МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Чисельні методи. Ч.ІІ.

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2: Чисельні методи»
для студентів напрямку „Системна інженерія"

Частина **ІІ**
Чисельні методи

Затверджено Методичною радою НТУУ "КПІ"

Київ
НТУУ "КПІ"
2010

Чисельні методи. Частина II. Метод. вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2: Чисельні методи» для студ. напрямку "Системна інженерія" [Електронний ресурс] /НТУУ «КПІ»; уклад.: Я.Ю. Дорогий, Є.В.Глушко, А.Ю.Дорошенко. - К.: НТУУ «КПІ», 2010. - 141 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ "КПІ"
(Протокол №   )

Е л е к т р о н н е   в и д а н н я

Чисельні методи. Ч.II.

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
з дисципліни «Спеціальні розділи математики-2: Чисельні методи»
для студентів напрямку „Системна інженерія"

Частина I
Чисельні методи

Затверджено Методичною радою НТУУ "КПІ"

Укладачі: Дорогий Ярослав Юрійович
Глушко Євгеній Васильович
Дорошенко Анатолій Юхимович

Відповідальний редактор Теленик Сергій Федорович

Київ
НТУУ "КПІ"
2010

Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу "Спеціальні розділи математики-2: Чисельні методи (Мова програмування *Python*)" для студентів напрямку "Системна інженерія" денної та заочної форм навчання.

Укладачі:

Я.Ю.Дорогий,
Є.В. Глушко,
А.Ю.Дорошенко.

ЗМІСТ

Лабораторна робота №1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Теоретичні відомості

Чисельне розв'язування нелінійних (алгебраїчних або трансцендентних) рівнянь, що мають вигляд

$$f(x) = 0 \qquad (1.1)$$

полягає в тому, щоб знайти значення $\boldsymbol{x}$, що задовольняють (із вказаною точністю) даному рівнянню та складається з наступних основних етапів:

1. *Виділення* (ізоляція, локалізація) коренів рівняння.
2. *Уточнення* за допомогою деякого обчислювального алгоритму конкретного виділеного кореня із вказаною точністю.

На першому етапі необхідно знайти відрізки з області визначення функції $f(x)$, всередині яких міститься тільки один корінь розв'язуваного рівняння. Іноді обмежуються розглядом лише певної частини області визначення, що викликає інтерес. На цьому етапі використовуються *графічні* або *аналітичні* способи.

При аналітичному способі відділення коренів є корисною така теорема [3]:

Теорема 1.1. Безперервна строго монотонна функція $f(x)$ має, причому єдиний, нуль на відрізку $[a,b]$ тоді й тільки тоді, коли на його кінцях вона набуває значення різних знаків.

Достатньою ознакою монотонності функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ є збереження знака похідної функції.

Графічний спосіб виділення коренів доцільно використовувати тоді, коли є можливість побудувати графік функції $y = f(x)$. Наявність графіка вихідної функції дає безпосереднє уявлення про кількість і розташування нулів функції, що дозволяє визначити проміжки, всередині яких міститься тільки один корінь. Якщо побудувати графік функції $y = f(x)$ складно, часто виявляється, що зручно привести рівняння (1.1) до еквівалентного вигляду

$f_1(x) = f_2(x)$ та побудувати графіки функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$. Абсциси точок перетину цих графіків будуть значеннями коренів розв'язуваного рівняння.

Так чи інакше, при завершенні першого етапу, необхідно визначити проміжки, на кожному з яких міститься тільки один корінь рівняння.

Щоб уточнити значення кореня з необхідною точністю звичайно застосовується будь-який ітераційний метод, що полягає в побудові числової послідовності $x^{(k)}$ (k=0,1,2,…), що збігається до шуканого кореня $x^{(*)}$ рівняння (1.1).

Метод половинного ділення. Процес уточнення кореня рівняння (1.1) на відрізку $[a,b]$, за умови, що функція $f(x)$ безперервна на цьому відрізку, полягає в наступному [1,2].

Вихідний відрізок ділиться навпіл. Якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то $x^{(*)} = \frac{a+b}{2}$ – є коренем рівняння. Якщо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то обирається та з половин $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ або $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, на кінцях якої функція $f(x)$ має протилежні знаки. Новий звужений відрізок $[a^{(1)}, b^{(1)}]$ знову ділиться навпіл і проводиться той же розгляд і т.д. У результаті на якомусь етапі або існує точний корінь рівняння (1), або є послідовність вкладених один до одного відрізків $[a^{(1)}, b^{(1)}]$, $[a^{(2)}, b^{(2)}], \ldots, [a^{(k)}, b^{(k)}]$ для яких $f(a^{(k)}) f(b^{(k)}) < 0 \quad k = 0,1,2,...$

Якщо потрібно знайти корінь із точністю ε, то ділення відрізка навпіл триває доти, доки довжина відрізка не стане менше ніж 2ε. Тоді середина останнього відрізка дасть значення кореня з необхідною точністю.

Метод Ньютона (метод дотичних). При знаходженні кореня рівняння (2.1) методом Ньютона, ітераційний процес визначається формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \qquad k = 0,1,2,... \tag{1.2}$$

Щоб розпочати обчислення, необхідно вказати початкове наближення x_0.

Умови збіжності методу визначаються наступною теоремою [3]:

Теорема 1.2. Нехай на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має першу і другу похідні постійного знака та нехай $f(a)f(b) < 0$.

Тоді якщо точка $x^{(0)}$ обрана на $[a,b]$ так, що

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0, \tag{1.3}$$

то почата з неї послідовність $x^{(k)}$ $(k = 0,1,2,...)$, що визначається формулою (1.2), монотонно збігається до кореня $x^{(*)} \in (a,b)$ рівняння (1.1).

Як умова закінчення ітерацій у практичних обчисленнях часто використовується правило $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$.

<u>Метод простої ітерації.</u> У методі простої ітерації рівняння (1.1) замінюється еквівалентним рівнянням з виділеним лінійним членом

$$x = \varphi(x) \tag{1.4}$$

Розв’язок шукається шляхом побудови послідовності

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \qquad k = 0,1,2,... \tag{1.5}$$

починаючи з деякого значення $x^{(0)}$. Якщо $\varphi(x)$ – безперервна функція, а $x^{(k)}$ $(k = 0,1,2,...)$ – збіжна послідовність, то значення $x^{(*)} = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$ є розв’язком рівняння (1.4).

Умови збіжності методу й оцінка його похибки визначаються теоремою [3]:

Теорема 1.3. Нехай функція $\varphi(x)$ є визначеною та диференційовною на відрізку $[a,b]$. Тоді якщо виконуються умови:

1. $\varphi(x) \in [a,b] \quad \forall\, x \in [a,b]$,
2. $\exists q : \left|\varphi'(x)\right| \le q < 1 \quad \forall\, x \in (a,b)$,

то рівняння (1.4) має, причому єдиний, на [a,b] корінь $x^{(*)}$; до цього кореня збігається обумовлена методом простої ітерації послідовність $x^{(k)}$ $(k = 0,1,2,...)$, що починається з кожного $x^{(0)} \in [a,b]$.

При цьому справджуються оцінки похибки ($\forall k \in N$):

$$\left|x^{(*)} - x^{(k+1)}\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \tag{1.6}$$

$$\left|x^{(*)} - x^{(k+1)}\right| \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right|.$$

<u>Приклад 1.1.</u> Розв'язати рівняння

$$f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0 \tag{1.7}$$

с точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язування. Щоб локалізувати корені, застосуємо графічний спосіб. Перетворимо вихідне рівняння до наступного еквівалентного вигляду:

$$e^{2x} = 4 - 3x$$

Побудувавши графіки функцій $f_1(x) = e^{2x}$ і $f_2(x) = 4 - 3x$ (рис. 1.1), визначаємо, що розв'язуване рівняння має тільки один корінь, що лежить в інтервалі $0.4 < x^{(*)} < 0.6$.

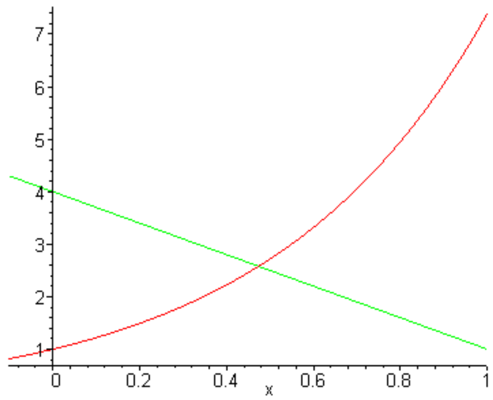

Рисунок 1.1

Уточнимо значення кореня з необхідною точністю, користуючись наведеними вище методами.

<u>Метод половинного ділення.</u> Як вихідний відрізок виберемо [0.4, 0.6]. Результати подальших обчислень, відповідно до наведеного вище алгоритму містяться в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}$	$f\left(\frac{a^{(k)}+b^{(k)}}{2}\right)$
0	0.4000	0.6000	-0.5745	1.1201	0.5000	0.2183
1	0.4000	0.5000	-0.5745	0.2183	0.4500	-0.1904
2	0.4500	0.5000	-0.1904	0.2183	0.4750	0.0107
3	0.4500	0.4750	-0.1904	0.0107	0.4625	-0.0906
4	0.4625	0.4750	-0.0906	0.0107	0.4688	-0.0402
5	0.4688	0.4750	-0.0402	0.0107	0.4719	-0.0148
6	0.4719	0.4750	-0.0148	0.0107	0.4734	-0.0020
7	0.4734	0.4750	-0.0020	0.0107	[0.4742]	

$x^{(*)} \approx 0.474$

<u>Метод Ньютона.</u> Щоб коректно використовувати цей метод необхідно, відповідно до теореми 1.2, визначити поведінку першої та другої похідної функції $f(x)$ на інтервалі уточнення кореня та правильно вибрати початкове наближення $x^{(0)}$.

Для функції $f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0$ маємо:

$f'(x) = 2e^{2x} + 3$, $f''(x) = 4e^{2x}$ – додатні на всій області визначення функції. Як початкове наближення можна вибрати праву границю інтервалу $x^{(0)} = 0.6$, для якої виконується нерівність (1.3):

$$f(0.6)f''(0.6) > 0$$

Подальші обчислення проводяться по формулі (1.2), де

$$f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4,\ f'(x^{(k)}) = 2e^{2x^{(k)}} + 3.$$

Ітерації завершуються при виконанні умови $\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| < \varepsilon$.

Результати обчислень наведено в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201	9.6402	-0.1162
1	0.4838	0.0831	8.2633	-0.0101
2	0.4738	0.0005	8.1585	-0.0001

3	[0.4737]			

$x^{(*)} \approx 0.474$

<u>Метод простої ітерації.</u> Рівняння (1.7) можна записати у вигляді

$$x = \frac{4 - e^{2x}}{3} \qquad (1.8)$$

або

$$x = \frac{\ln(4 - 3x)}{2} \qquad (1.9).$$

Із двох цих варіантів прийнятним є варіант (1.9), тому що, взявши за основний інтервал (0.4,0.55) і поклавши $\varphi(x) = \frac{\ln(4-3x)}{2}$, будемо мати:

1. $\varphi(x) \in [0.4, 0.55] \quad \forall\, x \in [0.4, 0.55]$
2. $\varphi'(x) = -\frac{3}{2(4-3x)}$.

Звідси, на інтервалі (0.4,0.55) $|\varphi'(x)| < 0{,}64 = q$.

Умови теореми 1.3 виконано.

Як початкове наближення покладемо $x^{(0)} = (0.4 + 0.55)/2 = 0.475$.

Обчислюємо послідовні наближення $x^{(k)}$ з одним запасним знаком по формулі (1.5), де $\varphi(x^{(k)}) = \frac{\ln(4 - 3x^{(k)})}{2}$.

Відповідно до (1.6) досягнення необхідної точності контролюється умовою $\frac{q}{1-q}\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon$.

Результати обчислень наведено в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

k	$x^{(k)}$	$\varphi(x^{(k)})$
0	0.4750	0.4729
1	0.4729	0.4741
2	0.4741	0.4734
3	0.4734	0.4738
4	[0.4738]	

$x^{(*)} \approx 0.474$

Зауваження. Якщо безпосереднє перетворення рівняння (1.1) до вигляду (1.4), не дозволяє отримати рівняння, для якого виконуються умови збіжності методу простої ітерації, можна перетворити рівняння (1.1) до наступного еквівалентного рівняння

$$x = x - \lambda f(x).$$

Дане рівняння має вигляд (1.4) с. $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ Тут λ - параметр, що підбирається в такий спосіб [1,3], щоб на потрібній області виконувалася нерівність $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \le q < 1$.

1.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Написати програму розв'язування рівняння згідно з вашим варіантом (див. табл. 1.4.) мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.
2. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:

- мета роботи;
- теоретичні відомості;
- розв'язок задачі в аналітичній формі;
- лістинги програм розв'язування задачі (використовуйте бібліотеку matplotlib);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 1.4 – Варіанти завдань для лабораторної роботи

№	Рівняння
1.	$2^x - x^2 - 0{,}5 = 0$
2.	$\ln(x+2) - x^2 = 0$
3.	$\sqrt{1-x^2} - e^x + 0{,}1 = 0$
4.	$x^3 + x^2 - x - 0{,}5 = 0$

5.	$\cos x + 0{,}25x - 0{,}5 = 0$
6.	$e^x - 2x - 2 = 0$
7.	$2^x + x^2 - 2 = 0$
8.	$\ln(x+1) - 2x^2 + 1 = 0$
9.	$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$
10.	$\sin x - 2x^2 + 0{,}5 = 0$
11.	$e^x - x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$
12.	$3^x - 5x^2 + 1 = 0$
13.	$\ln(x+1) - 2x + 0{,}5 = 0$
14.	$x^3 - 2x^2 - 10x + 15 = 0$
15.	$\sin x - x^2 + 1 = 0$
16.	$x e^x + x^2 - 1 = 0$
17.	$4^x - 5x - 2 = 0$
18.	$\ln(x+1) - x^3 + 1 = 0$
19.	$x^4 - 2x - 1 = 0$
20.	$\mathrm{tg}\, x - 5x^2 + 1 = 0 \quad , \quad x \in [-1, 1]$
21.	$3\sqrt{x+1} - e^x - 0{,}5 = 0$
22.	$10^x - 5x - 2 = 0$
23.	$\ln(x+2) - x^4 + 0{,}5 = 0$
24.	$x^6 - 5x - 2 = 0$
25.	$\sqrt{x+2} - 2\cos x = 0$
26.	$\lg(x+1) - x + 0{,}5 = 0$
27.	$x^6 - 5x^3 - 2 = 0$
28.	$\lg(2x+1) - x^3 + 1 = 0$
29.	$x^5 - 7x^2 + 3 = 0$
30.	$x \lg(x+2) + x^2 - 1 = 0$

1.3. Контрольні запитання

1. З яких етапів складається пошук коренів нелінійного рівняння? Опишіть кожен з етапів.

2. Розкрийте особливості та застосовність аналітичного й графічного способів виділення коренів.

3. Дайте характеристику методу половинного ділення. Збіжність, похибки, продуктивність.

4. Дайте характеристику методу Ньютона. Збіжність, похибки, продуктивність.

5. Дайте характеристику методу простої ітерації. Збіжність, похибки, продуктивність.

Лабораторна робота №2. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

2.1. Теоретичні відомості

Відомо, що для переважної більшості функцій не вдається обчислити первісні, внаслідок чого доводиться використовувати методи наближеного та чисельного інтегрування функцій.

Для чисельного інтегрування вказаної підінтегральної функції будується сіткова функція (2.1):

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

(2.1)

Потім ця функція за допомогою формул локальної інтерполяції з контрольованою похибкою замінюється на інтерполяційний многочлен, інтеграл від якого добре обчислюється та порівняно легко оцінити похибку.

Нехай на відрізку $x \in [a, b]$ дано неперервну функцію $y = f(x)$, потрібно на $x \in [a, b]$ обчислити визначений інтеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx \,. \tag{2.2}$$

Замінимо дану функцію $f(x)$ на сіткову функцію (2.1). Замість точного значення інтеграла (2.2) будемо шукати його наближене значення за допомогою суми

$$I \approx I_h = \sum_{i=0}^{n} A_i h_i \,, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \; i = \overline{1,n}, \; x_0 = a, \; x_n = b \,, \tag{2.3}$$

у якій необхідно визначити коефіцієнти A_i та похибку формули (2.3).

2.1.1. Чисельне інтегрування за методом прямокутників

Найбільш простою (та не надто точною) є формула прямокутників. Її можна отримати, визначаючи на основі визначення визначеного інтеграла, як границі послідовності інтегральних сум:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,,\ \ \xi_i \in [x_i, x_{i-1}],\quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ .$$

Якщо в цьому визначенні прибрати знак границі та покласти $\Delta x_i = h_i$, $i = \overline{1,n}$, то з'явиться похибка $R_{пр}$ (за ξ_i можна прийняти лівий або правий кінець відрізка Δx_i), тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h_i + R_{пр} \tag{2.4}$$

або

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i + R_{пр} \tag{2.5}$$

Формули (2.4), (2.5) – відповідно *формули чисельного інтегрування за методом лівих і правих прямокутників*.

Розглянемо похибку R_i формули лівих прямокутників (2.4) на одному кроці $[x_{i-1}, x_i]$ чисельного інтегрування.

Для цього припустимо, що первісна $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$ (вона існує, оскільки $f(x)$– неперервна на відрізку $x \in [a,b]$) неперервно диференційовна. Тоді, розкладаючи $F(x_i)$ в околі вузла x_{i-1} в ряд Тейлора до другої похідної включно, і використовуючи рівність $F'(x) = f(x) = y(x)$, отримаємо

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - y_{i-1}h = [F(x_i) - F(x_{i-1})] - y_{i-1}h = [F'(x_{i-1})h + F''(\xi)\frac{h^2}{2}] - y_{i-1}h =$$

$$= [y_{i-1}h + y'(\xi)\frac{h^2}{2}] - y_{i-1}h = y'(\xi)\frac{h^2}{2},\quad \xi \in (x_{i-1}, x_i).$$

Просумувавши цю похибку на всьому відрізку $[a,b]$ n раз (b-a=nh), отримаємо

$$R_{пр} = R_i n = y'(\xi)\frac{(b-a)h}{2},\quad \xi \in (a,b)\ . \tag{2.6}$$

Оскільки місце розташування точки ξ на інтервалі $x \in (a,b)$ не відомо, то на основі похибки (2.6) можна визначити верхню оцінку абсолютної похибки методу прямокутників і при вказаній точності ε методу виписати нерівності

$$\left|R_{пр}\right| \le \frac{(b-a)h}{2} M_1 \le \varepsilon, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|,$$

які можна використовувати для верхньої оцінки кроку h чисельного інтегрування за методом прямокутників

$$h \le \frac{2\varepsilon}{(b-a)M_1}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

З (2.6) видно, що на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ формула прямокутників має похибку, пропорційну h^2, а на всьому відрізку $x \in [a,b]$ – кроку чисельного інтегрування h. Отже *метод прямокутників є методом першого порядку точності (головний член похибки пропорційний кроку в першому степені)*.

2.1.2. Чисельне інтегрування за допомогою формули трапецій

Розглянемо інтеграл (2.2) на відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$ та будемо на цьому відрізку обчислювати його приблизно, замінюючи підінтегральну функцію інтерполяційним многочленом Лагранжа першого степеня, отримаємо

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x)dx + R_i, \qquad (2.7)$$

де R_i – похибка, яку треба визначити (на рис. 2.1 заштрихована), а L_1 – інтерполяційний многочлен Лагранжа першого степеня, проведений через два вузли інтерполяції x_{i-1} та x_i

$$L_1(x) = y_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

Нехай $x_i - x_{i-1} = h = const$, де $i = \overline{1,n}$.

Позначимо $\frac{x - x_{i-1}}{h} = t$, тоді $\frac{x - x_i}{h} = \frac{(x - x_{i-1}) - (x_i - x_{i-1})}{h} = t - 1$, $dx = hdt$ і многочлен Лагранжа матиме вигляд $L_1(x) = L_1(x_{i-1} + ht) = -y_{i-1}(t-1) + y_i t$. При $x = x_i$ верхня границя $t = 1$, при $x = x_{i-1}$ нижня границя $t = 0$.

Тепер інтеграл в (2.7) від многочлена $L_1(x)$ можна подати як

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x)dx = h\int_0^1 [-y_{i-1}(t-1)+y_i t]dt = h[-y_{i-1}(\frac{t^2}{2}-t)+y_i\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{h}{2}(y_{i-1}+y_i) \qquad (2.8)$$

Вираз (2.8) називають формулою трапецій для чисельного інтегрування на відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

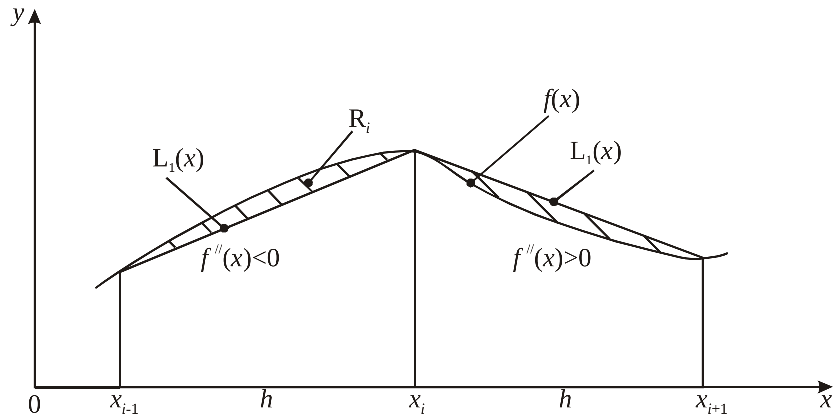

Рисунок 2.1. До висновку формули трапецій

Для всього відрізка $[a,b]$ необхідно додати вираз (2.8) n раз

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)) = \frac{h}{2}(y_0+y_n+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i) \qquad (2.9)$$

Вираз (2.9) *називають формулою трапецій для чисельного інтегрування для всього відрізка* $[a,b]$.

У разі, якщо крок змінний, метод трапецій використовується в наступному вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} h_i\ , \quad h_i = x_i - x_{i-1}\,. \qquad (2.10)$$

Похибку R_i формули трапецій на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ можна отримати, інтегруючи похибку лінійної апроксимації:

$$R_i = y''(\xi)h^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) = -\frac{h^3}{12}y''(\xi), \quad \text{де } \xi \in (x_{i-1}, x_i)\,. \qquad (2.11)$$

З рисунка 2.2 видно, що якщо $f''(x) < 0$, то $R_i > 0$, що підтверджується виразом (2.11); якщо ж $f''(x) > 0$, те $R_i < 0$.

На всьому відрізку $[a,b]$ похибку (2.11) необхідно збільшити в n раз

$$R_{mp} \approx -\frac{nh^3}{12}y''(\xi) = -\frac{(nh)h^2}{12}y''(\xi) = -\frac{b-a}{12}h^2 y''(\xi),\ \xi \in (a,b).$$

Таким чином, метод трапецій – *метод другого порядку точності щодо кроку* h *(головний член похибки пропорційний кроку у квадраті).*

Оскільки розташування точки ξ на інтервалі (a,b) не відомо, то вираз для оцінки похибки зазвичай записується в такий спосіб:

$$\left|R_{mp}\right| \le \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| \frac{b-a}{12} h^2, \qquad (2.12)$$

звідки, задавши точність ε чисельного інтегрування, можна записати нерівність, що використовується для визначення кроку h чисельного інтегрування.

$$h \le \sqrt{\frac{12\cdot\varepsilon}{(b-a)M_2}}, \qquad M_2 = \max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|. \qquad (2.13)$$

Отже, формулами методу трапецій є вираз (2.9) (або (2.10)), (2.12), (2.13).

Чисельне інтегрування за методом трапецій, якщо вказано точність ε, можна виконати в такий спосіб:

1. за формулою (2.13) визначається крок чисельного інтегрування h;
2. за допомогою цього кроку складається сіткова функція $y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$ для підінтегральної функції $f(x)$;
3. обчислюється наближене значення інтеграла за формулою (2.9), крок h у якій гарантує вказану точність ε. Якщо точність ε не вказано, то вибираючи крок h чисельного інтегрування, можна за формулою (2.12) оцінити похибку R_{mp} формули трапецій.

Зауваження. Наявність максимуму модуля другої похідної у виразі для оцінки похибки може приводити до істотного завищення цієї величини. Через це ліпше використовувати описаний нижче метод Рунге для оцінки похибки чисельного інтегрування.

2.1.3. Формула Сімпсона для чисельного інтегрування

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на m пар відрізків $b-a=nh=2mh$, $h=x_i-x_{i-1}=const,\ i=\overline{1,n}$ і через кожні три вузли проведемо інтерполяційний многочлен $L_2(x)$ (рис. 2.2)

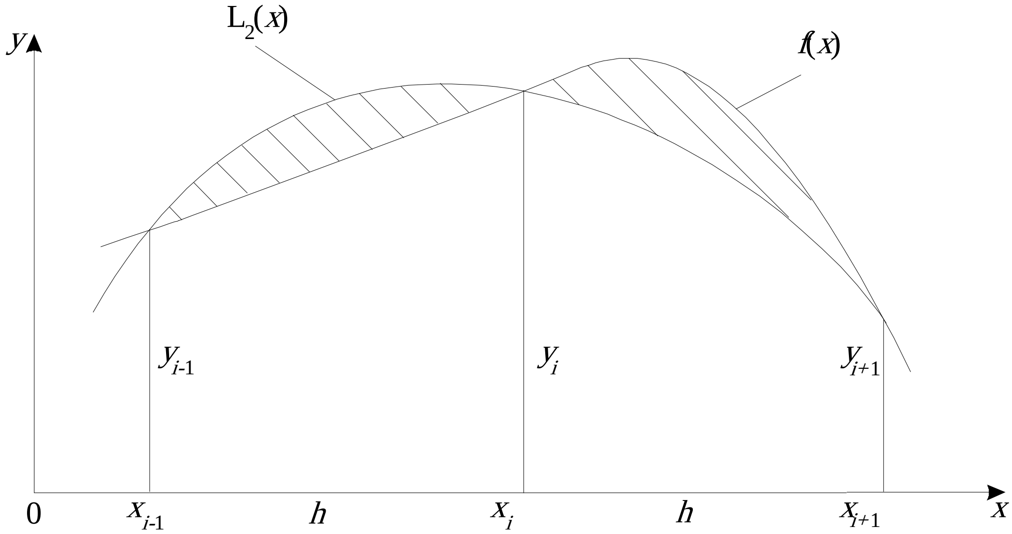

Рисунок 2.2. До методу Сімпсона чисельного інтегрування

Тоді

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)dx + R_i,,$$

де

$$L_2(x) = y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} + y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}.$$

Зробимо заміну: $\dfrac{x-x_{i-1}}{h}=t,\ dx=hdt$, тоді

$$\frac{x-x_i}{h}=\frac{(x-x_{i-1})-(x_i-x_{i-1})}{h}=t-1; \quad \frac{x-x_{i+1}}{h}=\frac{(x-x_{i-1})-(x_{i+1}-x_{i-1})}{h}=t-2.$$

Доданки в $L_2(x)$ матимуть вигляд

$$y_{i-1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{h\cdot 2h}=(t-1)(t-2)\frac{y_{i-1}}{2};$$

$$y_i\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{-h\cdot h}=-t(t-2)y_i;$$

$$y_{i+1}\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h\cdot h}=\frac{t}{2}(t-1)y_{i+1}.$$

При $x=x_{i-1}$: $t=0$; при $x=x_{i+1}$: $t=2$.

Тоді

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = h\int_0^2 \left[\frac{y_{i-1}}{2}(t-1)(t-2) - y_i t(t-2) + \frac{y_{i+1}t}{2}(t-1)\right]dt = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}),$$

звідки

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}). \qquad (2.14)$$

Вираз (2.14) називають формулою Сімпсона для чисельного інтегрування на парі кроків від x_{i-1} до x_{i+1}.

На всьому відрізку $[a,b]$ вираз (2.14) необхідно скласти m разів, оскільки є m пар відрізків завдовжки h. В результаті отримаємо *формулу Сімпсона для чисельного інтегрування*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}). \qquad (2.15)$$

Похибка формули Сімпсона на подвійному кроці пропорційна 4-ій похідній функції та п'ятому степеню кроку h:

$$R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi), \quad \xi \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Для всього відрізка $[a,b]$ цю похибку необхідно помножити на m пар відрізків

$$R_c \approx -\frac{mh^5}{90} f^{IV}(\xi) = -\frac{2mh^5}{180} f^{IV}(\xi) = -\frac{nh \cdot h^4}{180} f^{IV}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{IV}(\xi), \quad \xi \in (a,b),$$

тобто у формулі Сімпсона на всьому відрізку $[a,b]$ *похибка пропорційна четвертому степеню кроку й, отже, метод Сімпсона є методом четвертого порядку точності (тобто головний член похибки пропорційний четвертому степеню кроку h).*

Оскільки положення точки ξ на відрізку $[a,b]$ не відоме, то доцільно навести верхню оцінку похибки

$$|R_c| \le \frac{(b-a)h^4}{180} M_4, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|, \qquad (2.16)$$

звідки при вказаній точності ε можна отримати

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}}, \quad M_4 = \max_{x\in[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|. \tag{2.17}$$

Таким чином, головними формулами методу Сімпсона є вирази (2.15), (2.16), (2.17), відповідно до яких за вказаною точністю ε з (2.17) обчислюється крок h чисельного інтегрування, з його допомогою складається сіткова функція $y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}, \quad n = 2m$, а потім приблизно обчислюється інтеграл за формулою (2.15). Якщо точність ε не вказано, то, беручи певний крок h, можна за формулою (2.16) обчислити похибку чисельного інтегрування. Оскільки таку процедуру можна виконати до обчислення інтеграла, вона називається апріорною оцінкою похибки. Більш точною, але такою, що потребує більшої обчислювальної роботи, є апостеріорна оцінка похибки, яку розглянуто в наступному розділі.

2.1.4. Процедура Рунге оцінки похибки й уточнення формул чисельного інтегрування

Процедура Рунге дозволяє оцінити похибку і підвищити на одиницю порядок методу шляхом багаторазового (у найпростішому разі дворазового) прорахунку з різними кроками.

Нехай використовується будь-який метод чисельного інтегрування із кроками h і $\frac{h}{2}$. І нехай порядок обраного методу дорівнює p, тоді

$$I = I_h + \psi h^p + O(h^{p+1}), \tag{2.18}$$

$$I = I_{\frac{h}{2}} + \psi(\frac{h}{2})^p + O_1(h^{p+1}), \tag{2.19}$$

де I - точне значення інтеграла; $I_h, I_{\frac{h}{2}}$ - обчислені значення інтеграла із кроком h і $h/2$ відповідно; другі доданки праворуч – головні члени похибки методу чисельного інтегрування порядку p. Віднявши від виразу (2.19) вираз (2.18), отримаємо

$$(I_{\frac{h}{2}} - I_h) + \psi(\frac{h}{2})^p[1-2^p] + O(h^{p+1}) = 0,$$

$$\psi(\frac{h}{2})^p = \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1})\,. \qquad (2.20)$$

Вираз (2.20) дозволяє виконати апостеріорну оцінку похибки обчисленого значення визначеного інтеграла.

Підставимо (2.20) в (2.18), отримаємо формулу чисельного інтегрування вже порядку $p+1$

$$I = I_{\frac{h}{2}} + \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1} + O(h^{p+1}). \qquad (2.21)$$

Таким чином, формула (2.21) – найпростіша процедура Рунге уточнення на один порядок формули чисельного інтегрування.

Приклад 2.1. Методом трапецій з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$ та Сімпсона з точністю $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ обчислити визначений інтеграл (обчислювати точно)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\,\Big|_0^1 = \ln 2 = 0{,}69315.$$

Розв'язування

1) *Метод трапецій.* Виходячи із заданої точності $\varepsilon = 10^{-2}$, обчислимо крок чисельного інтегрування, для чого використовується формула (2.13)

$$h \le \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}}, \quad M_2 = \max_{x\in[0;1]}|f''(x)| = \max_{x\in[0;1]}\left|\frac{2}{(1+x)^3}\right| = 2; \;\; h \le \sqrt{\frac{12\cdot 0{,}01}{(1-0)\cdot 2}} = \sqrt{6}\cdot 0{,}1 = 0{,}2449.$$

Необхідно вибрати такий крок, що задовольняє нерівності $h \le 0{,}2449$ та щоб на відрізку інтегрування $x \in [0;1]$ він укладався ціле число раз. Приймаємо $h = 0{,}2$. Він задовольняє обом цим вимогам.

Для підінтегральної функції $f(x) = (1+x)^{-1}$ з незалежною змінною x_i, що змінюється відповідно до рівності $x_i = x_0 + ih = 0 + i\cdot 0{,}2$, $i = \overline{0,5}$ становимо сіткову функцію з точністю до другого знака після коми:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	1,0	0,83	0,71	0,63	0,56	0,5

Використовується формула трапецій (2.9) чисельного інтегрування (n=5).

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{0,2}{2}\left[1,0 + 0,5 + 2(0,83 + 0,71 + 0,63 + 0,56)\right] = 0,696.$$

Порівнюючи це значення з точним, бачимо, що абсолютна похибка не перевищує заданої точності ε: $|0,69315 - 0,696| < 0,01.$

Таким чином, за наближене значення визначеного інтеграла за методом трапецій з точністю $\varepsilon = 0,01$ приймається значення

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,696.$$

2) *Метод Сімпсона*. Виходячи із заданої точності $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ обчислюється крок чисельного інтегрування для методу Сімпсона за формулою (2.17)

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}},\ M_4 = \max_{x\in[0;1]}\left| f^{IV}(x)\right| = \max_{x\in[0;1]}\left|\frac{24}{(1+x)^5}\right| = 24;$$

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180\cdot 10^{-4}}{(1-0)\cdot 24}} = 10^{-1}\sqrt[4]{7,5} = 0,165.$$

Необхідно вибрати такий крок, щоб він задовольняв нерівності $h \le 0,165$ та щоб на відрізку інтегрування $x \in [0;1]$ він укладався *парне число* раз. Приймаємо $h = 0,1$. Із цим кроком для підінтегральної функції $f(x) = (1+x)^{-1}$ формується сіткова функція з незалежною змінної x_i, що змінюється за законом $x_i = x_0 + ih = 0 + i\cdot 0,1,\ i = \overline{0,10}$, $n = 10,\ m = 5$, причому значення сіткової функції обчислюються з точністю до четвертого знака після коми:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1,0
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1,0	0,9091	0,8333	0,7692	0,7143	0,6667	0,625	0,5882	0,5556	0,5263	0,5

Використовується формула Сімпсона (2.15) чисельного інтегрування (n=10, m=5)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i} \right) = \frac{0,1}{3} \cdot \left[1,0 + 0,5 + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right)\right] = \frac{0,1}{3}\left[1,5 + 4\left(0,9091 + 0,7692 + 0,6667 + 0,5882 + 0,5263\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(0,8323 + 0,7143 + 0,625 + 0,5556\right)\right] = \frac{0,1}{3}\left(1,5 + 4 \cdot 3,4595 + 2 \cdot 2,7281\right) = \frac{0,1}{3} 20,7942 =$$

$$= 0,69314.$$

Порівняння цього значення з точним значенням інтеграла показує, що абсолютна похибка не перевищує заданої точності ε_1:

$$\left|0,69315 - 0,69314\right| < 0,0001.$$

Таким чином, за наближене значення визначеного інтеграла за методом Сімпсона з точністю $\varepsilon_1 = 0,0001$ приймається значення

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,6931.$$

Зауваження. Ясно, що для більшості інтегралів від безперервних функцій первісна не обчислюється (однак вона існує) і обчислене наближене значення порівнювати немає з чим, однак крок чисельного інтегрування, обчислений по заданій точності, гарантує цю точність обчислення.

2.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Обчислити визначений інтеграл $F = \int_{X_0}^{X_1} y\,dx$, методами прямокутників, трапецій, Сімпсона із кроками h_1, h_2. Уточнити отримані значення, використовуючи метод Рунге-Ромберга.
2. Написати програму розв’язування поставленої задачі (див. свій варіант у табл. 2.1.) мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.
3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:
   - мета роботи;
   - теоретичні відомості;
   - розв’язок задачі в аналітичній формі;

- лістинги програм розв’язування задачі (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 2.1. Варіанти завдань на лабораторну роботу

№ вар	**Завдання**	**Вихідні дані**
1.	$y=\frac{x}{2x+5}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
2.	$y=\frac{x}{(3x+4)^2}$	$X_0=0,\quad X_k=4,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
3.	$y=\frac{x}{(3x+4)^3}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
4.	$y=\frac{3x+4}{2x+7}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
5.	$y=\frac{1}{(2x+7)(3x+4)}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
6.	$y=\frac{x}{(2x+7)(3x+4)}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
7.	$y=\frac{1}{3x^2+4x+2}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
8.	$y=\frac{1}{x^2+4}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
9.	$y=\frac{x}{x^2+9}$	$X_0=0,\quad X_k=2,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
10.	$y=\frac{x^2}{x^2+16}$	$X_0=0,\quad X_k=2,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
11.	$y=\frac{1}{x^3+64}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
12.	$y=\frac{x}{x^3+8}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
13.	$y=\frac{x^2}{x^3-27}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$

14.	$y=\dfrac{1}{x^4+16}$	$X_0=0,\quad X_k=2,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
15.	$y=\dfrac{x}{x^4+81}$	$X_0=0,\quad X_k=2,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
16.	$y=\dfrac{x^2}{x^4+256}$	$X_0=0,\quad X_k=2,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
17.	$y=\dfrac{1}{256-x^4}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
18.	$y=\dfrac{x}{16-x^4}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
19.	$y=\dfrac{x^2}{625-x^4}$	$X_0=0,\quad X_k=4,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
20.	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{4+3x}$	$X_0=1,\quad X_k=5,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
21.	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{(1+2x)^2}$	$X_0=1,\quad X_k=5,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
22.	$y=x\sqrt{2x+3}$	$X_0=-1,\quad X_k=1,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
23.	$y=\dfrac{1}{\sqrt{(2x+7)(3x+4)}}$	$X_0=0,\quad X_k=4,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
24.	$y=\sqrt{16-x^2}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
25.	$y=x\sqrt{49-x^2}$	$X_0=-2,\quad X_k=2,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
26.	$y=x^2\sqrt{36-x^2}$	$X_0=1,\quad X_k=5,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
27.	$y=\sqrt{9+x^2}$	$X_0=1,\quad X_k=5,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
28.	$y=x^3\sqrt{4+x^2}$	$X_0=1,\quad X_k=5,\quad h_1=1.0,\quad h_2=0.5$
29.	$y=\sqrt{x^2-36}$	$X_0=6.5,\quad X_k=8.5,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$
30.	$y=x^3\sqrt{x^2-49}$	$X_0=7.5,\quad X_k=9.5,\quad h_1=0.5,\quad h_2=0.25$

2.3. Контрольні запитання

1. Чому чисельні методи інтегрування є дуже важливими?

2. Охарактеризуйте метод прямокутників. Похибка, продуктивність

3. Метод трапецій. Похибка, продуктивність

4. Метод Сімпсона. Похибка, продуктивність

5. Процедура Рунге уточнення формул чисельного інтегрування

Лабораторна робота №3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

3.1. Теоретичні відомості

3.1.1. Постановка задачі наближення функцій

У теорії наближень вивчаються методи наближення функцій більш простими, добре вивченими функціями, методи чисельного диференціювання та чисельного інтегрування. При цьому досліджувана наближувана функція може бути задана як в аналітичному, так і дискретному виді (у вигляді експериментальної таблиці).

Нехай дано деяку функцію $f(x)$ на відрізку $x \in [a,b]$, що є досить складною для досліджування. Потрібно замінити цю функцію деякою простою, але добре досліджуваною функцією (наприклад, многочленом). Для цього за

(3.1)

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

допомогою $f(x)$ будують таблицю (її називають *сітковою* функцією), яку можна замінити (згладити) простою функцією з контрольованою похибкою.

Розглянемо два підходи до такої заміни:

1. Нехай наближена функція є многочленом n-го степеня,

$$\bar{f}(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \tag{3.2}$$

де $n+1$ – число вузлів у таблиці (3.1), з невідомими параметрами a_i, $i = \overline{0,n}$, так наближає сіткову функцію $f(x)$, що

$$y_i = \bar{f}(x_i), \quad i = \overline{0,n}. \tag{3.3}$$

У цьому разі говорять, що функція $\bar{f}(x)$ *інтерполює* сіткову функцію (3.1), а сама задача наближення називається *задачею інтерполяції.* Точки x_i, $i = \overline{0,n}$ називають *вузлами інтерполяції*, а умова (3.3) – *умовою інтерполяції*. З'являється можливість обчислити значення $\bar{f}(x)$ не тільки у вузлах інтерполяції, але й між ними в точках $\xi \in (x_{i-1}, x_i), i = \overline{1,n}$, причому $\bar{f}(\xi) \approx f(\xi)$.

2. Для великої кількості точок $x_i, i = \overline{0,n}$ інтерполяція вимагає великої гладкості (за *n*-ю похідною), що практично виконати неможливо. Тому згладжування сіткової функції (3.1) здійснюють шляхом мінімізації деякого функціонала, побудованого за допомогою (3.1) і многочлена (3.2) степеня *m*, наприклад, квадратичного функціонала:

$$S(a_0, a_1, ..., a_m) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - \bar{f}(x_i)\right]^2, \quad m << n. \tag{3.4}$$

Процедуру згладжування в цьому разі називають *апроксимацією* заданої функції функцією (3.2), зокрема, апроксимацію з використанням функціонала (3.4) називають апроксимацією за допомогою *точкового методу найменших квадратів*.

Якщо коефіцієнти згладжуваної функції (3.2) визначаються шляхом мінімізації функціонала

$$S(a_0, a_1, ..., a_m) = \int_a^b \left[f(x) - \bar{f}(x)\right]^2 dx, \tag{3.5}$$

згладжування називають *інтегральним методом найменших квадратів*.

Якщо згладжувану функцію задано експериментальною таблицею (3.1), то в методах згладжування практично нічого не змінюється. Змінюються методи оцінки похибки згладжування.

3.1.2. Задача інтерполяції

Нехай на відрізку $x \in [a,b]$ задано функцію $f(x)$, за допомогою якої побудовано сіткову функцію (3.1) або задано експериментальну таблицю (3.1).

При згладжуванні функції (або експериментальної таблиці) за допомогою інтерполяції відповідно до умови інтерполяції (3.3) значення інтерполюючої функції і значення заданої функції у вузлах сітки повинні бути однаковими, отже, похибка інтерполяції у x_i вузлах $i = \overline{0,n}$, дорівнює нулю (рис. 3.1).

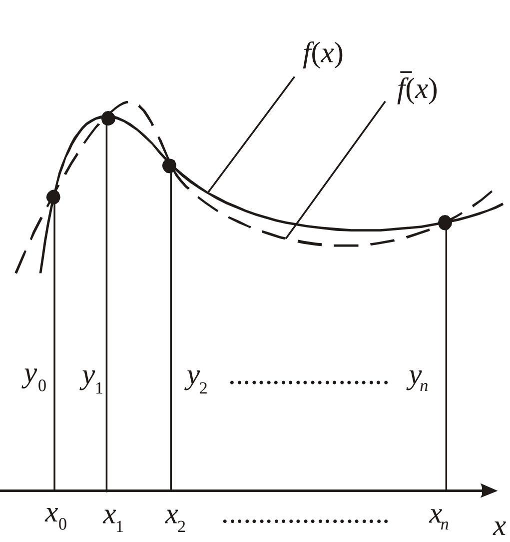

Рисунок 3.1. До завдання інтерполяції

Задача інтерполяції має не єдиний розв'язок, але у разі, якщо інтерполюючою функцією є многочлен n-го степеня (n+1 – число вузлів інтерполяції) виду (3.2), інтерполяція має єдиний розв'язок, тобто коефіцієнти $a_0,\ldots,a_n$ визначаються єдиним способом.

Дійсно, використовуючи таблицю (3.1), складемо СЛАР щодо невідомих коефіцієнтів $a_0,\ldots,a_n$:

$$\begin{array}{r} i=0 \\ i=1 \\ \cdots \\ i=n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{array} \right. \qquad (3.6)$$

Неоднорідна СЛАР (3.6) має єдиний розв'язок для коефіцієнтів $a_0,\ldots,a_n$, тому що визначник матриці цієї СЛАР не дорівнює нулю:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & . & x_1^n \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & . & x_n^n \end{pmatrix} \neq 0,$$

оскільки всі значення вузлів інтерполяції різні між собою і жоден з рядків не є лінійною комбінацією інших рядків. Таким чином, *задача поліноміальної* *інтерполяції має єдиний розв'язок*, тому що коефіцієнти $a_0,...,a_n$ можна вибрати єдиним способом.

3.1.3. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Для поліноміальної інтерполяції можна не розв'язувати СЛАР (3.6), а скласти многочлен (3.2) у такий спосіб :

запишемо систему поліномів *n*-го степеня

$$l_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x = x_i, \quad i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$l_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} = \begin{cases} 1, & x = x_1 \\ 0, & x = x_i, \quad i = 0,\overline{2,\ n} \end{cases}$$

....

$$l_n = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} = \begin{cases} 1, & x = x_n \\ 0, & x = x_i, \quad i = \overline{0,n-1}. \end{cases}$$

Складемо лінійну комбінацію цих поліномів (їхня кількість дорівнює *n*+1) з коефіцієнтами лінійної комбінації, рівними значенням y_i сіткової функції (3.1), отримаємо многочлен *n*-го степеня:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}. \qquad (3.7)$$

Поліном (3.7) називають *інтерполяційним поліномом Лагранжа n-го* степеня, тому що він, по-перше, задовольняє умові інтерполяції

$$L_n(x_i) = y_i \quad , \quad i = \overline{0,n},$$

і, по-друге, має *n*-й степінь.

Інтерполяційний многочлен Лагранжа має таку ваду, що у разі, коли додаються нові вузли інтерполяції в таблиці (3.1), всі доданки в (3.7) необхідно перераховувати.

Випишемо найбільш вживані поліноми $L_1(x)$ й $L_2(x)$:

1) Для таблиці із двома вузлами інтерполяції x_i, x_{i+1}

x_i	x_{i+1}
y_i	y_{i+1}

$$L_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i};$$

2) Для таблиці із трьома вузлами інтерполяції x_{i-1}, x_i, x_{i+1}

x_{i-1}	x_i	x_{i+1}
y_{i-1}	y_i	y_{i+1}

$$L_2(x) = y_{i-1} \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + y_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} +$$
$$+ y_{i+1} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}.$$

3.1.4. Інтерполяційний поліном Ньютона

Щоб побудувіати інтерполяційний поліном у формі Ньютона, використовується поняття ***подіеної різниці, що являє собою аналог поняття похідної стосовно сіткових функцій.***

Поділеною різницею сіткової функції (3.1) **нульового порядку** у вузлах $x_i, i = \overline{0,n}$ називаються значення цієї функції в цих вузлах $f(x_i) = y_i, i = \overline{0,n}.$

Визначення 1. Поділеною різницею функції (3.1) ***першого порядку*** у вузлах $x_i, i = \overline{0,n-1}$ називають відношення

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = \overline{0,n-1}$$

Визначення 2. Поділеною різницею функції (3.1) ***другого порядку*** у вузлах x_i, $i = \overline{0,n-2}$ називають відношення

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} =$$
$$= \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = \overline{0,n-2}.$$

Визначення 3. Поділеною різницею функції (3.1) ***n-го порядку*** у вузлі x_0 називають відношення

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, ..., x_n) - f(x_0, ..., x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Використовуючи поділені різниці, інтерполяційний поліном Ньютона можна записати у такій формі:

$$\begin{aligned} N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + ... + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Зазначимо, що коли додаються нові вузли, перші члени многочлена Ньютона залишаються незмінними.

Якщо функцію задано в точках $x_0, x_1, ..., x_n$, то при побудові інтерполяційного многочлена Ньютона зручно користуватися таблицею, називаною таблицею поділених різниць, приклад якої для $n = 4$ наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1.

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3, x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

Щоб підвищити точність інтерполяції, в суму (3.8) можна додавати нові члени, для чого необхідно включити додаткові інтерполяційні вузли. При цьому байдуже, у якому порядку додаються нові вузли. Цим формула Ньютона вигідно відрізняється від формули Лагранжа.

3.1.2.3. Похибка поліноміальної інтерполяції

Зрозуміло, що у вузлах інтерполяції похибка інтерполяційного полінома $L_n(x)$ або $N_n(x)$ дорівнює нулю:

$$\left. \begin{matrix} L_n(x_i) - y_i \\ N_n(x_i) - y_i \end{matrix} \right\} = 0, \qquad i = \overline{0, n}.$$

Похибка $L_n(x)-f(x)$, що представляє собою різницю між значенням інтерполяційного многочлена $L_n(x)$ і значенням функції $f(x)$ в точці x, що не збігається з вузлом інтерполяції має вигляд:

$$f\left(\bar{x}\right)-L_n\left(\bar{x}\right)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)...(\bar{x}-x_n),\quad \xi\in(a,b). \qquad (3.9)$$

$\bar{x}$ – точка, у якій шукається похибка (не збігається з вузлами інтерполяції).

Оскільки точка $\xi\in(a,b)$ невідома, то замість похибки (3.9) вводиться верхня оцінка похибки у вигляді

$$\left|f(\bar{x})-L_n(\bar{x})\right|\le\frac{\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}\left|(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)...(\bar{x}-x_n)\right|, \qquad (3.10)$$

яка й використовується на практиці.

Таким чином, похибка інтерполяції залежить як від величини відповідної похідної наближуваної функції, так і від розташування вузлів. Мінімізувати похибку наближення досить гладкої функції на відрізку $[a,b]$ поліномом степеня n можна, розташувавши вузли інтерполяції в такий спосіб:

$$x_i=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_i\ ,\ i=\overline{0,n},$$

де $t_i=\cos\dfrac{2i+1}{n}\pi$ – корінь полінома Чебишова $H_n(x)=\cos(n\arccos x)$ (або в рекурентном виді $H_0(x)=1,\ H_1(x)=x,\ H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H_{n-2}(x)$).

Зазначимо також, що таке розташування вузлів інтерполяції гарантує збіжність інтерполяційного полінома до наближуваної функції при підвищенні числа вузла інтерполяції (степеня полінома), тоді як при рівномірному розподілі вузлів у ряді випадків може спостерігатися розбіжність (така ситуація добре ілюструється відомим прикладом Рунге, у якому функція $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$ наближається інтерполяційним поліномом на відрізку $[-1,1]$).

Приклад 3.1. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа, що збігається з функцією $f(x)=3^x,\ x\in[-1,1]$ в точках $x_0=-1, x_1=0,\quad x_2=1.$ Обчислити значення сіткової функції й оцінити похибку інтерполяції в точці $x^*=0{,}5.$

Розв'язування. Складемо сіткову функцію та занесемо її в таблицю. Оскільки $n=2$, то необхідно побудувати інтерполяційний поліном $L_2(x)$.

x_i	$x_0=-1$	$x_1=0$	$x_2=1$
y_i	$y_0=1/3$	$y_1=1$	$y_2=3$

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

$$\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+1.$$

Перевіримо умови інтерполяції: $L_2(-1)=1/3;\ L_2(0)=1;\quad L_2(1)=3.$

Значення сіткової функції в точці $x^*=0{,}5$ обчислимо за інтерполяційним многочленом $y(0{,}5)\approx L_2(0{,}5)=1{,}8333$.

Верхню оцінку похибки інтерполяційного многочлена визначимо відповідно до виразу (3.10)

$$\left|f(x^*)-L_2(x^*)\right|\le\frac{\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|f'''(x)\right|}{3!}\left|(x^*-x_0)(x^*-x_1)(x^*-x_2)\right|\ ;$$

$$\max_{x\in[-1,1]}\left|f'''(x)\right|=\max_{x\in[-1,1]}\left|3^x\cdot\ln^3 3\right|=3^1\cdot\ln^3 3=3{,}978\,;$$

$$\left|3^{0{,}5}-\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}25+\frac{4}{3}\cdot 0{,}5+1\right)\right|\le\frac{3{,}978}{6}\left|(0{,}5+1)(0{,}5-0)(0{,}5-1)\right|=0{,}249.$$

Оскільки функція $f(x)=3^x$ відома, то можна обчислити точне значення абсолютної похибки в точці $x^*=0{,}5$

$$\left|3^{x^*}-L_2(x^*)\right|=\left|3^{0{,}5}-\left(\frac{2}{3}\cdot 0{,}25+\frac{4}{5}\cdot 0{,}5+1\right)\right|=0{,}1012,$$

тобто верхня оцінка похибки приблизно в 2,5 рази перевищує абсолютну похибку у точці $x^*=0{,}5$.

Приклад 3.2. Для заданої таблиці

x_i	$x_0=-1$	$x_1=0$	$x_2=2$
y_i	$y_0=1/3$	$y_1=1$	$y_2=9$

скласти інтерполяційний поліном Ньютона.

Розв'язування. Таблицю визначено з нерівномірним кроком, тому, щоб розв'язати завдання скористаємося многочленом Ньютона з поділеними різницями (формула (3.8))

$$N_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1),$$

де $f(x_0)=y_0=1/3$; $f(x_0,x_1)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{1-1/3}{0+1}=\dfrac{2}{3}$;

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}=\frac{\dfrac{9-1}{2-0}-\dfrac{1-1/3}{0+1}}{2+1}=\frac{10}{9}.$$

Таким чином, $N_2(x)=\dfrac{10}{9}x^2+\dfrac{16}{9}x+1$.

Умов інтерполяції дотримано: $N_2(-1)=1/3$; $N_2(0)=1$; $N_2(2)=9$.

3.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Використовуючи таблицю значень функції $y=f(x)$ - Y_i, які обчислено в точках X_i, $i=0,...,3$, побудувати інтерполяційні многочлени Лагранжа та Ньютона, що проходять через точки $\{X_i,Y_i\}$. Обчислити значення похибки інтерполяції в точці X^*.

2. Написати програму розв'язування задачі (див. свій варіант у табл. 3.2.) мовою *Python* усіма розглянутими вище методами.

3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:

- мета роботи;
- теоретичні відомості;

- розв’язок задачі в аналітичній формі;
- лістинги програм розв’язування завдання (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 3.2 – Варіанти завдань на лабораторну роботу

№	Завдання	Діапазон 1	Діапазон 2	Точка X*
1.	$y = \sin(x)$	$X_i = 0.1\pi,\ 0.2\pi, 0.3\pi, 0.4\pi;$	$X_i = 0.1\pi,\ \frac{\pi}{6}, 0.3\pi, 0.4\pi;$	$X^* = \frac{\pi}{4}$
2.	$y = \cos(x)$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = \frac{\pi}{4}$
3.	$y = tg(x)$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}$	$X^* = \frac{3\pi}{16}$
4.	$y = ctg(x)$	$X_i = \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}$	$X_i = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{16}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = \frac{\pi}{3}$
5.	$y = \ln(x)$	$X_i =\ 0.2, 0.6, 1.0, 1.4$	$X_i =\ 0.2, 0.6, 1.0, 1.4$	$X^* = 0.8$
6.	$y = e^x$	$X_i = -2, -1, 0, 1$	$X_i = -2, -1, 0.2, 1$	$X^* = -0.5$
7.	$y = \sqrt{x}$	$X_i =\ 0, 1.7, 3.4, 5.1$	$X_i =\ 0, 1.7, 4.0, 5.1$	$X^* = 3.0$
8.	$y = \arcsin(x)$	$X_i = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5$	$X_i = -0.4, 0, 0.2, 0.5$	$X^* = 0.1$
9.	$y = \arccos(x)$	$X_i = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5$	$X_i = -0.4, 0, 0.2, 0.5$	$X^* = 0.1$
10.	$y = arctg(x)$	$X_i = -3, -1,\ 1, 3$	$X_i = -3, 0,\ 1, 3$	$X^* = -0.5$
11.	$y = arcctg(x)$	$X_i = -3, -1,\ 1, 3$	$X_i = -3, 0,\ 1, 3$	$X^* = -0.5$
12.	$y = \sin(x) + x$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = 1.0$
13.	$y = \cos(x) + x$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = 1.0$
14.	$y = tg(x) + x$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$	$X_i = 0,\ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}$	$X^* = \frac{3\pi}{16}$
15.	$y = ctg(x) + x$	$X_i = \frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}$	$X_i = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = \frac{3\pi}{16}$
16.	$y = \ln(x) + x$	$X_i =\ 0.1, 0.5, 0.9, 1.3$	$X_i =\ 0.1, 0.5, 1.1, 1.3$	$X^* = 0.8$
17.	$y = e^x + x$	$X_i = -2, -1, 0, 1$	$X_i = -2, -1, 0.2, 1$	$X^* = -0.5$

18.	$y=\sqrt{x}+x$	$X_i = 0, 1.7, 3.4, 5.1$	$X_i = 0, 1.7, 4.0, 5.1$	$X^* = 3.0$
19.	$y=\arcsin(x)+x$	$X_i = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5$	$X_i = -0.4, 0, 0.2, 0.5$	$X^* = 0.1$
20.	$y=\arccos(x)+x$	$X_i = -0.4, -0.1, 0.2, 0.5$	$X_i = -0.4, 0, 0.2, 0.5$	$X^* = 0.1$
21.	$y=arctg(x)+x$	$X_i = -3, -1, 1, 3$	$X_i = -3, 0, 1, 3$	$X^* = -0.5$
22.	$y=arcctg(x)+x$	$X_i = -3, -1, 1, 3$	$X_i = -3, 0, 1, 3$	$X^* = -0.5$
23.	$y=\frac{1}{x}$	$X_i = 0.1, 0.5, 0.9, 1.3$	$X_i = 0.1, 0.5, 1.1, 1.3$	$X^* = 0.8$
24.	$y=\frac{1}{x^2}$	$X_i = 0.1, 0.5, 0.9, 1.3$	$X_i = 0.1, 0.5, 1.1, 1.3$	$X^* = 0.8$
25.	$y=\frac{1}{x}+x$	$X_i = 0.1, 0.5, 0.9, 1.3$	$X_i = 0.1, 0.5, 1.1, 1.3$	$X^* = 0.8$
26.	$y=\frac{1}{x^2}+x^2$	$X_i = 0.1, 0.5, 0.9, 1.3$	$X_i = 0.1, 0.5, 1.1, 1.3$	$X^* = 0.8$
27.	$y=x\sin(x)$	$X_i = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$	$X_i = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = \frac{\pi}{4}$
28.	$y=x\cos(x)$	$X_i = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}$	$X_i = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}$	$X^* = \frac{\pi}{4}$
29.	$y=xe^x$	$X_i = -2, -1, 0, 1$	$X_i = -2, -1, 0.2, 1$	$X^* = -0.5$
30.	$y=x^2e^x$	$X_i = -1.2, -0.7, -0.2, 0.3$	$X_i = -1.2, -0.7, -0, 0.3$	$X^* = -0.5$

3.3. Контрольні запитання

1. Дайте визначення поняттям інтерполяція і апроксимація. Як ставиться задача інтерполяції?

2. Використання інтерполяційного полінома Лагранжа. Переваги й вади.

3. Використання інтерполяційного полінома Ньютона. Переваги й вади.

4. Похибка інтерполяції.

Лабораторна робота №4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ. СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЯ

4.1. Теоретичні відомості

4.1.1. Сплайн-інтерполяція

Розглянута в попередній лабораторній роботі інтерполяція, коли інтерполяційний поліном будується відразу за всіма вузлама інтерполяції називається ***глобальною інтерполяцією. При цьому збільшення числа вузлів автоматично призводить до підвищення степеня полінома, і як наслідок, до прояву його коливальних властивостей (рис. 4.1).***

Тому звичайну поліноміальну інтерполяцію здійснюють максимум за 3-4 вузлами. Інтерполяцію за декількома вузлами таблиці (3.1), називають ***локальною.***

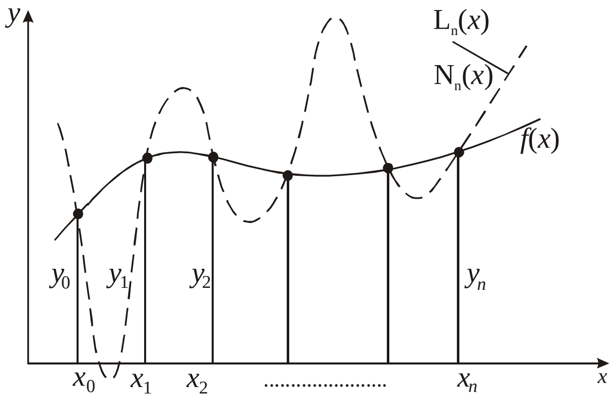

Рисунок 4.1. Прояв коливальних властивостей глобального інтерполяційного полінома

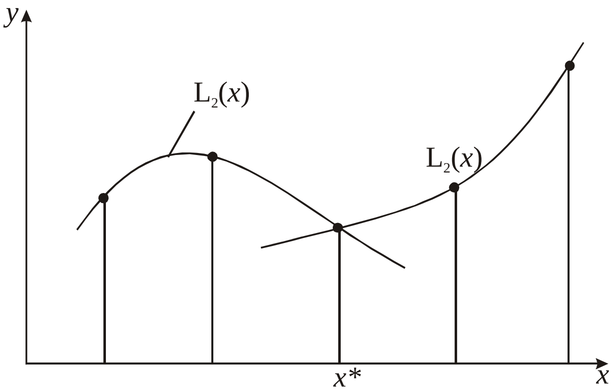

Рисунок 4.2. Локальна інтерполяція за кожними трьома вузлами

Однак, така локальна інтерполяція за допомогою L_n або N_n має ту ваду, що інтерполююча функція у вузлах стикування поліномів має неперервність тільки нульового порядку, тобто інтерполюючи функція належить класу C^0 функцій (див. рис. 4.2 для L_2, N_2 у вузлі x^*).

Цієї вади не має сплайн-інтерполяція, що забезпечує неперервність у вузлах стикування локальних многочленів за похідними відповідно порядку один, два тощо.

Визначення. Сплайном степеня *m* дефекту r називається *(m-r)* раз неперервно диференційовна функція, що на кожному відрізку $[x_i - x_{i-1}],\ i = \overline{1,n}.$ являє собою многочлен степеня *m*.

Найпоширенішими в науці та техніці є сплайни 3-го степеня дефекту один, тобто

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ r = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow m - r = 3 - 1 = 2,$$

тобто двічі неперервно диференційовний многочлен 3-го степеня на кожному відрізку $[x_i, x_{i-1}],\ i = \overline{1,n}.$. Сплайни, що задовольняють умові інтерполяції, називаються ***інтерполяційними.***

Основною перевагою інтерполяційного кубічного сплайна дефекту один є таке: цей сплайн має мінімум інтегральної кривизни на всьому даному відрізку $[a,b]$ порівняно з іншими інтерполяційними функціями $\bar{f}(x)$, тобто

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \le \int_a^b [\bar{f}''(x)]^2 dx \quad .$$

Геометрично це означає, що якщо важку пружну нитку повісити на ряд цвяхів, то вона прибере форму кубічного сплайна дефекту 1, наведену на рис. 4.3.

Рисунок 4.3. Важка пружна нитка, що геометрично являє собою кубічні сплайни дефекту 1

Розглянемо алгоритм побудови інтерполяційного кубічного сплайна $S(x)$, $i = \overline{1,n}$ дефекту 1 відповідно до таблиці (3.1). Кубічний поліном $S_i(x)$ на відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$ має чотири невідомих коефіцієнти. Кількість відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ відповідно до таблиці (3.1) дорівнює *n*. Щоб визначити $4 \times n$ коефіцієнтів використаємо наступні умови у вузлах інтерполяції:

умова інтерполяції $\qquad S(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n};$

неперервність сплайна $S(x_i-0)=S(x_i+0)$, $i=\overline{1,n-1}$;

неперервність похідних 1-го порядку $S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$, $i=\overline{1,n-1}$;

неперервність похідних 2-го порядку $S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$, $i=\overline{1,n-1}$

Таким чином, усього є $(n+1)+3(n-1)=4n-2$ умов. Як дві умови, яких бракує, беруть значення похідних 1-го або 2-го порядків у вузлах x_0 і x_n. Для виведення використовуємо значення $S''(x_0)=S''(x_n)=0$. У цьому разі сплайн називається *натуральним*.

Нехай $S''(x)=q(x)$. На відрізку $[x_{i-1},x_i]$ розглянемо поведінку функції $q(x)$ (див. рис.4.4) .

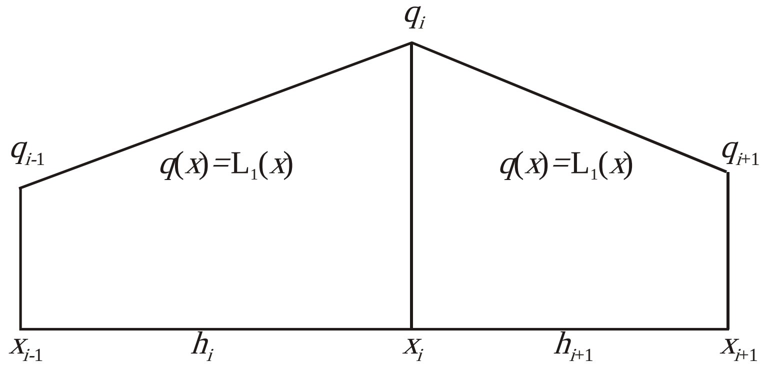

Рис. 4.4. Поведінка функцій $S''(x)$ на елементарних відрізках

Оскільки сплайн є многочленом 3-го степеня, то на кожному відрізку $[x_{i-1},x_i]$ 2-а похідна буде линейна. Знайдемо її за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа 1-го степеня $L_1(x)$:

$$q(x)=q_{i-1}\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}+q_i\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}. \tag{4.1}$$

Вираз (4.1) вже задовольняє умови неперервності похідних 2-го порядку. Справді, підставимо в (4.1) $x=x_i-0$, отримаємо $q(x_i-0)=q_i$. Потім, виписуючи вираз (4.1) для відрізка $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$q(x)=q_i\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}+q_{i+1}\frac{x-x_i}{h_{i+1}},\quad x\in[x_i,x_{i+1}],\quad i=\overline{1,n-1}$$

і підставляючи в нього x_i+0 замість x, отримаємо $q(x_i+0)=q_i$, що й було потрібно показати.

Щоб знайти сплайн, проінтегруємо двічі вираз (4.1), отримаємо

$$S(x)=q_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+q_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+C_1x+C_2, \qquad (4.2)$$

де C_1 та C_2 знайдемо з того, що значення сплайна (4.2) у вузлах x_{i-1}, x_i повинні задовольняти умови інтерполяції

$$\begin{cases} S(x_{i-1})=y_{i-1}=q_{i-1}\dfrac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h_i}+q_i\dfrac{(x_{i-1}-x_{i-1})^3}{6h_i}+C_1x_{i-1}+C_2 \\ S(x_i)=y_i=q_{i-1}\dfrac{(x_i-x_i)^3}{6h_i}+q_i\dfrac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h_i}+C_1x_i+C_2. \end{cases}$$

Вирішуючи цю СЛАР відносно C_1, C_2 і підставляючи їх в (4.2), знайдемо наступний вираз для сплайна степеня 3 дефекта 1:

$$\begin{aligned} S(x)&=q_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+q_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+\left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-q_{i-1}\frac{h_i}{6}\right)(x_i-x)+\\ &+\left(\frac{y_i}{h_i}-q_i\frac{h_i}{6}\right)(x-x_{i-1}),\quad x\in[x_{i-1},x_i]. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

У цьому сплайні вузлові значення для других похідних q_i поки невідомі. Будемо шукати їх з умов неперервності перших похідних у вузлах x_i.

Для знаходження похідної $S'(x_i+0)$ запишемо (4.3) для відрізка $[x_i, x_{i+1}]$

$$\begin{aligned} S(x)&=q_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_{i+1}}+q_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_{i+1}}+\left(\frac{y_i}{h_{i+1}}-q_i\frac{h_{i+1}}{6}\right)(x_{i+1}-x)+\\ &\left(\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}}-q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}\right)(x-x_i),\qquad x\in[x_i,x_{i+1}]. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Обчислюючи від (4.3) і (4.4) похідні першого порядку й підставляючи в них значення $x=x_i$, отримаємо

$$S'(x_i-0)=q_{i-1}\frac{h_i}{6}+q_i\frac{h_i}{3}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i},$$

$$S'(x_i+0)=-q_i\frac{h_{i+1}}{3}-q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}.$$

Дорівнявши ці вирази відповідно до умов неперервності перших похідних у вузлах інтерполяції x_i , отримаємо

$$q_{i-1}\frac{h_i}{6}+q_i\frac{h_i+h_{i+1}}{3}+q_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i},\quad i=\overline{1,n-1}; \qquad (4.5)$$

$$q_0 = q_n = 0. \tag{4.6}$$

Система (4.5) із заданими крайовими умовами (4.6) – СЛАР відносно $q_i = S''(x_i)$, $i = \overline{1, n-1}$ має трьохдіагональну матрицю й, отже, її можна розв'язувати методом прогону. Підставляючи знайдені q_i, $i = \overline{0, n}$ в (4.3), отримаємо кубічні сплайни дефекту 1 на кожному відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Таким чином, виразами для визначення кубічних сплайнов дефекту один є вирази (4.3), (4.5), (4.6).

Приклад 4.1. Для заданої таблиці з $h = x_i - x_{i-1} = 1 = const$ побудувати інтерполяційний кубічний сплайн дефекту один, виписавши відповідні рівняння на кожному відрізку $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, 4}$. Перевірити неперервність сплайна і його похідних до другого порядку включно у вузлі $x^* = 2$.

i	0	1	2	3	4
x_i	$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 5$
y_i	$y_0 = 1$	$y_1 = 3$	$y_2 = 6$	$y_3 = 9$	$y_4 = 21$

q_i	0	$18/7$	$-30/7$	$102/7$	0

Розв'язування. Під заданою таблицею сформуємо додатковий рядок для других похідних $S''(x_i) \equiv q_i$ сплайнів, що заповнюється в міру їхнього обчислення (відразу можна вписати в неї $q_0 = q_4 = 0$).

Для вузлів $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4$ з урахуванням $q_0 = q_4 = 0$ складається СЛАР (4.5) щодо невідомих q_1, q_2, q_3

$$\begin{array}{l} i=1: \\ i=2: \\ i=3: \end{array}\begin{cases} \dfrac{2}{3}q_1 + \dfrac{1}{6}q_2 = \dfrac{y_2 - y_1}{1} - \dfrac{y_1 - y_0}{1} = 1 \\ \dfrac{1}{6}q_1 + \dfrac{2}{3}q_2 + \dfrac{1}{6}q_3 = \dfrac{y_3 - y_2}{1} - \dfrac{y_2 - y_1}{1} = 0 \\ \dfrac{1}{6}q_2 + \dfrac{2}{3}q_3 = \dfrac{y_4 - y_3}{1} - \dfrac{y_3 - y_2}{1} = 9. \end{cases}$$

Обчислюються прогоночні коефіцієнти за формулами

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}}; \; B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}}, \; i = 1,2,3;$$

$a_1 = c_3 = 0,\; A_1 = -\frac{1}{4}; B_1 = \frac{3}{2}; A_2 = -\frac{4}{15}; B_2 = -\frac{2}{5}; \; A_3 = 0; \; B_3 = \frac{102}{7}$ і значення $q_i = A_i q_{i+1} + B_i$, $i = 3,2,1$:

$$q_3 = A_3 q_4 + B_3 = B_3 = 102/7;$$

$$q_2 = A_2 q_3 + B_2 = -\frac{4}{15} \cdot \frac{102}{7} - \frac{2}{5} = -\frac{30}{7};$$

$$q_1 = A_1 q_2 + B_1 = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{30}{7}\right) + \frac{3}{2} = \frac{18}{7}.$$

Заносимо ці значення в додатковий рядок таблиці й для кожного із чотирьох інтервалів виписуємо рівняння сплайна (4.3).

$$i = 1: S_I(x) = q_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6 \cdot 1} + q_1 \frac{(x - x_0)^3}{6 \cdot 1} + \left(\frac{y_0}{1} - q_0 \cdot \frac{1}{6}\right)(x_1 - x) +$$
$$+ \left(\frac{y_1}{1} - q_1 \cdot \frac{1}{6}\right)(x - x_0) = \frac{18}{42}(x-1)^3 + (2 - x) + \frac{108}{42}(x-1), \; x \in [1;2];$$

$$i = 2: S_{II}(x) = q_1 \frac{(x_2 - x)^3}{6 \cdot 1} + q_2 \frac{(x - x_1)^3}{6 \cdot 1} + \left(\frac{y_1}{1} - q_1 \frac{1}{6}\right)(x_2 - x) +$$
$$+ \left(\frac{y_2}{1} - q_2 \frac{1}{6}\right)(x - x_1) = \frac{18}{42}(3 - x)^3 + \left(-\frac{30}{42}\right)(x-2)^3 +$$
$$+ \frac{108}{42}(3 - x) + \frac{282}{42}(x - 2), \; x \in [2;3];$$

$$i = 3: S_{III}(x) = q_2 \frac{(x_3 - x)^3}{6 \cdot 1} + q_3 \frac{(x - x_2)^3}{6 \cdot 1} + \left(\frac{y_2}{1} - q_2 \frac{1}{6}\right)(x_3 - x) +$$
$$+ \left(\frac{y_3}{1} - q_3 \frac{1}{6}\right)(x - x_2) = -\frac{30}{42}(4 - x)^3 + \frac{102}{42}(x-3)^3 + \frac{282}{42}(4 - x) +$$
$$+ \frac{276}{42}(x - 3), \; x \in [3;4];$$

$$i = 4: S_{IV}(x) = q_3 \frac{(x_4 - x)^3}{6 \cdot 1} + q_4 \frac{(x - x_3)^3}{6 \cdot 1} + \left(\frac{y_3}{1} - q_3 \frac{1}{6}\right)(x_4 - x) +$$
$$+ \left(\frac{y_4}{1} - q_4 \frac{1}{6}\right)(x - x_3) = \frac{102}{42}(5 - x)^3 + \frac{276}{42}(5 - x) + 21(x - 4), x \in [4,5].$$

Перевіримо правильність побудови сплайна для вузла $x^* = 2$. До даного вузла прилягають криві $S_1(x)$ й $S_2(x)$.

$$S_1(2-0)=3;\ S_{II}(2+0)=3;$$
$$S_1'(2-0)=\frac{120}{42};\ S_{II}'(2+0)=\frac{120}{42};$$
$$S_1''(2-0)=\frac{108}{42};\ S_{II}''(2+0)=\frac{108}{42}.$$

4.1.2. Тригонометрична інтерполяція

Оскільки багато явищ у природі мають періодичний характер, на практиці широко використовується інтерполяція дискретних періодичних функцій тригонометричними поліномами вигляду:

$$T(x)=\sum_k \left(a_k\cos(\alpha_k x)+b_k\sin(\alpha_k x)\right),$$

де $\alpha_k=\frac{2\pi k}{L}$ – частота k-ої гармоніки, L – період, a_k, b_k – коефіцієнти.

Такий підхід дозволяє подати складну періодичну функцію як суперпозицію простих періодичних функцій (елементарних гармонік).

Розглянемо таблично задану на періоді L функцію $y_i(x_i)$ з рівномірним розподілом вузлів ($x_i=x_0+ih$, $h=L/n$, $i=0,n$).

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Тоді, якщо n – парне ($n=2m$), існує єдиний інтерполяційний тригонометричний поліном $T_m(x)$ степеня $m=n/2$, що задовольняє умову $T_m(x_i)=y_i$, $i=\overline{0,n}$:

$$T_m(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m} a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{L}(x-x_0)\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{L}(x-x_0)\right).$$

Коефіцієнти ряду визначаються у такий спосіб:

$$a_0=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\ ,$$

$$a_k=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cos(2\pi k\frac{i}{n}),\quad b_k=\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\sin(2\pi k\frac{i}{n}),\quad k=\overline{1,m-1},$$

$$a_m=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\cos(i\pi).$$

Зазначимо, що періодичність вихідної функції $y_i(x_i)$ визначає, що $y_0 = y_n$. Якщо цю умову не виконано, то побудований тригонометричний поліном буде задовольняти умови інтерполяції у всіх вузлах, крім останнього, тобто $T_m(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n-1}$. В останньому вузлі буде виконуватися умова періодичності $T_m(x_n) = T_m(x_0)$.

4.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Побудувати кубічний сплайн для функції, заданої у вузлах інтерполяції, припускаючи, що сплайн має нульову кривизну при $x = x_0$ й $x = x_4$. Обчислити значення функції в точці $x = X^*$.

2. Написати програму розв'язування задачі (див. свій варіант) мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.

3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:
   - мета роботи;
   - теоретичні відомості;
   - розв'язок задачі в аналітичній формі;
   - лістинги програм розв'язування задачі (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
   - результати виконання програм;
   - висновки.

Варіанти завдань на лабораторну роботу

1.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0

f_i	0.0	0.5	0.86603	1.0	0.86603

2.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	1.0	0.86603	0.5	0.0	-0.5

3.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
f_i	0.0	0.36892	0.85408	1.7856	6.3138

4.2. $X^* = 66666667$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6
f_i	2.4142	1.0818	0.50953	.11836	-0.24008

5.0. $X^* = 8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	-2.3026	-0.69315	-0.10536	0.26236	0.53063

6.0 $X^* = $-0.5

i	0	1	2	3	4

x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
f_i	0.13534	0.36788	1.0	2.7183	7.3891

7.3. $X^* = 0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8
f_i	0.0	1.3038	1.8439	2.2583	2.6077

8.0. $X^* = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	-0.41152	-0.10017	0.20136	0.52360	0.92730

9.0. $X^* = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	1.9823	1.6710	1.3694	1.0472	0.64350

10. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-1.2490	-0.78540	0.78540	1.2490	1.3734

11. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	2.8198	2.3562	0.78540	0.32175	0.19740

12.0. $X^* = 8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
f_i	0.0	0.97943	1.8415	2.4975	2.9093

13.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
f_i	1.0	1.5403	1.5839	2.01	3.3464

14.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	0.9	1.8	2.7	3.6
f_i	0.0	1.2689	2.6541	4.4856	9.9138

15.2. $X^* = 66666667$

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.9	2.8	3.7	4.6
f_i	3.4142	2.9818	3.3095	3.8184	4.3599

16.0. $X^* = 8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	-2.2026	-0.19315	.79464	1.5624	2.2306

17. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
f_i	-1.8647	-0.63212	1.0	3.7183	9.3891

18.3. $X^* = 0$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.7	3.4	5.1	6.8
f_i	0.0	3.0038	5.2439	7.3583	9.4077

19.0. $X^* = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	-0.81152	-0.20017	0.40136	1.0236	1.7273

20.0. $X^* = 1$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8
f_i	1.5823	1.5710	1.5694	1.5472	1.4435

21. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-4.2490	-1.7854	1.7854	4.2490	6.3734

22. $X^*=$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.0	-1.0	1.0	3.0	5.0
f_i	-0.18016	1.3562	1.7854	3.3218	5.1974

23.0. $X^*=8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	10.0	2.0	1.1111	0.76923	0.58824

24.0. $X^*=8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	100.00	4.0	1.2346	0.59172	0.34602

25.0. $X^*=8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	10.1	2.5	2.0111	2.0692	2.2882

26.0. $X^*=8$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.1	0.5	0.9	1.3	1.7
f_i	100.01	4.2500	2.0446	2.2817	3.2360

27.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
f_i	0.0	0.5	1.7321	3.0	2.5

28.1. $X^* = 5$

i	0	1	2	3	4
x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	5.0
f_i	0.0	0.86603	1.0	0.0	-4.3301

29. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-2.0	-1.0	0.00	1.0	2.0
f_i	-0.27067	-0.36788	0.00	2.7183	14.778

30. $X^* =$-0.5

i	0	1	2	3	4
x_i	-1.2	-0.7	-0.2	0.3	0.8
f_i	0.43372	0.24333	0.32749E-01	0.12149	1.4243

4.3. Контрольні запитання

1. Поясніть поняття глобальної і локальної інтерполяції.

2. Розкрийте вади глобальної інтерполяції.

3. Що таке сплайн? Поясніть переваги його використання для інтерполяції.

4. Тригонометрична інтерполяція. Її переваги та область застосування.

Лабораторна робота №5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Теоретичні відомості

5.1.1. Задача Коші для одного звичайного диференціального рівняння

Розглянемо задачу Коші для одного диференціального рівняння першого порядку розв'язаного відносно похідної

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad (5.1)$$

Потрібно знайти розв'язок на відрізку $[a,b]$, де $x_0 = a$.

Уведемо різницеву сітку на відрізку $[a,b]$ $\Omega^{(k)} = \{x_k = x_0 + hk\}$, $k = 0,1,...., N$, $h = |b-a|/N$.

Точки x_k називаються *вузлами* різницевої сітки, відстані між вузлами – *кроком* різницевої сітки (*h*), а сукупність значень якої-небудь величини заданих у вузлах сітки називається *сітковою функцією* $y^{(h)} = \{y_k, k = 0,1,...., N\}$.

Наближений розв'язок задачі Коші (5.1) будемо шукати чисельно у вигляді сіткової функції $y^{(h)}$. Для оцінки похибки наближеного чисельного розв'язку $y^{(h)}$ будемо розглядати його як елемент *(N+1)*-мірного лінійного векторного простору з якою-небудь нормою. Як похибку розв'язку приймемо норму елемента цього простору $\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y]^{(h)}$, де $[y]^{(h)}$– точний розв'язок задачі (1) у вузлах розрахункової сітки. У такий спосіб $\varepsilon_h = \left\|\delta^{(h)}\right\|$.

5.1.2. Однокрокові методи

5.1.2.1. Метод Ейлера (явний)

Метод Ейлера відіграє важливу роль у теорії чисельних методів розв'язуванн ЗДР, хоча й не часто використовується в практичних розрахунках через невисоку точність. Вивести розрахункові співвідношення для цього методу можна декількома способами: за допомогою геометричної інтерпретації, використовуючи розкладання в ряд Тейлора, різницевим методом (за допомогою різницевої апроксимації похідної), квадратурним способом (з використанням еквівалентного інтегрального рівняння).

Розглянемо виведення співвідношень методу Ейлера геометричним способом. Розв’язок у вузлі x_0 відомий із початкових умов, розглянемо процедуру отримання розв’язку у вузлі x_1 (рис.5.1).

Графік функції $y^{(h)}$, що є розв’язком задачі Коші (1), являє собою гладку криву, що проходить через точку (x_0, y_0) відповідно до умови $y(x_0) = y_0$, і має в цій точці дотичну. Тангенс кута нахилу дотичній до осі Ox дорівнює значенню похідної від розв’язку в точці x_0 й дорівнює значенню правої частини диференціального рівняння в точці (x_0, y_0) відповідно до виразу $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. У разі невеликого кроку різницевої сітки h графік функції й графік дотичної не встигають сильно розійтися один від одного й можна як значення розв’язку у вузлі x_1 прийняти значення дотичної y_1, замість значення невідомого точного розв’язку y_{icm}. При цьому допускається похибка $|y_1 - y_{1ucm}|$, яку геометрично репрезентує відрізок CD на рис.5.1. Із прямокутного трикутника ABC знаходимо $CB=BA\ tg(CAB)$ або $\Delta y = hy'(x_0)$. Враховуючи, що $\Delta y = y_1 - y_0$ й заміняючи похідну $y'(x_0)$ на праву частину диференціального рівняння, отримаємо співвідношення $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. Вважаючи тепер точку (x_1, y_1) початковою та повторюючи всі попередні міркування, отримаємо значення y_2 у вузлі x_2.

Перехід до довільних індексів дає формулу методу Ейлера:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \tag{5.2}$$

5.1.2.2. Похибка методу Ейлера.

На кожному кроці методу Ейлера допускається *локальна* похибка відносно точного розв’язку, графік якого проходить через крайню ліву точку відрізка. Геометрично локальна похибка зображується відрізком CD на першому кроці, C'D' на другому тощо. Крім того, на кожному кроці, починаючи із другого, накопичується *глобальна* похибка, що являє собою різницю між чисельним розв’язком і точним розв’язком вихідного початкового завдання (а не локального). Глобальну похибку на другому кроці зображено відрізком C" на рис.5.1.

Локальна помилка на кожному кроці визначається співвідношенням $\varepsilon_k^h = \frac{y''(\xi)}{2} h^2$, де $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$. Глобальна похибка методу Ейлера $\varepsilon_{ГЛ}^h = Ch$ в околиці h=0 поводиться як лінійна функція, і, отже, метод Ейлера має перший порядок точності щодо кроку h.

5.1.2.3. Модифікації методу Ейлера. Неявний метод Ейлера

Якщо на правій границі інтервалу використовувати точне значення похідної від розв’язку (тобто тангенса кута нахилу дотичної), то отримаємо неявний метод Ейлера першого порядку точності.

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) \tag{5.3}$$

Загалом нелінійне відносно y_{k+1} рівняння (5.3) чисельно розв’язується за допомогою одного з методів лабораторної 1, наприклад, методом Ньютона або його модифікацій.

5.1.2.4. Метод Ейлера - Коші

У цьому методі на кожному інтервалі розрахунок проводиться у два етапи. На першому (етап прогнозу) визначається наближений розв’язок на правому кінці інтервалу за методом Ейлера, на другому (етап корекції) уточнюється значення розв’язку на правому кінці, використовуючи напівсуми тангенсів кутів нахилу на кінцях інтервалу

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})}{2} \tag{5.4}$$

$$x_{k+1} = x_k + h$$

Цей метод має другий порядок точності.

5.1.2.5. Неявний метод Ейлера - Коші

Якщо на правій границі інтервалу використовувати точне значення похідної від розв'язку (тобто тангенса кута нахилу дотичної), то виходить неявний метод Ейлера-Коші (метод трапецій) другого порядку точності.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))}{2} \tag{5.5}$$

$$x_{k+1} = x_k + h$$

5.1.2.6. Метод Ейлера-Коші з ітераційною обробкою

Комбінація (5.3), (5.4) і (5.5) дає метод формально другого порядку точності, але більш точного в сенсі абсолютної величини похибки наближеного розв'язку, ніж вихідні методи.

$$y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1}^{(i)} = y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}))}{2} \tag{5.6}$$

$$x_{k+1} = x_k + h$$

У формулі (6) праві верхні індекси в круглих дужках позначають номер ітерації, при цьому початкове наближення $y_{k+1}^{(0)}$ визначається за методом Ейлера. Метод Ейлера-Коші з ітераційною обробкою являє собою реалізацію методу простої ітерації для розв'язування нелінійного рівняння (5) у неявному методі Ейлера. Виконувати прості ітерації до повної збіжності немає смислу, тому рекомендується виконувати 3-4 ітерації.

5.1.2.7. Перший поліпшений метод Ейлера

Цей метод використовує розрахунок наближеного значення похідної від розв'язку в точці на середині розрахункового інтервалу. Значення похідної в середині отримують, застосовуючи явний метод Ейлера на половинному кроці по *x*.

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}) \tag{5.7}$$

$$x_{k+1} = x_k + h$$

$$x_{k+1/2} = x_k + h/2$$

Ця модифікація методу Ейлера має другий порядок точності.

5.1.2.8. Методи Рунге-Кутти

Всі розглянуті вище явні методи є варіантами методів Рунге-Кутти.

Родина явних методів Рунге-Кутти *p*-го порядку записується як сукупність формул:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \sum_{i=1}^{p} c_i K_i^k \tag{5.8}$$

$$K_i^k = hf(x_k + a_i h, y_k + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^k)$$

$$i = 2,3.....p$$

Параметри a_i, b_{ij}, c_i підбираються так, щоб значення y_{k+1}, розраховане за співвідношенням (5.8) збігалося зі значенням розкладання в точці x_{k+1} точного розв'язку в ряд Тейлора з похибкою $O(h^{p+1})$.

5.1.2.9. Метод Рунге-Кутти третього порядку точності

Один з методів Рунге-Кутти третього порядку ($p = 3, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{3}, b_{21} = \frac{1}{3}, b_{31} = 0, b_{32} = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{3}{4}$) має вигляд:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{4}(K_1^k + 3K_3^k) \qquad (5.9)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}K_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}K_2^k)$$

5.1.2.10. Метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності

Метод Рунге-Кутти четвертого порядку $(p = 4, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = 1, b_{21} = \frac{1}{2}, b_{31} = 0, b_{32} = \frac{1}{2}, b_{41} = 0, b_{42} = 0, b_{43} = \frac{1}{2}, c_1 = \frac{1}{6},$ $c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{1}{6})$ є одним із найчастіше використовуваних методів для розв'язування задачі Коші:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \qquad (5.10)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k)$$

$$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k)$$

5.1.2.11. Контроль точності на кожному кроці *h*

Основним способом контролю точності отриманого чисельного розв'язку при розв'язуванні задачі Коші є методи, що спираються на принцип Рунге-Ромберга-Річардсона.

Нехай y^h – розв'язок задачі Коші (1), отриманий методом Рунге-Кутти p-го порядку точності із кроком h у точці $x+2h$. Нехай y^{2h} – розв'язок тієї ж задачі в точці $x+2h$, отриманий тим же методом, але із кроком $2h$. Тоді вираз

$$\breve{y} = y^h + \frac{y^h - y^{2h}}{2^p - 1} \qquad (5.11)$$

апроксимує точний розв'язок у точці *x+2h* *y(x+2h)* з *p+1*-им порядком.

Другий доданок у виразі (5.11) оцінює головний член похибки розв'язку y^h, тобто $R^h = \frac{y^h - y^{2h}}{2^p - 1}$. Контроль точності можна організувати в такий спосіб. Вибирається значення кроку *h* і двічі обчислюється розв'язок в точці *x+2h*, один раз із кроком *h*, інший раз із кроком *2*h. Обчислюється величина R^h та порівнюється із заданою точністю ε. Якщо величина R^h менше від ε, то можна далі обчислювати з тим самим кроком, інакше необхідно повернутися до розв'язку в точці *x*, зменшити крок *h* і повторити обчислення.

Кількість обчислень для такого контролю точності є досить велика, особливо для багатостадійних методів. Тому можна використовувати менш точний спосіб контролю правильності вибору кроку *h* . У випадку методу Рунге-Кутти четвертого порядку точності треба на кожному кроці *h* розраховувати параметр

$$\theta^k = \left| \frac{K_2^k - K_3^k}{K_1^k - K_2^k} \right| \qquad (5.12)$$

Якщо величина θ^k має порядок декількох сотих одиниць, то розрахунок триває з тим же кроком, якщо θ^k більше від однієї десятої, то крок варто зменшити, якщо ж θ^k менше від однієї сотої, то крок можна збільшити.

У такий спосіб, визначаючи величини θ^k або R^h, можна організувати алгоритм вибору кроку *h* для явного методу Рунге-Кутти.

5.1.3. Розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (5.13)$$

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = y_{01} \\ &y_2(x_0) = y_{02} \\ &.................... \\ &y_n(x_0) = y_{0n} \end{aligned}$$

Система (5.13) у компактнішому вигляді записується у векторній формі

$$\begin{aligned} &\bar{y}' = \bar{F}(x, \bar{y}) \\ &\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Тут $\bar{y}(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор-стовпець невідомих функцій, $\bar{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$ – вектор-функція правих частин.

До векторного диференціального рівняння (5.14) можна застосувати всі методи, що вже було розглянуто вище в даному розділі (через їхню лінійну структуру). При цьому у формулах (5.2)-(5.14) всі величини векторні крім змінної x і кроку h.

Розглянемо задачу Коші для системи двох ЗДР першого порядку, де рівняння записано в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases} \qquad (5.15)$$

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &z(x_0) = z_0 \end{aligned}$$

Формули методу Рунге-Кутти 4-го порядку точності для розв’язування (5.15) такі:

$$\begin{aligned} &y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \\ &z_{k+1} = z_k + \Delta z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Delta y_k = \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \\ &\Delta z_k = \frac{1}{6}(L_1^k + 2L_2^k + 2L_3^k + L_4^k) \end{aligned} \qquad (5.16)$$

$$
\begin{aligned}
&K_1^k = hf(x_k, y_k, z_k)\\
&L_1^k = hg(x_k, y_k, z_k)\\
&K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)\\
&L_2^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)\\
&K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)\\
&L_3^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)\\
&K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)\\
&L_4^k = hg(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)
\end{aligned}
$$

Контролювати правильність вибору кроку *h,* коли використовується метод Рунге-Кутти четвертого порядку точності для системи (5.15), можна обчислюючи на кожному кроці *h* такі параметри:

$$
\begin{aligned}
&\theta_1^k = \left|\frac{K_2^k - K_3^k}{K_1^k - K_2^k}\right|;\\
&\theta_2^k = \left|\frac{L_2^k - L_3^k}{L_1^k - L_2^k}\right|
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Якщо величини θ_i^k *(i=1,2)* мають порядок кількох сотих одиниць, то розрахунок триває з тим же кроком, якщо більше від однієї десятої, то крок варто зменшити, якщо ж менше від однієї сотої, то крок можна збільшити

5.1.4. Розв’язування задачі Коші для ЗДР другого та більш високого порядків

Задача Коші для ЗДР *n*-го порядку визначається в такий спосіб:

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})\\
&y(x_0) = y_0\\
&y'(x_0) = y_{01}\\
&y''(x_0) = y_{02}\\
&....................\\
&y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

тут $y^{(m)} = \dfrac{d^m y}{dx^m}$ похідна *m* порядку від розв’язку, *m=1,2,…,n...*

Основний прийом, що використовується при розв’язуванні задач типу (5.8) полягає у введенні нових змінних і зведенні задачі (5.8) для ЗДР високого порядку до розв’язування системи ЗДР першого порядку (5.13).

Введемо нові змінні

$$\begin{aligned} z_1 &= y' \\ z_2 &= y'' \\ &\dots\dots\dots \\ z_{n-1} &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

тоді задачу (5.8) можна переписати у вигляді системи n ЗДР першого порядку.

$$\begin{cases} y' = z_1 \\ z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots\dots\dots \\ z_{n-2}' = z_{n-1} \\ z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ z_1(x_0) &= y_{01} \\ z_2(x_0) &= y_{02} \\ &\dots\dots\dots \\ z_{n-1}(x_0) &= y_{0(n-1)} \end{aligned} \qquad (5.19)$$

Отримана система, що складається з n ЗДР першого порядку з відповідними початковими умовами розв’язується будь-яким з описаних методів.

Нехай необхідно розв’язати задачу Коші для ЗДР другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_{01} \end{aligned} \qquad (5.20)$$

Уводячи заміни $z = y'$, зведемо (5.18) до системи

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ z(x_0) &= y_{01} \end{aligned} \qquad (5.21),$$

яку можна розв'язати, наприклад, використовуючи метод (5.16).

Приклад 5.1. За допомогою явного методу Ейлера із кроком h=0.1 отримати чисельний розв'язок диференціального рівняння $y' = (y + x)^2$ з початковими умовами $y(0) = 0$ на інтервалі [0, 0.5]. Чисельний розв'язок порівняти з точним розв'язком $y = \tan(x) - x$.

Розв'язування. Виходячи з початкової точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ розрахуємо значення y_1 у вузлі x_1=0.1 за формулами (5.2) $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1(0+0)^2 = 0$. Аналогічно отримаємо розв'язок в наступному вузлі x_2=0.2; $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0.1(0 + 0.1)^2 = 0.001$. Проведемо подальші обчислення та, ввівши позначення $\Delta y_k = hf(x_0, y_0)$ і $\varepsilon_k = \left| y_{icm}(x_k) - y_k \right|$, де $y_{icm}(x_k)$ – точний розв'язок у вузлових точках, одержані результати занесемо в таблицю.

Таблиця 5.1

k	x	Y	Δy_k	y_{ucm}	ε_k
0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.0000
1	0.100000000	0.000000000	0.001000000	0.000334672	0.3347E-03
2	0.200000000	0.001000000	0.004040100	0.002710036	0.1710E-02
3	0.300000000	0.005040100	0.009304946	0.009336250	0.4296E-02
4	0.400000000	0.014345046	0.017168182	0.022793219	0.8448E-02
5	0.500000000	0.031513228		0.046302490	0.1479E-01

Розв'язком задачі є таблична функція (залишено 5 значущих цифр у кожному числі).

Таблиця 5.2

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.1000	0.200000	0.3000000	0.400000	0.500000
y_k	0.00000	0.000	0.001000	0.0050401	0.014345	0.031513

Приклад 5.2. Розв'язати задачу із прикладу 5.1 методом Ейлера-Коші (5.4).

Розв'язування. Виходячи з початкових значень $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, розрахуємо значення y_1 у вузлі x_1=0.1 за формулами (5.4)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1(0+0)^2 = 0 .$$

$$f(x_1, \tilde{y}_1) = (0+0.1)^2 = 0.01$$

$$y_1 = y_0 + 0.5h(f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)) = 0 + 0.5 * 0.1 * (0 + 0.01) = 0.0005$$

Аналогічно отримаємо розв'зок в інших вузлах. Продовжуючи обчислення та вводячи позначення $\Delta y_k = 0.5h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$, отримані результати занесемо в таблицю.

Таблиця 5.3

k	x_k	y_k	$\tilde{y}_k$	Δy_k	y_{ucm}	ε_k
0	0.0	0.000000000		0.000500000	0.000000000	0.000000000
1	0.1	0.000500000	0.00000	0.002535327	0.000334672	0.1653E-03
2	0.2	0.003035327	1.510025E-003	0.006778459	0.002710036	0.3253E-03
3	0.3	0.009813786	7.157661E-003	0.013594561	0.009336250	0.4775E-03
4	0.4	0.023408346	1.941224E-002	0.023615954	0.022793219	0.6151E-03
5	0.5	0.047024301	4.133581E-002		0.046302490	0.7218E-03

Розв'язком задачі є таблична функція (залишено 5 значущих цифр у кожному числі)

Таблиця 5.4

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.100000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.500000
y_k	0.00000	0.000500	0.0030353	0.0098138	0.0234083	0.047024

Приклад 5.3. Розв'язати задачу із прикладу 5.1 першим поліпшеним методом Ейлера (5.7).

Розв'язування. Стартуємо з початкової точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ і розрахуємо значення $y_{1/2}$ у вузлі $x_{1/2} = x_0 + h/2$ =0.05 за формулами (5.4) $y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 0 + \frac{0.1}{2}(0+0)^2 = 0$. Потім визначимо величину правої частини (величину похідної від розв'язку в середині інтервалу $[x_0, x_1]$

$f(x_{1/2}, y_{1/2}) = (0 + 0.05)^2 = 0.0025$. Остаточно розрахуємо значення функції у вузлі x_1 $y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0 + 0.1 * 0.0025 = 0.00025$.

Аналогічно отримуємо розв'язок в інших вузлах. Продовжуючи обчислення та вводячи позначення $\Delta y_k = hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$, отримувані результати занесемо в таблицю.

Таблиця 5.5

k	x_k	y_k	$y_{k+1/2}$	Δy_k	$y_{ист}$	ε_k
0	0.0	0.000000000	0.000000000	0.000250000	0.000000000	0.000000000
1	0.1	0.000250000	0.0007525031	0.002272632	0.000334672	0.8467E-04
2	0.2	0.002522632	0.0045734025	0.006480762	0.002710036	0.1874E-03
3	0.3	0.009003393	0.0137775483	0.013233410	0.009336250	0.3329E-03
4	0.4	0.022236804	0.0311509998	0.023150628	0.022793219	0.5564E-03
5	0.5	0.045387432			0.046302490	0.9151E-03

Розв’язком задачі є таблична функція (залишено 5 значущих цифр у кожному числі)

Таблиця 5.6.

K	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.100000	0.2000000	0.3000000	0.4000000	0.500000
y_k	0.00000	0.000250	0.0025226	0.0090033	0.0222368	0.045387

Приклад 5.4. Розв’язати задачу із прикладу 5.1 методом Рунге-Кутти 4-го порядку (5.10).

Розв’язування. Обчислимо значення допоміжних величин $K_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0.1(0+0)^2 = 0$;

$$y_0^1 = y_0 + \frac{1}{2}K_1^0 = 0 + \frac{1}{2}0 = 0$$

$$K_2^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0) = 0.1(0 + \frac{1}{2}*0 + 0 + \frac{1}{2}*0.1)^2 = 0.00025;$$

$$y_0^2 = y_0 + \frac{1}{2}K_2^0 = 0 + \frac{1}{2}0.00025 = 0.000125$$

$$K_3^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0) = 0.1(0 + \frac{1}{2}*0.00025 + 0 + \frac{1}{2}*0.1)^2 = 0.000251251;$$

$$y_0^3 = y_0 + K_3^0 = 0 + 0.000251251 = 0.000251251$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0) = 0.1(0 + 0.000251251 + 0 + 0.1)^2 = 0.001005031;$$

Знайдемо приріст функції на першому інтервалі

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(0 + 2*0.00025 + 2*0.000251251 + 0.001005031) = 0.000334588$$

й значення функції в першому вузлі

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.000334588 = 0.000334588\ ;$$

Аналогічно отримаємо розв’язок в інших вузлах.

Таблиця 5.7

k/i	x_k	y_k^i	K_i^k	Δy_k	θ^k	$y_{ист}$	ε_k
0/1	0.0	0.0000000	0.000000000			0.000000	0.0000000
0/2	0.05	0.0000000	0.000250000				
0/3	0.05	0.0001250	0.000251252				
0/4	0.1	0.00025125	0.001005031	0.000334589	0.005006		
1/1	0.1	0.000334589	0.001006703			0.00033467	0.8301E-07
1/2	0.15	0.000837941	0.002275208				
1/3	0.15	0.001472193	0.002294383				
1/4	0.2	0.002628972	0.004105850	0.002375289	0.015116		
2/1	0.2	0.002709878	0.004109129			0.002710036	0.1573E-06
2/2	0.25	0.004764443	0.006490492				
2/3	0.25	0.005955124	0.006551303				
2/4	0.3	0.009261181	0.009564248	0.006626161	0.025535		
3/1	0.3	0.009336039	0.009568879			0.009336250	0.2103E-06
3/2	0.35	0.014120479	0.013258372				
3/3	0.35	0.015965225	0.013393055				
3/4	0.4	0.022729094	0.017869989	0.013456954	0.036504		
4/1	0.4	0.022792993	0.017875391			0.022793219	0.2259E-06
4/2	0.45	0.031730689	0.023206446				
4/3	0.45	0.034396216	0.023463969				
4/4	0.5	0.046256962	0.029839667	0.023509315	0.048306		

5	0.5	0.046302308				0.046302490	0.1823E-06

Розв'язком задачі є таблична функція (залишено 5 значущих цифр у кожному числі)

Таблиця 5.8

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.1000	0.200000	0.3000000	0.400000	0.500000
y_k	0.00000	0.000334589	0.002709878	0.009336039	0.022792993	0.046302308

Приклад 5.5. На інтервалі [0,1] с кроком h=0.2 розв'язати задачу Коші методом Рунге-Кутти 4 порядку.

$$\begin{cases} (x^2+1)y'' = 2xy' \\ y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases}$$

Чисельний розв'язок порівняти з аналітичним розв'язком $y_{scm}(x) = -x^3 + 3x + 1$.

Розв'язування. Аналогічно до (5.18-5.21) введенням нової змінної $z = y'$ розв'язування вихідної початкової задачі для диференціального рівняння другого порядку зводиться до розв'язування системи двох диференціальних рівнянь першого порядку.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{2xz}{x^2+1} \end{cases}$$

$$y(0)=1$$
$$z(0)=3$$

Розв'яжемо цю систему методом Рунге-Кутти, використовуючи формули (5.16).

Обчислимо значення допоміжних величин:

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0, z_0) = hz_0 = 0.2*3 = 0.6;\ L_1^0 = hg(x_0, y_0, z_0) = h\frac{2x_0 z_0}{x_0^2 + 1} = 0.2\frac{2*0*3}{0^2+1} = 0;$$

$$K_2^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0, z_0 + \frac{1}{2}L_1^0) = 0.2(3 + \frac{1}{2}0) = 0.6;$$

$$L_2^0 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0, z_0 + \frac{1}{2}L_1^0) = 0.2\frac{2(0+0.1)(3+\frac{1}{2}0)}{(0+0.1)^2+1} = 0.11881188;$$

$$K_3^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0) = 0.2(3 + \frac{1}{2}*0.1881188) = 0.611881188;$$

$$L_3^0 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0) = 0.2\frac{2(0+0.1)(3+\frac{1}{2}0.11881188)}{(0+0.1)^2+1} = 0.121164592;$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2(3 + 0.12116459) = 0.62423292;$$

$$L_4^0 = hg(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2\frac{2(0+0.2)(3+0.121164592)}{(0+0.2)^2+1} = 0.240089584;$$

Знайдемо приріст функцій на першому інтервалі

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(0.6 + 2*0.6 + 2*0.611881188 + 0.62423292) = 0.607999216$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6}(L_1^0 + 2L_2^0 + 2L_3^0 + L_4^0) = \frac{1}{6}(0.0 + 2*0.11881188 + 2*0.121164592 + 0.240089584) = 0.1200071$$

й значення функцій у першому вузлі

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.607999216 = 1.607999216;$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 3 + 0.1200071 = 3.1200071;$$

Аналогічно отримаємо розв'язок в інших вузлах, результати обчислень занесемо в таблицю.

Таблиця 5.9

K	x_k	y_k	z_k	Δy_k	Δz_k	$y_{ист}$	ε_k
0	0.0	1.0000000	3.000000000	0.607999216	0.1200E+00	1.000000000	0.00000
1	0.2	1.607999216	3.120007088	0.655995430	0.3600E+00	1.607999216	0.784E-6
2	0.4	2.263994646	3.480019051	0.751991317	0.6000E+00	2.263994646	0.535E-5
3	0.6	3.015985963	4.080024218	0.895987662	0.8400E+00	3.015985963	0.140E-4

4	0.8	3.911973624	4.920018746	1.087984366	0.1080E+01	3.911973624	0.264E-4
5	1.0	4.999957990	6.000004180			5.000000000	0.420E-4

Розв’язком задачі є таблична функція (залишено 5 значущих цифр у кожному числі)

Таблиця 5.10

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.200000	0.4000000	0.6000000	0.8000000	1.000000
y_k	1.0000000	1.607999216	2.263994646	3.015985963	3.911973624	4.99995799

5.1.5 Розв’язування диференціальних рівнянь із запізнюванням

Багато процесів у живій і неживій природі описуються моделями, які визначаються диференціальними рівняннями із запізнюванням (тобто, рівнянь, що мають аргументи із запізнюванням). Найчастіше такі моделі використовують для дослідження динаміки розвитку популяцій, процесу кровотворення, динаміки різних автогенераторів, механізмів зміни ринкової кон'юнктури тощо. Розв’язування таких рівнянь має певну специфіку.

Розглянемо для простоти випадок одного диференціального рівняння з одним аргументом із запізнюванням a.

$$\begin{aligned} &y' = f(x, y(x), y(x-a)) \\ &y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Нехай є розв’язок у точці $y_k = y(x_k)$. Опишемо процедуру знаходження розв’язку в точці $x_k = x_k + h$ модифікованим методом Ейлера (5.7) другого порядку точності. У цьому методі треба використовувати значення розв’язку в точці x_k й попередній розв’язок у точці $x_{k+1/2} = x_k + h/2$. Відповідно, від цих точок треба брати запізнювання a, тобто треба знайти значення розв’язку в точках $x_k - a, x_k + h/2 - a$. Як приклад опишемо процедуру визначення значення $y(x_k - a)$. Якщо $x_k - a$ лежить лівіше від початкової точки x_0, то

$y(x_k - a)$ визначається з початкових умов (у цьому разі повинно бути задано поведінку розв'язку на інтервалі ліворуч від точки x_0, достатньому для визначення значення в точці $x_k - a$. Якщо $x_k - a$ збігається з одним з вузлів праворуч від x_0, тоді $y(x_k - a)$ набирає значення функції в цьому вузлі.

Якщо величина $x_k - a$ не збігається з жодним вузловим значенням $x_m, x_m = 0,1,2,...$, то вона лежить усередині деякого відрізка $[x_j, x_{j+1}]$ й можна за значеннями y у трьох вузлах, наприклад, у x_{j-1}, x_j, x_{j+1} побудувати інтерполяційний многочлен P_3 для визначення наближеного значення $y(x_k - a) \approx P_3(x_k - a)$.

Таким чином, схема розрахунку значення розв'язку в новій точці для системи (4.22) матиме такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
&y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - a)) \\
&y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}, y(x_{k+1/2} - a)) \qquad (5.23) \\
&x_{k+1} = x_k + h \\
&x_{k+1/2} = x_k + h/2
\end{aligned}
$$

Приклад 5.6. Поліпшеним методом Ейлера із кроком h=0.1 одержати чисельний розв'язок диференціального рівняння $y' = A_1 y(x)(1 - y(x - A_2)/A_3)$ з початковими умовами $y(0) = 2.0$ на інтервалі [0, 4] із кроком $h = 0.4$ $A_1 = 1.6, A_2 = 0.5, A_3 = 10$ (тут A_2 – константа, що характеризує запізнювання аргументу).

Це рівняння може описувати динаміку одновидової популяції (у цьому разі A_1 – коефіцієнт експонентного росту, A_3 – ємність середовища перебування, A_2 – вік плідників, x – час). Зміст моделі полягає в тому, що швидкість росту популяції залежить не тільки від загальної чисельності $y(x)$ у будь-який момент часу x, обумовленою ємністю середовища перебування A_3, але й від кількості дорослих особин у момент часу $x - A_2$. Це рівняння може також описувати циклічність ділової активності на фондовому ринку.

Розв'язування. Будемо розв'язувати задачу, використовуючи формули (5.23). Значення розв'язку в точці $x_0 - A_2 = 0.0 - 0.5 = -0.5$, що лежить ліворуч від точки x_0, приймемо рівним початковому значенню $y_0 = 2.0$, тобто $y(x_0 - A_2) = 2.0$. Визначимо значення функції в точці $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.0 + 0.1 = 0.1$ за методом Ейлера $y_{1/2} = y_0 + h/2 f(x_0, y_0, y(x_0 - A_2))$=2.0+0.1*1.6*2.0*(1.0-2.0/10.0)=2.256. У середині першого кроку вважаємо значення функції із запізненням $x_0 + h/2 - A_2$ = 0.0 +0.1-0.5=-0.4, $y(x_0 + h/2 - A_2)$=2.0 і потім значення розв'язку в точці 1 $y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}, y(x_{1/2} - A_2))$=2.0+0.2*1.6*2.256*(1.0-2.0/10.0)=2.577536. Продовжуючи в такий спосіб обчислення та використовуючи квадратичну інтерполяцію (многочлен Лагранжа) для знаходження значення функції для аргументу із запізнюванням, коли значення $x_k - A_2$ або $x_k + h/2 - A_2$ будуть лежати правіше, ніж точка x_0, отримаємо розв'язок у наступних точках. Результати обчислень занесено в таблицю (5.11), у якій для зручності використано наступні позначення:

$$\Delta\tilde{y}_k = \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - A_2)), \qquad x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2}, \qquad y_{k+1/2} = y_k + \Delta\tilde{y}_k,$$

$$\hat{x}_k = x_k + h/2 - A_2, \quad \hat{y}_k = y(x_k + h/2 - A_2), \quad \Delta y_k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \Delta\tilde{y}_k, \hat{y}_k)$$

Таблиця 5.11

k	x_k	y_k	$x_k - A_2$	$y(x_k - A_2)$	$\Delta\tilde{y}_k$	$x_{k+1/2}$	$y_{k+1/2}$	$\hat{x}_k$	$\hat{y}_k$	Δy_k
0	0.0	2.0	-0.5	2.0	0.256000	0.1	2.25600	-0.4	2.0	0.577536
1	0.2	2.57754	-0.3	2.0	0.329925	0.3	2.90746	-0.2	2.0	0.744310
2	0.4	3.32185	-0.1	2.0	0.425196	0.5	3.74704	0.0	2.0	0.959243
3	0.6	4.28109	0.1	2.26792	0.529627	0.7	4.81072	0.2	2.57754	1.142636
4	0.8	5.42372	0.3	2.92282	0.614154	0.9	6.03788	0.4	3.32185	1.290300

5	1.0	6.71402									

Розв’язком задачі є таблична функція (залишено 6 значущих цифр).

Таблиця 5.12

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.200000	0.4000000	0.6000000	0.8000000	1.000000
y_k	2.0	2.57754	3.32185	4.28109	5.42372	6.71402

Зауваження. Зазвичай, на відміну від прикладу 5.6, у задачах із запізнюванням цікавляться поведінкою розв’язку на досить великих часових інтервалах. При цьому виконується від сотень до тисяч кроків за часом, що обумовлює необхідність використовувати комп'ютер.

5.1.6. Багатокрокові методи

Багатокрокові методи розв’язування задачі Коші характеризуються тим, що розв’язок у поточному вузлі залежить від даних не в одному попередньому вузлі, як це є в однокрокових методах, а від декількох попередніх вузлів. Багато багатокрокових методів різного порядку точності можна конструювати за допомогою квадратурного способу (тобто з використанням еквівалентного інтегрального рівняння).

Розв’язок диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ задовольняє інтегральне співвідношення:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \qquad (5.24)$$

Якщо розв’язок задачі Коші, отриманий у вузлах аж до *k*-го, то можна апроксимувати підінтегральну функцію, наприклад, інтерполяційним многочленом якого-небудь степеня. Обчисливши інтеграл від побудованого многочлена на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ отримаємо ту або іншу формулу Адамса. Зокрема, якщо використовувати многочлен нульового степеня (тобто замінити підінтегральну функцію її значенням на лівому кінці відрізка в точці x_k), то отримаємо явний метод Ейлера. Якщо проробити те ж саме, але підінтегральну функцію апроксимувати значенням на правому кінці в точці x_{k+1}, то отримаємо неявний метод Ейлера.

5.1.6.1. Метод Адамса

Якщо використовується інтерполяційний многочлен 3-го степеня, побудований за значеннями підінтегральної функції в останніх чотирьох вузлах, то отримуємо метод Адамса четвертого порядку точності:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}), \qquad (5.25)$$

де f_k – значення підінтегральної функції у вузлі x_k.

Метод Адамса (5.25) як і всі багатокрокові методи не стартує самостійно, тобто для того, щоб використовувати метод Адамса необхідно мати розв'язок у перших чотирьох вузлах. У вузлі x_0 розв'язок y_0 відомий з початкових умов, а в інших трьох вузлах x_1, x_2, x_3 розв'язки y_1, y_2, y_3 можна отримати за допомогою підхожого однокрокового методу, наприклад: методу Рунге-Кутти четвертого порядку (5.10).

5.1.6.2. Метод Адамса-Бешфортса-Моултона

Цей метод типу предиктор-коректор дозволяє підвищити точність обчислень методу Адамса внаслідок подвійного обчислення значення функції $f(x, y)$ при визначенні y_{k+1} на кожному новому кроці по x.

Етап предиктор

Аналогічно методу Адамса за значеннями у вузлах $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$ розраховується "попереднє" значення розв'язку у вузлі x_{k+1}.

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55 f_k - 59 f_{k-1} + 37 f_{k-2} - 9 f_{k-3}), \qquad (5.26)$$

За допомогою отриманого значення $\hat{y}_{k+1}$ розраховується “попереднє” значення функції $f_{k+1} = f(x_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$ в новій точці.

Етап коректор

На коригувальному етапі за методом Адамса 4-го порядку за значеннями у вузлах $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ розраховується “остаточне” значення розв’язку у вузлі x_{k+1}.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}), \qquad (5.27)$$

Приклад 5.7. Методом Адамса із кроком h=0.1 отримати чисельний розв’язок диференціального рівняння $y' = (y + x)^2$ з початковими умовами $y(0) = 0$ на інтервалі [0, 1.0]. Чисельний розв’язок порівняти з точним розв’язком $y = \tan(x) - x$.

Розв’язування. Ця задача на першій половині інтервалу збігається із задачею з прикладу 5.4. Тому, щоб знайти розв’язок в перших вузлах будемо використовувати розв’язок цієї задачі методом Рунге-Кутти четвертого порядку (5.10), що наведено в прикладі 5.4.

Таблиця 5.13

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{ист}$	ε_k
0	0.0	0.0000000	0.000000000	0.000000	0.0000000
1	0.1	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.178688064	0.022793219	0.781090E-04
5	0.5	0.046098359	0.298223418	0.046302490	0.204131E-03
6	0.6	0.083724841	0.467479658	0.084136808	0.411968E-03
7	0.7	0.141501753	0.708125200	0.142288380	0.786628E-03

8	0.8	0.228133669	1.057058842	0.229638557	0.150489E-02
9	0.9	0.357181945	1.580506443	0.360158218	0.297627E-02
10	1.0	0.551159854	2.406096892	0.557407725	0.624787E-02

Розв'язком задачі є таблична функція, яку наведено в другому та третьому стовпцях таблиці 5.13.

Приклад 5.8. Методом Адамса-Бешфортса-Моултона із кроком h=0.1 отримати чисельний розв'язок початкової задачі із прикладу 5.7.

Розв'язування. Як і в попередньому прикладі, в перших трьох вузлах після початкового розв'язок отримаємо методом Рунге-Кутти 4-го порядку. Починаючи із четвертого вузла ($k=4$), на кожному кроці в розрахунках y_{k+1} використовуємо співвідношення (5.26),(5.27).

Таблиця 5.14

k	x_k	$\hat{y}_k$	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{ист}$	ε_k
0	0.0	-	0.0000000	0.000000000	0.000000	0.0000000
1	0.1	-	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	-	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	-	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.02279808	0.17875822	0.022793219	0.4863E-05
5	0.5	0.046197407	0.04631491	0.29845998	0.046302490	0.1242E-04
6	0.6	0.083978353	0.08416105	0.46807634	0.084136808	0.2424E-04
7	0.7	0.142027364	0.142331883	0.70952300	0.142288380	0.4350E-04
8	0.8	0.229171282	0.229714203	1.06031134	0.229638557	0.7565E-04
9	0.9	0.359247335	0.360288001	1.58832585	0.360158218	0.1298E-03
10	1.0	0.555451403	0.557625580	2.42619745	0.557407725	0.2179E-03

Розв’язком задачі є таблична функція, яку наведено в другому та четвертому стовпцях таблиці 5.14.

Розв’язок, отриманий за методом Адамса-Бэшфортса-Моултона, трохи точніший, ніж розв’язок, отриманий за методом Адамса.

5.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Двома будь-якими методами розв’язати задачу Коші для ЗДР 2-го порядку на вказаному відрізку із вказаним кроком h. Отриманий чисельний розв’язок порівняти з точним. Визначити похибку.

2. Написати програму розв’язування задачі (див. свій варіант у таблиці 5.15) мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.

3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:

- мета роботи;
- теоретичні відомості;
- розв’язок поставленого завдання в аналітичній формі;
- лістинги програм розв’язування завдання (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 5.15 – Варіанти завдань на лабораторну роботу

№	Задача Коші	Точний розв’язок
1	$y''+y-\sin 3x=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=\cos x+\frac{11}{8}\sin x-\frac{\sin 3x}{8}$
2	$y''+y-2\cos x=0$	$y=x\sin x+\cos x$

	$y(0)=1$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	
3	$y''-2y-4x^2e^{x^2}=0$ $y(0)=3$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=e^{x^2}+e^{x\sqrt{2}}+e^{-x\sqrt{2}}$
4	$y''+y-\cot anx=0$ $y(\pi/2)=1$ $y'(\pi/2)=0$ $x\in[\pi/2,\pi/2+1], h=0.1$	$y=\sin x+\cos x+\sin x\ln\left\|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right\|$
5	$y''-(1+2\tan^2 x)y=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=2$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=e^{x^2}+\frac{1}{\cos x}+\sin x+\frac{x}{\cos x}$
6	$y''+4xy'+(4x^2+2)y=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=(1+x)e^{-x^2/2}$
7	$y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=1$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=(1+x)e^{x^2}$
8	$y''-4xy'+(4x^2-3)y-e^{x^2}=0$	$y=(e^x+e^{-x})e^{x^2}-1$

	$y(0)=1$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	
9	$y''-(\frac{1}{x^{1/2}})y'+(\frac{1}{4}x^2)(x+x^{1/2}-8)y=$ $y(1)=2e$ $y'(1)=2e$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=(x^2+\frac{1}{x})e^{x^{1/2}}$
10	$y''+y'\tan x+y\cos^2 x=0$ $y(0)=0$ $y'(0)=1$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=\cos(\sin x)+\sin(\cos x)$
11	$y''+y'\tan x-y\cos^2 x=0$ $y(0)=2$ $y'(0)=0$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=e^{\sin x}+e^{-\sin x}$
12	$y''-y'\cot anx+y\sin^2 x=0$ $y(\pi/3)=\cos(1/2)+\sin(1/2)$ $y'(\pi/3)=\sin(\pi/3)(\cos(1/2)+\sin(1$ $x\in[\pi/2,\pi/2+1], h=0.1$	$y=\sin(\cos x)+\cos(\cos x)$
13	$y''-2(\tan x)y'-3y=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=3$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=\cos^3 x+\sin x(1+2\cos^2 x)$

14	$y''+2y'\cot x+3y=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=(0.4776\cos 2x-0.9783\sin 2x)/\sin x$
15	$xy''+y'=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=1+\ln\lvert x\rvert$
16	$xy''-2y'-xy-e^x=0$ $y(1)=1.5e+1/e$ $y'(1)=0.5e-2/e$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=0.5e^x+(1/x)(e^x-e^{-x})$
17	$xy''-(x+1)y'+y=0$ $y(1)=2+e$ $y'(1)=1+e$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=x+1+e^x$
18	$y''-\frac{x+1}{x}y'-2\frac{x-1}{x}y=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=\frac{e^{2x}}{3e^2}+\frac{(3x+1)e^{-x}}{3e}$
19	$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{2}{x}y=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$	$y=(\cos 2-\sin 2)\cos 2x+(\cos 2+\sin 2)\sin 2x$

	$x \in [1,2], h = 0.1$	
20	$x^2 y'' - 6y = 0$ $y(1) = 2$ $y'(1) = 1$ $x \in [1,2], h = 0.1$	$y = x^3 + x^{-2}$
21	$x^2 y'' - 12y = 0$ $y(1) = 2$ $y'(1) = 1$ $x \in [1,2], h = 0.1$	$y = x^4 + x^{-3}$
22	$x^2 y'' + (x^2 - 2)y = 0$ $y(1) = 1$ $y'(1) = 0$ $x \in [1,2], h = 0.1$	$y = \sin(x-1) + (1/x)\cos(x-1)$
23	$x^2 y'' + xy' - y - 3x^2 = 0$ $y(1) = 3$ $y'(1) = 2$ $x \in [1,2], h = 0.1$	$y = x^2 + x + \frac{1}{x}$
24	$x^2 y'' + (x+1)y' - y = 0$ $y(1) = 2 + e$ $y'(1) = 1$ $x \in [1,2], h = 0.1$	$y = x + 1 + xe^{1/x}$
25	$x^2 y'' - xy' + y - 3x^3 = 0$	$y = \frac{3}{4}x^3 + x(1 + \ln x)$

	$y(1)=\frac{7}{4}$ $y'(1)=\frac{17}{4}$ $x\in[1,2], h=0.1$	
26	$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{(x^2+2)}{x}y-\frac{x}{\cos x}=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,1.1], h=0.01$	$y=x^2\sin x+x\cos x\ln\lvert\cos x\rvert+$ $(\sin 1-1)x\sin x+$ $(\cos 1-\ln(\cos 1))x\cos x$
27	$x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$ $y(\pi/2)=\pi/2$ $y'(\pi/2)=1-\pi/2$ $x\in[\pi/2,\pi/2+1], h=0.1$	$y=x\cos x+x\sin x$
28	$x^2y''+3xy'+4y-5x=0$ $y(1)=6$ $y'(1)=8$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=5x+x^2+x^2\ln\lvert x\rvert$
29	$x^2y''-3xy'-5y-x^2\ln x=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=\frac{19}{54}x^5+\frac{35}{54}\frac{1}{x}-\frac{x^2}{9}\ln\lvert x\rvert$

30	$x^2y''-4xy'+6y-x^4+x^2=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=\frac{x^2}{2}+x^2\ln\|x\|+\frac{7}{2}x^2-3x^3$
31	$x^2y''-2x(x+1)y'+2(x+1)4y=0$ $y(1/2)=\frac{1}{2}(1+e)$ $y'(1/2)=1+2e$ $x\in[).5,1.5], h=0.1$	$y=x+xe^{2x}$
32	$x^2y''+2x^2y'-2y=0$ $y(1)=2e^{-2}$ $y'(1)=1-5e^{-2}$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=\frac{x-1}{x}+\frac{(x+1)e^{-2x}}{x}$
33	$x^2y''-x(x^2-1)y'-(x^2+1)y=0$ $y(1)=1+e^{1/2}$ $y'(1)=2e^{1/2}-1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=\frac{1}{x}(1+e^{x^2/2})$
34	$(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ $y(0)=1$ $y'(0)=1$ $x\in[0,1], h=0.1$	$y=-(2x^3-3x)+\frac{11\sqrt{3}}{9}\|x^2-1\|^{3/2}$

35	$(x^2-1)y''-xy'-3y=0$ $y(2)=1$ $y'(2)=1$ $x\in[2,3], h=0.1$	$y=-(2x^3-3x)+\frac{11\sqrt{3}}{9}\lvert x^2-1\rvert^{3/2}$
36	$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ $y(2)=7$ $y'(2)=5$ $x\in[2,3], h=0.1$	$y=x^2+x+1$
37	$x(x-1)y''+\frac{1}{2}y'-\frac{3}{4}y=0$ $y(2)=\sqrt{2}$ $y'(2)=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ $x\in[2,3], h=0.1$	$y=\lvert x\rvert^{3/2}$
38	$(x-2)^2y''-(x-2)y'-3y=0$ $y(3)=2$ $y'(3)=2$ $x\in[3,4], h=0.1$	$y=(x-2)^3+\frac{1}{x-2}$
39	$x(x^2-2)y''-(x^3+3x^2-2x-2)y'$ $+(x^2+4x+2)y=0$ $y(3)=1$ $y'(3)=1$ $x\in[3,4], h=0.1$	$y=\frac{x}{x-1}\left(\frac{1-3\ln 2}{2}+\frac{3}{2}\ln x\right)$

40	$x^2(x+1)y''-x(2x+1)y'+(2x+1)y=$ $y(1)=2$ $y'(1)=4$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=x^2+x+x\ln x$
41	$x^4y''+2x^3y'+y=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=1$ $x\in[1,2], h=0.1$	$y=(\sin 1+\cos 1)\cos\frac{1}{x}+(\sin 1-\cos 1)\sin\frac{1}{x}$
42	$x^2(x-1)y''-x(5x-4)y'+(9x-6)y=$ $y(2)=1$ $y'(2)=1$ $x\in[2,,3], h=0.1$	$y=(\frac{1+\ln 2}{4}x^3-\frac{1}{4}(x^2+x^3\ln x)$
43	$2x^2(x-2)y''-x(x-4)y'+(x-3)y=$ $y(3)=1$ $y'(3)=1$ $x\in[3,4], h=0.1$	$y=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{x}+\frac{5\sqrt{3}}{9}\sqrt{x(x-2)}$

5.3. Контрольні запитання

1. Дайте постановку задачі Коші для одного диференціального рівняння. Дайте визначення поняттю сіткова функція.

2. Характеристика явного методу Ейлера. Переваги, вади, похибка.

3. Характеристика методу Ейлера-Коші. Переваги, вади, похибка.

4. Характеристика першого пліпшеного методу Ейлера. Переваги, вади, похибка.

5. Характеристика методу Рунге-Кутти. Переваги, вади, похибка.

6. Розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутти.

7. Розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.

8. Розв'язування диференціальних рівнянь із запізнюванням.

9. Особливості багатокрових методів розв'язування задачі Коші, їхні переваги й вади.

Лабораторна робота №6. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

6.1. Теоретичні відомості

Серед чисельних методів алгебри існують прямі методи, у яких розв'язок обчислюється за скінченне фіксоване число операцій та ітераційні методи, у яких результат досягається в процесі послідовних наближень.

6.1.1. Чисельні методи розв'язування СЛАР

Із прямих методів розв'язування СЛАР розглянемо методи Гауса й прогону.

6.1.1.1. Метод Гауса

У методі Гауса матриця СЛАР за допомогою рівносильних перетворень під час прямого ходу перетворюється у верхню трикутну матрицю. Під час зворотного ходу визначаються невідомі.

Нехай дано СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишемо розширену матрицю системи:

$$\begin{array}{r c l} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & b \end{matrix} & \\ \textit{Провідний рядок} \rightarrow & \left[\begin{array}{c|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] & \begin{matrix} \left(-{a_{21}}/{a_{11}}\right); \left(-{a_{31}}/{a_{11}}\right); \ldots; \left(-{a_{n1}}/{a_{11}}\right) \\ \xrightarrow[1-й \quad крок]{} \end{matrix} \\ & \uparrow \textit{Провідний стовпець} & \end{array}$$

На першому кроці алгоритму Гауса виберемо діагональний елемент $a_{11} \neq 0$ (якщо він дорівнює 0, то перший рядок переставляємо з яким-небудь нижчим рядком). Назвемо цей елемент, його рядок і стовпець *провідними*. Перетворимо матрицю таким чином, щоб елементи $a_{21},...,a_{n1}$ провідного стовпця дорівнювали нулеві. Для цього сформуємо числа $\left(-a_{21}/a_{11}\right);\left(-a_{31}/a_{11}\right);...;\left(-a_{n1}/a_{11}\right)$. Помноживши провідний рядок на число $\left(-a_{21}/a_{11}\right)$, складаючи із другим і ставлячи результат на місце другого рядка, отримаємо замість елемента a_{21} нуль, а замість елементів $a_{2j,}\ j=\overline{2,n}$, b_2 – відповідно елементи $a^1_{2j}=a_{2j}+a_{1j}\left(-a_{21}/a_{11}\right)$, $\overline{j=2,n}$, $b^1_2=b_2+b_1\left(-a_{21}/a_{11}\right)$ тощо. Помноживши провідний рядок на число $\left(-a_{n1}/a_{11}\right)$, складаючи з *n*-им рядком і ставлячи результат на місце *n*-го рядка, отримаємо замість елемента a_{n1} нуль, а інші елементи цього рядка будуть мати вигляд: $a^1_{nj}=a_{nj}+a_{1j}\left(-a_{n1}/a_{11}\right)$, $b^1_n=b_n+b_1\left(-a_{n1}/a_{11}\right)$. Зберігаючи провідний рядок незмінним, отримаємо в результаті 1-го кроку алгоритму Гауса наступну матрицю:

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & b \end{array} & \\
\textit{Провідний рядок} \rightarrow & \left[\begin{array}{c|c|cccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \hline
0 & a^1_{22} & a^1_{23} & \cdots & a^1_{2n} & b^1_2 \\ \hline
0 & a^1_{32} & a^1_{33} & \cdots & a^1_{3n} & b^1_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & a^1_{n2} & a^1_{n3} & \cdots & a^1_{nn} & b^1_n
\end{array}\right] & \begin{array}{c} \left(-a^1_{32}/a^1_{22}\right);\ldots;\left(-a^1_{n2}/a^1_{22}\right) \\ \xrightarrow{2-й\ \ крок} \end{array} \\
 & \uparrow \textit{Провідний стовпець} &
\end{array}$$

На другому кроці алгоритму Гауса як провідний вибирається елемент $a^1_{22} \neq 0$ (якщо він дорівнює нулю, то другий рядок міняємо з *нижчим* рядком). Формуються числа $\left(-\dfrac{a^1_{32}}{a^1_{22}}\right);...;\left(-\dfrac{a^1_{n2}}{a^1_{22}}\right)$. Помноживши провідний рядок на число $\left(-\dfrac{a^1_{32}}{a^1_{22}}\right)$ й складаючи результат із третім рядком, отримаємо замість елемента a^1_{32} нуль, а замість елементів a^1_{3j}, $j=\overline{3,n}$, b^1_3, Σ^1_3 – елементи

$a_{3j}^2 = a_{3j}^1 + a_{2j}^1\left(-\dfrac{a_{32}^1}{a_{22}^1}\right)$, $\overline{j=3,n}$, $b_3^2 = b_3^1 + b_2^1\left(-\dfrac{a_{32}^1}{a_{22}^1}\right)$ тощо. Помноживши провідний рядок на число $\left(-\dfrac{a_{n2}^1}{a_{22}^1}\right)$, складаючи результат з *n*-им рядком і ставлячи отриману суму на місце *n*-го рядка, отримаємо замість елемента a_{n2}^1 нуль, а замість елементів a_{nj}^1, b_n^1, Σ_n^1 – елементи $a_{nj}^2 = a_{nj}^1 + a_{2j}^1\left(-\dfrac{a_{n2}^1}{a_{22}^1}\right)$, $\overline{j=3,n}$, $b_n^2 = b_n^1 + b_2^1\left(-\dfrac{a_{n2}^1}{a_{22}^1}\right)$. Зберігаючи 1-ий й 2-ий рядки матриці незмінними, отримаємо в результаті другого кроку алгоритму Гауса наступну матрицю:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & b \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \textit{Провідний рядок} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cc|c|ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} & b_1 \\
0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\
\hline
0 & 0 & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 & b_3^2 \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & a_{n3}^2 & \cdots & a_{nn}^2 & b_n^2
\end{array}\right]
\end{array}
\xrightarrow[3-й\ \ крок]{} \cdots \xrightarrow[(n-1)-й\ \ крок]{}$$

↑ *Провідний стовпець*

Після (*n*-1)-го кроку алгоритму Гауса отримуємо наступну розширену матрицю, що містить верхню трикутну матрицю СЛАР:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & b \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 & \\
0 & a_{22}^1 & a_{23}^1 & \cdots & a_{2n}^1 & b_2^1 & \\
0 & 0 & a_{33}^2 & \cdots & a_{3n}^2 & b_3^2 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} &
\end{array}\right]
\end{array}$$

Прямий хід алгоритму Гауса завершено.

У зворотному ході алгоритму Гауса з останнього рівняння відразу визначається x_n, з передостаннього – x_{n-1} тощо. З першого рівняння визначається x_1.

$$\begin{cases} a_{nn}^{n-1}x_n = b_n^{n-1} & \Rightarrow x_n \\ a_{n-1n-1}^{n-2}x_{n-1} + a_{n-1n}^{n-2}x_n = b_{n-1}^{n-2} & \Rightarrow x_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & \Rightarrow x_1 \end{cases}$$

Зауваження 1. Якщо елементи якого-небудь рядка матриці системи в результаті перетворень стали рівними нулю, а права частина не дорівнює нулю, то СЛАР несумісна, оскільки не виконуються умови теореми Кронекера-Капеллі.

Зауваження 2. Якщо елементи якого-небудь рядка матриці системи та права частина в результаті перетворень стали рівними нулю, то СЛАР сумісна, але має безліч розв'язків, які можна отримати за допомогою методу Гауса для СЛАР порядку r, де r – ранг матриці вихідної СЛАР.

Зауваження 3. У результаті прямого ходу методу Гауса можна обчислити визначник матриці A вихідної СЛАР:

$$\det A = (-1)^p \, a_{11} a_{22}^1 a_{33}^2 \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{n-1}$$

При цьому за допомогою множника $(-1)^p$, де p – число перестановок рядків у процесі прямого ходу, враховуються відповідні зміни знаків внаслідок перестановок рядків.

Зауваження 4. Метод Гауса можна застосувати, щоб обернути невироджену ($\det A \neq 0$) матрицю.

Дійсно, нехай потрібно обернути невироджену матрицю $A = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$. Тоді, увівши позначення $A^{-1} = X$, $X = [x_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$, можна виписати матричне рівняння $AX = E$, де E – одинична матриця $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$, на основі якого можна записати ланцюжок СЛАР

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ ... \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ ... \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots A \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ ... \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix},$$

кожну з яких можна розв’язати методом Гауса. При цьому, оскільки верхня трикутна матриця для всіх цих СЛАР буде однією й тою ж, то метод Гауса застосовується один раз. Будується наступна розширена матриця:

$$
\begin{array}{cccc|cccc|c}
x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & & & & & \\
x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & b^1 & b^2 & . & b^n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 &
\end{array}
$$

У результаті застосування $(n-1)$-го кроку методу Гауса отримуємо:

$$
\begin{array}{cccc|cccc|c}
x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{nn} & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & & & \\
x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} & & & & & \\
x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} & b^1 & b^2 & \cdots & b^n & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & \\
 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_{21}^1 & b_{22}^1 & \dots & b_{2n}^1 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_{n1}^{n-1} & b_{n2}^{n-1} & \dots & b_{nn}^{n-1} &
\end{array}
$$

При цьому перший стовпець $(x_{11} \quad x_{21} \quad \dots \quad x_{n1})^T$ оберненої матриці визначається на зворотному ході методу Гауса із правою частиною b^1, стовпець $(x_{12} \quad x_{22} \quad \dots \quad x_{n2})^T$ – із правою частиною b^2 тощо. Стовпець $(x_{1n} \quad x_{2n} \quad \dots \quad x_{nn})^T$ визначається із правою частиною b^n.

Приклад 6.1. Методом Гауса розв’язати СЛАР.

$$
\begin{cases}
10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\
2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\
2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14
\end{cases}
$$

Розв’язування. Прямий хід:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{10} & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 10 & 1 & 13 \\ 2 & 2 & 10 & 14 \end{array}\right) (-2/10);\ (-2/10) \xrightarrow[1-й\ \ крок]{}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & \mathbf{9{,}8} & 0{,}8 & 10{,}6 \\ 0 & 1{,}8 & 9{,}8 & 11{,}6 \end{array}\right) (-1{,}8/9{,}8) \xrightarrow[2-й\ \ крок]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 9{,}8 & 0{,}8 & 10{,}6 \\ 0 & 0 & 9{,}653 & 9{,}653 \end{array}\right)$$

Зворотний хід:

$$9{,}653x_3 = 9{,}653, \qquad x_3 = 1$$
$$9{,}8x_2 + 0{,}8x_3 = 10{,}6, \qquad x_2 = 1$$
$$10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \qquad x_1 = 1.$$

Відповідь: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Приклад 6.2. Методом Гауса обчислити визначник матриці та обернути матрицю СЛАР із прикладу 6.1.

Розв’язування

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}; \qquad \det A = 10 \cdot 9.8 \cdot 9.65 = 945.994 \quad \text{(точне значення 946).}$$

Прямий хід.

$$\begin{array}{cccccc} x_{13} & x_{23} & x_{33} & & & \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} & & & \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & b^1 & b^2 & b^3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{10} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-2/10);\ (-2/10) \xrightarrow[1-й\ \ крок]{}$$

$$\begin{array}{cccccc}
x_{13} & x_{23} & x_{33} & & & \\
x_{12} & x_{22} & x_{23} & & & \\
x_{11} & x_{21} & x_{31} & b^1 & b^2 & b^3
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|}
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \boldsymbol{9{,}8} & 0{,}8 & -0{,}2 & 1 & 0 \\
0 & 1{,}8 & 9{,}8 & -0{,}2 & 0 & 1
\end{array}\right)(-1{,}8/9{,}8)\xrightarrow[2-й\ крок]{}$$

$$\begin{array}{cccccc}
x_{13} & x_{23} & x_{33} & & & \\
x_{12} & x_{22} & x_{32} & & & \\
x_{11} & x_{21} & x_{31} & b^1 & b^2 & b^3
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|}
10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 9{,}8 & 0.8 & -0{,}2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 9{,}653 & -0{,}163 & -0{,}184 & 1
\end{array}\right)$$

Зворотний хід:

$$\begin{cases} 9{,}653x_{31} = -0{,}163 \\ 9{,}8x_{21} + 0{,}8x_{31} = -0{,}2 \\ 10x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 9{,}653x_{32} = -0{,}184 \\ 9{,}8x_{22} + 0{,}8x_{32} = 1 \\ 10x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9{,}653x_{33} = 1 \\ 9{,}8x_{23} + 0{,}8x_{33} = 0 \\ 10x_{13} + x_{23} + x_{33} = 0 \end{cases}$$

Звідси $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.104 & -0.0085 & -0.0095 \\ -0.019 & 0.104 & -0.0085 \\ -0.0169 & -0.019 & 0.104 \end{pmatrix}$

Перевірка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}104 & -0{,}0085 & -0{,}0095 \\ -0{,}019 & 0{,}104 & -0{,}0085 \\ -0{,}0169 & -0{,}019 & 0{,}104 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}004 & 0 & 0{,}0005 \\ 0{,}001 & 1{,}004 & 0 \\ 0{,}001 & 0{,}001 & 1{,}004 \end{pmatrix},$$

тобто з точністю до помилок округлення отримана одинична матриця.

Зауваження 5. Комп'ютерна реалізація методу Гауса часто здійснюється з використанням *LU-розкладання матриць.*

LU-розкладання матриці *A* являє собою розкладання матриці *A* у добуток нижньої і верхньої трикутних матриць, тобто

$$A = LU\,,$$

де L – нижня трикутна матриця (матриця, у якої всі елементи, що лежать вище від головної діагоналі дорівнюють нулеві, $l_{ij} = 0$ при $i < j$), U – верхня трикутна матриця (матриця, у якої всі елементи, що лежать нижче від головної діагоналі дорівнюють нулю, $u_{ij} = 0$ при $i > j$).

LU-розкладання можна побудувати, використовуючи метод Гауса. Розглянемо k-ий крок методу Гауса, на якому піддіагональні елементи k-го стовпця матриці $A^{(k-1)}$ робляться рівними нулеві. Як було описано вище, метою для цього використовується така операція:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \mu_i^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}, \quad \mu_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i = \overline{k+1, n}, \; j = \overline{k, n}.$$

У термінах матричних операцій ця операція еквівалентна множенню $A^{(k)} = M_k A^{(k-1)}$, де елементи матриці M_k визначаються в такий спосіб

$$m_{ij}^k = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, \quad j \neq k \\ -\mu_{k+1}^{(k)}, & i \neq j, \quad j = k \end{cases}.$$

Тобто матриця M_k має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\mu_n^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При цьому вираз для зворотної операції запишеться у вигляді $A^{(k-1)} = M_k^{-1} A^{(k)}$, де

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_n^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У результаті прямого ходу методу Гауса отримаємо $A^{(n-1)} = U$,

$A = A^{(0)} = M_1^{-1} A^{(1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} A^{(2)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} A^{(n-1)}$, де $A^{(n-1)} = U$ – верхня трикутна матриця, а $L = M_1^{-1} M_2^{-1} ... M_{n-1}^{-1}$ – нижня трикутна матриця, що має вигляд $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2^{(1)} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3^{(1)} & \mu_3^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ...\mu_{k+1}^{(k)} & 1 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mu_n^{(1)} & \mu_n^{(2)} & \mu_n^{(k)} & \mu_n^{(k+1)} & ... & \mu_n^{(n-1)} & 1 \end{pmatrix}$.

Таким чином, шукане розкладання $A = LU$ отримано.

Зокрема, для розглянутого вище прикладу 6.1. LU-розкладання матриці А має вигляд $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}18 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ & 9{,}8 & 0{,}8 \\ & & 9{,}65 \end{pmatrix} = LU$

Надалі LU-розкладання можна ефективно використовувати для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду $Ax = b$. Справді, підставляючи LU-розкладання в СЛАР, отримаємо $LUx = b$, або $Ux = L^{-1}b$. Тобто процес розв'язування СЛАР зводиться до двох простих етапів.

На першому етапі розв'язується СЛАР $Lz = b$. Оскільки матриця системи – нижня трикутна, розв'язок можна записати в явному вигляді:

$$z_1 = b_1\ ,\ z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} z_j\ ,\ i = \overline{2, n}\,.$$

На другому етапі розв'язується СЛАР $Ux = z$ з верхньою трикутною матрицею. Тут, як і на попередньому етапі, розв'язок подається в явному вигляді:

$$x_n = \frac{z_n}{u_{nn}}\quad,\quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}(z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j)\,,\quad i = \overline{n-1,1}\,.$$

Зазначимо, що другий етап еквівалентний зворотному ходу методу Гауса, тоді як перший відповідає перетворенню правої частини СЛАР в процесі прямого ходу.

6.1.1.2. Метод прогону

Метод прогону є одним з ефективних методів розв'язування СЛАР із трьохдіагональними матрицями, що виникають при кінцево-різницевій апроксимації задач для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) і рівнянь у частинних похідних другого порядку і є окремим випадком методу Гауса. Розглянемо наступну СЛАР:

$$a_1 = 0 \begin{cases} b_1x_1 + c_1x_2 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ \qquad a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = d_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n = d_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_nx_{n-1} + b_nx_n = d_n, \qquad c_n = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

розв'язок якої будемо шукати у вигляді

$$x_i = P_i x_{i+1} + Q_i, \qquad i = \overline{1,n} \tag{6.2}$$

де $P_i, Q_i,\ i = \overline{1,n}$ – прогоночні коефіцієнти, які необхідно визначити. Щоб визначити їх, визначимо з першого рівняння СЛАР (6.1) x_1 через x_2, отримаємо:

$$x_1 = \frac{-c_1}{b_1}x_2 + \frac{d_1}{b_1} = P_1x_2 + Q_1, \tag{6.3}$$

звідки

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Із другого рівняння СЛАР (6.1) за допомогою (6.3) визначимо x_2 через x_3, отримаємо:

$$x_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2P_1}x_3 + \frac{d_2 - a_2Q_1}{b_2 + a_2P_1} = P_2x_3 + Q_2,$$

звідки

$$P_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2P_1}, \quad Q_2 = \frac{d_2 - a_2Q_1}{b_2 + a_2P_1}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо з *i*-го рівняння СЛАР (6.1):

$$x_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}} x_{i+1} + \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}},$$

отже

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}.$$

З останнього рівняння СЛАР маємо

$$x_n = \frac{-c_n}{b_n + a_n P_{n-1}} x_{n+1} + \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}} = 0 \cdot x_{n+1} + Q_n,$$

тобто

$$P_n = 0 \text{ (при } c_n = 0\text{)}, \; Q_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}} = x_n.$$

Таким чином, прямий хід методу прогону, де визначалися прогоночні коефіцієнти P_i, Q_i, $i = \overline{1,n}$ завершено. У результаті прогоночні коефіцієнти обчислюються за наступними формулами:

$$P_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i - a_i Q_{i-1}}{b_i + a_i P_{i-1}}, \quad i = \overline{2, n-1}; \tag{6.4}$$

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1}, \text{ тому що } a_1 = 0, \quad i = 1; \tag{6.5}$$

$$P_n = 0, \text{ через } c_n = 0, \; Q_n = \frac{d_n - a_n Q_{n-1}}{b_n + a_n P_{n-1}}, \; i = n. \tag{6.6}$$

Зворотний хід методу прогону здійснюється відповідно до виразу (6.2)

$$\begin{cases} x_n = P_n x_{n+1} + Q_n = 0 \cdot x_{n+1} + Q_n = Q_n \\ x_{n-1} = P_{n-1} x_n + Q_{n-1} \\ x_{n-1} = P_{n-2} x_{n-1} + Q_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = P_1 x_2 + Q_1. \end{cases} \tag{6.7}$$

Формули (6.4)-(6.7) – формули *правого прогону*.

Аналогічно, починаючи з останнього рівняння СЛАР (6.1) можна вивести формули *лівого прогону*.

Загальне число операцій у методі прогону дорівнює *8n+1*, тобто пропорційно числу рівнянь. Такі методи розв'язування СЛАР називають *економічними*. Наприклад, число операцій у методі Гауса пропорційно n^3 [1].

Для стійкості методу прогону (6.4)-(6.7) достатньо, щоб виконувались такі умови [2]:

$$a_i \neq 0, \quad c_i \neq 0, \; i = \overline{2, n-1}$$

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \qquad i = \overline{1, n}, \tag{6.8}$$

причому строга нерівність виконується хоча б при одному i. Тут стійкість розуміється в сенсі ненагромадження похибки розв'язку в ході обчислювального процесу при малих похибках вхідних даних (правих частин і елементів матриці СЛАР).

Приклад 6.3. Методом прогону розв'язати СЛАР

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 = 6 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 3 \\ 2x_2 + 10x_3 - 4x_4 = 8 \\ -x_3 + 6x_4 = 5 \end{cases}$$

Розв'язування.

$$P_1 = \frac{-c_1}{b_1} = \frac{2}{8} = 0{,}25, \quad Q_1 = \frac{d_1}{b_1} = 0{,}75;$$

$$P_2 = \frac{-c_2}{b_2 + a_2 P_1} = \frac{2}{6 - 1 \cdot 0{,}25} = 0{,}3478, \quad Q_2 = \frac{d_2 - a_2 Q_1}{b_2 + a_2 P_1} = \frac{(3 + 1 \cdot 0{,}75)}{5{,}75} = 0{,}6522;$$

$$P_3 = \frac{-c_3}{b_3 + a_3 P_2} = 0{,}374, \quad Q_3 = \frac{d_3 - a_3 Q_2}{b_3 + a_3 P_2} = 0{,}626;$$

$$P_4 = 0 \quad (c_4 = 0), \quad Q_4 = \frac{d_4 - a_4 Q_3}{b_4 + a_4 P_3} = 1{,}0;$$

$$x_4 = P_4 x_5 + Q_4 = 1{,}0, \quad x_3 = P_3 x_4 + Q_3 = 1{,}0, \quad x_2 = P_2 x_3 + Q_2 = 1{,}0,$$

$$x_1 = P_1 x_2 + Q_1 = 1{,}0.$$

6.1.1.3. Норми векторів і матриць

Для дослідження збіжності чисельних методів розв'язування задач лінійної алгебри вводяться поняття норми векторів і матриць.

Нормою вектора $x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n)^T$ (позначають $\|x\|$) в *n*-мірному дійсному просторі векторів $x \in R^n$ називають невід’ємне число, що обчислюється за допомогою компонентів вектора і таке, що має наступні властивості:

а) $\|x\| \geq 0$ ($\|x\| = 0$ тоді й тільки тоді, коли x – нульовий вектор $x = \vartheta$);

б) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для будь-яких дійсних чисел α;

в) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Нормою матриці $A_{n\times n}$ (позначається $\|A\|$) з дійсними елементами в просторі матриць називають невід’ємне число, що обчислюється за допомогою елементів матриці й таке, що має наступні властивості:

а) $\|A\| > 0$ ($\|A\| = 0$ тоді й тільки тоді, коли A – нульова матриця $A = \Theta$);

б) $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ для будь-яких дійсних чисел α;

в) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ для всіх $n \times n$ матриць A і B розглянутого простору;

г) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всіх $n \times n$ матриць A і відповідних матриць B.

Як видно з останньої властивості (якщо як матрицю B використовувати вектор x), норма матриць повинна узгоджуватися з нормою векторів. Це узгодження здійснюється зв'язком

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|. \tag{6.9}$$

Найбільш вживаними є наступні норми векторів:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \tag{6.10}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{(x, x)}. \tag{6.11}$$

$$\|x\|_c = \max_i |x_i|, \tag{6.12}$$

Найпоширенішими узгодженими з ними за допомогою зв'язку (6.9) нормами матриць будуть відповідно:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{6.13}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \tag{6.14}$$

$$\|A\|_c = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \tag{6.15}$$

Відзначимо, що норма (6.15) узгоджена з усіма наведеними вище нормами векторів.

Для дослідження похибок, що виникають при розв’язуванні СЛАР, вводять поняття *числа обумовленості матриці* cond (A) [1]:

$$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Число обумовленості характеризує ступінь залежності відносної похибки розв’язку СЛАР від похибки вхідних даних (праві частини, елементи матриці). Можна показати, що для ненульових векторів x справедливі наступні нерівності:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le condA \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le condA \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}$$

Таким чином, чим більше число обумовленості, тим сильніший вплив похибки вхідних даних на кінцевий результат. Матриця вважається погано обумовленою, якщо cond (A)>>1.

Якщо як норму матриці прийняти її спектральний радіус $\max_i |\lambda_i|$, то

$$cond(A) = \max_i |\lambda_i| \frac{1}{\min_i |\lambda_i|} \ge 1$$

оскільки спектральний радіус оберненої матриці A^{-1} дорівнює оберненій величині мінімального власного значення вихідної матриці.

Приклад 6.4.

Для матриці A й вектора b обчислити різні норми $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_c$. Перевірити виконання умови узгодженості норм $\|Ax\| \le \|A\| \|x\|$ для різних комбінацій норм. Обчислити число обумовленості матриці A.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Обчислимо відповідні норми:

$\|b\|_1=|3|+|-4|=7$, $\|b\|_2=(3^2+(-4)^2)^{1/2}=5$, $\|b\|_c=\max(|3|,|-4|)=4$.

$\|A\|_1=\max(|-1|+|3|,|2|+|-5|)=7$,

$\|A\|_2=((-1)^2+3^2+2^2+(-5)^2)^{1/2}=\sqrt{39}$,

$\|A\|_c=\max(|-1|+|2|,|3|+|-5|)=8$.

Щоб перевірити умову узгодженості, обчислимо різні норми вектора $c=Ab=\begin{pmatrix}-11\\ 29\end{pmatrix}$.

$\|c\|_1=|-11|+|29|=40$, $\|c\|_2=((-11)^2+29^2)^{1/2}=\sqrt{962}$, $\|c\|_c=\max(|-11|,|29|)=29$.

Легко переконатися в тому, що умова узгодженості виконується для узгоджених норм:

$$\|c\|_1=40\le\|A\|_1\|b\|_1=7\cdot 7=49,$$

$$\|c\|_2=\sqrt{962}\le\|A\|_2\|b\|_2=\sqrt{39}\cdot 5=\sqrt{975},$$

$$\|c\|_c=29\le\|A\|_c\|b\|_c=8\cdot 4=32.$$

Крім того, відомо, що матрична норма $\|A\|_c$ узгоджена з усіма введеними вище нормами векторів. У цьому прикладі це підтверджується виконанням нерівностей:

$$\|c\|_1=40\le\|A\|_c\|b\|_1=8\cdot 7=56,$$

$$\|c\|_2=\sqrt{962}\le\|A\|_c\|b\|_2=8\cdot 5=40.$$

У той же час використання ряду інших комбінацій норм матриці та вектора призводить у цьому разі до порушення умови погодженості:

$$\|c\|_c=29>\|A\|_1\|b\|_c=7\cdot 4=28,$$

$$\|c\|_c=29>\|A\|_2\|b\|_c=\sqrt{39}\cdot 4.$$

Розглянутий приклад наочно ілюструє важливість використання узгоджених норм матриці та вектора.

Обчислимо число обумовленості матриці A, взявши за норму матриці $\|\cdot\|_c$. Для цього знайдемо спочатку зворотну матрицю:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

і обчислимо її норму:

$$\left\|A^{-1}\right\|_c = \max(|5| + |2|, |3| + |1|) = 7 \ .$$

У результаті

$$cond(A) = \|A\|_c \left\|A^{-1}\right\|_c = 8 \cdot 7 = 56.$$

6.1.2. Ітераційні методи розв’язування СЛАР

6.1.2.1. Метод простих ітерацій

Для великої кількості рівнянь прямі методи розв’язування СЛАР (за винятком методу прогону) стає важко реалізувати на ЕОМ насамперед через складність зберігання й обробки матриць великого розміру. У той же час характерною рисою ряду СЛАР, які часто зустрічаються в прикладних задачах, є розрідженість матриць. Число ненульових елементів таких матриць мале порівняно з їхнім розміром. Для розв’язування СЛАР з розрідженими матрицями ліпше використовувати ітераційні методи.

Методи послідовних наближень, у яких при обчисленні наступного наближення розв’язку використовуються попередні, вже відомі, наближені розв’язки, називаються *ітераційними*.

Розглянемо СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (6.16)$$

з невиродженною матрицею $(\det A \neq 0)$.

Приведемо СЛАР до еквівалентного вигляду

$$
\begin{cases}
x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\
x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n
\end{cases}
\qquad (6.17)
$$

або у векторно-матричній формі

$$x = \beta + \alpha x.$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},\ \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Привести СЛАР до такого виду можна різними способами. Одним з найпоширеніших є наступний.

Розв'яжемо систему (6.16) щодо невідомих при ненульових діагональних елементах $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ (якщо який-небудь коефіцієнт на головній діагоналі дорівнює нулю, достатньо відповідне рівняння поміняти місцями з будь-яким іншим рівнянням). Отримаємо наступні вирази для компонентів вектора β та матриці α еквівалентної системи:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}};\ \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}},\ i, j = \overline{1,n},\ i \neq j; \quad \alpha_{ij} = 0,\ i = j,\ i = \overline{1,n}. \qquad (6.18)$$

Метод простих ітерацій з таким способом приведення вихідної СЛАР до еквівалентного вигляду зветься методом Якобі.

Як нульове наближення $x^{(0)}$ вектора невідомих приймемо вектор правих частин $x^{(0)} = \beta$ або $(x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \ldots \quad x_n^{(0)})^T = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad \ldots \quad \beta_n)^T$. Тоді *метод простих ітерацій* прийме вигляд:

$$
\begin{cases}
x^{(0)} = \beta \\
x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)} \\
x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}.
\end{cases}
\qquad (6.19)
$$

З (6.19) видно перевагу ітераційних методів порівняно, наприклад, з розглянутим вище методом Гауса. В обчислювальному процесі беруть участь тільки добутки матриці на вектор, що дозволяє працювати

тільки з ненульовими елементами матриці, значно спрощуючи процес зберігання й обробки матриць.

Існує така достатня умова збіжності методу простих ітерацій [1].

Метод простих ітерацій (6.19) *збігається до єдиного розв'язку СЛАР* (6.17) (а *отже й до розв'язку вихідної СЛАР* (6.16)) *при будь-якому початковому наближенні* $x^{(0)}$, *якщо яка-небудь норма матриці* α *еквівалентної системи менше від одиниці* $\|\alpha\| < 1$.

Якщо використовується метод Якобі (вираз (6.18) для еквівалентної СЛАР), то достатньою умовою збіжності є *діагональна перевага матриці* A, тобто $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, i \neq j}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i$ (для кожного рядка матриці A модулі елементів, що стоять на головній діагоналі, більші від суми модулів недіагональних елементів). Очевидно, що в цьому разі $\|\alpha\|_c$ менше від одиниці й, отже, ітераційний процес (6.19) збігається.

Наведемо також необхідну та достатню умову збіжності методу простих ітерацій**.** *Щоб ітераційний процес* (6.19) *збігався необхідно і достатньо, щоб спектр матриці* α *еквівалентної системи лежав всередині кола з радіусом, рівним одиниці.*

Якщо достатня умова збіжності виконується, то оцінка похибки розв'язку на k - ій ітерації визначається виразом:

$$\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \le \varepsilon^{(k)} = \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|, \tag{6.20}$$

де x^* – точний розв'язок СЛАР.

Ітерації припиняються, якщо виконується умова $\varepsilon^{(k)} \le \varepsilon$, де ε – задана точність.

Беручи до уваги, що з (6.20) випливає нерівність $\left\| x^{(k)} - x^* \right\| \le \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|} \left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$, можна отримати апріорну оцінку необхідної для досягнення заданої точності кількості ітерацій. Використовуючи вектор β як початкове наближення, таку оцінку визначаємо з нерівності:

$$\frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\|\beta\| \le \varepsilon,$$

звідки отримуємо апріорну оцінку кількості ітерацій k, якщо $\|\alpha\| < 1$

$$k+1 \ge \frac{\lg \varepsilon - \lg\|\beta\| + \lg(1-\|\alpha\|)}{\lg\|\alpha\|}.$$

Варто підкреслити, що ця нерівність дає завищену кількість ітерацій *k*, тому рідко використовується на практиці.

Зауваження. Оскільки $\|\alpha\| < 1$ є тільки достатньою (не необхідною) умовою збіжності методу простих ітерацій, то ітераційний процес може збігатися й у разі, якщо її не виконано. Тоді критерієм закінчення ітерацій може служити нерівність $\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\| \le \varepsilon$.

Приклад 6.5. Методом простих ітерацій з точністю $\varepsilon = 0{,}01$ розв'язати СЛАР.

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases}$$

Розв'язування. Приведемо СЛАР до еквівалентного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}2 - 0{,}1x_2 - 0{,}1x_3 \\ x_2 = 1{,}3 - 0{,}2x_1 - 0{,}1x_3 \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}2x_1 - 0{,}2x_2 \end{cases}$$

або

$$x = \beta + \alpha x$$

де $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$; $\beta = (1{,}2 \quad 1{,}3 \quad 1{,}4)^T$; $\|\alpha\|_c = 0{,}4 < 1$, отже достатню умову збіжності методу простих ітерацій виконано.

Ітераційний процес виглядає в такий спосіб.

$x^{(0)} = \beta$; $x^{(1)} = \beta + \alpha\beta = (0{,}93 \quad 0{,}92 \quad 0{,}9)^T$; $\varepsilon^{(1)} = 0.333 > \varepsilon$;

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)} = (1{,}018 \quad 1{,}024 \quad 1{,}03)^T \; ; \; \varepsilon^{(2)} = 0.0867 > \varepsilon$$

$$x^{(3)} = \beta + \alpha x^{(2)} = (0{,}9946 \quad 0{,}9934 \quad 0{,}9916)^T \; ; \; \varepsilon^{(3)} = 0.0256 > \varepsilon$$

$$x^{(4)} = \beta + \alpha x^{(3)} = (1{,}0015 \quad 1{,}00192 \quad 1{,}0024)^T \; ; \; \varepsilon^{(4)} = 0.0072 < \varepsilon \, .$$

Таким чином, обчислювальний процес завершено за 4 ітерації. Зазначимо, що точний розв'язок вихідної СЛАР у цьому випадку відомо – $x^* = (1 \quad 1 \quad 1)^T$. Звідси випливає, що заданій точності $\varepsilon = 0{,}01$ задовольняв розв'язок, отриманий вже на третій ітерації. Але через використання для обчислення похибки оцінного виразу (1.20) (видно, що в цьому випадку $\left\| x^{(3)} - x^* \right\| \le \varepsilon^{(3)}$, при цьому $\varepsilon^{(3)} > \varepsilon$, хоча $\left\| x^{(3)} - x^* \right\| \le \varepsilon$) процес зупиняється тільки на четвертій ітерації.

Зазначимо також, що апріорна оцінка необхідної кількості ітерацій у даній задачі дає: $k + 1 \ge (-2 + \lg 0{,}6 - \lg 1{,}4) / \lg 0{,}4 = 5{,}95$, тобто, щоб досягти точності $\varepsilon = 0{,}01$, відповідно до апріорної оцінки, необхідно зробити не менш ніж п'ять ітерацій, що ілюструє характерну для апріорної оцінки тенденцію до завищення кількості ітерацій.

6.1.2.2. Метод Зейделя розв'язування СЛАР

Метод простих ітерацій досить повільно збігається. Для того, щоб прискорити обчислення, можна використовувати *метод Зейделя*, що полягає в тому, що обчислюючи компонент x_i^{k+1} вектора невідомих на (*k*+1)-й ітерації використовуються $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_{i-1}^{k+1}$, вже обчислені на (*k*+1)-й ітерації. Значення інших компонентів $x_{i+1}^k, x_{i+2}^k, ..., x_n^k$ беруться з попередньої ітерації. Так само, як і в методі простих ітерацій, будується еквівалентна СЛАР (6.17) і за початкове наближення береться вектор правих частин $x^0 = (\beta_1 \quad \beta_2 \quad ... \quad \beta_n)^T$. Тоді метод Зейделя для відомого вектора $(x_1^k \quad x_2^k \quad ... \quad x_n^k)^T$ на *k*-ій ітерації має вигляд:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^k + \alpha_{12}x_2^k + ... + \alpha_{1n}x_n^k \\ x_2^{k+1} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{k+1} + \alpha_{22}x_2^k + ... + \alpha_{2n}x_n^k \\ x_3^{k+1} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{k+1} + \alpha_{32}x_2^{k+1} + \alpha_{33}x_3^k + ... + \alpha_{3n}x_n^k \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{k+1} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{k+1} + \alpha_{n2}x_2^{k+1} + ... + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + \alpha_{nn}x_n^k \end{cases}$$

Із цієї системи видно, що $x^{k+1} = \beta + Bx^{k+1} + Cx^k$, де B – нижня трикутна матриця з діагональними елементами , рівними нулю, а C – верхня трикутна матриця з діагональними елементами, відмінними від нуля, $\alpha = B + C$. Отже

$$(E - B)x^{k+1} = Cx^k + \beta,$$

звідки

$$x^{k+1} = (E - B)^{-1}\,\mathrm{C}x^k + (E - B)^{-1}\beta.$$

Таким чином, метод Зейделя є методом простих ітерацій з матрицею правих частин $\alpha = (E - B)^{-1}\mathrm{C}$ і вектором правих частин $(E - B)^{-1}\beta$ і, отже, збіжність і похибку методу Зейделя можна досліджувати за допомогою формул, виведених для методу простих ітерацій, у яких замість матриці α підставлена матриця $(E - B)^{-1}\mathrm{C}$, а замість вектора правих частин – вектор $(E - B)^{-1}\beta$. Для практичних обчислень важливо, що як достатні умови збіжності методу Зейделя можна використовувати умови, наведені вище для методу простих ітерацій ($\|\alpha\| < 1$ або, якщо використовується еквівалентна СЛАР у формі (6.18) – діагональна перевага матриці A). Якщо ці умови виконуються, то для оцінки похибки на k-ій ітерації можна використовувати вираз:

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{\|C\|}{1 - \|\alpha\|}\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| .$$

Зазначимо, що як і метод простих ітерацій, метод Зейделя може збігатися й тоді, коли умова $\|\alpha\| < 1$ порушується. У цьому випадку $\varepsilon^{(k)} = \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$.

Приклад 6.6. Методом Зейделя розв'язати СЛАР із приклада 6.5

Розв'язування

Приведемо СЛАР до еквівалентного вигдяду аналогічно до прикладу (6.5). Діагональна перевага елементів вихідної матриці СЛАР гарантує збіжність методу Зейделя.

Ітераційний процес виглядає в такий спосіб:

$$x^{(0)} = (1{,}2 \quad 1{,}3 \quad 1{,}4)^T$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 1{,}3 - 0{,}1 \cdot 1{,}4 = 0{,}93 \\ x_2^{(1)} = 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}93 - 0{,}1 \cdot 1{,}4 = 0{,}974 \\ x_3^{(1)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}93 - 0{,}2 \cdot 0{,}974 = 1{,}0192 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1{,}2 - 0{,}1 \cdot 0{,}974 - 0{,}1 \cdot 1{,}0192 = 1{,}0007 \\ x_2^{(2)} = 1{,}3 - 0{,}2 \cdot 1{,}0007 - 0{,}1 \cdot 1{,}0192 = 0{,}998 \\ x_3^{(2)} = 1{,}4 - 0{,}2 \cdot 1{,}0007 - 0{,}2 \cdot 0{,}998 = 1{,}0003 \end{cases}$$

Таким чином, вже на другій ітерації похибка $\left\| x^{(2)} - x^* \right\| < 10^{-2} = \varepsilon$, тобто метод Зейделя в цьому випадку збігається швидше від методу простих ітерацій.

6.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Методом Гауса розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для матриці СЛАР обчислити визначник і обернену матрицю (див. свій варіант у таблиці 6.1).
2. Методом прогону розв’язати СЛАР (див. свій варіант у таблиці 6.2)
3. Методом простих ітерацій і методом Зейделя розв’язати СЛАР з точністю $\varepsilon = 0.01$ (див. свій варіант у таблиці 6.3)
4. Написати програми розв’язування задач мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.
5. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:
   - мета роботи;
   - теоретичні відомості;
   - розв’язок задач в аналітичній формі;

- лістинги програм розв’язування задач (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 6.1 – Варіанти умов для 1-го завдання лабораторної роботи

№	Завдання	№	Завдання
1.	$\begin{cases} x_1+2\cdot x_2-2\cdot x_3+6\cdot x_4=24 \\ -3x_1-5x_2+14x_3+13x_4=41 \\ x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0 \\ -2x_1-4x_2+5x_3+10x_4=20 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2\cdot x_1+7\cdot x_2-8\cdot x_3+6\cdot x_4=-39 \\ 4\cdot x_1+4\cdot x_2-7\cdot x_4=41 \\ -x_1-3\cdot x_2+6\cdot x_3+3\cdot x_4=4 \\ 9\cdot x_1-7\cdot x_2-2\cdot x_3-8\cdot x_4=113 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 9\cdot x_1-5\cdot x_2-6\cdot x_3+3\cdot x_4=-8 \\ x_1-7\cdot x_2+x_3=38 \\ 3\cdot x_1-4\cdot x_2+9\cdot x_3=47 \\ 6\cdot x_1-x_2+9\cdot x_3+8\cdot x_4=-8 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} -x_1-7\cdot x_2-3\cdot x_3-2\cdot x_4=-12 \\ -8\cdot x_1+x_2-9\cdot x_3=-60 \\ 8\cdot x_1+2\cdot x_2-5\cdot x_3-3\cdot x_4=-91 \\ -5\cdot x_1+3\cdot x_2+5\cdot x_3-9\cdot x_4=-43 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3\cdot x_1-8\cdot x_2+x_3-7\cdot x_4=96 \\ 6\cdot x_1+4\cdot x_2+8\cdot x_3+5\cdot x_4=-13 \\ -x_1+x_2-9\cdot x_3-3\cdot x_4=-54 \\ -6\cdot x_1+6\cdot x_2+9\cdot x_3-4\cdot x_4=82 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x_1+2\cdot x_2-x_3-7\cdot x_4=-23 \\ 8\cdot x_1-9\cdot x_3-3\cdot x_4=39 \\ 2\cdot x_1-3\cdot x_2+7\cdot x_3+x_4=-7 \\ x_1-5\cdot x_2-6\cdot x_3+8\cdot x_4=30 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1-5\cdot x_2-7\cdot x_3+x_4=-75 \\ x_1-3\cdot x_2-9\cdot x_3-4\cdot x_4=-41 \\ -2\cdot x_1+4\cdot x_2+2\cdot x_3+x_4=18 \\ -9\cdot x_1+9\cdot x_2+5\cdot x_3+3\cdot x_4=29 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} -4\cdot x_1-9\cdot x_2+4\cdot x_3+3\cdot x_4=-51 \\ 2\cdot x_1+7\cdot x_2+9\cdot x_3+8\cdot x_4=76 \\ 4\cdot x_1-4\cdot x_2-2\cdot x_4=26 \\ -8\cdot x_1+5\cdot x_2+2\cdot x_3+9\cdot x_4=-73 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} -7\cdot x_1-9\cdot x_2+x_3-9\cdot x_4=29 \\ -6\cdot x_1-8\cdot x_2-5\cdot x_3+2\cdot x_4=42 \\ -3\cdot x_1+6\cdot x_2+5\cdot x_3-9\cdot x_4=11 \\ -2\cdot x_1-5\cdot x_3-9\cdot x_4=75 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} -7\cdot x_1+3\cdot x_2-4\cdot x_3+7\cdot x_4=-126 \\ 8\cdot x_1-x_2-7\cdot x_3+6\cdot x_4=29 \\ 9\cdot x_1+9\cdot x_2+3\cdot x_3-6\cdot x_4=27 \\ -7\cdot x_1-9\cdot x_2-8\cdot x_3-5\cdot x_4=34 \end{cases}$

11.	$\begin{cases} 2\cdot x_1-8\cdot x_2+5\cdot x_4=-40 \\ -9\cdot x_1+9\cdot x_2-7\cdot x_3+6\cdot x_4=-58 \\ -6\cdot x_1+7\cdot x_2+3\cdot x_3+8\cdot x_4=-75 \\ -x_1+8\cdot x_2+5\cdot x_3+x_4=1 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} -x_1-8\cdot x_2+5\cdot x_4=-60 \\ 6\cdot x_1-6\cdot x_2+2\cdot x_3+4\cdot x_4=-10 \\ 9\cdot x_1-5\cdot x_2-6\cdot x_3+4\cdot x_4=65 \\ -5\cdot x_1-9\cdot x_3+x_4=18 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} -6\cdot x_1-5\cdot x_2-3\cdot x_3-8\cdot x_4=101 \\ 5\cdot x_1-x_2-5\cdot x_3-4\cdot x_4=51 \\ -6\cdot x_1+5\cdot x_3+5\cdot x_4=-53 \\ -7\cdot x_1-2\cdot x_2+8\cdot x_3+5\cdot x_4=-63 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} -x_1-3\cdot x_2-4\cdot x_3=-3 \\ 3\cdot x_1+7\cdot x_2-8\cdot x_3+3\cdot x_4=30 \\ x_1-6\cdot x_2+2\cdot x_3+5\cdot x_4=-90 \\ -8\cdot x_1-4\cdot x_2-x_3-x_4=12 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} -9\cdot x_1+8\cdot x_2+8\cdot x_3+6\cdot x_4=-81 \\ -7\cdot x_1-9\cdot x_2+5\cdot x_3+4\cdot x_4=-50 \\ -3\cdot x_1-x_2+8\cdot x_3=-69 \\ 3\cdot x_1-x_2-4\cdot x_3-5\cdot x_4=48 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} -5\cdot x_1-x_2-3\cdot x_3-x_4=18 \\ -2\cdot x_1+8\cdot x_3-4\cdot x_4=-12 \\ -7\cdot x_1-2\cdot x_2+2\cdot x_3-2\cdot x_4=6 \\ 2\cdot x_1-4\cdot x_2-4\cdot x_3+4\cdot x_4=-12 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} 8\cdot x_1+8\cdot x_2-5\cdot x_3-8\cdot x_4=13 \\ 8\cdot x_1-5\cdot x_2+9\cdot x_3-8\cdot x_4=38 \\ 5\cdot x_1-4\cdot x_2-6\cdot x_3-2\cdot x_4=14 \\ 8\cdot x_1+3\cdot x_2+6\cdot x_3+6\cdot x_4=-95 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2\cdot x_4=-20 \\ -9\cdot x_1-x_2+x_3+8\cdot x_4=60 \\ -7\cdot x_1+8\cdot x_3-6\cdot x_4=-60 \\ 3\cdot x_1-5\cdot x_2+x_3-6\cdot x_4=-44 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} -8\cdot x_1+5\cdot x_2+8\cdot x_3-6\cdot x_4=-144 \\ 2\cdot x_1+7\cdot x_2-8\cdot x_3-x_4=25 \\ -5\cdot x_1-4\cdot x_2+x_3-6\cdot x_4=-21 \\ 5\cdot x_1-9\cdot x_2-2\cdot x_3+8\cdot x_4=103 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 7\cdot x_1+8\cdot x_2+4\cdot x_3-6\cdot x_4=-126 \\ -x_1+6\cdot x_2-2\cdot x_3-6\cdot x_4=-42 \\ 2\cdot x_1+9\cdot x_2+6\cdot x_3-4\cdot x_4=-115 \\ 5\cdot x_1+9\cdot x_2+x_3+x_4=-67 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} -6\cdot x_1-8\cdot x_2-2\cdot x_3-8\cdot x_4=-32 \\ 9\cdot x_1+8\cdot x_3+3\cdot x_4=8 \\ -9\cdot x_2-5\cdot x_3+9\cdot x_4=-2 \\ -x_1+4\cdot x_2-8\cdot x_3-4\cdot x_4=-36 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} 7\cdot x_1-5\cdot x_2+6\cdot x_3+7\cdot x_4=120 \\ 8\cdot x_1-x_2-9\cdot x_3+x_4=31 \\ -3\cdot x_1+8\cdot x_2+8\cdot x_3+8\cdot x_4=6 \\ 2\cdot x_1-3\cdot x_2+6\cdot x_3-4\cdot x_4=25 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 2\cdot x_1-7\cdot x_2+8\cdot x_3-4\cdot x_4=57 \\ -x_2+4\cdot x_3-x_4=24 \\ 3\cdot x_1-4\cdot x_2+2\cdot x_3-x_4=28 \\ -9\cdot x_1+x_2-4\cdot x_3+6\cdot x_4=12 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} -7\cdot x_1-2\cdot x_2-x_3-4\cdot x_4=-12 \\ -4\cdot x_1+6\cdot x_2-4\cdot x_4=22 \\ -8\cdot x_1+2\cdot x_2-9\cdot x_3-3\cdot x_4=51 \\ -7\cdot x_3+x_4=49 \end{cases}$

25.	$\begin{cases} -5\cdot x_1-6\cdot x_2+4\cdot x_3-2\cdot x_4=64 \\ 3\cdot x_2-4\cdot x_3-6\cdot x_4=-55 \\ 2\cdot x_1+4\cdot x_2-4\cdot x_3+2\cdot x_4=-48 \\ x_1-8\cdot x_2+2\cdot x_3+8\cdot x_4=68 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} -2\cdot x_1-9\cdot x_2-3\cdot x_3+7\cdot x_4=-26 \\ -7\cdot x_1+8\cdot x_2+2\cdot x_3+5\cdot x_4=-25 \\ -6\cdot x_1+2\cdot x_2=-16 \\ -3\cdot x_2+8\cdot x_3-3\cdot x_4=-5 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} -2\cdot x_1-x_2-9\cdot x_3-5\cdot x_4=93 \\ -4\cdot x_1+4\cdot x_2-2\cdot x_3+6\cdot x_4=16 \\ 5\cdot x_2+7\cdot x_3-4\cdot x_4=-80 \\ 9\cdot x_2+7\cdot x_3+7\cdot x_4=-119 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} x_1+4\cdot x_2-9\cdot x_3+7\cdot x_4=-67 \\ 2\cdot x_1-2\cdot x_2-2\cdot x_3+3\cdot x_4=-57 \\ -x_1+3\cdot x_2-9\cdot x_3-x_4=-26 \\ -5\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3+x_4=52 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 9\cdot x_1-7\cdot x_2-x_3+x_4=55 \\ 2\cdot x_1+7\cdot x_2+3\cdot x_3-6\cdot x_4=-66 \\ 4\cdot x_1+7\cdot x_2-3\cdot x_3-7\cdot x_4=-43 \\ -9\cdot x_1-5\cdot x_2-x_3-6\cdot x_4=-24 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} -5\cdot x_1+2\cdot x_2+4\cdot x_3-4\cdot x_4=57 \\ 4\cdot x_1+9\cdot x_2-7\cdot x_3-5\cdot x_4=-23 \\ -5\cdot x_2+6\cdot x_3+7\cdot x_4=23 \\ 4\cdot x_1+8\cdot x_2-6\cdot x_3-6\cdot x_4=-20 \end{cases}$

Таблиця 6.2 – Варіанти умов для 2-го завдання лабораторної роботи

№	Завдання	№	Завдання
1.	$\begin{cases} -11\cdot x_1-9\cdot x_2=-122 \\ 5\cdot x_1-15\cdot x_2-2\cdot x_3=-48 \\ -8\cdot x_2+11\cdot x_3-3\cdot x_4=-14 \\ 6\cdot x_3-15\cdot x_4+4\cdot x_5=-50 \\ 3\cdot x_4+6\cdot x_5=42 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 10\cdot x_1+5\cdot x_2=-120 \\ 3\cdot x_1+10\cdot x_2-2\cdot x_3=-91 \\ 2\cdot x_2-9\cdot x_3-5\cdot x_4=5 \\ 5\cdot x_3+16\cdot x_4-4\cdot x_5=-74 \\ -8\cdot x_4+16\cdot x_5=-56 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 13\cdot x_1-5\cdot x_2=-66 \\ -4\cdot x_1+9\cdot x_2-5\cdot x_3=-47 \\ -x_2-12\cdot x_3-6\cdot x_4=-43 \\ 6\cdot x_3+20\cdot x_4-5\cdot x_5=-74 \\ 4\cdot x_4+5\cdot x_5=14 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} -14\cdot x_1-6\cdot x_2=-78 \\ -9\cdot x_1+15\cdot x_2-x_3=-73 \\ x_2-11\cdot x_3+x_4=-38 \\ -7\cdot x_3+12\cdot x_4+3\cdot x_5=77 \\ 6\cdot x_4-7\cdot x_5=91 \end{cases}$

5.	$\begin{cases} 8\cdot x_1 + 4\cdot x_2 = 48 \\ -5\cdot x_1 + 22\cdot x_2 + 8\cdot x_3 = 125 \\ -5\cdot x_2 - 11\cdot x_3 + x_4 = -43 \\ -9\cdot x_3 - 15\cdot x_4 + x_5 = 18 \\ x_4 + 7\cdot x_5 = -23 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 6\cdot x_1 - 5\cdot x_2 = -58 \\ -6\cdot x_1 + 16\cdot x_2 + 9\cdot x_3 = 161 \\ 9\cdot x_2 - 17\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = -114 \\ 8\cdot x_3 + 22\cdot x_4 - 8\cdot x_5 = -90 \\ 6\cdot x_4 - 13\cdot x_5 = -55 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 15\cdot x_1 + 8\cdot x_2 = 92 \\ 2\cdot x_1 - 15\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = -84 \\ 4\cdot x_2 + 11\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = -77 \\ -3\cdot x_3 + 16\cdot x_4 + -7\cdot x_5 = 15 \\ 3\cdot x_4 + 8\cdot x_5 = -11 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} -11\cdot x_1 - 8\cdot x_2 = 99 \\ 9\cdot x_1 - 17\cdot x_2 + x_3 = -75 \\ -4\cdot x_2 + 20\cdot x_3 + 9\cdot x_4 = 66 \\ -4\cdot x_3 - 14\cdot x_4 + 3\cdot x_5 = 54 \\ -6\cdot x_4 + 14\cdot x_5 = 8 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 8\cdot x_1 - 4\cdot x_2 = 32 \\ -2\cdot x_1 + 12\cdot x_2 - 7\cdot x_3 = 15 \\ 2\cdot x_2 - 9\cdot x_3 + x_4 = -10 \\ -8\cdot x_3 + 17\cdot x_4 - 4\cdot x_5 = 133 \\ -7\cdot x_4 + 13\cdot x_5 = -76 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} -7\cdot x_1 - 6\cdot x_2 = -75 \\ 6\cdot x_1 + 12\cdot x_2 = 126 \\ -3\cdot x_2 + 5\cdot x_3 = 13 \\ -9\cdot x_3 + 21\cdot x_4 + 8\cdot x_5 = -40 \\ -5\cdot x_4 - 6\cdot x_5 = -24 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} -10\cdot x_1 - 9\cdot x_2 = 7 \\ -5\cdot x_1 - 21\cdot x_2 - 8\cdot x_3 = 29 \\ 7\cdot x_2 + 12\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 31 \\ 8\cdot x_4 + 2\cdot x_5 = 56 \\ 2\cdot x_4 + 10\cdot x_5 = -24 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} -11\cdot x_1 + 9\cdot x_2 = -114 \\ x_1 - 8\cdot x_2 + x_3 = 81 \\ -2\cdot x_2 - 11\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = -8 \\ 3\cdot x_3 - 14\cdot x_4 + 7\cdot x_5 = -38 \\ 8\cdot x_4 + 10\cdot x_5 = 144 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 14\cdot x_1 + 9\cdot x_2 = 125 \\ -8\cdot x_1 + 14\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = -56 \\ -5\cdot x_2 - 17\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 144 \\ x_3 + 5\cdot x_4 - 2\cdot x_5 = 36 \\ -4\cdot x_4 - 10\cdot x_5 = 70 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -4 \\ 7\cdot x_1 - 17\cdot x_2 - 8\cdot x_3 = 132 \\ -9\cdot x_2 + 19\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = -59 \\ 7\cdot x_3 - 20\cdot x_4 + 4\cdot x_5 = -193 \\ -4\cdot x_4 + 12\cdot x_5 = -40 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 16\cdot x_1 - 8\cdot x_2 = 0 \\ -7\cdot x_1 - 16\cdot x_2 + 5\cdot x_3 = -123 \\ 4\cdot x_2 + 12\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = -68 \\ -4\cdot x_3 + 12\cdot x_4 - 7\cdot x_5 = 104 \\ -x_4 + 7\cdot x_5 = 20 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 18\cdot x_1 - 9\cdot x_2 = -81 \\ 2\cdot x_1 - 9\cdot x_2 - 4\cdot x_3 = 71 \\ -9\cdot x_2 + 21\cdot x_3 - 8\cdot x_4 = -39 \\ -4\cdot x_3 - 10\cdot x_4 + 5\cdot x_5 = 64 \\ 7\cdot x_4 + 12\cdot x_5 = 3 \end{cases}$

17.	$\begin{cases} -6\cdot x_1+5\cdot x_2=51 \\ -x_1+13\cdot x_2+6\cdot x_3=100 \\ -9\cdot x_2-15\cdot x_3-4\cdot x_4=-12 \\ -x_3-7\cdot x_4+x_5=47 \\ 9\cdot x_4-18\cdot x_5=-90 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} 8\cdot x_1-2\cdot x_2=-14 \\ 7\cdot x_1-19\cdot x_2+9\cdot x_3=-55 \\ -4\cdot x_2+21\cdot x_3-8\cdot x_4=49 \\ 7\cdot x_3-23\cdot x_4+9\cdot x_5=86 \\ 4\cdot x_4-7\cdot x_5=8 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 10\cdot x_1-\cdot x_2=16 \\ -8\cdot x_1+16\cdot x_2+x_3=-110 \\ 6\cdot x_2-16\cdot x_3+6\cdot x_4=24 \\ -8\cdot x_3+16\cdot x_4-5\cdot x_5=-3 \\ 5\cdot x_4-13\cdot x_5=87 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} -6\cdot x_1+6\cdot x_2=30 \\ 2\cdot x_1+10\cdot x_2-7\cdot x_3=-31 \\ -8\cdot x_2+18\cdot x_3+9\cdot x_4=108 \\ 6\cdot x_3-17\cdot x_4-6\cdot x_5=-114 \\ 9\cdot x_4+14\cdot x_5=124 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} 7\cdot x_1-2\cdot x_2=65 \\ -3\cdot x_1-7\cdot x_2+4\cdot x_3=23 \\ -2\cdot x_2+15\cdot x_3+5\cdot x_4=1 \\ -2\cdot x_3-12\cdot x_4-8\cdot x_5=-58 \\ -3\cdot x_4-10\cdot x_5=-8 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} -14\cdot x_1+6\cdot x_2=82 \\ 2\cdot x_1+7\cdot x_2=-51 \\ -7\cdot x_2-18\cdot x_3-9\cdot x_4=-46 \\ 2\cdot x_3-13\cdot x_4+2\cdot x_5=111 \\ -7\cdot x_4-7\cdot x_5=35 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} 7\cdot x_1-5\cdot x_2=38 \\ -6\cdot x_1+19\cdot x_2-9\cdot x_3=14 \\ 6\cdot x_2-18\cdot x_3+7\cdot x_4=-45 \\ -7\cdot x_3-11\cdot x_4-2\cdot x_5=30 \\ 5\cdot x_4-7\cdot x_5=48 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} -11\cdot x_1+9\cdot x_2=-117 \\ -9\cdot x_1+17\cdot x_2+6\cdot x_3=-97 \\ 5\cdot x_2+20\cdot x_3+8\cdot x_4=-6 \\ -6\cdot x_3-20\cdot x_4+7\cdot x_5=59 \\ 2\cdot x_4+8\cdot x_5=-86 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} 12\cdot x_1-5\cdot x_2=148 \\ -3\cdot x_1-18\cdot x_2-8\cdot x_3=45 \\ -2\cdot x_2-16\cdot x_3-9\cdot x_4=-155 \\ -4\cdot x_3+18\cdot x_4-7\cdot x_5=11 \\ 4\cdot x_4-9\cdot x_5=3 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} -12\cdot x_1-7\cdot x_2=-102 \\ -7\cdot x_1-11\cdot x_2-3\cdot x_3=-92 \\ -7\cdot x_2+21\cdot x_3-8\cdot x_4=-65 \\ 4\cdot x_3-13\cdot x_4+5\cdot x_5=38 \\ -6\cdot x_4+14\cdot x_5=-12 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} -6\cdot x_1+3\cdot x_2=-33 \\ 6\cdot x_1-23\cdot x_2-9\cdot x_3=-107 \\ 2\cdot x_2-7\cdot x_3-x_4=18 \\ 4\cdot x_3+15\cdot x_4-9\cdot x_5=-69 \\ 5\cdot x_4-11\cdot x_5=-31 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} 16\cdot x_1-9\cdot x_2=-27 \\ 8\cdot x_1-13\cdot x_2-5\cdot x_3=-84 \\ -3\cdot x_2-21\cdot x_3+9\cdot x_4=-225 \\ -9\cdot x_3+16\cdot x_4-5\cdot x_5=-89 \\ x_4-9\cdot x_5=69 \end{cases}$

29.	$\begin{cases} -11\cdot x_1 + 9\cdot x_2 = -158 \\ -8\cdot x_2 - 6\cdot x_3 = 66 \\ 6\cdot x_2 + 15\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = -45 \\ 4\cdot x_3 + 6\cdot x_4 - x_5 = 24 \\ -7\cdot x_4 - 10\cdot x_5 = -1 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} 6\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 0 \\ -9\cdot x_1 - 17\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = -99 \\ -3\cdot x_2 + 12\cdot x_3 - 7\cdot x_4 = -107 \\ 2\cdot x_3 - 9\cdot x_4 - 6\cdot x_5 = 5 \\ -4\cdot x_4 + 5\cdot x_5 = -6 \end{cases}$

Таблиця 6.3 – Варіанти умов для 3-го завдання лабораторної роботи

№	Завдання	№	Завдання
1.	$\begin{cases} 19\cdot x_1 - 4\cdot x_2 - 9\cdot x_3 - x_4 = 100 \\ -2\cdot x_1 + 20\cdot x_2 - 2\cdot x_3 - 7\cdot x_4 = -5 \\ 6\cdot x_1 - 5\cdot x_2 - 25\cdot x_3 + 9\cdot x_4 = 34 \\ -3\cdot x_2 - 9\cdot x_3 + 12\cdot x_4 = 69 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 24\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 - 9\cdot x_4 = -9 \\ -6\cdot x_1 - 27\cdot x_2 - 8\cdot x_3 - 6\cdot x_4 = -76 \\ -4\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 19\cdot x_3 + 6\cdot x_4 = -79 \\ 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - 3\cdot x_3 - 13\cdot x_4 = -70 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} -23\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = -26 \\ -7\cdot x_1 - 21\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 9\cdot x_4 = -55 \\ 9\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - 31\cdot x_3 - 8\cdot x_4 = -58 \\ x_2 - 2\cdot x_3 + 10\cdot x_4 = -24 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 26\cdot x_1 - 9\cdot x_2 - 8\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 20 \\ 9\cdot x_1 - 21\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = -164 \\ -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - 18\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 140 \\ x_1 - 6\cdot x_2 - x_3 + 11\cdot x_4 = -81 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 20\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 7\cdot x_3 + x_4 = -117 \\ -x_1 + 13\cdot x_2 - 7\cdot x_4 = -1 \\ 4\cdot x_1 - 6\cdot x_2 + 17\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = 49 \\ -9\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 4\cdot x_3 - 25\cdot x_4 = -21 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 23\cdot x_1 - 6\cdot x_2 - 5\cdot x_3 + 9\cdot x_4 = 232 \\ 8\cdot x_1 + 22\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = -82 \\ 7\cdot x_1 - 6\cdot x_2 + 18\cdot x_3 - x_4 = 202 \\ 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 5\cdot x_3 - 19\cdot x_4 = -57 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 29\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 9\cdot x_3 - 9\cdot x_4 = 197 \\ -7\cdot x_1 - 25\cdot x_2 + 9\cdot x_4 = -226 \\ x_1 + 6\cdot x_2 + 16\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = -95 \\ -7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 17\cdot x_4 = -58 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} -7\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = -24 \\ 3\cdot x_1 - 20\cdot x_2 - 8\cdot x_4 = -47 \\ -9\cdot x_1 + x_2 + 18\cdot x_3 - 6\cdot x_4 = 28 \\ -x_1 - x_3 - 6\cdot x_4 = -50 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 12\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - x_3 + 3\cdot x_4 = -31 \\ 5\cdot x_1 + 20\cdot x_2 + 9\cdot x_3 + x_4 = 90 \\ 6\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - 21\cdot x_3 - 7\cdot x_4 = 119 \\ 8\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 27\cdot x_4 = 71 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 28\cdot x_1 + 9\cdot x_2 - 3\cdot x_3 - 7\cdot x_4 = -159 \\ -5\cdot x_1 + 21\cdot x_2 - 5\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = 63 \\ -8\cdot x_1 + x_2 - 16\cdot x_3 + 5\cdot x_4 = -45 \\ -2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 + 8\cdot x_4 = 24 \end{cases}$

11.	$\begin{cases} 21\cdot x_1+x_2-8\cdot x_3+4\cdot x_4=-119 \\ -9\cdot x_1-23\cdot x_2-2\cdot x_3+4\cdot x_4=79 \\ 7\cdot x_1-x_2-17\cdot x_3+6\cdot x_4=-24 \\ 8\cdot x_1+8\cdot x_2-4\cdot x_3-26\cdot x_4=-52 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 14\cdot x_1-4\cdot x_2-2\cdot x_3+3\cdot x_4=38 \\ -3\cdot x_1+23\cdot x_2-6\cdot x_3-9\cdot x_4=-195 \\ -7\cdot x_1-8\cdot x_2+21\cdot x_3-5\cdot x_4=-27 \\ -2\cdot x_1-2\cdot x_2+8\cdot x_3+18\cdot x_4=142 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 24\cdot x_1-7\cdot x_2-4\cdot x_3+4\cdot x_4=-190 \\ -3\cdot x_1-9\cdot x_2-2\cdot x_3-2\cdot x_4=-12 \\ 3\cdot x_1+7\cdot x_2+24\cdot x_3+9\cdot x_4=155 \\ x_1-6\cdot x_2-2\cdot x_3-15\cdot x_4=-17 \end{cases}$	14	$\begin{cases} -22\cdot x_1-2\cdot x_2-6\cdot x_3+6\cdot x_4=96 \\ 3\cdot x_1-17\cdot x_2-3\cdot x_3+7\cdot x_4=-26 \\ 2\cdot x_1+6\cdot x_2-17\cdot x_3+5\cdot x_4=35 \\ -x_1-8\cdot x_2+8\cdot x_3+23\cdot x_4=-234 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} -14\cdot x_1+6\cdot x_2+x_3-5\cdot x_4=95 \\ -6\cdot x_1+27\cdot x_2+7\cdot x_3-6\cdot x_4=-41 \\ 7\cdot x_1-5\cdot x_2-23\cdot x_3-8\cdot x_4=69 \\ 3\cdot x_1-8\cdot x_2-7\cdot x_3+26\cdot x_4=27 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 21\cdot x_1-6\cdot x_2-9\cdot x_3-4\cdot x_4=127 \\ -6\cdot x_1+20\cdot x_2-4\cdot x_3+2\cdot x_4=-144 \\ -2\cdot x_1-7\cdot x_2-20\cdot x_3+3\cdot x_4=236 \\ 4\cdot x_1+9\cdot x_2+6\cdot x_3+24\cdot x_4=-5 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} -19\cdot x_1+2\cdot x_2-x_3-8\cdot x_4=38 \\ 2\cdot x_1+14\cdot x_2-4\cdot x_4=20 \\ 6\cdot x_1-5\cdot x_2-20\cdot x_3-6\cdot x_4=52 \\ -6\cdot x_1+4\cdot x_2-2\cdot x_3+15\cdot x_4=43 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 18\cdot x_1+8\cdot x_2-3\cdot x_3+4\cdot x_4=-84 \\ -7\cdot x_1+15\cdot x_2-5\cdot x_3-2\cdot x_4=-5 \\ -4\cdot x_1+13\cdot x_3+4\cdot x_4=-38 \\ -8\cdot x_1-8\cdot x_2-6\cdot x_3+31\cdot x_4=263 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} 15\cdot x_1+7\cdot x_3+5\cdot x_4=176 \\ -3\cdot x_1-14\cdot x_2-6\cdot x_3+x_4=-111 \\ -2\cdot x_1+9\cdot x_2+13\cdot x_3+2\cdot x_4=74 \\ 4\cdot x_1-x_2+3\cdot x_3+9\cdot x_4=76 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 10\cdot x_1-x_2-2\cdot x_3+5\cdot x_4=-99 \\ 4\cdot x_1+28\cdot x_2+7\cdot x_3+9\cdot x_4=0 \\ 6\cdot x_1+5\cdot x_2-23\cdot x_3+4\cdot x_4=67 \\ x_1+4\cdot x_2+5\cdot x_3-15\cdot x_4=58 \end{cases}$
21.	$\begin{cases} 24\cdot x_1+9\cdot x_2-x_3-5\cdot x_4=-24 \\ -x_1-14\cdot x_2+x_3+9\cdot x_4=40 \\ -7\cdot x_1+5\cdot x_2-21\cdot x_3=-84 \\ x_1+4\cdot x_2+8\cdot x_3-22\cdot x_4=-56 \end{cases}$	22	$\begin{cases} -18\cdot x_1+9\cdot x_2-x_3-8\cdot x_4=-60 \\ 6\cdot x_1+22\cdot x_2+9\cdot x_3=-109 \\ -4\cdot x_1+2\cdot x_2-16\cdot x_3+9\cdot x_4=-103 \\ x_1+6\cdot x_2-x_3-14\cdot x_4=-33 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} -24\cdot x_1-6\cdot x_2+4\cdot x_3+7\cdot x_4=130 \\ -8\cdot x_1+21\cdot x_2+4\cdot x_3-2\cdot x_4=139 \\ 6\cdot x_1+6\cdot x_2+16\cdot x_3=-84 \\ -7\cdot x_1-7\cdot x_2+5\cdot x_3+24\cdot x_4=-165 \end{cases}$	24	$\begin{cases} -25\cdot x_1+4\cdot x_2-4\cdot x_3+9\cdot x_4=86 \\ -9\cdot x_1+21\cdot x_2+5\cdot x_3-6\cdot x_4=29 \\ 9\cdot x_1+2\cdot x_2+19\cdot x_3-7\cdot x_4=28 \\ -7\cdot x_1+4\cdot x_2-7\cdot x_3+25\cdot x_4=68 \end{cases}$

25.	$\begin{cases} 15\cdot x_1-4\cdot x_2-6\cdot x_3+5\cdot x_4=104 \\ 4\cdot x_1-14\cdot x_2-x_3+4\cdot x_4=70 \\ 7\cdot x_1-7\cdot x_2+27\cdot x_3-8\cdot x_4=170 \\ -3\cdot x_1-3\cdot x_2+2\cdot x_3-14\cdot x_4=48 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 18\cdot x_1-2\cdot x_3+7\cdot x_4=50 \\ -x_1+14\cdot x_2-3\cdot x_3+2\cdot x_4=2 \\ 5\cdot x_1+5\cdot x_2+26\cdot x_3+7\cdot x_4=273 \\ -2\cdot x_1-6\cdot x_2+9\cdot x_3+24\cdot x_4=111 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} -26\cdot x_1-7\cdot x_2-8\cdot x_3-2\cdot x_4=-51 \\ 2\cdot x_1-17\cdot x_2-6\cdot x_3-2\cdot x_4=85 \\ -7\cdot x_1-6\cdot x_2-23\cdot x_3-3\cdot x_4=71 \\ 3\cdot x_1-2\cdot x_2-7\cdot x_3-13\cdot x_4=91 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 10\cdot x_1+2\cdot x_3+4\cdot x_4=110 \\ 2\cdot x_1+16\cdot x_2-3\cdot x_3+8\cdot x_4=128 \\ x_1+5\cdot x_2+11\cdot x_3-4\cdot x_4=102 \\ 8\cdot x_1+x_2+6\cdot x_3-17\cdot x_4=81 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 15\cdot x_1+3\cdot x_2-5\cdot x_3-5\cdot x_4=36 \\ 7\cdot x_1-15\cdot x_2-6\cdot x_3+x_4=-112 \\ -4\cdot x_1+7\cdot x_2-19\cdot x_3-6\cdot x_4=19 \\ 3\cdot x_1-5\cdot x_3+8\cdot x_4=-23 \end{cases}$	30	$\begin{cases} 22\cdot x_1-3\cdot x_2-8\cdot x_3+7\cdot x_4=-158 \\ -8\cdot x_1-22\cdot x_2-4\cdot x_3-8\cdot x_4=254 \\ 8\cdot x_1-2\cdot x_2-18\cdot x_3+2\cdot x_4=-108 \\ 7\cdot x_1+2\cdot x_2-9\cdot x_3-24\cdot x_4=-24 \end{cases}$

6.3. Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте прямі методи розв'язування СЛАР. Які вони мають вади й переваги?

2. Розкрийте зміст етапів розв'язку СЛАР методом Гауса.

3. В чому полягають переваги використання LU-розкладання матриць для реалізації алгоритму Гауса на ЕОМ?

4. Охарактеризуйте метод прогону для розв'язування СЛАР.

5. Поясніть використання норм векторів і матриць у чисельному розв'язуванні СЛАР.

6. Охарактеризуйте ітераційні методи розв'язування СЛАР. Які вони мають вади й переваги?

7. Метод простих ітерацій і метод Зейделя для розв'язування СЛАР. Похибка, збіжність, продуктивність.

Лабораторна робота №7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

7.1. Теоретичні відомості

Систему нелінійних рівнянь із *n* невідомими можна записати у вигляді

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

або, більш коротко, у векторній формі

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{7.2}$$

де $\mathbf{x}$ – вектор невідомих величин, $\mathbf{f}$ – вектор-функція

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зрідка для розв'язування такої системи вдається застосувати метод послідовного виключення невідомих і звести розв'язування вихідної системи до розв'язування одного нелінійного рівняння з одним невідомим. Значення інших невідомих величин знаходять відповідною підстановкою в конкретні вирази. Однак у переважній більшості випадків для розв'язування систем нелінійних рівнянь використовуються ітераційні методи.

Надалі припускається, що шукається ізольований розв'язок нелінійної системи.

Як і у випадку одного нелінійного рівняння, локалізація розв'язку може здійснюватися на основі специфічної інформації з конкретного розв'язуваного завдання (наприклад, з фізичних міркувань), і за допомогою методів математичного аналізу. Для розв'язування системи двох рівнянь, досить часто зручним є графічний спосіб, у якому розташування коренів визначається як точки перетину кривих $f_1(x_1,x_2)=0$, $f_2(x_1,x_2)=0$ на площині (x_1,x_2).

<u>Метод Ньютона.</u> Якщо визначено початкове наближення $\mathbf{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$, ітераційний процес знаходження розв'язку системи (7.1) методом Ньютона можна подати у вигляді

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \Delta x_2^{(k)} \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)} \end{cases} \qquad k=0,1,2,... \tag{7.3}$$

де значення приростів $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,…, $\Delta x_n^{(k)}$ визначаються з розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь, всі коефіцієнти якої виражено через відоме попереднє наближення $\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \\ f_2(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_2(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \\ \quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(\mathbf{x}^{(k)}) + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}\Delta x_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}\Delta x_2^{(k)} + ... + \dfrac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\Delta x_n^{(k)} = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

У векторно-матричній формі розрахункові формули мають вигляд

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{\Delta x}^{(k)} \qquad k=0,1,2,... \tag{7.5}$$

де вектор приростів $\mathbf{\Delta x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(k)} \\ \Delta x_2^{(k)} \\ ... \\ \Delta x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ отримується з розв'язку рівняння

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{\Delta x}^{(k)} = \mathbf{0} \tag{7.6}$$

Тут $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ – матриця Якобі перших похідних векторів-функції $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Виражаючи з (7.6) вектор приростів $\Delta\mathbf{x}^{(k)}$ і підставляючи його в (7.5), ітераційний процес знаходження розв'язку можна записати у вигляді

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \qquad k = 0,1,2,\dots \tag{7.7}$$

де $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})$ – матриця, обернена до матриці Якобі.

Для реалізації алгоритму методу Ньютона в більшості випадків ліпше не обчислювати обернену матрицю $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$, а знайти із системи (7.4) значення приростів $\Delta x_1^{(k)}$, $\Delta x_2^{(k)}$,…, $\Delta x_n^{(k)}$ і обчислити нового наближення за (7.3). Щоб розв'язати такі лінійні системи, можна залучати різноманітні методи, як прямі, так і ітераційні (див. лабораторну роботу № 6), з урахуванням розмірності n розв'язуваної задачі та специфіки матриць Якобі $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ (наприклад, симетрії, розрідженості тощо).

Щоб використовувати метод Ньютона, необхідно, щоб функції $f_1(x)$, $f_2(x)$,…, $f_n(x)$ були диференційовні і матриця Якобі ($\det \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)}) \neq 0$) була невиродженою. У разі, якщо початкове наближення обрано в досить малому околі шуканого кореня, ітерації збігаються до точного розв'язку, причому збіжність квадратична.

У практичних обчисленнях як умова припинення обчислень зазвичай використовується критерій [3,5]

$$\left\| x^{(k+1)} - x^k \right\| \leq \varepsilon, \tag{7.8}$$

де ε - задана точність.

Приклад 7.1. Методом Ньютона знайти додатний розв’язок системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = 0.1x_1^2 + x_1 + 0.2x_2^2 - 0.3 = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = 0.1x_1^2 + x_2 - 0.1x_1x_2 - 0.7 = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

с точністю $\varepsilon = 10^{-4}$/.

Розв’язування. Щоб вибрати початкове наближення застосовуємо графічний спосіб. Побудувавши на площині (x_1,x_2) в цікавій для нас області криві $f_1(x_1,x_2) = 0$ і $f_2(x_1,x_2) = 0$ (рис. 7.1), визначаємо, що додатний розв’язок системи рівнянь лежить у квадраті $0 < x_1 < 0.5$, $0.5 < x_2 < 1.0$.

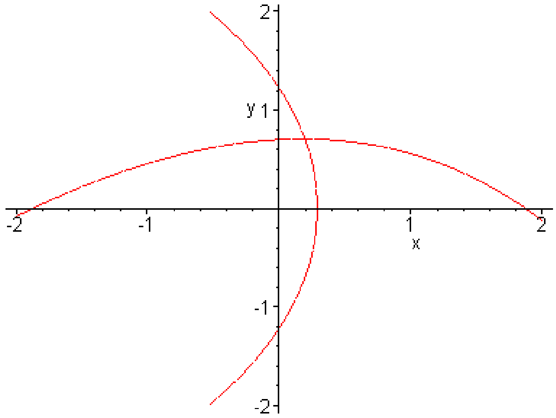

Рисунок 7.1.

За початкове наближення приймемо $x_1^{(0)} = 0.25$, $x_2^{(0)} = 0.75$.

Для системи двох рівнянь розрахункові формули (7.3), (7.4) зручно записати у вигляді вираженому відносно $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \dfrac{\det A_1^{(k)}}{\det J^k} \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \dfrac{\det A_2^{(k)}}{\det J^k} \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\ldots \qquad (7.10)$$

де $J^{(k)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}$,

$$A_1^{(k)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad A_2^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} & f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

У розглянутому прикладі:

$$f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) = 0.1x_1^{(k)2} + x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)2} - 0.3$$

$$f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) = 0.2x_1^{(k)2} + x_2^{(k)} + 0.1x_1^{(k)2}x_2^{(k)2} - 0.7$$

$$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.2x_1^{(k)} + 1, \quad \frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} = 0.4x_2^{(k)}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 0.4x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)}, \quad \frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1} = 1 - 0.1x_1^{(k)}$$

Підставляючи в праві частини співвідношень (7.10) обрані значення $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}$, отримаємо наближення $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$, використовуване, своєю чергою, щоб знайти $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$. Ітерації тривають до виконання умови (7.8), де

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| = \max_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$$

Результати обчислень містяться в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

k	$x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$	$f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$, $f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f_{12}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}$	$\det A_1^{(k)}$	$\det A_2^{(k)}$	$\det J^k$
0	0.25000 0.75000	0.06875 0.04375	1.01250 0.02500	0.30000 0.97500	0.05391	0.04258	0.97969
1	0.19498	-0.00138	1.00760	0.28262	-0.00146	0.00038	0.98588

	0.70654	0.00037	0.00734	0.98050			
2	0.19646 0.70615	0.00005 0.00000	1.00772 0.00797	0.28246 0.98035	0.00005	0.00000	0.98567

3	0.19641 0.70615

$x_1^{(*)} \approx 0.1964, \qquad x_2^{(*)} \approx 0.7062$

Метод простої ітерації. Коли використовується метод простої ітерації, система рівнянь (7.1) приводиться до еквівалентної системи спеціального вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \qquad (7.11)$$

або у векторній формі

$$x = \varphi(x) \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \dots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \qquad (7.12)$$

де функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ – визначені й безперервні в деякому околі шуканого ізольованого розв’язку $x^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_n^{(*)})^T$.

Якщо обрано деяке початкове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$, наступні наближення в методі простої ітерації знаходять за формулами:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (7.13)$$

або у векторній формі

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)}), \; k = 0, 1, 2, \dots \qquad (7.14)$$

Якщо послідовність векторів $\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}$ збігається, то вона збігається до розв'язку $\mathbf{x}^{(*)}=(x_1^{(*)},x_2^{(*)},...,x_n^{(*)})^{\mathrm{T}}$.

Достатня умова збіжності ітераційного процесу (7.13) формулюється в такий спосіб [2]:

Теорема 7.1. Нехай вектор-функція φ(x) неперервна разом зі своєю похідною

$$\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})=\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_2}\dots\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_2}\dots\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \frac{\partial\varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_2}\dots\frac{\partial\varphi_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

в обмеженій опуклій замкнутій області G і

$$\max_{\mathbf{x}\in G}\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\|\le q<1, \tag{7.15}$$

де q – стала. Якщо $x^{(0)}\in G$ і всі послідовні наближення

$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)}),\ k=0,1,2,...$$

також містяться в G, то процес ітерації (7.13) збігається до єдиного розв'язку рівняння

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$$

в області G і справджуються оцінки похибки $(\forall k\in N)$:

$$\|\mathbf{x}^{(*)}-\mathbf{x}^{(k+1)}\|\le\frac{q^{k+1}}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^{(0)}\|,$$

$$\|\mathbf{x}^{(*)}-\mathbf{x}^{(k+1)}\|\le\frac{q}{1-q}\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\| \tag{7.16}$$

Приклад 7.1. (продовження). Знайти додатний розв'язок системи (7.9) методом простої ітерації з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Перетворимо вихідну систему рівнянь (7.9) до вигляду

$$\begin{cases} x_1=0.3-0.1x_1^2-0.2x_2^2\equiv\varphi_1(x_1,x_2) \\ x_2=0.7-0.2x_1^2+0.1x_1x_2\equiv\varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

Перевіримо виконання умови (7.15) в області G: $|x_1 - 0.25| \le 0.25$, $|x_2 - 0.75| \le 0.25$. Для цього знайдемо

$$\max_{\mathbf{x}\in G}\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\| = \max_{\mathbf{x}\in G}\left\{\max_{(i)}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial\varphi_i(x_1,x_2)}{\partial x_j}\right|\right\} \tag{7.17}$$

Через $\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -0.2x_1$, $\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -0.4x_2$

$\dfrac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -0.4x_1 + 0.1x_2$, $\dfrac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0.1x_1$,

в області G маємо

$$\left|\frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_1(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right| = |-0.2x_1| + |-0.4x_2| \le 0.5$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right| = |-0.4x_1 + 0.1x_2| + |0.1x_1| \le 0.2$$

$\max\limits_{\mathbf{x}\in G}\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\| \le 0.5 = q < 1$.

Отже, якщо послідовні наближення $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ не вийдуть за межі області G (що легко виявити в процесі обчислень), то ітераційний процес буде збіжним.

Як початкове наближення приймемо $x_1^{(0)} = 0.25,\ x_2^{(0)} = 0.75$ Наступні наближення визначаємо як

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{cases} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

де $\varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.3 - 0.1x_1^{(k)\,2} - 0.2x_2^{(k)\,2}$,

$\varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = 0.7 - 0.2x_1^{(k)\,2} + 0.1x_1^{(k)}x_2^{(k)}$

Відповідно до (7.16) обчислення завершуються при виконанні умови

$$\frac{q}{1-q}\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\| \le \varepsilon,$$

де $\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|=\max_i\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|$.

Результати обчислень містяться в таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

k	$x_1^{(k)}$ $x_2^{(k)}$	$\varphi_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$ $\varphi_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)})$
0	0.25000 0.75000	0.18125 0.70702
1	0.18125 0.70702	0.19674 0.70617
2	0.19674 0.70617	0.19639 0.70615
3	0.19639 0.70615	0.19641 0.70615
4	0.19641 0.70615	

$x_1^{(*)}\approx 0.1964,\quad x_2^{(*)}\approx 0.7062$.

Зауваження. У разі, коли при аналізі збіжності конкретної ітераційної схеми перевірка умови (7.17) є скрутною, можна визначити норму «мажоруючої матриці» [5,6] M(x) з елементами $m_{ij}(\mathbf{x})=\max_{\mathbf{x}\in G}\left|\dfrac{\partial\varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|$, так що $\max_{\mathbf{x}\in G}\left\|\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})\right\|\le\left\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\right\|$. Якщо $\left\|\mathbf{M}(\mathbf{x})\right\|\le q<1$, то послідовні наближення збігаються до розв’язку $\mathbf{x}^{(*)}$.

7.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Методами простих ітерацій і Ньютона розв'язати систему нелінійних рівнянь (див. свій варіант у табл. 7.3) (якщо існує декілька розв'язків, то знайти той з них, у якому значення невідомих є додатними). Початкове наближення визначити графічно.

2. Написати програму розв'язування поставленої задачі мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.

3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:

- мета роботи;
- теоретичні відомості;
- розв'язок в аналітичній формі;
- лістинги програм розв'язування задачі (використовуйте бібліотеку *matplotlib*);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 7.3 – Варіанти завдань для лабораторної роботи

<table>
<tr><th>№</th><th>Значення параметра a</th><th>Система рівнянь</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="3">$(x_1^2 + a^2)x_2 - a^3 = 0$
$(x_1 - a/2)^2 + (x_2 - a/2)^2 - a^2 = 0$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td rowspan="3">$x_1 - \cos x_2 = 1$
$x_2 - \lg(x_1 + 1) = a$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

8	3	$x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0$ $x_1 - e^{x_2} + a = 0$
9	4	
10	1	$x_1 - \cos x_2 = a$ $x_2 - \sin x_1 = a$
11	2	
12	3	
13	2	$x_1^2 / a^2 + x_2^2 / (a/2)^2 - 1 = 0$ $ax_2 - e^{x_1} - x_1 = 0$
14	3	
15	4	
16	2	$ax_1 - \cos x_2 = 0$ $ax_2 - e^{x_1} = 0$
17	3	
18	4	
19	1	$x_1^2 - 2\lg x_2 - 1 = 0$ $x_1^2 - ax_1x_2 + a = 0$
20	2	
21	3	
22	1	$ax_1^2 - x_1 + x_2^2 - 1 = 0$ $x_2 - \mathrm{tg}\, x_1 = 0$
23	2	
24	3	
25	1	$ax_1^2 - x_2 + x_2^2 - a = 0$ $x_1 - \sqrt{x_2 + a} + 1 = 0$
26	2	
27	3	
28	4	$e^{x_1x_2} + x_1 - a = 0$ $x_1^2 - ax_2 - 1 = 0$
29	5	
30	6	

7.3. Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте підходи до розв'язування систем нелінійних рівнянь.

2. Опишіть метод простої ітерації для розв'язування систем нелінійних рівнянь.

3. Опишіть метод Ньютона для розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Лабораторна робота №8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗДР

8.1. Теоретичні відомості

Прикладом крайової задачі є двоточкова крайова задача для звичайного диференціального рівняння другого порядку.

$$y'' = f(x, y, y') \tag{8.1}$$

з граничними умовами, заданими на кінцях відрізка $[a,b]$.

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y(b) &= y_1 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Необхідно знайти такий розв'язок $y(x)$ на цьому відрізку, що набуває на кінцях відрізка значення y_0, y_1. Якщо функція $f(x, y, y')$ лінійна відносно аргументів y, y', то задача (8.1),(8.2) – лінійна крайова задача, інакше – нелінійна.

Крім граничних умов (8.2), що називають граничними умовами першого роду, використовуються ще умови на похідні від розв'язку на кінцях – граничні умови другого роду:

$$\begin{aligned} y'(a) &= \tilde{y}_0 \\ y'(b) &= \tilde{y}_1 \end{aligned} \tag{8.3}$$

або лінійна комбінація розв'язків і похідних – граничні умови третього роду:

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) &= \hat{y}_0 \\ \delta y(b) + \gamma y'(b) &= \hat{y}_1 \end{aligned} \tag{8.4}$$

де $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ – такі числа, що $|\alpha| + |\beta| \neq 0, |\delta| + |\gamma| \neq 0$.

Можна на різних кінцях відрізка використовувати умови різних типів.

У цій лабораторній роботі розглядаються два наближених методи розв'язування крайової задачі:

- метод стрільби (пристрілювання);
- кінцево-різницевий метод.

8.1.1. Метод стрільби

Суть методу полягає в багаторазовому розв'язуванні задачі Коші для наближеного знаходження розв'язку крайового завдання.

Нехай треба розв'язати крайову задачу (8.1), (8.2) на відрізку $[a,b]$. Замість вихідної задачі формулюється задача Коші з рівнянням (8.1) і з початковими умовами

$$\begin{aligned} y(a) &= y_0 \\ y'(b) &= \eta \end{aligned} \quad /, \qquad (8.5)$$

де η– деяке значення тангенса кута нахилу дотичної до розв'язку в точці $x = a$.

Візьмемо спочатку деяке початкове значення параметра $\eta = \eta_0$, після чого розв'яжемо будь-яким методом задачу Коші (8.1),(8.5). Нехай $y = y_0(x, y_0, \eta_0)$ – розвязок цієї задачі на інтервалі $[a,b]$, тоді порівнюючи значення функції $y_0(b, y_0, \eta_0)$ зі значенням y_1 на правому кінці відрізка можна отримати інформацію для коригування кута нахилу дотичної до розв'язку в лівому кінці відрізка. Розв'язуючи задачу Коші для нового значення $\eta = \eta_1$, отримаємо інший розв'язок зі значенням $y_1(b, y_0, \eta_1)$ на правому кінці. Таким чином, значення розв'язку на правому кінці $y(b, y_0, \eta)$ буде функцією однієї змінної η. Задачу можна сформулювати в такий спосіб: потрібно знайти таке значення змінної η^*, щоб розв'язок $y(b, y_0, \eta^*)$ на правому кінці відрізка збігався зі значенням y_1 з (8.2). Інакше кажучи, розв'язування вихідного завдання еквівалентно знаходженню кореня рівняння

$$\Phi(\eta) = 0 \qquad (8.6)$$

де $\Phi(\eta) = y(b, y_0, \eta) - y_1$.

Рівняння (8.6) є "алгоритмічним" рівнянням, тому що ліва частина його задається за допомогою алгоритму чисельного розв'язування відповідної задачі Коші. Але методи розв'язування рівняння (8.6) аналогічні до методів розв'язування нелінійних рівнянь, викладених у розділі 2. Варто зазначити, що через те, що неможливо обчислити похідну функції $\Phi(\eta)$, то замість методу Ньютона варто використовувати метод січних, у якому похідна від функції замінюється її різницевим аналогом. Цей різницевий аналог легко обчислюється за двома наближеннями, наприклад η_k і η_{k+1}. Наступне значення шуканого кореня визначається за співвідношенням:

$$\eta_{j+2} = \eta_{j+1} - \frac{\eta_{j+1} - \eta_j}{\Phi(\eta_{j+1}) - \Phi(\eta_j)} \Phi(\eta_{j+1}) \tag{8.7}$$

Ітерації по формулі (8.7) виконуються до досягнення заданої точності.

<u>Приклад 8.1.</u> Методом стрільби розв'язати крайову задачу $y'' = e^x + \sin y$ із граничними умовами 1-го роду $y(0) = 1, y(1) = 2$ на відрізку $[0,1]$.

Розв'язування. Заміною змінних $z = y'$ зведемо диференціальне рівняння другого порядку до системи двох диференціальних рівнянь першого порядку.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = e^x + \sin y \end{cases}$$

Задача Коші для системи з початковими умовами на лівому кінці $y(0) = 1, y'(0) = \eta$ будемо розв'язувати методом Рунге-Кутти 4-го порядку точності із кроком $h = 0.1$ поки умова на правому кінці не стане виконуватись $\left|y(1.0,1.0,\eta_k) - 2.0\right| = \left|\Phi(\eta_k)\right| \le \varepsilon$, де $\varepsilon = 0.0001$, і $y(1.0,1.0,\eta_k)$ – значення розв'язку задачі Коші на правому кінці відрізка при $b = 1.0, y(0) = y_0 = 1.0$, η_k – значення першої похідної до розв'язку на лівому кінці відрізка на *k*-ій ітерації.

Приймемо як перші два значення параметра η наступні: η_0=1.0, η_1=0.8. Двічі розв'яжемо задачу Коші із цими параметрами методом Рунге-Кутта із кроком h=0.1, отримаємо два розв'язки $y(1.0,1.0,\eta_0)$= 3.168894836, $y(1.0,1.0,\eta_1)$= 2.97483325. Обчислимо нове наближення параметра η за формулою (8.7)

$$\eta_2 = 0.8 - \frac{0.8 - 1.0}{2.97483325 - 3.168894836}(2.97483325 - 2.0) = -0.204663797;$$

Розв'язуючи задачу Коші з параметром η_2, отримаємо розв'язок $y(1.0{,}1.0,\eta_2)$ = 1.953759449 тощо.

$$\eta_3 = -0.204663797 - \frac{-0.204663797 - 0.8}{1.953759449 - 2.97483325}(1.953759449 - 2.0) = -0.159166393;$$

$y(1.0{,}1.0,\eta_3)$ = 2.001790565; $|\Phi(\eta_3)| = 0.001790565 \geq \varepsilon$;

$$\eta_4 = -0.159166393 - \frac{-0.159166393 - (-0.204663797)}{2.001790565 - 1.953759449}(2.001790565 - 2.0) = -0.160862503$$

$y(1.0{,}1.0,\eta_4)$ = 2.000003115; $|\Phi(\eta_4)| = 0.000003115 \leq \varepsilon$

Обчислення заносимо в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1

j	η_j	$y(1.0{,}1.0,\eta_j)$	$\lvert\Phi(\eta_j)\rvert$
0	+1.000000000	3.168894836	1.168894836
1	+0.800000000	2.974483325	0.974483325
2	-0.204663797	1.953759449	0.046240551
3	-0.159166393	2.001790565	0.001790565
4	-0.160862503	2.000003115	0.000003115

Наближеним розв'язком крайової задачі будемо вважати табличну функцію, отриману в результаті розв'язування задачі Коші з параметром η_4 і наведену в таблиці 8.2.

Таблиця 8.2

x_k	0.0	0.10000	0.20000	0.30000	0.40000	0.50000	0.60000	0.70000	0.80000	0.90000	1.000
y_k	1.0	0.99328	1.00601	1.03942	1.09497	1.17434	1.27944	1.41236	1.57528	1.77045	2.000

8.1.2. Кінцево-різницевий метод розв’язування крайової задачі

Розглянемо двоточкову крайову задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку на відрізку $[a,b]$

$$y''+p(x)y'+q(x)y = f(x) \tag{8.8}$$

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1 \tag{8.9}$$

Введемо різницеву сітку на відрізку $[a,b]$ $\Omega^{(h)} = \{x_k = x_0 + hk\}$, $k = 0,1,....,N$, $h = |b-a|/N$. Розв’язок задачі (8.8),(8.9) будемо шукати у вигляді сіткової функції $y^{(h)} = \{y_k, k = 0,1,....,N\}$, припускаючи, що існує єдиний розв’язок. Введемо різницеву апроксимацію похідних у такий спосіб:

$$y_k^{'} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2);$$

$$y_k^{''} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2); \tag{8.10}$$

Підставляючи апроксимації похідних з (8.10) в (8.8),(8.9) отримаємо систему рівнянь для знаходження y_k:

$$\begin{cases} y_0 = y_a \\ \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p(x_k)\dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q(x_k)y_k = f(x_k), k = 1, N-1 \\ y_N = y_b \end{cases} \tag{8.11}$$

Приводячи подібні та з огляду на те, що коли задаються граничні умови першого роду, два невідомих y_0, y_N вже фактично визначено, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь із трьохдіагональною матрицею коефіцієнтів

$$\begin{cases} (-2 + h^2 q(x_1)y_1 + (1 + \dfrac{p(x_1)h}{2})y_2 = h^2 f(x_1) - (1 - \dfrac{p(x_1)h}{2})y_a \\ (1 - \dfrac{p(x_k)h}{2})y_{k-1} + (-2 + h^2 q(x_k))y_k + (1 + \dfrac{p(x_k)h}{2})y_{k+1} = h^2 f(x_k) \qquad ,k=2,...,N-2 \\ (1 - \dfrac{p(x_{N-1})h}{2})y_{N-1} + (-2 + h^2 q(x_{N-1}))y_{N-1} = h^2 f(x_{N-1}) - (1 + \dfrac{p(x_{N-1})h}{2})y_b \end{cases} \tag{8.12}$$

Для системи (8.12) при досить малих кроках сітки h і $q(x_k) < 0$ виконуються умови переваги діагональних елементів

$$\left|-2+h^2q(x_k)\right| > \left|1-\frac{p(x_k)h}{2}\right| + \left|1+\frac{p(x_k)h}{2}\right|, \qquad (8.13)$$

що гарантує стійкість обчислень та коректність застосування методу прогону для розв'язування цієї системи.

У разі, коли використовуються граничні умови другого та третього роду, апроксимація похідних проводиться за допомогою односторонніх різниць першого та другого порядків.

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h);$$

$$y_N' = \frac{y_N - y_{N-1}}{h} + O(h) \qquad (8.14)$$

$$y_0' = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + O(h^2);$$

$$y_N' = \frac{y_{N-2} - 4y_{N-1} + 3y_N}{2h} + O(h^2); \qquad (8.15)$$

У разі, коли використовуються формули (8.14), лінійна алгебраїчна система апроксимує диференціальну задачу в цілому тільки першим порядком (через апроксимацію в граничних точках), однак зберігається трьохдіагональна структура матриці коефіцієнтів. У разі, коли використовуються формули (8.15), другий порядок апроксимації зберігається скрізь, але матриця лінійної системи не трьохдіагональна.

Приклад 8.2. Розв'язати крайову задачу $\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) + 2y(1) = 0 \end{cases}$ із кроком $h = 0.2.$

Розв'язування. Тут $p(x) = x$, $q(x) = 1$, $f(x) = 0$, $N = 5$, $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, \quad x_4 = 0.8, x_5 = 1.0$.

У всіх внутрішніх вузлах відрізка $[0,1]$ після заміни похідних їхніми різницевими аналогами отримаємо

$$(1 - 0.1x_k)y_{k-1} + (-2.04)y_k + (1 + 0.1x_k)y_{k+1} = 0, \quad k = 1,\dots,4$$

На лівій границі $y_0 = 1$, на правій границі апроксимуємо похідну односторонньою різницею 1-го порядку:

$$\frac{y_5 - y_4}{0.2} + 2y_5 = 0.$$

Групуючи доданки та приводячи подібні члени і підставляючи значення x_k і з врахуванням $y_0 = 1$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} -2.04y_1 + 1.02y_2 = -0.98 \\ 0.96y_1 - 2.04y_2 + 1.04y_3 = 0 \\ 0.94y_2 - 2.04y_3 + 1.06y_4 = 0 \\ 0.92y_3 - 2.04y_4 + 1.08y_5 = 0 \\ +y_4 - 1.4y_5 = 0 \end{cases}$$

В даній трьохдиагональній системі виконана умова переваги діагональних елементів і можна використовувати метод прогону (див. лабораторну роботу № 6).

У результаті розв'язування системи методом прогону отримаємо наступні значення:

$y_5 = 0.2233205,\ y_4 = 0.31265,\ y_3 = 0.43111,\ y_2 = 0.58303,\ y_1 = 0.77191.$

Розв'язком крайової задачі є таблична функція

Таблиця 8.3

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_k	1.0	0.77191	0.58303	0.43111	0.31265	0.22332

8.2. Завдання на лабораторну роботу

1. Розв'язати крайову задачу (див. свій варіант у табл. 8.4) для ЗДР 2-го порядку на вказаному відрізку із заданим кроком *h =0.2* кінцево-різницевим методом.

2. Написати програму розв'язування задачі мовою *Python* всіма розглянутими вище методами.

3. Підготувати звіт про виконання лабораторної роботи, що містить наступні обов'язкові елементи:

- мета роботи;
- теоретичні відомості;
- розв’язок задачі в аналітичній формі;
- лістинги програм розв’язування задачі (використовуйте бібліотеку matplotlib);
- результати виконання програм;
- висновки.

Таблиця 8.4 – Варіанти завдань для лабораторної роботи

№	Крайова задача	№	Крайова задача
1.	$y''-x^3y'-y-x^2=0$ $y'(0)=0$ $2y(1)+y'(1)=1$	16.	$y''+e^xy'-1.1y=1$ $y(1.1)-y'(1.1)=1$ $0.1y(2.1)+y'(2.1)=2$
2.	$y''-xy'-xy=1$ $2y(0.1)-y'(0.1)=1$ $y'(1.1)=0$	17.	$y''-2^xy'-x^2y+4=0$ $y(0.5)=1$ $y(1.5)+y'(1.5)=0$
3.	$y''-3^xy'-2xy+1=0$ $y'(0)=0$ $1.3y(1)+y'(1)=1$	18.	$y''+0.25xy'-\frac{2}{x}y+0.5x=0.5$ $1.5y(1.3)-y'(1.3)=0.5$ $2y(2.3)+y'(2.3)=0.7$
4.	$y''-e^xy'-y=2$ $y'(0.1)=1$ $y(1.1)+y'(1.1)=0$	19.	$y''-x^2y'-xy=-e^x$ $y'(0.2)=1$ $y(1.2)+y'(1.2)=0$
5.	$y''-xy'-y=\sin x$ $y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=1$	20.	$y''-e^xy'-xy=x^2$ $y'(0.3)=1$ $y(1.3)+y'(1.3)=0$
6.	$y''-\sin xy'-y+x^2=0$ $y'(0.7)=0$ $y(1.7)=1$	21.	$y''-e^xy'-x^3y=-2$ $-y(0)+y'(0)=1$ $y(1)+y'(1)=0$
7.	$y''-0.25x^2y'-3y=2x^2$ $y(1)-2y'(1)=0.5$ $y(2)=1$	22.	$y''+\frac{y'}{x}-1.4y=2x$ $y(0.5)-0.3y'(0.5)=0.6$ $y'(1.5)=1.8$
8.	$y''-(x^2+x)y'-y=\tan x$	23.	$y''+2xy'-y=1$

	$y(0)=1$ $y(1)+y'(1)=1$		$-1.5y(0.5)+y'(0.5)=1$ $y'(1.5)=1.5$
9.	$y''-xy'-2xy=2$ $y'(1.1)=1.5$ $y(2.1)+0.8y'(2.1)=1$	24.	$y''-y'-\frac{y}{x}+x=0.5$ $y'(0.5)=1.1$ $y(1.5)=2.4$
10.	$y''+\frac{1}{2x}y'-y=\frac{2}{x^2}$ $y(1.6)=1.2$ $2y(2.6)+y'(2.6)=0$	25.	$y''+2xy'-3y=1.5$ $y'(2.5)=0.2$ $0.4y(3.5)+0.2y'(3.5)=1.2$
11.	$y''-0.6y'-xy=1.2$ $2y(1.9)-1.1y'(1.9)=0.1$ $y(2.9)=1.99$	26.	$y''-0.5y'-0.5(x+1)y+x=0$ $y(0)-y'(0)=0$ $y(1)+y'(1)=0.5$
12.	$xy''+y'-1.5xy+x^2=0$ $y'(0.2)=0$ $1.6y(1.2)+1.4y'(1.2)=2.1$	27.	$y''+xy'-x^2y+\cos x=0$ $y(1)=1$ $y'(2)=0$
13.	$y''-xy'-3y+x+3=0$ $2y(0.4)-3y'(0.4)=2$ $y'(1.4)=0.5$	28.	$y''+2.5y'-xy-1=0$ $2y(0.7)-y'(0.7)=1$ $y(1.7)+2y'(1.7)=0$
14.	$y''+1.7y'-xy-x^2=1$ $y'(0.8)=1$ $y(1.8)+0.1y'(1.8)=1.1$	29.	$y''-0.5xy'-1.5y-2x=2$ $0.28y(1)-y'(1)=1.6$ $y(2)=2.3$
15.	$xy''+xy'-xy+x=1$ $y'(0.1)=1$ $3.1y(1.1)+2.6y'(1.1)=1$	30.	$y''+2xy'-1.5y=x+2$ $0.4y(0.2)-y'(0.2)=1$ $y(1.2)+2y'(1.2)=1$

8.3. Контрольні запитання

1. Постановка двоточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку.

2. Опишіть метод стрільби для розв'язування крайової задачі.

3. Опишіть кінцево-різницевий метод розв'язування крайової задачі.

Додаток А. Список використаних джерел

1. Вступ до мови програмування Python. Навчальний посібник для студ. Напрямку "Системна інженерія" [Електронний ресурс] /НТУУ «КПІ»; уклад.: Я.Ю. Дорогий, Є.В.Глушко, А.Ю.Дорошенко. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 319 с.
2. Чисельні методи на Python. Навчальний посібник для студентів напрямку "Системна інженерія" [Електронний ресурс] /НТУУ «КПІ»; уклад.: Я.Ю. Дорогий, Є.В.Глушко, А.Ю.Дорошенко. – К.: НТУУ «КПІ», 2010. – 322 с.
3. Язык программирования Python. Справочник. Пер. с англ./Девид М. Бизли – К.: Издательство «ДиаСофт», 2000. – 336 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 632 с.: ил.
5. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с., ил.
6. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «Раско», 1991. – 272 с.: ил.
7. http://python.org.