0,4+0,14=0,04$.

$r_{\xi,\eta}=\dfrac{K_{\xi,\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=\dfrac{0,04}{\sqrt{0,96}\cdot\sqrt{1,81}}=\dfrac{0,04}{0,98\cdot 1,345}=\dfrac{0,04}{1,32}=0,03$.

5) По таблице находим $P(\xi<1;\eta<2)=0.3$

Пример 6.3. Пара случайных величин ξ и η имеет совместное нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\{-2,-1\}$ и ковариационной матрицей K

$$K[\xi,\eta]=\sigma^2\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{bmatrix}.$$

Известно, что $P\{\xi-2\eta<3\}=0,65$. Найти $D\xi,\ D\eta$.

Решение. Совместная нормальность пары случайных величин ξ и η обеспечивает нормальность каждой из них и любой их линейной комбинации, в частности величина $\zeta=\xi-2\eta$ нормальна с параметрами

$$M\zeta=M\xi-2M\eta=-2-2(-1)=0,\qquad D\zeta=D\xi+4D\eta-4\mathrm{cov}(\xi,\eta).$$

Подставляя в последнее соотношение элементы ковариационной матрицы:

$$D\xi=2\sigma^2,\qquad D\eta=7\sigma^2,\qquad \mathrm{cov}(\xi,\eta)=3\sigma^2,$$

получим

$$D\zeta=2\sigma^2+4\cdot 7\sigma^2-4\cdot 3\sigma^2=18\sigma^2.$$

По условию $P\{\zeta<3\}=0,65$, откуда, используя нормальность ζ,

$$F\left(\frac{3}{\sigma\sqrt{18}}\right)=0,65\Rightarrow\frac{3}{\sigma\sqrt{18}}=0,385\Rightarrow\ \sigma\approx 1,837.$$

Искомые дисперсии равны, соответственно,

$$D\xi=2\sigma^2\approx 6,747,\qquad D\eta=7\sigma^2\approx 23,622.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Задана таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины:

y_j \ x_i	2	5	8
0.4	5a	10a	0.35
0.8	0.05	4a	a

Найти: а, частные распределения компонент, числовые характеристики; вероятность, что $\xi<5;\ \eta>0.5$; распределения условных случайных величин: $\xi/\eta=0.4$ $\eta/\xi=5$ и их условные математические ожидания

6.2. . Двумерная случайная величина задана таблицей распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5

y_j						
0	0.202	0.174	0.113	0.062	0.049	0.027
1	0	0.099	0.064	0.040	0.031	0.025
2	0	0	0.031	0.025	0.021	0.018
3	0	0	0	0.012	0.005	0.002

*а)*Найти математические ожидания и дисперсии компонент; *б)*построить ковариационную матрицу и определить значение коэффициента линейной корреляции.

6.3. В двух ящиках находится по 6 шаров. В 1-м ящике: один шар с номером 1, 2 шара с номером 2, 3 шара с номером 3; во втором ящике: 2 шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Пусть ξ – номер шара, вынутого из первого ящика, η – номер шара, вынутого из второго. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин $(\xi,\ \eta)$. Найти $m_{\xi;} m_{\eta;} D_{\xi};\ D_{\eta}; r_{\xi\eta;}$

6.4. Два стрелка производят по два выстрела, причем каждый стреляет по своей мишени. Построить таблицу распределения случайной величины **Z**=$(\xi,\ \eta)$, где ξ **-** число попаданий первого, а η - число попаданий второго стрелка, если вероятности попаданий при каждом выстреле у них одинаковы и равны *p.* а)Определить частные распределения компонент ξ и η и их числовые характеристики. *б)* Чему равна вероятность того, что у стрелков будет равное число попаданий?

6.5. Распределение случайного вектора $(\xi_1; \xi_2)$ задается таблицей

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1$	$\xi_1 = 2$
$\xi_2 = 0$	0,1	0,1	0
$\xi_2 = 1$	0,1	0,1	0,6

.

Найдите $F_{\xi_1}(x_1)$, $f_{\xi_1}(x_1)$, $M(\xi_1)$, $D(\xi_1)$.

6.6. Распределение случайного вектора $(\xi_1; \xi_2)$ задается таблицей

$\xi_2 \setminus \xi_1$	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = 1$	$\xi_1 = 2$
$\xi_2 = 0$	0,1	0,1	0
$\xi_2 = 1$	0,1	0,1	0,6

.

Найдите $F_{\xi_2}(x_2)$, $f_{\xi_2}(x_2)$, $M(\xi_2)$, $D(\xi_2)$.

6.7: Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$, имеет плотность распределения вероятности $\mathrm{f}(x,y) = \begin{cases} C, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$,

Найдите $C,\ f_1(x), f_2(y), f(x\ /\ y)$, все числовые характеристики, вероятность попадания в квадрат с вершинами в точках (0.5; 0.5), (1,1), (0,5,1), (1,0,5).

Область D - треугольник с вершинами в точках (0,0), (1,1), (1,0).

6.8: Случайный вектор $(\xi,\ \eta)$, имеет плотность распределения вероятности $\mathrm{f}(x,y) = \begin{cases} C, (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}$,

Найдите $C, f_1(x), f_2(y), f(x\ /\ y)$, все числовые характеристики, вероятность попадания в область D^*

Область D - треугольник с вершинами в точках (0,0), (-2,0), (0,1).

Область D^* задана неравенством: y<x+1.

6.9.Двумерная случайная величина распределена по равномерному закону в круге радиуса R, с центром в точке (0,0). Найти плотность распределения этой случайной величины и одномерные плотности.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, x^2 + y^2 \geq R^2 \\ C, x^2 + y^2 \leq R^2 \end{cases}$$

6.10. Координаты случайного вектора =$(\xi,\ \eta)$ являются независимыми случайными величинами, заданными их плотностями распределения:

$f_1(x) = \begin{cases} c, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$; $\qquad f_2(y) = \begin{cases} k, & y \in [0;2] \\ 0, & x \notin [0;2] \end{cases}$

Найдите k, c, координаты центра рассеяния, вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в область $D: \{x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\}$

6.11. Вычислить коэффициент корреляции компонент случайного вектора (ξ, η), заданного законом распределения. Результат округлите до десятых.

η \ ξ	3	4
1	0,2	0,3
–2	0,1	0,4

6.12. Плотность совместного распределения случайных величин (ξ, η), задана формулой

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} c\left(1 - xy^3\right), & -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases}.$$

Найти: 1) коэффициент с; 2) безусловные и условные плотности распределения ξ, η 3) $m_{\xi;} m_{\eta;} D_\xi;\ D_\eta; r_{\xi\eta;}\ c = 0,25$.

6.13. Координаты случайного вектора (ξ, η), являются независимыми случайными величинами, заданными их плотностями распределения: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-7;-3], \\ 0, & x \notin [-7;-3], \end{cases}$ $\quad f(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & y \in [-4;-1], \\ 0, & y \notin [-4;-1]. \end{cases}$

Найдите вероятность попадания случайной точки $(X;Y)$ в область $D: \{x \leq 0,\ y < 0,\ 3x - 2y + 10 \geq 0\}$.

6.14. Случайный вектор $(\xi_1; \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + cx_2, & \text{если } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 3, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу c, $f_{\xi_1}(x_1)$, $M(\xi_1)$, и $P(\xi_1 + \xi_2 > 1)$.

6.15. Случайный вектор $(\xi_1; \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1x_2, & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ 2x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу c, $f_{\xi_2}(x_2)$, $M(\xi_2)$, и $P(\xi_1 + \xi_2 < 1)$.

6.16. Случайный вектор $(\xi_1; \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1 + x_2), & \text{если } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу c, $f_{\xi_1}(x_1)$, $M(\xi_1)$, и $P(\frac{3}{5}\xi_1 + 2\xi_2 < 1)$.

6.17. Случайный вектор $(\xi_1; \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} ce^{-2x_1 - 2x_2}, & \text{если } 0 \leq x_1, x_2 < +\infty, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу c, $f_{\xi_1}(x_1)$, $M(\xi_1)$, и $P(\xi_1 > 1)$.

6.18. Случайный вектор $(\xi_1; \xi_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} c x_1 x_2 (2 - x_1), & \text{если } 0 \le x_1, x_2 \le 2, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Найдите константу c, $f_{\xi_2}(x_2)$, $M(\xi_2)$ и $P(\xi_2 < 1)$.