Задача 6.9
Требуется найти все значения α и β, для которых матрица

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{48}$$

является
1. вырожденной;
2. матрицей со строгим диагональным преобладанием;
3. положительно определенной.

□

1. Матрица является вырожденной, если ее определитель равен нулю

Найдем все значения параметров, для которых будет выполнятся это условие:

$$|A| = 0$$
$$|A| = \alpha(-1)^{1+1} * 3 + \beta(-1)^{2+1} * 2 = 3\alpha - 2\beta => 3\alpha = 2\beta$$

2. Условие строгого диагонального преобладания:

$$|a_{i,i}| > \sum_{\gamma \neq i} |a_{i,j}|$$
$$\begin{Bmatrix} |\alpha| > 1 \\ |\beta| < 1 \\ 2 > 1 \end{Bmatrix} => \begin{Bmatrix} |\alpha| > 1 \\ |\beta| < 1 \end{Bmatrix}$$

3. Матрица является положительно определенной, если:
   1) А – симметричная

$$A = A^T$$
$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} => \beta = 1$$

   2) Выполняются неравенства Сильвестра всех ее главных миноров

$$\begin{Bmatrix} \alpha > 0 \\ 2\alpha - 1 > 0 \\ 3\alpha - 2 > 0 \end{Bmatrix} => \alpha > \frac{2}{3}$$

Суммируем 1 и 2 пункты:

$$\begin{Bmatrix} \alpha > \frac{2}{3} \\ \beta = 1 \end{Bmatrix}$$