Capítulo

# Límites

- Límite por definición.
- Álgebra de límites.
- Técnicas para levantar indeterminaciones cuando Xo es finito.
- Técnicas para levantar indeterminaciones cuando Xo es infinito.
- Algunos límites notables

Ricardo Olejnik
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

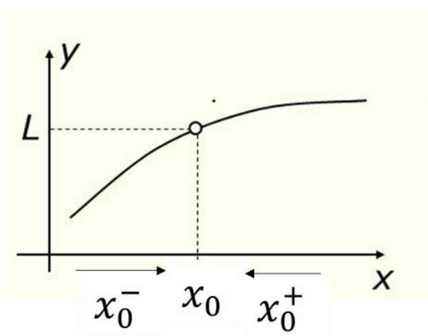
**Límite por definición**: Sea la función y=f(x) el límite por definición cuando X tiende a Xo es:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

**Teorema de Unicidad**: El límite (valor) es único, independiente de la trayectoria que se aplique para encontrarlo.

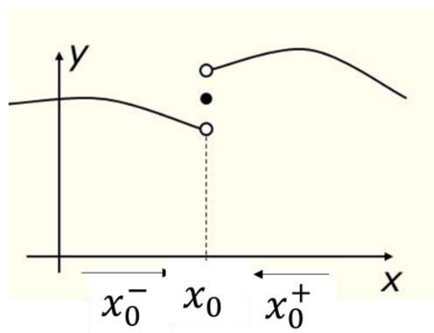
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ sí y solo si } \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{cases}$$

Gráficamente podemos observarlo de la siguiente manera:




$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

Sí $\mathbf{L_1=L_2=L}$ el límite existe y además es <u>único</u>.




$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

$\mathbf{L_1 \neq L_2}$ el límite no existe.

**Álgebra de límites:** Sean f y g funciones reales de variable real, y c una constante real no nula:

Se sabe además que:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} \mathrm{g}(x) = L_2$

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \bullet g(x)) = L_1 \bullet L_2$
3. $\lim_{x \to x_0} cf(x) = \mathrm{c}\, L_1$
4. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (sí y solo sí $L_2 \neq 0$)

Los resultados anteriores son válidos excepto cuando se produzcan <u>indeterminaciones.</u>

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}, \infty - \infty, 0 \bullet \infty$$

5. $\lim_{x \to x_0} c = c$
6. $\lim_{x \to x_0} x = x_0$
7. $\lim_{x \to x_0} \left[ f(x) \right]^n = \left[ \lim_{x \to x_0} f(x) \right]^n$
8. $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$ siempre que $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ cuando n sea par

***Ejemplo:***

***Aplicando el álgebra de límites encuentre:***

**Solución:**

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4}\ x}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 4}x^2+9}}{\lim\limits_{x\to 4}\ x}=\frac{5}{4}\qquad\bigstar$$

Propiedad 4 Propiedad 8

***Ejemplo:***

***Si*** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=4$ ***y*** $\lim\limits_{x\to 3}g(x)=8$ ***encuentre:*** $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)^2\cdot\sqrt[3]{g(x)}\right]$

**Solución:**

$$\lim_{x\to 3}f(x)^2\cdot\sqrt[3]{g(x)}=\lim_{x\to 3}f(x)^2\bullet\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}=\left[\lim_{x\to 3}f(x)\right]^2\bullet\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}g(x)}$$

Propiedad 2 Propiedad 7 y 8

$$=\left[\lim_{x\to 3}f(x)\right]^2\bullet\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}g(x)}=4^2\bullet\sqrt[3]{8}=16\cdot 2=32\qquad\bigstar$$

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

**Cuando $X_0$ es finito**

a) La función f(x) es racional $\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$

- Se factoriza el denominador y el numerador en el entendido que $X_0$ es raíz de ambos.
- Simplificar, evaluar y resolver.

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

**Solución:**

Vemos que al realizar la evaluación en el límite nos da una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo que procedemos a levantar esa indeterminación de la siguiente forma:

Factorizamos el numerador de la siguiente forma:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | $-1$ |
| 1 | | | | |
| | 1 | 1 | 1 | 0 |

Y reescribimos el límite así:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$, podemos observar que el valor 1 (valor al cual tiende el límite es raíz(cero) en el numerador y denominador, ahora bien, simplificando nos queda:

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+x+1)$ con lo cual se levantó la indeterminación.

Resolviendo nos queda: $\lim\limits_{x \to 1} (x^2+x+1) = 3$

Entonces: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ★

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

**Cuando $X_0$ es finito**

b) La función f(x) es irracional

- Usar la conjugada (donde sea posible).
- Las cantidades subradicales son iguales o múltiplos: Entonces se resuelve usando una sustitución de una nueva variable con exponente mínimo común múltiplo, llevando todas las raíces a un caso de función racional.

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[5]{x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-2}-\sqrt[6]{2}}$

**Solución:**

Al evaluar el límite podemos ver que tenemos una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo cual vemos que estamos en el caso de límites con cantidades subradicales iguales o múltiplos.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x-1}-1}{\sqrt[6]{2x-2}-\sqrt[6]{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x-1}-1}{\sqrt[6]{2(x-1)}-\sqrt[6]{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x-1}-1}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{x-1}-\sqrt[6]{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[5]{x-1}-1}{\sqrt[6]{2}\left(\sqrt[6]{x-1}-1\right)}$$

Podemos observar que los subradicales del numerador y denominador son iguales por lo que debemos hacer un correspondiente cambio de variable cuyo exponente sea el mínimo común múltiplo, entonces.

Subradical: $x-1$

Realizamos un cambio de variable: $x-1=p^{5\bullet 6}$, nótese que en el exponente podemos ver las cantidades radicales (en este caso 5 y 6) y el exponente nuevo será el mínimo común múltiplo, en este caso 5x6=30, es decir, $x-1=p^{30}$

Ahora bien el cambio de variable con respecto a **p** implica un cambio en el límite, el cual debemos expresarlos en términos de la nueva variable.

Como el límite inicialmente tiende a 2 ahora hacemos lo siguiente:

Como $x \to 2$, entonces $2 - 1 = p^{30}$ y nos quedaría de la siguiente forma:

$p \to 1$

Reescribimos el límite en términos de la nueva variable como,

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \lim_{p \to 1} \frac{\sqrt[5]{p^{30}} - 1}{\sqrt[6]{p^{30}} - 1} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \lim_{p \to 1} \frac{p^6 - 1}{p^5 - 1}$$

Podemos observar que lo hemos llevado a un límite de la forma racional y se puede resolver de la misma manera.

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2}} \lim_{p \to 1} \frac{\sqrt[5]{p^{30}} - 1}{\sqrt[6]{p^{30}} - 1} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \lim_{p \to 1} \frac{p^6 - 1}{p^5 - 1} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \bullet \frac{5}{4} = \frac{5}{4\sqrt[6]{2}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[5]{x-1} - 1}{\sqrt[6]{2(x-1)} - \sqrt[6]{2}} = \frac{5}{4\sqrt[6]{2}}$$ ★

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

c) La función f(x) es trigonométrica.

- Se levantará la indeterminación con límites notables de la forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

**Solución:** Como existe una indeterminación de la forma 0/0 debemos levantar esa indeterminación, para esto podemos utilizar el producto por la conjugada con el fin de obtener la identidad trigonométrica $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - \cos^2(x)}{x\left(1 + \cos(x)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x)}{x\left(1 + \cos(x)\right)}$$

Podemos separarla como un producto y se puede observar que se lleva al límite notable

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x\left(1+\cos(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\frac{sen(x)}{\left(1+\cos(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\left(1+\cos(x)\right)}$$

$$1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{\left(1+\cos(x)\right)}=\frac{sen(0)}{\left(1+\cos(0)\right)}=\frac{0}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \qquad \bigstar$$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}$

**Solución:** Haciendo cambio de variable:

$u=\arctan(x)$, entonces $\tan(u)=x$ y el límite nos queda:

$\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{u}{\tan(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{sen(u)}{\cos(u)}}$, ahora bien, podemos reescribir y reordenar de la siguiente manera $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{sen(u)}{\cos(u)}}=\lim_{u\to 0}\cos(u)\cdot\frac{u}{sen(u)}=\lim_{u\to 0}\cos(u)\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{sen(u)}=\frac{\lim\limits_{u\to 0}\cos(u)}{\lim\limits_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}}=\frac{1}{1}=1$

Entonces, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$ $\bigstar$

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

d) La función f(x) es exponencial.

- Se levantará la indeterminación con límites notables de la forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

e) La función f(x) es logarítmica:

- Se levantará la indeterminación con límites notables de la forma

$$\lim_{x \to 0} \frac{Ln(x+1)}{x} = 1$$

Cambio de base:

Pasar o transformar una expresión de base cualquiera "b" a una base "e" (neperiano)

$$\log_b x = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{x}$

**Solución:** Podemos hacer la siguiente manipulación algebraica:

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos(x) + 1 - 1}{x}$, al límite inicial sumamos y restamos una unidad con el fin de separarlo en una suma de límites notables, quedando de esta forma:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 1 + 0 = 1$$ ★

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

**Cuando $X_0$ es infinito**

a) La función f(x) es racional

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

Estudiar el comportamiento del polinomio en el infinito, usualmente $\infty/\infty$

- Termino de mayor grado (coeficiente principal) de toda la expresión.
- Procedimiento: Dividir numerador y denominador entre el coeficiente principal de f(x).

m: grado del numerador.

n: grado del denominador.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } m>n \\ L \text{ si } m=n \\ 0 \text{ si } m<n \end{cases}$$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{4x^2 - 1}$

**Solución:**

Como podemos observar el grado del numerador y denominador son iguales por lo que debe tender a un número.

Dividimos numerador y denominador entre el coeficiente de mayor grao (en este caso 2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}-\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2}-\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{4}$$ ★

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{4x^3}$

**Solución:** Como podemos observar el grado del numerador es menor al denominador por lo que el límite tiende a 0.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{4x^3}=0$$ ★

**Técnicas para levantar indeterminaciones:**

b) La función f(x) es irracional.
Pueden ocurrir en el caso que se tengan indeterminaciones de la forma $\infty$-$\infty$ o $0\bullet\infty$.
Procedimiento:
- Racionalizar si es posible.
- Aplicar sustitución si es posible.
- Extraiga factor común en términos de mayor grado.

**Para recordar:**

Racionalización:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Si queremos racionalizar

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

**Solución:** Podemos observar que al evaluar el límite se está generando una indeterminación de la forma 0/0, por lo que podemos multiplicar por el conjugado de manera de quitar el radical del numerador.

Para esto usaremos $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3} = \lim_{x\to 7} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 3^2}{\left(x-7\right)\sqrt{x+2}+3} = \lim_{x\to 7} \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 3^2}{\left(x-7\right)\sqrt{x+2}+3} =$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{x+2-9}{\left(x-7\right)\sqrt{x+2}+3} = \lim_{x\to 7} \frac{\cancel{\left(x-7\right)}}{\cancel{\left(x-7\right)}\sqrt{x+2}+3} = \lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$$

en este caso ya podemos evaluar el límite.

$$\lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{6}$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \dfrac{1}{6}$ ★

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}$

**Solución:** Podemos observar que al evaluar el límite se está generando una indeterminación de la forma 0/0, por lo que podemos multiplicar por el conjugado de manera de quitar el radical del numerador y denominador (doble conjugado).

$$\lim_{x\to 5}\frac{\boxed{\sqrt{3x+1}-4}}{\boxed{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\boxed{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}}\cdot\frac{\boxed{\sqrt{3x+1}+4}}{\sqrt{3x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+4}{\sqrt{3x+1}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-4^2}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(3x+1\right)-16}{\left(x-2\right)-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(3x+1\right)-16}{\left(x-2\right)-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\left(3x+1\right)-16}{\left(x-2\right)-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(3x+1\right)-16}{\left(x-2\right)-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{x-5}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{3\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}=\lim_{x\to 5}3\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}$$

Podemos ver que se logró levantar la indeterminación por lo cual podemos evaluar el límite.

$$3\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}+4}=3\cdot\frac{\sqrt{5-2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3(5)+1}+4}=3\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{16}+4}=3\cdot\frac{2\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Entonces, $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ ★

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}$

**Solución:** Podemos observar que al evaluar el límite se está generando una indeterminación de la forma ∞-∞. Por lo cual debemos eliminar la indeterminación multiplicando por el conjugado cúbico.

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}-\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)-(x+1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Podemos observar que al límite evaluarse en $+\infty$ al tener grado del denominador mayor a numerador tendrá tendencia a 0. Entonces:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}=0$$

★

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

**Cuando $X_0$ es infinito**

c) La función f(x) es trigonométrica.

No aparece la indeterminación propiamente dicha, sino que resulta una expresión (o función acotada)

sen($\infty$) o cos($\infty$) no es $\infty$ ya que realmente es una función acotada entre [-1,1].

- Aplica el teorema de las funciones acotadas denominado “teorema del sándwich”.

Sean f y g funciones tal que:

$\lim\limits_{x \to x_0} f \cdot g$ de donde:

f es una función acotada

g es una función $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

- Establezca las cotas como una desigualdad
  $-a \leq f \leq b$
- Multiplique la desigualdad por la función g(x)
  $-a \cdot g \leq f \cdot g \leq b \cdot g$
- Estudie el límite de cada función cuando $x \to x_0$
  $\lim\limits_{x \to x_0}(-a \cdot g) \leq \lim\limits_{x \to x_0}(f \cdot g) \leq \lim\limits_{x \to x_0}(b \cdot g)$
- Evalúe cada límite conocido:
  $\lim\limits_{x \to x_0}(-a \cdot g) = 0$ y $\lim\limits_{x \to x_0}(b \cdot g) = 0$
- Conclusión:
  $\lim\limits_{x \to x_0}(f \cdot g) = 0$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+sen\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{2x+1}$

**Solución:** Podemos observar que al evaluar el límite se está generando una indeterminación donde nos queda sen($\infty$).

Por lo tanto, debemos aplicar teorema del sándwich.

Sabemos que la función está acotada de la siguiente forma:

$$-1 \le sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 1$$

Ahora bien, llevamos a la forma del límite que deseamos evaluar.

$$x-1 \le x+sen\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le x+1$$

$$\frac{x-1}{2x+1} \le \frac{x+sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2x+1} \le \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x+1} \le \lim_{x\to\infty}\frac{x+sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2x+1} \le \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}$$

Evaluamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

Podemos observar que los límites son iguales por lo que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2x+1}=\frac{1}{2}$$

★

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

**Solución:** Podemos observar que al evaluar el límite se está generando una indeterminación donde nos queda $\cos(\infty)$.

Por lo tanto, debemos aplicar teorema del sándwich.

Sabemos que la función está acotada de la siguiente forma:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$$

Entonces:

$$-1 \cdot x^2 \leq x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2 \cdot 1$$

$$2 - x^2 \leq 2 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 2 + x^2$$

$$\lim_{x \to 0^+} 2 - x^2 \leq \lim_{x \to 0^+} 2 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^+} 2 + x^2$$

Evaluamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} 2 - x^2 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} 2 + x^2 = 2$$

Podemos observar que los límites son iguales por lo que:

$$\lim_{x \to \infty} 2 + x^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 2 \qquad \bigstar$$

**Técnicas para levantar indeterminaciones:**

Consideraciones:

$\dfrac{+\infty}{0^{+}} = +\infty$ ; $\dfrac{-\infty}{0^{-}} = +\infty$ ; $\dfrac{+\infty}{0^{-}} = -\infty$ ; $\dfrac{-\infty}{0^{+}} = -\infty$

**Técnicas para levantar indeterminaciones:**

Consideraciones: $\dfrac{\textit{Número}}{0}$ no es indeterminado.

Qué pasa si hay un límite de la forma $\dfrac{\textit{Número}}{0}$?

SE DEBE APLICAR OBLIGATORIAMENTE ESTUDIO LATERAL DEL LÍMITE.

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x} + \sqrt{x+2}}{x}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tendremos lo siguiente: $\dfrac{1+\sqrt{2}}{0}$ por lo cual no hay una indeterminación sin embargo debemos evaluar los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{e^{x} + \sqrt{x+2}}{x} = \frac{1+\sqrt{2}}{0^{-}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^{-}} \frac{e^{x} + \sqrt{x+2}}{x} = \frac{1+\sqrt{2}}{0^{+}} = +\infty$$

Observamos que los límites laterales son distintos por lo cual $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x} + \sqrt{x+2}}{x}$ no existe. $\bigstar$

**Técnicas para levantar indeterminaciones**:

Indeterminaciones de la forma $1^{\infty}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} \text{ sabiendo que: } \lim_{x\to x_0} f(x)=1 \text{ y } \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$$

Entonces se puede llevar a un límite de la forma:

$$e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

**Para recordar**:

Propiedades de logaritmos:

1. $\ln(a\cdot b)=\ln(a)+\ln(b)$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
3. $\ln(a^{b})=b\cdot\ln(\mathrm{a})$
4. $\ln\sqrt[b]{a}=\dfrac{\ln(\mathrm{a})}{b}$
5. $\log_b a=\dfrac{\ln(\mathrm{a})}{\ln(b)}$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma 0/0, ahora bien, haciendo propiedades de logaritmo podemos ver lo siguiente:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x+1)$, haciendo propiedad 4

$\lim_{x\to 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}}$ hemos convertido el límite en otro límite de la forma $1^{\infty}$, por lo que podemos aplicar

$$e^{\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$ de la siguiente manera:

$g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $f(x) = x+1$

De la misma forma como la función logaritmo es una función continua podemos reescribir el límite de la siguiente forma:

$$e^{\ln\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left((x+1)-1\right)\right)} = e^{\ln\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(x)\right)} = e^{\ln\left(\lim_{x\to 0} 1\right)}$$

$$e^{\ln(1)} = e^0 = 1$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \qquad \bigstar$$

***Ejemplo:***

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x+1}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma $1^{\infty}$ por lo que podemos proceder de la misma manera.

$g(x) = x+1$

$f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

$$e^{\lim_{x\to\infty}(x+1)\cdot\left(\frac{x+5}{x-1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}(x+1)\cdot\left(\frac{6}{x-1}\right)} = e^{6\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}}$$

Podemos observar que el límite es de la forma racional cuando tiende a infinito:

Podemos observar que

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 1$, entonces, $e^{6\cdot(1)} = e^{6}$

Entonces: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{x+1} = e^{6}$ ★

***Problemas variados:***

1. ***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma 0/0, ahora bien, haciendo un cambio de variable:

$u=e^x-1$, entonces, $x=\ln(u+1)$

Si $x\to 0$ con el cambio de variable $u=e^0-1=0$, entonces $u\to 0$

Y reescribimos el límite en términos de u como:

$\lim_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(u+1)}$, este límite podemos transformarlo a un límite conocido como $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ (resuelto anteriormente), entonces.

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{\dfrac{\ln\left(u+1\right)}{u}}=\frac{1}{\lim_{u\to 0}\dfrac{\ln\left(u+1\right)}{u}}=1$$

Entonces: $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ★

***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\left(\tan(x)\right)}{1-\cot an(x)}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma 0/0, ahora bien, haciendo un cambio de variable de la forma

$u=\tan(x)$, entonces, $x=\arctan(u)$

Si $x\to\dfrac{\pi}{4}$ con el cambio de variable $u=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$, entonces $u\to 1$

Y reescribimos el límite en términos de u como:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\tan(x)\right)}{1-\dfrac{1}{\tan(x)}} = \lim_{u\to 1} \frac{\ln\left(u\right)}{1-\dfrac{1}{u}} = \lim_{u\to 1} \frac{u\cdot\ln\left(u\right)}{u-1}$$

Haciendo un nuevo cambio de variable

$p = u-1$, entonces, $u = p+1$

Si $u \to 1$ con el cambio de variable $p = 1-1 = 0$, entonces $p \to 0$

Y reescribimos el límite en términos de p como:

$\lim_{p\to 0} \dfrac{\left(p+1\right)\cdot\ln\left(p+1\right)}{p}$, no queda nuevamente el límite conocido $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Por lo tanto: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln\left(\tan(x)\right)}{1-\cot an(x)} = 1$ ★

2. ***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma 0/0, ahora bien, haciendo un producto por la conjugada de manera de quitarnos el termino radical en el denominador nos queda:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\cdot 1+\sqrt{x}}{1-x}$$

haciendo un cambio de variable de la forma

$u = x-1$, entonces, $x = 1-u$

Si $x \to 1$ con el cambio de variable $u = 1-1 = 0$, entonces $u \to 0$

Y reescribimos el límite en términos de u como:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-u\right)\right)\cdot 1+\sqrt{1-u}}{u}$$

**Para recordar:**

$$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + cos(a)sen(b)$$

$$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot u\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot u\right) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot u\right)$$

Al evaluar el sen y el cos en $\frac{\pi}{2}$ nos queda:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot u\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot u\right)$, ahora reescribimos en el límite:

$$\lim_{u\to 0} \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot u\right)\cdot 1+\sqrt{1-u}}{u}$$

Haciendo un nuevo cambio de variable

$p = \frac{\pi}{2}\cdot u$, entonces, $u = \frac{2\cdot p}{\pi}$

Si $u \to 0$ con el cambio de variable $p = \frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$, entonces $p \to 0$

Y reescribimos el límite en términos de p como:

$$\lim_{p\to 0} \frac{sen\left(p\right)\cdot 1+\sqrt{1-\frac{2p}{\pi}}}{\frac{2p}{\pi}} = \frac{\pi}{2}\lim_{p\to 0}\frac{sen\left(p\right)}{p}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{2p}{\pi}}\right)$$

Podemos observar que tenemos el límite notable

$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$, por lo tanto,

$$\frac{\pi}{2}\left[\lim_{p\to 0}\frac{sen\left(p\right)}{p}\cdot\lim_{p\to 0}\left(1+\sqrt{1-\frac{2p}{\pi}}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\left[1\cdot 2\right]=\pi$$

Entonces: $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}=\pi$ ★

3. ***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan\left(x\right)$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma $0\bullet\infty$, ahora bien, podemos reescribir el límite como:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

haciendo un cambio de variable de la forma

$u=x-\frac{\pi}{2}$, entonces, $x=u+\frac{\pi}{2}$

Si $x\to\frac{\pi}{2}$ con el cambio de variable $u=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$, entonces $u\to 0$

Y reescribimos el límite en términos de u como:

$\lim_{u\to 0}u\cdot\frac{sen\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}$ y aplicando propiedades del coseno de la suma reescribimos el límite como:

$\lim_{u \to 0} -u \cdot \dfrac{sen\left(u + \frac{\pi}{2}\right)}{sen(u)}$, de la cual obtenemos nuevamente el límite notable quedándonos lo siguiente:

$$-\lim_{u \to 0} \frac{u}{sen(u)} \cdot sen\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Entonces: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(x\right) = -1$ ★

4. ***Calcule el siguiente límite:*** $\lim_{x \to -\infty} 2x\left[\ln(x+2) - \ln(x)\right]$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma ∞-∞, ahora bien, podemos reescribir el límite aplicando propiedades de logaritmo:

$\lim_{x \to -\infty} 2x \cdot \ln\left[\frac{(x+2)}{x}\right] = \lim_{x \to -\infty} \ln\left[\frac{(x+2)}{x}\right]^{2x}$ la cual nos convierte en un límite de la forma $1^{\infty}$ y podemos resolver mediante:

$$e^{\lim_{x \to x_0} g(x)(f(x)-1)}$$

Reescribimos el límite como:

$$e^{\ln\left[\lim_{x \to -\infty} 2x \cdot \left(\frac{x+2}{x} - 1\right)\right]} = e^{\ln\left[\lim_{x \to -\infty} 2x \cdot \left(\frac{2}{x}\right)\right]} = e^{\ln\left[4\right]} = 4$$

Entonces: $\lim_{x \to -\infty} 2x\left[\ln(x+2) - \ln(x)\right] = 4$ ★

5. ***Demuestre que:*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma $1^{\infty}$, ahora bien, podemos utilizar la regla de correspondencia:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{1}{x}\right)} = e \qquad \bigstar$$

6. ***Calcule el siguiente límite:*** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}$

**Solución:** Si evaluamos el límite tenemos una indeterminación de la forma $0/0$, ahora bien, podemos separar en una suma de dos límites ya que los radicales son distintos.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-\sqrt{x}+1-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$$

Resolviendo el primer límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x-1}$$

haciendo un cambio de variable de la forma

$u^5 = 2-x$, entonces, $x = 2-u^5$

Si $x \to 1$ con el cambio de variable $u = 2-1 = 1$, entonces $u \to 1$

Y reescribimos el límite en términos de u como:

$\lim\limits_{u\to 1}\frac{\sqrt[5]{u^5}-1}{2-u^5-1} = \lim\limits_{u\to 1}\frac{u-1}{1-u^5}$ quedándonos un límite de la forma racional

$$\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{1-u^5} = -\frac{1}{5}$$

Resolviendo el segundo límite:

$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1}$ podemos multiplicar por la conjugada para eliminar el elemento radical

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(x-1\right)1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\left(x-1\right)1+\sqrt{x}} = -\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{\left(x-1\right)}1+\sqrt{x}}$$

$$-\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{2-x}-1}{x-1} + \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{7}{10}$$

Por lo tanto, tenemos que: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{2-x}-\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{7}{10}$ ★

***Calcule los siguientes límites:***

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \qquad \text{R: } \frac{9}{8}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-x^2-2x-2} \qquad \text{R: } \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \qquad \text{R: } \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3} \qquad \text{R: } \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(1-x\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \qquad \text{R: } \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sen(x)-\cos(x)}{4x-\pi} \qquad \text{R: } \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3+x^2}{1+3x}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \qquad \text{R: } e^{-\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x+\sqrt{x^2+4x} \qquad \text{R: } -2$$