Свойства бинарных отношений

Рассмотрим отношение $R \subset A \times A$ заданное на множестве A

Отношение R называется *рефлексивным* , если

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

симметричным, если

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

транзитивным, если

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \ \& \ (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

антисимметричным, если

$$(a, b) \in R \ \& \ (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

отношение $\subset$ заданное на любом множестве состоящем из множеств	рефл, антисимм, транз
отношение $>$ $(<)$ на множестве $\mathbb{N}$	антисимм, транз
отношение $=$ на любом множестве	рефл, симм, антисимм, транз
отношение $\neq$ на любом множестве	рефл, симм
отношение $\geq$ $(\leq)$ на множестве $\mathbb{N}$	рефл, антисимм, транз
сравнимость по модулю m: $a \equiv b \pmod m \iff a$ и b дают одинаковый остаток при дилении на m,	рефл, симм, транз
отношение *делимости* $(\vdots)$ на множестве чисел	рефл, антисимм, транз
отношение $\parallel$ на множестве прямых	симм, транз
отношение $\perp$ на множестве прямых	симм
отношение *сонаправленность* на множестве прямых	рефл, симм, транз

R – *отношение эквивалентности*, если оно рефл симм транз

Если на множестве задано отношение эквивалентности то множество распадается на непересекающиеся классы эквивалентности, внутри которых элементы находятся в отношении (эквивалентны) два элемента из разных классов не эквивалентны

Полученное множество называется *фактор-множество*, а сам процесс называется *факторизация*

Примеры ...

R – отношение частичного порядка, если рефл антисимм транз

Такое отношение задает некий порядок на множестве, кто "больше"кого, но при это не требуется, чтобы любые два элемента можно было сравнить.

Пара (A, R), называется частично упорядоченным множеством (POS), если $R \subset A \times A$ является отношением частичного порядка

Примеры

1) $\leq$ $(\geq)$ на множестве $\mathbb{N}$. Тут как раз любые два элемента сравнимы, мы всегда знаем, кто больше.

2) делимость (к примеру, если взять множество $\{1, 3, 6, 9, 18\}$, числа $6, 9$ будут не сравнимы, а число 18 будет "больше"всех в смысле этого порядка)

3) подмножество (например рассмотрим множество $\{\{1, 3\}, \{5, 3\}, \{1, 3, 5, 6\}\}$)

4) соревнование: мы условно считаем, что если A выиграл у B и B выиграл у C, то A сильнее чем C Мы рассматриваем отношение "быть сильнее но при этом ни все со всеми сыграли, поэтому могут быть не сравнимые игроки

5) Коробчки (параллелепипеды), отношение помещаемости (вложимости): коробчка размером (x_1, y_1, z_1) помещается в коробочку размером (x_2, y_2, z_2), если $x_1 \leq x_2$ & $y_1 \leq y_2$ & $z_1 \leq z_2$. Очевидно, что существует не сранимые коробочки, ни одна из них не помещается в другую.

В частично упорядоченном множестве максимальный элемент и наибольший элемент это разные вещи, что кажется поначалу удивительным, поскольку мы обычно имеем дело со множествами, в которых все элементы сравнимы.

Максимальный элемент – это элемент, больше которого нет.

$$m \in A \text{ – максимальный } \iff \neg(\exists a \in A : a > m)$$

Наибольший элемент – это элемент, который больше всех.

$$m \in A \text{ – наибольший } \iff \forall a \in A : a \leq m$$

Пример

1) Множество $\{8, 4, 9, 3\}$ относительно делимости, 8,9 – максимальные

2) $(\{\{2, 3\}, \{3\} \{2\}\}, \subset)$. Элемент $\{2, 3\}$ наибольший.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда все элементы сравнимы

Отношение R называется линейным, если $\forall a, b \in A : (a, b) \in Ror(b, a) \in R$

Отношение частичного порядка называется отношением линейного порядка, если оно линейно.

Для линейных порядков понятия "максимальный элемент"и "наибольший элемент"совпадают.

Отношение полного порядка – это отношение линейного порядка, такое что в каждом его непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Например, отношение $\leq$ на множестве натуральных чисел является отношением полного порядка, в то же время отношение $\leq$ на множестве неотрицательных вещественых чисел не является отношением полного порядка. Хотя в нем и есть наименьший элемент 0, оно имеет подмножества (например интервал (0,1)) не имеющие наименьший элемент.

Множества с заданным на нем отношением полного порядка, называется вполне упорядоченным или фундированным. Такие множества важны, так как по ним можно вести индукцию, также как по натуральному ряду.

Принцип трансфинитной индукции

переход $\forall x \in X : \forall y < xP(y) => P(x)$

тогда $\forall x \in X : P(x)$

Принцип трансфинитной индукции выполняется тогда и только тогда когда больше это отношение полного порядка на X

$\{1, 2, 3, \ldots, \omega\}$

Два порядка $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ Изоморфизм этих двух порядков – это биекция $f : A \to B$ $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \leq_A a_2 => f(a_1) \leq_B f(a_2)$

m – наибольший элемент во множестве A

Допустим $f(m)$ не наибольший элемент в B, значит $\exists n \in B : n > f(m)$

$f^{-1}(n) = n_1 \in A$

$n_1 > m$

предположим противное $n_1 < m => f(n_1) < f(m)$