## Множества и отображения

**Определение**. Множество – неопределяемое понятие, которое может быть определено косвенно с помощью системы аксиом, например, системы аксиом Цермело-Френкеля.

Интуитивно, множество – это некая куча объектов. Саму эту кучу мы воспринимаем как некий объект. Причем не важно, в каком порядке лежат объекты в этой куче, важно какие объекты там есть, а каких там нет.

Описать множество означает каким-то образом указать, какие объекты являются его элементами, а какие нет. Конкретное множество может быть описано разными способами. Перечислим некоторые наиболее употребительные:

1) перечисление всех элементов (если множество конечно, и элементов немного)

2) указанием, некоторого свойства $P$, которое характеризует элементы множества. При этом обязательно должно быть указано большое множество $U$, из которого выбираются элементы удовлетворяющие свойству $P$.

$$A = \{\ a \in U \mid P(a)\ \}$$

Например, $U$ – это множество натуральных чисел, свойство $P$ – делимость на 2, получаем множество четных чисел $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ делится на } 2\ \}$

3) с помощью различных теоретико-множественых операций, объединение множеств, декартово произведение, и т.д.

*Примеры*

Множество, состоящее из чисел 1 и 5: $\{1, 5\}$. Множество состоящие из числа 2 и множества, состоящего из 1: $A = \{2, \{1\}\}$. Подчеркнем, что 1 не является элементом $A$ ($1 \notin A$), в то время как $\{1\} \in A$. Пустое множество $\emptyset$ (которое не содержит ни одного элемента), множество состоящее из пустого $\{\emptyset\}$

Множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x\ x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Например, $\{1, \{2\}\} \neq \{1, 2\}$, $\{\emptyset\} \neq \emptyset$, $\{1, 5\} = \{5, 1\}$

Порядок, в котором перечислены элементы множества *не* имеет значения. Если порядок важен, нужно использовать упорядоченные наборы. Тогда вместо фигурных скобок пишут круглые, $(1, 5) \neq (5, 1)$. Например, координаты точки на плоскости – это упорядоченный набор из двух элементов – упорядоченная пара: точки $(1, 5)$ и $(5, 1)$ – это разные точки.

Чтобы не вводить новое неопределяемое понятие – упорядоченный набор, с помощью хитрого приема, упорядоченный набор определяют через множество. Например, упорядоченную пару определяют так $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Декартово произведение двух множеств $A$ и $B$ – это множество всевозможных упорядоченных пар, первый элемент которых из $A$, второй – из $B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

*Примеры декартовых произведений*

$A = \{1, 3, -1\}$

$B = \{0, 3\}$

$A \times B = \{(1,0), (3,0), (-1,0), (1,3), (3,3), (-1,3)\}$

$B \times B = \{(0,0), (0,3), (3,0), (3,3)\}$

$\mathbb{R}^2$ – это плоскость.

$[0,1]^2$ – множество точек квадрата.

Если $S^1$ – это окружность, то $S^1 \times [0,1]$ – цилиндр, $S^1 \times S^1$ – это тор.

Если $A$ и $B$ – конечные множества, $|A|$ – число элементов (*мощность*) множества $A$, то $|A \times B| = |A||B|$

Множество $A$ является подмножеством множества $B$, если $A$ составляет некую часть множества $B$. Например, множество женщин – это подмножество множества людей, множество людей – это подмножество множества смертных существ.

**Определение**. Множество $A$ – это *подмножество* множества $B$ ($A \subset B$), если любой элемент $A$ принадлежит $B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \; x \in A \to x \in B)$$

*Примеры подмножеств*

$\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

$\{1, \{3\}\} \not\subset \{1, 2, 3\}$

У любого множества $A$ всегда есть два подмножества $\emptyset$ и $A$.

Множество всех подмножеств множества $A$ называют булеан и обозначают $2^A$. Например, $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$

**Определение**. *Отношение* или *соответствие* между множествами $A$ и $B$ – это подмножество декартового произведения $A \times B$.

*Примеры соответствий*

**Пример 1.**

$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ – множество студентов.

$D = \{d_1, d_2\}$ – множество парт.

$S \times D = \{(s_1, d_1), (s_1, d_2), (s_2, d_1), (s_2, d_2), (s_3, d_1), (s_3, d_2)\}$

Студенты сидят за партами – это соответствие, например $r_1 = \{(s_1, d_1), (s_2, d_1), (s_3, d_2)\}$, $s_1$ и $s_2$ сидят за партой $d_1$, $s_3$ сидит за партой $d_2$,

Другое соответствие $r_2 = \{(s_1, d_1), (s_2, d_1), (s_3, d_1)\}$ – все сидят за партой $d_1$.

$r_3 = \{(s_2, d_1), (s_3, d_1)\}$ – студент $s_1$ нигде не сидит.

**Пример 2.**

$B$ – множество книг. $H$ – множество людей.

$author \subset B \times H$ – соответствие – авторство. $(b, h) \in author$ – означает, что $h$ написал книгу $b$.

$$author = \{\ (b, h) \in B \times H \mid b \text{ – автор книги } h\ \}$$

**Пример 3.**

$B$ – множество книг. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. $pages \subset B \times \mathbb{N}$ – число страниц. $(b, n) \in pages$ – означает, что $n$ число страниц $b$

**Пример 4.**

$f \subset \mathbb{R}^2$

$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = (x + 1)^2\}$

**Пример 5.**

$+ \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$

$((x, y), z) \in +$, если $x + y = z$

$+$ – это соответствие между множествами $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$

**Определение**. Соответствие $f$ между множествами $A$ и $B$ называется *отображением* или *функцией*, если каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие ровно один элемент $b \in B$.

$$\forall\, a \in A\ \exists!\, b \in B : (a, b) \in f$$

Говорят, $f$ действует из множества $A$ во множество $B$. Пишут $f : A \to B$.

*Примеры отображений*

Соответствия $r_1$, $r_2$, $pages$, $+$, $f$ из прошлого примера являются отображениями.

$r_3$ не является отображением, потому что студенту $s_1$ ничего не поставлено в соответствие

$author$ не является отображением, потому что у одной книги может быть много авторов.

Отображения $f(x) = (x + 1)^2$ и $g(x) = x^2 + 2x + 1$ считаются равными, поскольку они представляют собой одно и то же множество пар.

Если отображения $f$ ставит в соответствие элементу $a \in A$ элемент $b \in B$, говорят, что $b$ – это образ $a$, $a$ – это прообраз $b$. Пишут $f(a) = b$.

Обратное соответствие для соответствия $r$ – это соотвествие $r^{-1}$. $r^{-1}$ – может быть получено из $r$, если в каждой паре поменять элементы местами.

$r_3 = \{(s_2, d_1), (s_3, d_1)\}$

$r_3^{-1} = \{(d_1, s_2), (d_1, s_3)\}$

**Определение**. Соответствие $f$ называется *взаимнооднозначным* или *биекцией* , если и $f$ и обратное соответствие $f^{-1}$ являются отображениями.

Например, система координат на плоскости устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками и упорядоченными парами действительных чисел.

Биекции еще называют обратимыми отображениями.

Множество всех отображений множества $A$ во множество $B$ обозначим $B^A$ или $A \to B$.

**Задача 1**. Установить биекцию между множествами $A \times B \to C$ и $A \to (B \to C)$.

**Задача 2**. Установить биекцию между множествами $2^A$ и $A \to \{0, 1\}$

Композиция отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ – это их последовательное применение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Альтернативное обозначение $g \circ f = f; g$

Композиция является ассоциативной операцией на множестве $A \to A$

## Основные алгебраические структуры

### Структуры с одной операцией.

$(M, *)$

0) * – бинарная операция, $* : M \times M \to M$

1) ассоциативность: $\forall a, b, c \in M : a * (b * c) = (a * b) * c$

2) нейтральный элемент: $\exists e \forall a : a * e = e * a = a$

3) обратный элемент: $\forall a \exists a^{-1} : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

4) коммутативность: $\forall a \forall b : a * b = b * a$

Названия структур:

0) – группоид; 0)-1) – полугруппа; 0)-2) – моноид; 0)-3) – **группа**; 0)-4) – абелева (коммутативная) группа.

### Структуры с двумя операциями.

$(R, +, \times)$ называется *кольцом* , если

0) $+ : R \times R \to R$; $\times : R \times R \to R$

1) $(R, +)$ – абелева группа,

2) $(R, \times)$ – полугруппа.

3) дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$; $(a + b)c = ac + bc$

$(F, +, \times)$ называется *полем*, если

0) $+ : F \times F \to F$; $\times : F \times F \to F$

1) $(F, +)$ – абелева группа,

2) $(F \setminus \{0\}, \times)$ – абелева группа.

3) дистрибутивность: $a(b+c) = ab + ac$; $(a+b)c = ac + bc$

**Векторное пространство**

$(V, (F, +_F, \times_F), +, \times)$

0) $+ : V \times V \to V$; $\times : F \times V \to V$

1) $(F, +_F, \times_F)$ – поле

2) $(V, +)$ – абелева группа. Ее нейтральный элемент называется нулевой вектор: 0.

3) Пусть $u$ и $v$ – два произвольных вектора, $u, v \in V$, $a$ и $b$ – два произвольных скаляра, $a, b \in F$

3.1) $a(bv) = (ab)v$

3.2) $a(u+v) = au + av$

3.3) $1v = v$

3.4) $(a+b)v = av + bv$

## Линейный оператор

**Определение**. Пусть $V$ – векторное пространство над полем $F$. Отображение $A : V \to V$ называется линейным оператором, если оно удовлетворяет двум свойствам

1) аддитивность: для любых двух векторов $v_1$ и $v_2$: $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$

2) однородность: для любого вектора $v$ и скаляра $k \in F$: $A(kv) = kA(v)$

Выясним, как меняются координаты вектора, если на него подействовать оператором. Для простоты рассмотрим оператор на двумерном пространстве.

Пусть $V$ – двумерное векторное пространство, $A : V \to V$ – линейный оператор.

Выберем произвольный базис $e_1$, $e_2 \in V$. Рассмотрим любой вектор $v \in V$. Его координаты в базисе $e_1$, $e_2$: $v = xe_1 + ye_2$.

Наша задача сейчас найти координаты вектора $A(v)$ в том же самом базисе $\{e_1, e_2\}$.

$$A(v) = A(xe_1 + ye_2) =$$

используя аддитивность

$$= A(xe_1) + A(ye_2) =$$

используя однородность

$$= xA(e_1) + yA(e_2) = \dots$$

Теперь обозначим координаты вектора $A(e_1)$ через $a_{11}$, $a_{21}$, координаты вектора $A(e_2)$ через $a_{12}$, $a_{22}$

$$A(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$

$$A(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

$$\dots = x(a_{11}e_1 + a_{21}e_2) + y(a_{12}e_1 + a_{22}e_2) =$$

$$= (xa_{11} + ya_{12})e_1 + (xa_{21} + ya_{22})e_2$$

таким образом, $A(v) = (xa_{11} + ya_{12})e_1 + (xa_{21} + ya_{22})e_2$. Координаты $A(v)$:

$$\begin{aligned} x' &= xa_{11} + ya_{12} \\ y' &= xa_{21} + ya_{22} \end{aligned} \tag{1}$$

Мы видим, что формулы (1) соответствуют правилу умножения вектора на матрицу

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2}$$

Собственно, именно поэтому правило умножения вектора на матрицу такое. Матрица (2) называется матрица оператора $A$ в базисе $e_1, e_2$. Столбцы этой матрицы – это координаты векторов $A(e_1)$ и $A(e_2)$. Один и тот же оператор в разных базисах будет иметь разные матрицы.

**Задача 3.** Найдите матрицу (в стандартном базисе) линейного оператора, отражающего любой вектор относительно оси $y = x$.

## Скалярное произведение

В векторном пространстве не заданы длины векторов и углы между векторами. Указать для каждого вектора его длину, для каждой пары векторов угол, значит ввести геометрию на векторном пространстве. На одном и том же векторном пространстве можно ввести множество различных геометрий. В разных геометриях один и тот же вектор может иметь различную длину. Некоторая пара векторов может быть ортогональна с точки зрения одной геометрии и не ортогональна с точки зрения другой. Если $v = 2u$, это всего лишь означает, что когда вектору $u$ будет присвоена некоторая длина, вектор $v$ получит длину в два раза больше. Заметим, что координаты вектора в некотором базисе определяются в независимости от геометрии.

Геометрия на векторном пространстве вводится с помощью скалярного произведения. Пусть $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ координаты векторов $v_1$ и $v_2$ в некотором базисе $e_1$,$e_2$. В общем случае на двумерном векторном пространстве $V$ скалярное произведение $(v_1, v_2)$ (dot product, inner product) может быть задано по формуле

$$([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 \tag{3}$$

Здесь $a$, $b$ и $c$ три произвольных действительных числа. Каждая тройка $(a, b, c)$ задают свою геометриию на нашем векторном пространстве. Матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ должна быть симметричной, чтобы скалярное произведение было симметричным $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$

Если скалярное произведение задано таким образом, квадрат длины вектора $v = (x, y)$ определяется по формуле

$$|v|^2 = (v, v) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Угол между векторами, определяется как обычно

$$cos(u\hat{\ }v) = \frac{(u, v)}{|u||v|}$$

Если матрица $A$ единичная, получается обычное скалярное произведение

$$([x_1, y_1], [x_2, y_2]) = x_1x_2 + y_1y_2$$

**Теоретическое отступление, поясняющее формулу (3)**

Формальное определение скалярного произведения следующее

**Определение**. Пусть $V$ – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$

Скалярным произведением называется отображение $i : V \times V \to \mathbb{R}$ (далее вместо $i(v_1, v_2)$, будем писать просто $(v_1, v_2)$) обладающие свойствами:

1) билинейность, т.е. линейность по каждому аргументу:

линейность функции $f(v) = (v, u)$

$$(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) \qquad (kv, u) = k(v, u) \quad k \in \mathbb{R},$$

линейность функции $g(v) = (u, v)$

$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2) \qquad (u, kv) = k(u, v) \quad k \in \mathbb{R},$$

2) симметричность $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$

**Утверждение.** Любое скалярное произведние на двумерном пространстве $V$ в любом выбранном базисе $e_1$, $e_2$ может быть описано формулой (3) при подходящем выборе $a$, $b$ и $c$. И наоборот, для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$ формула (3) задает некоторое скалярное произведение на $V$.

*Доказательство.* Рассмотрим некоторое скалярное произведение на двумерном пространстве $V$. Пусть $e_1$, $e_2$ – базис $V$. Пусть $v_1$ и $v_2$ два произвольных вектора. Обозначим их координаты в базисе $e_1$, $e_2$ – $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1e_1 + y_1e_2 \\ v_2 &= x_2e_1 + y_2e_2 \end{aligned}$$

Тогда их скалярное произведение

$$(v_1, v_2) = (x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) =$$

Используя билинейность и симметричность,

$$= (e_1, e_1)x_1x_2 + (e_1, e_2)(x_1y_2 + x_2y_1) + (e_2, e_2)y_1y_2$$

Если обозначить $a = (e_1, e_1)$, $b = (e_1, e_2)$, $c = (e_2, e_2)$, мы получим формулу (3). В обратную сторону, если $a, b, c \in \mathbb{R}$ формула (3) задает некоторое отображение, $i : V \times V \to \mathbb{R}$, которое является билинейным и симметричным.

**Задача 4.** Каким должно быть скалярное произведение, чтобы вектора (2, 1), (2, -2) были ортогональны?

**Задача 5.** Доказать, что линейный оператор сохраняет длину вектора тогда и только тогда, когда он схраняет скалярное призведение