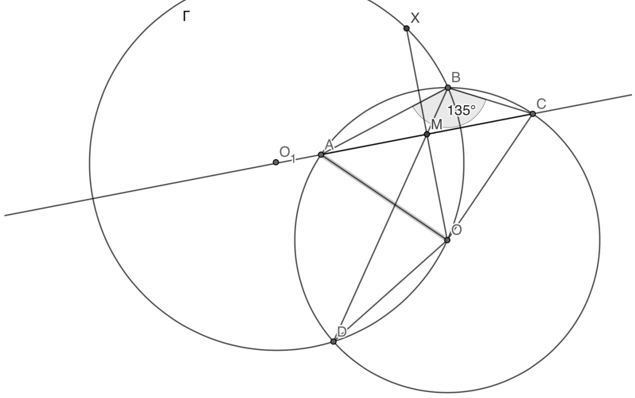
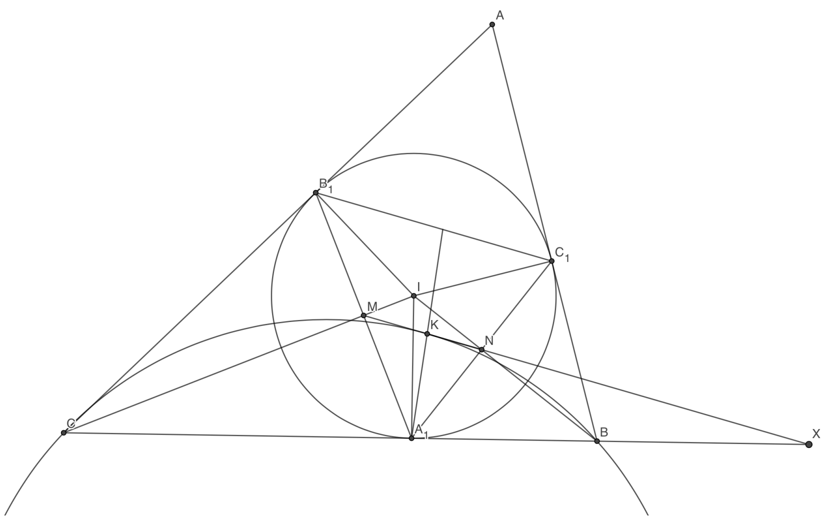
Радикальная ось и степень точки

Задача 1. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135°$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D Докажите, что центр окружности γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC. *(Регион 2017, 11 класс, задача 3)*



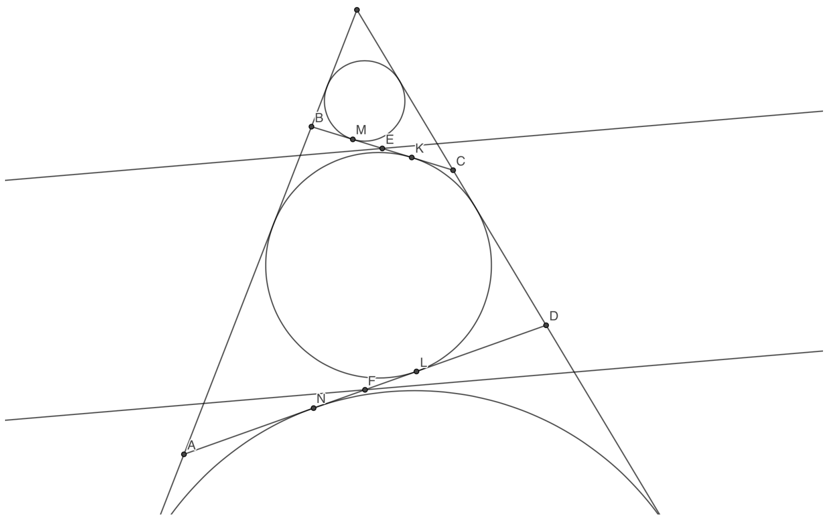
Решение. $\angle AOC = 2 * (180° - \angle ABC) = 90°$, поэтому $OM = AM = MC$. $OM \perp AC$, потому что медиана — высота в равнобедренном ΔAOC. Точка X симметрична O относительно AC. $AM * MC = BM * MD = MO * MX$, значит, четырехугольник $DOBX$ вписан в окружность с центром, лежащем на серединном перпендикуляре к OX, то есть центр описанной окружности ΔBOD лежит на AC.

Задача 2. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Доказать, что описанная окружность треугольника BCK касается m *(Регион 2021, 10 класс, задача 4)*



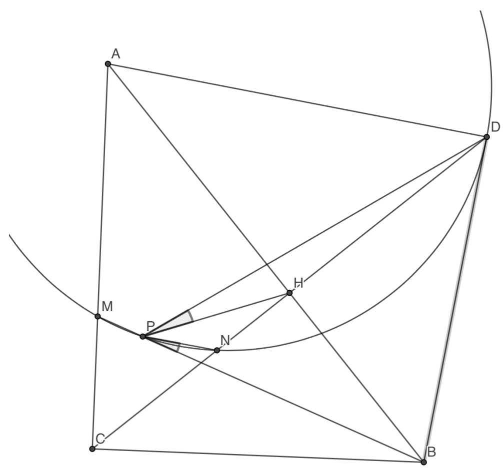
Решение. M, N — середины A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. I — центр вписанной окружности ΔABC. BI, CI — биссектрисы в ΔABC, а также BI, CI — серединные перпендикуляры к A_1C_1, A_1B_1 соответственно, потому что $BA_1 = BC_1$, $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных. $\angle IA_1B = \angle IC_1B = 90°$ по свойству касательной, значит, IC_1BA_1 вписан, значит, $\angle IA_1C_1 = \angle IBC_1 = \angle IBA_1$. $\angle IMA_1 + \angle INA_1 = 90° + 90° = 180°$, IMA_1N вписан, $\angle IA_1N = \angle IMN$. Получается, что $\angle IMN = \angle CBI$, то есть четырехугольник $CMNB$ вписан. Проведем MN и CB до пересечения в точке X. XA_1 — касательная к окружности, описанной около $MINA_1$, потому что центр этой окружности — середина A_1I, а $\angle IA_1X = 90°$. Докажем, что $XK = XA_1$. $\angle NA_1B = \angle NIA_1$, так как A_1N — высота в прямоугольном треугольнике IBA_1. $\angle NIA_1 = \angle NMA_1$ из вписанности $MINA_1$. $\angle A_1KX = \angle A_1MX + \angle MA_1K = \angle NA_1X + \angle KA_1N = \angle KA_1X$. Действительно, $XK = XA_1$. Записав степень точки X относительно окружностей, описанных около $CMNB$ и $MINA_1$, имеем $XA1^2 = XN * XM = XB * XC = XK^2$, отсюда, XK — касательная к окружности, описанной около ΔBCK.

Задача 3. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Докажите, что диаметр окружности ω не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон BC и AD. *(Регион 2020, 9 класс, задача 5)*



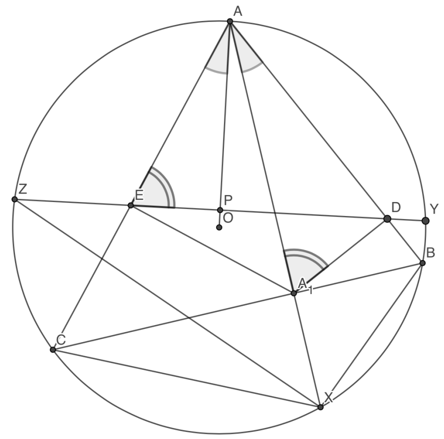
Решение. E и F — середины BC и AD соответственно. ω касаетеся BC и AD в точках K и L соответственно. Построим две окружности, отличные от ω. Окружность ω_1 касается AB, CD и BC в точке M, окружность ω_2 касается AB, CD и AD в точке N. Центры трех окружностей лежат на одной прямой l, так как все окружности касаются AB и CD. $AL = ND$, $BM = KC$, поэтому F и E — середины LN и MK. LN и MK — общие касательные, значит, через E проходит радикальная ось ω и ω_1, через F — радикальная ось ω и ω_2. При этом радикальные оси должны быть перпендикулярны l, то есть сами они параллельны. FE больше или равно расстоянию между радикальными осями, а диаметр ω не первосходит этого расстояния, следовательно, диаметр ω меньше или равен EF.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH и отмечена точка D, симметричная C относительно H. Пусть M — произвольная точка отрезка AC, а P — основание перпендикуляра из точки C на прямую BM. Точка H — середина отрезка CD. На отрезке CH (внутри угла HPB) нашлась такая точка N, что $\angle DPH = \angle NPB$. Докажите, что точки M, P, N, D лежат на одной окружности.



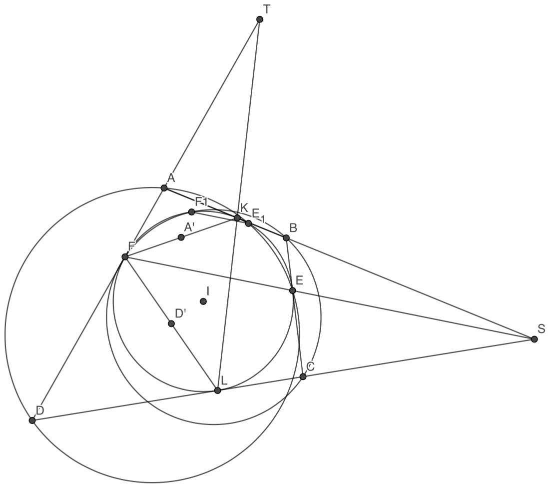
Решение. $\angle DPH = \angle NPB$, отсюда, $\angle NPD = \angle BPH$. Четырехугольник $CPHB$ вписанный, так как $\angle CPB = \angle CHB = 90°$, поэтому $\angle HPB = \angle HCB = \angle NDC$ из симметрии. $\angle NDB = \angle NPD$, значит, BD — касательная к окружности, описанной около треугольника NPD. CP — высота в прямоугольном треугольнике CMB, отсюда, $BP * BM = BC^2 = BD^2$, получается, что BD — касательная к описанной окружности треугольника MPD. Из того, что BD — касательная к окружностям, описанным около треугольников MPD и PND, можно сделать вывод, что их центры находятся на прямой AD, $AD \perp BD$. Также центры окружностей лежат на серпере к PD, поэтому окружности совпадают, то есть M, P, N, D лежат на одной окружности.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC продолжение высоты AA_1 за точку A_1 пересекает описанную окружность ω в точке X. Точки D и E - основания перпендикуляров из A_1 на стороны AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках Y и Z соответственно. Докажите, что A_1 - центр вписанной окружности треугольника XYZ.



Решение. O — центр описанной окружности, ED пересекает AO в точке P. ADA_1E - вписанный четырехугольник, так как $\angle AEA_1 + \angle A_1DA = 180°$, отсюда, $\angle AED = \angle AA_1D$. $\angle OAE = \angle DAA_1$. Из суммы углов треугольника получаем, что $\angle APE = \angle ADA_1 = 90°$. $AO \perp ZY$ и AO — диаметр, поэтому A — середина дуги ZY, значит, XA — биссектриса $\angle ZXY$, а также $AE * AC = AZ^2$. С другой стороны, A_1E — высота в прямоугольном треугольнике AA_1C, поэтому $AE * AC = AA_1^2$, следовательно, $AZ = AA_1 = AY$, то есть A_1 — центр вписанной окружности треугольника XYZ по лемме о трезубце.

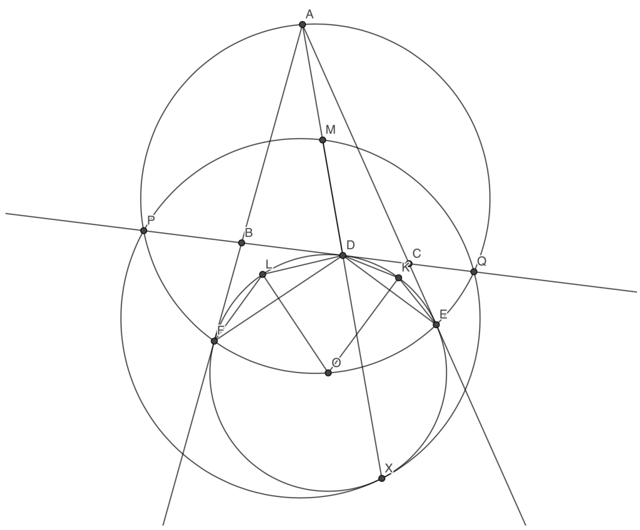
Задача 6. В четырёхугольнике $ABCD$ вписанная окружность ω касается сторон BC и DA в точках E и F соответственно. Оказалось, что прямые AB, FE и CD пересекаются в одной точке S. Описанные окружности Ω и Ω_1 треугольников AED и BFC, вторично пересекают окружность ω в точках E_1 и F_1. Докажите, что прямые EF и E_1F_1 параллельны.



Первое решение. I — центр ω. K, L — точки касания ω со сторонами AB, CD соответственно. EF пересекается с касательными к ω в точках K и L в точке S, значит, четырехугольник $KELF$ гармонический, поэтому BE, AD и KL пересекаются в точке T. A', D' — середины KF, FL соответственно. Покажем, что A' лежит на радикальной оси описанной окружности ΔAID и ω. Действительно, $-AA' * A'I = -KA' * A'F$ из формулы высоты в прямоугольном треугольнике. Аналогично D' лежит на радоси описанной окружности ΔAID и ω, поэтому $A'D'$ совпадает с радосью. Радикальный центр X описанной окружности ΔAID, ΔAED и ω — точка пересечения $A'D'$ и AD, то есть середина FT, назовем эту точку X. EX пересекает ω в точке E_1. Пусть Y — середина ET. Аналогично F_1 — точка пересечения FY и ω. В силу симметрии относительно серпера к EF получаем, что $EF \mid\mid E_1M_1$.

Второе решение. Покажем другим способом, что EE_1 проходит через X — середину FT. A и A', D и D' инверсны относительно ω. Точки A, E, E_1, D лежат на одной окружности, значит, Точки A', E, E_1, D' лежат на одной окружности Ω'. ω гомотетична окружности, описанной около $\Delta A'FD'$, с коэффициентом 2, поэтому AD — их общая касательная. Радикальным центром ω, Ω' и окружности, описанной около $\Delta A'FD'$, является точка пересечения $A'D'$ и AD, точка X. EE_1 проходит через X.

Задача 7. Вневписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D, луча AC в точке E, луча AB в точке F. Окружность AEF пересекает прямую BC в точках P и Q. Точка M — середина AD. Докажите, что окружность PQM касается ω.



Решение. O — центр вневписанной окружности. O лежит на окружности ω, описанной около ΔAEF, так как $\angle OEA = \angle OFA = 90°$. Серпер к ED пересечет ω в точках O и K, серпер к DF пересечет ω в точках O и L. KO — биссектриса $\angle EKD$, поэтому KD пройдет через F, аналогично LD пройдет через E. $\angle AEL = \angle KOE$, поэтому дуги KE и AL равны, $KA \mid\mid LE$. Так же можно получить, что ND || AM, отсюда следует, что $NAMD$ — параллелограмм, а M — середина KL. D

— ортоцентр в ΔKOL, значит, $OD \perp KL$, и $OD \perp PQ$ по свойству касательной, поэтому $KL \parallel PQ$, $KLQP$ — равнобокая трапеция, тогда KL — касательная к окружности Ω, описанной около ΔPMQ, в силу симметрии. Пусть MD пересекает описанную окружность ΔPMQ в точке X, вневписанную γ — в точке Y. Четырехугольник $EDFY$ — гармонический, поскольку YD пересекается в точке A с касательными к окружности γ в точках E и F, значит, EF, BC и касательная к γ в точке Y пересекутся в одной точке S — радикальном центре окружностей ω, γ и Ω. Проведем касательную к Ω в точке X, она пересечет PQ в точке S'. $\angle MXS' = \angle MPX$ по свойству касательной. $\angle MPQ = \angle MQP = \angle PXM$, поэтому $\angle S'DX = \angle QPX + \angle MXP = \angle MXS'$, следовательно, $S'X = S'D$, $\deg(\omega)S' = \deg(\Omega)S' = S'X^2 = S'D^2 = \deg(\gamma)$, поэтому $S' = S$. $SY = SD = SX$, причем X, Y, D лежат на одной прямой, отсюда можно сделать вывод, что $X = Y$ и XS — общая касательная к окружностям γ и Ω, значит, эти окружности касаются.

Гомотетия

Задача 0. *(Лемма Архимеда)* Дана окружность Ω, BC — хорда в ней. Окружность ω касается BC в точке D и Ω в точке A. AD пересекает Ω в точке E. Докажите, что E — середина дуги BC.

Задача 1. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину отрезка AB. *(ММО 2018, 10 класс, задача 3)*

Задача 2. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. оказалось, что центр окружности ω, описанной около треугольника B_1HC_1, лежит на прямой BC. Докажите, что окружности Ω, описанная окола треугольника ABC, касается окружности ω. *(Региональный этап 2019, 9 класс, задача 4)*

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

Задача 4. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая l касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

Задача 5. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD; окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K и L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

Задача 6. Дан треугольник ABC. Рассмотрим три окружности, первая из которых касается описанной окружности Ω в вершине A, а вписанной окружности ω внешним образом в какой-то точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Задача 7. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

Задача 8. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC касается ω.

Поворотная гомотетия

Задача 0. Даны две окружности, пересекающиеся в точках A и B. Через точку проводятся всевозможные прямые, пересекающие каждую окружность повторно в точках X и Y соответсвенно. Докажите, что ГМТ середин XY — окружность.

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности. *(Заключительный этап 2019, 10 класс, задача 4)*

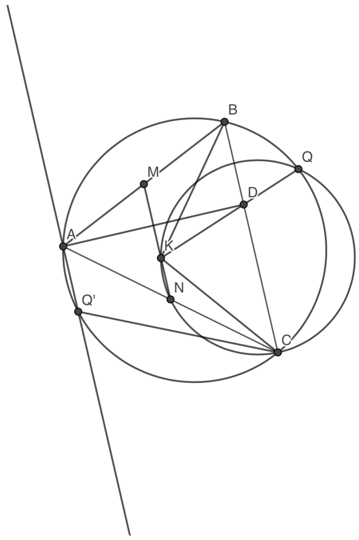
Задача 2. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне AC, пересекает отрезок BC и прямую AB в точках Q и P соответственно. Докажите, что точки B, O и середины отрезков AP и CQ лежат на одной окружности. *(ММО 2016, 9 класс, задача 4)*

Задача 3. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности ω, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности ω.

Задача 4. BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Касательные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 в точках B_1 и C_1 пересекают прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AMN и AB_1C_1 лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

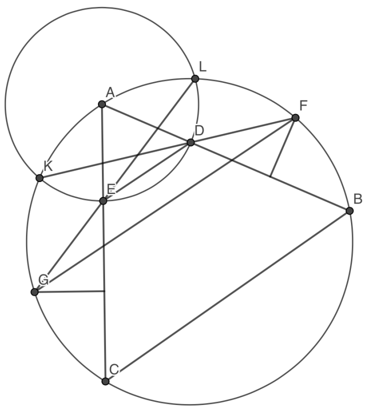
Антипараллельность

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведенной из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.



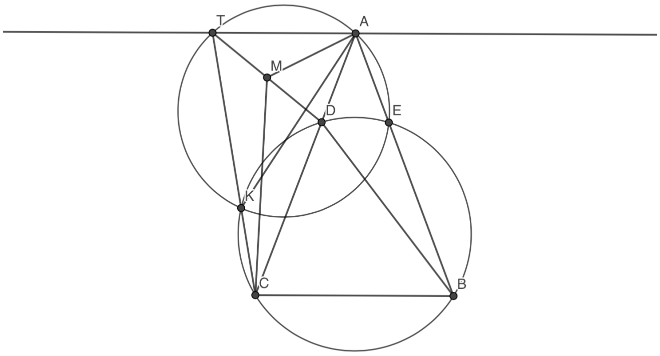
Решение. Проведем прямую, параллельную BC, через точку A, она пересечет Ω в точке Q'. $CQ'AB$ — равнобокая трапеция, серединный перпендикуляр к BC является серединным перпендикуляром к $Q'A$ и проходит через точку K, MN — средняя линия в ΔABC, поэтому NM — серединный перпендикуляр к AD, значит, K — центр описанной окружности прямоугольного треугольника $Q'AD$, то есть середина $Q'D$. CA пересекается с $Q'Q$ в точке X. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых AC и QQ'. $NK \parallel Q'A$, CQ антипараллельно $Q'A$, значит, CQ антипараллельно NK, то есть точки C, N, K, Q лежат на одной окружности.

Задача 2. Пусть γ окружность, описанная около остроугольного треугольника ABC. Точки D и E лежат на отрезках AB и AC соответственно, причем $AD = AE$. Серединные перпендикуляры к отрезкам BD и CE пересекают меньшие дуги AB и AC окружности γ в точках F и G соответственно. Докажите, что прямые DE и FG параллельны или совпадают.



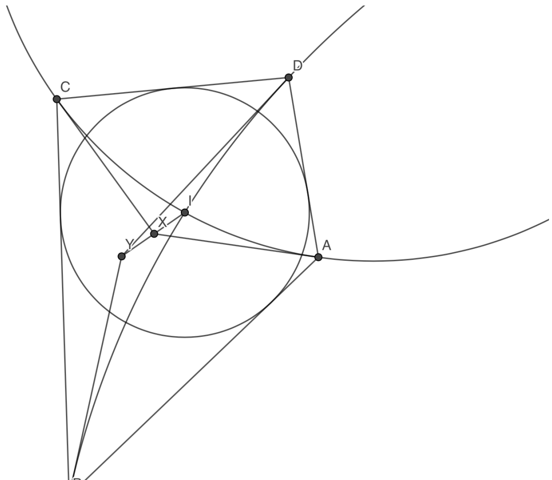
Решение. FD пересекает γ в точке K, GE пересекает γ в точке L. $\angle ADK = \angle FDB = \angle FBD = \angle AKD$, значит, $AD = AK$, $AE = AL$ по аналогии. Четырехугольник $LDEK$ вписан в окружность с центром A. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых FD и EG. Прямые FG и LK антипараллельны, LK и DE антипараллельны, значит, $DE \parallel FG$.

Задача 3. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.



Решение. Окружность, описанная около ΔBCD, пересечет AB в точке E, такой что $ED \parallel BC$ в силу симметрии. Рассмотрим антипараллельность относительно прямых AB и CT. BC антипараллельно EK, BC параллельно AT, значит, EK антипараллельно AT, то есть K лежит на описанной окружности ΔEAT. При центральной симметрии относительно точки M точка A перейдет в A'. $A'D \parallel AT \parallel ED$, следовательно, A, D и A' лежат на одной прямой. $AE = AD = TA'$, поэтому $EATA'$ — равнобокая трапеция и точка A' лежит на описанной окружности ΔEAT. $\angle AKT = \angle AA'T = \angle CAM$.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Касательные к описанной окружности треугольника AIC в точках A и C пересекаются в точке X. Касательные к описанной окружности треугольника BID в точках B и D пересекаются в точке Y. Докажите, что точки X, I, Y лежат на одной прямой.

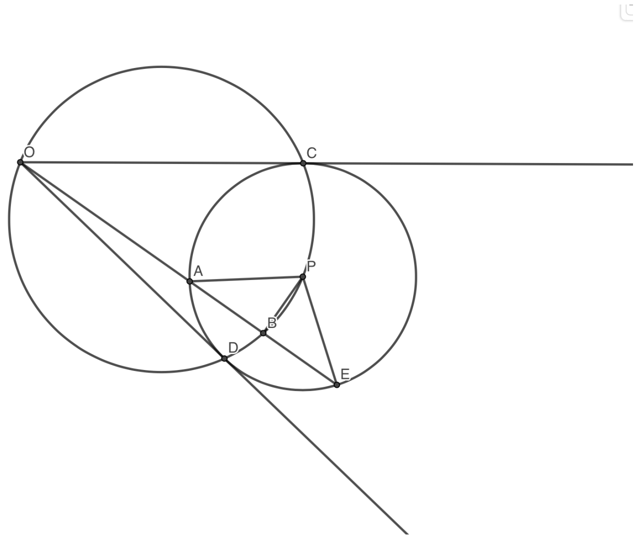


Решение. Достаточно доказать, что симедианы треугольников AIC и BID совпадают. K, L, M, N — точки касания вписанной окружности и сторон AB, BC, CD, DA соответственно. A', B', C', D' — середины KN, KL, LM, MN соответственно. Заметим, что A и A', B и B', C и C', D и D' инверсны относительно вписанной окружности. Как следствие, $A'C'$ антипараллельно AC относительно $\angle AIC$, значит, симедиана ΔAIC совпадает с медианой треугольника $A'IC'$, аналогично симедиана ΔBID совпадает с медианой $\Delta B'ID'$, а медианы этих треугольников совпадают, потому что середины $A'C'$ и $B'D'$совпадают, так как $A'B'C'D'$ — параллелограмм Вариньона.

Симедиана

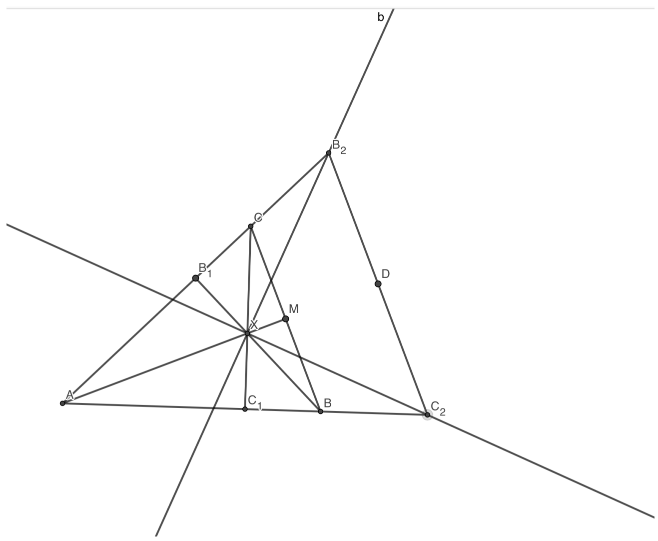
Задача 0. Биссектриса треугольника является биссектрисой медианы и высоты в нем тогда и только тогда, когда треугольник прямоугольный.

Задача 1. Пусть OP — диаметр окружности Ω, ω — окружность с центром в точке P и радиусом меньше, чем у Ω. Окружности Ω и ω пересекаются в точках C и D. Хорда OB окружности Ω пересекает вторую окружность в точке A. Найдите длину отрезка AB, если произведение длин отрезков BD и BC равно 5. *(ОММО 2016, 11 класс, задача 7)*



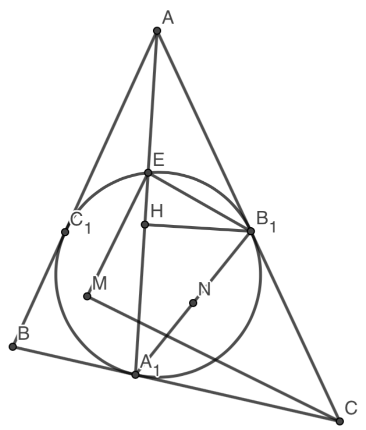
Решение. Продлим хорду OB до пересечения с ω в точке E. Углы OCP и ODP равны $90°$, так как опираются на диаметр, а значит, O — точка пересечения касательных, проведеных к ω в точках C и D, поэтому AO — симедиана в треугольнике ECD. PB — высота в треугольнике AEP, а также медиана в силу того, что треугольник AEP равнобедренный. Треугольники ABC и DBA подобны по свойству симедианы, отсюда, $AB = \sqrt{CB * BD}$.
Ответ: $\sqrt{5}$

Задача 2. В треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, проведена медиана AM. Прямая b симметрична прямой AM относительно высоты BB_1, а прямая с симметрична прямой AM относительно высоты CC_1. Прямые b и c пересеклись в точке X. Докажите, что $AX = BC$. *(ММО 2017, 9 класс, задача 6)*



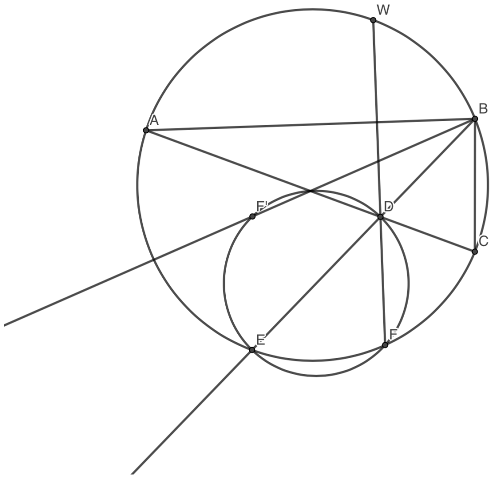
Решение. B_1 и C_1 — середины AB_2 и AC_2. B_2X и C_2X — это b и c. BB_1 — серединный перпендикуляр к AB_2, CC_1 — серединный перпендикуляр к AC_2, значит, ортоцентр O в треугольнике ABC будет центром описанной окружности в треугольнике AB_2C_2, а также треугольники ACC_2 и ABB_2 равнобедренные, отсюда, $\angle B_2CC_2 = \angle C_2BB_2 = 90°$. $\angle B_2OC_2 = 2\angle B_2AC_2 = 90°$. B_2X и C_2X пересекают AM в точках K и L. Треугольники AB_2K и AC_2L равнобедренные в силу симметрии. $\angle XKL = \angle B_2AK + \angle KB_2A = 2\angle B_2AK$, $\angle KLX = 2\angle LAC_2$, следовательно, $\angle B_2XC_2 = \angle XKL + \angle KLX = 2(\angle B_2AK + \angle C_2AL) = 2\angle B_2AC_2 = 90°$. Получается, что точки B_2, C, X, O, B, C_2 лежат на окружности ω с центром E — середина B2C2. O' — центр описанной окружности треугольника ABC. $AO = 2O'M = BC$. AM пересекает B_2C_2 в точке D, AD — симедиана в треугольнике B_2AC_2, потому что BC антипараллельно B_2C_2 относительно угла B_2AC_2. F — точка пересечения касательных к окружности, описанной около AB_2C_2, в точках B_2 и C_2, то есть перпендикуляры к OB_2 и OC_2, проходящие через B_2 и C_2. B_2OC_2F — прямоугольник, значит, F лежит на ω, и E — середина OF. AF пересекает ω в точке P. $\angle PFX = \angle PB_2X$, как углы, опирающиеся на одну дугу, $\angle PB_2X = \angle FAX$.

Задача 3. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямая AA_1 вторично пересекает эту окружность в точке E. Точка N — середина отрезка A_1B_1. Точка M симметрична точке N относительно прямой AA_1. Докажите, что $\angle$EMC= 90°. *(Санкт-Петербургская олимпиада школьников 2009/10 года, 7 задача)*



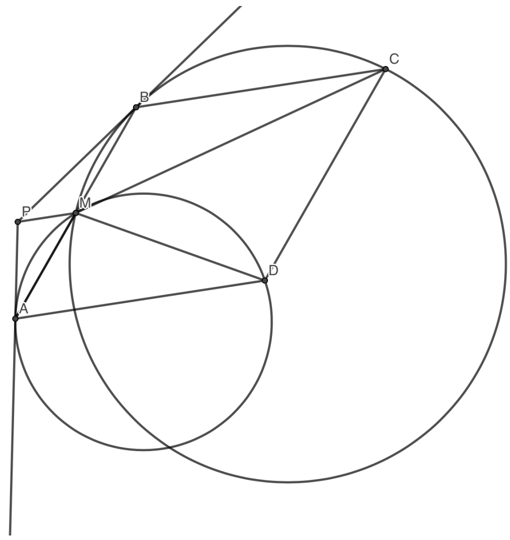
Решение. Опустим высоту B_1H в треугольнике EB_1A_1. NM содержит среднюю линию, так как $B_1H \parallel NM$, N — середина B_1A_1, отсюда, точка H симметрична A_1 относительно NM. $\angle EB_1A = \angle B_1A_1E$ по свойству касательной, $\angle B_1A_1E = \angle HA_1M = \angle A_1HM$ из симметрии. $\angle CB_1E = 180°$ - $\angle EB_1A = 180°$ - $\angle A_1HM = \angle EHM$. $\angle B_1EC = \angle NEA_1$ по основному свойству симедианы в треугольнике A_1B_1E. $\angle NEA_1 = \angle MEH$ в силу симметрии. Получается, что $\Delta MEH \quad \Delta CEB_1$ по двум углам, один можно перевести в другой с помощью поворотной гомотетии из точки E, значит, поворотной гомотетией можно перевести ΔECM в ΔEB_1H. При подобии углы сохраняются, $\angle EMC = \angle EHB_1 = 90°$.

Задача 4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.



Решение. Требуется доказать, что BF — симедиана в ΔABC. Проведем DF до пересечения с Ω в точке W. $\angle DFE$ опирается на диаметр в ω, поэтому равен $90°$, а значит, WE — диаметр. E — середина дуги AC, так как BE - биссектриса $\angle ABC$, тогда W — середина дуги ABC. Отсюда, FW — биссектриса $\angle CFA$. Во вписанном четырехуголнике ABC биссектрисы противоположных углов, BD и FD, пересекаются на диагонали, поэтому $ABCD$ — гармонический, то есть BF — симедиана в ΔABC.

Задача 5. Точка M — середина стороны AB параллелограмма $ABCD$. Касательные в точках A и B к описанным окружностям треугольников ADM и BCM соответственно пересекаются в точке P. Докажите, что $MP \parallel AD$.



Решение. Возьмем на стороне DC такую точку E, что $ADEM$ — равнобокая трапеция. $EM = AD = BC$ по свойству параллелограмма, таким образом, $BCEM$ — тоже равнобедренная трапеция, а это значит, что окружности, описанные около треугольников ADM и BCM пересекаются в точке E. $\angle AEM = \angle MAP$, $\angle MEB = \angle MBP$ по свойству касательной. $\angle APB + \angle AEB = 180°$ - $\angle PAM$ - $\angle PBM + \angle AEB = 180° + (\angle AEM$ - $\angle PAM) + (\angle BEM$ - $\angle PBM) = 180°$, $AEBP$ вписан, следовательно, $\angle AEP = \angle PBA = \angle PEA$, то есть EP — симедиана в ΔAEB, а четырехугольник $AEBP$ гармонический, тогда $\angle PMA = \angle EMA = \angle DAM$, свойство гармонического четырехугольника и равнобокой трапеции. Из равенства углов $\angle PMA = \angle DAM$ можно сделать вывод, что $PM \parallel AD$.

Задача 6. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, BB_1 — его симедиана, луч BB_1 вторично пересекает описанную окружность Ω в точке L. Пусть H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC, а луч BH_B вторично пересекает Ω в точке T. Докажите, что точки H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности..