Московский государственный университет
имени М.И.Ломоносова

Механико-математический факультет

Отчет по задаче № 1

Численное решение краевой задачи методом конечных разностей

Выполнил студент:

Хисамеев О.В.
группа: 404

Москва, 2022 г.

Постановка задачи

Построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти ее решение при различных значениях h и α:

$$-u'' + e^u = \alpha \cdot sin(x^2), \tag{1}$$
$$u(0) = u(1) = 0, \ \alpha = 0.1, 1, 10.$$

Алгоритм выполнения задачи

Для начала опишем метод конечных разностей. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей. Обозначим через $h = \frac{1}{n}$ - шаг полученного разбиения, x_i - точки разбиения:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n \tag{2}$$

Будем искать приближенное решение задачи (1) в узловых точках разбиения отрезка x_i, $i = 1, \dots, n-1$ $(x_0 = x_n = 0)$.
Выражения

$$u' \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{h}, \tag{3}$$
$$u'' \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{4}$$

называются *конечно-разностной аппроксимацией* соответствующих производных. Чтобы выяснить насколько хорошо правые части (3) и (4) аппроксимируют производные, воспользуемся разложением Тейлора

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + \frac{1}{2!}u''(x)h^2 + \frac{1}{3!}u^{(3)}(x)h^3 + O(h^4) \tag{5}$$
$$u(x-h) = u(x) - u'(x)h + \frac{1}{2!}u''(x)h^2 - \frac{1}{3!}u^{(3)}(x)h^3 + O(h^4). \tag{6}$$

Из (5) и (6) немедленно получаем:

$$u'(x) - \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right] = -\frac{1}{2}u''(x) - \frac{1}{3!}u^{(3)}(x)h^2 + O(h^3) \tag{7}$$
$$u'(x) - \left[\frac{u(x) - u(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}u''(x) - \frac{1}{3!}u^{(3)}(x)h^2 + O(h^3). \tag{8}$$

Сложив и разделив на 2 равенства (7) и (8), получаем

$$u'(x) - \left[\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}\right] = -\frac{1}{2\cdot 3!}u^{(3)}(x)h^2 + O(h^3), \tag{9}$$

откуда видно, что аппроксимация имеет второй порядок. Аналогично определяется погрешность аппроксимации (4), также пропорциональная h^2.
Далее будем использовать следующее обозначение

$$u_i = u(x_i), \text{ для } \ i = 0, \dots, n.$$

Здесь x_i являются точками разбиения отрезка $[0,1]$ (см. (2)).
Запишем граничные условия в этих обозначениях:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = 0 \end{cases}$$

Если теперь подставить полученные приближения в уравнение (1), то получим

$$\begin{cases} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 \cdot (e^{u_i} - \alpha sin(x_i^2)) \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Уравнения (10) представляют собой систему $n-2$ нелинейных уравнений относительно $n-2$ неизвестной $u_2, \dots, u_{n-1}$. Перепишем ее в следующей матричной форме, учитывая граничные условия:

$$Au + H(u) = 0, \text{ где} \tag{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$H(u) = h^2 \cdot \begin{pmatrix} e^{u_1} - \alpha sin(x_1^2) \\ e^{u_2} - \alpha sin(x_2^2) \\ \dots \\ e^{u_{n-1}} - \alpha sin(x_{n-1}^2) \end{pmatrix} \tag{13}$$

Таким образом, задача сводится к решению этой системы нелинейных уравнений, решение которой и будет значением решения поставленной задачи в точках x_i для $i = 1, \dots, n-1$.
Решать систему (11) будем методом Ньютона. k-я итерация метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений состоит в следующем:

1. Решить систему линейных уравнений $[A + H'(u^k)]y^k = -[Au^k + H(u^k)]$;
2. Положить $u^{k+1} = u^k + y^k$, где $H'(u)$ - матрица якоби для H:

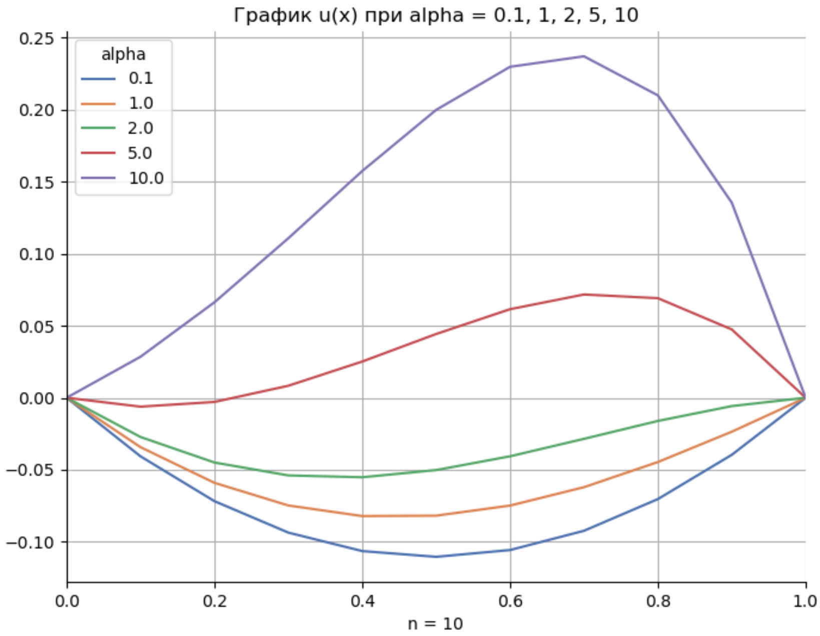
$$H' = h^2 \cdot \begin{pmatrix} e^{u_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{u_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{u_{n-2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{u_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

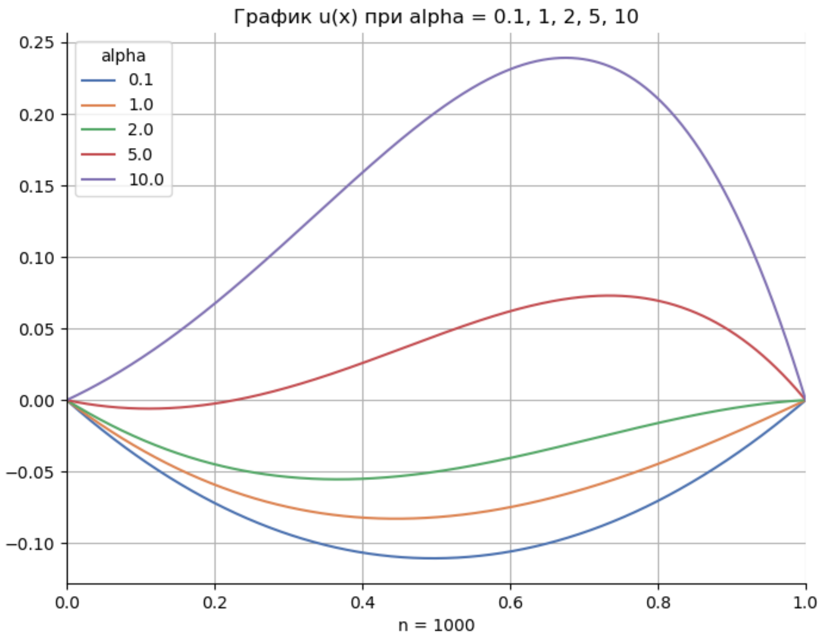
Для первой итерации инициализируем u нулями. Алгоритм заканчивает свою работу, когда норма y становится меньше заранее установленной величины ε.

Данный алгоритм решения линейной системы уравнений реализован мною на языке программирования python с использованием модулей numpy, pandas, matplotlib и seaborn.

Результаты

Ниже приведены графики численных приближений решений задачи (1).





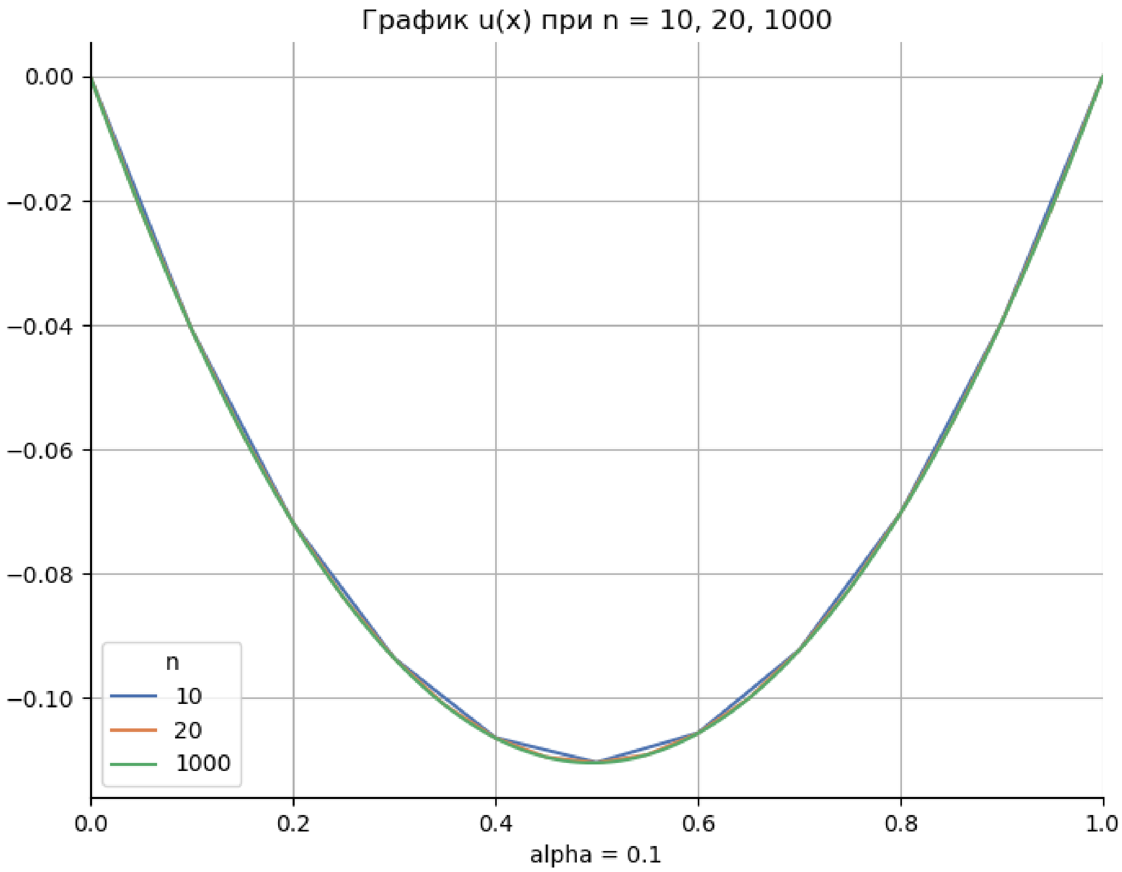


График u(x) при n = 10, 20, 1000
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
alpha = 0.1
n
10
20
1000

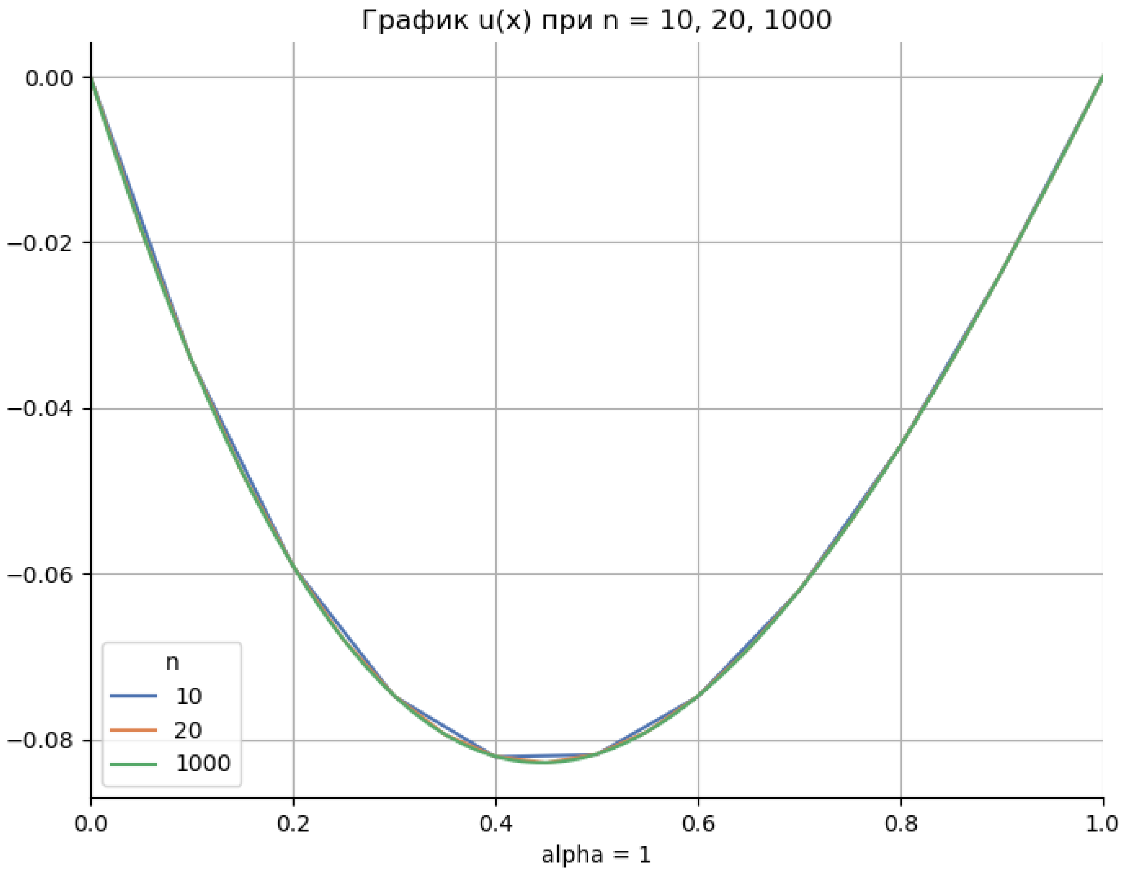


График u(x) при n = 10, 20, 1000
0.00
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
alpha = 1
n
10
20
1000

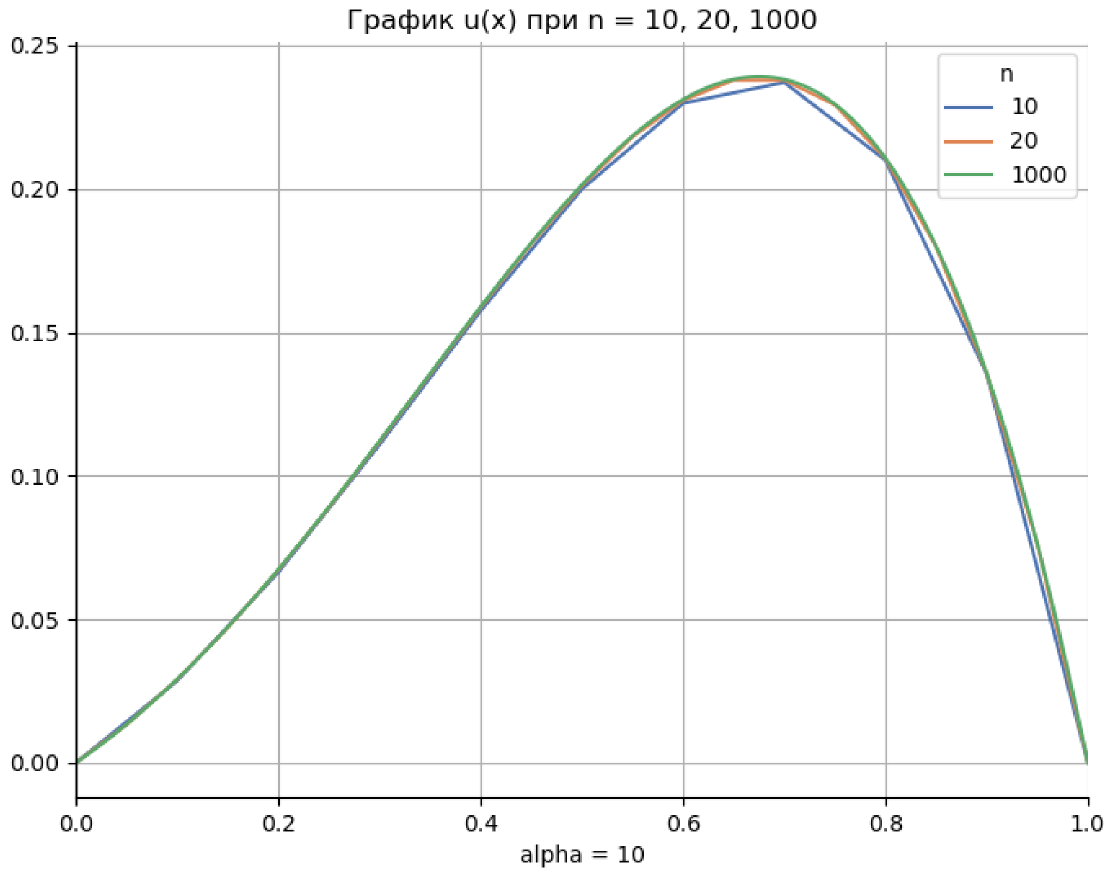


График u(x) при n = 10, 20, 1000
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
alpha = 10
n
10
20
1000

Список литературы:

1. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.

2. *Бахвалов Н. С., Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Численные методы решения задач и упражнения.

3. *Бахвалов Н. С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы.