

Algorytmy numeryczne

Zadanie 1

Aleksander Kosma

11 Październik 2017

1 Sumowanie szeregów potęgowych

Niniejsze opracowanie prezentuje badania i wnioski z prób wyliczenia wartości funkcji \arctan . Odnosił się do postaci wyniku były wartości funkcji obliczane przez wbudowaną bibliotekę Math. Wykorzystałem dwa znane mi sposoby na obliczenie tej wartości. Są to:

-zsumowanie elementów wyliczonych z szeregu potęgowego:

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

-zsumowanie elementów wyliczonych na podstawie poprzednika:

$$a_{n+1} = a * -\frac{x^2 * (2n+1)}{2n+3}$$

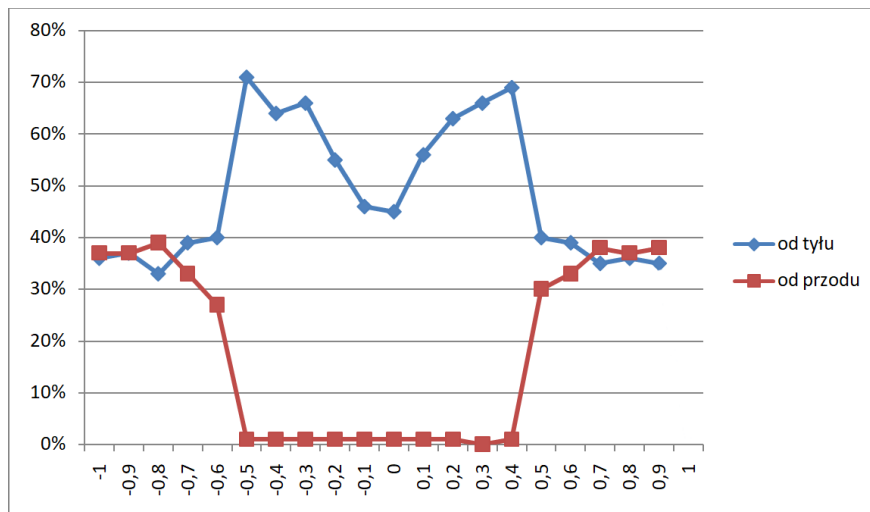
Ze względu na charakter obliczeń podzieliłem owe zsumowania na kolejne dwa:

-zsumowanie elementów licząc od tyłu

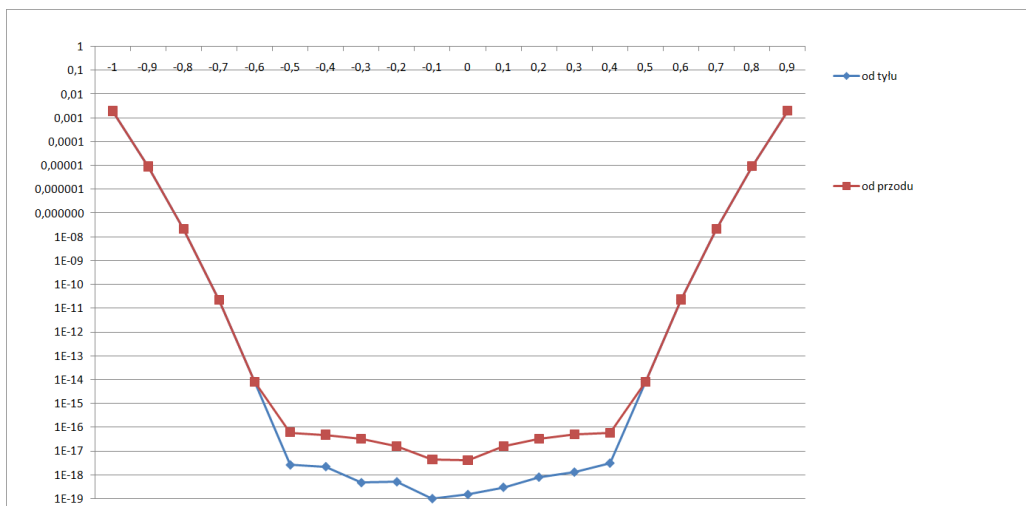
-zsumowanie elementów licząc od przodu

Pracując na zmiennej typu Double zmuszony zostałem do ograniczenia swoich obliczeń do 15-17 miejsc po przecinku. Pomimo dość niskiej precyzji obliczeń da się zauważyć pewne zachowania w wynikach. Okazuje się, że wyniki zsumowanych elementów od przodu i od tyłu dają różne rezultaty. Również ze względu na zbieżność szeregu w $[-1, 1]$ liczyłem tylko dla tego zakresu.

Pierwszy wykres prezentuje procentowe szanse na precyzyjniejszy wynik dla sumowań. Można zauważyć że bardzo dużą przewagę ma sumowanie od tyłu. Szczególnie w okolicach $[-0.5, 0.5]$



Drugi wykres prezentuje bezwzględną różnicę między wynikiem biblioteki a sumowaniami. Środkowa część wykresu ukazuje wyższość sumowania od tyłu. Jest ono precyzyjniejsze nawet o 2 rzędy wielkości.



Takie rezultaty wynikają z natury działania zmiennej double. W przypadku sumowania liczby większej do liczby mniejszej (gdzie różnica wynosi parę rzędów wielkości), zmienna odrzuca końcowe cyfry mniejszej liczby by pomieścić najistotniejsze wartości. Stąd utrata precyzji. W momencie kiedy dwie liczby mają podobną wartość, ich suma potrzebuje będzie podobnej precyzji do zapisania wyniku. W konsekwencji nie odrzuci danych. Podsumowując kwestie precyzji wyniku. Opierając się o zmienną double, można stwierdzić, że precyzja wyniku waha się między 14, a 16 miejscem po przecinku.

Na obrazku poniżej znajduje przy praktyczny przykład. Dla uproszczenia zagadnienia jest on prezentowany na zmiennej float(32 bity) która zazwyczaj mieści w sobie 8 cyfr dziesiętnych.

<p style="color: red;">tak jest</p> <p style="color: red;">8 cyfr</p> $ \begin{array}{r} 10,0010000 \\ + 0,0000001 \\ \hline 10,0010000 \end{array} $		<p style="color: green;">tak powinno być</p> <p style="color: green;">8 cyfr</p> $ \begin{array}{r} 10,0010000 \\ + 0,0000001 \\ \hline 10,0010001 \end{array} $
--	--	---

By rozwiązać problem niskiej precyzji, który zaistniał w przypadku double, trzeba mieć kontrolę nad precyzją obliczeń. Rozwiązaniem może okazać się klasa BigDecimal. Klasa ta może przechować nieograniczoną wartość liczbową, ogranicza ją jedynie skala która osiąga wartość 32-bitowego integera, czyli trochę ponad dwa miliardy miejsc.

Niestety nie udało mi się osiągnąć zamierzonej precyzji. W okolicach 17-19 miejsca wynik na BigDecimalu zaczyna różnić się na tle wyniku z Wolfram (computational knowledge engine). Wzór wydaje się jak najbardziej dobry, więc obwiniam obliczenia lub konwersje które dzieją się może na doublech do których nie mam dostępu lub o nich nie wiem.

Zdarzały się sytuacje, w których przybliżenie wyniku biblioteki różniło się od wyniku z Wolfram. Za to wynik na BigDecimalach był precyzyjniejszy. Niestety ze względu na brak szybkiego dostępu do wyników z Wolfram z poziomu kodu ciężko stworzyć realne statystyki. Oto tylko parę przykładów z moich obliczeń, lecz one nic nie dowodzą:

radian	Wolfram	Biblioteka	BigDecimal	Double tył
0,2756	0.26892394051650700	0.26892394051650703	0.26892394051650701	0.26892394051650703
0,33336	0.32177455420463912	0.32177455420463913	0.32177455420463911	0.32177455420463913
0,27136	0.26497899260525905	0.26497899260525903	0.26497899260525905	0.26497899260525903
0,2137	0.21053326607324131	0.21053326607324133	0.21053326607324131	0.21053326607324133

Dane do wykresów o doublech obliczone zostały na 2 milionach próbek.