Numerische Mechanik I
Flachwassergleichungen

Popov Oleg

Universität Kassel,
FB14 - Bauingenieur- und Umweltingenieurwesen

2. März 2020

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabestellung

2 Die Flachwassergleichungen

3 Einschränkungen der Flachwassergleichungen

4 Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren

5 Randbedingungen

6 Zeitintegration

7 Numerische Ergebnisse

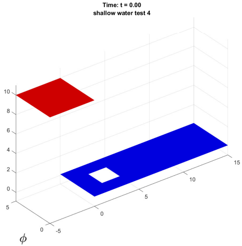
Aufgabestellung

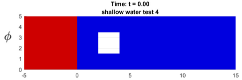
Ziel:

Eine 2D-Simulation für die Umströmung von Körpern in einem Becken (z.B. Dammbruch, Deichbruch)

- ohne Regen und
- ohne Wasserverdampfung.

Alle Wände werden als feste Wände betrachtet (Randbedingung).





Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Die Flachwassergleichungen

2D-Flachwassergleichungen

2D-Flachwassergleichungen werden in der Numerik [1] in der konservativen Form

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \tag{1}$$

mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi v_1 \\ \phi v_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_j(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \begin{pmatrix} \phi v_j \\ \phi v_1 v_j + \delta_{1j} \frac{1}{2} \phi^2 \\ \phi v_2 v_j + \delta_{2j} \frac{1}{2} \phi^2 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2$$

dargestellt.

Die Flachwassergleichungen

Konservativen Größen

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\phi, \phi v_1, \phi v_2)^T$ mit

- $\phi = g \cdot H$ ist das Geopotential.
- g ist eine Gravitationskonstante, $g = 9.81\frac{m}{s^2}$.
- v_1, v_2 sind die Geschwindigkeiten in x-Richtung und y-Richtung.

Geplottet werden die Größen ϕ und $||\mathbf{v}||_2$ mit $\mathbf{v} := (v_1, v_2)^T$.

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Einschränkungen der Flachwassergleichungen

Einschränkungen

Bei der Herleitung der Flachwassergleichungen werden folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Dichte ist räumlich und zeitlich konstant, d.h $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho \neq 0$.
2. Die Körperkräfte sind durch die Gravitation festgelegt.
3. Die horizontalen Längenskalen sind wesentlich größer als die vertikalen. Somit wird die Beschleunigung in x_3-Richtung vernachlässigt.

Für das betrachtete Modellgebiet bzw. dessen Geometrie wird das Flussbett als undurchlässig vorausgesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren

Schritt 1: Umschreibung der Gleichungen

Seien die 2D-Flachwassergleichungen Gleichungen als

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j} \mathbf{f}_j(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \tag{2}$$

gegeben. Als nächstes definieren wir

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) := (\mathbf{f}_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \mathbf{f}_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)))^T$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))) :=& (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) \cdot (\mathbf{f}_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \mathbf{f}_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)))^T \\ =& \partial_{x_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \partial_{x_2} \mathbf{f}_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \tag{3}$$

Schritt 1: Umschreibung der Gleichungen

Jetzt können wir mit (3) die Gleichungen (1) kompakter in der Form

$$\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right) = 0 \tag{4}$$

aufschreiben.

Diskretisierung

Sei Ω unser zu diskretisierendes Gebiet und $\mathcal{T}(\Omega)$ eine Zerlegung von Ω mit

$$\mathcal{T}(\Omega) := \{\Omega_i \subset \Omega, i = 1, \ldots, N \mid \Omega = \biguplus_{i=1}^{N} \Omega_i \text{ und } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset\}.$$

Das Gebiet Ω kann sowohl in

- Dreiecken
- Vierecken
- krummlinigen Elementen

zerlegt werden [2]. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf die Diskretisierung durch nicht-überlappende Dreiecke (Triangulierung).

