ISSN in progress
МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
Номер 1 (1) | 2015

УДК 519.62/63

# ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ПУАССОНА, ЩО ОТРИМАНО ЗА РІЗНИМИ МЕТОДАМИ

**А. С. Корчакова**,
**О. М. Нікітенко**, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
*Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна*
nikon@kture.kharkov.ua

Розглянуто чотири методи розв'язання рівняння Пуассона, в яких права частина та крайові умови задаються поліномами: метод рядів, метод диференційних перетворень, метод R-функцій, сіткові методи.

Здійснено порівняння розв'язків, що отримано за цими методами.

За результатами аналізу розв'язків отримано, що за методами рядів та диференційних перетворень можна отримати аналітичний розв'язок, за методом *R*-функцій максимальна відносна похибка може досягнути 14%, за сітковими методами максимальна відносна похибка може досягнути 4%.

**Ключові слова:** Рівняння Пуассона, метод рядів, метод диференційних перетворень, метод *R*-функцій, метод сіток.

**Вступ.** При визначенні аеро- та гідродинамічних характеристик літальних апаратів та суден, при вивченні дифракції електромагнітних хвиль, у задачах магнітної гідродинаміки, теплообміну, фільтрації ґрунтів, стійкості пластин та оболонок тощо виникає необхідність у обчисленні різноманітних полів — силових теплових, електромагнітних, гідродинамічних тощо.

Характерною особливістю полів є їх залежність не тільки від фізичних властивостей середовища, величин та характеру збудників поля, але й від їх геометричних форм, які мають у реальних задачах досить складну конфігурацію. Це створює специфічні труднощі під час розробки методів обчислення полів, що пов'язано з необхідністю враховувати геометричну інформацію й додавання до неї обчислювального алгоритму [6, 7].

Проектування та теоретичні дослідження таких систем вимагають сумісного розв'язання різноманітних рівнянь, таких як рівняння руху системи, рівняння збудження та рівняння Пуассона.

Як з теоретичної так і практичної точок зору найбільше ускладнень викликають методи розв'язання рівняння Пуассона.

У формулюванні кожної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними, до яких належить рівняння Пуассона, поряд з інформацією аналітичного характеру про вигляд рівняння та крайові умови маємо також геометричну інформацію про форму тіл, у яких визначається поле.

Геометрична інформація впливає на картину поля, тому будь-який метод розв'язання крайової задачі має передбачати додавання цієї інформації до алгоритму розв'язання [8].

Звичайно, будь-який метод розв'язання крайової задачі мусить враховувати обидва види інформації. У таких класичних методах, як, наприклад, метод Фур'є або метод інтегральних перетворень, геометрична інформація враховується через вдалий вибір систем координат; у методі конформних перетворень — побудовою підходящої твірної функції. Однак такі підходи не завжди є можливими. Зростаючі запити практики вимагають розгляду все складніших крайових задач, для розв'язання яких до тепер не існує точних методів, тому застосовуються різноманітні наближені методи розв'язання.

Серед наближених методів розв'язання крайових задач найпопулярнішими є сіткові та варіаційні методи. Ці методи мають універсальний характер, можуть застосовуватися для різноманітних диференційних операторів, різноманітних областей та типів крайових умов. У сіткових методах (скінчених різниць, скінчених елементів тощо) вся вихідна інформація, як аналітична, так і геометрична, перетворюється до цифрового вигляду й у результаті розв'язання задачі отримують числові масиви. У варіаційних методах врахування геометричної інформації здійснюється в процесі побудови так званих координатних послідовностей функцій, які задовольняють крайовим умовам та мають необхідні властивості повноти та лінійної незалежності при обчисленні квадратур по області, що розглядається.

Перелічені вище методи можуть застосовуватися в різноманітних сполученнях один з одним, однак кожен з них є незалежним методом, який призначено для розв'язання крайової задачі від початку до кінця [8].

Тому метою цієї статті є порівняння розв'язків рівняння Пуассона певного класу, що отримано за методами, які найчастіше використовуються: метод рядів, метод диференційних перетворень, метод R-функцій та сіткові методи.

**Формулювання задачі.** Сформулюємо задачу, яку розв'язуватимемо в цій статті.

Знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = G\left(x, y\right) \tag{1}$$

всередині квадрата зі стороною довжини $a$ (рис. 1).

Крайові умови є поліноміальними:

$$U\left(0, y\right) = \sum_{i=0}^{n} b_i y^i \,;\; U\left(a, y\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i y^i \,;\; U\left(x, 0\right) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i \,;\; U\left(x, a\right) = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i \,. \tag{2}$$

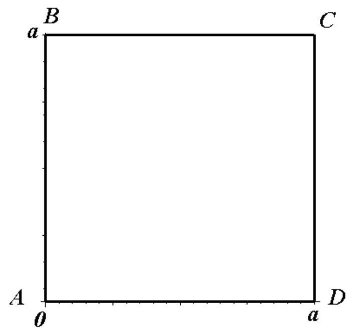


Рис. 1. Область задачі

**1. Розв'язання рівняння Пуассона за допомогою рядів.** Розв'язок поставленої задачі шукатимемо у вигляді

$$U\left(a,y\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x^{i}y^{j}\ . \tag{3}$$

Алгоритм побудови розв'язку полягає у наступному:

1. Розв'язок (3) підставляємо у рівняння (1).
2. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях поліному.
3. Розв'язок (3) підставляємо у рівняння (2).
4. Прирівнюємо коефіцієнти при однакових ступенях поліному.
5. Будуємо остаточний розв'язок.

Розглянемо роботу цього алгоритму на конкретному прикладі.

Нехай $G\left(x,y\right)=20$, сторона квадрата $a=1$ та такі крайові умови

$$U\left(0,y\right)=1+3y+6y^{2}; \tag{4}$$

$$U\left(1,y\right)=8+7y+6y^{2}; \tag{5}$$

$$U\left(x,0\right)=1+2x+4x^{2}; \tag{6}$$

$$U\left(x,1\right)=10+7x+4x^{2}. \tag{7}$$

Застосовуючи вище згаданий алгоритм після нескладних алгебраїчних перетворень остаточно отримаємо

$$U\left(x,y\right)=1+2x+3y+4x^{2}+5xy+6y^{2}. \tag{8}$$

Таким чином добудемо аналітичний розв'язок, з яким у подальшому порівнюватимемо розв'язки, що буде здобуто за допомогою інших алгоритмів.

На рис. 2 наведемо графічне зображення розв'язку задачі (1).

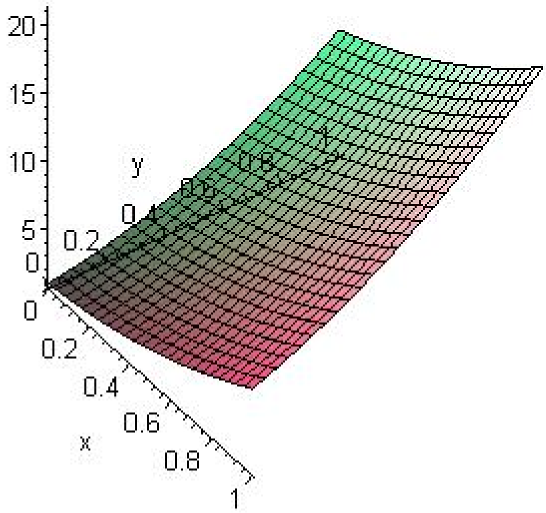


Рис. 2. Графічне зображення розв'язку задачі (1)

**2. Розв'язання рівняння Пуассона за методом диференційних перетво-**

**рень.** На додаток до існуючих методів інтегральних перетворень та усунення недоліків, які їм притаманні, Г. Є. Пуховим було розроблено методи, що ґрунтуються на диференційних перетвореннях [9—12]. Диференційні перетворення дозволяють розв'язувати диференційні рівняння як аналітичним, так і чисельно-аналітичними методами. Основна перевага диференційних перетворень, у порівнянні з інтегральними перетвореннями, полягає в розширенні класу задач, що розв'язують за їх допомогою, на нелінійні диференційні рівняння. Одним з найефективніших методів розв'язання диференційних рівнянь у тому числі й нелінійних є метод диференційних перетворень [8]. У статті [1] розширено клас задач, що розв'язують за допомогою диференційних перетворень, на рівняння в частинних похідних, до яких відноситься рівняння Пуассона. Через те, що цей метод є точним операційним методом, він дозволяє розв'язувати крайові задачі при зміні змінних перетворення як на скінченних, так і на нескінченних межах і допускає добувати аналітичний і чисельно-аналітичний розв'язок, що значно спрощує обчислювальну складність таких задач у порівнянні з чисельними методами [1].

Застосовуючи метод диференційних перетворень, переведемо рівняння (1) в область зображень

$$\frac{(k_1+1)(k_1+2)}{H_x^2}U(k_1+2,k_2)+\frac{(k_2+1)(k_2+2)}{H_y^2}U(k_1,k_2+2)=G(k_1,k_2). \quad (9)$$

При цьому крайові умови (4)—(7) набудуть такого вигляду

$$U(0,k_2)=\delta(k_2)+3\delta(k_2-1)+6\delta(k_2-2); \quad (10)$$

$$U(k_1,0)=\delta(k_1)+2\delta(k_1-1)+4\delta(k_1-2); \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(k_2-n)\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{H_y}\right)^m U(m,n)=8\delta(k_2)+7H_y\delta(k_2-1)+6H_y^2\delta(k_2-2); \quad (12)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\delta(k_1-m)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{H_x}\right)^n U(m,n)=10\delta(k_1)+7H_x\delta(k_1-1)+4H_x^2\delta(k_1-2), \quad (13)$$

де $\delta(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$ — тейлорівська одиниця [9—12].

Підставляючи цілочисельні значення $k_1$ та $k_2$ у зображення рівняння Пуассона (9) та крайових умов (10)—(13), добудемо дискрети диференційного спектру. Результати обчислень за $H_x=H_y=1$ наведено у таблиці 1.

Табл. 1. Дискрети диференційного спектру

| $k_2$ \ $k_1$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 | 6 | 0 |
| 1 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 0 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

За дискретами диференційного спектру оберненим перетворенням з області зображень в область оригіналів

$$u\left(x,y\right)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x}{H_x}\right)^{k_1}\left(\frac{y}{H_y}\right)^{k_2}U\left(k_1,k_2\right)$$

отримаємо розв'язок рівняння Пуассона (1)

$$U\left(x,y\right)=1+2x+3y+4x^2+5xy+6y^2.$$

Як бачимо цей розв'язок повністю збігається з розв'язком (8).

**3. Розв'язання рівняння Пуассона за методом $R$-функцій.** Дотепер уважалося, що питання про вибір координатних послідовностей для будь-яких складних областей є справою щасливого випадку, й навіть для найпростішого типу крайової задачі — однорідної задачі Діріхле, де функція, яку визначають, на межі області повинна дорівнювати нулю,— не існувало яких-небудь загальних методик та рекомендацій. Якщо ж складність форми області збігалася зі складністю крайових умов, то задача побудови координатних функцій уважалася зовсім безнадійною. Ця обставина була однією з основних перепон на путі практичного застосування варіаційних методів, які подібно до методу Бубнова — Гальоркіна потребують справдження всіх крайових умов.

Треба зауважити, що метод $R$-функцій, який також називають структурним методом [2, 4, 13—16], не припускає обов'язкового застосування саме варіаційних методів. Метод $R$-функцій — це назва деякого загального підходу до конструювання на аналітичному рівні наближених розв'язань крайових задач для областей складної форми зі складним характером крайових умов. Тут мається на увазі розвиток засобів конструктивної теорії функцій, які базуються на застосуванні тих чи інших множин функцій — більш загальних множин ніж традиційні лінійні оболонки тих чи інших послідовностей функцій [2, 4, 13—16].

Структурний метод (метод $R$-функцій) — ефективний метод розв'язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними. $R$-функції, які запроваджено В. Л. Рвачовим у 1963 р., не є спеціальними функціями, а утворюють множину, що перетинається з множиною звичайних елементарних функцій. Ця обставина дозволяє під час використання $R$-функцій не виходити за межі звичайних засобів, які зазвичай застосовуються, легко здійснювати різноманітні обчислювальні та аналітичні операції.

Характерною особливістю $R$-функцій є те, що кожній з них відповідає певна функція двозначної логіки.

У формулюванні кожної крайової задачі для рівнянь з частинними похідними поряд з інформацією аналітичного характеру про вигляд рівняння та крайові умови маємо також геометричну інформацію про форму тіл, у яких визначається поле.

Геометрична інформація впливає на картину поля, тому будь-який метод розв'язання крайової задачі має передбачати додавання цієї інформації до алгоритму розв'язання.

У методі $R$-функцій припускається обов'язкове додавання одного з перелічених методів. Таким чином, виявляється можливим будувати такі формули, які за будь-якого вибору невизначених компонент точно відповідають всім крайовим умовам. Водночас забезпечується умова повноти, яка полягає у принциповій можливості такого вибору невизначених компонент, що призводить до точного розв'язку крайової задачі, чи принаймні до досить гарного його наближення. При цьому є можливим урахування різноманітної апріорної інформації про розв'язок, що знаходять, яку частково можна здобути з відомих точних розв'язків подібних задач. Це призводить до підвищення «якості» структурних формул.

Однією з основних проблем, що виникають під час використання варіаційних методів, за складної форми області або складного характеру крайових умов, побудова послідовності координатних функцій, які відповідають крайовим умовам задачі.

Один з можливих варіантів вирішення цієї проблеми базується на використанні теорії $R$-функцій [2, 4, 13—16] і побудові структурних формул (структур) розв'язку крайових задач.

Під структурою розв'язку крайової задачі розуміють пучок функцій
$$u = B\left(\Phi, \omega, \omega_1\right),$$
що відповідають заданим крайовим умовам за будь-якого вибору функції $\Phi$, яку називають невизначеною компонентою структури розв'язку. Функції
$$\omega\left(x, y\right) = 0,\ \omega_1\left(x, y\right) = 0$$
є рівняннями межі області або окремої її ділянки.

У випадку неоднорідної задачі Діріхле структуру розв'язку можна зобразити у вигляді
$$u = \omega\Phi + \phi,$$
де
$$\phi = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\phi_i}{\omega_i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\omega_i}}$$
відповідає крайовим умовам (4—7). Цю формулу отримано В. Л. Рвачовим і її називають формулою «склеювання» [2, 4, 13—16].

Методи побудови функції $\omega\left(x, y\right)$ для практично задовільної області досить детально викладено у монографіях В. Л. Рвачова [13—16].

Як було показано В. Л. Рвачовим, опис геометричних об'єктів можна формалізувати, якщо скористатися алгеброю множин. Базований на алгебрі множин опис складних геометричних об'єктів є своєрідною початковою формалізацією, від якої, використовуючи $R$-функції, можна здійснити перехід до звичайного аналітичного опису за допомогою рівнянь або нерівностей.

Побудуємо рівняння, які описують окремі ділянки поверхні:

для відрізка $AD$ $\omega_1 = y$;

для відрізка $AB$ $\omega_2 = 1 - x$;

для відрізка $BC$ $\omega_3 = 1 - y$;

для відрізка $CD$ $\omega_4 = x$.

Тоді рівняння $\omega$ області $ABCD$ матиме вигляд

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 .$$

Крайові умови (4)—(7) набудуть вигляду

$$\phi_1 = 1 + 3y + 6y^2 ;\ \phi_2 = 1 + 2x + 4x^2 ;\ \phi_3 = 10 + 7x + 4x^2 ;$$

$$\phi_4 = 8 + 7y + 6y^2 .$$

Враховуючи це будують формулу «склеювання».

Як координатні функції виберемо такий набір функцій: 1, $x$, $y$, $xy$, $x^2$, $y^2$.

Через складність виразу розв'язку за методом $R$-функцій на рис. 3 наведемо графічне зображення розв'язку задачі (1).

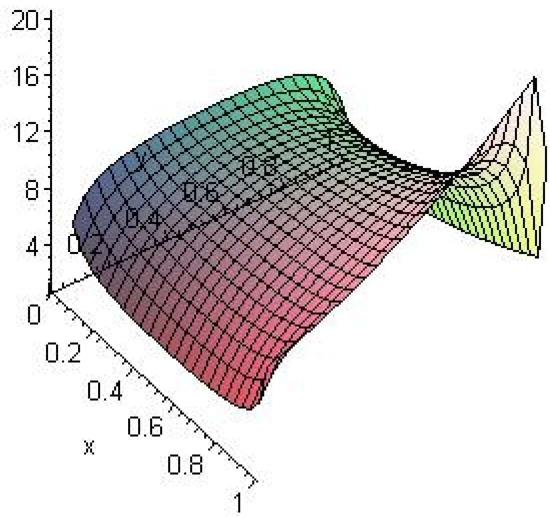


Рис. 3. Графічне зображення розв'язку задачі (1) за методом $R$-функцій

Порівнюючи зображення на рис. 2 та 3, спостерігаємо відмінності, особливо на краях області задачі. Подальші дослідження показали, що максимальна відносна похибка не перевищує 14% на межах області задачі.

**4. Розв'язання рівняння Пуассона за методом сіток.** Розглянемо метод сіток [16] для розв'язання задачі (1). Задамо число $n$ і розіб'ємо відрізок $[0;1]$ по $x$ та по $y$ на $n$ однакових частин. Таким чином задають крок розбивки

$h = \dfrac{1}{n}$ і розглядають вузли $x_i = ih$, де $i = 0,...,n$ та $y_i = jh$, де $j = 0,...,n$.

Вузли сітки мають координати $(x_i; y_j)$, $i, j = 0,...,n$. Розглядатимемо значення функцій, що описують задачу (1), лише у цих вузлах сітки. Замінимо похідні, що містяться у рівнянні (1) їхніми кінцево-різницевими аналогами [3, 5].

Підставивши ці вирази в рівняння Пуассона, добудемо такий його дискретний аналог

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = g_{i,j}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно $u_{i,j}$ переходимо до дискретного аналогу задачі (1):

$$\begin{cases} u_{i,j} = \dfrac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4} - \dfrac{h^2}{4} g_{i,j}, \quad i, j = 1,...n-1 \\ u_{i,0} = \phi_1^{(i)}, u_{0,j} = \phi_2^{(j)}, \quad i, j = 0,...n \\ u_{i,n} = \phi_3^{(i)}, u_{n,j} = \phi_4^{(j)} \end{cases} \qquad (14)$$

Вираз (14) є системою алгебричних рівнянь з $(n-1)^2$ невідомими $u_{i,j}$, де $i, j = 1,...,n-1$. У подальшому систему (14) розв'язують будь-яким з відомих методів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь.

Наведемо графічне зображення розв'язку задачі (1) за методом сіток (рис. 4).

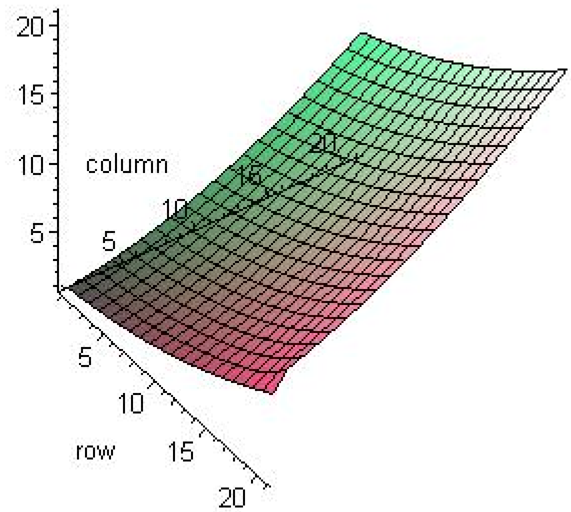


Рис. 4. Графічне зображення розв'язку задачі (1) за методом сіток

Порівнюючи зображення на рис. 2 та 4, спостерігаємо відмінності, особливо на краях області задачі. Подальші дослідження показали, що максимальна відносна похибка не перевищує 14% на межах області задачі.

**Висновки.** В результаті розглянуто чотири методи розв’язання рівнянь Пуассона, права частина та крайові умови яких визначаються поліномами.

Аналіз результатів розв’язків, які здобуто застосуванням розглянутих методів, показав, що:

1) метод рядів дозволяє здобути аналітичний розв’язок, хоча й за відносно тривалий час в залежності від максимального ступеня поліному;

2) метод диференційних перетворень, як і метод рядів дозволяє здобути аналітичний розв’язок і застосувати обчислення за допомогою комп’ютера, що дозволяє значно скоротити час обчислень;

3) метод $R$-функцій дозволяє побудувати розв’язок рівняння Пуассона у вигляді функціональної залежності, хоча й досить складної, застосування цього методу для прискорення обчислень вимагає застосування комп’ютера, однак максимальна відносна похибка таких обчислень може досягати 14%;

4) сіткові методи дозволяють отримати чисельний розв’язок рівняння Пуассона, що вимагає обов’язкового застосування комп’ютерів, при цьому максимальна відносна похибка таких обчислень може досягати 4%.

Предметом подальших досліджень є дослідження розв’язання рівняння Пуассона для інших класів крайових задач.

**Список використаних джерел**

1. Баранов В. Л. Символічний метод розв’язку рівнянь в частинних похідних на основі системоаналогових диференціальних перетворень / В. Л. Баранов, С. П. Водоп’ян, Р. М. Костюченко // Вісник ЖДТУ. — 2005. — 3 (34). — С. 89—95.

2. Бойко Б. Т. Уравнения математической физики : учебн. пособ. / Б. Т. Бойко, Л. В. Курпа, Б. Ф. Сенчук; под ред. Л. В. Курпы. — Харьков : НТУ «ХПИ», 2002. — 288 с.

3. Волков Е. А. Численные методы : учеб. пособ. / Е. А. Волков — Москва : Наука, 1982 — 256 с.

4. Вычислительные методы в задачах радиоэлектроники : учеб. пособ. / В. А. Дикарев, В. П. Кольцов, А. Ф. Мельников, Л. И. Шкляров. — Киев : Вища школа, 1989. — 303 с.

5. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн : пер. с англ. Б. Н. Казака, под ред. Б. М. Неймарка. — Москва : Мир, 1977 — 584 с.

6. Нікітенко О. М. Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні / О. М. Нікітенко // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. — 2000. — Вип. 113. — С. 113—120.

7. Nikitenko O. M. Distribution of electrostatic potential in crossed-field system with complex electrodes’ configuration / O. M. Nikitenko // Journal of Microwaves and Optoelectronics. — 2000. — Vol. 2, No. 2. — P. 1—9.

8. Нікітенко О. М. Maple: Розв’язання інженерних та наукових задач : навч. посіб. / О. М. Нікітенко — Харків : ХНУРЕ, 2011. — 288 с.

9. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г. Е. Пухов — Киев : Наукова думка, 1984. — 420 с.

10. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г. Е. Пухов — Киев : Наукова думка, 1986. — 158 с.

11. Пухов Г. Е. Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований / Г. Е. Пухов — Киев : Наукова думка, 1988. — 216 с.

12. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели / Г. Е. Пухов. — Киев : Наукова думка, 1990. — 184 с.
13. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике / В. Л. Рвачев. — Киев : Наукова думка, 1974. — 259 с.
14. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. — Киев : Наукова думка, 1982. — 552 с.
15. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики / В. Л. Рвачев. — Киев : Техніка, 1967. — 212 с.
16. Рвачев В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. — Киев : Наукова думка, 1976. — 287 с.

*Стаття надійшла до редакції 6.04.2015.*

**Бібліографічний опис статті**

Корчакова А. С. Порівняння розв'язків рівняння Пуассона, що отримано за різними методами [Електронний ресурс] / Ангеліна С. Корчакова, Олександр М. Нікітенко // Математика в сучасному технічному університеті : Збірник науково-методичних праць / Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут». — Київ, 2015. — Вип. 1. — С. 18—29. — Бібліогр. : 16 назв. — Режим доступу : (дата звернення: ?.?.2015).

**A.S. Korchakova, O.M. Nikitenko**. Comparison of Poisson's equation solution obtained by different methods (*Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine*).

**2010 MSC.** 35J05, 65Nxx.

The solutions of Poisson's equation with right part and boundary conditions described by polynomials were observed. To solve this equation, we used such methods: series' method, differential transformation method, *R*-function method, grid method.

This work purpose was comparison the solutions of Poisson's equation obtained by above mentioned methods.

Mentioned problem solved for square area with $a$ length side.

Using series' method, we substituted the series with unknown coefficients in Poisson's equation boundary conditions and compared terms with the same degrees. Thus we obtained necessary coefficients. The solution was obtained by series' method is analytical.

Using differential transformation method, we transformed Poisson's equation and its boundary conditions from original area to image one. Substituted whole numbers $k_1$ and $k_2$ to image's equation we obtained differential spectrum discrets.

By reverse transformation from image area to original one we defined solution in original area. The solution was obtained by differential transformation method is analytical too.

R-function method was required to build the structured functions and geometrical information, described equations of partial surfaces and boundary conditions. Using *R*-function algorithm we obtained very difficult function.

Compare this solution and analytical one we had maximum relative error near 14%.

Using grid method we defined number $n$ and divided the segment $[0;1]$ on the $n$ equal parts. Function values defined in grid points.

The simplest difference approximation is obtained by replacing the derivatives with centered difference approximation

Using a simple five-point difference approximation, this choice for ordering generally leads to a block tri-diagonal matrix with each block. Thus we got the system of linear algebraic equations. Solved this system obtained numerical solution.

Compare this solution and analytical one we had maximum relative error near 4%.

As results we observed four methods of Poisson's equation's solution. Right part of Poisson's equation's and boundary conditions described by polynomials.

The solutions' analysis shown:

1. Using series' method we obtained the analytical solution;
2. Using differential transformation method we obtained the analytical solution too;
3. Using *R*-function method we obtained very difficult function as solution and maximum relative error was near 14%;
4. Using grid method we obtained numeric solution and maximum relative error was near 4%;

**Keywords:** Poisson's equation, series method, differential transformation method, *R*-function method, grid method.

**References**

1. Baranov, V. L., Vodoian, S. P., and Kostiuchenko, R.M. (2005), "Symbolic method of solution of partial equations based on system-analog differential transformation", Visnyk ZhSTU, vol. 3 (34), pp. 89–95.

2. Boiko, B. T., Kurpa L. V., Senchuk B. F. (2002), Uravneniya matematicheskoy fiziki [Mathematical physics equations], NTU "KhPI", Kharkiv, Ukraine.

3. Volkov, Ye. A. (1982), Chislennye metody [Numerical methods], Nauka, Moscow, Russia.

4. Dikarev, V. A., Koltsov, V. P., Melnikov, A. F., and Shkliarov L. I. (1989), Vychislitelnye metody v zadachakh radioelektroniki [Computation methods in Radioelectronics problems], Vyshcha shkola, Kyiv, Ukraine.

5. McCracken, D. and Dorn, W. (1977) Chislennye metody i programirovannie na Fortrane [Numerical methods and Fortran programming], Translated by Neymark, B. M. Mir, Moscow, USSR.

6. Nikitenko, O. M. (2000), "Distribution of Electrostatic potential in cylindrical magnetron", Radiotekhnika. All-Ukr. Sci. Interdep. Mag. issue 113, pp. 113–120.

7. Nikitenko, O. M. (2000), "Distribution of electrostatic potential in crossed-field system with complex electrodes' configuration", Journal of Microwaves and Optoelectronics, vol. 2, no 2, pp. 1–9.

8. Nikitenko, O. M. (2011), Maple: Rozviazannia inzhenernykh ta naukovykh zadach [Maple: Solution of engineering and scientific problems] : High school textbook, KhNURE, Kharkiv, Ukraine.

9. Pukhov G. Ye. (1984), Differentsialnyie preobrazovaniya funktsiy i uravneniy [Differential transformations of functions and equations], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

10. Pukhov G. Ye. (1986), Differentsialnyie preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskih protsessov [Differential transformations and mathematical simulation of physical processes], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

11. Pukhov G. Ye. (1988), Priblizhennyie metodyi matematicheskogo modelirovaniya, osnovannyie na primenenii differentsialnyih T-preobrazovaniy [Approximation methods of mathematical simulation based on using differential T-transformations], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

12. Pukhov G.Ye. (1990), Differentsialnyie spektryi i modeli [Differential spectra and models], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

13. Rvachev, V. L. (1974), Metodyi algebryi logiki v matematicheskoy fizike [Methods of logical algebra in mathematical physics], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

14. Rvachev, V. L. (1982), Teoriya R-funktsiy i nekotoryie ee prilozheniya [R-functions' theory and its applications], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

15. Rvachev, V. L. (1967), Geometricheskie prilozheniya algebryi logiki [Geometrical applications of logical algebra], Tekhnika, Kyiv, Ukraine.

16. Rvachev, V. L. (1976), Algebra logiki i integralnyie preobrazovaniya v kraevyih zadachah

[Logical algebra and integral transformations in boundary problems], Naukova dumka, Kyiv, Ukraine.

**А. С. Корчакова, А. Н. Никитенко.** Сравнение решений уравнения Пуассона, полученных разными методами (*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина*).

Рассмотрено четыре метода решения уравнения Пуассона, в которых правая часть и граничные условия задаются полиномами: метод рядов, метод дифференциальных преобразований, метод R-функций, сеточные методы.

Сделано сравнение решений, которые получены по этим методам.

По результатам анализа решений получено, что по методам рядов и дифференциальных преобразований можно получить аналитическое решение, по методу R-функций максимальная относительная погрешность не превышает 14%, по методу сеток максимальная относительная погрешность не превышает 4%.

**Ключевые слова:** Уравнение Пуассона, метод рядов, метод дифференциальных преобразований, метод R-функций, метод сеток.