Определение. Пусть A – произвольное множество. Последовательностью элементов множества A, называется произвольное отображение из множества $\mathbb{N}$ в A

Последовательность с n-ым членом x_n обозначают следующим образом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Например, последовательность $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение. Предел числовой последовательности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n \geq N:\; |x_n - a| < \varepsilon$$

Словами сказать $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ можно несколькими способами: a является пределом x_n, x_n сходится к a, x_n стремится к a.

Не любая последовательность имеет хоть какой-то предел. Если последовательность имеет предел, она называется *сходящаяся.* Говорят также: эта последовательность сходится. Если последовательность ни к чему не сходится, она называется *расходящаяся.* Говорят также: эта последовательность расходится.

Задача 1. Доказать, что последовательность не может иметь два различных предела одновременно.

Задача 2. Доказать, что если последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремятся соответсвенно к a и b, то последовательность $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к $a + b$

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

Доказать соответствующие утверждения для остальных арифметических действий

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если

$$\exists M \in R : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < M$$

Задача 3. Доказать, что сходящаяся последовательность является ограниченной.

Доказать, что обратное вообще говоря неверно.

Задача 4. Доказать, что последовательность $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к 0.

Задача 5. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Определение. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если каждый следующий член больше предыдущего: $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n$. Аналогично определяется *убывающая* последовательность.

Если каждый следующий член *больше либо равен* предыдущего, последовательность называется *неубывающей.* Аналогично определяется *невозрастающая* последовательность.

Объединение всех этих 4 классов последовательностей дает класс *монотонных* последовательностей.

Определение. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность действительных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Выберем из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементы с номерами n_k. Получим последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Формально $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – это композиция двух отображений $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Задача 6. Доказать, что любая подпоследовательность сходящийся последовательности сходится к тому же самому пределу.

Задача 7. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Задача 8. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$

Задача 9. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{2n^2+3n-1} = 0$

Задача 10. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+4}{2n^2+3n-1} = 3/2$

Задача 11. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+4}{4n^3-2n^2+3n-1} = 1/2$