УДК 519.854.2

ПАВЛОВ О. А.,
ВОЗНЮК О. В.,
ЖДАНОВА О. Г.

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Робота присвячена дослідженню двох задач дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності, які відрізняються критеріями знаходження компромісних розв'язків. Було розроблено та описано декілька планів експериментів і на їх основі були зроблені відповідні висновки щодо роботи критеріїв.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ, ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, КОМПРОМІСНИЙ РОЗВ'ЯЗОК, КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ, ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.

The article is devoted to two problems of linear fractional programming under uncertainty which differs in finding compromise solution criteria. Several experiment plans were made and its results were analyzed and described.

KEYWORDS: UNCERTAINTY, LINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING, COMPROMISE SOLUTION, COMBINATORIAL OPTIMIZATION, DESIGN OF EXPERIMENTS.

1. Вступ

Невизначеність виникає, коли існує деяка множина альтернативних значень для одного и того самого параметра задачі. Задачі в недетермінованій постановці виникають в ситуаціях, коли немає попередньої ймовірнісної оцінки можливих майбутніх ситуацій або значень параметрів, які їх характеризують.

Задачі дробово-лінійного програмування використовуються у випадку коли необхідно максимізувати (мінімізувати) значення відношення деяких функцій. Такий тип задач використовується при вирішення певних економічних задач, наприклад, оптимізації відношення прибутку до витрат.

2. Постановка задачі

Задача комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності має вигляд [1, 2]:

$$\underset{\sigma\in\Omega}{extremum}\sum_{i=1}^{s}\omega_i k_i(\sigma), \qquad (1)$$

де ω_i — числа, $k_i(\sigma)$ — i-та довільна числовая характеристика допустимого розв'язку σ $(i=\overline{1,s})$, Ω — множина допустимих розв'язків. Під невизначенністю тут розуміється невизначенність значень коефіцієнтів ω_i $(i=\overline{1,s})$.

В роботах [1, 2] були викладені основи конструктивної теорії знаходження компромісного розв'язку для такого класу задач.

Задача дробово-лінійного програмування (ЗДЛП) у детермінованій постановці має вигляд:

$$\underset{x}{extremum}\frac{\sum_{i=1}^{n}c_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}d_i x_i}, \qquad (2)$$

$$Ax=b,\ x\geq 0\,. \qquad (3)$$

де $c=(c_1,...,c_n)^T$, $d=(d_1,...,d_n)^T$, $b=(b_1,...,b_m)^T$, $A=(a_{ij})$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ — дійсні числа; $x=(x_1,...,x_n)^T$ — змінні задачи.

Для того, щоб при поясненнях уникнути необхідності розгляду множини різних можливих варіантів, припустимо, що на x_i накладаються такі обмеження, при яких знаменник в (2) строго додатній для всіх допустимих значень x_i, а також, що максимум $c(x)$ є скінченним [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i \neq 0, \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_i > 0. \qquad (5)$$

Отже, існує R наборів коефіцієнтів $c^r = (c_1^r, ..., c_n^r)^T$, $r = 1, ..., R$ можливих значень коефіцієнтів $c_i, i = 1, ..., n.$ Тоді задача (2) перетворюється на задачу дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності (ЗДЛПУН). За наявності невизначенності ставиться задача знаходження так званого компромісного розв'язку задачі [1, 2].

3. Критерії оцінки компромісних розв'язків

Позначимо через f_{opt}^r - значення цільової функції (2) за умови, що $(c_1, ..., c_n)^T = (c_1^r, ..., c_n^r)^T$, $r = 1, ..., R$ (значення часткового функціоналу).

Критерій A

Знайти компромісний розв'язок $x = (x_1, ..., x_n)^T$, що задовольняє (3) і для якого виконується

$$\Delta_i \le l_i, l_i \ge 0, i = 1, ..., R, \qquad (6)$$

де для задачі на мінімум:

$$\Delta_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i} - f_{opt}^r, r = 1, ..., R, \qquad (7)$$

а для задачі на максимум відповідно:

$$\Delta_r = f_{opt}^r - \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^r x_i}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, r = 1, ..., R. \qquad (8)$$

Критерій B

Якщо компромісного розв'язку, що задовольняє критерію A не існує, то знайти $x = (x_1, ..., x_n)^T$, що задовольняє (3) на якому досягається

$$\min_x \sum_{r=1}^{R} \omega_r \max\{0; \Delta_r - l_r\}, \qquad (9)$$

де $\omega_r > 0, r = 1, ..., R$ - відомі експертні вагові коефіцієнти.

4. Побудова компромісного розв'язу

Як відомо [3], задача (2)-(3) зводиться до задачі лінійного програмування (ЗЛП) наступним чином.

Введемо нові змінні

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} d_i x_i}, y_i = y_0 x_i, i = 1, ..., n. \qquad (10)$$

Тоді задача (2)-(3) прийме вигляд

$$\underset{y,k}{extremum} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i, \qquad (11)$$

$$Ay = y_0 b, \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1, \ y \ge 0, \qquad (13)$$

де $y = (y_1, ..., y_n)^T$.

По розв'язку ЗЛП (11)-(13) знаходиться оптимальний розв'язок задачі (2)-(3): $x_i = \frac{y_i}{k}, i = 1, ..., n.$ При цьому оптимальні значення функціоналів (2) і (11) приймають однакове значення.

5. Знаходження компромісного розв'язку за критеріями *A* та *B*

Компромісний розв'язок ($x_i = \frac{y_i}{y_0}$, $i = 1, ..., n$) за критеріями A та B (якщо за критерієм A розв'язку не існує) знаходиться за розв'язком наступної ЗЛП:

$$z = \min_{y,z,k} \sum_{r=1}^{R} \omega_r z_r, \qquad (14)$$

$$Ay = y_0 b, \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 1, \qquad (16)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^r y_i - z_r \le f_{opt}^r + l_r, \;\; r = 1,\ldots,R. \;\; (17)$$

Рисунок 1 ілюструє зв'язок основних елементів теоретичних положень знаходження компромісного розв'язку задачі в недетемінованій постановці.

Якщо вихідна задача (2) - (3) є задачею на максимум, то в задачі (14) - (17) нерівності (17) мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^r y_i + z_r \ge f_{opt}^r - l_r, \;\; r = 1,\ldots,R. \;\; (18)$$

Зміст величин z_r, $r = 1,\ldots,R$: z_r - величина, яка показує наскільки ми повинні "посунутися" (поступитись) від встановленого допустимого відхилення від найкращого значення $r-$го часткового функціоналу у випадку якщо не задовольняються обмеження (6).

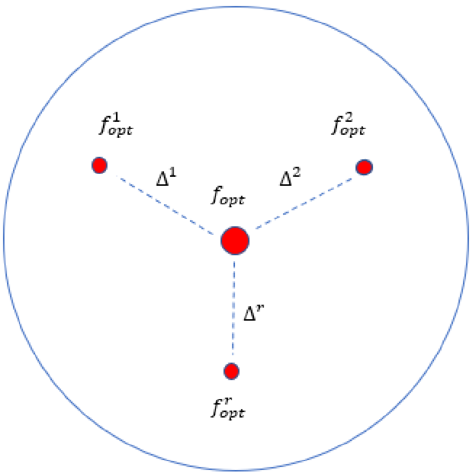

Рисунок 1 – Ілюстрація основних елементів теоретичних положень

6. План експериментів

Метою експериментів є дослідження залежності вихідних даних задачі від зміни деяких вхідних параметрів.

Далі будуть представлені результати експериментів трьох типів для випадку $R = 2$.

Позначимо через N - кількість експериментів.

Величини $c = (c_1,\ldots,c_n)^T, d = (d_1,\ldots,d_n)^T$, $b = (b_1,\ldots,b_m)^T$, $A = (a_{ij}),\; i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ розподілені рівномірно.

Експеримент типу 1

Мета – дослідження того, як впливає зміна величин встановлених допустимих відхилень значень часткових цільових функцій l_r на змінні задачі z_r.

План експерименту типу 1

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН ***P***.

Встановити $l_1 = 0.001$ та $l_2 = 1$.

for N:= 1 **to** 1000

Розв'язати задачу ***P*** з параметрами $l_1,\; l_2$

$l_1 += 0.001$

$l_2 -= 0.001$

Експеримент типу 2

Мета – дослідження того, як впливає зміна вагових коефіцієнтів ω_r на змінні задачі z_r.

План експерименту типу 2

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН ***P***.

Встановити $\omega_1 = 0.001$ та $\omega_2 = 1$.

for N:= 1 **to** 1000

Розв'язати задачу ***P*** з параметрами

$\omega_1,\ \omega_2$

$\omega_1 + = 0.001$

$\omega_2 - = 0.001$

Експеримент типу 3

Мета – дослідження того, як впливає зміна вагових коефіцієнтів ω_r на фактичні відхилення значення частковою цільової функції від оптимуму Δ_r.

План експерименту типу 3

Згенерувати індивідуальну ЗДЛПУН ***P***.

Встановити $\omega_1 = 0.001$ та $\omega_2 = 1$.

for N:= 1 **to** 1000

Розв'язати задачу ***P*** з параметрами

$\omega_1,\ \omega_2$

$\omega_1 + = 0.001$

$\omega_2 - = 0.001$

7. Аналіз результатів експериментів

На рисунках 2 та 3 представлені результати експериментів типу 1, а саме - залежність вихідних величин z_r від l_r. z_r – величина нашої поступки у випадку, якщо не задовольняються обмеження (6). Тож бачимо, що при збільшенні величини l_1 зменшується z_1 та як видно на рисунку 3 при зменшенні величини l_2 збільшується z_2. Також можемо зробити висновок, що при деяких значеннях l_1 та l_2 існує інтервал при якому значення z_1 та z_2 дорівнюють нулю.

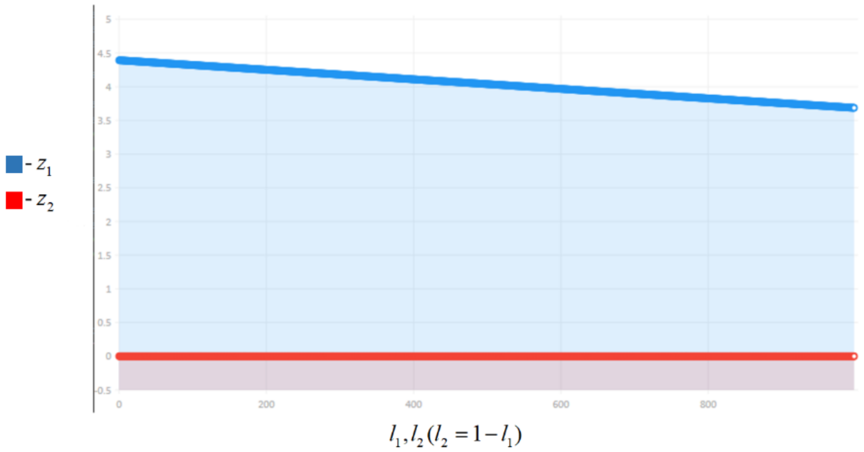

Рисунок 2 – Результати експерименту типу 1 у випадку задачі на максимум

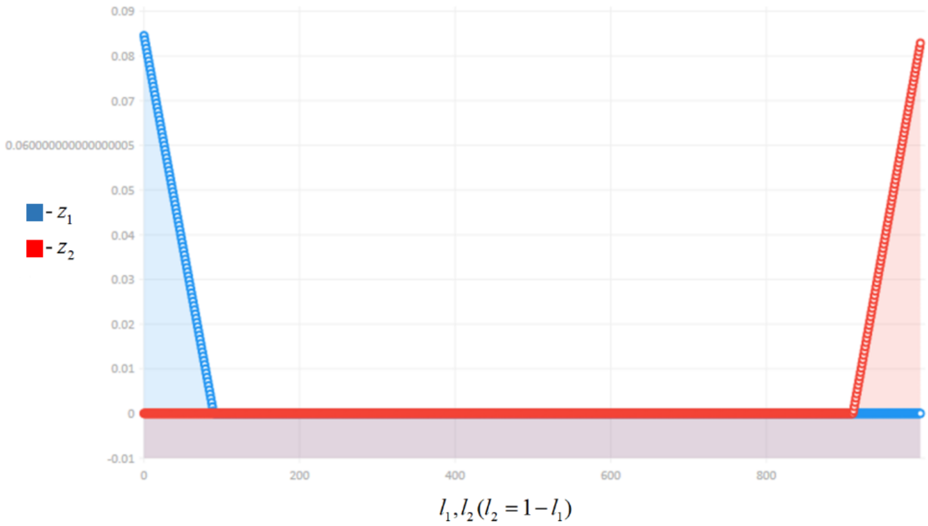

Рисунок 3 – Результати експерименту типу 1 у випадку задачі на мінімум

На рисунках 4 та 5 представлені результати експериментів типу 2, а саме залежність вихідних величин z_r від ω_r (z_r – величина, що показує наскільки ми повинні поступитися у наших вимогах, якщо не задовольняються обмеження (6)). Тож бачимо, що при збільшенні величини ω_1 зменшується z_1 та при зменшенні величини ω_2 збільшується z_2. Можемо також бачити, що ці залежності мають чітко визначені інтервали при яких спостерігається одне і те саме значення величини z_r.

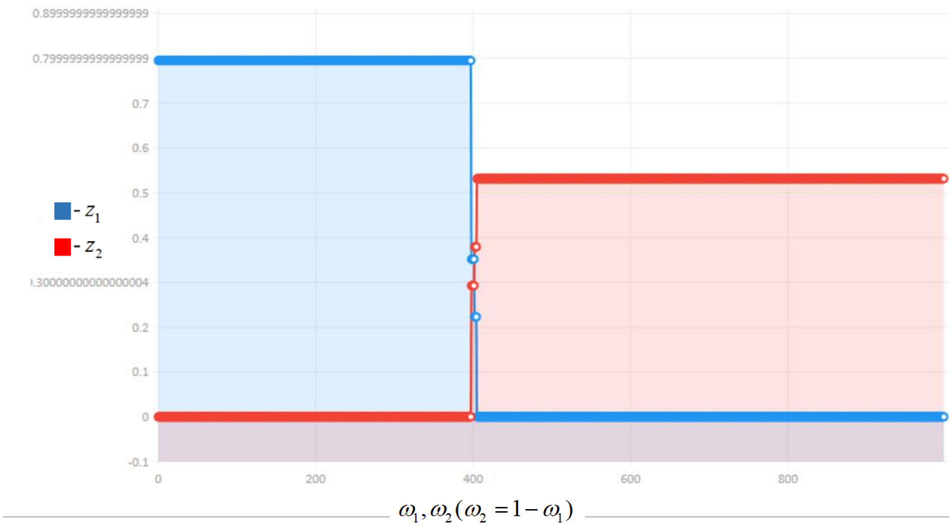

Рисунок 4 – Результати експерименту типу 2 у випадку задачі на максимум

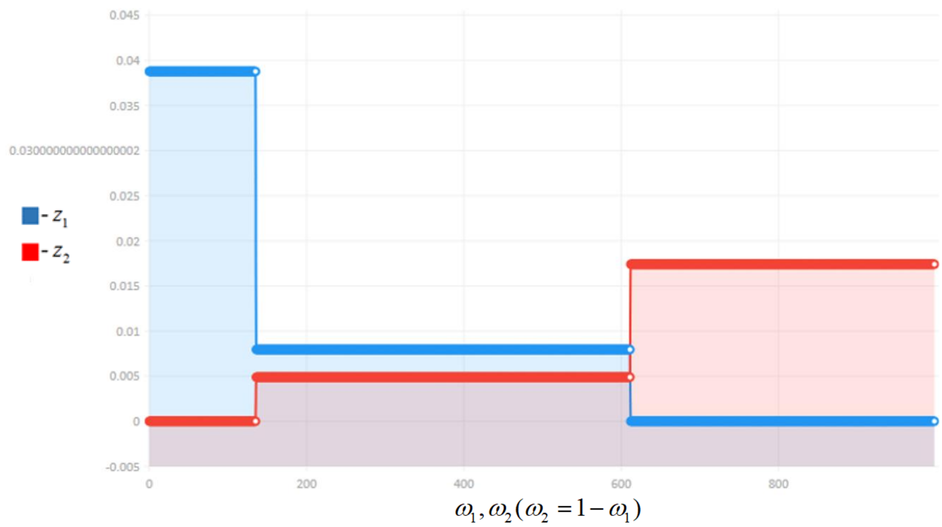

Рисунок 5 – Результати експерименту типу 2 у випадку задачі на мінімум

На рисунках 6 та 7 можемо бачити залежність вихідних величин Δ_r від ω_r. Δ_r – величина, що показує різницю між оптимальним значенням часткової цільової функції та тим значенням, що ми отримуємо при пошуку компромісного розв'язку при розв'язанні ЗДЛПУН. Тож бачимо, що при збільшенні величини ω_1 зменшується Δ_1 та при зменшенні величини ω_2 збільшується відповідна Δ_2.

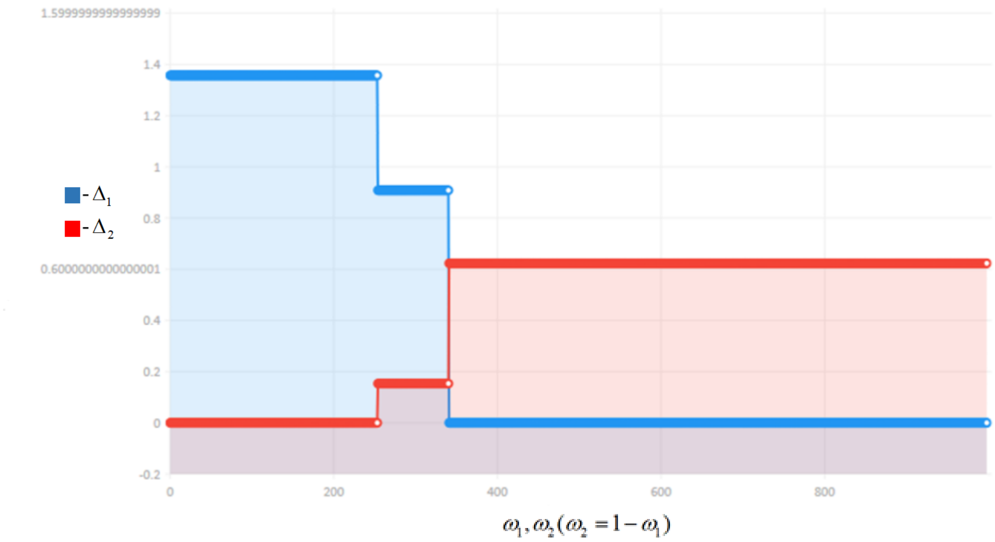

Рисунок 6 – Результати експерименту типу 3 у випадку задачі на максимум.

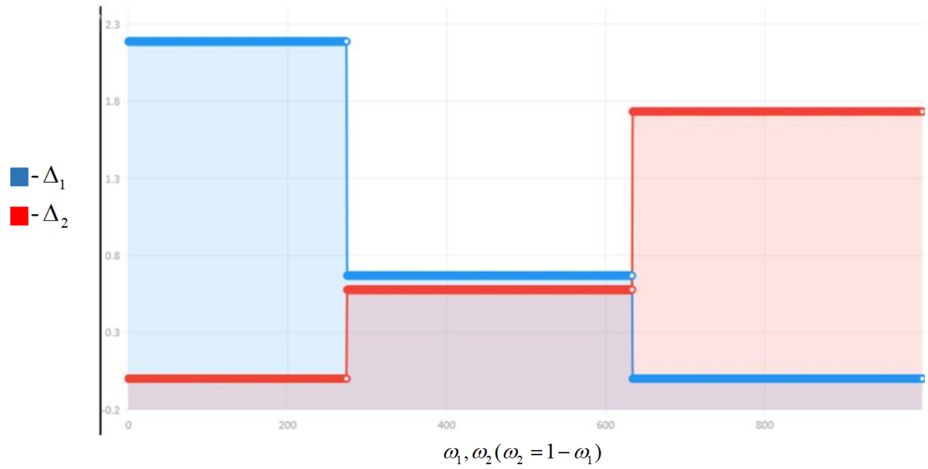

Рисунок 7 – Результати експерименту типу 3 у випадку задачі на мінімум

8. Висновки

Аналіз результатів описаних експериментів показав, що показані залежності є логічними і не протирічать теоретичному матеріалу. А саме підтверджено, що встановлені допустимі відхилення значень часткових цільових функцій та вагові коефіцієнти впливають на величину на яку ми повинні “посунутися”, щоб розв’язати задачу за критерієм *B* за умови, що критерій *A* не виконується. Також підтверджено, що вагові коефіцієнти впливають на значення різниці між значенням часткової цільової функції та оптимумом всієї задачі. Виявлено, що графіки описаних залежностей часто мають ступіньчасту форму і це в свою чергу потребує більш детального дослідження. Також, є цікавим той факт, що для задач на пошук максимума і мінімума як правило не співпадає кількість “сходинок” і інтервали при яких величини, що спостерігаються мають одне і те ж саме значення.

9. Список використаної літератури

1. Pavlov A.A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2019. **1**. № 34. С. 81–89. doi: 10.20535/1560-8956.1.2019.178233.

2. Pavlov A.A. Combinatorial optimization under uncertainty and formal models of expert estimation. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ».* 2019. № 1. С. 3–7. doi: 10.20998/2079-0023.2019.01.01.
3. Г. Вагнер. Основы исследования операций, том 2. С.381.