Оглавление

Введение…………………………………………..……………………………………………………………………………………..2  
Часть 1.Последовательности Соболя  
 Определение П0-сеток и ЛП0- последовательностей………………………………………………….3  
 Количественные характеристики равномерности………………………………………………………3  
 Определение Пt-сеток и ЛПt- последовательностей………………………………………………….4  
 Линейные разностные операторы в поле Z2…………………………………………………………….…5  
 Построение ЛПt-последовательностей……………………………………………………………………….5  
 О точности формулы для t……………………………………………………………………………………….….7  
 Дополнение про последовательности………………………………………………………………………..8  
 Многомерные задачи………………………………………………………………………………………….……...9  
 Дополнительная информация к построению ЛПt-последовательности (переход от одномерного к многомерному)…………………………………………………………………………………………...10  
 Еще три свойства Пt-сеток………………………………………………………………………………………….11  
Часть 2. (t,m,s)-сети и их свойства  
 (t,m,s)-сети………………………………………………………………………………………………………………....11  
 Сравнительный анализ………………………………………………………………………………………………14

Список используемой литературы………………………………………………………………………………………..15

Введение

В этой работе мы рассмотрим точки равномерно заполняющие s-мерный куб. Рассмотрим решения предложенные Соболем, Фором и Нидерайтером для этой задачи. Познакомимся с ЛП0,ЛПt-послеовательностями, предложенными Соболем, с последовательностями Фора и (t,s)-последовательностями Нидерайтера. Рассмотрим, что в них общего, чем они отличаются и изучим их основные свойства.

***Часть 1.Последовательности Соболя***

***Определение П0-сеток и ЛП0- последовательностей***

def

Сетку, состоящую из 2ƴ точек, где ƴ – целое, назовем П0-сеткой, если каждому двоичному отрезку с длиной 1/m принадлежит одна точка сетки.

П0-сетки представляют собой очень хорошие сетки по равномерности расположения точек.

def

Двоичным участком последовательности x0,x1,…,xi,… называется множество членов xi с номерами i удовлетворяющими неравенству: k2b≤i<(k+1)2b. Последовательность {xi} назовем ЛП0- последовательностью, если любой её двоичный участок представляет собой П0-сетку. Само название расшифровывается как “Любой двоичный участок есть П0-сетка”.  
Оценка для равномерности имеет вид: φ∞(x0,x1,…,xm-1)=1, D(x0,x1,…,xm-1)≤L.

**Количественные характеристики равномерности**

1) Отклонение(discrepancy).

Фиксируем точки x0,x1,…,xm-1, принадлежащие отрезку [0,1], которые для краткости будем называть сеткой. Обозначим через Sm(x) кол-во точек сетки, принадлежащих отрезку [0,x). Иначе говоря, Sm(x)= Sm(l), l=[0,x). Отклонением сетки x0,x1,…,xm-1 называется:

D(x0,…,xm-1)=sup | Sm(x)-mx|.   
 0≤x≤1  
Проведя ряд преобразований согласно книге Соболя мы можем используя данную формулу получить следующую : (формула Нидеррайтера,1972).

2)Неравномерность

Как и в случае с отклонением мы рассматриваем сетку x0,x1,…,xm-1, принадлежащие отрезку [0,1]. Выбираем произвольный двоичный отрезок lk. При идеально равномерном расположении точек сетки в левую и правую половины lk должно попасть одинаковое количество этих точек. Поэтому величина | Sm(l-) –Sm(l+) | в какой-то мере характеризует неравномерность расположения точек сетки в lk.  
def  
 Неравномерностью сетки x0,x1,…,xm-1 называется целое число

φ(x0,x1,…,xm-1)=sup| Sm(lk-) –Sm(lk+) |   
 k   
Верхняя грань берется по всем двоичным отрезкам.

3)Разброс(dispersion of points)

def  
 Разбросом точек x0,x1,…,xm-1 называется величина.

В работах Соболя приводились доказательства того, что величина неравномерности любой П0-секти равно 1, а величина отклонения меньше или равна единице. Также все ЛП0-последовательности имеют порядок роста D=O(ln m).

***Определение Пt-сеток и ЛПt- последовательностей***

def   
 Последовательность точек P0,….,P1,…..,Pi,…..куба Кs назовем ЛПƬ-последовательностью, если каждый её двоичный участок содержащий не менее 2t+1 точек, представляет из себя Пt-сетку.

def

Сетка состоящая из 2ƴ точек куба Кs, называется ПƬ-сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду Пк с объемом ǀПкǀ=2ƴ-t принадлежит 2t точек сетки. При этом всегда предполагается, что ƴ>t. И если некоторая Пt-секта не является Пt-1 сектой, то тогда значение t для неё точное.

Проекция ЛПt-последовательности на какую-либо координатную грань Кt1,….,tc куба Кs образует c-мерную ЛПt-последовательность.

Далее имеет место быть важная теорема: для любого произвольного участка ЛПt-последовательности в Кs справедлива следующая оценка

. Это оценка неравномерности Пt-сетки.   
Как следствие из доказательства этой теоремы мы получаем, что участка ЛПt-последовательность равномерна распределена в Кs.

***Линейные разностные операторы в поле Z2***

Рассмотрим линейное разностное уравнение m-ого порядка с постоянными коэффициентами.

(\*)Lui=0, где разностный оператор L определен выражением:  
(\*\*)Lui=ui+p+ap-1ui+p-1+…+a1ui+1+ui , все ui и aj принадлежат Z2

Возьмем нетривиальное решение нашего уравнения и рассмотрим группы значений (u1,…,up),(u2,…,up+1),….Всего 2p -1 нетривиальных групп содержащих нули и единицы, значит найдется такая группа (uʷ+1,…,uʷ+m), совпадающая с (u1,…,up). В силу нашего уравнения все значения uʷ+I =ui. Таким образом получается,что наше решение является периодическим с минимальным периодом w1≤2p -1.

def

Уравнение (\*) и оператор (\*\*) называют моноциклическими, если уравнение (\*) имеет решение с наименьшим периодом w=2p -1.

***Построение ЛПƬ- последовательностей***

1)Построение ДР-последовательностей  
Рассмотрим произвольный моноциклический оператор в поле Z2, порядок которого равен m. Определим направляющие числа V1,…Vi,…  из уравнения  
Vi+p\*ap-1Vi+p-1\*…\*a1Vi+1\*Vi=2p-1Vi (\*)

Иными словами:LVi=2p-1Vi

Наложим условия на начальные значения Vi. Если в двоичной системе   


то все vii=1 , а при j>I vij=0.

Др-последовательность {r(i)} с такими направляющими числами {V(i)} принадлежит оператору L.Уравнение (\*) эквивалентно системе уравнений в поле Z2,определяющих значение vij в каждом из двоичных разрядов:  
Lvij=0, если 1≤j≤p  
Lvij=vi,j-p, если p<j<∞  
Рассмотрим двунаправленную матрицу ДР-последовательности, принадлежащей оператору L. С учетом выбора Vi матрицу можно представить в таком виде:

1 0 …0 0 …  
v21 1 …0 0 …  
v31 v32 …0 0 …

… … … … …

Vp1 vp1 …1 0

Vp+1,1 Vp+1,2 … Vp+1,p+1 …  
… … … … …

Теорема  
В направляющей матрице (vij) все vij =1, а при j>i все vij=0.

Следствие  
ДР-последовательность, принадлежащая любому моноциклическому оператору, есть одномерная ЛП0-последоательность  
2)Построение ЛПt-последовательностей  
Теорема  
1)Пусть L1,…,Ls – различные моноциклические операторы, порядки которых равны p1,…,ps.  
Обозначим {p(k)(i)} какую-нибудь ДР-последовательность, принадлежащую оператору Lk. Последовательность точек P1,…,Pi,… с координатами Pi=(p(1)(i),…,p(n)(i)) есть ЛПt-последовательность со значением. (~)  
2)Если все условия этой теоремы выполняются, тогда последовательность точек Q1,…,Qi,… с координатами Pi=(p(i),p(1)(i),…,p(n)(i)) есть ЛПt-последовательность в Ks+1 со значением t,определенным суммой теоремы.

Доказательство(схема):  
Т.к. {p(i)} представляет собой ДР-последовательность с единичной направляющей матрицей , то мы придем к матрице, аналогичной той, что мы получаем в 1 пункте доказательства теоремы.

1 0 . . . 0 v11(1) v12(1) . . . v1µn(n)   
0 1 . . . 0 v21(1) v22(1) . . . v2µn (n)   
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  
0 0 . . . 1 vµ01 (1) vµ02 (1). . . vµ0µn (n)   
0 0 . . . 0 vµ0+1,1 (1) vµ0+1,2 (1) . . .vµ0+1,µn (n). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .   
0 0 . . . 0 vƴ1(1) vƴ2(1) vƴµn (n)   
Далее повторяя аналогичные рассуждения с док-вом первой части теоремы мы получаем, что ранг нашей матрицы будет равен:   


***О точности формулы***  ***для t***

Теорема(‘)  
Предположим, что все условия пункта 1) предыдущей теоремы выполнены. Обозначим  **δn** = det ǀak,g ǀ1n. Если мы можем выбрать ak,g такие, что любой из периодов wk=2pk -1 (1 ≤k ≤s), был взаимно простым с **δn** , то значение t , определяемое нашей формулой будет точным для последовательности {Pi} в Ks.  
Теперь поговорим о наименьшим значении t для.  
Затронем ключевой вопрос для тмс-сетей. А как собственно нам выбирать точки? То есть мы их распределяем по гиперкубу, далее получаем последовательность точек и хотим понять, как же нам выбрать наилучшие точки.   
На самом дело обстоит следующим образом, чем меньше наше t тем лучше будут распределены точки ЛПt-последовательности. По этой причине стоит рассмотреть точки, получающиеся при использовании моноциклических операторов возможно низких порядков.  
Введем обозначение ns-количество моноциклических операторов, порядки которых m≤s.. Если ns≤n≤ns+1, то наименьшее tn+1, которые мы сможем получить из формулы (~) равно:



или   
Приведем некоторые значения для tn+1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| tn+1 | 0 | 1 | 3 | 5 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 |

Теорема  
Для наименьшего значения t=ts+1, в формуле при n->∞ справедлива следующая оценка : ts+1≤m[log2s+ log2 log2n+log2 log2 log2s +O(1)].  
В тоже время ts+1≥С1 log2s/ log2 log2s, где С1>0

***Дополнение про последовательности***

def

Последовательность ван дер Корпута имеет вид: p(i)=e12-1+e22-2+…+em2-m. Она представляет собой простейшую ДР-последовательность, где направляющие числа Vs=2-s

Также вводится более грубая оценка для параметра отклонения , которая оказывается лучше упомянутой ранее для ЛП0-последовательности для некоторых значений m.

t-кол-во единиц в двоичной записи числа



Свойство 1:

Любой участок последовательности {p(i)}, содержащий 2k точек (k=1,2,….), представляет собой П0-сетку.

Свойство 2:

Для любого участка i’≤i≤I’’ последовательности {p(i)} неравномерность равна единице,т.е. φ∞( p(I’),…, p(I’’))=1

Следует отметить, что такими свойствами обладает не каждая ЛП0-последовательность двоично рационального типа.

Отметим еще одну особую последовательность {q(i)}, которая называется ДР-последовательностью, если направляющая матрица (vsj) такова, что (vsj)=csj(mod2).

Отдельного внимания заслуживает тот факт, что рассмотренные нами последовательности являются симметричными в следующем смысле p(k)=q(i); p(i)=q(k).

Еще немало важным фактом является то, что последовательность с декартовыми координатами (p(i), q(i)) представляет собой двумерную ЛП0- последовательность. Что очевидным образом наводит на мысль, что с ростом размерности пространства, ЛПt- последовательность будет приобретать все большее количество координат, которые содержат используемые последовательности. В двумерном случает это координаты из {p(i)} и {q(i)}.

***Многомерные задачи***

Все необходимое для многомерных задач было задано в самом начале, потому пробежимся быстро по свойствам и недостающим понятиям.

1)Отклонение

Отклонением сетки P0,P1,…,Pm-1 называется число

D(P0,P1,…,Pm-1)=sup | Sm(πp)-mVp|.

Лучшими считаются оценки для н-мерной сетки 

Оценка н-мерной последовательности 

2)Неравномерность

Неравномерностью сетки P0,P1,…,Pm-1 называется наибольшая верхняя грань

φ∞(P0,P1,…,Pm-1)=max sup| Sm(Vk+) –Sm(Vk-) |   
 β k

Оценка через D



3)Разброс

Определяется аналогично с одномерным случаем.

**Дополнительная информация к построению ЛПt-последовательности (переход от одномерного к многомерному)**

Естественно пытаться строить ЛПt-последовательности так, чтобы каждая её координата представляла одномерную ЛП0-последовательность. Причем просто их построить не так уж и трудно. Куда труднее их построить так, чтобы они были независимыми. Для этой цели используются линейные разностные операторы. О которых мы упоминали ранее.

П0-сетки. По аналогии с одномерным случаем назовем П0-сеткой сетку, состоящую из 2ƴ точек куба Кs, если каждому двоичному πk с объемом 1/m принадлежит одна точка сетки. В одномерном случает построение П0-сеток было простой задачей, ибо существует всего N двоичных отрезков длиной 1/m. Однако с увеличением s количество двоичных параллелепипедов с объемом 1/m быстро возрастает и расположить m точек так, чтобы они образовывали П0-сетку довольно проблематично.

Двухмерные сетки образуют точки с координатами (i/m,p(i)) при 0≤i≤m-1. Трехмерные – с координатами (i/m,p(i),q(i)) при 0≤i≤m-1. m=2ƴ , p(i) и q(i) –последовательности, которые мы определяли ранее. Справедливость сказанного подтверждает теорема о построении Пt-сеток в Ks+1 c помощью ЛПt-последовательностей изKn.  
 Однако переход к четырехмерному случаю оказался неожиданно трудным и завершилось это доказательством утверждения, что в K4 невозможно построить П0-сетку, содержащую s≥4 точек. По этой причине пришлось ослабить требования к распределению точек сетки по двоичным параллелепипедам, и ввести более общее определение.

def

Сетка, состоящая из m=2ƴ точек куба Ks, называется Пt-сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду с объемом 2t/m принадлежит 2t точек сетки.

Добавим еще немного информации по поводу точности распределения точек по кубу. ПƬ-сетки, содержащие сколько угодно большое количество m=2ƴ точек, существует в пространствах любой размерности n, но значение t приходится увеличивать с ростом s. Обозначим через t(s) наименьшее значение t такое, что в Ks существуют ПƬ-сетки, содержащие сколь угодно большие количества точек m=2ƴ. Точные значения известны только для низших размерностей:

t(1)= t(2)= t(3)=0, t(4)=1

Для любых ПƬ-сеток в Ks справедливы оценки.

Таким образом при построении гиперкубов все большей размерности мы наблюдаем явление “антипроекции”. Для одномерной задачи мы рассматриваем двоичные отрезки. Переходя далее к двумерному случаю (квадрат) ,мы проецируем квадрат на какую либо ось и получаем отрезок. Далее переходим к третьему измерению. Тут у нас уже в качестве проекции куба на какую либо ось будет выступать квадрат, в четырех мерном случае это уже будет куб и. т. д. Мы видим, что при переходе к гиперкубу все большей размерности, то, что у нас выступало в роли двоичного отрезка “набирает” размерность. В итоге мы рассматриваем n-мерные параллелепипеды. Таким образом мы идем как бы в обратном проекции направлении. Очевидно, что в одномерном случае у нас имелось m двоичных отрезков длины 1/m. С ростом s кол-во двоичных параллелепипедов растет и расположить m точек так, чтобы они образовывали П0-сетки становится тяжелой задачей. Именно по этому, как и говорилось ранее, пришлось вводить более общее понятие - ПƬ-сеток, где двоичному параллелепипеду принадлежит уже не 1,а 2t точек.

**Еще три свойства Пt-сеток**

1)Проекция точек Пt-сетки на какую-нибудь s-мерную грань Kβ куба Ks, где 1≤s≤n-1, образуют s-мерную Пt-сетку. Для этой s-мерной сетки значение Ƭ не превосходит этого значения для исходной сетки и может оказаться строго меньше.

2)В Ks любой ПƬ-сетки справедлива оценка φ∞≤2s-1+t.

3)При n=1,2,3 и N≥2s-1 для любой П0-сетки в Kn нер-ва предыдущего свойства обращается в равенство, то есть φ∞=2s-1+t.

Из первого свойства вытекает, что проекции точек ЛПt-последовательности на любую s-мерную грань Kβ образуют s-мерную ЛПt-последовательность ( с тем же или даже меньшим параметром tƬƬ).

***Часть 2. (t,m,s)-сети и их свойства***

***(t,m,s)-сети***

Для данного измерения s≥1 и целого b≥2 и неотрицательного целого числа к, b-адический s-мерный элементарный интервал порядка к имеет вид . Где d1,…,ds из N0 и их сумма равна к и 0≤Ai<bdi для 1≤i≤s.

def  
  
 Для измерения s≥1 и целого b≥2, положительное целое m и целое t (0≤t≤m), множество точек P из bm из отрезка [0,1)s называется (t,m,s)- сетью по основанию b, если множество точек P удовлетворяет всем b-адическим s-мерным элементарным интервалам порядка m-t.

def  
  
 (t,m,s) -сетью по основанию b с t ≥ 1 называется строгой (t, m, s) -сетью по основанию b, если она не является (t- 1, m, s) -сетью по основанию b. Кроме того, (0, m, s) -сеть по основанию b называется строгой по определению.

Свойства:

1)То, что мн-во P по основанию b есть (t,m,s)-сеть означает, что для любого интервала   
 с суммой di равной m-t , с объемом b-m+t содержит ровно bt точек из P.

2) Так как для каждого к ≥ 1 каждый b-адический s-мерный элементарный интервал порядка к - 1 (объемом b-m+t) является объединением b непересекающихся b-адических s-мерных элементарных интервалов порядка к, каждая (t,m,s)-сеть на базе b с t≤m-1 также является (t+ 1, m, s) -сетью по основанию b.

3) Каждая точка задает bm точек в [0, 1)s и является (t, m, s) -сетью по основанию b.Состояние то в том, что интервал J = [0, 1)s содержит bm точек множества, которое является тривиальным.

4)Не имеет смысла, определять понятие (m, m, s) -сетей по основанию b для отрицательного t, так как множество bm точек не может быть верным по отношению к интервалу объем меньше, чем b-m.

5) Мы называем t параметром качества (t, m, s) -сети.

Теорема( о параметре качества)

Для 1 ≤ j ≤ r пусть Pj (tj , mj , s)-сеть по основанию b, с m1,...,rr таких, что bm1 +···+ bmr = bm для некоторого целого m. Тогда произведение P := P1 ∪ ... ∪ Pr is a (t, m, s)-сеть по основанию b с

t = m − min (mj – tj )

1≤j≤r

Утверждение

A (0, m, s)-сеть по основанию 2 не может существовать если m ≥ 2 and s ≥ 4.

Но вопросом особой важности является вопрос о существовании (0, m, 3)-сети по основанию 2 для любого m≥2. Потому что именно этим вопросом занимался Соболь и в некоторой степени Фор.

Но мы вернемся к этому позже. Сейчас необходимо прежде всего ввести определение последовательностей по аналогии с теми, что вводил Соболь. Для ПƬ-сеток было введено определение ЛПƬ-последовательности. Введем аналогичным образом на основании (t,m,s)-сетей определение (t,s)- последовательности. В дальнейшим мы убедимся, что ЛПƬ-последовательность, это особый случай (t,s)- последовательности.То же самое касается и тех последовательностей, что вводил Фор.

def

Для данного измерения s ≥ 1, целого основания b ≥ 2 и неотрицательного целого t, a последовательность (x0, x1,...) точек из [0, 1)s называется (t,s)- последовательностью по основанию b если для всех целых m>t и k ≥ 0, множество точек состоит из точек xkbm ,..., xkbm+bm−1 формирует (t, m, s)-сеть по основанию b.

def

A (t,s)-последовательность по основанию b с t ≥ 1 называется точной (t,s)- последовательностью по основанию b если не существует a (t − 1, s)-последовательности по основанию b. (0, s)-последовательность точная по определению.

def

Для данного измерения s ≥ 1, целого основания b ≥ 2, функция T : N0 → N0 с T(m) ≤ m для всех m ∈ N0, последовательность (x0, x1,...) точек из [0, 1)s называется (T, s)-последовательностью по основанию b если для всех целым m ≥ 0 и k ≥ 0, множество точек состоит из t.

def

(T, s)-последовательность по основанию b называется точной (T, s)-последовательность по основанию b если для всех функций U : N0 → N0 с U(m) ≤ m для всех m ∈ N0 и с U(m) < T(m) что по крайней мере одно m ∈ N0, не будет (U, s)-последовательностью по основанию b.

Как мы можем видеть из приведенных определений, определение данное Соболем аналогично данному Нидерайтером с той поправкой, что основание b=2.

**Сравнительный анализ**

Теперь давайте рассмотрим последовательности, что описывали Соболь,Фор и Нидерайтер. Выше приводились основополагающие вещи для понимания деятельности Соболя и Нидерайтера. Касаемо Фора скажем лишь самое важное, без выкладок и какие-либо теорем.

Фор говорил о так называемых r-ичных ЛП0-последователностях. Отличие их от обычных ЛП0-последователностей в том, что мы рассматриваем r≥2 и получаем вместо двоичных r-ичные отрезки, получаемы путем деления [0,1] на ra равных частей. Последовательность что строил Фор представляют собой обобщение двоичной ЛП0-последователности в К2. Для построения используется бесконечная единичная матрица,а также матрица Паскаля С. В качестве направляющих матриц используются любые матрицы из группы .

Как результат. Мы получаем новые возможности для построения сеток. Для начальных участков любой r-ичной ЛП0-последователности справедлива оценка D=O(lnsm),а при m=ra мы можем получить более сильную оценку D=O(lns-1m). Но возникает вопрос что же тогда лучше? Касаемо последовательностей Соболя можно сказать, что они обладают дополнительными свойствами равномерности, которые хороши для небольших порядков. Что же о последовательностях Фора – они обладают хорошей ассимптотикой в формулах для отклонений. Этот вопрос далее еще развивал Холтон, но опустим это и перейдем непосредственно к Нидерайтеру.

Дополнительные свойства равномерности последовательности по Соболю:

1)Равномерность должна быть ассимптотически оптимальной

2)Равномерность расположения точек должна наблюдаться не только при m стремящимся в бесконечность, но уже и при малых m.

3)Алгоритм для получения точек с данными условиями должен быть максимально простым.

Нидерайтер дал более общее определение для всех последовательностей, что мы рассматриваем в пределах этой работы. И о последовательностях Соболя и Фора в рамках такого определения мы можем говорить, как о частных случаях. Куда более важно, так это свойства последовательностей Нидерайтера. Для них в сравнении с ЛПƬ-последовательностями ослабевают условия равномерности и доступна более сильная оценка отклонений.

Список литературы:

1. Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М., Наука 1969.
2. Kuipeps L., Niederreiter Y Uniform distribution of sequences. New York, Wiley,1974.
3. Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М., Наука, 1981
4. Соболь И.М., Статников Р.Б. Наилучшие решения – где их искать. М., Знание, 1982.
5. Joe Dick and Hriedrich Pillichshammer Digital nets and sequences
6. И.М. Соболь. Точки равномерно заполняющие многомерный куб. М., Знание 1985.