

① Множественное распределение

$$A, B \text{ нез. } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

$$X, Y \text{ нез. } F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$$

$$F_x(x) = P(X \leq x)$$

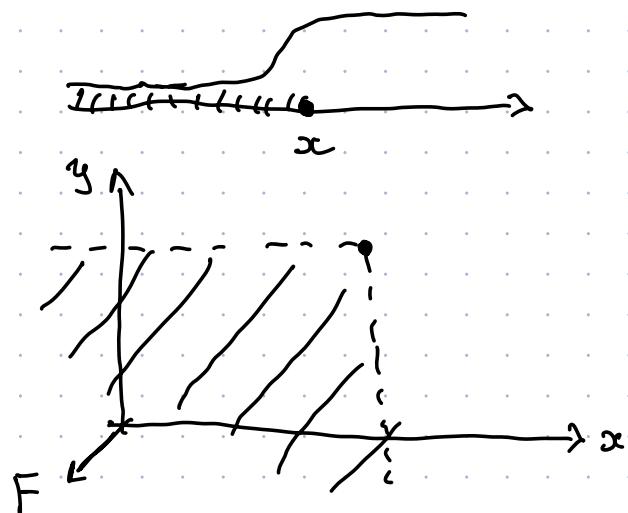
$$F_{xy}(x, y) = P(X \leq x \cap Y \leq y)$$

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

$$f_x(y) = F'_x(x)$$

$$f(x, y) = (F'_x(x, y))'_y$$

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(x) dx$$



$$F_{xy}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$$

- $F(+\infty, +\infty) = 1$
 $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- $P(X \leq x, Y < -\infty)$
 $F(x, +\infty) = P(X \leq x, Y \leq +\infty) = P(X \leq x) = F_x(x)$
- $0 \leq F(x, y) \leq 1$
 $F(x, y)$ не зависит от x, y
- $f(x, y) \geq 0$
- $P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

Упражнение

$X \sim U[0; 2]$ Вычислите моменты

2 порядка

- "00" $X+2$
- "Другое" X^2

Y — величина, которую назовёт Вам.

$$f_Y(y) - ?$$

Упражнение

$X \setminus Y$	-1	0	2
0	0.1	0.2	0.3
4	0.2	0.1	0.1

$$X \sim \text{+++}$$

$$\mathbb{E}(X)$$

$$X|Y=4$$

$$\mathbb{E}(X|Y=4)$$

$$\text{Cov}(X, Y)$$

Независимы?

$X Y=4$	-1	0	2
$\mathbb{P}(X=k Y=4)$	1/2	1/4	1/4

$$\mathbb{P}(X=-1|Y=4) = \frac{\mathbb{P}(X=-1 \cap Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{0.2}{0.4}$$

$$\mathbb{E}(X|Y=4) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 0$$

ручно

$$\sum_{k \in \{-1, 0, 2\}} \mathbb{P}(Y=4 \cap X=k)$$

$\mathbb{E}(X|Y)$ - ожидаемое значение

$$\mathbb{P}(Y=4|X=k) \cdot \mathbb{P}(X=k)$$

$$\mathbb{E}(X|\sigma(Y))$$

Форема полной вер-ти

X	-1	0	2
	0.3	0.3	0.4

$$\mathbb{P}(X=-1) = \sum_{k \in \{0, 4\}} \mathbb{P}(X=-1, Y=k)$$

$$\mathbb{E}(X) = -0.3 + 0.8 = 0.5$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \underbrace{\mathbb{E}(Y)}_{\frac{4 \cdot 0.4}{1.6}} < 0$$

$$\sum_{k,m} P(X=k, Y=m) \cdot k \cdot m$$

$$Z = X \cdot Y$$

$$-0.8 + 0.8 = 0$$

$$\frac{\sum |k \cdot m| \dots}{\prod P(X=k, Y=m) \dots}$$

Трив. нез.

$$P(X=k, Y=m) = P(X=k) \cdot P(Y=m)$$

Означення та вимп. вм.

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

Ф-н якості вм.

$$f(y|x) = \frac{f(y|x) \cdot f(x)}{f(y)}$$

Ф-н Банєса

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x) \cdot f(x) dx =$$

$$= \mathbb{E}_x[f(y|x)]$$

Ф-н йонкої віроятності

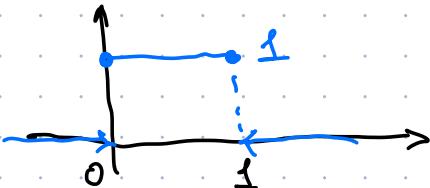
Задача №15

$$X \sim U[0; 1]$$

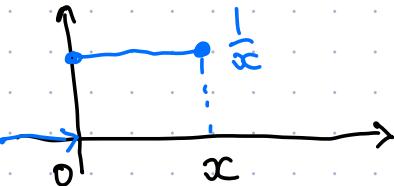
$$Y \sim U[0; X]$$

$$f(y|x) \quad f(x) \quad f(x,y) \quad f(x|y) \quad f(y)$$

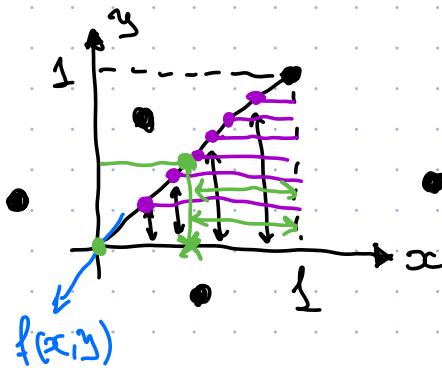
a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$



b) $f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & y \in [0; x] \\ 0, & y \notin [0; x] \end{cases}$



c) $f(x,y) = f(y|x) \cdot f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [0; 1] \text{ и } y \in [0; x] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$



d) $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_y^1 = -\ln y$

маргинальная

$$f(y) = \begin{cases} -\ln y, & y \in [0; 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g) f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(y|x)f(x)}{f(y)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{\ln y}\right), & x \in [y; 1] \\ 0, & \text{where} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{0 \leq x \leq 1} \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \quad y$$

Задачи (11.17)

$$f(x,y) = \begin{cases} c \cdot xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{where} \end{cases}$$

a) $c = ?$

$$\int_0^1 \int_0^1 c \cdot xy \, dx \, dy = c \cdot \frac{xy^2}{2} \Big|_0^1 \Big|_0^1 = \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4$$

б) $X \text{ и } Y$ независимы?

$$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

$$f_x(x) = \int_0^1 4xy \, dy = 4x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = 2x$$

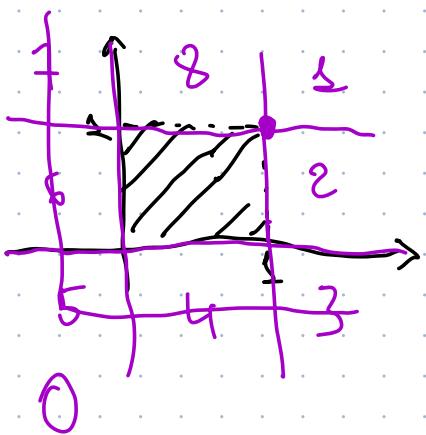
$$f_y(y) = 2y \quad \text{Да, независимы}$$

$$f(x, y) \propto \underbrace{g(x)}_{\text{mum}} \cdot \underbrace{h(y)}_{\text{mum}}$$

b) $F(x, y) - ?$

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y 4xy \, dx \, dy = 4 \frac{x^2}{2} \left[y \right]_0^y = x^2 y^2$$

$$F(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$\textcircled{5} \quad F(-\infty, -\infty) = 0$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{3}, \textcircled{6}, \textcircled{7}$$

$$\textcircled{8} \quad F(x, +\infty) = F(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad F(y) = \frac{y^2}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad 1$$

$$F(+\infty, +\infty) = \mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1) = 1$$

② Packpaketentwurf Mackayera

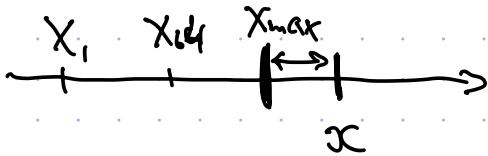
$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \sim \text{iid } F_x(x)$$

independent

a) $X_{\max} \sim ?$

identically
distributed

$$F_{X_{\max}}(x) = P(X_{\max} \leq x) = P(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x \cap \dots \cap X_n \leq x) =$$

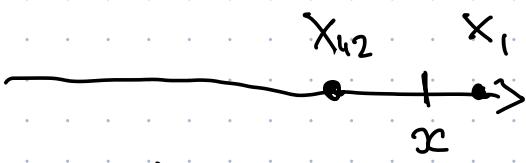


$$= \underbrace{P(X_1 \leq x)}_{F_x(x)} \cdot \underbrace{P(X_2 \leq x)}_{F_x(x)} \cdot \dots \cdot \underbrace{P(X_n \leq x)}_{F_x(x)} = [F_x(x)]^n$$

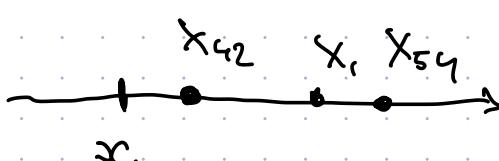
$$f_{X_{\max}}(x) = n \cdot [F_x(x)]^{n-1} \cdot f_x(x)$$

b) $X_{\min} \sim ?$

$$F_{X_{\min}}(x) = P(X_{\min} \leq x) = 1 - P(X_{\min} > x) =$$



$$X_{\min} \leq x$$



$$X_{\min} > x$$

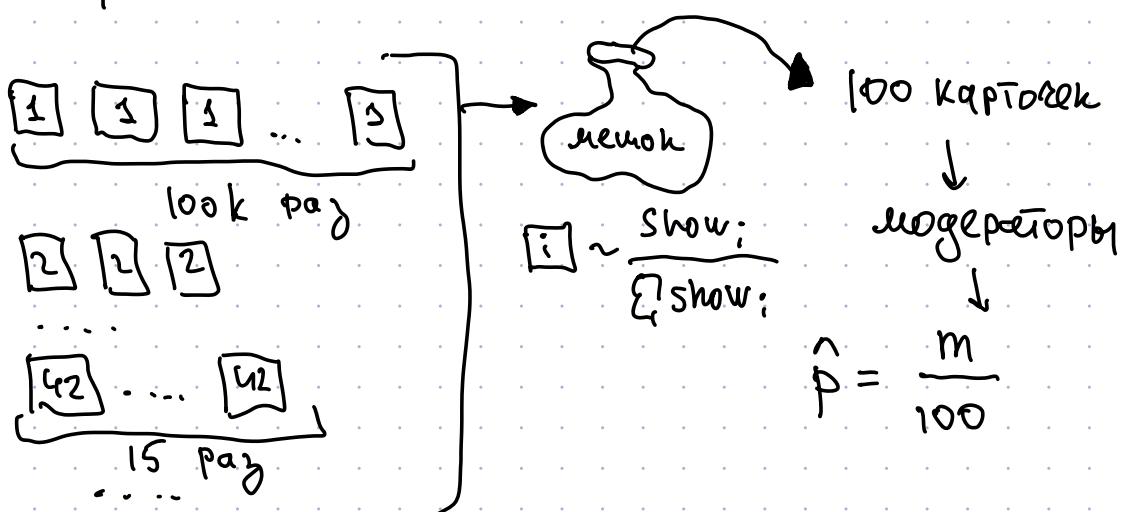
$$\begin{aligned}
 &= 1 - P(X_1 > x \cap \dots \cap X_n > x) = \\
 &= 1 - P(X_1 > x) \cdot \dots \cdot P(X_n > x) = \\
 &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X_n \leq x)) = \\
 &= 1 - (1 - F_x(x))^n
 \end{aligned}$$

③ Типовое сэмплирование

id	Show
1	100 000
2	3
...	...
42	15
...	...

P - доле хороших показов

$$P(\boxed{\square} - \text{хорош} \text{ по гонкам} \text{ и не выбыл})$$



$$\text{np.random}((1, \dots, 10^{10}); (\frac{\text{show}_1}{\sum \text{show}_i}, \dots, \frac{\text{show}_{10}}{\sum \text{show}_i}))$$

Схема:

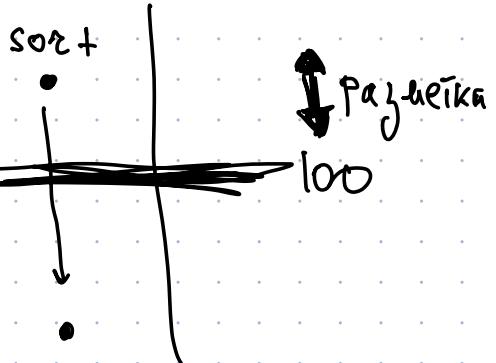
$$1 \quad X_1, \dots, X_{100k} \sim U[0, 1]$$

$$2 \quad X_1, X_2, X_3 \sim U[0, 1]$$

...

$$42 \quad X_1, \dots, X_{42} \sim U[0, 1]$$

...



Квадратичное np.-e:

$$1 \quad X_{\max}^{100}$$

$$2 \quad X_{\max}^3$$

$$F_{X_{\max}}(x) = x^n$$

$$Y \sim U[0, 1]$$

$$X = \sqrt[n]{Y} \sim F_{X_{\max}}(x)$$

N -руно документов $\sqrt[n]{Y} \rightarrow \frac{1}{n} \ln Y$

1) Генерим $Y \sim U[0, 1]$ N раз

$[0, 1]$

2) $\frac{1}{n} \ln Y$ и сортируем по нему бэзъ.

3) Срезаем 100 документов и отправляем на разметку.

„Бэзъ“ — структура, которая хорошо поддерживает
многодокументные запросы

Файл содержит 100 документов в кэшке

$$- \frac{1}{n} \ln Y$$

Что такое факт это сэмплирование?

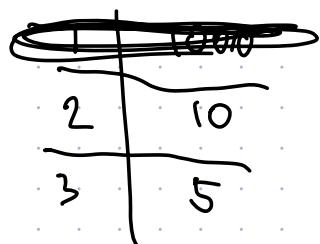
А пок. manager в выборку с

Бер. Show:
Show:

Так искать \hat{P} сэмплирование не говорит
Сэмплирование Σ из повторений.

$\hat{P} = \frac{m}{100}$ — смешённая (либо забытая
либо закинута)

како фиксированный



1 1 1 1 1 2

1

Продолжение следует....