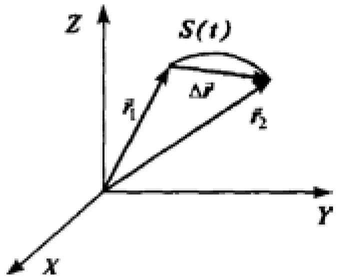
Кинематика материальной точки.

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки, что означает тело, обладающее массой, размерами которого можно пренебречь при рассмотрении его движения. Движение материальной точки — простейшая задача механики, которая позволит рассмотреть более сложные типы движений.

Перемещение материальной точки происходит в пространстве и изменяется со временем. Реальное пространство трехмерно, и положение материальной точки в любой момент времени полностью определяется тремя числами — ее координатами в выбранной системе отсчета. Число независимых величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения тела, называется числом его степеней свободы. В качестве системы координат выберем прямоугольную, или декартову, систему координат. Для описания движения точки, кроме системы координат, необходимо еще иметь устройство, с помощью которого можно измерять различные отрезки времени. Такое устройство назовем часами. Выбранная система координат и связанные с ней часы образуют систему отсчета.

Декартовы координаты X,Y,Z определяют в пространстве радиус-вектор z, острие которого описывает при его изменении со временем траекторию материальной точки. Длина траектории точки представляет собой величину пройденного пути $S(t)$. Путь $S(t)$— скалярная величина. Наряду с величиной пройденного пути, перемещение точки характеризуется направлением, в котором она движется. Разность двух радиус-векторов, взятых в различные моменты времени, образует вектор перемещения точки (рис.).



Для того чтобы характеризовать, как быстро меняется положение точки в пространстве, пользуются понятием скорости. Под средней скоростью движения по траектории за конечное время Δt понимают отношение пройденного за это время конечного пути ΔS ко времени:

$$v_s = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} \tag{1.1}$$

Скорость движения точки по траектории — скалярная величина. Наряду с ней можно говорить о средней скорости перемещения точки. Эта скорость — величина, направленная вдоль вектора перемещения,

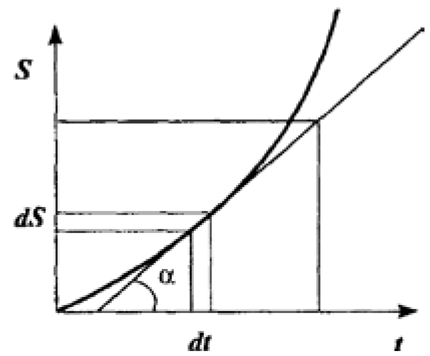
$$\vec{v}_r = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad . \quad (1.2)$$

Если моменты времени t_1, и t_2 бесконечно близки, то время Δt бесконечно мало и в этом случае обозначается через dt. За время dt точка проходит бесконечно малое расстояние dS. Их отношение образует мгновенную скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad . \quad (1.3)$$

Производная радиус-вектора r по времени определяет мгновенную скорость перемещения точки.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad . \quad (1.4)$$



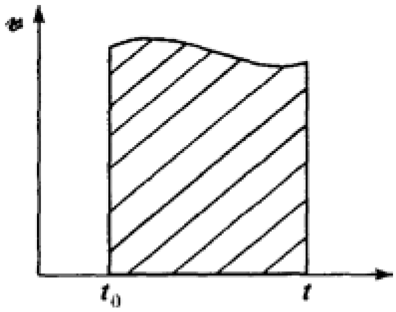
Поскольку перемещение совпадает с бесконечно малым элементом траектории $dr = dS$, то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его величина:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt} \quad . \quad (1.5)$$

На рис. показана зависимость пройденного пути S от времени t. Вектор скорости $v(t)$ направлен по касательной к кривой $S(t)$ в момент времени t. Из рис. видно, что угол наклона касательной к оси t равен

$$\frac{dS}{dt} = tg\alpha \quad .$$

Интегрируя выражение (1.5) в интервале времени от t_0 до t, получим формулу, позволяющую вычислить путь, пройденный телом за время $t\text{-}t_0$ если известна зависимость от времени его скорости $v(t)$.



$$S=\int_{t_0}^{t} v(t)dt \qquad (1.6)$$

Геометрический смысл этой формулы ясен из рис. По определению интеграла пройденный путь представляет собой площадь, ограниченную кривой $v=v(t)$ в интервале от t_0 до t.В случае равномерного движения, когда скорость сохраняет свое постоянное значение во все время движения, $v=const$; отсюда следует выражение

$$S=S_0+v(t-t_0) \qquad , (1.7)$$

где S_0 путь, пройденный к начальному времени t_0.

Производную скорости по времени, которая является второй производной по времени от радиус-вектора, называют ускорением точки:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad . \quad (1.8)$$

Вектор ускорения а направлен вдоль вектора приращения скорости *dv*. Пусть а = *const*. Этот важный и часто встречаемый случай носит название равноускоренного или равнозамедленного (в зависимости от знака величины а) движения. Проинтегрируем выражение (1.8) в пределах от $t = 0$ до t:

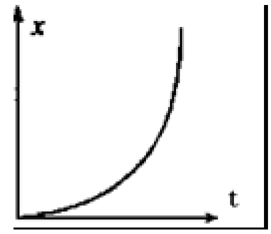
$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}(0)+\vec{a}t, \qquad (1.9)$$

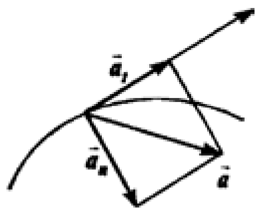
$$\vec{r}(t)=\vec{r}(0)+\vec{v}(0)t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1.10)$$

и используем следующие начальные условия: $\vec{r}(0)=0;\vec{v}(0)=\vec{v}_0$.

Таким образом, при равноускоренном движении

$$\vec{r}(t)=\vec{v}(0)t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad . \qquad (1.11)$$



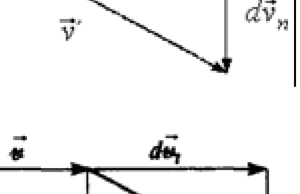


В частности, при одномерном движении, например вдоль оси *X*, $x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Случай прямолинейного движения изображен на рис. При больших временах зависимость координаты от времени представляет собой параболу.

В общем случае движение точки может быть криволинейным. Рассмотрим этот тип движения. Если траектория точки произвольная кривая, то скорость и ускорение точки при ее движении по этой кривой меняются по величине и направлению.

Выберем произвольную точку на траектории. Как всякий вектор, вектор ускорения можно представить в виде суммы его составляющих по двум взаимно перпендикулярным осям. В качестве одной из осей возьмем направление касательной в рассматриваемой точке траектории, тогда другой осью окажется направление нормали к кривой в этой же точке. Составляющая ускорения, направленная по касательной к траектории, носит название тангенциального ускорения a_t, а направленная ей перпендикулярно — нормального ускорения a_n.

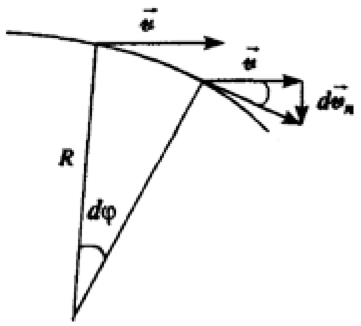
Получим формулы, выражающие величины a_t, и a_n через характеристики движения. Для простоты рассмотрим вместо произвольной криволинейной траектории плоскую кривую. Окончательные формулы остаются справедливыми и в общем случае неплоской траектории.



Благодаря ускорению скорость точки приобретает за время *dt* малое изменение dv. При этом тангенциальное ускорение, направленное по касательной к траектории, зависит только от величины скорости, но не от ее направления. Это изменение величины скорости равно dv. Поэтому тангенциальное ускорение может быть записано как производная по времени от величины скорости:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad (1.12)$$

С другой стороны, изменение dv_n, направленное перпендикулярно к v, характеризует только изменение направления вектора скорости, но не его величины. На рис. показано изменение вектора скорости, вызванное действием нормального ускорения. Как видно из рис. $v'^2 = v^2 + (dv_n)^2$, и, таким образом, с точностью до величины второго порядка малости величина скорости остается неизменной $v=v'$.



Найдем величину a_n. Проще всего это сделать, взяв наиболее простой случай криволинейного движения — равномерное движение по окружности. При этом a_t=0. Рассмотрим перемещение точки за время dt по дуге dS окружности радиуса R.

Скорости v и v', как отмечалось, остаются равными по величине. Изображенные на рис. треугольники оказываются, таким образом, подобными (как равнобедренные с равными углами при вершинах). Из подобия треугольников следует $\frac{dv_n}{v} = \frac{dS}{R}$, откуда находим выражение для нормального ускорения:

$$a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{v^2}{R} \qquad (1.13)$$

Формула для полного ускорения при криволинейном движении имеет вид:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad (1.14)$$

Подчеркнем, что соотношения (1.12), (1.13) и (1.14) справедливы для всякого криволинейного движения, а не только для движения по окружности. Это связано с тем, что всякий участок криволинейной траектории в достаточно малой окрестности точки можно приближенно заменить дугой окружности. Радиус этой окружности, называемый радиусом кривизны траектории, будет меняться от точки к точке и требует специального вычисления. Таким образом, формула (1.14) остается справедливой и в общем случае пространственной кривой.

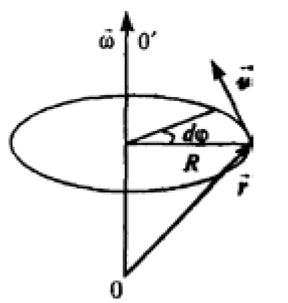
1.1 Угловая скорость и угловое ускорение.

Пройденный путь *S* , перемещение *dr;* скорость *v* , тангенциальное и нормальное ускорение a_t, и a_n, представляют собой линейные величины. Для описания криволинейного движения наряду с ними можно пользоваться угловыми величинами.

Рассмотрим более подробно важный и часто встречаемый случай движения по окружности. В этом случае наряду с длиной дуги окружности движение можно характеризовать утлом поворота φ вокруг оси вращения. Величину

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \qquad (1.15)$$

называют угловой скоростью. Угловая скорость представляет собой вектор, направление которого связывают с направлением оси вращения тела (рис.).



Обратим внимание на то, что, в то время как сам угол поворота φ является скаляром, бесконечно малый поворот *dφ* — векторная величина, направление которой определяется по правилу правой руки, или буравчика, и связано с осью вращения. Если вращение является равномерным, то ω=*const* и точка на окружности поворачивается на равные углы вокруг оси вращения за равные времена. Время, за которое она совершает полный оборот, т.е. поворачивается на угол *2π,* называется периодом движения Т. Выражение (1.15) можно проинтегрировать в пределах от нуля до Т и получить угловую частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad . \qquad (1.16)$$

Число оборотов в единицу времени есть величина, обратная периоду, — циклическая частота вращения

$$0\ \nu = 1/T. \qquad (1.17)$$

Нетрудно получить связь между угловой и линейной скоростью точки. При движении по окружности элемент дуги связан с бесконечно малым поворотом соотношением $dS = R \cdot d\varphi$. Подставив его в (1.15), находим

$$v = \omega r. \qquad (1.18)$$

Формула (1.18) связывает величины угловой и линейной скоростей. Соотношение, связывающее векторы ω и *v,* следует из рис. А именно, вектор линейной скорости представляет собой векторное произведение вектора угловой скорости и радиуса-вектора точки *r:*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad . \qquad (1.19)$$

Таким образом, вектор угловой скорости направлен по оси вращения точки и определяется по правилу правой руки или буравчика.

Угловое ускорение — производная по времени от вектора угловой скорости ω (соответственно вторая производная по времени от угла поворота) $\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Выразим тангенциальное и нормальное ускорение через угловые скорости и ускорение. Используя связь (1.18),(1.12) и (1.13), получаем

$$a_t = \beta \cdot R, \ a = \omega^2 \cdot R. \qquad (1.20)$$

Таким образом, для полного ускорения имеем

$$a = \sqrt{\beta^2 + \omega^4} R \quad . \qquad (1.21)$$

Величина β играет роль тангенциального ускорения: если β = 0.полное ускорение при вращении точки не равно нулю, $a = R \cdot \omega^2 \neq 0$.