Übung 3 – Lösungsvorschlag

Prof. Dr. Arjan Kuijper

Max von Buelow, M.Sc., Volker Knauthe, M.Sc.

Darya Nikitina, B.Sc. Alexander Stichling, Kai Li

Aufgabe 3.1: Quiz

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Geben Sie für falsche Antworten eine Begründung an.

a) Eine Faltung im Frequenzraum entspricht einer Multiplikation im Ortsraum. (0.5 Punkte)

Antwort: Die Aussage ist wahr. Siehe [1,2]

Bewertung: 0.5 Punkte bei richtiger Antwort und Begründung

[1] https://www.uni-muenster.de/Physik.AP/Veranstaltungen/F-Praktikum/anleitungen/Digitale_Signalverarbeitung.pdf

[2] Slide 69, ändere Ortsraum zu Fourierraum, v.v.

Aufgabe 3.1: Quiz

b) Eine Funktion, welche in jeder Periode unendlich viele Unstetigkeiten hat und in jeder Periode integrierbar ist, lässt sich als Summe von Kosinus und- Sinusfunktionen darstellen (0.5 Punkte)

Antwort: Die Aussage ist falsch. Die Anzahl der Unstetigkeiten der Funktion muss innerhalb einer Periode endlich sein und sie muss in einer Periode endlich viele Maxima und Minima haben.

Bewertung: 0.5 Punkte bei richtiger Antwort und einer richtigen Begründung

Aufgabe 3.1: Quiz

c) Jede Funktion, welche in einer Periode endlich viele Unstetigkeiten und endlich Maxima und Minima hat, lässt sich als Fourierreihe darstellen (0.5 Punkte)

Antwort: Die Aussage ist falsch. Die Funktion muss die Dirichlet-Bedingungen erfüllen, um als Fourierreihe dargestellt werden zu können. Durch die Aussage ist aber nicht zwangsläufig gegeben, dass die Funktion auch in jeder Periode integrierbar ist.

Bewertung: 0.5 Punkte bei richtiger Antwort und Begründung

Aufgabe 3.1: Quiz

d) Um Aliasing zu vermeiden, muss beim Abtasten eines Signals die Abtastfrequenz mindestens doppelt so hoch sein wie die Grenzfrequenz (0.5 Punkte)

Antwort: Die Aussage ist richtig.

Bewertung: 0.5 Punkte bei richtiger Antwort

Aufgabe 3.2: Fourierreihe

Bestimmen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der folgenden Funktion f, die im Intervall von $[-\pi, \pi]$ liegt. Dabei gilt $f(x) = f(x + 2\pi)$. (3 Punkte)

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Bewertung: Jeweils 1 Punkt für die richtige Berechnung von a_0 , a_m , b_m

Aufgabe 3.2: Fourierreihe

Antwort:

Wir berechnen die Fourierkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x + 3dx + \int_{0}^{\pi} 3xdx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{3}{2}x^2\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2} + 3\pi + \frac{3\pi^2}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi^2}{2} + 3\pi\right] \\
&= \frac{\pi + 3}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.2: Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+3)\cos(mx)dx + \int_{0}^{\pi} 3x\cos(mx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[(x+3)\frac{\sin(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(mx)}{m}dx + 3x\frac{\sin(mx)}{m} - \int_{0}^{\pi}\frac{3\sin(mx)}{m}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(mx)}{m}dx - \int_{0}^{\pi}\frac{3\sin(mx)}{m}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(mx)}{m^2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{3\cos(mx)}{m^2}\Big|_{0}^{\pi}\right]
\end{aligned}
$$

Bei m gerade:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2} + \frac{3}{m^2} - \frac{3}{m^2}\right] = 0$$

Bei m ungerade:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^2} - \frac{3}{m^2} - \frac{3}{m^2}\right] = -\frac{4}{\pi m^2}$$

Aufgabe 3.2: Fourierreihe

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+3)\sin(mx)dx + \int_{0}^{\pi}3x\sin(mx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(x+3)\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(mx)}{m}dx - 3x\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{3\cos(mx)}{m}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(x+3)\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin(mx)}{m^2}\Big|_{-\pi}^{0} - 3x\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{3\sin(mx)}{m^2}\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(x+3)\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{-\pi}^{0} - 3x\frac{\cos(mx)}{m}\Big|_{0}^{\pi}\right]
\end{aligned}
$$

Bei m gerade:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{3}{m} + \frac{3}{m} - \frac{\pi}{m} - \frac{3\pi}{m}\right] = -\frac{4}{m}$$

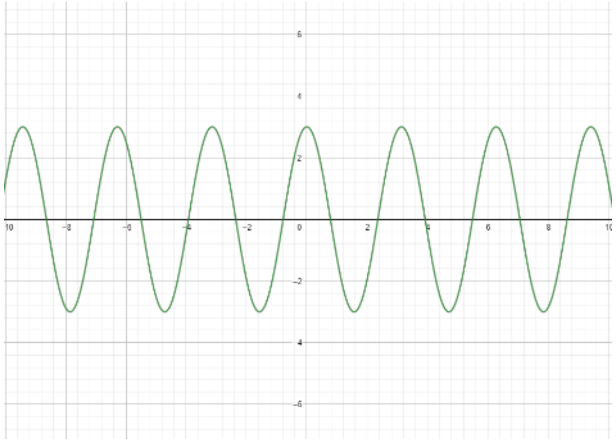
Bei m ungerade:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{3}{m} - \frac{3}{m} + \frac{\pi}{m} + \frac{3\pi}{m}\right] = -\frac{6}{\pi m} + \frac{4}{m}$$

Aufgabe 3.3: Gerade und ungerade Funktionen

a) Zeichnen Sie die Funktion $3*\sin(2x + \pi/2)$ in ein Koordinatensystem ein und begründen Sie, ob die Funktion gerade oder ungerade ist. (1 Punkt)

Antwort: Die Funktion ist gerade, denn sie ist achsensymmetrisch zur Y-Achse und d.h. für die Funktion gilt $f(-x) = f(x)$.



Bewertung:

0.5 Punkte für die richtige Zeichnung

0.5 Punkte für die richtige Einordnung und Begründung

Aufgabe 3.3: Gerade und ungerade Funktionen

b) Sind bei der in a) genannten Funktion die Fourierkoeffizienten a_m und/ oder b_m gleich null? Wenn ja, erklären Sie warum. (1 Punkt)

Antwort: Die Funktion ist gerade, dadurch sind alle $b_m = 0$.

Bewertung: 0.5 Punkte pro richtige Einordnung und Begründung

Aufgabe 3.4: Komplexe Zahlen

Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen: $z_1=3i+7$, $z_2=2i+4$.

a) Berechnen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$. (1P)

Antwort: $7 \cdot 4 + 7 \cdot 2i + 4 \cdot 3i + 3 \cdot 2i^2$

$= (7 \cdot 4 - 3 \cdot 2) + (7 \cdot 2 + 4 \cdot 3) \cdot i$

$= (28-6)+(14+12) \cdot i$

$= 22+26i$

Bewertung: 1 Punkt für die richtige Berechnung

Aufgabe 3.4: Komplexe Zahlen

b) Berechnen Sie die Polardarstellung von z_3 aus Aufgabenteil a). Runden Sie die Werte auf zwei Nachkommastellen und geben Sie den Winkel in Radiant an. Tragen Sie anschließend das Ergebnis (Polarkoordinaten und Winkel) in ein kartesisches Koordinatensystem ein. (2P)

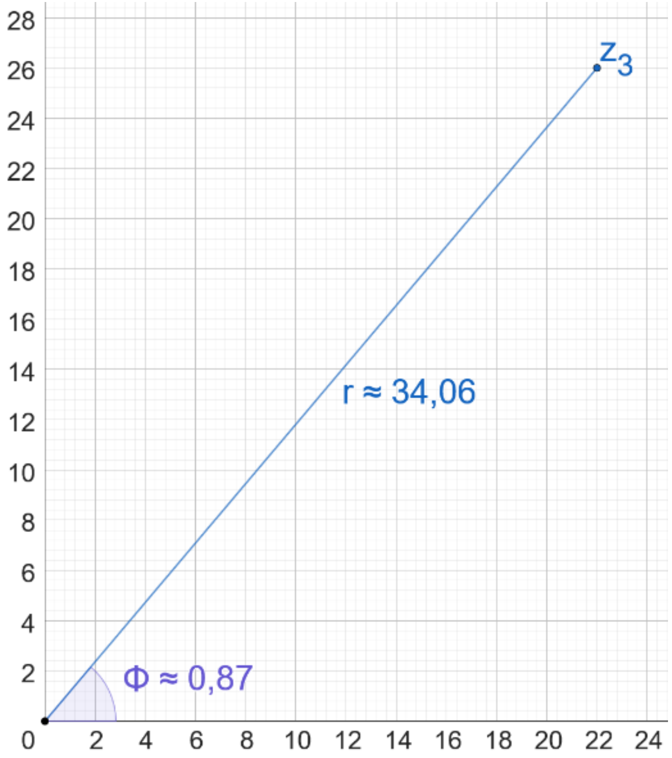
Antwort:

$$r = \sqrt{22^2 + 26^2} = \sqrt{484 + 676} \approx 34,06$$

$$\Phi = arctan(\frac{26}{22}) \approx 0,87$$

Aufgabe 3.4: Komplexe Zahlen

b) **Antwort:**



Aufgabe 3.4: Komplexe Zahlen

b) **Bewertung:** 1 Punkt für die richtige Berechnung (jeweils 0.5 für die jeweiligen Werte) und 1 Punkt für eine korrekte Zeichnung.