УДК

О. Д. Еремичев

Устойчивость нулевого состояния равновесия в модельной системе ОДУ

Строится конечная нормальная форма системы интегрально-дифференциальных уравнений и по ней исследуется устойчивость нулевого состояния равновесия

Постановка задачи

Рассматривается система интегрально-дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1)\, u + F_2(u,u) + F_3(u,u,u) + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t, x+s)\, ds \qquad (1)$$

Здесь $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, ε – малый положительный параметр, A_0, A_1, D_0 – 2×2 матрицы, $F_2(\cdot,\cdot), F_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ – линейные по каждому аргументу вектор-функции.

Система (1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x). \qquad (2)$$

Рассмотрим задачу определения устойчивости нулевого состояния равновесия. Для этого воспользуемся следующей теоремой.

Теорема об устойчивости по первому приближению.

$\dot{x} = f(x,\varepsilon)$, $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$

$\dot{x_0} = 0$

$f(0,\varepsilon) = 0$, $x = 0$ - *состояние равновесия*

$f(x,\varepsilon) = f(0,\varepsilon) + \dfrac{df}{dt}(0,\varepsilon)x + ...$

$A(\varepsilon) = \dfrac{df}{dt}(0,\varepsilon)$

$\dot{x} = A(\varepsilon)x + ...$

$A(\varepsilon) : A(\varepsilon)\upsilon = \lambda\upsilon$

$Re\lambda < 0 \rightarrow$ *состояние равновесия устойчиво*

$Re\lambda > 0 \rightarrow$ *состояние равновесия неустойчиво*

Теперь необходимо воспользоваться методом нормальных форм

$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + F_2(x, x) + F3(x, x, x)$
$x(t) = \varepsilon\xi(\tau)a + \varepsilon^2 x_2(\tau, t) + ..., \tau = \varepsilon t$
$A_0 a = 0$
$x_2(\tau, t)$ ограничена
$\varepsilon^1 : 0 = A_0(\xi a)$
$\varepsilon^2 : \dfrac{dx_2}{dt} + \dfrac{d\xi_2}{d\tau}a = A_0 x_2 + A_1\xi a + F_2(a, a)\xi^2$
$\dot{y} = -A_0^* y$ - сопряженное уравнение
$A_0^* = \overline{A_0}^T$
$y(t) = Ce^{\lambda t}$
$y(t) = Cb$
$-A_0^* b = 0 : (a, b) = 1$
$\left(\dfrac{d\xi}{d\tau}a, b\right) = (\xi A_1 + \xi^2 F_2(a, a), b)$
$\dfrac{d\xi}{d\tau} = (A_1 a, b)\xi + (F_2(a, a), b)\xi^2$
$\lambda = (A_1 a, b)$
$\sigma = (F_2(a, a), b)$
$\dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi + \sigma\xi^2$ - нормальная форма
$\lambda > 0, \sigma < 0 \to \xi_0 = 0$ - неустойчиво
$\xi_1 = \dfrac{-\lambda}{\delta}$
$x(t) = \varepsilon\xi_i a + O(\varepsilon^2)$
Если $(F2(a, a), b) = 0$
$x(t) = \sqrt{\varepsilon}\xi(\tau)a + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} x_3(t, \tau) + ...$
$\varepsilon^2 : \dfrac{dx_3}{dt} + \dfrac{d\xi}{d\tau}a = A_0 x_3 + K_0\xi^3$
$\dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi + \delta_1\xi^3, \lambda > 0, \delta < 0$
$\lambda\xi + \delta_1\xi^3 = 0, \xi_0 = 0$ - неустойчивое состояние равновесия
$\xi_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-\lambda}{\delta_1}}$ - устойчивое состояние равновесия
$A_0 a = i\omega a$
$x(t) = \sqrt{\varepsilon}(\xi(\tau)e^{i\omega\tau}a + \overline{\xi}(\tau)e^{-i\omega\tau}\overline{a}) + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} x_3(t, \tau) + ...$
$x2, x3$ - периодические по t с $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
$\dfrac{dx_3}{dt} + \dfrac{d\xi}{d\tau}a = A_0 x_3 + ...$
$\dfrac{d\xi}{d\tau} = \lambda\xi + \delta\xi|\xi|^2, \xi = \xi(\tau) \in \mathbb{C}, |\xi|^2 = \xi\overline{\xi}$

$\xi_0 = 0$ - неустойчивое состояние равновесия
$\xi_{1,2} \neq 0$ - устойчивое состояние равновесия

Построение конечной нормальной формы

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия задачи (1), (2). Устойчивость нулевого состояния равновесия определяется собственными значениями набора матриц

$$A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iks)\, ds, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае при $k \neq 0$ матрицы вида (3) равны матрице $A_0 + \varepsilon A_1$. При $k = 0$ получим матрицу $A_0 + \varepsilon(A_1 + D_0)$. Таким образом, устойчивость нулевого состояния равновесия задачи (1), (2) определяется в главном собственными значениями матрицы A_0.

Заметим также, что при замене переменной $x = x+s$ в интеграле системы (1) в самой задаче меняется лишь аргумент в подынтегральной функции и соответствующее интегральное слагаемое будет иметь вид $\varepsilon D_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) dx$.

Выражение $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) dx$ является средним функции u по переменной x на отрезке $[0, 2\pi]$. В дальнейшем будем считать, что соответствующая замена переменных выполнена, и будем обозначать среднее функции u как $M(u)$.

Рассмотрим следующий критический случай: матрица A_0 имеет пару чисто мнимых собственных значений, т. е. $\lambda = \pm i\omega_0, \omega_0 > 0$.

Существует собственный вектор a, удовлетворяющий равенству $A_0 a = i\omega a$. Введем также в рассмотрение собственный вектор b транспонированной к A_0 матрице, отвечающий сопряженному собственному значению, то есть удовлетворяющий равенству $A_0^T b = -i\omega b$. Будем считать, что $(a, b) = 1$. Тогда решение задачи (1), (2) будем искать в виде ряда

$$u(t,x) = \varepsilon^{1/2} \left(\xi(\tau,x) a \exp(i\omega t) + \overline{\xi}(\tau,x) \overline{a} \exp(-i\omega t) \right) + \varepsilon u_2(t,\tau,x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t,\tau,x) + \ldots,$$

где u_2, u_3 – периодические по t с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, $\tau = \varepsilon t$. Подставив этот ряд в систему (1), получим при $\sqrt{\varepsilon}$ верное равенство

$$\xi i\omega a \exp(i\omega\tau) - \overline{\xi} i\omega \overline{a} \exp(-i\omega\tau) = \xi A_0 a \exp(i\omega\tau) + \overline{\xi} A_0 \overline{a} \exp(-i\omega\tau).$$

Проделав ряд математических преобразований получим следующую квазинормальную форму

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \lambda \xi + \sigma \xi |\xi|^2 + \gamma M(\xi), \quad \xi(\tau, x + 2\pi) = \xi(\tau, x) \tag{4}$$

где

$$\lambda = (A_1 a, b), \gamma = (D_0 a, b)$$

$$w_1 = (2i\omega I - A_0)^{-1} F_2(a, a), \quad w_2 = -A_0^{-1}\big(F_2(a, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, a)\big).$$

$$\sigma = \big(F_3(\bar{a}, a, a) + F_3(a, \bar{a}, a) + F_3(a, a, \bar{a}) + F_2(w_2, a) + F_2(a, w_2) + F_2(w_1, \bar{a}) + F_2(\bar{a}, w_1), b\big).$$

Будем считать, что $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1, \sigma = \sigma_0 + i\sigma_1, \gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$.

Кусочно-постоянное решение

Будем искать кусочно-постоянное решение задачи (4) в виде

$$\xi(\tau, x) = \rho(x) e^{i\omega\tau}, \tag{5}$$

где

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1 e^{i\varphi_1}, & x \in [0, \alpha), \\ \rho_2 e^{i\varphi_2}, & x \in [\alpha, 2\pi). \end{cases}$$

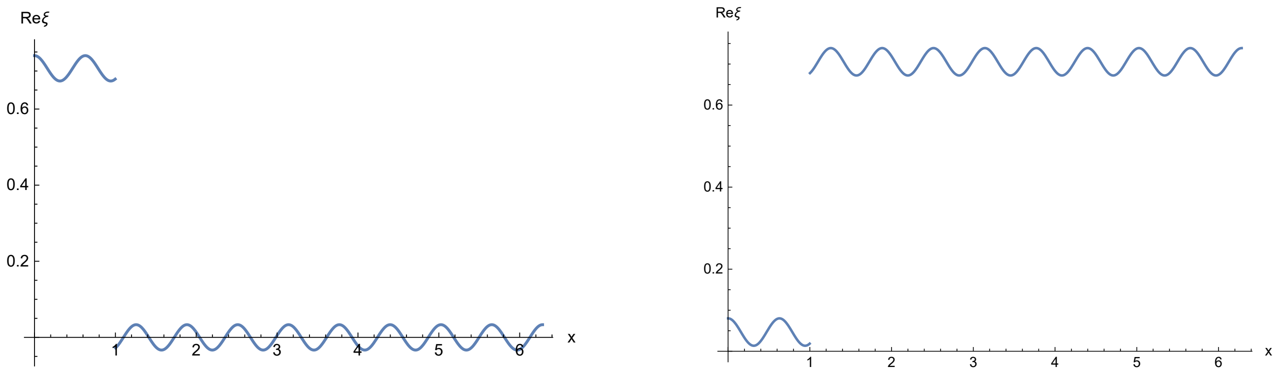
С помощью нормировок и переобозначений можно получить $\varphi_1 = 0$. Будем считать в этом случае $\varphi_2 = \varphi$.

Подставляя $\xi(\tau, x)$ в уравнение (23) и выделяя вещественную и мнимую части, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\beta\rho_1 &= \lambda_1\rho_1 + \sigma_1\rho_1^3 + \gamma_1\frac{1}{2\pi}\rho_1\alpha + \gamma_1\rho_2(2\pi - \alpha)\frac{1}{2\pi}\cos(\varphi) + \rho_2(2\pi - \alpha)\frac{1}{2\pi}\gamma_0\sin(\varphi), \\
0 &= \lambda_0\rho_1 + \sigma_0\rho_1^3 + \gamma_0\frac{1}{2\pi}\rho_1\alpha + \rho_2(2\pi - \alpha)\frac{1}{2\pi}\gamma_0\cos(\varphi) - \gamma_1\rho_2(2\pi - \alpha)\frac{1}{2\pi}\sin(\varphi), \\
\rho_2\beta\cos(\varphi) &= \lambda_0\rho_2\sin(\varphi) + \lambda_1\rho_2\cos(\varphi) + \sigma_0\rho_2^3\sin(\varphi) + \sigma_1\rho_2^3\cos(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\gamma_1\rho_1\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\gamma_0\rho_2(2\pi - \alpha)\sin(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\gamma_1(2\pi - \alpha)\rho_2\cos(\varphi) \\
-\rho_2\beta\sin(\varphi) &= \lambda_0\rho_2\cos(\varphi) - \lambda_1\rho_2\sin(\varphi) + \sigma_0\rho_2^3\cos(\varphi) - \sigma_1\rho_2^3\sin(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\gamma_0\rho_1\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\gamma_0\rho_2(2\pi - \alpha)\cos(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\gamma_1(2\pi - \alpha)\rho_2\sin(\varphi).
\end{aligned} \tag{6}$$

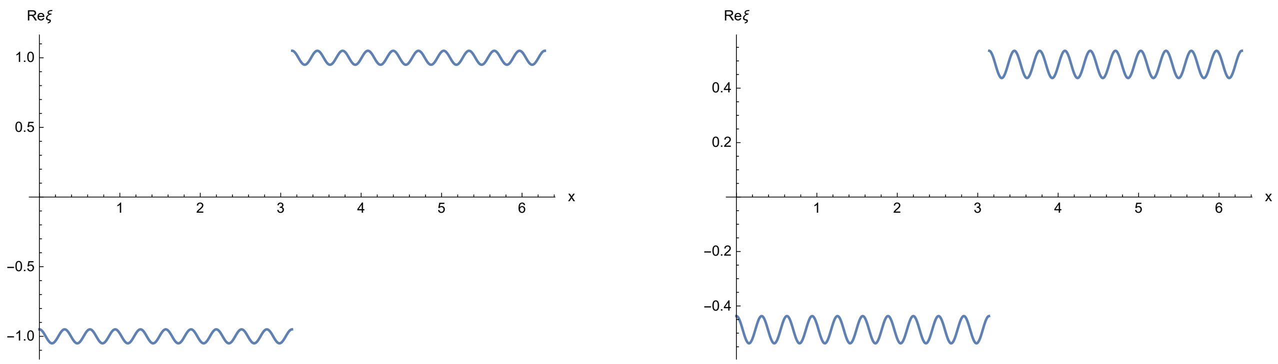
Примеры $Re\xi(\tau, x)$

Для расчета коэффициентов нормальной формы λ, σ, γ и решения системы алгебраических уравнений (6) относительно неизвестных $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta$ при $\varphi \in [0, 2\pi]$ были написаны скрипты на Wolfram Mathematica.



$\tau = 0$ $\tau = 100$

Рис. 1: $\lambda = 1, \sigma = -2 + 18i, \gamma = 0, \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \rho_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \rho_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \alpha = 1, \beta = 9$



$\tau = 0$ $\tau = 100$

Рис. 2: $\lambda = i, \sigma = i, \gamma = -1, \varphi = 0, \rho_1 = -1, \rho_2 = 1, \alpha = \pi, \beta = 2, \tau = 0$

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова