

Poprawkowa lista zadań z teorii liczb

Aleksander Łukasiewicz

16 marca 2017

Przypominam, że:

- (a, b) oznacza największy wspólny dzielnik liczb a, b ;
- $d|n$ oznacza "d dzieli n".

Zadania należy oddać do 23.03.2017.

1

Niech $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Pokazać, że p jest liczbą pierwszą $\iff p|(p-1)! + 1$.

2

Niech p - liczba pierwsza, $p > 7$. Pokazać, że $\underbrace{11 \dots 1}_{p-1}$ jest podzielna przez p .

3

Niech $F_n = 2^{2^n} + 1$. Pokazać, że $F_n = \prod_{i=0}^{n-1} F_i + 2$ dla $n \geq 1$. Wywnioskować, że dla $n \neq m$ zachodzi $(F_n, F_m) = 1$. Wywnioskować, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

4

100 krasnoludków stoi przed rzędem 100 zapalonych lampek. Pierwszy krasnoludek przechodzi i gasi wszystkie lampki. Drugi krasnoludek przechodzi i zapala co drugą lampkę. Trzeci krasnoludek przechodzi i majstruje przy co trzeciej lampce - jeśli jest zapalona, to ją gasi, a jeśli jest zgaszona, to ją zapala. Ogólnie rzecz ujmując, i -ty krasnoludek zmienia stan co i -tej lampki. Ile lampek będzie zapalonych po tym, gdy wszystkie krasnoludki już sobie przy nich pomajstrują? Co jeśli krasnoludków i lampek byłoby 10^6 ? A co jeśli byłoby ich n ?