Schritt 2: Integration über eine Zelle

Wir fordern, dass die Gleichungen (4) für eine beliebige Zelle $\Omega_i \subset \Omega$ gültig ist.
Als nächstes integrieren wir die Gleichungen (4) über Zelle Ω_i und erhalten

$$\int_{\Omega_i} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t) d\Omega + \int_{\Omega_i} \operatorname{div}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\right) d\Omega = 0. \tag{5}$$

Wenn wir die Gleichungen (5) für alle $\Omega_i \subset \Omega$ aufsummieren, dann erhalten wir

$$\sum_{\Omega_i \subset \Omega}^{\#\mathcal{T}(\Omega)} \left(\int_{\Omega_i} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t) d\Omega + \int_{\Omega_i} \operatorname{div}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\right) d\Omega \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\Omega_i \subset \Omega}^{\#\mathcal{T}(\Omega)} \int_{\Omega_i} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t) d\Omega + \sum_{\Omega_i \subset \Omega}^{\#\mathcal{T}(\Omega)} \int_{\Omega_i} \operatorname{div}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\right) d\Omega = 0.$$

Satz: Gaußschen Integralsatzes

Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge mit abschnittsweise glattem Rand $S = \partial V$, der Rand sei orientiert durch ein äußeres Normaleneinheitsvektorfeld $\mathbf{n}$. Ferner sei das Vektorfeld $\mathbf{F}$ stetig differenzierbar auf einer offenen Menge U mit $V \subseteq U$. Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, d^{(n)}V = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d^{(n-1)}S \tag{6}$$

wobei $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ das Standardskalarprodukt der beiden Vektoren bezeichnet.

Schritt 3: Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

Wir wollen jetzt den Satz (6) auf das zweite Integral der Gleichungen (5) anwenden.
Mit $n = 2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$, $V = \Omega_i \subset \mathbb{R}^2$, $S = \partial V = \partial\Omega_i$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ erhalten wir

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{div}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\right) d\Omega \overset{\text{Satz 6}}{=} \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n} \; dS. \tag{7}$$

Schritt 3:

Jetzt setzen wir (7) in Gleichungen (5) und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_i} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t)d\Omega + \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{n}\ dS = 0 \\ \Leftrightarrow &\int_{\Omega_i} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x},t)d\Omega = -\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \cdot \mathbf{n}\ dS \end{aligned} \tag{8}$$

Für die weitere Umformungen von (8) benötigen wir die Definition des Zellmittelwertes.

Definition (Zellmittelwert)

Sei Ω_i eine Zelle. Wir Definieren als Zellmiteilwert $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ einer Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ als

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) := \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega, \tag{9}$$

wobei $|\Omega_i|$ für die Fläche der Zelle Ω_i steht.

Schritt 4: Umformungen

- Das Integral wird mit der partiellen Ableitung vertauscht.
- Die Gleichungen werden mit $\frac{1}{|\Omega_i|}$ multipliziert.

Insgesamt erhalten wir daraus:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega_i}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)d\Omega = -\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\cdot\mathbf{n}\ dS \quad \Big|\cdot\frac{1}{|\Omega_i|} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)d\Omega}_{\overset{\text{Def.9}}{=}\tilde{\mathbf{u}}(t)} = -\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\cdot\mathbf{n}\ dS$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}}(t) = -\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_S \mathbf{F}(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))\cdot\mathbf{n}\ dS \tag{11}$$

Definition (Rotationsinvarianz)

Die Differentialgleichung (1) heißt Rotationsinvariant, falls zu jedem Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $||\mathbf{n}||_2 = 1$ eine reguläre Matrix $\mathbf{T}(\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ existiert, derart dass

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))n_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))n_2 = \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \qquad (12)$$

gilt.

Rotationsinvarianz

Aus [1] ist bekannt das die zweidimensionalen Flachwassergleichungen rotationsinvariant sind mit der Matrix

$$\mathbf{T}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & n_2 \\ 0 & -n_2 & n_1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dabei bezeichnet der auftretende Vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ den von der betrachtete Zelle Ω_i nach außen zeigenden Normaleneinheitsvektor.

Schritt 5: Ausnutzung der Rotationsinvarianz

Bei der Anwendung der Rotationsinvarianz auf die Gleichungen (11) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} &= -\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_S \mathbf{f}_1(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \cdot n_1 + \mathbf{f}_2(\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \cdot n_2 \; dS \\ \overset{\text{Def.12}}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} &= -\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \; dS \end{aligned} \tag{14}$$

unsere räumliche Diskretisierung.

Problem: Das Integral

$$\oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\, dS$$

kann am Rand nicht ausgewertet werden, denn

- die Werte am Rand bei $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sind nicht bekannt.
- zwei unterschiedliche Werte am Rand.

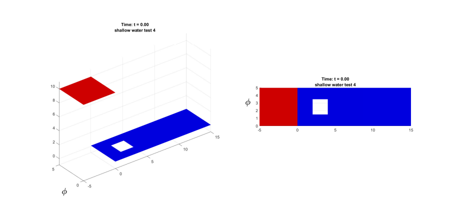


Abbildung: Unstetige Anfangsbedingung. In Seitenansicht (links) und Draufsicht (rechts).

Schritt 6: numerische Flussfunktion

Lösung:

- Approximierung dieses Integrals mit einer numerische Flussfunktion.

Somit bekommen wir eine Approximation am Rand für benachbarte Zellen durch

$$
\begin{aligned}
&\oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \, dS \\
\approx &\oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{+}, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{-}) \, dS,
\end{aligned}
$$

mit

- $\tilde{\mathbf{u}}^{+}$ als Zellenmittelwert für aktuelle Zelle
- $\tilde{\mathbf{u}}^{-}$ als Zellenmittelwert für benachbarte Zelle

HLL-Methode

Harten-Lax-Van-Leer-Methode (Flussfunktion), abgekürzt HLL-Methode.

$$\mathbf{H}^{HLL}(\tilde{\mathbf{u}}^+, \tilde{\mathbf{u}}^-) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}^+ & S_l \geq 0 \\ \frac{S_r \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}^+) - S_l \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}^-) + S_l S_r (\tilde{\mathbf{u}}^- - \tilde{\mathbf{u}}^+)}{S_r - S_l} & S_l \leq 0 \leq S_r \\ \tilde{\mathbf{u}}^- & S_r \leq 0 \end{cases}$$

mit

$$S_l = \min\{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\phi_j}, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\phi_i}\},$$
$$S_r = \max\{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\phi_j}, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\phi_i}\},$$

für zweidimensionale Flachwassergleichungen.
Dabei gilt $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T, \mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$ und i steht dabei für die aktuelle Zelle und j für die Nachbarzelle.

Schritt 6: FV-Verfahren mit HLL-Methode

Alles zusammengefasst bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{|\Omega_i|}\oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{H}^{HLL}(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^+, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^-)\ dS. \tag{15}$$

Die Gleichungen (15) gelten für beliebige Zellen die sich nicht am Rand des Gebiets befinden.

Schritt 7: Integration

Für alle Dreiecke im Inneren des Gebiets (ohne Randbedingungen) gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{|\Omega_i|}\sum_{j\in N(i)} |\Gamma_{ij}| \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{H}^{HLL}(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{+}, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{-}) \qquad (16)$$

mit

$$N(i) = \{j \in \mathbb{N} \mid \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset\}.$$

Dabei bezeichnet Ω_i die Dreiecke einer Triangulierung des Gebiets Ω für $i = 1, \ldots, N$ und Γ_{ij} für die jeweilige Kante zwischen den Dreiecken Ω_i und Ω_j.

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Wir wollen davon ausgehen, dass es sich bei allen Rändern um feste Wände handelt, dementsprechend gilt dort $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dies können wir direkt in

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}\phi^2 \\ \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot (-n_2, n_1)^T) \end{pmatrix}$$

einsetzen und erhalten damit

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Randbedingungen

Jetzt setzen wir

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = (0, \frac{1}{2}\phi^2, 0)^T$$

in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{|\Omega_i|} \oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \; dS$$

ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{|\Omega_i|} \oint_S \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix} \; dS.$$

Inhaltsverzeichnis

1. Aufgabestellung
2. Die Flachwassergleichungen
3. Einschränkungen der Flachwassergleichungen
4. Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren
5. Randbedingungen
6. Zeitintegration
7. Numerische Ergebnisse

Zeitintegration

Expliziter Euler-Verfahren

Ein FV-Verfahren mit explizitem Euler-Verfahren hat die Darstellung

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in N(i)} |\Gamma_{ij}| \cdot \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \mathbf{H}^{HLL}(\mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^+, \mathbf{T}(\mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}^-)$$

mit $N(i) = \{j \in \mathbb{N} \mid \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset\}$ für alle Dreiecke ohne Randgebietskanten.

Für alle Dreiecke mit Kanten am Rand des Gebiets, erhalten wir

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot \frac{|\Gamma_{ij}|}{|\Omega_i|} \mathbf{T}(\mathbf{n})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeitintegration

CFL-Bedingung

Bei explizitem Verfahren im mehrdimensionalen Fall, muss eine verallgemeinerte CFL-Bedingung berücksichtigt werden. Wir wollen die Zeitschrittweite so wählen, dass für jedes Dreieck die Ungleichung

$$\Delta t \leq CFL \cdot \frac{\min_{l=1,2,3} k_l}{\max_{j=1,2,3} |\lambda_j|} \tag{18}$$

mit CFL $\in (0,1)$ erfüllt ist.
Dabei sind die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Flachwassergleichungen durch

- $\lambda_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \sqrt{\phi}$,
- $\lambda_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$,
- $\lambda_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \sqrt{\phi}$

gegeben und für $l = 1, \dots, 3$ bezeichnet k_l den Abstand des Schwerpunkts, zu einem der Mittelpunkte der jeweiligen Dreieckskanten.

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabestellung

2 Die Flachwassergleichungen

3 Einschränkungen der Flachwassergleichungen

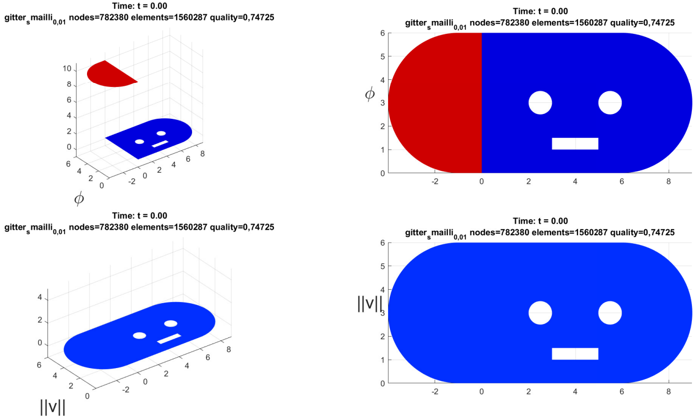
4 Anwendung der Finite-Volumen-Verfahren

5 Randbedingungen

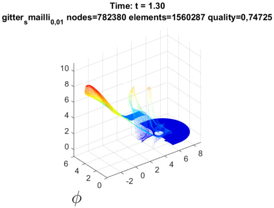
6 Zeitintegration

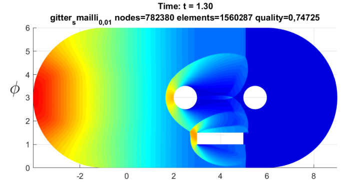
7 Numerische Ergebnisse

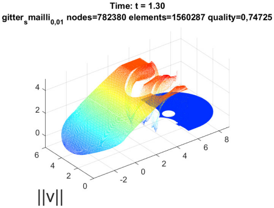
Numerische Ergebnisse

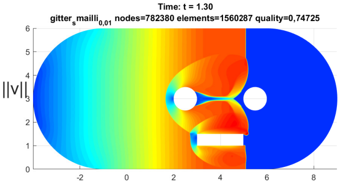


Numerische Ergebnisse









Literatur

A. Meister.
Numerik gewöhnliche Differentialgleichungen.
Vorlesungsskript, Universität Kassel, Wintersemester 2015/16.

O. Wünsch.
Numerische Berechnung von Strömungen.
Vorlesungsskript, Universität Kassel, Wintersemester 2018/2019.

S. Ortlebt.
Ein diskontinuierliches Galerkin-Verfahren hoher Ordnung auf Dreiecksgittern mit modaler Filterung zur Lösung hyperbolischer Erhaltungsgleichungen.
2012, kassel university press GmbH, Kassel. ISBN online: 978-3-86219-219-9

Literatur

P.-O. Persson, G. Strang.
DistMesh - A Simple Mesh Generator in MATLAB.
http://persson.berkeley.edu/distmesh

Gaußscher Integralsatz.
https://de.wikipedia.org/wiki/Gaußscher_Integralsatz

D. Kuhl.
Numerische Mechanik I.
Vorlesungsskript, Universität Kassel, Wintersemester 2016/17.