

Fouriertheorie



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Visual Computing

Winter Semester 2023-2024

Prof. Dr. A. Kuijper

Mathematical and Applied Visual Computing (MAVC)

Graphisch-Interaktive Systeme (GRIS)

Fraunhofer IGD

Fraunhoferstrasse 5

D - 64283 Darmstadt

E-Mail: office@gris.tu-darmstadt.de

<http://www.gris.tu-darmstadt.de>

<https://www.mavc.tu-darmstadt.de>

Semesterplan

| Datum | |
|----------------|---|
| 20. Okt | Einführung + Visual Computing |
| 27. Okt | Wahrnehmung |
| 03. Nov | Objekterkennung und Bayes |
| 10. Nov | Fourier Theorie |
| 17. Nov | Bilder |
| 24. Nov | Bildverarbeitung |
| 01. Dez | Grafikpipeline & Eingabemodalitäten & VR+AR |
| 08. Dez | Transformationen & 2D/3D Ausgabe |
| 15. Dez | 3D-Visualisierung |
| 12. Jan | X3D – 3D in HTML |
| 19. Jan | Informationsvisualisierung |
| 26. Jan | Farbe |
| 02. Feb | User Interfaces + Multimedia Retrieval |
| 11. Feb | Biometrie (?) |





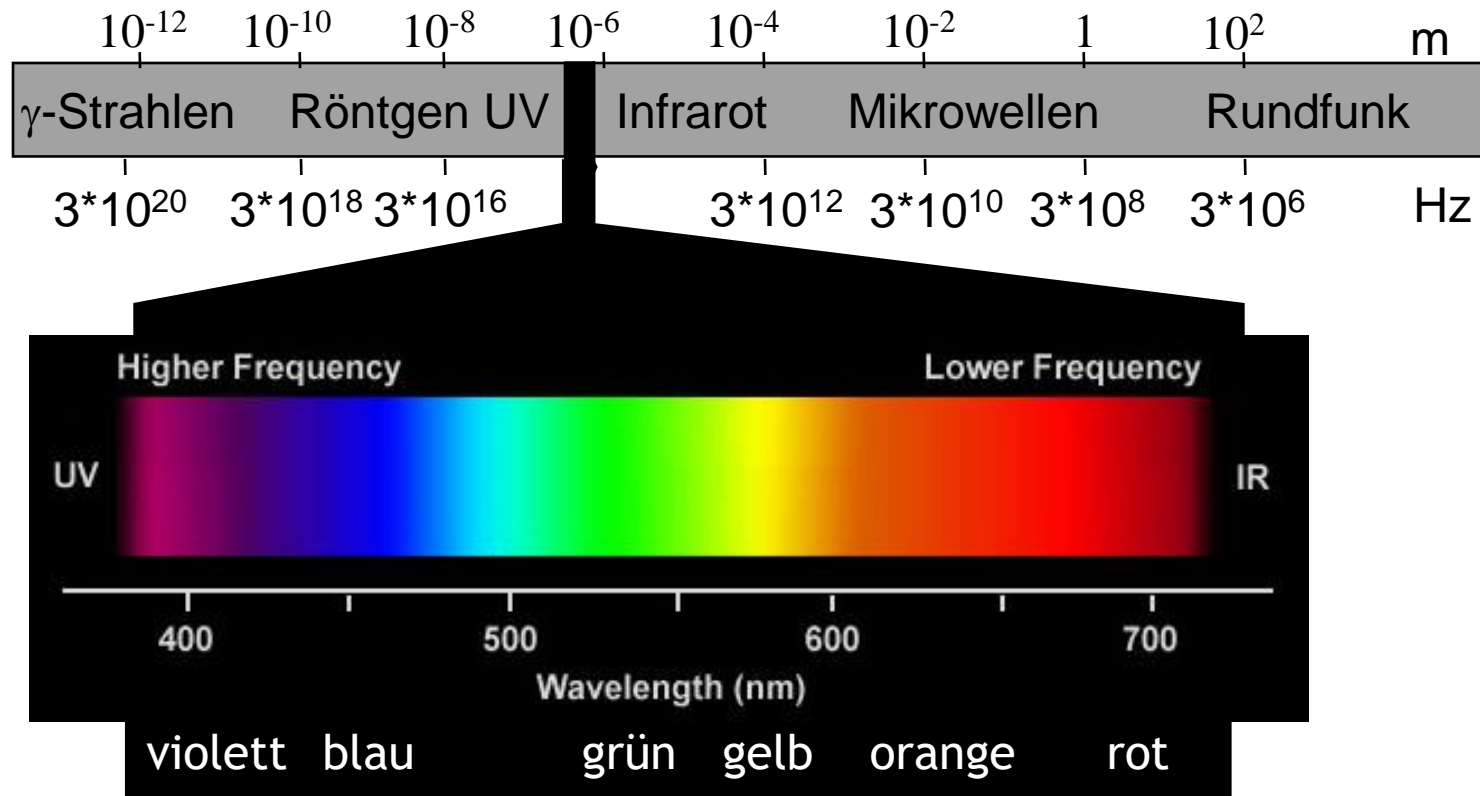
■ Motivation

- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Frequenz <-> Wellenlänge



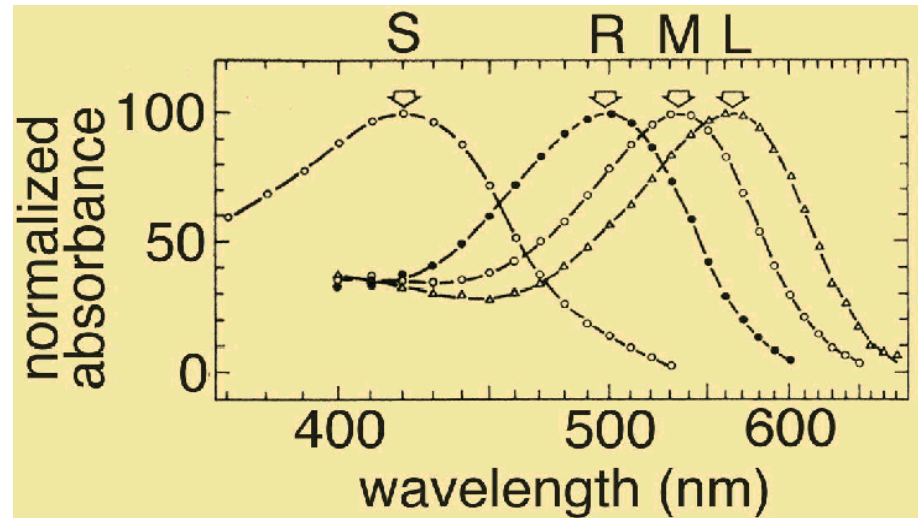
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



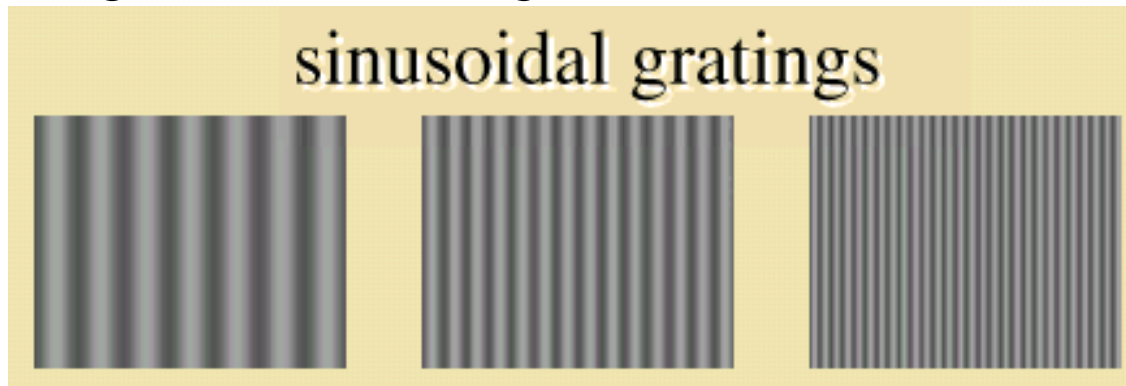
Fourierraum “=“ Frequenzraum <-> Ortsraum

Kontrastempfindlichkeit

- Auflösung des menschlichen Auges im **Frequenzraum**

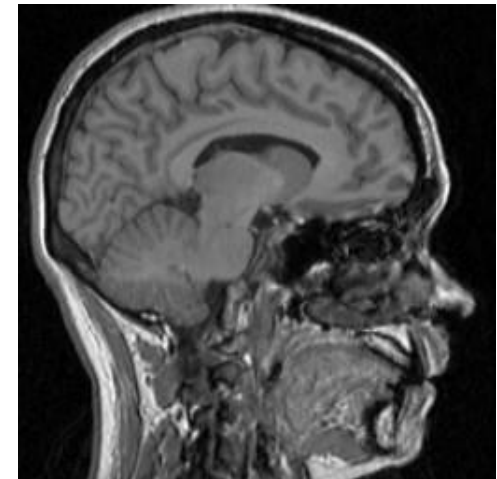
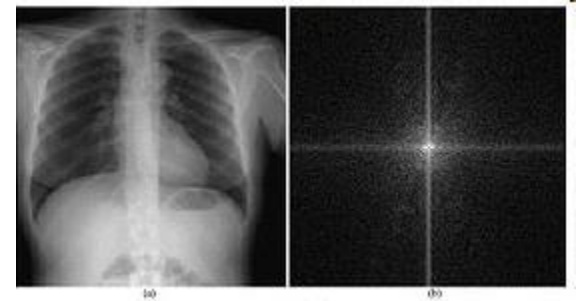


- Messung mit sinusförmigen Mustern veränderlicher Intensität

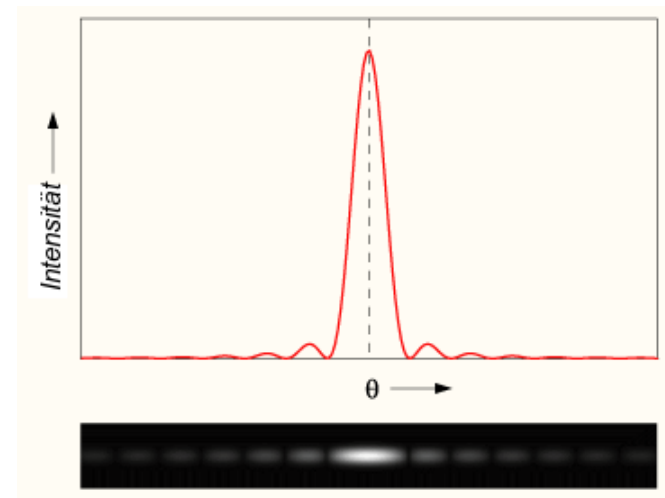
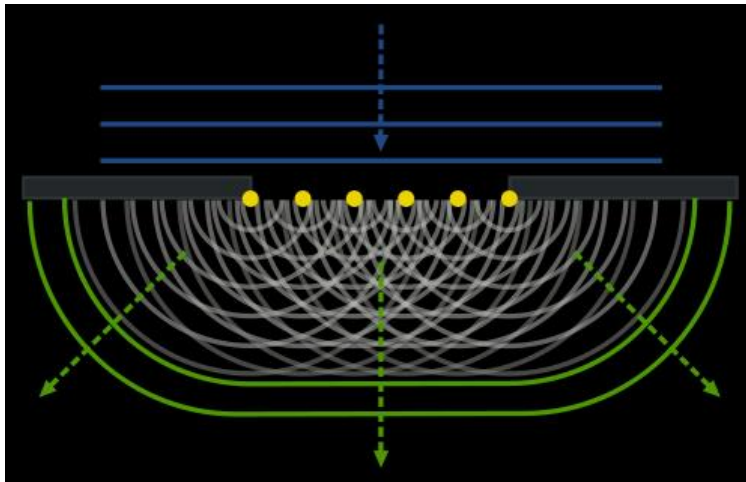


MRI

- MR scanner → *Frequenzmuster*



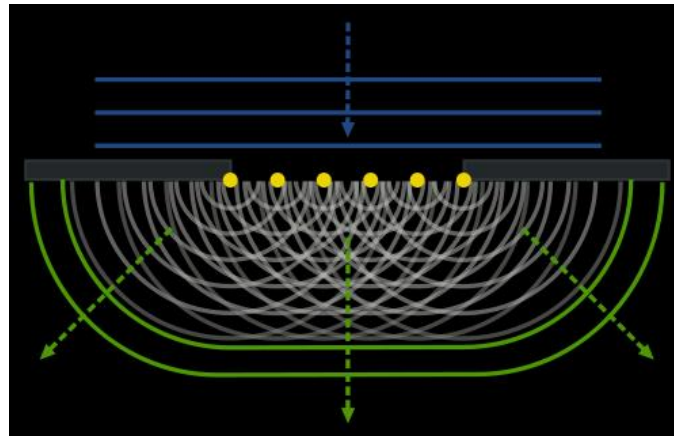
Beugung am einfachen Spalt



Spalt und Rechteckfunktion

- Spalt der Breite a

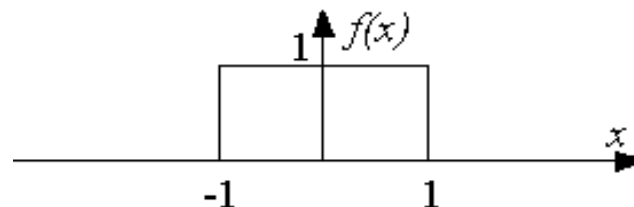
- Licht tritt im Bereich des Spalts komplett auf die andere Seite: 1
- Licht wird außerhalb des Spalts komplett geblockt: 0



- Mathematisch (für $a=2$ symmetrisch um den Ursprung):

- Rechteckfunktion

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Intensität und Amplitude

- Messung hinter dem Spalt:
 - Zeitlich gemittelte Intensität I
- Charakteristische Intensitätsverteilung der Form

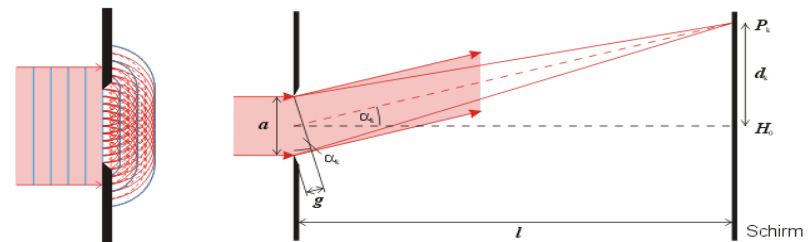
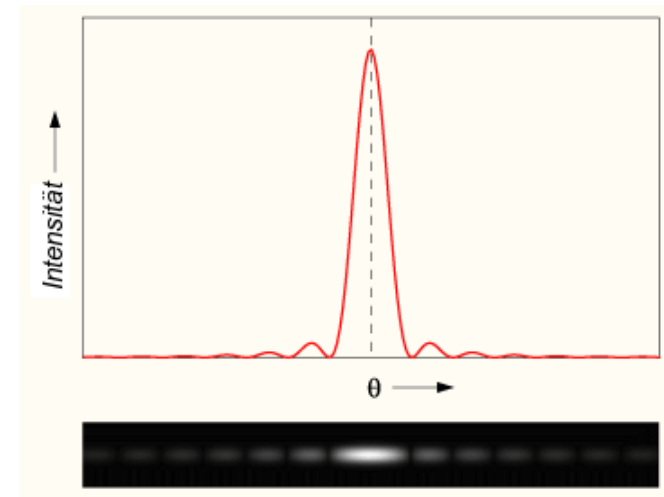
$$I(x) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

- sinc-Funktion

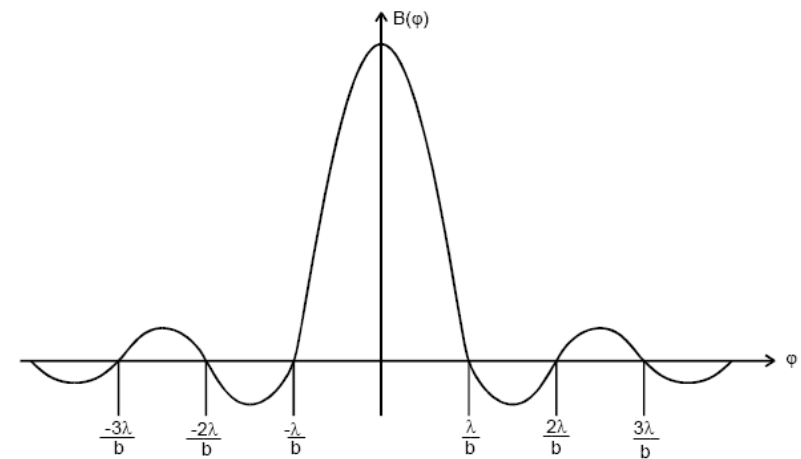
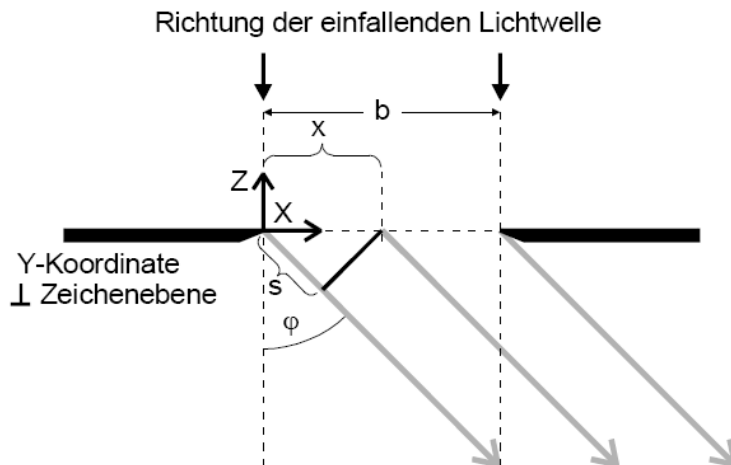
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

- Energie E und Amplitude B :

$$I \propto E^2 \propto B^2$$



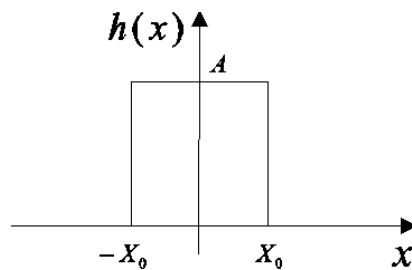
Amplitude und Gestalt



- [http://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_\(Physik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Beugung_(Physik))
- http://de.wikipedia.org/wiki/Optischer_Spalt
- <http://www.abi-physik.de/buch/wellen/beugung-am-einfachspalt/>
- Zusammenhang zwischen Gestalt des beugenden Objekts und Amplitudenfunktion

➔ **Fourier-Transformation** ⬅

Unser erstes Fourier-Transformationspaar



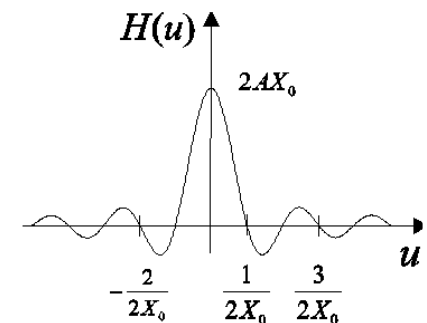
Rechteck-Funktion

FT

$$h(x) = \begin{cases} A, & |x| < X_0 \\ A/2, & |x| = X_0 \\ 0, & |x| > X_0 \end{cases}$$



$$H(u) = 2AX_0 \frac{\sin(2\pi X_0 u)}{2\pi X_0 u}$$

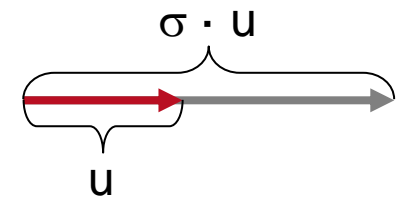
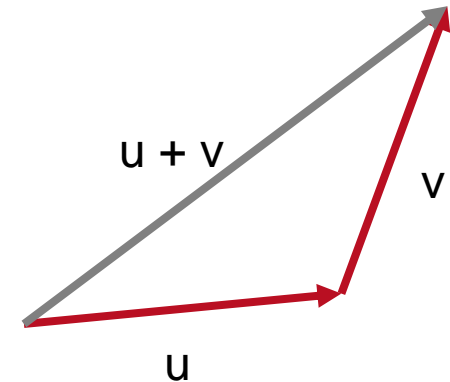


sinc-Funktion



- Motivation
- **Mathematische Grundlagen**
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

- Algebraische Struktur über einem Zahlenbereich
- Mögliche Operationen auf der Struktur
 - Addition der Elemente
 - Multiplikation der Elemente mit einem Skalar
 - Bilden Elemente des Vektorraums aufeinander ab
- Elemente des Raums: Vektoren



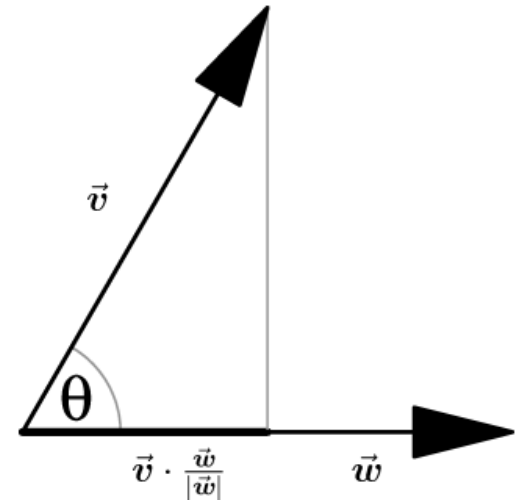
Beispiel: Euklidischer Vektorraum

- Vektorraum über den reellen Zahlen
- Vektoren repräsentieren Verschiebungen
- Es lassen sich Längen und Winkel messen
 - Rechtwinkliges, kartesisches Koordinatensystem
- Es ist ein Skalarprodukt definiert

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbf{R}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\angle(\vec{v}, \vec{w}))$$

- Euklidische Ebene (\mathbf{R}^2)
 - Alle Punkte lassen sich durch Ortsvektoren darstellen



- Jeder Satz von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraums kann als Basis für diesen Vektorraum verwendet werden.
- Linear unabhängig: $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| < \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$
- Beispiel \mathbf{R}^2 :
*Basisvektoren : $\vec{e}_1 = (1 \ 0)^T$ und $\vec{e}_2 = (0 \ 1)^T$
stehen orthogonal aufeinander : $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$
und sind damit linear unabhängig.*
*Alle $\vec{v} \in \mathbf{R}^2$ lassen sich als Linearkombination der
Basisvektoren darstellen*
$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$$

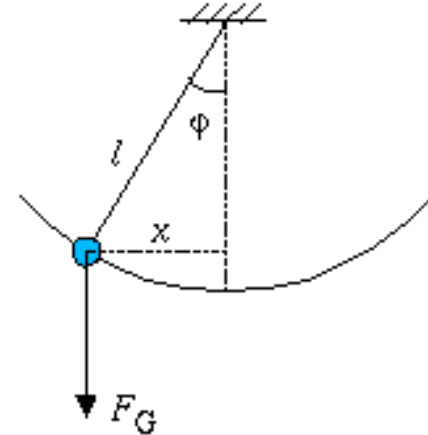
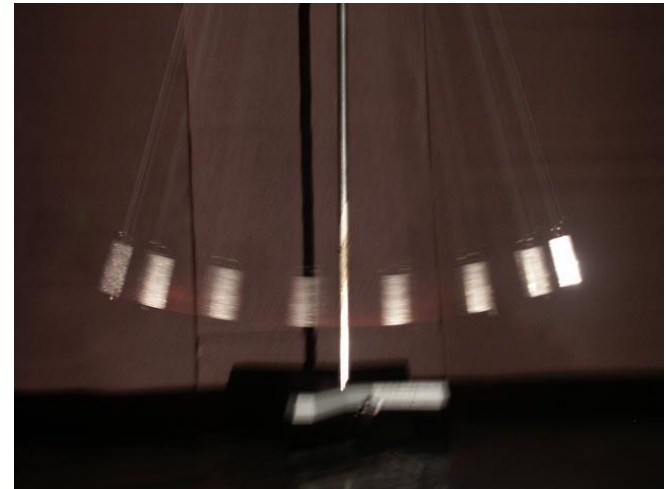
Immer kartesische Koordinaten verwenden?

- Fadenpendel
 - Kartesische Koordinaten

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

- Fadenlänge ist $l = \text{const.}$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} l(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$$



Polarkoordinaten

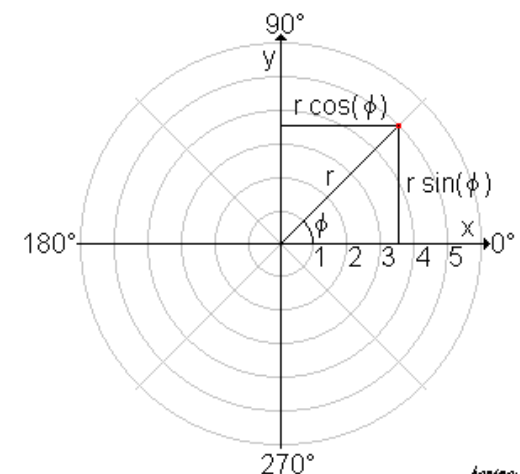
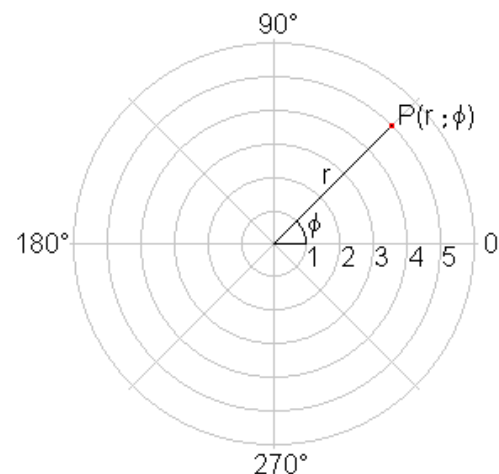
- Punkte in der Ebene werden beschrieben durch
 - Ihren Abstand r vom Ursprung
 - Den Winkel ϕ zwischen Richtungsvektor und x -Achse

→ Krummlinige
Koordinatentransformation

$$x(r, \phi) = r \cdot \cos(\phi),$$

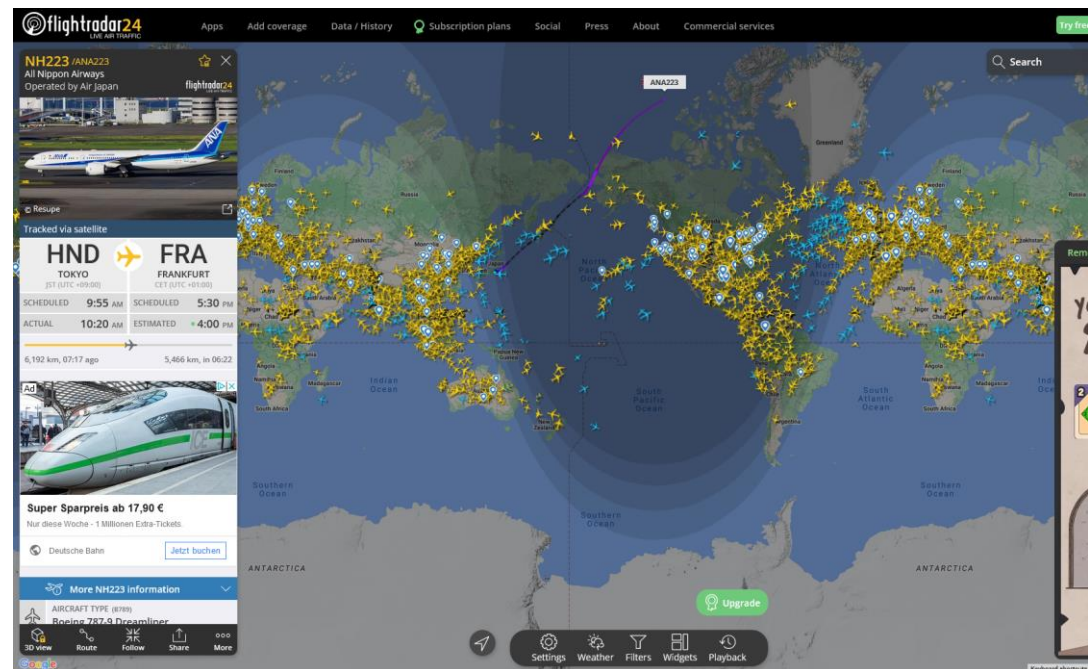
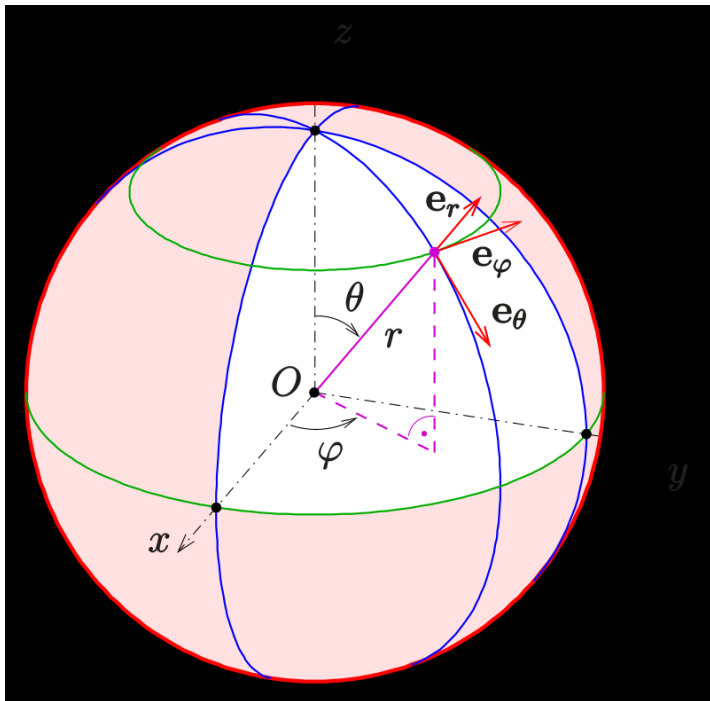
$$y(r, \phi) = r \cdot \sin(\phi).$$

