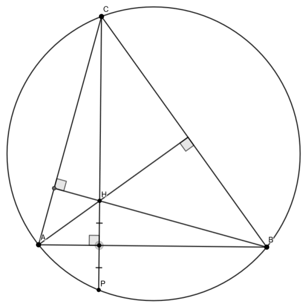
Ортоцентр

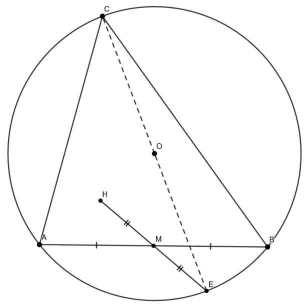
Определение 1. Ортоцентром называют точку пересечения высот треугольника. В данном разделе приведены различные свойства ортоцентра. На рисунках будем использовать следующие обозначения: O — центр описанной окружности треугольника ABC, H — ортоцентр.

Свойства.

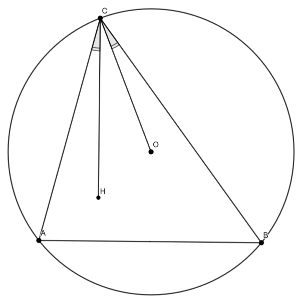
1) Точка, симметричная ортоцентру относительно его стороны, лежит на описанной треугольника окружности этого треугольника



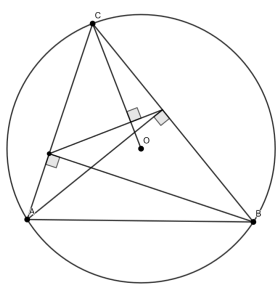
2) Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины его стороны, лежит на окружности, описанной около треугольника, и диаметрально противоположна вершине треугольника, противолежащей данной стороне.



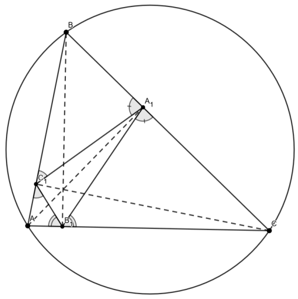
3) Угол между радиусом и стороной равен углу между высотой и стороной



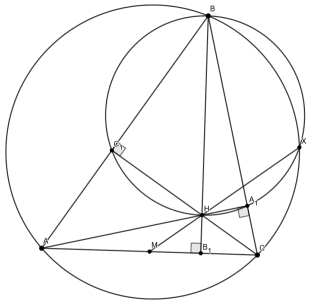
4) Отрезок, соединяющий вершину и ортоцентр треугольника, перпендикулярен отрезку, соединяющему основания высот, опущенных из двух других вершин треугольника.



5) Равенство углов при основании высот



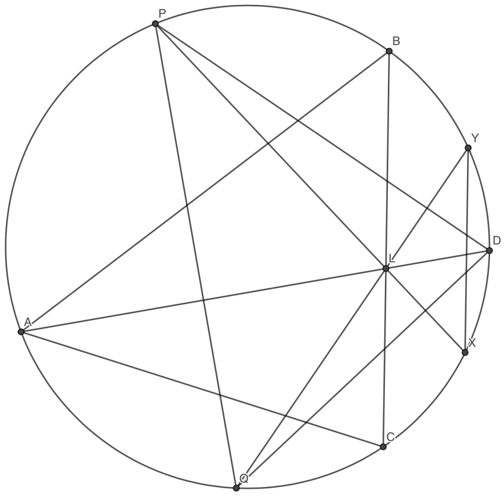
6) Точка пересечения описанной окружности треугольника BC_1H и описанной окружности треугольника ABC, ортоцентр и середина стороны лежат на одной прямой.



Прямая Эйлера. Ортоцентр, точка пересечения медиан треугольника и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой, точка пересечения медиан M делит отрезок между центром описанной окружности O и ортоцентром H в отношении $1 : 2$.

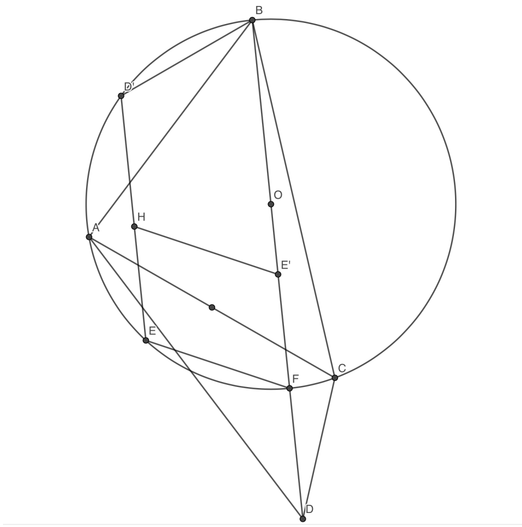
Доказательство. Воспользуемся вторым свойством ортоцентра, получим что OE — средняя линия в треугольнике QCH и она параллельна стороне CH. Значит, CH вдвое больше OE. Проведем OH и CE, точку их пересечения назовем X. Тогда заметим, что треугольник CXH подобен треугольнику OEX (вертикальные углы OXE и CXH, накрест лежащие HCX и OEX), а коэффициент подобия равен двум. Тогда X лежит на медиане треугольника ABC и делит ее в отношении $2 : 1$, значит X является точкой пересечения медиан, а точки H, M, O лежат на одной прямой. Также из подобия следует, что $HX = HM = 2OX = 2OM$.

Задача 1. AL — биссектриса треугольника ABC, серединный перпендикуляр к AL пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках P, Q. PL и QL пересекают ω в точках X и Y соответственно. Докажите, что XY параллельно BC.



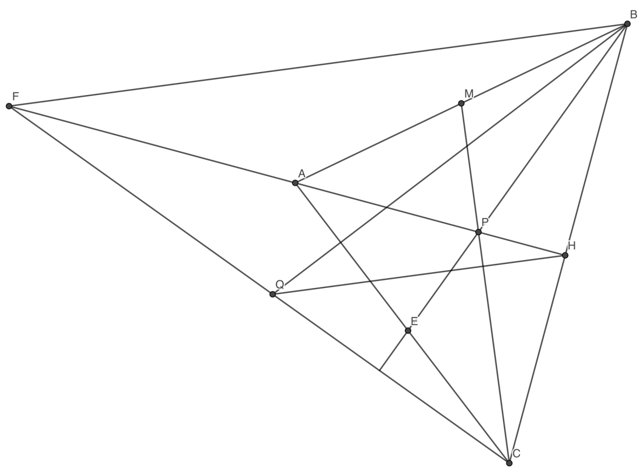
Решение. Пусть точка F диаметрально противоположна B. Пусть AL пересекает ω в точке D — середине дуги BC, тогда L — ортоцентр в треугольнике PQD, поскольку L лежит на высоте DA и при отражении относительно PQ переходит в точку A. L и X симметричны относительно QD, поэтому треугольник LQX равнобедренный, следовательно, $\overset{\frown}{YD} = \overset{\frown}{DX}$ и $\overset{\frown}{YC} = \overset{\frown}{BX}$, значит, $BC \parallel XY$ как хорды, стягивающие равные дуги.

Задача 2. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.



Решение. Сделаем симметрию относительно центра стороны AC. Точка F перейдет в H, прямая FB перейдет в параллельную прямую HE. E перейдет в точку E' на прямой BF, D перейдет в точку D', лежащую на прямой EH и на дуге CBA, так как $\angle CBA = \angle CD'A$. $BD'EF$ — равнобокая трапеция, $FE'HE$ — параллелограмм, поэтому $HE' = FE = BD'$, значит, $BD'HE'$ — равнобокая трапеция, тогда $BH = D'E' = DE$.

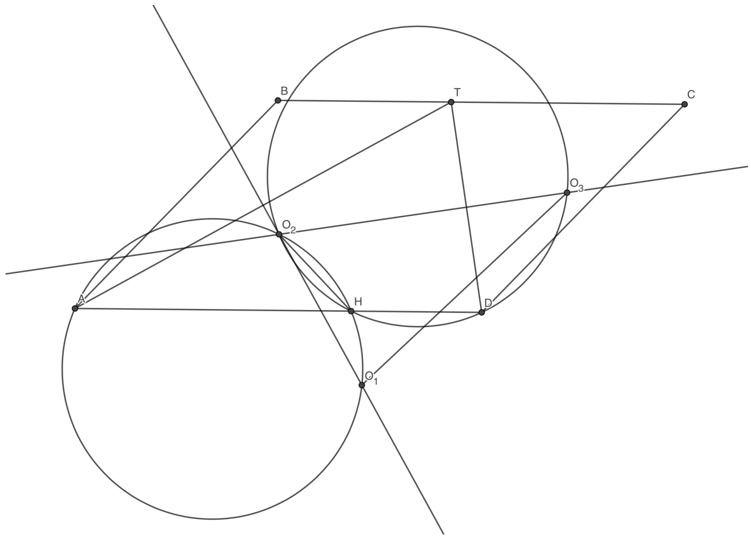
Задача 3. Дан треугольник ABC. Проведены высота AH и медиана CM. Обозначим их точку пересечения через P. Высота, проведенная из вершины B треугольника, пересекается с перпендикуляром, опущенным из точки H на прямую CM, в точке Q. Докажите, что прямые CQ и BP перпендикулярны.



Решение. B — основание перпендикуляра из вершины B, BP пересекает AC в точке E. По теореме Чевы $\frac{CE}{EA} * \frac{AM}{MB} * \frac{BH}{HC}$

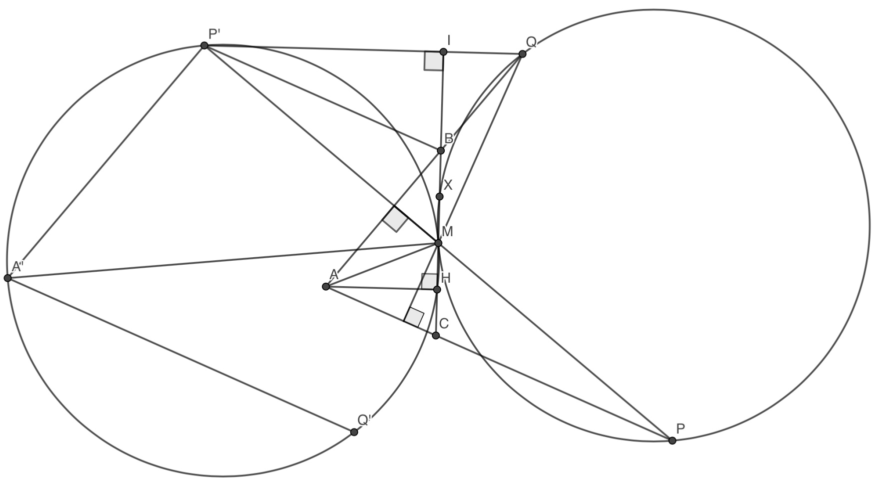
$= 1$. $\frac{CE}{EA} = \frac{CH}{HB}$, то есть $EH \parallel AB$ по теореме Фалеса. Пусть Q' — ортоцентр треугольника CEB, достаточно доказать, что $Q = Q'$, это будет следовать из того, что $Q'H \perp CM$. Сделаем гомотетию с центром в точке C, переводящую треугольник CEH в треугольник CAB, при этом Q' перейдет в точку F, лежащую на высоте AH, P — ортоцентр треугольника CFB, поэтому $CP \perp FB$, $Q'H \parallel FB$, тогда $Q'H \perp CM$.

Задача 4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90°$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.



Решение. Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \angle D = 180°$ - α. O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к AT, O_2 и O_3 лежат на серединном перпендикуляре к TD. $\angle TO_1A = 2$ * $(180°$ - $\angle B) = 2$ * $(180° - (180°$ - $\alpha)) = 2\alpha$, $\angle TO_1O_2 = \alpha$. $\angle TO_3O_2 = \frac{\angle TO_3O_2}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$, значит, четырехугольник $O_1O_2TO_3$ вписанный. Построим ортоцентр H треугольника $O_1O_2O_3$ как точку пересечения описанной окружности, отраженной относительно O_1O_2, и описанной окружности, отраженной относительно O_2O_3, то есть пересечение окружностей, описанных около AO_1O_2 и DO_2O_3. $\angle O_2HA = \angle AO_1O_2 = \alpha$. $\angle O_2HD = 180°$ - $\angle DO_3O_2 = 180°$ - α. Получается, что $\angle O_2HA + \angle O_2HD = 180°$, то есть H лежит на AD.

Задача 5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AH. На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Окружность, описанная около треугольника PMQ, пересекает прямую BC вторично в точке X. Докажите, что $BH = CX$.



Решение. Сделаем центральную симметрию относительно точки M. Q перейдет в Q', P перейдет в P'. Требуется доказать, что X перейдет в H, для этого достаточно доказать, что P', Q', M, H лежат на одной окружности. $PC \parallel P'B$, $PC \perp QM$, поэтому $P'B \perp QM$, также $QB \perp PM$, значит, B — ортоцентр треугольника $MP'Q$, тогда $BC \perp QP'$. Сделаем параллельный перенос на вектор $\overline{QP'} = \overline{PQ'}$, A перейдет в A', P — в Q', Q — в Q', тогда $AQ \parallel A'P'$, $AP \parallel A'Q'$ и $PM \perp A'P'$, $QM \perp A'Q'$, значит, четырехугольник $A'P'MQ'$ вписан в окружность ω, в которой $A'M$ — диаметр. $\overline{AA'} = \overline{QP'} \perp \overline{BC}$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$, поэтому A', A, H лежат на одной прямой, описанная окружность треугольника $A'HM$ — это ω. Таким образом, M, H, P', Q' лежат на одной окружности.

Гомотетия

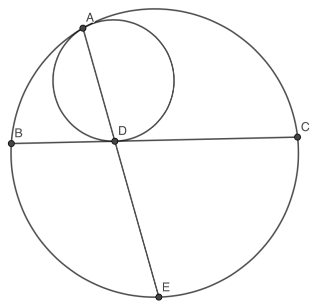
Определение 1. Гомотетия с коэффициентом k и центром в точке — преобразование плоскости, при котором каждая точка X переходит в точку X', такую, что вектор $OX' = k * OX$.

Свойства.
1) Гомотетия переводит прямую в параллельную прямую, отрезок в отрезок, окружность в окружность.

2) Гомотетия сохраняет углы.

3) Композицией двух гомотетий с центрами O_1 и O_2 и коэффициентами k_1 и k_2 будет параллельный перенос при $k_1 * k_2 = 1$ или гомотетия с центром на прямой O_1O_2 и коэффициентом $k = k_1 * k_2$.

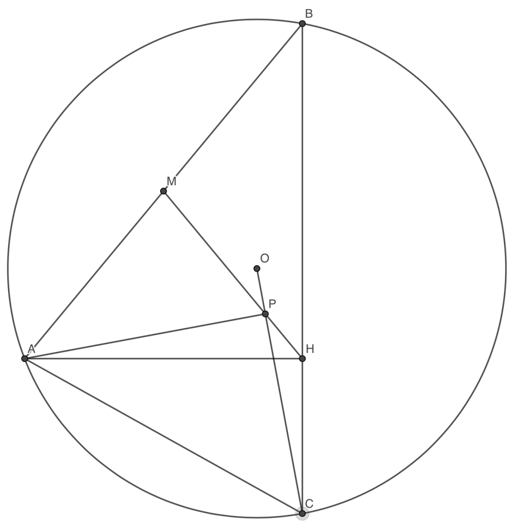
Задача 0. *(Лемма Архимеда)* Дана окружность Ω, BC — хорда в ней. Окружность ω касается BC в точке D и Ω в точке A. AD пересекает Ω в точке E. Докажите, что E — середина дуги BC.



Решение. Сделаем гомотетию из точки , переводящую ω в γ. BC перейдет в касательную к γ, параллельную BC, D перейдет в E. Дуга BE равна дуге EC, так как параллельные прямые высекают равные дуги.

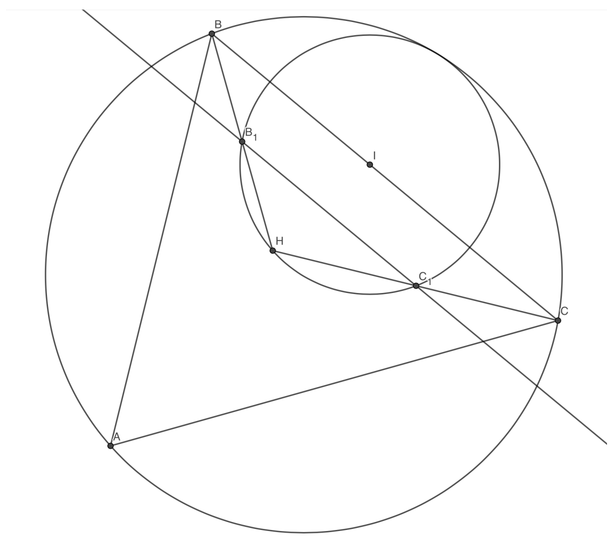
Теперь докажем лемму Архимеда с помощью гомотетии. Пусть окружность вписана в сегмент окружности, стягиваемый хордой B, и касается дуги в точке A_1, а хорды — в точке A_2, требуется доказать, что A_1A_2 делит угол BA_1C пополам. Рассмотрим гомотетию с центром в точке A_1 с коэффициентом $\frac{R}{r}$, где R — радиус большой окружности, r — малой. Тогда меньшая окружность перейдет в большую, а BC перейдет в касательную в точке A. По свойствам гомотетии образ BC будет параллелен BC, из чего следует что хорда $AB = AC$. Заметим, что угол CA_1A_2 равен углу BA_1A_2, что и требовалось доказать.

Задача 1. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB. *(ММО 2018, 10 класс, задача 3)*



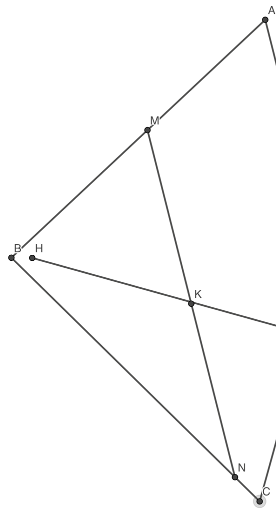
Решение. M — точка пересечения HP и AB. $\angle APC = \angle AHC = 90^\circ$, значит, около четырехугольника $ACHP$ можно описать окружность ω. $\angle CAH = \angle OAM$ по свойству высоты, а также $\angle CAH = \angle CPH = \angle OPM$, как опирающиеся на одну дугу окружности ω, из этого следует, что четырехугольник $AMPO$ вписан в окружность, заметим, что ее центр O' — середина AO, так как угол APO прямой. Сделаем гомотетию с коэффициентом 2 из точки A, O' перейдет в O, то есть ω перейдет в окружность, описанную около ABC, M перейдет в A, значит, $AM = MB$.

Задача 2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружности Ω, описанная окола треугольника ABC, касается окружности ω. *(Региональный этап 2019, 9 класс, задача 4)*



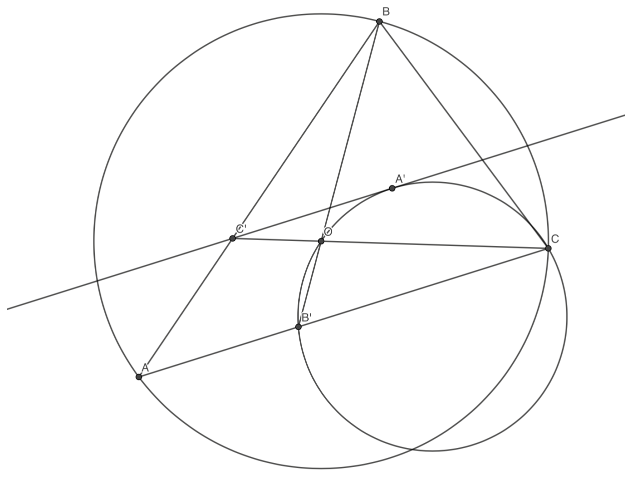
Решение. Отразим относительно BC, ω перейдёт в себя, а окружность, описанная около ABC, перейдет в окружность, описанную около BHC, назовем ее γ'. Покажем, что ω и γ' касаются, откуда будет следовать касание ω и γ. Треугольники BHC и B_1HC_1 гомотетичны с коэффициентом $\frac{B_1H}{BH}$, значит, окружности ω и γ' гомотетичны из точки H, центры ω, γ' и H лежат на одной прямой, отсюда, ω и γ' касаются в точке H.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.



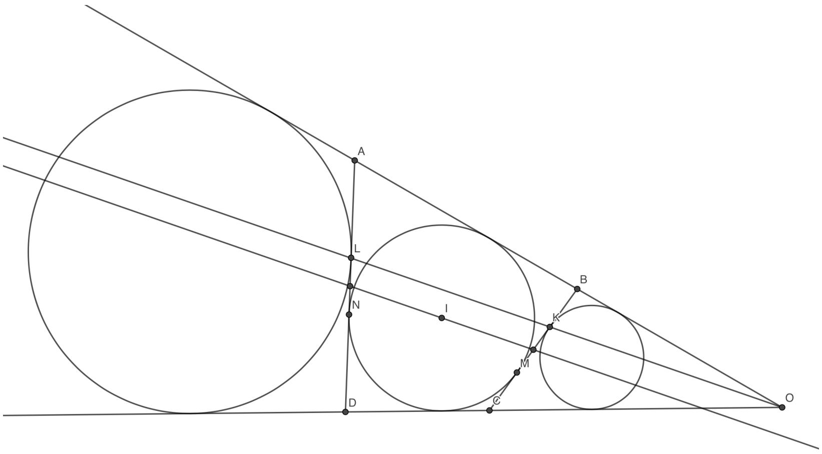
Решение. (Лемма) Выпуклый четырехугольник $XYZT$ является вписанным тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из середин его сторон на противоположные стороны четырехугольника, имеют общую точку.
Пусть P, Q, R и S — середины сторон XY, YZ, ZT и TX соответственно. $PQRS$ — параллелограмм, его диагонали делятся пополам точкой пересечения K. При центральной симметрии из точки K перпендикуляры из середин на противоположные стороны перейдут в серединные перпендикуляры к сторонам. Значит, перпендикуляры из середин имеют общую точку тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры к сторонам пересекаются в одной точке, то есть $XYZT$ вписан.
$MK = AD$, $MK \parallel AD$, значит, $MKDA$ — параллелограмм, $\angle MAD = \angle MKD = \angle DCN$, отсюда, $DKNC$ вписан. Сделаем гомотетию с коэффициентом 2 из точки N. K перейдет в M, D перейдет в A_1, C перейдет в C_1. NMA_1C_1 вписан. A_1 лежит на прямой AM, так как $KD \parallel AM$, $MA_1 = 2 * KD = 2 * MA$, A — середина MA_1. C — середина CNC_1. AH и CH — перпендикуляры из середин на противоположные стороны во вписанном четырехугольнике, значит, $KH \perp A_1C_1$. $DC \parallel A_1C_1$, поэтому $KH \perp DC$.

Задача 4. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая l касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.



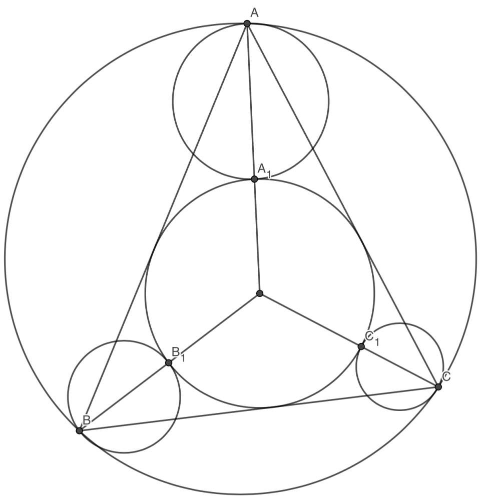
Решение. Сделаем гомотетию из точки O с коэффициентом -$\frac{OB}{OB'}$. Точка B перейдет в B', C — в C', A — в A'. $AC' \parallel A'C'$, то есть $A'C'$ — это l. Покажем, что A' — точка касания l и описанной окружности треугольника $B'OC$. $\angle BAO = \angle CAO = \angle B'A'O = \angle C'A'O$ из симметрии и гомотетии. Также $\angle OA'B' = \angle OB'A'$, $\angle OCA = \angle OAC'$, потому что $OA' = OB'$, $OA = OC$. Получается, что четырехугольник $OB'CA'$ вписан из равенства углов $\angle OCB' = \angle OA'B'$, и A' — точка касания окружности с прямой $A'C'$, так как $\angle OB'A' = \angle OA'C'$.

Задача 5. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD; окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K и L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.



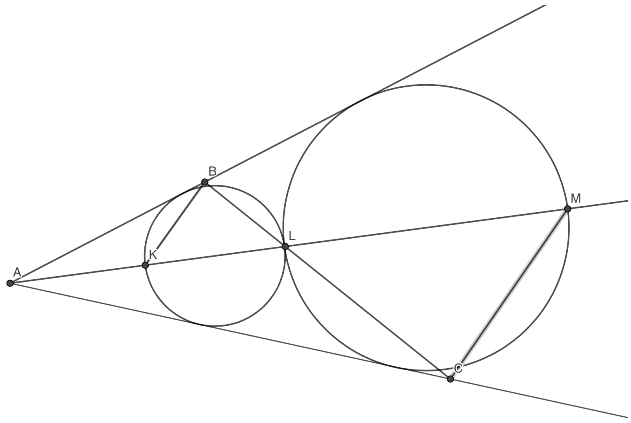
Решение. Обозначим за M и N точки касания сторон BC и AD с ω. Сделаем гомотетию из точки O, переводящую ω_1 в ω. B', K' — образы точек B, K. K' лежит на прямой OK. BK перейдет в $B'K'$ — параллельную прямую, касающуюся ω в точке K'. Аналогичной гомотетией, переводящей, ω_2 в ω, получим точки L', A' такие, что L' лежит на прямой OK, $AL \parallel A'L'$, $A'L'$ касается ω в точке L'. Сделаем поворот на 180° из центра ω, при этом окружность ω останется на месте, касательные перейдут в параллельные касательные, а значит, N перейдет в L', M перейдет в K', поэтому $MN \parallel L'K'$, и средняя линия в трапеции $KMNL$ содержит центр ω. Но средняя линия проходит через середины сторон BC и AD, так как $BK = MC$, $AL = ND$.

Задача 6. Дан треугольник ABC. Рассмотрим три окружности, первая из которых касается описанной окружности Ω в вершине A, а вписанной окружности ω внешним образом в какой-то точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.



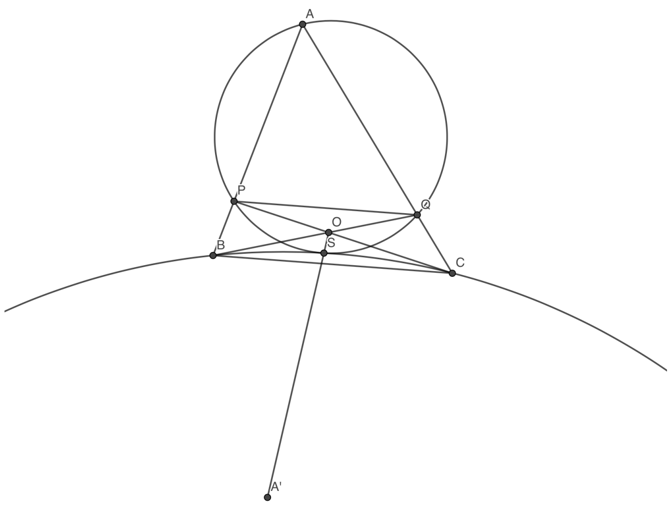
Решение. Обозначим первую окружность через α. Описанную окружность можно получить из вписанной композицией двух гомотетий: из точки A_1, переводящей ω в α, и из A, переводящей α в Ω. Композицией будет гомотетия с отрицательным коэффициентом, получается, что AA_1 проходит через центр отрицательной гомотетии, переводящей ω в Ω. Аналогично через эту точку проходят прямые $BB1$ и CC_1.

Задача 7. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.



Решение. Центры окружностей лежат на биссектрисе $\angle CAB$, значит, и L лежит на ней. ω можно перевести в Ω гомотетией с центром в точке L и коэффициентом $-k$, при этом прямая CB перейдет в себя, а прямая KB перейдет в CM, то есть B перейдет в C. Точка A перейдет в точку A', такую что $\angle CA'L = \angle BAL = \angle CAL$, что означает равнобедренность $\Delta A'CA$. Также ω можно перевести в Ω гомотетией с центром в точке A и коэффициентом k, $AL = k * AK = A'M$, так как при первой гомотетии KA перейдет в MA'. Треугольник LCM равнобедренный в силу симметрии.

Задача 8. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC касается ω.



Решение. $A'O$ пересекает BC в точке D. AO содержит медиану в треугольнике BAC. Отразим точку A относительно середины отрезка BC, она перейдет в точку Y. $YA' \parallel BC$, так как BC содержит среднюю линию треугольника YAA', $YB = AC = CA'$, значит, $YBCA'$ — равнобокая трапеция. Сделаем гомотетию из точки O, переводящую BC в QP, Y перейдет в A, так как $BY \parallel CA$, $CY \parallel AB$. A' перейдет в точку X, такую что $PXAQ$ — равнобокая трапеция. T — радикальный центр окружностей, описанных около ΔABC, ΔAPQ, ΔBSC. ΔABC и ΔAPQ гомотетичны с центром в точке A, поэтому их описанные окружности касаются в точке A. AT — касательная к окружности, описанной около ΔPAQ, поэтому $\angle TAS = \angle AXS$. $\angle AXS = \angle XDB$ из параллельности. $\angle XDB = \angle CDA' = \angle CDA$ из симметрии. $\angle SAT = \angle SDB$, поэтому четырехугольник $SATD$ вписанный, тогда $\angle ADT = \angle AST = \angle SAT$, что означает $AT = ST$. Получается, что ST — общая касательная к окружностям, описанным около ΔAPQ и ΔBSC, следовательно, сами окружности касаются.

Радикальная ось и степень точки

Определение 1. Степенью точки относительно окружности ω с центром O радиуса R называется число $OM^2 - R^2$. Обозначается $deg_\omega\ M$. Если провести через M прямую, пересекающую ω в точках A и B, то $deg_\omega\ M = MA * MB$

Определение 2. Радикальной осью двух окружностей называется множество всех точек плоскости, каждая из которых имеет равные степени относительно этих окружностей.

Свойства.
1) Для двух неконцентрических окружностей радикальная ось — прямая, перпендикулярная линии, соединяющей центры окружностей.

2) Если две окружности пересекаются в двух различных точках, то радикальная осью этих окружностей является прямая проходящая через точки их пересечения.

3) Если две окружности касаются внешним или внутренним образом, то их радикальная ось совпадает с общей касательной в точке касания окружностей.

4) Если две окружности лежат одна вне другой, не касаясь, то радикальная ось содержит середины общих касательных этих окружностей.

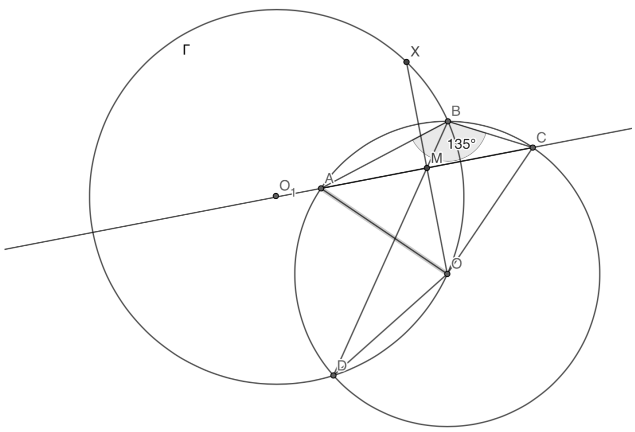
5) Если центры трех окружностей неколлинеарные, то три радикальные оси этих окружностей, взятых попарно, имеют общую точку, называемую радикальным центром трех окружностей.

6) Геометрическое место центров окружностей, ортогональных двум данным, есть их радикальная ось с исключённой общей хордой.

Лемма Варьера. Пусть окружность ω_a касается сторон AB, AC и дуги BC описанной окружности ω треугольника ABC. Тогда точки касания окружности ω_a со сторонами и центр вписанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

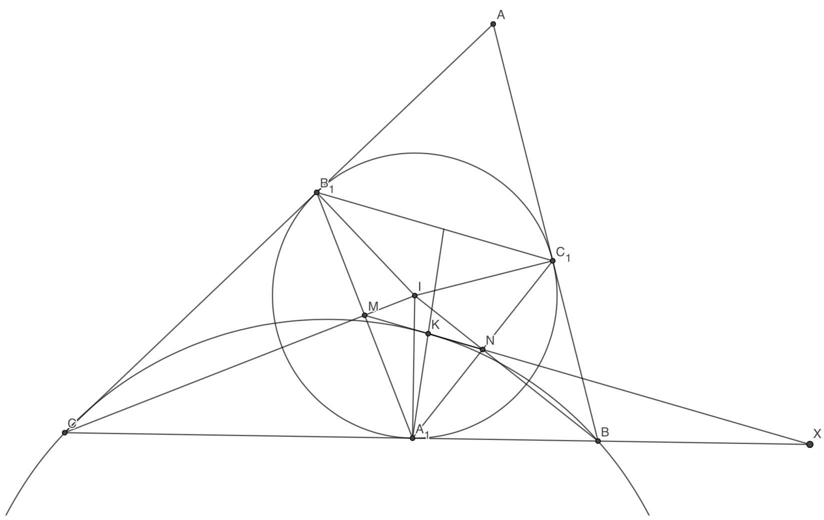
Доказательство. Пусть K и L — точки касания ω_a с AB и AC, T — точка касания ω и ω_a. C', B' — середины дуг AB и AC, I — инцентр, точка пересечения CC' и BB'. По лемме Архимеда, TK пройдет через C', TL — через B', причем $C'A^2 = C'K * C'T$, $B'A^2 = B'L * B'T$, то есть $B'C'$ — радикальная ось ω_a и точки A (вырожденной окружности). $\angle AB'C' = \angle C'B'B$, $\angle CC'B' = \angle B'C'A$ как углы, опирающиеся на равные дуги, отсюда следует, что $C'AB'I$ — дельтоид (четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон). При гомотетии с коэффициентом 2 с центром в точке A прямая $C'B'$ перейдет в KL, точка пересечения диагоналей дельтоида перейдет в I, значит, I лежит на KL.

Задача 1. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135°$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D Докажите, что центр окружности γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. *(Регион 2017, 11 класс, задача 3)*



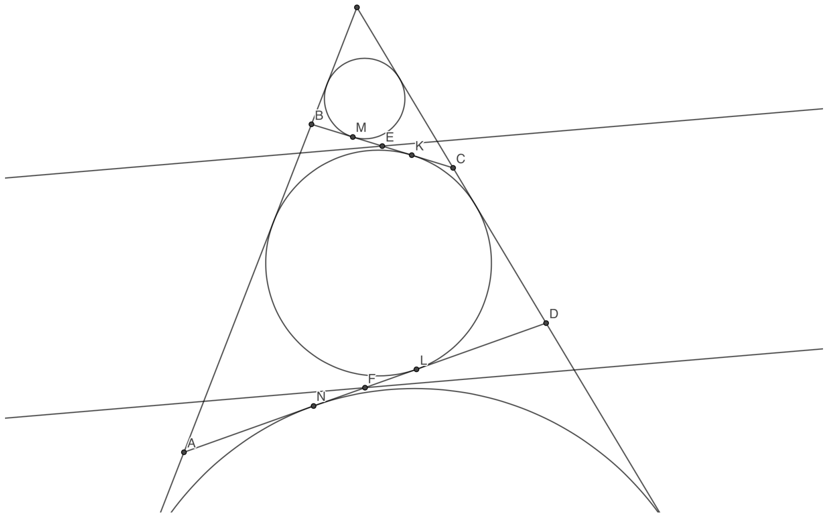
Решение. $\angle AOC$ = 2 * (180° - $\angle ABC$) = 90°, поэтому $OM = AM = MC$. $OM \perp AC$, потому что медиана — высота в равнобедренном ΔAOC. Точка X симметрична O относительно AC. AM * MC = BM * MD = MO * MX, значит, четырехугольник $DOBX$ вписан в окружность с центром, лежащем на серединном перпендикуляре к OX, то есть центр описанной окружности ΔBOD лежит на AC.

Задача 2. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Доказать, что описанная окружность треугольника BCK касается m *(Регион 2021, 10 класс, задача 4)*



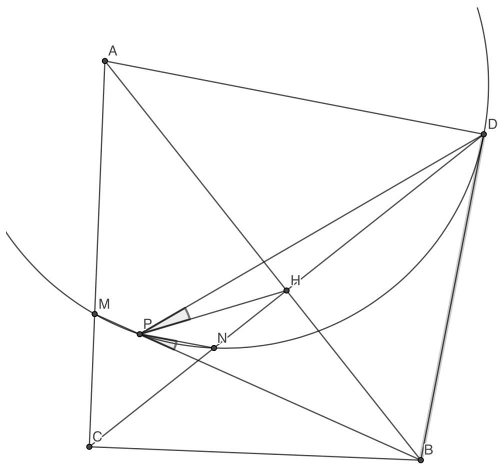
Решение. M, N — середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. I — центр вписанной окружности ΔABC. BI, CI — биссектрисы в ΔABC, а также BI, CI — серединные перпендикуляры к A_1C_1, A_1B_1 соответственно, потому что $BA_1 = BC_1$, $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных. $\angle IA_1B = \angle IC_1B = 90°$ по свойству касательной, значит, IC_1BA_1 вписан, значит, $\angle IA_1C_1 = \angle IBC_1 = \angle IBA_1$. $\angle IMA_1 + \angle INA_1 = 90° + 90° = 180°$, IMA_1N вписан, $\angle IA_1N = \angle IMN$. Получается, что $\angle IMN = \angle CBI$, то есть четырехугольник $CMNB$ вписан. Проведем MN и CB до пересечения в точке X. XA_1 — касательная к окружности, описанной около $MINA_1$, потому что центр этой окружности — середина A_1I, а $\angle IA_1X = 90°$. Докажем, что $XK = XA_1$. $\angle NA_1B = \angle NIA_1$, так как A_1N — высота в прямоугольном треугольнике IBA_1. $\angle NIA_1 = \angle NMA_1$ из вписанности $MINA_1$. $\angle A_1KX = \angle A_1MX + \angle MA_1K = \angle NA_1X + \angle KA_1N = \angle KA_1X$. Действительно, $XK = XA_1$. Записав степень точки X относительно окружностей, описанных около $CMNB$ и $MINA_1$, имеем $XA1^2 = XN * XM = XB * XC = XK^2$, отсюда, XK — касательная к окружности, описанной около ΔBCK.

Задача 3. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. *(Регион 2020, 9 класс, задача 5)*



Решение. E и F — середины BC и AD соответственно. ω касаетеся BC и AD в точках K и L соответственно. Построим две окружности, отличные от ω. Окружность ω_1 касается AB, CD и BC в точке M, окружность ω_2 касается AB, CD и AD в точке N. Центры трех окружностей лежат на одной прямой l, так как все окружности касаются AB и CD. $AL = ND$, $BM = KC$, поэтому F и E — середины LN и MK. LN и MK — общие касательные, значит, через E проходит радикальная ось ω и ω_1, через F — радикальная ось ω и ω_2. При этом радикальные оси должны быть перпендикулярны l, то есть сами они параллельны. FE больше или равно расстоянию между радикальными осями, а диаметр ω не первосходит этого расстояния, следовательно, диаметр ω меньше или равен EF.

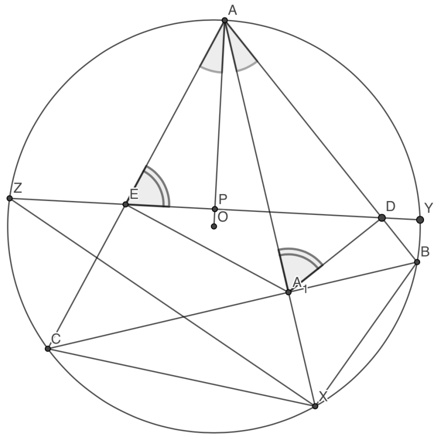
Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH и отмечена точка D, симметричная C относительно H. Пусть M — произвольная точка отрезка AC, а P — основание перпендикуляра из точки C на прямую BM. Точка H — середина отрезка CD. На отрезке CH (внутри угла HPB) нашлась такая точка N, что $\angle DPH = \angle NPB$. Докажите, что точки M, P, N, D лежат на одной окружности.



Решение. $\angle DPH = \angle NPB$, отсюда, $\angle NPD = \angle BPH$. Четырехугольник $CPHB$ вписанный, так как $\angle CPB = \angle CHB = 90°$, поэтому $\angle HPB = \angle HCB = \angle NDC$ из симметрии. $\angle NDB = \angle NPD$, значит, BD — касательная к окружности, описанной около треугольника NPD. CP — высота в прямоугольном треугольнике CMB, отсюда, $BP * BM = BC^2 = BD^2$, получается, что BD — касательная к описанной окружности треугольника MPD. Из того, что BD — касательная к окружностям, описанным около треугольников MPD и PND, можно сделать вывод, что их центры находятся на прямой AD, $AD \perp BD$. Также центры окружностей лежат на серпере к PD, поэтому окружности совпадают, то есть M, P, N, D лежат на одной окружности.

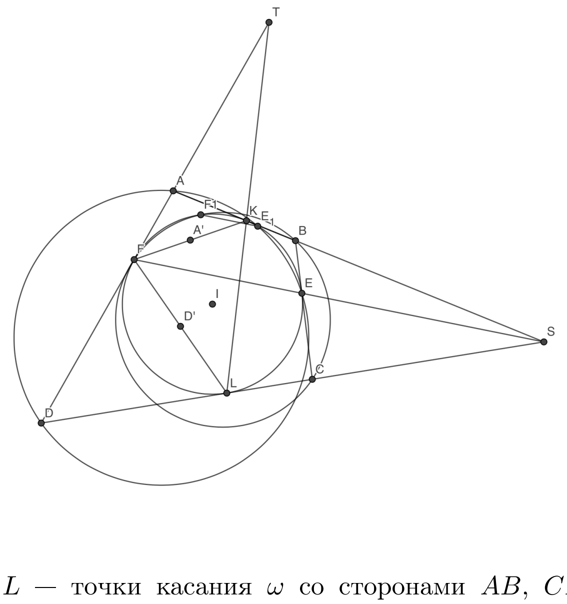
Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC продолжение высоты AA_1 за точку A_1 пересекает описанную окружность

ω в точке X. Точки D и E - основания перпендикуляров из A_1 на стороны AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что A_1 - центр вписанной окружности треугольника XYZ.



Решение. O — центр описанной окружности, ED пересекает AO в точке P. ADA_1E - вписанный четырехугольник, так как $\angle AEA_1 + \angle A_1DA = 180°$, отсюда, $\angle AED = \angle AA_1D$. $\angle OAE = \angle DAA_1$. Из суммы углов треугольника получаем, что $\angle APE = \angle ADA_1 = 90°$. $AO \perp ZY$ и AO — диаметр, поэтому A — середина дуги ZY, значит, XA — биссектриса $\angle ZXY$, а также $AE * AC = AZ^2$. С другой стороны, A_1E — высота в прямоугольном треугольнике AA_1C, поэтому $AE * AC = AA_1^2$, следовательно, $AZ = AA_1 = AY$, то есть A_1 — центр вписанной окружности треугольника XYZ по лемме о трезубце.

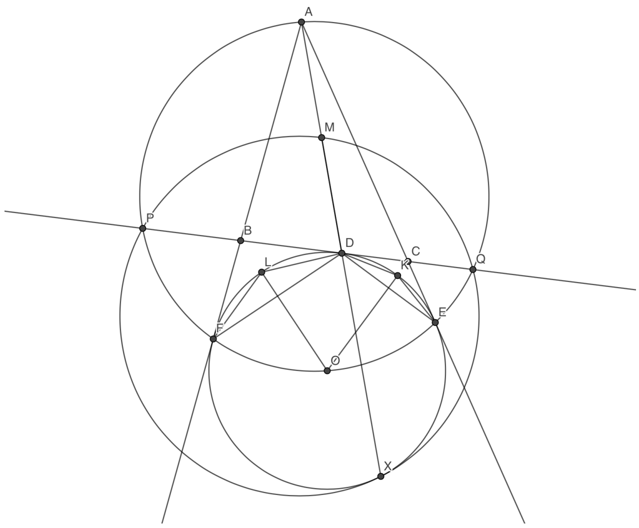
Задача 6. В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.



Первое решение. I — центр ω. K, L — точки касания ω со сторонами AB, CD соответственно. EF пересекается с касательными к ω в точках K и L в точке S, значит, четырехугольник $KELF$ гармонический, поэтому BE, AD и KL пересекаются в точке T. A', D' — середины KF, FL соответственно. Покажем, что A' лежит на радикальной оси описанной окружности ΔAID и ω. Действительно, $-AA' * A'I = -KA' * A'F$ из формулы высоты в прямоугольном треугольнике. Аналогично D' лежит на радоси описанной окружности ΔAID и ω, поэтому $A'D'$ совпадает с радосью. Радикальный центр X описанной окружности ΔAID, ΔAED и ω — точка пересечения $A'D'$ и AD, то есть середина FT, назовем эту точку X. EX пересекает ω в точке E_1. Пусть Y — середина ET. Аналогично F_1 — точка пересечения FY и ω. В силу симметрии относительно серпера к EF получаем, что $EF \parallel E_1M_1$.

Второе решение. Покажем другим способом, что EE_1 проходит через X — середину FT. A и A', D и D' инверсны относительно ω. Точки A, E, E_1, D лежат на одной окружности, значит, Точки A', E, E_1, D' лежат на одной окружности Ω'. ω гомотетична окружности, описанной около $\Delta A'FD'$, с коэффициентом 2, поэтому AD — их общая касательная. Радикальным центром ω, Ω' и окружности, описанной около $\Delta A'FD'$, является точка пересечения $A'D'$ и AD, точка X. EE_1 проходит через X.

Задача 7. Вневписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D, луча AC в точке E, луча AB в точке F. Окружность AEF пересекает прямую BC в точках P и Q. Точка M — середина AD. Докажите, что окружность PQM касается ω.



Решение. O — центр вневписанной окружности. O лежит на окружности ω, описанной около ΔAEF, так как $\angle OEA = \angle OFA = 90°$. Серпер к ED пересечет ω в точках O и K, серпер к DF пересечет ω в точках O и L. KO — биссектриса $\angle EKD$, поэтому KD пройдет через F, аналогично LD пройдет через E. $\angle AEL = \angle KOE$, поэтому дуги KE и AL равны, $KA \,||\, LE$. Так же можно получить, что ND || AM, отсюда следует, что $NAMD$ — параллелограмм, а M — середина KL. D — ортоцентр в ΔKOL, значит, $OD \perp KL$, и $OD \perp PQ$ по свойству касательной, поэтому $KL \,||\, PQ$, $KLQP$ — равнобокая трапеция, тогда KL — касательная к окружности Ω, описанной около ΔPMQ, в силу симметрии. Пусть MD пересекает описанную окружность ΔPMQ в точке X, вневписанную γ — в точке Y. Четырехугольник $EDFY$ — гармонический, поскольку YD пересекается в точке A с касательными к окружности γ в точках E и F, значит, EF, BC и касательная к γ в точке Y пересекутся в одной точке S — радикальном центре окружностей ω, γ и Ω. Проведем касательную к Ω в точке X, она пересечет PQ в точке S'. $\angle MXS' = \angle MPX$ по свойству касательной. $\angle MPQ = \angle MQP = \angle PXM$, поэтому $\angle S'DX = \angle QPX + \angle MXP = \angle MXS'$, следовательно, $S'X = S'D$, $deg_\omega S' = deg_\Omega S' = S'X^2 = S'D^2 = deg_\gamma S'$, поэтому S' = S. $SY = SD = SX$, причем X, Y, D лежат на одной прямой, отсюда можно сделать вывод, что $X = Y$ и XS — общая касательная к окружностям γ и Ω, значит, эти окружности касаются.

Симедиана

Определение 1. В треугольнике ABC проведены медиана AM и биссектриса AL, при отражении прямой AM относительно AL получится симедиана.

Определение через ГМТ. В треугольнике ABC, AX — симедиана тогда и только тогда, когда $\frac{S\Delta AXB}{S\Delta AXC} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Основная теорема о симедиане. Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведённые в точках B и C, пересекаются в точке P. Тогда AP — симедиана треугольника ABC.

Определение 2. Гармоническим называют вписанный четырехугольник, у которого произведения противоположных сторон равны.

Свойства гармонического четырехугольника.
1) Биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на отрезке BC.

2) AD — симедиана в треугольнике ABC.

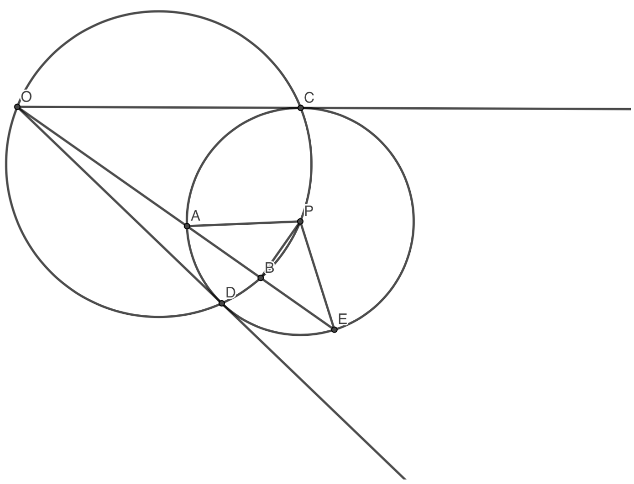
3) Треугольник BDC подобен треугольнику BKA, где K — середина отрезка AD.

Лемма. Если в неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла B также является биссектриса угла, образованного медианой и высотой из вершины B, то угол B прямой.

Доказательство. Условие означает, что высота BH в треугольнике ABC — симедиана. Пусть касательные, проведенные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке X, тогда BX — симедиана. XM — серпер к стороне AC, где M — середина AC. $XM \perp AC$, $BX \perp AC$, следовательно, $XM \parallel BX$, то есть BX совпадает с серпером к AC, значит, треугольник ABC равнобедренный, что противоречит условию. Получается, что касательные параллельны, поэтому AC — диаметр, а угол B прямой.

Задача 0. Биссектриса треугольника является биссектрисой медианы и высоты в нем тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный.

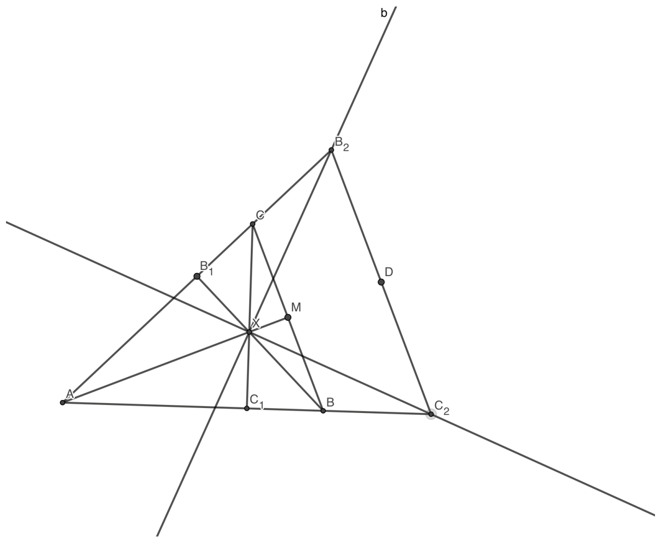
Задача 1. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A. Найдите длину отрезка AB, если произведение длин отрезков BD и BC равно 5. *(ОММО 2016, 11 класс, задача 7)*



Решение. Продлим хорду OB до пересечения с ω в точке E. Углы OCP и ODP равны $90°$, так как опираются на диаметр, а значит, O — точка пересечения касательных, проведеныых к ω в точках C и D, поэтому AO — симедиана в треугольнике ECD. PB — высота в треугольнике AEP, а также медиана в силу того, что треугольник AEP равнобедренный.

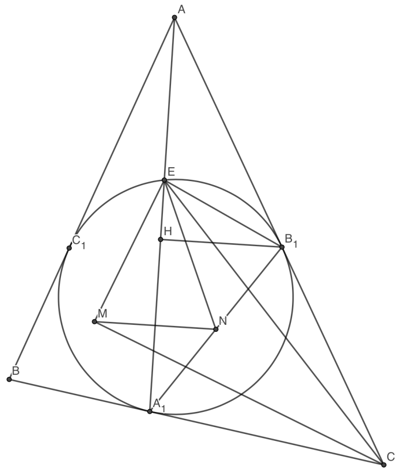
Треугольники ABC и DBA подобны по свойству симедианы, отсюда, $AB = \sqrt{CB * BD}$.
Ответ: $\sqrt{5}$

Задача 2. В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая с симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$. *(ММО 2017, 9 класс, задача 6)*



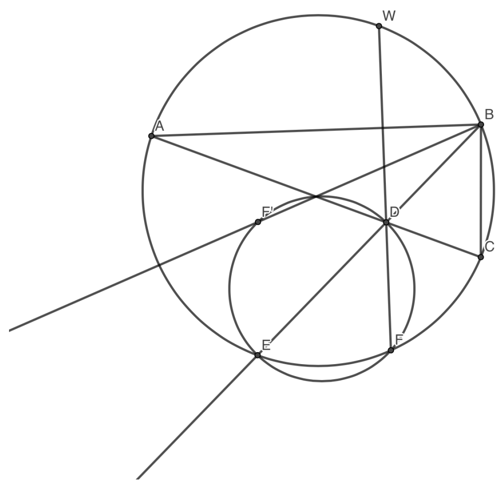
Решение. B_1 и C_1 — середины AB_2 и AC_2. B_2X и C_2X — это b и c. BB_1 — серединный перпендикуляр к AB_2, CC_1 — серединный перпендикуляр к AC_2, значит, ортоцентр O в треугольнике ABC будет центром описанной окружности в треугольнике AB_2C_2, а также треугольники ACC_2 и ABB_2 равнобедренные, отсюда, $\angle B_2CC_2 = \angle C_2BB_2 = 90°$. $\angle B_2OC_2 = 2\angle B_2AC_2 = 90°$. B_2X и C_2X пересекают AM в точках K и L. Треугольники AB_2K и AC_2L равнобедренные в силу симметрии. $\angle XKL = \angle B_2AK + \angle KB_2A = 2\angle B_2AK$, $\angle KLX = 2\angle LAC_2$, следовательно, $\angle B_2XC_2 = \angle XKL + \angle KLX = 2(\angle B_2AK + \angle C_2AL) = 2\angle B_2AC_2 = 90°$. Получается, что точки B_2, C, X, O, B, C_2 лежат на окружности ω с центром E — середина B2C2. O' — центр описанной окружности треугольника ABC. $AO = 2O'M = BC$. AM пересекает B_2C_2 в точке D, AD — симедиана в треугольнике B_2AC_2, потому что BC антипараллельно B_2C_2 относительно угла B_2AC_2. F — точка пересечения касательных к окружности, описанной около AB_2C_2, в точках B_2 и C_2, то есть перпендикуляры к OB_2 и OC_2, проходящие через B_2 и C_2. B_2OC_2F — прямоугольник, значит, F лежит на ω, и E — середина OF. AF пересекает ω в точке P. $\angle PFX = \angle PB_2X$, как углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle PB_2X = \angle FAX$.

Задача 3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает эту окружность в точке E. Точка N — середина отрезка A_1B_1. Точка M симметрична точке N относительно прямой AA_1. Докажите, что ∠EMC= $90°$. *(Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2009/10 года, 7 задача)*



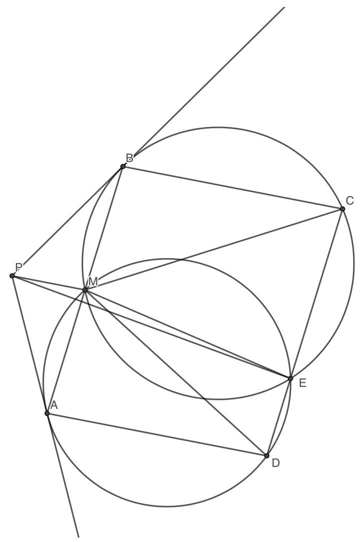
Решение. Опустим высоту B_1H в треугольнике EB_1A_1. NM содержит среднюю линию, так как $B_1H \parallel NM$, N — середина B_1A_1, отсюда, точка H симметрична A_1 относительно NM. $\angle EB_1A = \angle B_1A_1E$ по свойству касательной, $\angle B_1A_1E = \angle HA_1M = \angle A_1HM$ из симметрии. $\angle CB_1E = 180°$ - $\angle EB_1A = 180°$ - $\angle A_1HM = \angle EHM$. $\angle B_1EC = \angle NEA_1$ по основному свойству симедианы в треугольнике A_1B_1E. $\angle NEA_1 = \angle MEH$ в силу симметрии. Получается, что $\Delta MEH \quad \Delta CEB_1$ по двум углам, один можно перевести в другой с помощью поворотной гомотетии из точки E, значит, поворотной гомотетией можно перевести ΔECM в ΔEB_1H. При подобии углы сохраняются, $\angle EMC = \angle EHB_1 = 90°$.

Задача 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.



Решение. Треубется доказать, что BF — симедиана в ΔABC. Проведем DF до пересечения с Ω в точке W. $\angle DFE$ опирается на диаметр в ω, поэтому равен $90°$, а значит, WE — диаметр. E — середина дуги AC, так как BE - биссектриса $\angle ABC$, тогда W — середина дуги ABC. Отсюда, FW — биссектриса $\angle CFA$. Во вписанном четырехуголнике ABC биссектрисы противоположных углов, BD и FD, пересекаются на диагонали, поэтому $ABCD$ — гармонический, то есть BF — симедиана в ΔABC.

Задача 5. Точка M — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. Касательные в точках A и B к описанным окружностям треугольников ADM и BCM соответственно пересекаются в точке P. Докажите, что $MP \parallel AD$.



Решение. Возьмем на стороне DC такую точку E, что $ADEM$ — равнобокая трапеция. $EM = AD = BC$ по свойству параллелограмма, таким образом, $BCEM$ — тоже равнобедренная трапеция, а это значит, что окружности, описанные около треугольников ADM и BCM пересекаются в точке E. $\angle AEM = \angle MAP$, $\angle MEB = \angle MBP$ по свойству касательной. $\angle APB + \angle AEB = 180°$ - $\angle PAM$ - $\angle PBM + \angle AEB = 180° + (\angle AEM$ - $\angle PAM) + (\angle BEM$ - $\angle PBM) = 180°$, $AEBP$ вписан, следовательно, $\angle AEP = \angle PBA = \angle PEA$, то есть EP — симедиана в ΔAEB, а четырехугольник $AEBP$ гармонический, тогда $\angle PMA = \angle EMA = \angle DAM$, свойство гармонического четырехугольника и равнобокой трапеции. Из равенства углов $\angle PMA = \angle DAM$ можно сделать вывод, что $PM \parallel AD$.

Антипараллельность

Определение 1. Пусть точки B_1, C_1 лежат на прямых AB, AC. BC антипараллельно $B'C'$ относительно прямых AB, AC, если $\angle AB_1C_1 = \angle ACB$.

Свойства.
1) Пусть B_1, C_1, B, C — четыре различные точки. BC антипараллельно B_1C_1 тгда и только тогда, когда B_1, C_1, B, C лежат на одной окружности.

2) BC антипараллельно B_1C_1, тогда треугольник ABC можно перевести в треугольник AC_1B_1 симметрией относительно биссектрисы угла A и гомотетией из точки A.

Следствия.
2.1) Если BC антипараллельно B_1C_1, B_1C_1 антипараллельно B_2C_2, то $BC \parallel B_2C_2$.

2.2) Если BC антипараллельно B_1C_1, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, то BC антипараллельно B_2C_2.

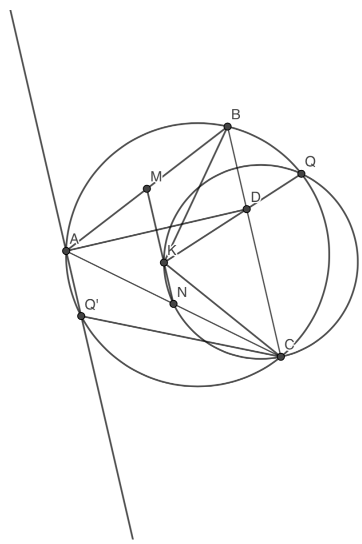
2.3) BC антипараллельно B_1C_1. AM — медиана в треугольнике ABC тогда и только тогда, когда AM — симедиана в треугольнике AC_1B_1.

2.4) BC антипараллельно B_1C_1. AH — высота в треугольнике ABC тогда и только тогда, когда AH проходит через центр описанной окружности треугольника AC_1B_1.

Лемма. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. BB_1, CC_1 — высоты, AM — медиана. Докажите, что касательные, проведенные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 из точек B_1 и C_1, пересекутся в точке M.

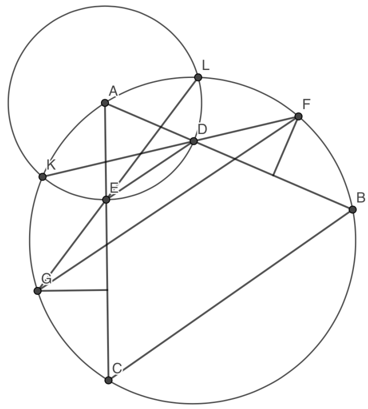
Доказательство. $\angle BB_1C = \angle CC_1B = 90°$, значит, четырехугольник BC_1B_1C вписан, то есть B_1C_1 антипараллельно BC относительно $\angle BAC$, тогда AM — симедиана в треугольнике B_1AC_1, поэтому касательные, проведенные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 из точек B_1 и C_1, пересекутся в точке пересечения AM и срединного перпендикуляра к B_1C_1. $MB_1 = MC_1 = \frac{AC}{2}$ как медиана в прямоугольном треугольнике. Серединный перпендикуляр к B_1C_1 пройдет через M, получается, что касательные пересекутся в точке M.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведенной из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.



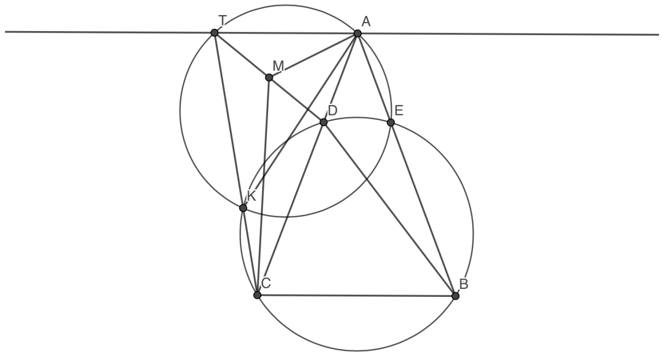
Решение. Проведем прямую, параллельную BC, через точку A, она пересечет Ω в точке Q'. $CQ'AB$ — равнобокая трапеция, серединный перпендикуляр к BC является серединным перпендикуляром к $Q'A$ и проходит через точку K, MN — средняя линия в ΔABC, поэтому NM — серединный перпендикуляр к AD, значит, K — центр описанной окружности прямоугольного треугольника $Q'AD$, то есть середина $Q'D$. CA пересекается с $Q'Q$ в точке X. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых AC и QQ'. $NK \parallel Q'A$, CQ антипараллельно $Q'A$, значит, CQ антипараллельно NK, то есть точки C, N, K, Q лежат на одной окружности.

Задача 2. Пусть γ окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, причем $AD = AE$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BD и CE пересекают меньшие дуги AB и AC окружности γ в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.



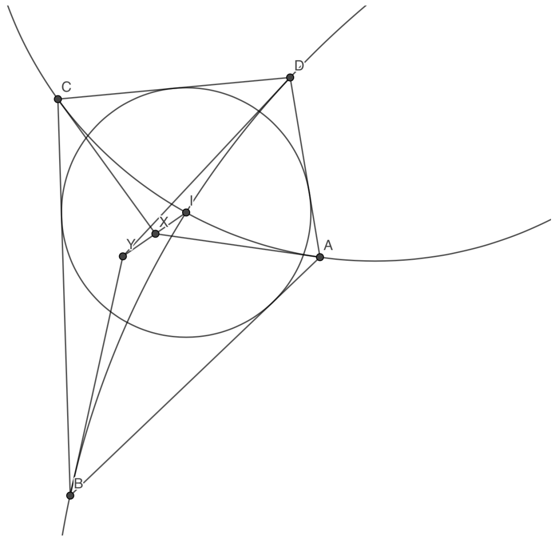
Решение. FD пересекает γ в точке K, GE пересекает γ в точке L. $\angle ADK = \angle FDB = \angle FBD = \angle AKD$, значит, $AD = AK$, $AE = AL$ по аналогии. Четырехугольник $LDEK$ вписан в окружность с центром A. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых FD и EG. Прямые FG и LK антипараллельны, LK и DE антипараллельны, значит, $DE \parallel FG$.

Задача 3. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.



Решение. Окружность, описанная около ΔBCD, пересечет AB в точке E, такой что $ED \parallel BC$ в силу симметрии. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых AB и CT. BC антипараллельно EK, BC параллельно AT, значит, EK антипараллельно AT, то есть K лежит на описанной окружности ΔEAT. При центральной симметрии относительно точки M точка A перейдет в A'. $A'D \parallel AT \parallel ED$, следовательно, A, D и A' лежат на одной прямой. $AE = AD = TA'$, поэтому $EATA'$ — равнобокая трапеция и точка A' лежит на описанной окружности ΔEAT. $\angle AKT = \angle AA'T = \angle CAM$.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A и C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B и D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.



Решение. Достаточно доказать, что симедианы треугольников AIC и BID совпадают. K, L, M, N — точки касания вписанной окружности и сторон AB, BC, CD, DA соответственно. A', B', C', D' — середины KN, KL, LM, MN соответственно. Заметим, что A и A', B и B', C и C', D и D' инверсны относительно вписанной окружности. Как следствие, $A'C'$ антипараллельно AC относительно $\angle AIC$, значит, симедиана ΔAIC совпадает с медианой треугольника $A'IC'$, аналогично симедиана ΔBID совпадает с медианой $\Delta B'ID'$, а медианы этих треугольников совпадают, потому что середины $A'C'$ и $B'D'$совпадают, так как $A'B'C'D'$ — параллелограмм Вариньона.

Задача 5. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая l пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает l в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P, Q, S и T лежат на одной окружности.

Решение. Пусть PS и QT пересекают ω в точках X и Y соответственно. PQ антипараллельно XY относительно прямых PX, QY. Достаточно доказать, что $ST \parallel XY$, из этого будет следовать антипараллеьность PQ и ST, что означает P, Q, S и T лежат на одной окружности. $BK \parallel LT$, $BS \parallel TC$, $KS \parallel CL$, поэтому ΔBKS можно перевести в ΔTLC композицией параллельного переноса на KL и гомотетии с центром L, при этом P перейдет в точку P' на прямой KL, такую что $\angle QCB = \angle KPB = \angle LP'B$, значит, четырехугольник $QP'CT$ вписан, тогда $\angle TQC = \angle TP'C = \angle BPS$, поэтому $BC \parallel XY$.

Двойное отношение

Определение 1. Двойным отношением четвёрки точек $(ABCD)$ называют число $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$.

Определение 2. Четвёрка точек, для которой $(ABCD)$ = -1, называется гармонической.

Определение 3. Двойным отношением четвёрки прямых $(PA,\ PB,\ PC,\ PD)$, проходящих через одну точку, называют число $\frac{\sin\angle(PA,PC)}{\sin\angle(PA,PD)} : \frac{\sin\angle(PB,PC)}{\sin\angle(PB,PD)}$

Определение 4. Двойным отношением четвёрки точек $(ABCD)$, лежащих на одной окружности, называется двойное отношение $(PA,\ PB,\ PC,\ PD)$ для любой точки P на этой же окружности.

Свойства.
1) Для любых четырёх точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, и точки P вне неё верно равенство $(ABCD) = (PA,\ PB,\ PC,\ PD)$.

2) Двойное отношение точек сохраняется при проецировании с a) прямой на прямую; b) прямой на окружность из точки окружности; c) окружности на прямую из точки окружности; d) окружности на окружность из точки пересечения.

3) Для 3 данных точек A, B, C на прямой и числа x существует ровно одна точка X, такая что $(ABCX) = x$.

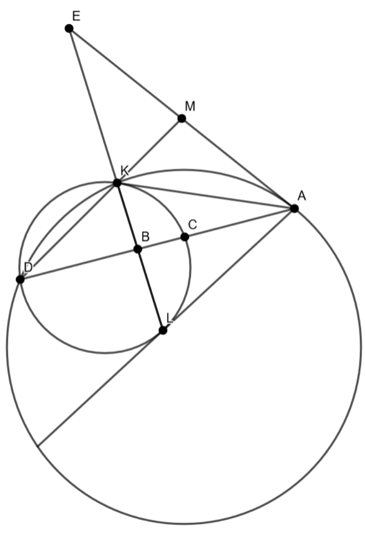
4) Пусть M — середина AB, тогда $(A,\ B,\ M,\ \infty)$ = -1 (∞ — бесконечно удаленная точка, отношение бесконечно удаленных векторов равно 1).

5) $AMNB$ — полный четырехвершинник, K — точка пересечения диагоналей, AM пересекает BN в точке L, MN пересекает AB в точке C. LK пересекает AC в точке D. $(ABCD)$ = -1.

6) Пусть P и Q — основания внутренней и внешней биссектрис угла C треугольника ABC. $(ABPQ)$ = -1.

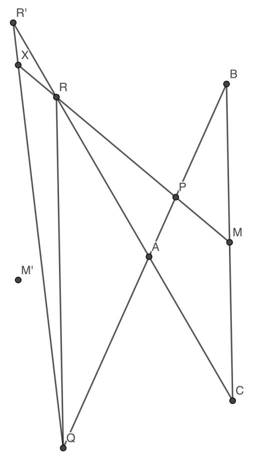
Докажем с помощью двойного отношения лемму, позволяющую решить задачу о построении касательной к окружности с помощью одной линейки.

Лемма. Дана окружность ω и точка A вне неё, проведены касательные AK, AL и секущая через точку A, пересекающая KL в точке B и ω в точках C и D. Докажите, что $(ABCD)$ — гармоническая четвёрка.



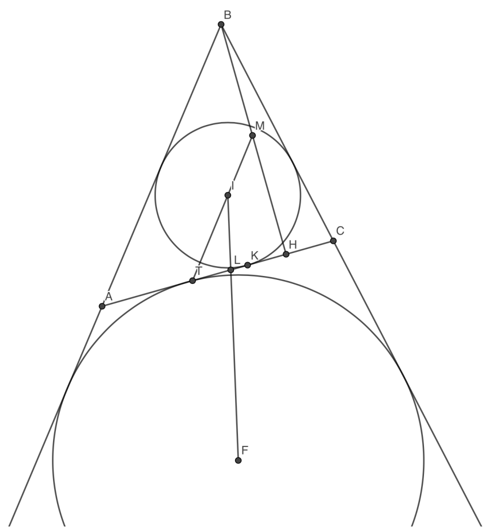
Доказательство. Пусть касательная к окружности ω', описанной около треугольника KDA, пересекает KL в точке E. $\angle EAD = \angle AKD = \angle KCD$ по свойству касательной, следовательно, $CK \parallel AE$. Пусть KD пересекает AE в точке M, тогда M — радикальный центр ω, ω' и точки A. Проецируя из точки K прямую AC на AE, получаем, что $(ABCD) = (A,\ E,\ \infty,\ D)$ = -1.

Задача 1. Обозначим через P и Q основания внутренней и внешней биссектрис угла C треугольника ABC соответственно. Пусть M — середина CB, а прямые MP и CA пересекаются в точке R. Докажите, что $RX = RQ$.



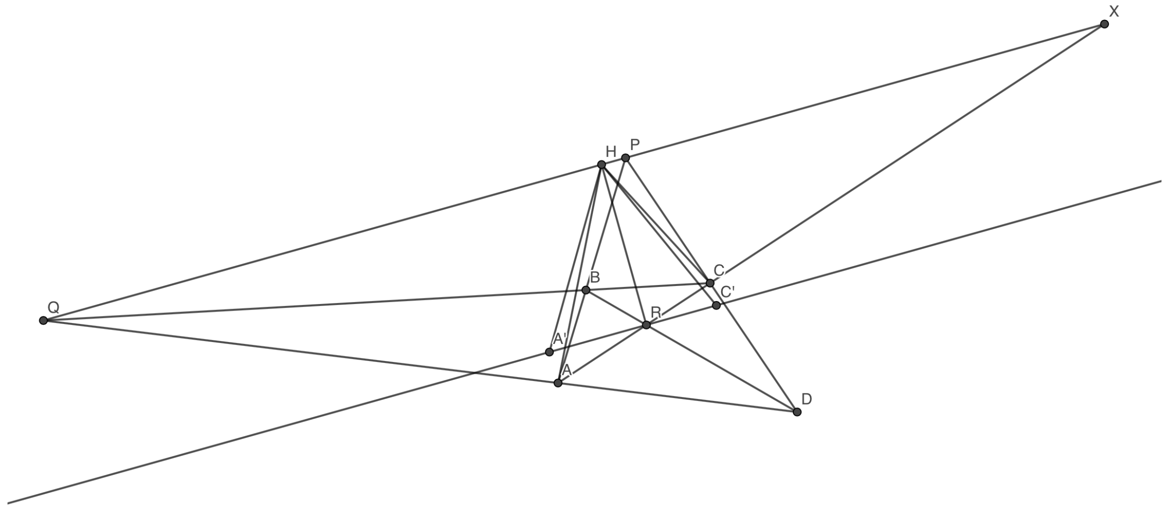
Решение. При гомотетии с центром в точке A, переводящей B в Q, C перейдет в R', M — в M', причём $BC \parallel R'Q$, M' — середина $R'Q$. Проецируем прямую AQ на $R'Q$ из точки M, PM пересекает $R'Q$ в точке X. $(ABPQ)$ = -1 = $(M'$, ∞, X, $Q)$ = $(M'$, ∞, R', $Q)$, значит, $X = R' = R$. Из параллельности $\angle QCR = \angle BCQ = \angle CQR$, поэтому $CR = RQ$.

Задача 2. Пусть H — основания высоты треугольника ABC, проведенная из вершин B; L — основание соответствующей биссектрисы; K — точка касания вписанной окружности со стороной AC; T — точка касания внеписанной окружности со стороной AC. Докажите, что четвёрка точек $(HLKT)$ гармоническая.



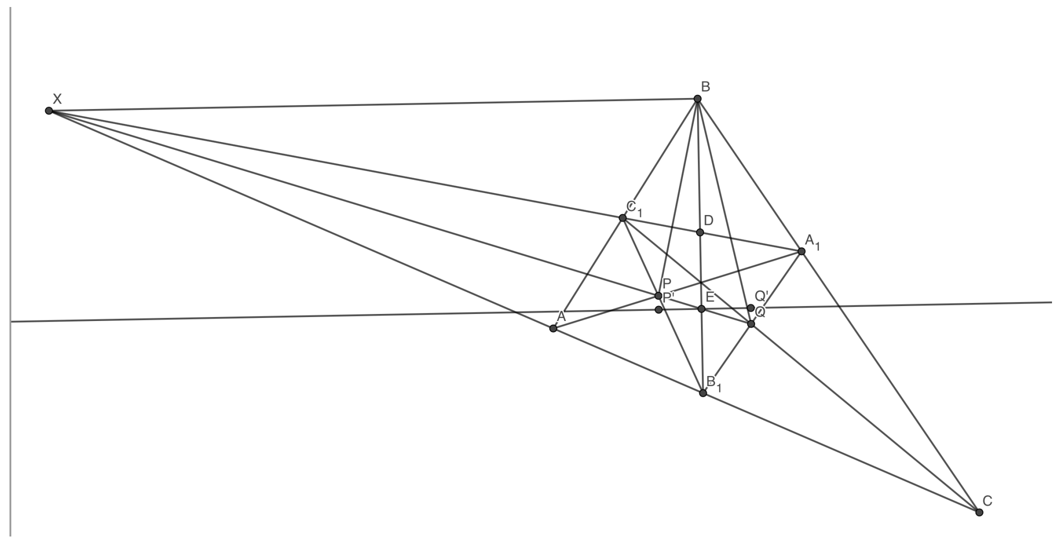
Решение. I — центр вписанной окружности. Сделаем гомотетию, переводящую вневписанную окружность во вписанную, AC перейдет в параллельную прямую $A'C'$, касающуюся окружности в точке T' — образ точки T. $\angle T' + \angle K = 180°$, поэтому точки T и K диаметрально противоположны, тогда TI пересекает BH в точке M — середине BH. Проецируем из точки I на прямую BH. $(HLKT) = (H$, B, ∞, $M)$ = -1.

Задача 3. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, а продолжения боковых сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из R на PQ. Докажите, что $\angle AHR = \angle CHR$.



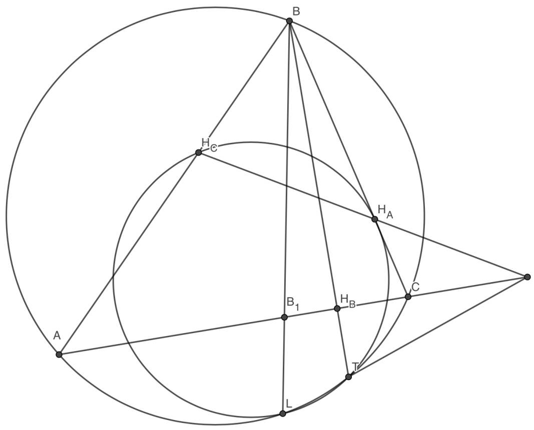
Решение. Пусть X — точка пересечения AC и PQ. $(ACXR)$ = -1. Проведем прямую параллельную PQ через точку R, спроецируем на неё из точки H. $(ACXR) = (A', C', \infty, R)$ = -1, значит, RH — срединный перпендикуляр к A'', треугольник $A'HC'$ равнобедренный, тогда $\angle AHR = \angle CHR$.

Задача 4. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q — точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.



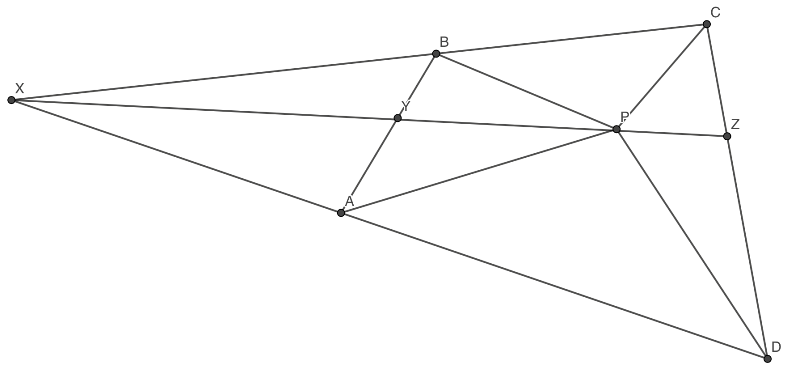
Решение. Пусть C_1A_1 пересекает AC в точке X. (C_1A_1DX) = -1 из четырехвершинника AC_1A_1C, поэтому X — основание внешней биссектрисы. BB_1 пересекает A_1C_1 в точке D, PQ — в точке E, A_1C_1 пересекает PQ — в точке Y. (C_1A_1DY) = $(PQEY)$ = -1 из четырехвершинника C_1A_1QP, тогда $X = Y$. Проведем прямую параллельную BX через точку E, спроецируем на нее прямую PQ из точки B, $(PQEX) = (P', Q', E, \infty)$ = -1, EB — срединный перпендикуляр к $P'Q'$, поэтому треугольник $P'BQ'$ равнобедренный, значит, $\angle PBB_1 = \angle QBB_1$, а также $\angle ABP = \angle CBQ$.

Задача 5. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, BB_1 — его симедиана, луч BB_1 вторично пересекает описанную окружность Ω в точке L. Пусть H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC, а луч BHB вторично пересекает Ω в точке T. Докажите, что точки H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности.



Решение. Так как точки A, C, H_A, H_C лежат на одной окружности, достаточно доказать, что прямые AC, H_AH_C и TL пересекаются в одной точке. Проецируя вершины гармонического четырёхугольника $ABCL$ из точки T на прямую AC, получаем, что точка пересечения TL с AC образует гармоническую четвёрку с точками A, C, H_B. Также гармоническую четверку образуют точка пересечения H_AH_C и AC, с точками A, C, H_B, поэтому прямые H_AH_C и TL пересекают прямую AC в одной точке.

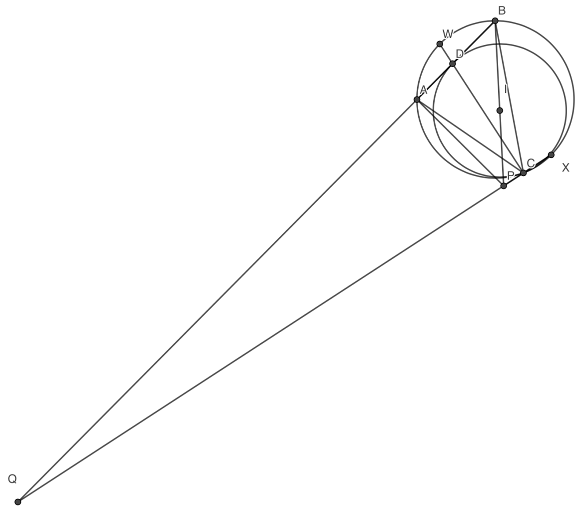
Задача 6. Внутри четырехугольника $ABCD$ взяли точку P. Прямые BC и AD пересекаются в точке X. Оказалось, что прямая XP является внешней биссектрисой углов APD и BPC. Пусть PY и PZ — биссектрисы треугольников APB и DPC. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.



Первое решение. Пусть прямая XP пересекает AB и CD в точках S и T соответственно. Из равенства двойных отношений получаем: $(XD, XT, XZ, XC) = (D, T, Z, C) = (PD, PT, PZ, PC) = (PA, PS, PY, PB) = (A, S, Y, B) = (XA, XS, XY, XB) = (XD, XT, XY, XC)$. Прямые XY и XZ совпадают.

Второе решение. Пусть CD и AB пересекаются в точке Q. M и N — основания биссектрис в треугольниках PDA и PBC, P лежит на MN, так как $MP \perp XP$, $NP \perp XP$. $(ADMX) = (BCNX) =$ -1, поэтому MN пройдет через Q. Проведем прямую параллельную MN через точку A, спроецируем на нее из точки P прямую AB, $(ABYQ) = (AB'Y'\infty) =$ -$\frac{AP}{PB'}$. Аналогично для прямой параллельной MN, проходящей через точку D, $(DCZQ) = (DC'Z'\infty) =$ -$\frac{DP}{PC'}$. Пусть $C'B'$ пересекает PN в точке N' Получаем, что $(ABYQ) = (DCZQ)$, так как $\frac{AP}{DP} = \frac{AM}{MD} = \frac{B'N'}{N'C'} = \frac{B'P}{C'P}$ по свойству биссектрисы и обобщенной теореме Фалеса, а это значит, что X, Z, Y лежат на одной прямой.

Задача 7. Окружность γ с центром в точке I касается описаной окружности Ω треугольника ABC в точке C, а отрезка AB — в точке D. Докажите, что прямая BI, перпендикуляр к AB, проведённый в точке A, и прямая, проходящая через C и середину дуги ACB окружности Ω, пересекаются в одной точке.



Решение. Пусть X — середина дуги ACB, W — диаметрально противоположная точка, P — точка пересечения перпендикуляра h к AB, проведённого в точке A, и прямой CX. CX пересекает AB в точке Q. CD проходит через W по лемме Архимеда. При гомотетии с центром в точке C, переводящей Ω в γ, образом точки X будет точка E на прямой XC, такая что ED — диаметр в окружности γ. CD — биссектриса в треугольнике ACB, $CW \perp XC$, так как XW — диаметр, а это означает, что CQ — внешняя биссектриса в треугольнике ACB, поэтому $(ABDQ) = \text{-}1$. PB пересекает ED в точке I'. Проецируя прямую AQ на ED из точки P, получаем, что $(ABDQ) = (\infty, I', D, E) = \text{-}1 = (\infty, I, D, E)$, значит, $I = I'$, то есть BI, CX и h пересекаются в точке P.
Примечание. $(ABDQ) = \text{-}1$ можно было получить, проецируя вершины гармонического четырехугольника $AXBW$ на прямую AQ из точки C.

Поворотная гомотетия

Определение 1. Поворотная гомотетия — композиция поворота и гомотетии с общим центром.

Свойства.
1) Как и при любом подобии, прямые переходят в прямые, окружности — в окружности, углы и отношения сохраняются.

2) При поворотной гомотетии на угол ϕ угла между новой и старой прямой равен $|\sin\phi|$.

3) Пусть AB пересекается с CD в точке P, тогда вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников APC и BPD — центр поворотной гомотетии, переводящей AB в CD, а также центр поворотной гомотетии, переводящей AC в BD.

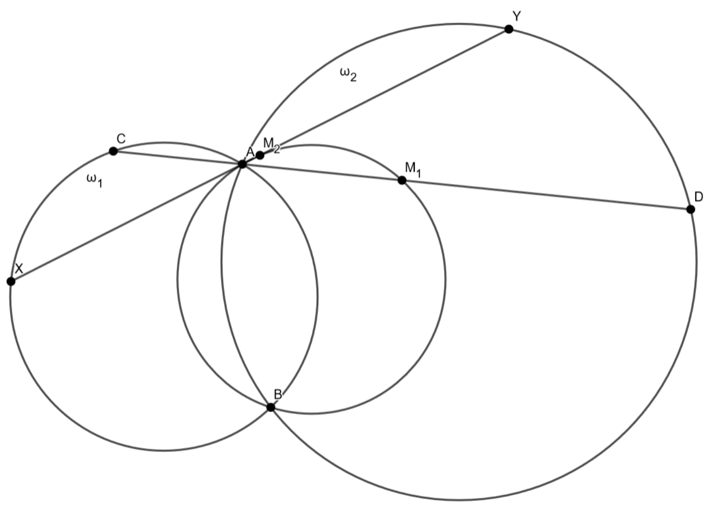
4) Две точки X и Y движутся с постоянными скоростями по прямым l_x и l_y соответственно, которые пересекаются в точке T; причём в точку T они приезжают неодновременно. Тогда всевозможные описанные окружности треугольников XYT имеют общую точку, отличную от T. Эта точка является центром поворотной гомотетии, которая переводит X в Y (в любой момент времени).

Если точки движутся с одинаковыми скоростями, то возникает два важных частных случая.

4.1) **Первая лемма о воробьях.** Дан неравнобедренный треугольник ABC. На лучах BA и CA выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, точка A_1 — середина дуги BAC, описанной окружности треугольника ABC. Равенство $BC_0 = CB_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки B_0, C_0, A_1 и A лежат на одной окружности.

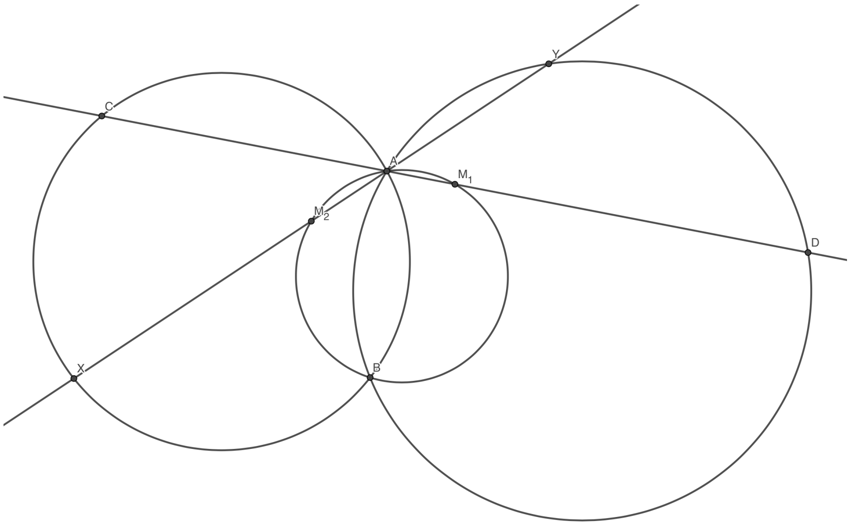
4.2) **Вторая лемма о воробьях.** На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки C_0 и B_0 соответственно, точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AB_0C_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $BC_0 + CB_0 = B$.

Лемма. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку проводятся всевозможные прямые, пересекающие каждую окружность повторно в точках X и Y соответственно. Докажите, что ГМТ середин XY — окружность.



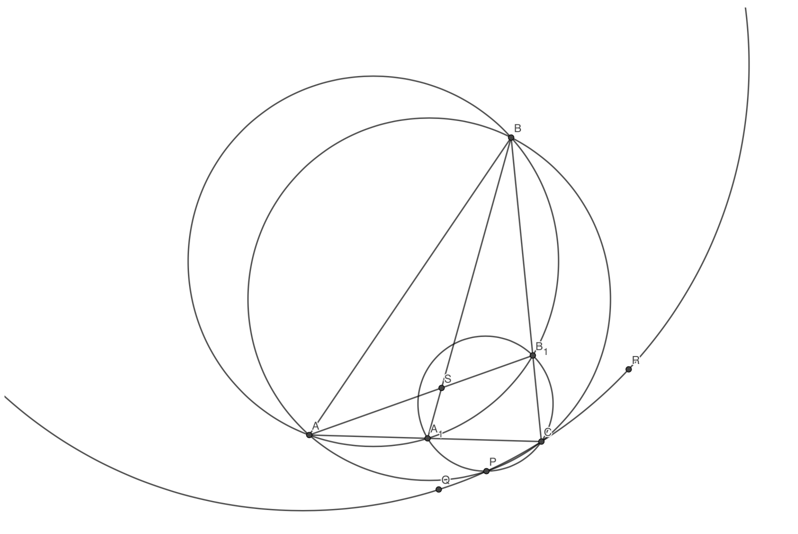
Доказательство. Назовем окружности ω_1 и ω_2. Проведем две произвольные прямые через точку A, пересекающую окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D, и в точках X и Y соответственно. M_1, M_2 — середины CD, XY соответственно. XY можно перевести в CD с помощью поворотной гомотетии, при этом M_2 перейдет в M_1, то есть $\angle YM_2B = \angle DM_1B$, из чего всегда следует то, что точки A, B, M_1, M_2 лежат на одной окружности. Тогда ГМТ из условия совпадает с описанной окружностью треугольника AM_2B.

Задача 0. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку проводятся всевозможные прямые, пересекающие каждую окружность повторно в точках X и Y соответсвенно. Докажите, что ГМТ середин XY — окружность.



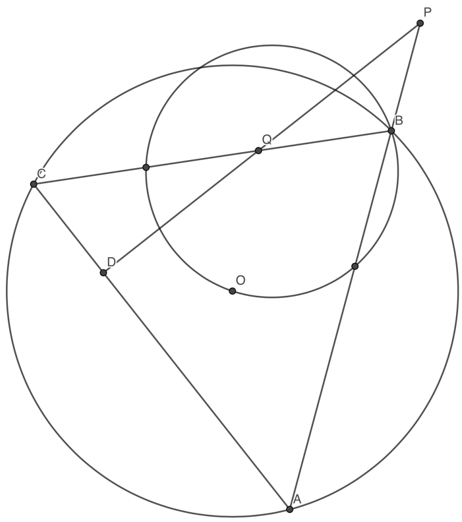
Решение. Назовем окружности ω_1 и ω_2. Проведем 2 произвольные прямые через точку A, пересекающую окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D, и в точках X и Y соответственно. M_1, M_2 — середины CD, XY соответственно. XY можно перевести в CD с помощью поворотной гомотетии, при этом M_2 перейдет в M_1, то есть $\angle YM_2B = \angle DM_1B$, из чего всегда следует то, что точки A, B, M_1, M_2 лежат на одной окружности. Тогда ГМТ из условия совпадает с описанной окружностью треугольника AM_2B.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности. *(Заключительный этап 2019, 10 класс, задача 4)*



Решение. Угол ACS равен углу ACQ, угол BCS равен углу BCR из симметрии, значит, угол RCQ равен 2 углам ACB. Треугольники AQA_1 и ASA_1, BSB_1 и BRB_1 равны из симметрии. ASA_1 подобен BSB_1. Сделаем поворотную гомотетию из точки P, переводящую BB_1 в AA_1. Угол поворота будет равен ACB. R перейдет в S из подобия треугольников BB_1R и AA_1S, S перейдет в Q из подобия треугольников BB_1S и AA_1Q, поэтому угол RPQ равен 2 углам ACB, равен углу QCR, а значит, P, Q, R, C лежат на одной окружности.

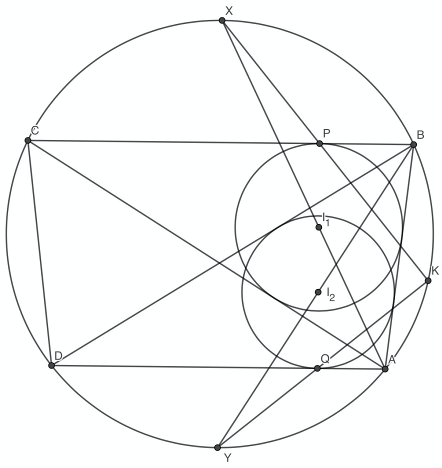
Задача 2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает отрезок BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности. *(ММО 2016, 9 класс, задача 4)*



Первое решение. Пусть BH — высота, BD — диаметр. $BH \parallel PQ$, поэтому $\angle APQ = \angle ABH = \angle CBO$, то есть BD касается описанной окружности треугольника BPQ, тогда по лемме, доказанной в этой главе, середеникы AP, QC, BD и точка B лежат на одной окружности.

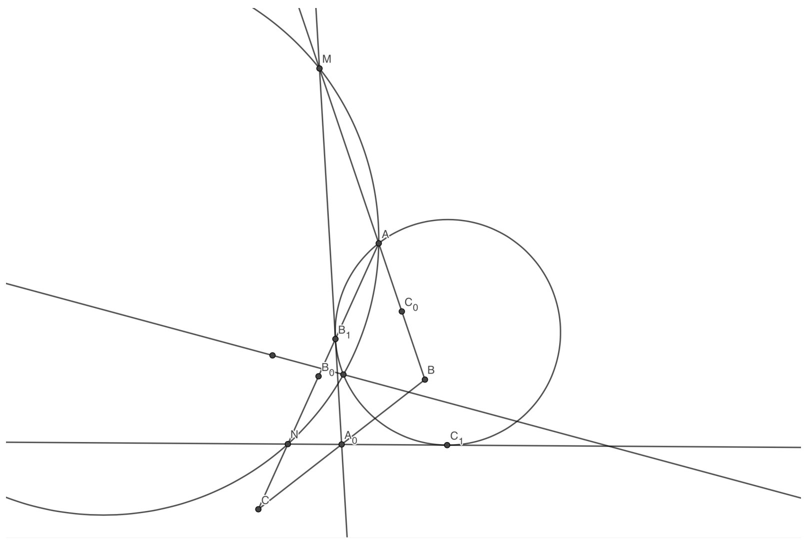
Второе решение. Переформулируем условие следующим образом: на стороне AC выбирается точка X, D и — середины AX и XC. Проводим серединные перпендикуляры к AX и CX, они пересекут прямые AB и CB в точках A_1 и C_1, требуется доказать, что B, C_1, O, A_1 лежат на одной окружности. γ — окружность, описанная около ABC, ω — окружность, описанная около A_1B_1C. BO пересекает γ в точке F. X' — точка, симметричная X относительно прямой A_1C_1, H — середина XX'. Покажем, что X' — точка пересечения окружностей, описанных около $A1BC1$ и ABC. Угол ACX равен углу AA_1D, так как $CX \parallel A_1D$, AA_1D равен DA_1X, потому что треугольник АА1Х равнобедренный. Четырехугольник DA_1HX вписанный, так как $A1HX + XDA1 = 90° + 90° = 180°$, отсюда, DA_1X равен углу DHX, а значит, угол ACX равен углу DHX. Аналогично угол BCX равен углу EHX, получается, что угол ACB равен углу DHE, а угол DHE в свою очередь равен углу ABC, потому что треугольник $AX'C$ гомотетичен треугольнику DHE с центром Х и коэффициентом 2. Из равенства углов ACB и $AX'C$ следует то, что X' лежит на γ. $A_1X'C_1 = A_1XC_1 = 180°$ - AXA_1 - $CXC_1 = 180°$ - BAC - BCA = ABC, таким образом, X' лежит и на ω. XX' повторно пересекает γ в точке H', $H'BA = H'X'A = DA_1A$, значит, BH' параллельно A_1D. Сделаем поворотную гомотетию, переводящую AC в A_1C_1. Пусть $X'T$ — высота в треугольнике $AX'C$. Угол поворота равен углу между высотами, то есть $TX'H = X'H'B$ из параллельности. F перейдет в точку на прямой AF и на окружности ω. Покажем, что F перейдет в O. $BH'X' = BFX'$, как опирающиеся на одну дугу γ , а также $BFX' = FX'O$ по свойству равнобедренного треугольника. Таким образом, угол $FX'O$ равен углу поворота, а значит, F перейдет в O, откуда следует, что B, C_1, O, A_1 лежат на одной окружности.

Задача 3. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.



Решение. I_1, I_2 — центры вписанных окружностей ΔABC, ΔABD соответственно. AI_1 пройдет через X, BI_2 пройдет через Y. $BX = XI_1$, $AY = YI_2$ по лемме о трезубце. $\angle AYB = \angle BXA$ как углы, опирающиеся на одну дугу. $\Delta AYI_2 \quad \Delta I_1XB$, один можно перевести в другой с помощью поворотной гомотетии, при этом прямая AY перейдет в прямую AX, XY — диаметр, следовательно, $\angle YAX = 90°$, то есть прямая переходит в перпендикулярную. Прямая AQ прейдет в прямую I_1P, прямая I_2Q перейдет в прямую BP, значит, Q перейдет в P, поэтому $YQ \perp XP$, тогда точка пересечения YQ и XP лежит на ω.

Задача 4. BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Касательные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 в точках B_1 и C_1 пересекают прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AMN и AB_1C_1 лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.



Решение. A_0, B_0, C_0 — середины BC, CA, AB соответственно. Случай $AC = AB$ очевиден из симметрии, далее считаем, что $AB < AC$. B_1M и C_1N содержат A_0 по лемме, доказанной в главе «Антипараллельность». Описанная окружность ΔB_0AC_0 ω_1 гомотетична описанной окружности ΔCAB ω с центром в точке A и коэффициентом 0.5, поэтому AO — диаметр окружности, описанной около ΔABC. AH — диаметр окружности ω_2, описанной около ΔAB_1C_1, поскольку $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90°$. HO пересечет окружность ω_1 в точке X. X лежит на ω_2, так как $\angle HXA = 90°$. Нужно доказать, что X лежит на описанной окружности ΔNAM. Для этого достаточно показать, что при поворотной гомотетии из точки X, переводящей C_0C_1 в B_0B_1, M перейдет в N, то есть $B_1B_0 : B_1N = C_1C_0 : C_1M$. $A_0C_0 \parallel AC$, $A_0B_0 \parallel AB$, поэтому $\frac{B_1B_0}{B_1N} = (B_0, N, B_1, \infty) = (\infty, C_1, M, C_0) = \frac{C_1C_0}{C_1M}$.