- Zwei alternative Beschreibungen



3D: Kugelkoordinaten

- <https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>
- <https://www.flightradar24.com/ANA223/2e287f03>



- Die Elemente sind jetzt Funktionen → Funktionenräume
- Der Raum ist nicht mehr endlich-dimensional → unendlich-dimensionale Räume
- Frage: Lassen sich allgemeine Basisfunktionen finden, um (beliebige) Funktionen bezüglich dieser Basen darzustellen?
→ **Fourier-Theorie**
- Neue Perspektive für ein u.U. schwer zu lösendes Problem

Abschreckende Details: <https://de.wikipedia.org/wiki/Funktionenraum#Funktionalanalysis>



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- **Fourier-Reihe**
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

[Komplexe Zahlen]

- Zwei Komponenten: Real (a) und Imaginär (b) Teil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

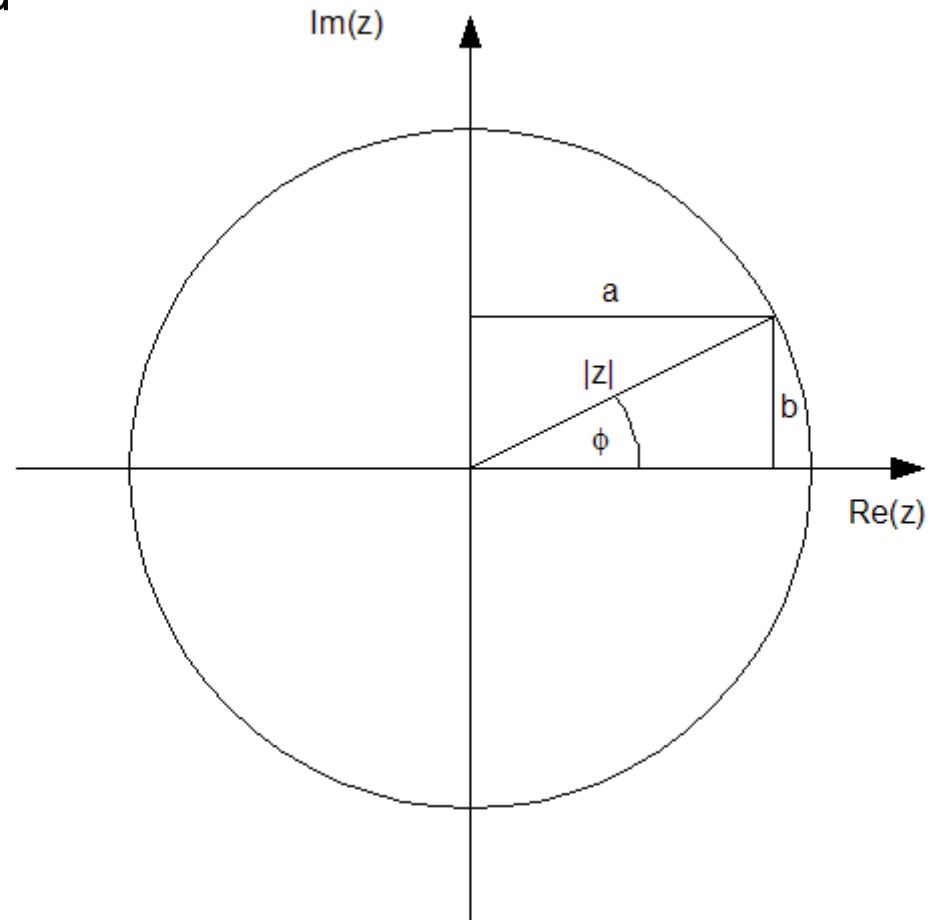
- Euler-Identität ($|z|=1!$)

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$$a = \cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

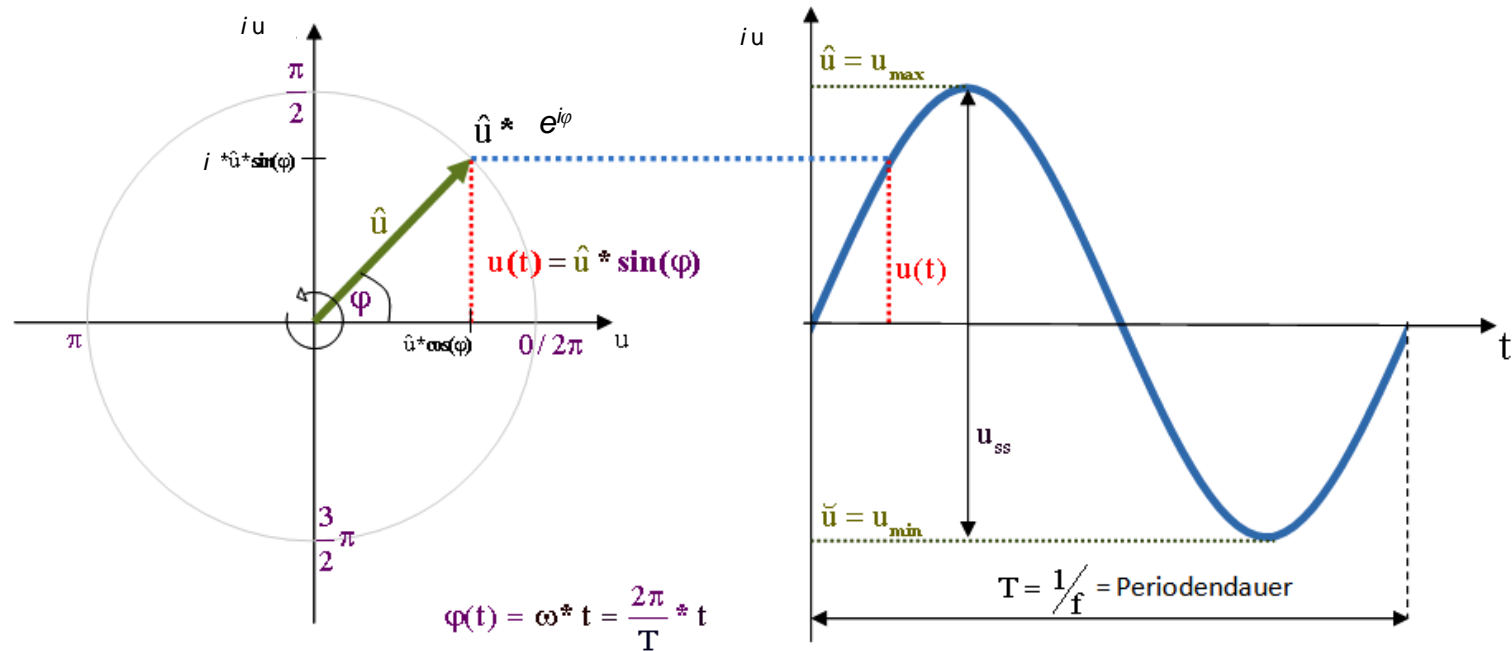
$$b = \sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

- Zwei Komponenten: „Radius“ $|z|$ und Winkel (Phase) ϕ



$$|z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot z^* = (a + ib) \cdot (a - ib)$$

Periodische Funktion



- Sinusförmige Schwingung:

$$f(t) = u_{max} \cdot e^{i\varphi(t)}$$

u_{max} : Amplitude, $\varphi(t)$: Phase

<https://www.matheretter.de/wiki/periodische-funktionen>

Jede Funktion, die die **Dirichlet-Bedingungen** erfüllt:

1. Die Anzahl der Unstetigkeiten innerhalb einer Periode ist endlich
2. Die Anzahl der Maxima und Minima innerhalb einer Periode ist endlich
3. Die Funktion ist in jeder Periode integrierbar (d.h., die Fläche unter dem Betrag der Funktion ist in jeder Periode endlich)

lässt sich als **Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen** darstellen.



2π -periodische Funktion

- Ist $f(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 2π , die die Bedingungen 1 - 3 erfüllt, so gilt

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Mit $\cos(0)=1$ und $\sin(0)=0$ vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

→ Fourier-Reihe ←

- a_n und b_n heißen *Fourier-Koeffizienten*

- Sei H der Raum aller periodischen reellen Funktion mit der Periodenlänge 2π , die die Bedingungen 1 - 3 erfüllen
- Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

ein Skalarprodukt auf H definiert.

➔ Vergleiche mit Vektorraum:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \in \mathbf{R}$$

- Die Funktionen

$$u_n(t) = \cos(nt)$$

$$v_n(t) = \sin(nt)$$

bilden orthogonale Funktionenfolgen in H .

- Vergleiche mit Orthogonalität für Vektoren:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = 0$$

Orthogonalität für Basisfunktionen

■ Es gilt:

$$\langle u_n, u_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

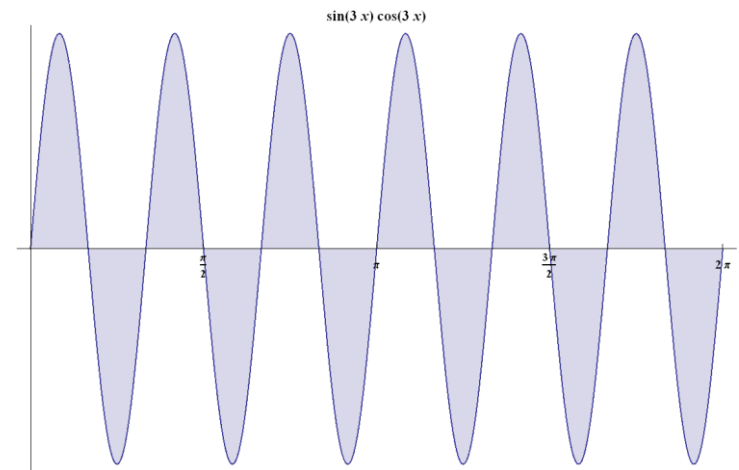
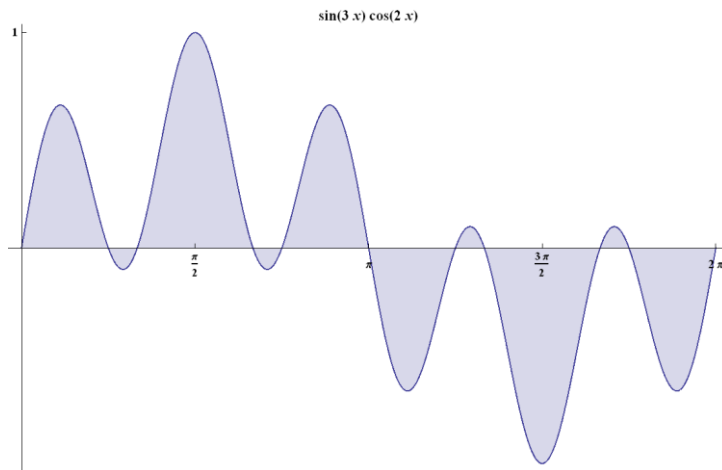
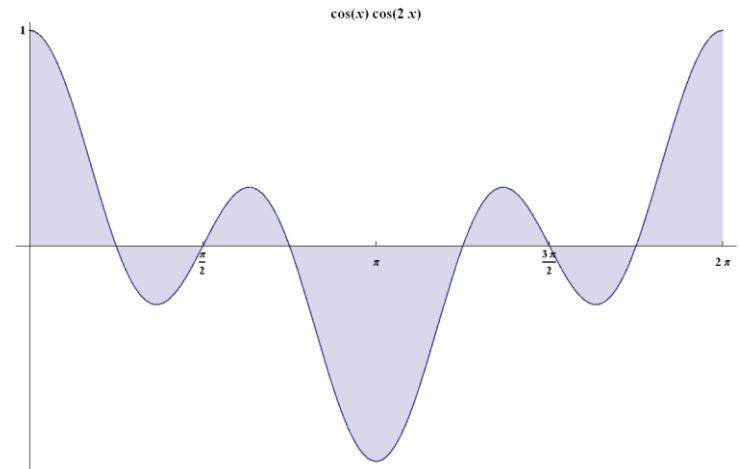
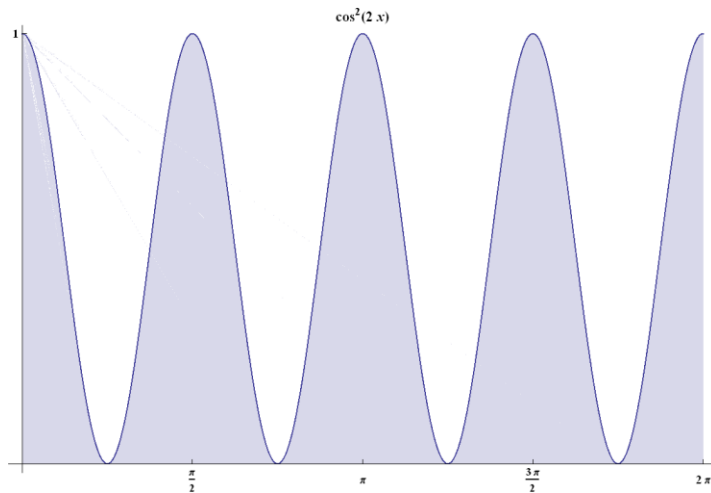
$$\langle v_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 0 & m = n = 0 \\ \pi & m = n > 0 \end{cases}$$

$$\langle u_n, v_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

Beispiele

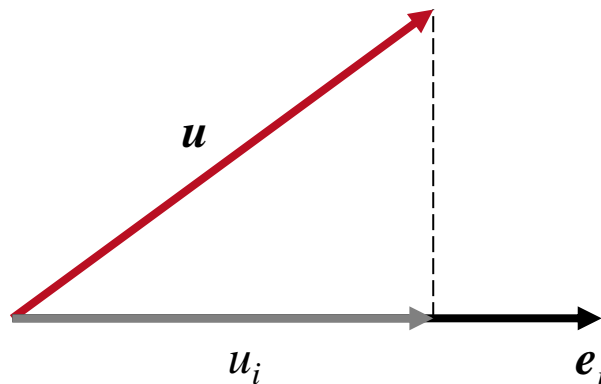


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



- Vergleiche mit Vektorraum
- Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis
 - ➔ Projektion auf die Basisvektoren mit Hilfe des Skalarprodukts

$$\langle \vec{u}, \vec{e}_i \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_i\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{e}_i)) = u_i$$



Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Damit erhalten wir

$$\langle f, u_0 \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_0 \right\rangle = \langle a_0 u_0, u_0 \rangle = a_0 2\pi$$

- und daraus

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \langle f, u_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(0x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Analog berechnen wir für $m > 0$

$$\langle f, u_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, u_m \right\rangle = \langle a_m u_m, u_m \rangle = a_m \pi$$

- und daraus

$$a_m = \frac{1}{\pi} \langle f, u_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

Berechnung der Koeffizienten a_i und b_i

- Analoge Rechnungen gelten für v_m , $m = 0, 1, 2, \dots$

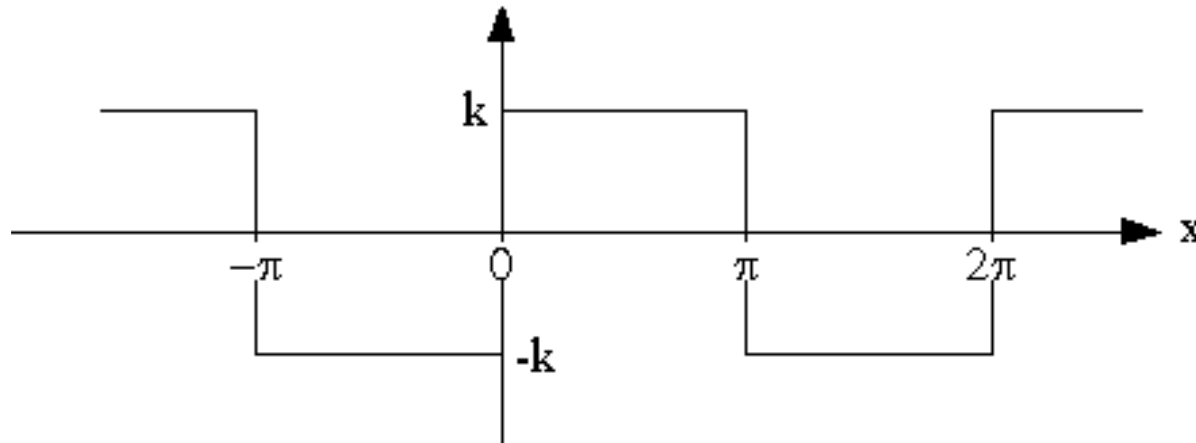
$$\langle f, v_m \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n + b_n v_n, v_m \right\rangle = \langle b_m v_m, v_m \rangle = b_m \pi$$

- und daraus

$$b_m = \frac{1}{\pi} \langle f, v_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

Rechteck-Schwingung

- Bestimmung der Fourier-Koeffizienten einer periodischen Rechteckfunktion.



$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{wenn } -\pi < x < 0 \\ k & \text{wenn } 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x) = f(x + 2\pi)$$

Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$a_0 = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$$

$$a_0 = 0 \quad \text{Trivial}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -k \cos(nx) \, dx + \int_0^{\pi} k \cos(nx) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

weil für $x = \dots, -\pi, 0, \pi, \dots$ stets gilt: $\sin(nx) = 0$

Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx$$

Rechteck-Schwingung

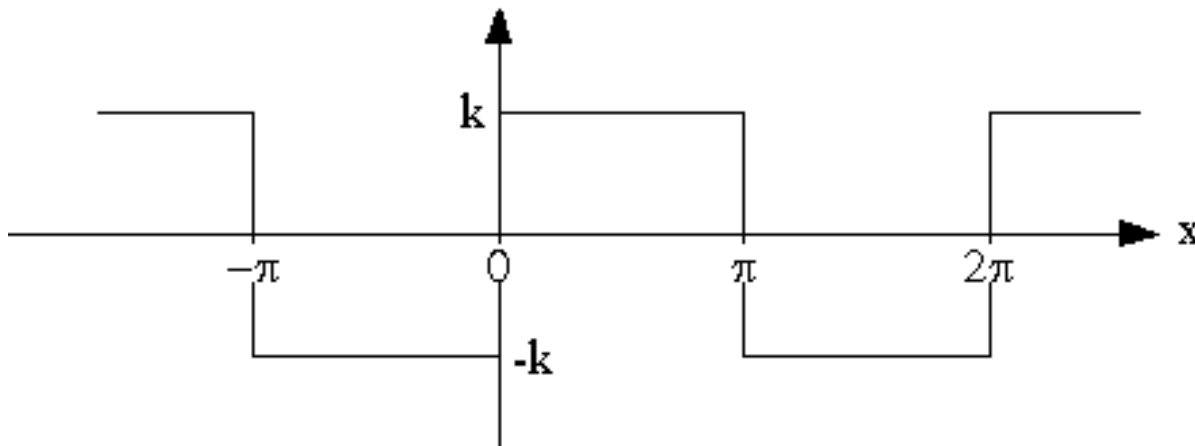


$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -k \sin(nx) \, dx + \int_0^{\pi} k \sin(nx) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{k}{n\pi} [(\cos(0) - \cos(-n\pi)) - (\cos(n\pi) - \cos(0))] \\ &= \frac{k}{n\pi} [(2 - 2 \cos(-n\pi))] = \frac{4k}{n\pi} \quad \text{für } n \text{ ungerade} \\ &= 0 \quad \text{für } n \text{ gerade} \end{aligned}$$

Rechteck-Schwingung

- Darstellung als Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

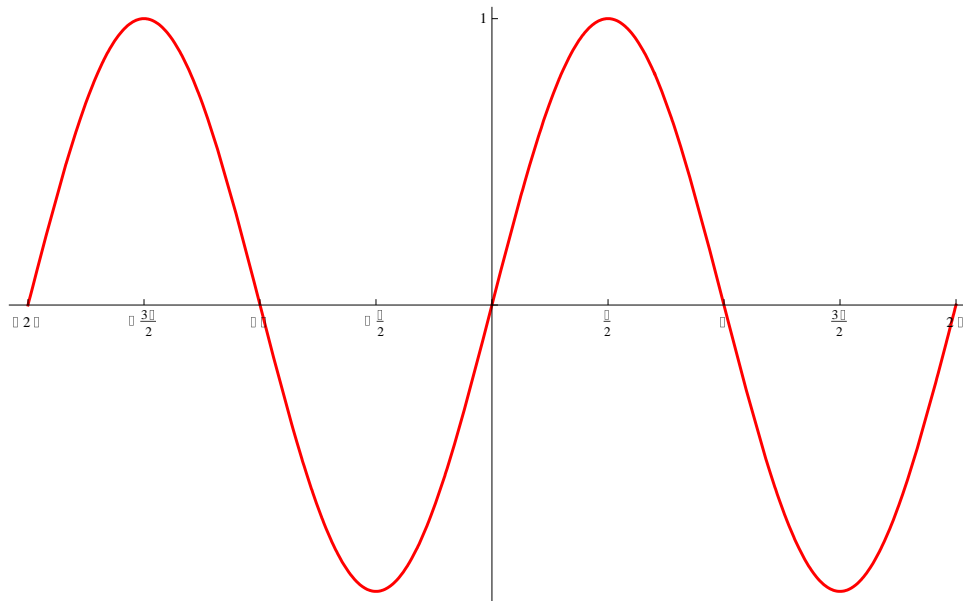


Rechteck-Schwingung



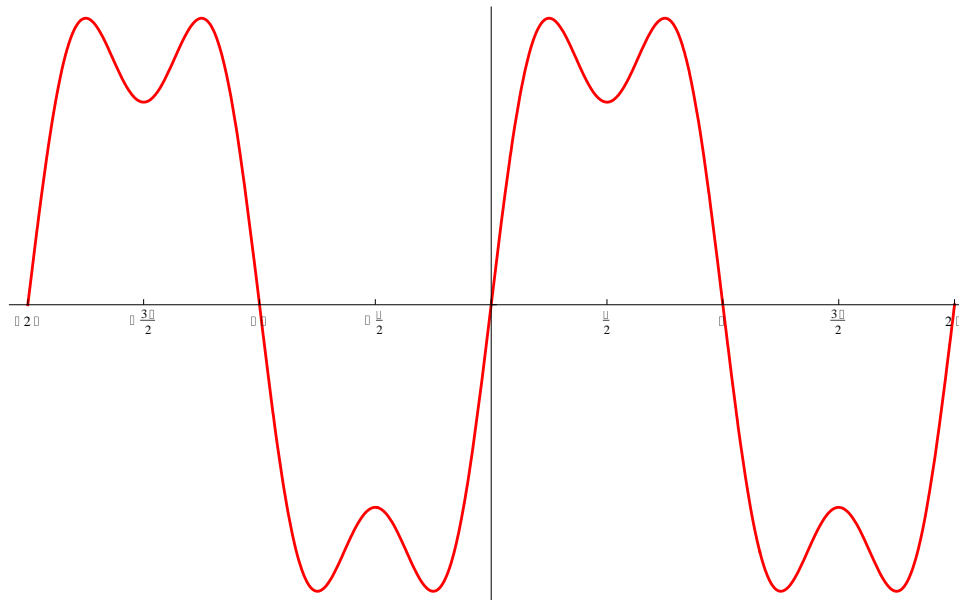
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sin x$$



Rechteck-Schwingung

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

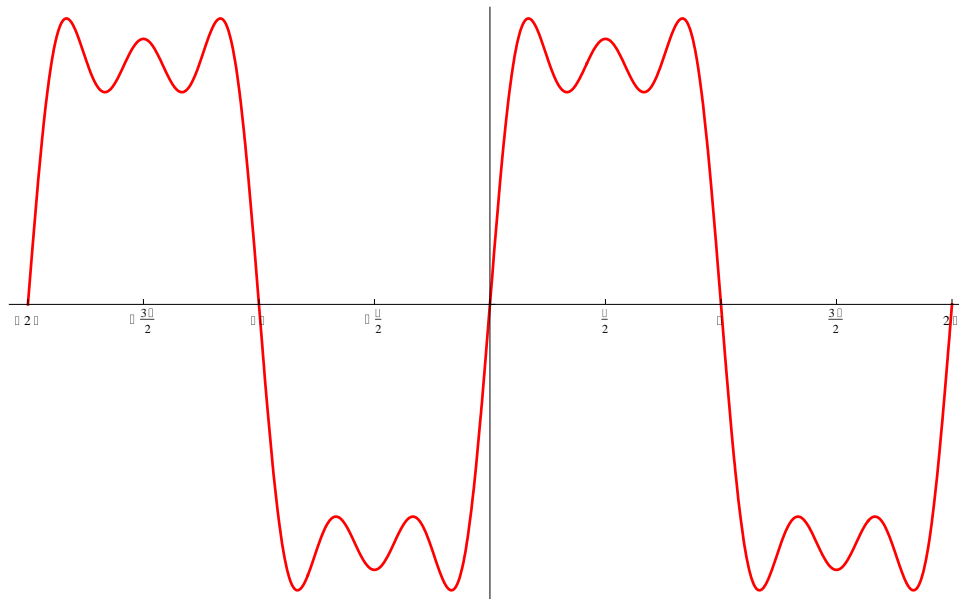


Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

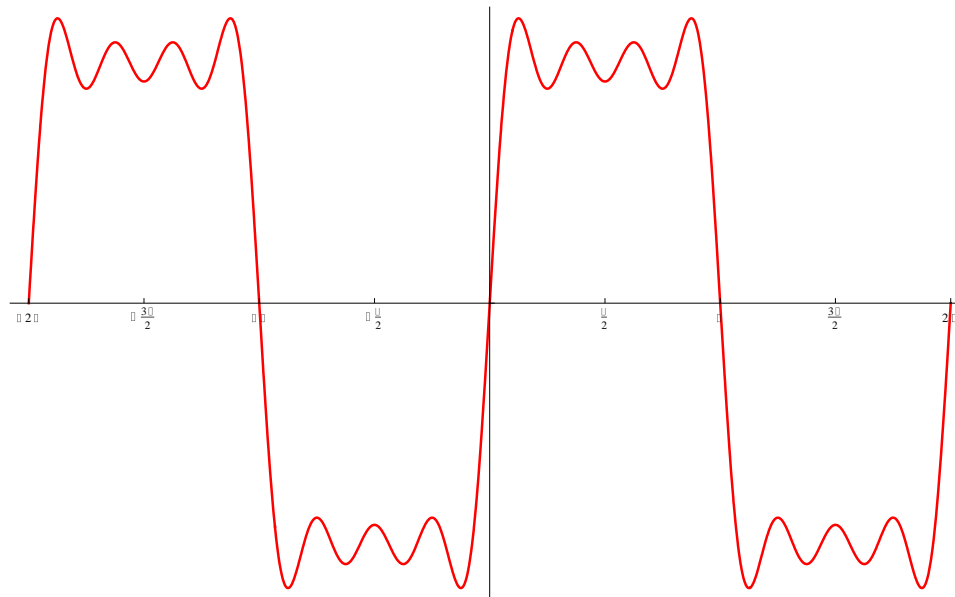
$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right)$$



Rechteck-Schwingung



$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x \right)$$

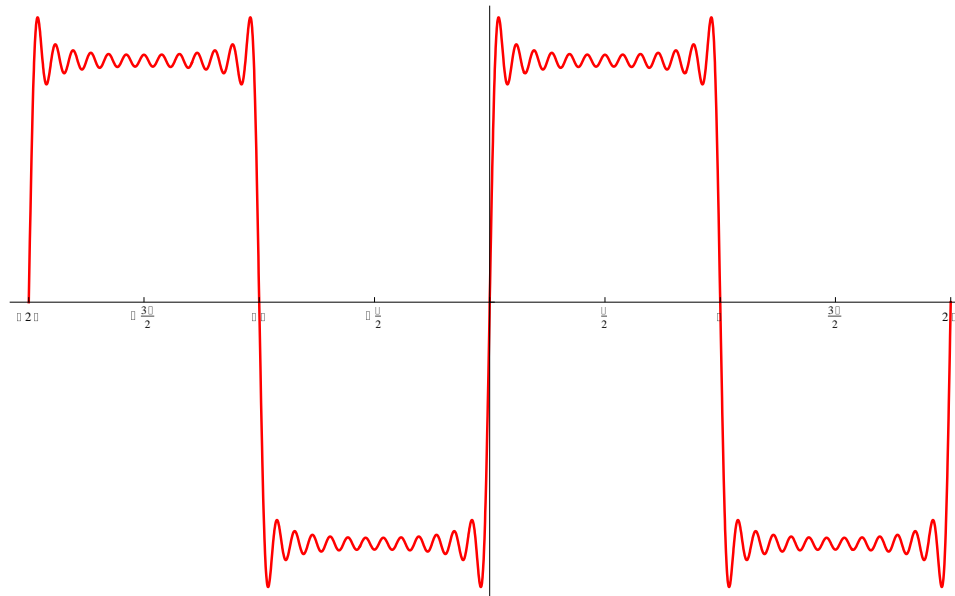


Rechteck-Schwingung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

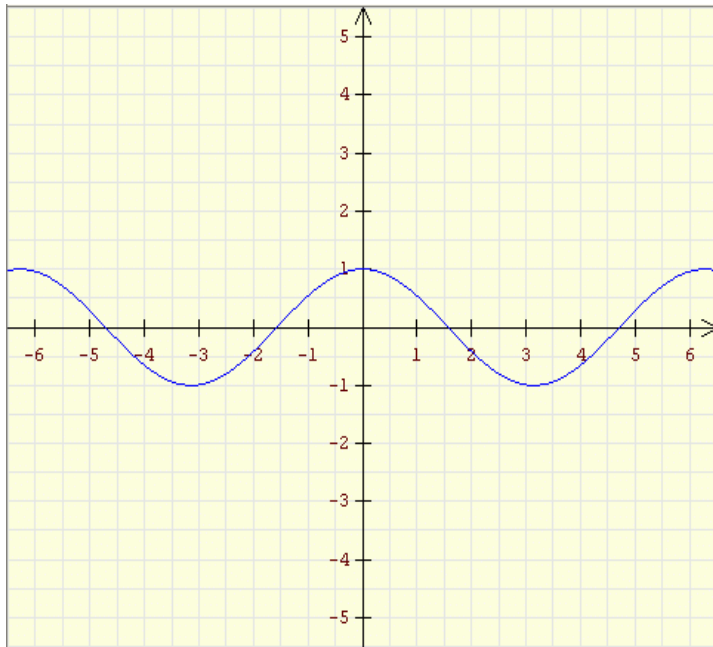
$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \dots + \frac{1}{25} \sin(25x) \right)$$



Gerade/ungerade Funktionen

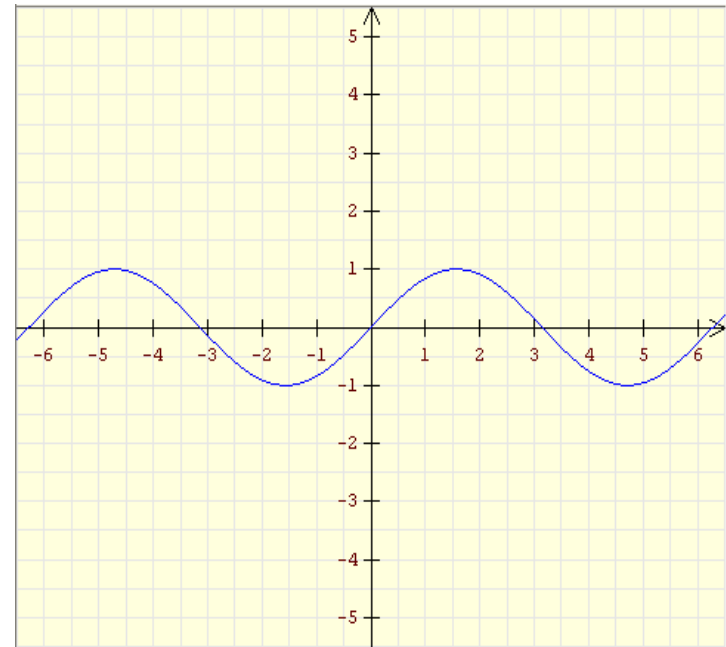
■ Gerade Funktion

$$f(-t) = f(t)$$

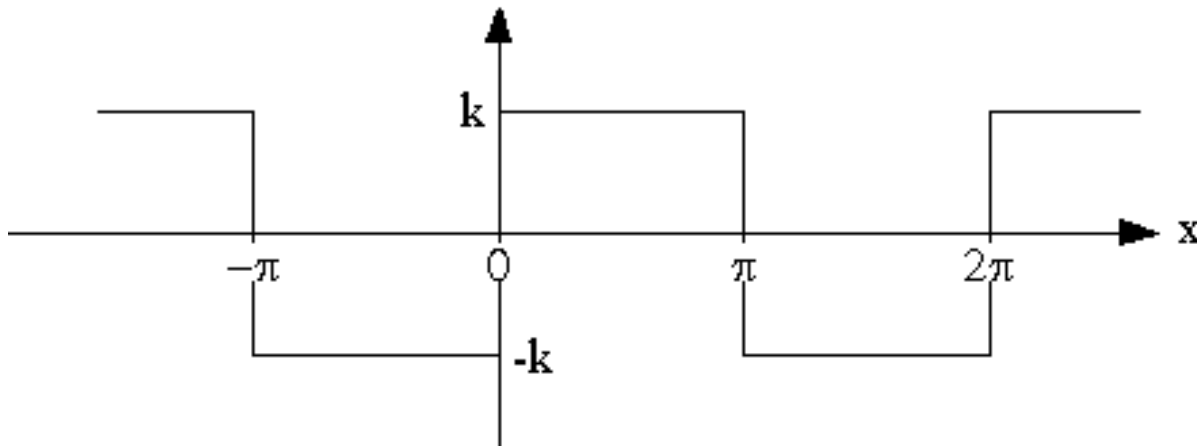


■ Ungerade Funktion

$$f(-t) = -f(t)$$



Rechteck-Schwingung



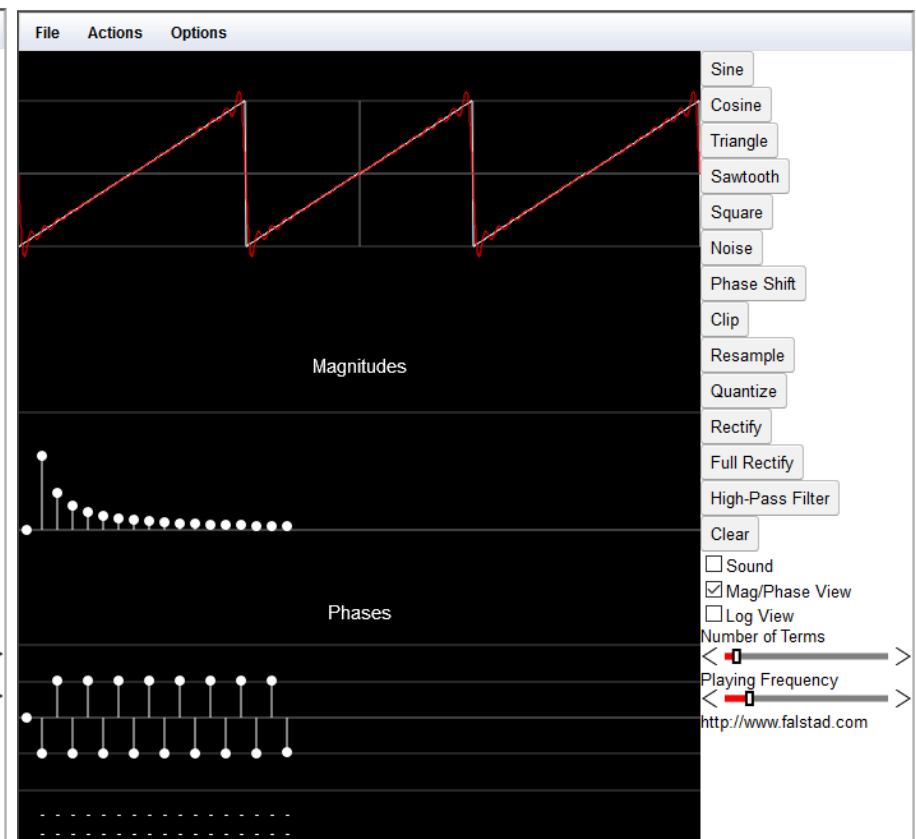
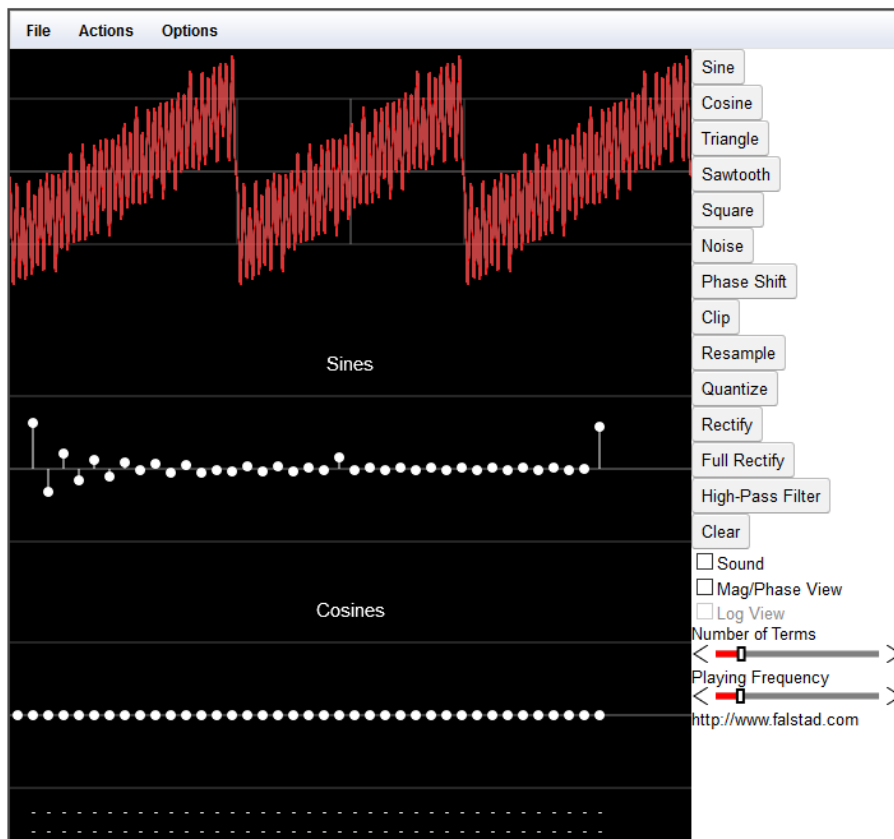
→ Diese Rechteckschwingung ist eine ungerade Funktion.

Allgemein:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Für gerade Funktionen sind alle $b_n = 0$,
für ungerade Funktionen alle $a_n = 0$.

Andere Beispiele



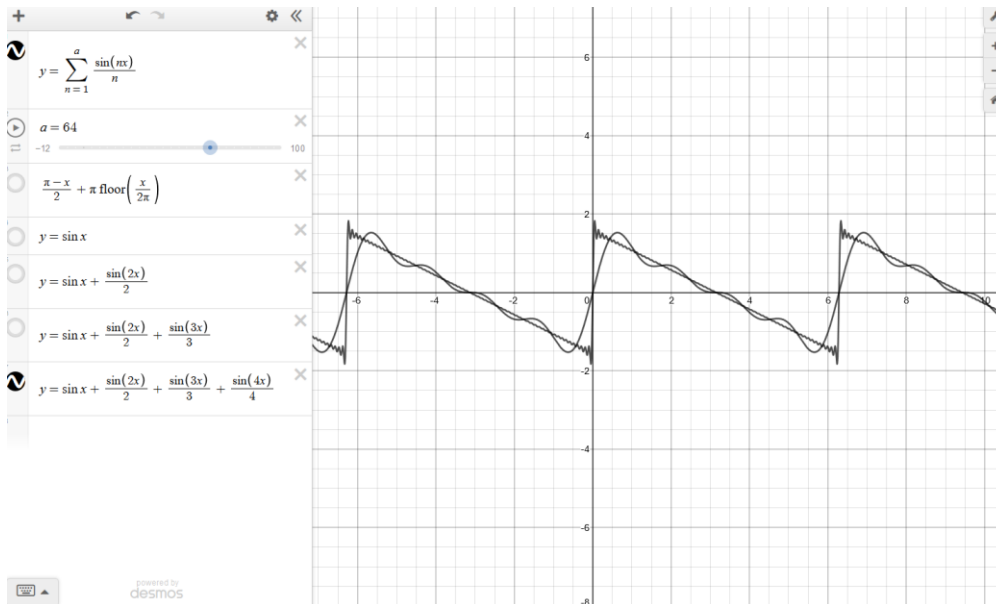
<https://www.falstad.com/fourier/>

<https://www.intmath.com/fourier-series/fourier-graph-applet.php>

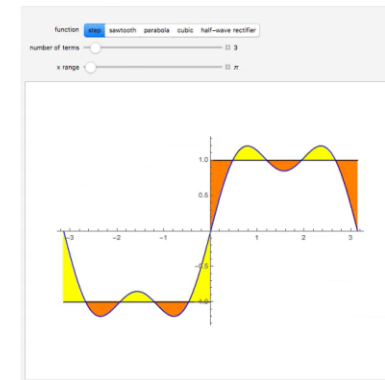
Mehr Beispiele



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Fourier Series of Simple Functions



Download to Desktop

Copy to Clipboard

Source

The Fourier series approximations of five different periodic functions are presented together with the corresponding functions themselves. The convergence of the Fourier series (or lack thereof) can be tested by increasing the number of terms in the series. It should be noted that for continuous functions (such as the periodic extension of the parabola), a few terms in the Fourier series provide an excellent approximation. Continuous functions with continuous derivatives (such as the periodic extension of the cubic) can be well approximated with as few as two or three terms.

Share Demonstration

Related Demonstrations

- Approximation of Discontinuous Functions by Fourier Series
David von Seggern (University Nevada-Reno)
- Comparing Fourier Series and Fourier Transform
Martin Jungwirth
- Gibbs Phenomena for 1D Fourier Series
Michael Trott
- Orthogonality of Two Functions with Weighted Inner Products
Alain Goriely

Related Topics

Analysis >
Approximation Methods >
Calculus >
Harmonic Analysis >
Series >
Waves >
Browse all topics >

- <https://www.desmos.com/calculator/lab9nylksi>
- <https://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesOfSimpleFunctions/>

- Jede 2π -periodische Funktion, die die Dirichlet-Bedingungen erfüllt, läßt sich als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen → Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- **Fourier-Transformation**
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Lässt sich eine ähnliche Darstellung für Funktionen finden, die nicht 2π -periodisch sind?

- Zwei Komponenten: Real- und Imaginärteil

$$z = a + ib, \quad i = \sqrt{-1}$$

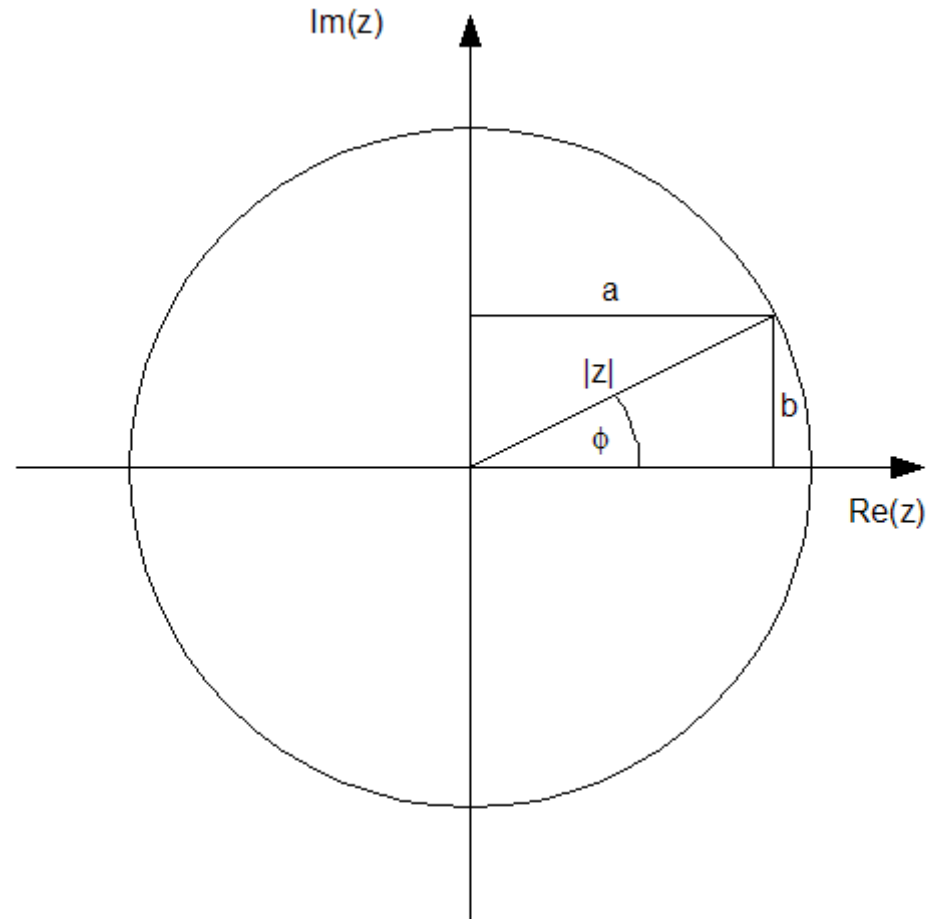
$$z = |z| \cdot e^{i\phi}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Euler-Identität ($|z|=1!$)

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

$$\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

$$\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$



Fourier-Reihe, komplex



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Mit Euler-Identität:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Fourier-Reihe, komplex

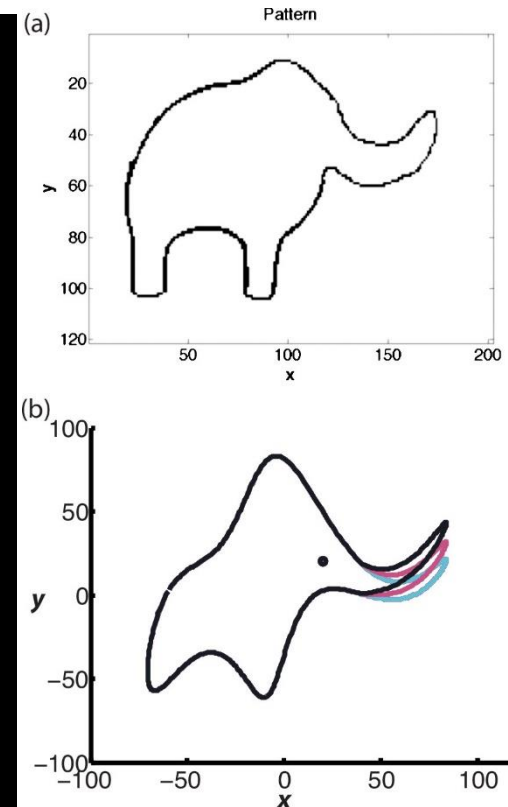
Mit Euler-Identität:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + -ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) + \sum_{-n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{inx} \right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} \right) + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{inx} \right) \\ &= c_0 e^{i0x} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx}) + \sum_{n=-\infty}^{-1} (c_n e^{inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$



“With four parameters I can fit
an elephant, and with five I can
make him wiggle his trunk.”
John von Neumann

$$z = \sum_{k=0}^3 a_k e^{-2\pi i k / 4}$$



<https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.3254017>

- Nichtperiodische Funktionen

- Zunächst betrachten wir anstatt Funktionen mit Periode 2π , Funktionen mit Periode $2L$

$$f_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{2L}x}$$

$$c_n = \langle f, u_n \rangle$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} dx \right) e^{in\frac{2\pi}{2L}x}$$

- Nun betrachten wir den Übergang

$$L \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt \right) e^{in\frac{2\pi}{2L}x} \\&= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}(t-x)} dt \right) \\&= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2L} f(t) e^{-i\frac{n}{2L}2\pi(t-x)} \right)}_{\text{Riemann-Summe}} dt \\&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu2\pi(t-x)} du dt\end{aligned}$$

- Diese Gleichung lässt sich als Superposition auffassen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu2\pi(t-x)} du dt$$

mit

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du$$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt$$

- Fouriertransformation

$$f(x) \rightarrow F(u) \qquad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

- inverse Fouriertransformation

$$F(u) \rightarrow f(x) \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{+i2\pi ux} du$$

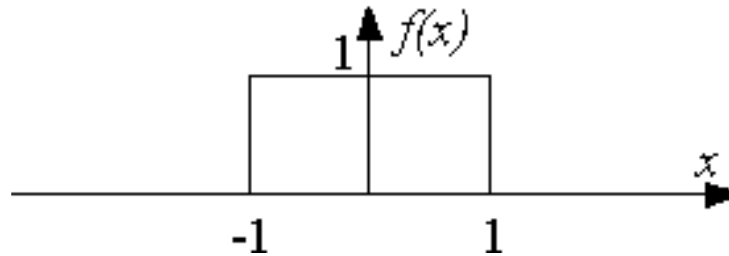
- Oft ist $f(x)$ reell, $F(u)$ ist komplex:

$$F(u) = \operatorname{Re}(F(u)) + i \operatorname{Im}(F(u))$$

Fourier-Transformation für Rechteckimpuls



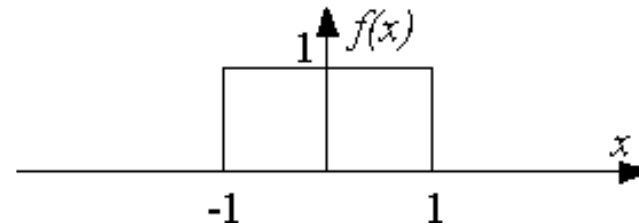
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



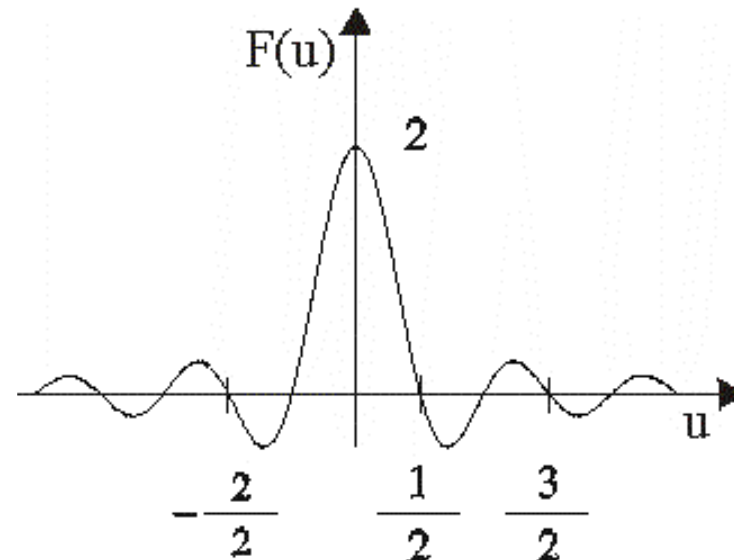
$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i u t} dt = \frac{1}{2\pi i u} \left[e^{-2\pi i u t} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\pi u} \cdot \frac{e^{2\pi i u} - e^{-2\pi i u}}{2i} = 2 \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u} = 2 \cdot \text{sinc}(2\pi u) \end{aligned}$$

Fourier-Transformation für Rechteckimpuls

- Ortsdarstellung



- Frequenzdarstellung

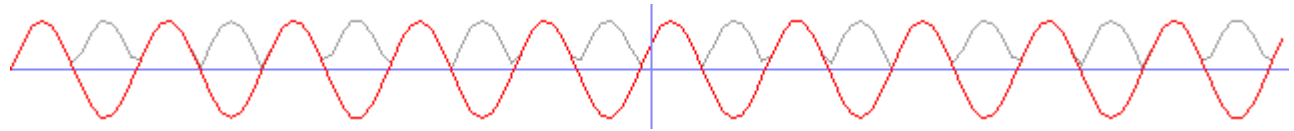




Zerlegung einer Funktion
(eines Signals) in ihre (seine)
Frequenzbestandteile.

Fourier-Transformationspaare

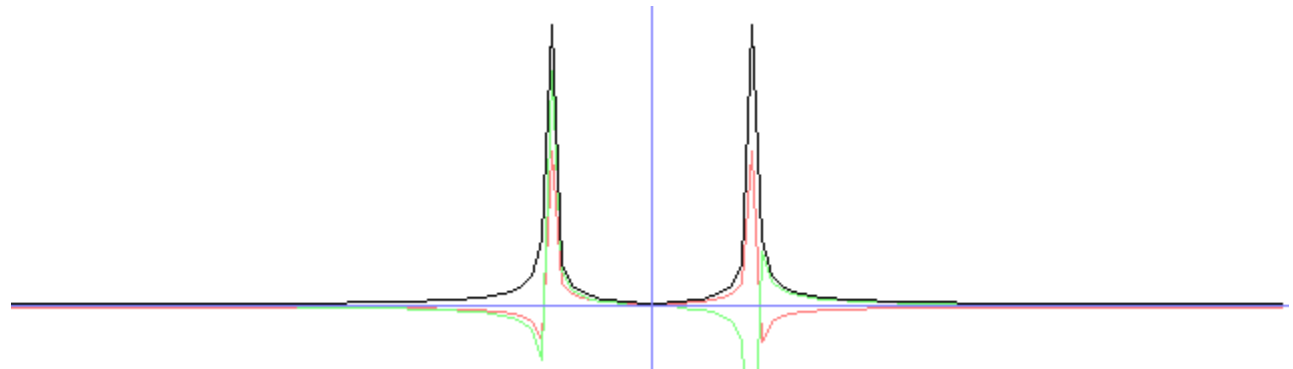
Ortsraum



```
In[131]:= ft = FourierTransform[Cos[x] , x, u]
```

```
Out[131]=  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[-1 + u] +  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  DiracDelta[1 + u]
```

Annäherung im
Frequenzraum



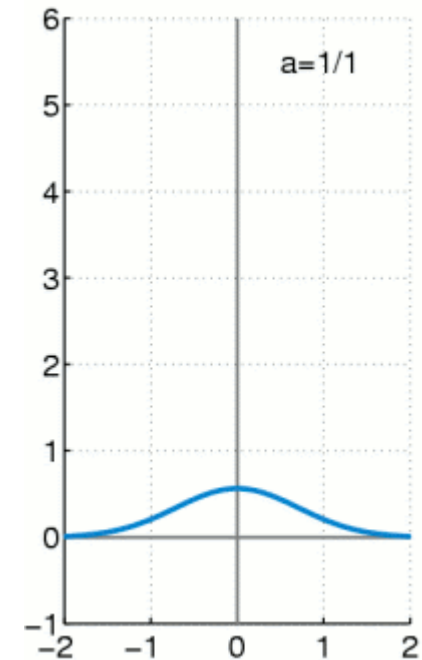
Dirac Delta Distribution

Auch

- δ -Funktion;
- Dirac-Funktion, -Impuls, -Puls, -Stoß (nach Paul Dirac),
- Stoßfunktion,
- Nadelimpuls,
- Impulsfunktion oder
- Einheitsimpulsfunktion

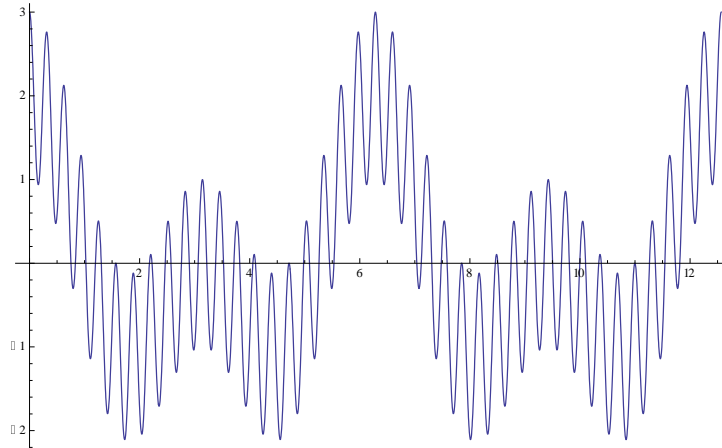
genannt

- $\delta(f) = \langle \delta, f \rangle = f(0)$
- Beispiel: G = Gauß Glocke mit Varianz a , $\delta = G$ mit $a \rightarrow 0$
- Fuzzy: „ $\delta = 0$ außerhalb 0, $\delta(0) = \infty$ “
- Keine Funktion 😊
- Ekelhafte Details: <https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution>



Fourier-Transformationspaare

Ortsraum



```
In[139]:= FourierTransform[Cos[2 x] + Cos[x] + Cos[20 x], x, u]
```

$$\begin{aligned} \text{Out[139]} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-20 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-2 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[-1 + u] + \\ & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[1 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[2 + u] + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{DiracDelta}[20 + u] \end{aligned}$$

Frequenzraum: 0 außerhalb den Frequenzen -20, -2, -1, 1 2, 20

Fourier-Transformationspaare

$$\cos(0)=1$$

$$\cos(kx)$$

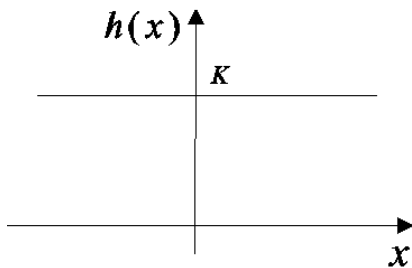
$$\sin(kx)$$

Delta bei der Frequenz $u = 0$

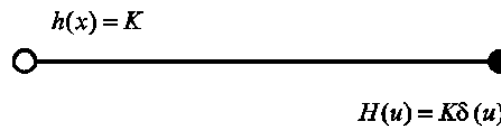
Delta bei den Frequenzen $u = \pm k$

Delta bei den Frequenzen $u = \pm ik$

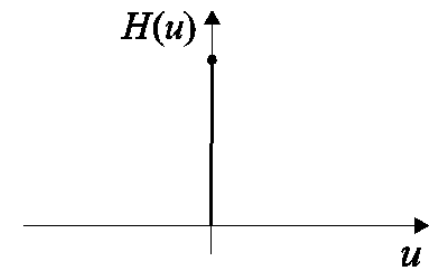
Ortsraum



Konstante Funktion



Frequenzraum



Delta



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- **Faltung und Filterung**
- Abtastung von Signalen
- Zusammenfassung

Beispiel

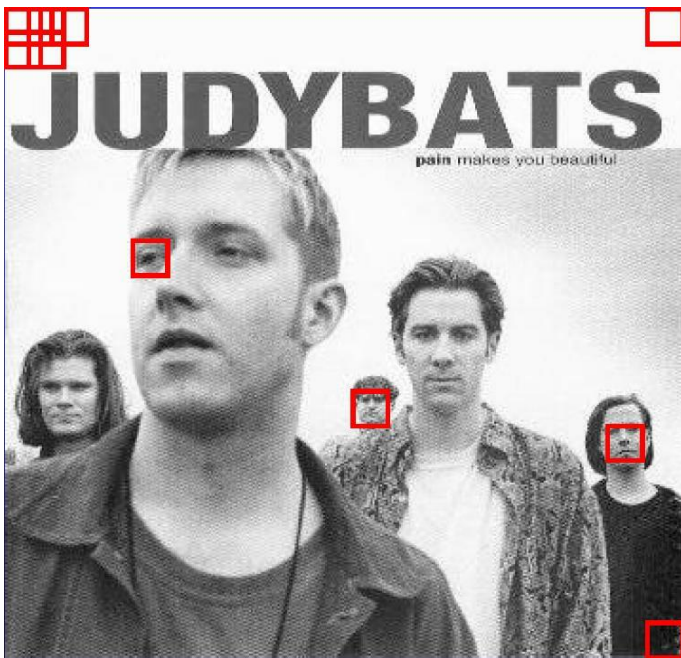


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Beispiel

- Suchen über Raum und Skalierung (Sliding Window Approach)



Ein Eingabebild wird in Ein-Pixel-Schritten
horizontal und vertikal gescannt

...



Das Bild wird um den Faktor 1,2
verkleinert, die Suche wiederholt

Multiplikation im Frequenzraum



$$\begin{aligned} F(\xi) \cdot G(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\xi(t-x)} dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx e^{-i\xi t} dt \\ &:= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\xi t} dt \\ &= H(\xi) \end{aligned}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx$$

➔ **Faltungsintegral**

- Sei h das Faltungsintegral zweier Funktionen f und g

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx := f(t) \circ g(t) \quad ,$$

dann gilt für die Fourier-Transformierten H , F und G

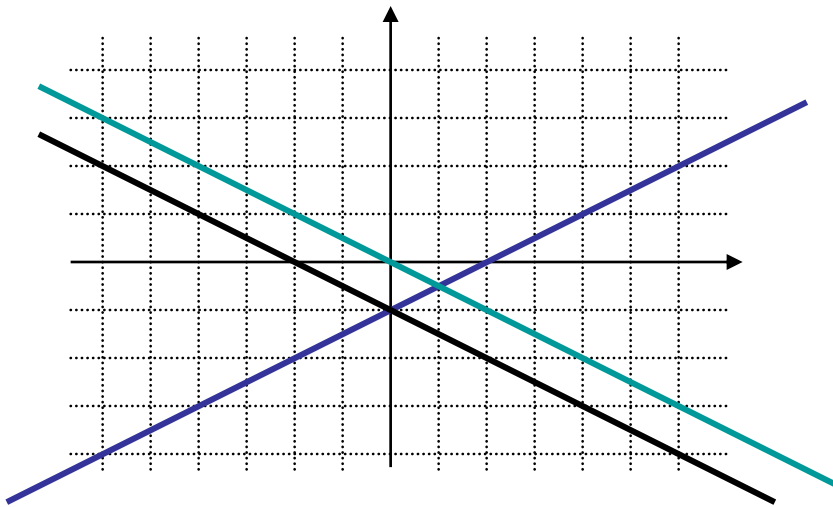
$$H(\xi) = F(\xi) \cdot G(\xi)$$

”Einer Faltung im Ortsraum entspricht eine Multiplikation im Frequenzraum!”

- Faltung im 1D ist definiert durch

$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \alpha) h(\alpha) d\alpha$$

- Graphische Interpretation



$g(\alpha)$

1. Spiegelung an y-Achse

$g(-\alpha)$

2. Verschiebung um x, zB x=2

$f(\alpha) := g(2 - \alpha)$

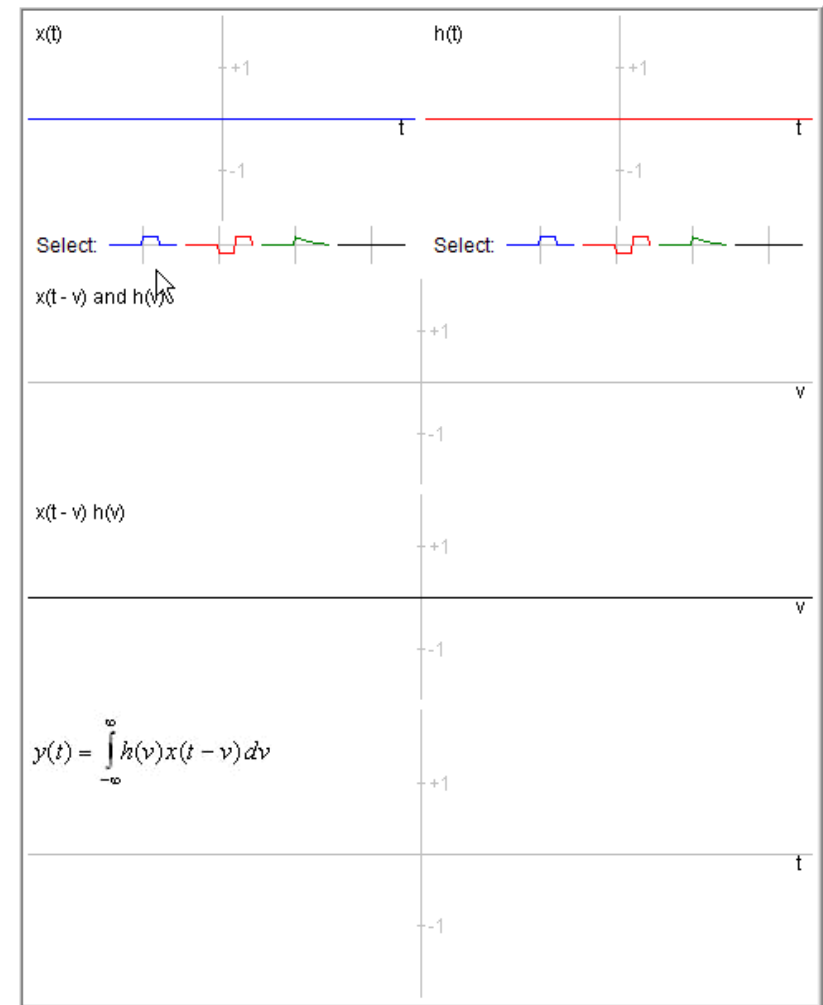
3. Multiplikation und Integration

Faltung zweier Rechteckfunktionen

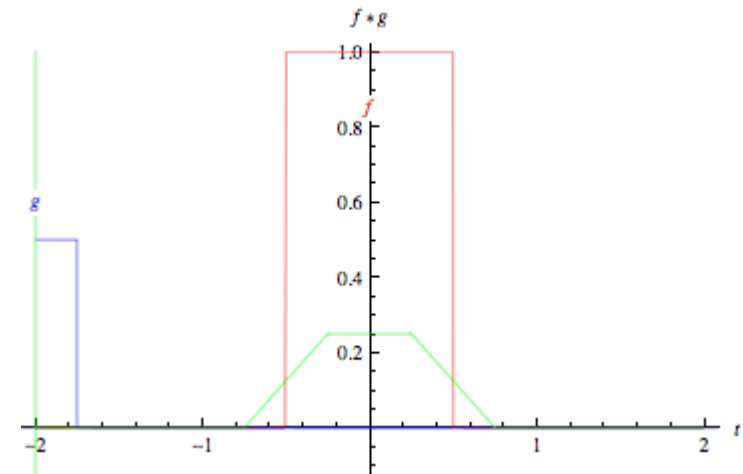
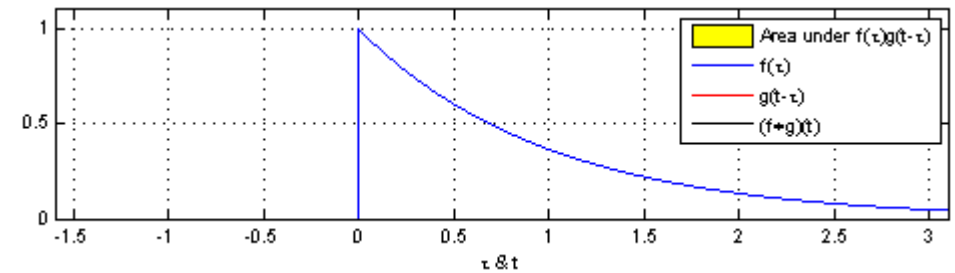
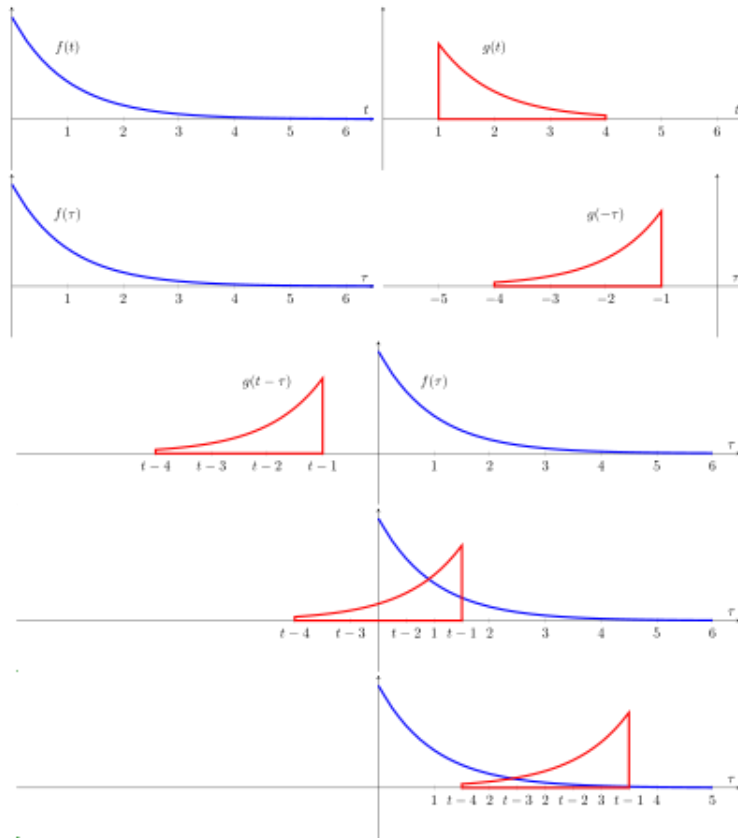
$$g(x) \circ h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(x - \alpha) \cdot \text{rect}(\alpha) d\alpha$$

1. Spiegelung an y-Achse
2. Verschiebung um x, zB x=2
3. Multiplikation und Integration

<http://www.jhu.edu/~signals/convolve/index.html>

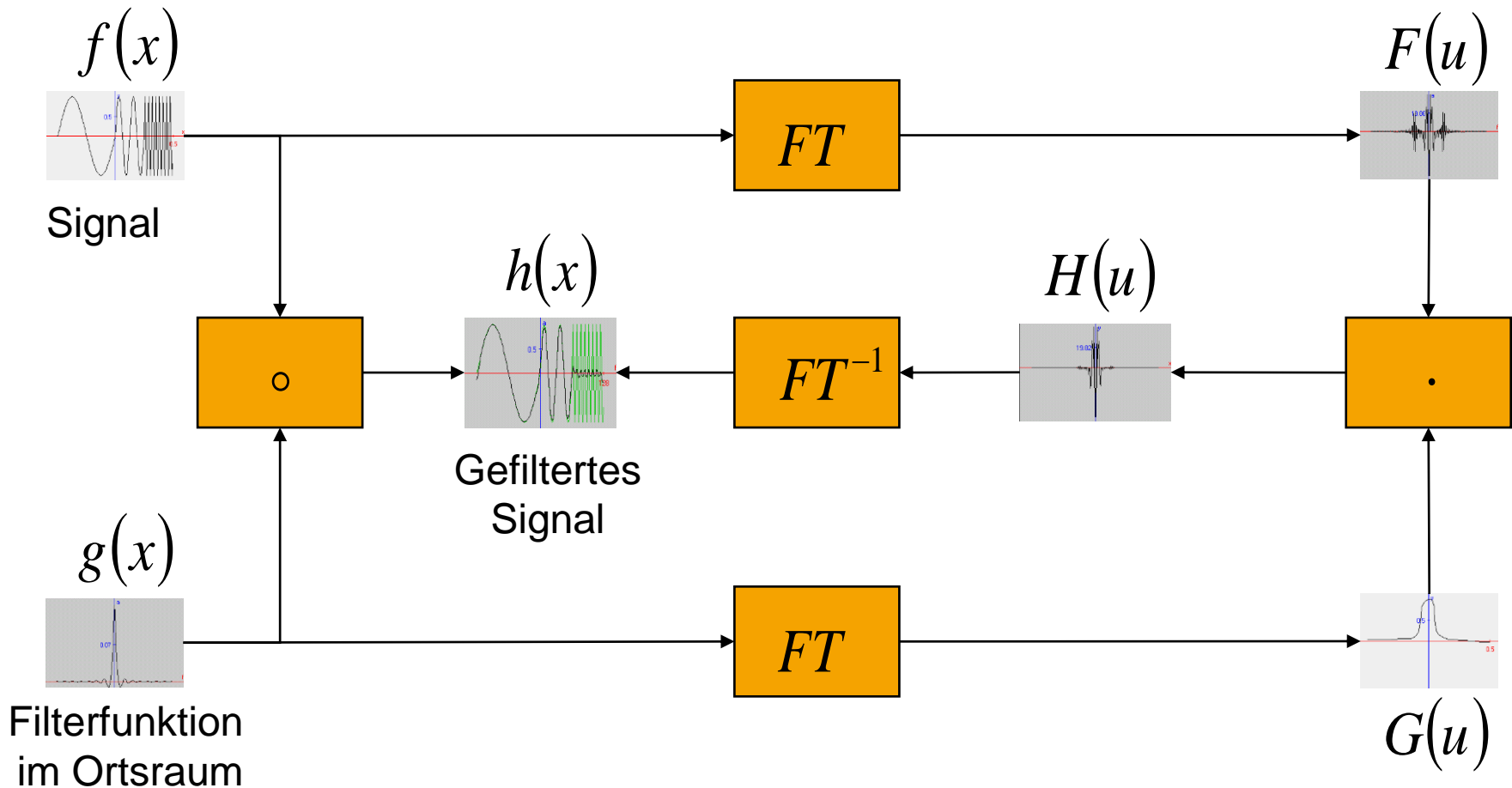


Beispiele



- <http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>
- <https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>

Faltungssatz - Anwendung: Filter



- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- **Abtastung von Signalen**
- Zusammenfassung

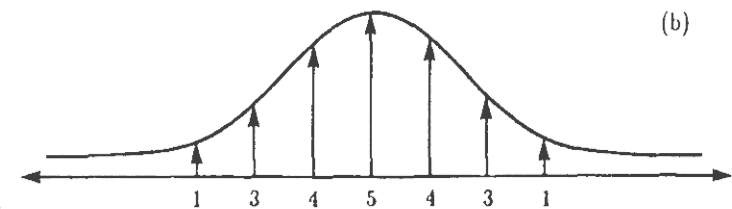
Kontinuierliche und diskrete Funktionen

- Kontinuierliche Funktion f (1-dim.)

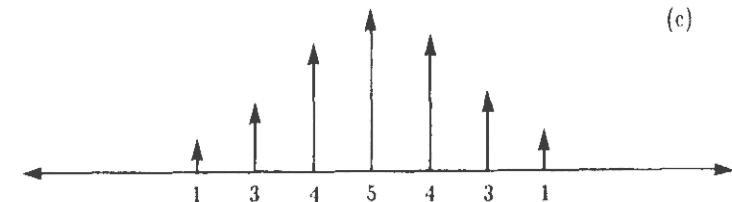


- Diskrete Repräsentation → Abtastung der Funktion an bestimmten Positionen

$\dots f(-\tau), f(0), f(\tau), f(2\tau), \dots, f(n\tau), \dots$



→ Wie abtasten?



Dirac-Delta-Distribution

- Definiert über ihre Wirkung auf andere Funktionen → „Sampling“-Eigenschaft

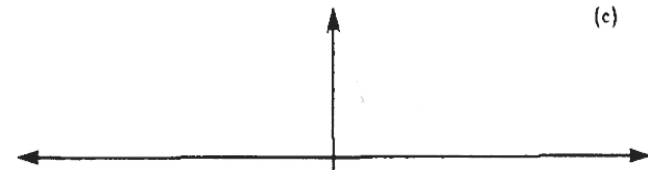
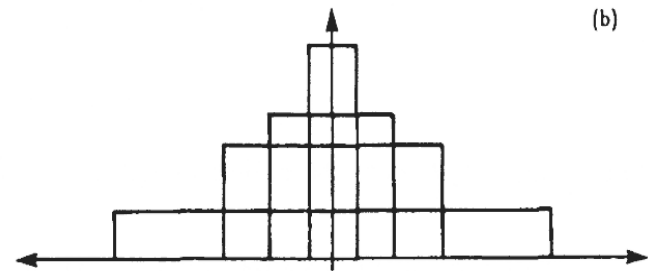
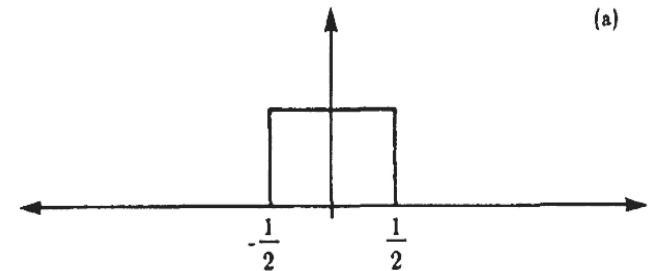
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t'-t) dt = f(t')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Anschaulich: Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ für Funktionsreihe

$$\delta_n(t) = n \cdot \text{rect}(nt)$$

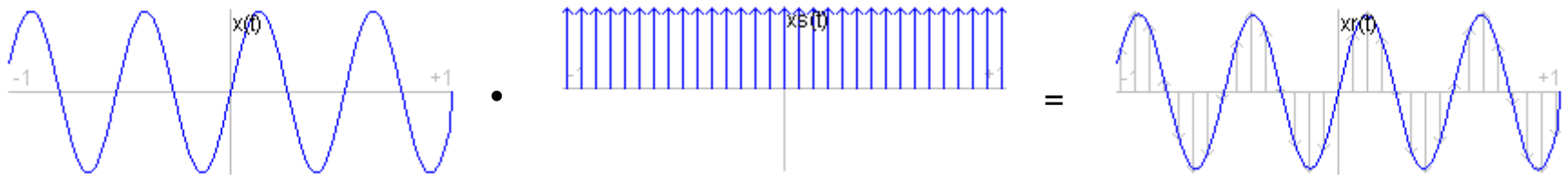
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Abtastung eines Signals

- Diskrete Abtastung (Abtastsignal):

$$\hat{f}(x) = f(x) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n \cdot \Delta x)$$



➔ Produkt zwischen Funktion $f(x)$ und Kamm-Funktion

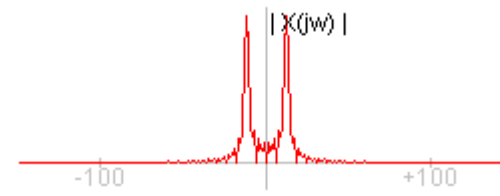
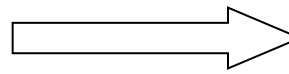
Abtastung eines Signals

- Fourier-Transformierte $\hat{F}(u)$ entspricht der Fourier-Transformierten $F(u)$ der nicht abgetasteten Funktion $f(t)$, die aber periodisch mit der Periode $1/\Delta x$ wiederholt und mit $1/\Delta x$ skaliert wird

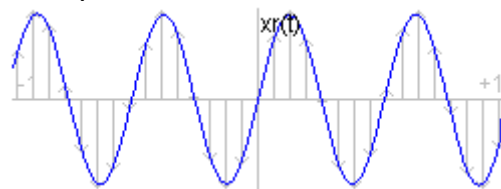
Kontinuierlich ($\Delta x \rightarrow 0$):



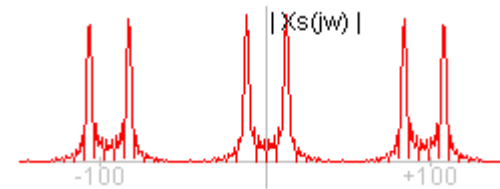
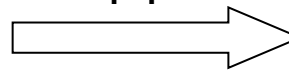
FT



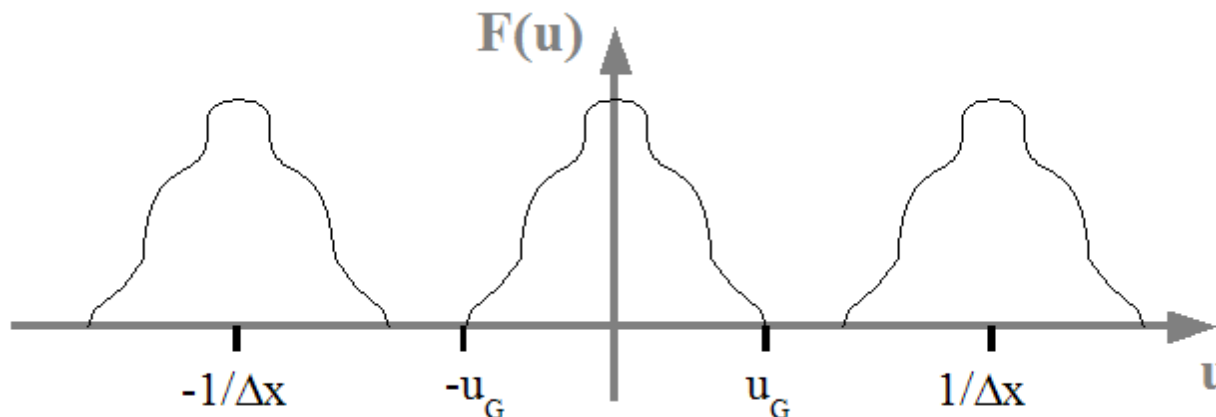
Diskret (hier: $\Delta x \rightarrow 1/100$):



FT

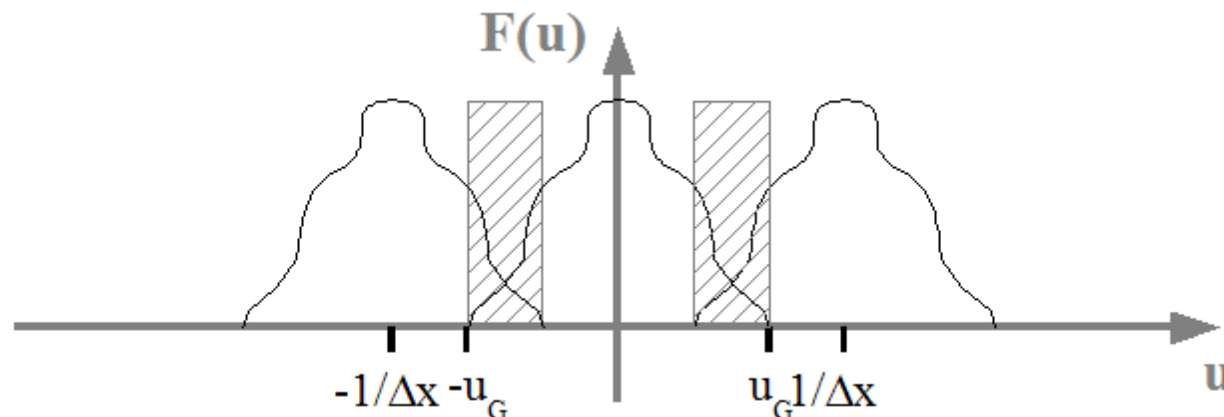


- Sei die Funktion $f(x)$ bandbegrenzt durch u_G , d.h. $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$
- Annahme: $2u_G < \frac{1}{\Delta x}$
 - Die Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ überlappen sich nicht
 - Die Spektren $F(u)$ und $\hat{F}(u)$ stimmen auf dem Intervall $[-u_G, u_G]$ bis auf den Skalierungsfaktor $1/\Delta x$ überein
 - Das Frequenzspektrum von $F(u)$ kann vollständig aus dem Abtastsignal und damit den Abtastwerten berechnet werden

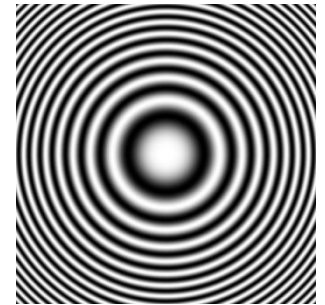
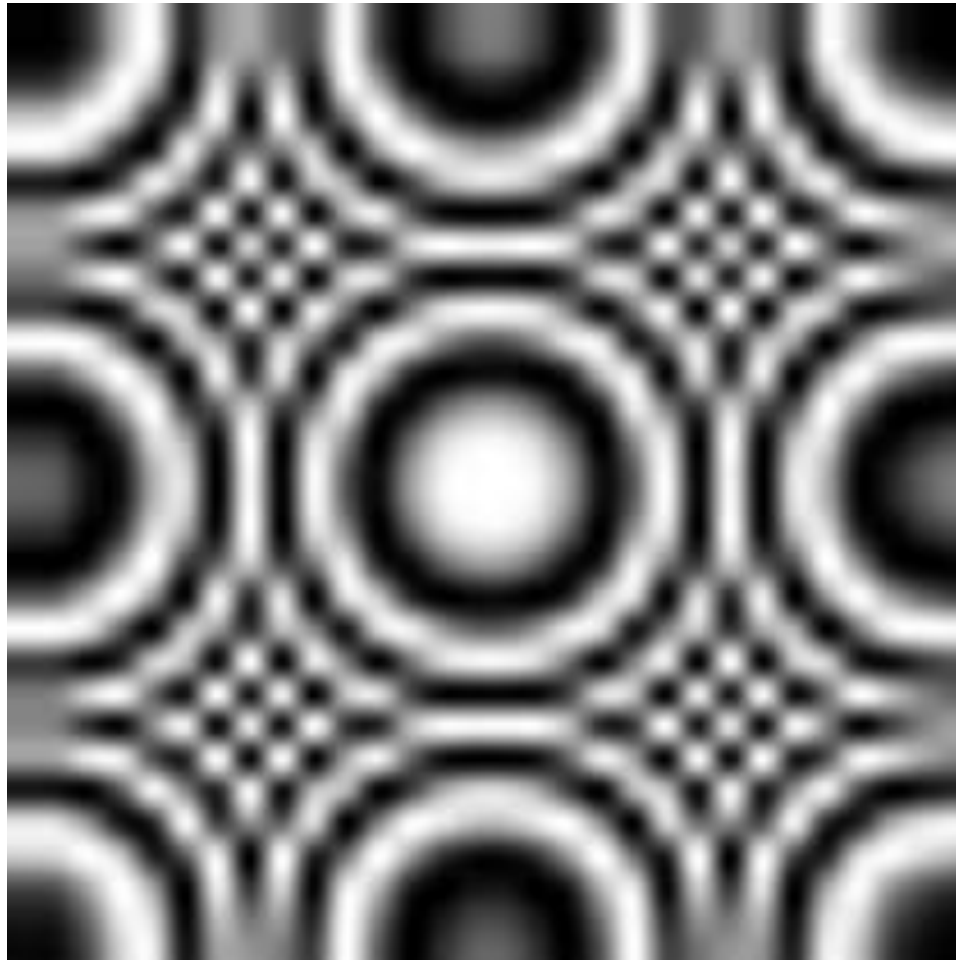




- Sei die Funktion $f(x)$ bandbegrenzt durch u_G , d.h. $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$
 - Annahme: $2u_G > \frac{1}{\Delta x}$
 - Die Kopien der Fouriertransformierten $F(u)$ überlappen sich
 - In den Überschneidungsbereichen bilden sich Summen
 - Es ist unmöglich, $F(u)$ aus den Abtastwerten wiederzugewinnen
- ➔ Aliasing

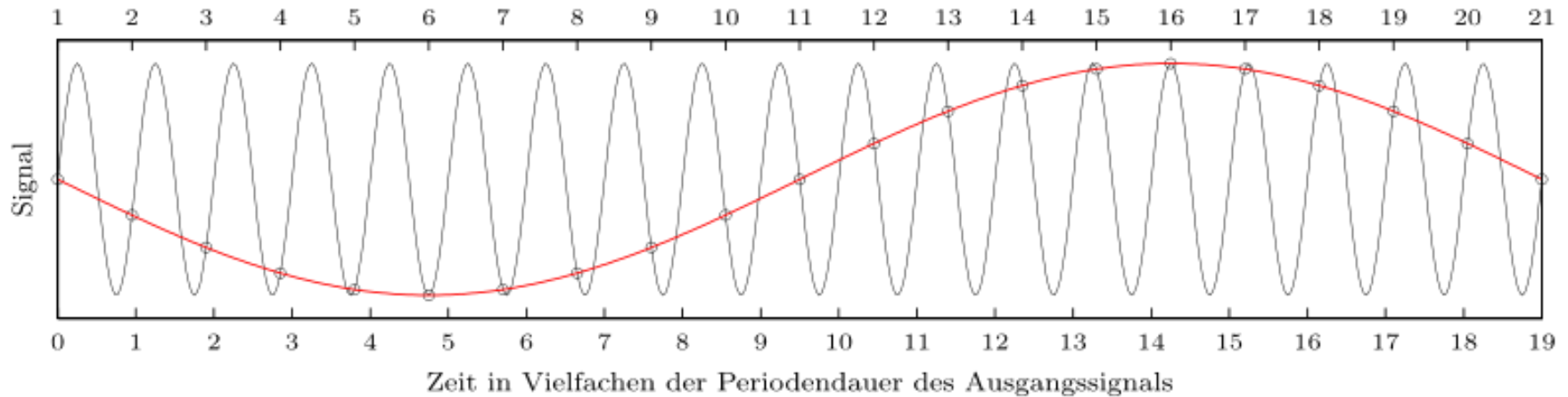


Aliasing: Fresnel-Zonenplatte



<http://de.wikipedia.org/wiki/Fresnel-Zonenplatte>

Aliasing



<https://autorevue.at/ratgeber/wagon-wheel-illusion>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt>

Abtasttheorem von Whittaker-Shannon

- Existiert für eine Funktion $f(x)$ eine endliche Grenzfrequenz u_G , so dass das Spektrum $F(u) = 0$ für $|u| > u_G$,
dann ist die abgetastete Funktion $f(x)$ aus den Abtastwerten $f(n\Delta x)$ fehlerfrei rekonstruierbar, sofern die Abtastfrequenz Δx^{-1} mindestens doppelt so hoch wie u_G ist:



$$\frac{1}{\Delta x} > 2u_G$$

- Motivation
- Mathematische Grundlagen
- Fourier-Reihe
- Fourier-Transformation
- Faltung und Filterung
- Abtastung von Signalen
- **Zusammenfassung**

▪ **Fourier-Reihe:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

- Darstellung 2π -periodischer Funktionen
- Frequenzen der Winkelfunktionen sind Vielfache einer *Grundfrequenz*
→ diskret im Frequenzraum
- <https://www.youtube.com/watch?v=kP02nBNtjrU>

▪ **Fourier-Transformation:**

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{2\pi i u x} du$$

- Darstellung nicht-periodischer Funktionen als Überlagerung unendlich vieler Frequenzen
- Kontinuierlich im Orts- und Frequenzraum
- <https://www.youtube.com/watch?v=Xxut2PN-V8Q>

▪ **Abtastung**

- Diskretisierung einer kontinuierlichen Funktion mit einer Kammfunktion
- FT des Abtastsignals ergibt skalierte, sich periodisch wiederholende Kopien der FT der Originalfunktion → Abtastfrequenz entscheidend

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit