

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Забуга Артем Геннадійович

УДК 531.43

ДИСЕРТАЦІЯ

АНАЛІТИЧНЕ ТА ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛОВАННЯ
ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ
З УДАРНО-ФРИКЦІЙНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

01.02.01 – теоретична механіка,
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ А. Г. Забуга

Науковий керівник:

Плахтієнко Микола Павлович, доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник

Ларін Володимир Борисович, доктор фізико-математичних наук, професор

Київ-2017

АНОТАЦІЯ

Забуга А. Г. Аналітичне та чисельне моделювання динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка» (113 – Прикладна математика). – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією, а також аналітичним та чисельним методам розв'язку відповідних рівнянь динаміки.

Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі застосування моделей Кейна-Левінсона-Уіттекера, Payса і Стронге дає однакові результати.

Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтується на методі Рунге-Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами.

Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель штампувального пресу, а також досліджено динаміку матеріальних систем з кулоновим тертям, які являють собою механіко-математичні моделі стану холодної прокатки труб ХПТ-75 та рольганга прокатного стана.

Ключові слова: кулонове тертя, механічний удар, рівняння динаміки, змінна структура, механіко-математична модель, коефіцієнт відновлення,

модель Кейна-Левінсона-Уіттекера, модель Рауса, модель Стронге, метод Рунге-Кутта.

Zabuga A. G. Analytical and Numerical Modelling of Dynamics of Material Systems with Frictional Impact Interaction. – Manuscript.

Thesis for Candidate Degree in Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in speciality 01.02.01 «Theoretical mechanics» (113 – Applied mathematics). – S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is dedicated to investigation of mechanical-mathematical models of systems with frictional impact interaction as well as analytical and numerical methods of solution of appropriate dynamics equations.

It is proved that in case of perfectly inelastic impact of rough rigid bodies in planar motion results of modeling are the same for Kane-Levinson-Whittaker's, Routh's, and Stronge's models.

It was suggested based on Runge-Kutta method computational scheme that allows getting mechanically correct results by numerical analysis of dynamics of systems with Coulomb friction and mechanical impacts.

Developed and solved by using obtained methods dynamics equations of two-mass vibro-impact system with Coulomb friction that is mechanical-mathematical model of punching-press. Investigated dynamics of material systems with Coulomb friction that are mechanical-mathematical models of cold rolling mill and rolling mill's roller.

Keywords: Coulomb friction, mechanical impact, dynamics equation, variable structure, mechanical-mathematical model, coefficient of restitution, Kane-Levinson-Whittaker's model, Routh's model, Stronge's model, Runge-Kutta method.

Список публікацій здобувача:

1. Антонюк Е. Я., Забуга А. Г. О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределенными кинематическими цепями // Обработка материалов давлением. 2012. Т. 32, № 3. С. 235–241.
2. Забуга А. Г., Антонюк Е. Я. Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием // Вісник Одеського національного університету. Серія: Математика і механіка. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–121.
3. Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В., Забуга А. Г. О динамическом взаимодействии горячего сляба с рольгангом прокатного стана // Обработка материалов давлением. 2013. Т. 37, № 4. С. 57–62.
4. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2014. Vol. 115, no 1. pp. 173–182.
5. Плахтиенко М. П., Забуга А. Г. Нелінійна модель фрикційно-ударної взаємодії твердого тіла з твердою шорсткою площиною // Дослідження в математиці і механіці. 2015. Т. 20, № 2 (26). С. 26–42.
6. Плахтиенко Н. П., Забуга А. Г. Фрикционное взаимодействие упруго-связанных твердых тел с шероховатой плоскостью // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 2. С. 111–125.
7. Забуга А. Г. Моделирование абсолютно неупругого удара шероховатых недеформируемых тел при плоскопараллельном движении // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 5. С. 137–144.
8. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young

Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, 2013. pp. 215–225.

9. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Коливання системи двох пружно-зв'язаних твердих тіл при ударно-фрикційній взаємодії // Тези XIII Міжнародної науково-технічної конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, 2014. С. 9.

10. Забуга А. Г. Моделі удару шорстких недеформівних тіл при плоскопаралельному русі // Матеріали XII Міжнародної конференції "Розвиток науки в ХХІ столітті". Харків, 2016. С. 39–44.

11. Забуга А. Г., Кільчинський О. О. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку диференціальних рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям // Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, 2016. С. 130–132.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	2
ЗМІСТ	6
ВСТУП	8
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	15
1.1. Рівняння динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям	15
1.2. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям.....	22
1.3. Наближені методи розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям.....	27
1.4. Основна задача теорії механічного удару в системах з кулоновим тертям.....	30
1.5. Розвиток методів побудови і розв'язку рівнянь динаміки механіко-математичних моделей машин, що застосовуються в металургії.....	34
1.6. Висновки до первого розділу.....	36
РОЗДІЛ 2 АБСОЛЮТНО НЕПРУЖНИЙ УДАР ШОРСТКИХ НЕДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ.....	37
2.1. Постановка основної задачі абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі.....	37
2.2. Дослідження абсолютно непружного удару при плоскопаралельному русі за допомогою моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера.....	41
2.3. Дослідження абсолютно непружного удару при плоскопаралельному русі за допомогою моделей Рауса і Стронге.....	43
2.4. Висновки до другого розділу.....	46
РОЗДІЛ 3 ДИНАМІКА ДВОМАСОВОЇ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ З КУЛОНОВИМ ТЕРТЯМ.....	47
3.1. Постановка задачі про рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям.....	47
3.2. Рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям.....	49
3.3. Рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при відсутності контакту з площиною.....	52
3.4. Рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при наявності контакту з площиною.....	57
3.5. Аналіз динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при конкретних значеннях параметрів і початкових умовах.....	63
3.6. Висновки до третього розділу.....	71
РОЗДІЛ 4 РОЗРАХУНКОВА СХЕМА ДЛЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ З КУЛОНОВИМ ТЕРТЯМ.....	72
4.1. Проблема побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям.....	72
4.2. Рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям і відповідний аналітичний розв'язок.....	73

4.3. Чисельний аналіз рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям.....	80
4.4. Розрахункова схема на основі формул Рунге-Кутта для систем з кулоновим тертям.....	85
4.5. Висновки до четвертого розділу.....	87
РОЗДІЛ 5 ДИНАМІКА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТАНУ ХПТ-75	89
5.1. Постановка задачі про рух механіко-математичної моделі стану ХПТ-75.....	89
5.2. Рівняння динаміки механіко-математичної моделі стану ХПТ-75.....	92
5.3. Чисельний аналіз рівнянь динаміки механіко-математичної моделі стану ХПТ-75.....	97
5.4. Висновки до п'ятого розділу.....	100
РОЗДІЛ 6 ДИНАМІКА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОЛЬГАНГА...	101
6.1. Постановка задачі про рух механіко-математичної моделі рольганга.....	101
6.2. Рівняння динаміки механіко-математичної моделі рольганга.....	103
6.2.1. Рівняння динаміки у неявному вигляді та механічний удар у механіко-математичній моделі рольганга.....	103
6.2.2. Структура I рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга та умови змін структури I-II i I-III.....	106
6.2.3. Структура II рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга.....	107
6.2.3. Структура III рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга та зміни структури I-II, I-III, II-I i III-I	108
6.2.4. Структура IV рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга та умови змін структури I-IV, I-V, II-IV i III-V	111
6.2.5. Структура V рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга та зміни структури I-IV, I-V, IV-I i V-I	112
6.3. Чисельний аналіз рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга.....	115
6.4. Висновки до шостого розділу.....	125
ЗАКЛЮЧНІ ВИСНОВКИ.....	127
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	129
ДОДАТОК: СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ	142

ВСТУП

Актуальність теми. Механіко-математичні моделі відіграють важливу роль при розв'язанні різних прикладних задач, серед яких можна відзначити дослідження динаміки машин, що застосовуються у металургії. Такі моделі часто можуть бути представлені у вигляді матеріальних систем, що складаються з матеріальних точок, абсолютно твердих тіл та пружних безінерційних елементів. Динаміка таких матеріальних систем описується за допомогою звичайних диференціальних рівнянь, які на сьогодні є досить добре розвиненими. Саме тому дані моделі використовуються у роботах багатьох відомих авторів, серед яких можна згадати, наприклад, І. І. Артоболевського, І. І. Блехмана, С. П. Тимошенка та багатьох інших.

У механіко-математичних моделях, які існують на сьогоднішній день, часто не враховуються явища, зумовлені кулоновим тертям та механічними ударами. Це пов'язано з тим, що методи моделювання механічного удару є недостатньо розвиненими, а відповідні рівняння динаміки мають розривну праву частину і змінну структуру.

Саме тому дисертаційна робота присвячена дослідженню механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією, а також аналітичним та чисельним методам розв'язку відповідних рівнянь динаміки. Ці проблеми є актуальними для сучасної теоретичної механіки, оскільки їх вирішення дозволить більш ефективно розв'язувати задачі прикладного характеру, які можуть бути зведені до аналізу динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям і механічними ударами. Див., наприклад, статтю «*Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction*» (автори Posa M., Tobenkin M., Tedrake R.) [1]

Методи аналізу динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям досліджувалися в роботах В. В. Андронова, Є. Я. Антонюка, В. Ф. Журавльова, С. М. Кожевнікова, І. В. Крагельського, П. Пенлеве, М. П. Плахтієнка, D. E. Stewart та інших.

Моделі механічного удару розвивалися такими вченими, як В. Гольдсміт, О. П. Іванов, М. О. Кільчевський, Я. Г. Пановко, Е. Дж. Раус, Е. Уіттекер, G. Gilardi, T. R. Kane, D. A. Levinson, M. T. Mason, W. J. Stronge, Yu Wang та інші.

Методи побудови, аналітичного розв'язку і чисельного аналізу диференціальних рівнянь динаміки матеріальних систем з ударного-фрикційною взаємодією розвивалися в роботах М. М. Боголюбова, О. Ф. Філіппова, Е. Hairer та інших.

Мета і задачі дослідження. Основною метою дослідження є подальший розвиток методів побудови і розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією та їх застосування до аналізу деяких механіко-математичних моделей штампувальних пресів, прокатних станів та рольгангів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання. Перше завдання полягає у тому, щоб розглянути основні моделі ударної взаємодії недеформівних тіл з кулоновим тертям, порівняти їх та вибрати таку з них, яка є найбільш коректною у випадку абсолютно непружного удару.

Ще одним завданням є розробка розрахункової схеми, яка є ефективною для чисельного аналізу рівнянь динаміки механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією.

Наступне завдання полягає у побудові і досліджені за допомогою розроблених методів деяких механіко-математичних моделей штампувальних пресів, прокатних станів та рольгангів.

Об'єктом дослідження є складні багатовимірні матеріальні системи з ударно-фрикційною взаємодією.

Предметом дослідження є динаміка складних багатовимірних матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією.

Методи дослідження. Аналіз руху здійснюється за допомогою основного рівняння динаміки. Виключення невідомих складових сил реакції

здійснюється за допомогою принципу Даламбера. Побудова аналітичного розв'язку рівнянь динаміки, що мають змінну структуру, проводилася за допомогою методу “припасування”. Розрахункова схема для чисельного аналізу рівнянь динаміки систем з ударно-фрикційною взаємодією розроблена на основі методу Рунге-Кутта.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що:

1) Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі, модель Кейна-Левінсона-Уіттекера, що ґрунтуються на застосуванні кінематичного коефіцієнта відновлення, модель Рауса, що ґрунтуються на застосуванні кінетичного коефіцієнта відновлення, і модель Стронге, що ґрунтуються на застосуванні енергетичного коефіцієнта відновлення, дають однакові результати.

2) Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель штампувального пресу. Встановлено інтервал часу між двома послідовними механічними ударами в такій системі, необхідний для завершення перехідного процесу, а також знайдено умови, при яких шлях, пройдений центром мас вздовж горизонтальної осі, менший.

3) Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтуються на методі Рунге-Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами. Встановлена гранична похибка розрахунків за допомогою вказаної розрахункової схеми, а також показана її ефективність на конкретному прикладі рівняння динаміки системи з кулоновим тертям, що має точний аналітичний розв'язок.

4) Досліджено динаміку матеріальної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель звичайного стану холодної прокатки труб ХПТ-75, стану, модифікованого механізмом, який зрівноважує

сили, що діють з боку шатунів, стану, в якому кривошипи можуть вільно повертатися один відносно одного, а також стану ХПТ-75, що має обидві зазначені модифікації. Шляхом порівняння розв'язків рівнянь динаміки вказаних систем показано, що динамічні навантаження є найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві зазначені модифікації.

5) За допомогою результатів, отриманих при дослідженні моделей механічного удару і запропонованої розрахункової схеми, побудовано і проведено чисельний аналіз рівняння динаміки трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є механіко-математичною моделлю рольганга прокатного стана; розв'язано задачу оптимізації вхідних параметрів машини даного типу.

Теоретичне і практичне значення отриманих результатів. Теоретична цінність дисертаційної роботи полягає у застосуванні моделей Кейна-Левінсона-Уіттекера, Рауса і Стронге для аналізу абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі та доведенні їхньої еквівалентності для даного випадку, а також у розробці розрахункової схеми, ефективної для чисельного інтегрування рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям.

Практична цінність дисертації полягає у тому, що запропоновані методи можуть бути застосовані до розв'язання задач динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією, які можуть використовуватися при моделюванні різних перехідних процесів та динамічного навантаження у важких машинах. Можливість практичного застосування проілюстрована на прикладі аналізу руху двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка є механіко-математичною моделлю штампувального пресу, і трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є моделлю рольганга прокатного стану.

Особистий внесок здобувача. В надрукованих у співавторстві працях [2], де описані результати, що містяться у першому розділі, [3–5], де описані результати, що містяться у третьому розділі, роботі [6], де описані

результати, що містяться у п'ятому розділі, та роботах [7] і [8], де описані результати, що містяться у шостому розділі, Є. Я. Антонюку і М. П. Плахтіенку належить постановка задачі, І. А. Бобуху, Є. В. Соколову і О. О. Кільчинському – систематизація та обговорення результатів. Особисто дисертантом складено і розв'язано рівняння динаміки систем, що досліджуються в роботі.

Особисто дисертантом виконані роботи [9] і [10], в яких описані результати, що містяться у другому розділі, і роботи [11] і [12], в яких описані результати, що містяться у четвертому розділі.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- III International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, Ukraine, November 25 – 29, 2013;
- XIII Міжнародній науково-технічній конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, Україна, 14-16 жовтня 2014;
- XII Міжнародній конференції "Розвиток науки в ХХІ столітті". Харків, Україна, 16 квітня 2016.
- Міжнародній науковій конференції, присвяченій 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, Україна, 28-30 жовтня 2016.

У повному обсязі дисертація доповідалася і була підтримана на семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України А. А. Мартинюка, семінарі секції за напрямком «Динаміка і стійкість руху механічних систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В. Д. Кубенка.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць, 7 з яких – у виданнях за фахом, затверджених МОН України

(2 з яких входять до міжнародної наукометричної бази Scopus), 3 матеріалів міжнародних конференцій, і 1 – тези доповідей на міжнародній конференції.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, результати яких наведено в роботі, проводилися у відповідності з планами науково-дослідних робіт Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, а також договором про науково-технічну співпрацю між Інститутом механіки ім. С.П. Тимошенка Національної академії наук України (м. Київ) та Донбаською державною машинобудівною академією (м. Краматорськ) (№ Тс-10-2011) та увійшли до звітів: “Дослідження динаміки споруди з опорно-кульзовим механізмом сейсмоамортизації” (№ держреєстрації 0111U006383); “Побудова механіко-математичної моделі та дослідження взаємодії системи твердих тіл при косому ударі з урахуванням тертя ковзання” (№ держреєстрації 0114U002169).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із анотації, змісту, вступу, шести розділів, висновків, переліку використаних джерел із 132 найменувань та одного додатку. Обсяг дисертаційної роботи становить 144 сторінки друкованого тексту. У роботі міститься 23 рисунка.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, провідному науковому співробітнику Плахтієнку Миколі Павловичу і кандидату технічних наук, старшому науковому співробітнику Антонюку Євгену Яковичу за наукові консультації та нестандартні ідеї щодо розв'язку багатьох задач, які розглядалися у дисертаційному дослідженні; науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Ларіну Володимиру Борисовичу за допомогу у вирішенні різних питань організаційного характеру, які виникли в процесі підготовки дисертації до захисту; доктору фізико-математичних наук, провідному науковому співробітнику Нікітіній Неллі Володимирівні за консультування щодо підготовки остаточного варіанту дисертації та попереднього захисту;

батькам, сестрі та іншим родичам за моральну та матеріальну підтримку, без якої виконання дисертаційного дослідження було б неможливим.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Рівняння динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям

О. Г. Столетов у своїй доповіді «Леонардо да Вінчі как естествоиспытатель», текст якої можна знайти у книзі «Избранные сочинения» (автор Столетов А. Г.) [13] відзначав, що вперше явище кулонового (сухого) тертя досліджувалося іще Леонардо да Вінчі (1452–1519), який значно раніше за Амонтона (1663–1705) і Кулона (1736–1806), на честь яких названо основний закон сухого тертя – закон Амонтона–Кулона, дійшов висновку про те, що сила тертя однієї поверхні об іншу пропорційна силі, з якою ці поверхні притиснені одна до одної. Лише приблизно через 200 років після Леонардо да Вінчі явище кулонового тертя вивчали Амонтон, Паран, Камюс, та інші [14]. Іще через приблизно 100 років Кулон, спираючись на результати Амонтона та інших, поставив серію експериментів, в результаті яких остаточно сформулював основний закон тертя у своїй роботі «Théorie des Machines Simples» (автор Coulomb C. A.) [15].

У прямокутній декартовій системі координат закон Амонтона–Кулона може бути записаний у вигляді формули

$$F_C = \begin{cases} -\mu|N|\operatorname{sign}v_T & \text{при } v_T \neq 0, \\ -\mu|N|\operatorname{sign}(\sum F_A) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| > \mu|N|, \\ -\sum F_A & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leq \mu|N|, \end{cases} \quad (1.1)$$

де F_C – сила кулонового тертя; v_T – швидкість ковзання; μ – коефіцієнт тертя, який вважається незалежним від швидкості ковзання v_T і площині контакту тіл, між якими відбувається тертя, а визначається лише властивостями матеріалів цих тіл; N – нормальні складова сили реакції і $\sum F_A$ – сума дотичних до поверхонь, між якими відбувається тертя, складових активних сил та сил інерції. Необхідно також відзначити, що сила

кулонового тертя F_C направлена при $v_T \neq 0$ протилежно до v_T , а при $v_T = 0$ – протилежно до $\sum F_A$. Незважаючи на те, що емпірично встановлений закон Амонтона–Кулона (1.1) є наближенням і, строго кажучи, виконується не завжди [14, 16–18], він має практичне значення і може бути застосований у багатьох важливих випадках [19].

Наявність сили кулонового тертя (1.1) зумовлює неідеальність геометричних в'язей, якими стиснено матеріальну систему [20]. Це ускладнює побудову рівнянь динаміки, оскільки для врахування неідеальності в'язей необхідно визначати сили реакції, які, як правило, наперед не відомі. Для визначення сил реакції може бути зручно застосовувати рівняння Лагранжа першого роду, де вказані сили, які виражені через множники Лагранжа і частинні похідні від рівнянь геометричних в'язей, входять у праву частину. Зрозуміло, що у випадку систем з кулоновим тертям у правих частинах рівнянь Лагранжа першого роду мають бути також враховані й сили тертя за допомогою формул виду (1.1). У відомому підручнику «Курс теоретической механики. Том 1» (автор Кильчевский Н. А.) [21, с. 445] можна знайти рівняння Лагранжа першого роду для руху матеріальної точки вздовж поверхні з кулоновим тертям у випадку, коли швидкість ковзання відмінна від нуля.

Також часто виявляється зручним метод кінетостатики, який дозволяє за допомогою рівнянь динаміки і рівнянь в'язей, якими стиснено систему, визначити, спираючись на принцип Даламбера, невідомі реакції [22, 23].

У випадку застосування рівнянь Лагранжа другого роду неідеальність геометричних в'язей може бути врахована шляхом додавання у праві частини рівнянь динаміки сил кулонового тертя. У випадку, коли сили реакції відомі, це легко зробити, спираючись на закон тертя у вигляді (1.1). Якщо сили реакції не відомі, то можна спочатку побудувати рівняння Лагранжа першого роду, знайти невідомі множники Лагранжа, а потім перейти до узагальнених координат і скласти рівняння Лагранжа другого роду. У такий спосіб

П. Пенлеве будував рівняння Лагранжа другого роду для руху матеріальної точки вздовж заданої шорсткої (тобто, такої, що при контакті із нею виникають сили кулонового тертя) кривої та заданої шорсткої поверхні. Даний спосіб описаний у книзі «Лекции о трении» (автор Пэнлеве П.) [24].

Для врахування сил кулонового тертя у випадку застосування рівнянь Лагранжа другого роду можна знаходити невідомі реакції також шляхом введення надлишкових узагальнених координат, зміна яких у процесі руху заборонена геометричними в'язями, якими стиснено систему. Такий спосіб знаходження реакцій описаний, наприклад, у відомому підручнику «Аналитическая механика» (автор Лурье А. И.) [25, с. 327–331] і в роботі [26]. Проілюструємо застосування вказаного способу на наступному простому прикладі системи з кулоновим тертям. Дано система являє собою маятник, зображений на Рис. 1.1.

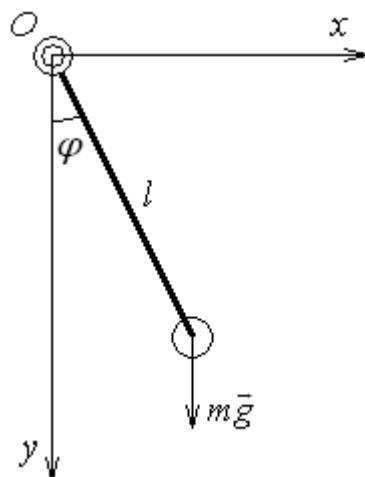


Рис. 1.1. Схематичне зображення маятника з кулоновим тертям

У маятнику, зображеному на Рис. 1.1., маса m має розміри, достатньо малі для того, щоб її можна було вважати матеріальною точкою. Ця маса з'єднана за допомогою абсолютно твердого безінерціального стрижня довжини l з циліндричним шарніром, вісь обертання якого перпендикулярна до площини рисунка і проходить через початок відліку O прямокутної декартової системи координат Oxy . Кут, який утворює стрижень l з вертикальним напрямком Oy , позначатимемо φ . Під час коливань маятника

у циліндричному шарнірі виникає момент сил кулонового тертя M_C , який при $\dot{\varphi} \neq 0$ описується за допомогою формули

$$M_C = -\mu_m |N| \text{sign} \dot{\varphi}, \quad (1.2)$$

де μ_m – зведений коефіцієнт тертя, який вимірюється в метрах, N – нормальнна складова сили реакції, яка, в даному випадку, являє собою силу натягу стрижня, що діє на шарнір. Задача полягає у тому, щоб побудувати рівняння динаміки вказаної системи при $\dot{\varphi} \neq 0$. Тут і далі в роботі крапкою над символом позначається перша похідна по часу. Двома крапками над символом позначатимемо другу похідну по часу, а символом g – прискорення вільного падіння.

Неважко переконатися, що у разі побудови рівнянь Лагранжа другого роду з однією узагальненою координатою φ і без врахування моменту сил кулонового тертя M_C отримаємо звичайне рівняння коливань маятника. Для врахування моменту сил кулонового тертя M_C за допомогою формули (1.2) необхідно знайти нормальну складову реакції N . Щоб це зробити, виберемо в якості узагальненої координати кут φ , а в якості надлишкової узагальненої координати – абсолютне видовження стрижня Δ . Враховуючи те, що стрижень вважається абсолютно твердим, можемо при такому виборі надлишкової узагальненої координати записати рівняння геометричної в'язі у вигляді

$$\Delta = \dot{\Delta} = \ddot{\Delta} = 0. \quad (1.3)$$

Виразимо декартові координати x і y маси m через узагальнені координати φ і Δ . Маємо

$$x = (l + \Delta) \sin \varphi, \quad y = (l + \Delta) \cos \varphi. \quad (1.4)$$

Співвідношення (1.4) дають змогу знайти кінетичну і потенціальну енергії, які ми позначимо, як T і P відповідно, в узагальнених координатах у вигляді формул

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{\Delta}^2 + \dot{\varphi}^2(l + \Delta)^2), \\ \Pi &= mg(l - y) = mgl(1 - \cos\varphi) - mg\Delta\cos\varphi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При виведенні формул (1.5) було також прийнято, що $\Pi = 0$ при $\varphi = 0$, тобто, коли маса m знаходиться у крайньому нижньому положенні. Побудуємо рівняння Лагранжа другого роду в узагальнених координатах φ і Δ , враховуючи нормальну складову реакції N і момент сил кулонового тертя M_C . Після знаходження необхідних похідних від T і Π можемо записати рівняння Лагранжа другого роду у вигляді

$$\begin{aligned} m(l + \Delta)^2\ddot{\varphi} + 2m(l + \Delta)\dot{\varphi}\dot{\Delta} &= -mg(l + \Delta)\sin\varphi + M_C, \\ m\ddot{\Delta} - m\dot{\varphi}^2(l + \Delta) &= mg\cos\varphi - N. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Знак мінус перед N у рівняннях (1.6) з'явився внаслідок того, що ця складова реакції була визначена вище, як сила, що діє з боку стрижня на шарнір, а в (1.6) – це сила, що діє з боку стрижня на масу m . Враховуючи рівняння геометричної в'язі (1.3), з другого рівняння (1.6) отримаємо значення нормальної складової реакції

$$N = m(\dot{\varphi}^2l + g\cos\varphi). \quad (1.7)$$

Підставляючи співвідношення (1.2), (1.3) і (1.7) у перше рівняння (1.6), отримаємо рівняння динаміки маятника з кулоновим тертям при $\dot{\varphi} \neq 0$. Маємо

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - \mu_m \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{l} + \frac{g}{l^2}\cos\varphi \right) \operatorname{sign}\dot{\varphi}. \quad (1.8)$$

Неважко переконатися у тому, що рівняння динаміки (1.8), отримане за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду, матиме той самий вигляд, якщо його отримати у будь-який інший спосіб.

Наявність у системі сил кулонового тертя призводить до того, що її динаміка описується диференціальними рівняннями з розривною правою частиною. О. Ф. Філіппов запропонував застосовувати для розв'язку таких рівнянь метод диференціальних включень, який описаний у книзі

«Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью» (автор Филиппов А. Ф.) [27]. Ідея даного методу полягає у тому, що множина значень розривної функції, яка знаходиться у правій частині диференціального рівняння, замінюється на множину, яка збігається із множиною значень даної функції в області, де ця функція неперевна, а в точках розриву – певним чином довизначає цю функцію. Спосіб довизначення функції в точках розриву варто обирати, виходячи з фізичних властивостей системи, що вивчається.

Застосування методу диференціальних включень до задач механіки вивчалося такими авторами, як J.-J. Moreau [28–30], M. Schatzman [31] і M. D. P. Monteiro Marques [32].

Проте, як відмічено у книзі «Сухое трение в задачах механики» (автори Андронов В. В., Журавлëв В. Ф.) [33, с. 19–21], у випадку застосування закону тертя у вигляді (1.1) використання методу диференціальних включень не є обов'язковим. Це пов'язано з тим, що значення правої частини рівнянь динаміки у точках розриву (тобто, при $v_T = 0$) визначаються другим і третім рядками співвідношення (1.1), а, значить, необхідності у довизначенні немає.

Рівняння динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям у формі співвідношення виду (1.1) мають змінну структуру [34–36]. Зміна структури полягає у тому, що змінюється вигляд правої частини рівнянь динаміки, а також, в загальному випадку, їхній порядок. Для розв'язку таких диференціальних рівнянь можна застосовувати метод припасування, описаний, наприклад, у книзі «Нелинейные задачи динамики машин» (автори Вульфсон И. И., Коловский М. З.) [37, с. 22–26]. Ідея даного методу полягає у тому, що спочатку будується розв'язок рівнянь динаміки на інтервалі часу, який починається в момент часу, котрий обрано в якості початкового, і закінчується в момент часу, коли вперше змінюється структура системи (цей момент часу, як правило, наперед не відомий). Даний розв'язок будується так само, як для диференціальних рівнянь з неперевною правою частиною, оскільки на вибраному у вказаний спосіб інтервалі часу структура не

змінюються. Сталі інтегрування для даного розв'язку і структура диференціальних рівнянь, що відповідає вираному інтервалу часу, визначаються з початкових умов. Побудований таким чином розв'язок дозволяє визначити момент часу, коли вперше відбувається зміна структури рівнянь динаміки, значення координат і швидкостей точок системи в цей момент часу, а також те, який вигляд матимуть ці рівняння, починаючи з цього моменту часу. Далі будується розв'язок рівнянь динаміки, який описує рух системи на інтервалі часу, який починається у момент часу, коли вперше відбувається зміна структури системи, і закінчується в момент часу, коли структура змінюється вдруге. При побудові цього розв'язку в якості початкових умов беруться момент часу, коли вперше відбувається зміна структури системи, і відповідні значення координат і швидкостей. Одержаній розв'язок дозволяє визначити момент часу, коли вдруге відбувається зміна структури рівнянь динаміки, значення координат і швидкостей точок системи в цей момент часу, а також те, який вигляд матимуть ці рівняння, починаючи з цього моменту часу. Об'єднуючи одержані розв'язки, отримуємо розв'язок на інтервалі часу, який починається в момент часу, який обрано в якості початкового, і закінчується в момент часу, коли структура системи змінюється вдруге. Після цього вказані дії повторюються для інтервалу часу, який має початок і кінець в моменти часу, коли зміна структури відбувається вдруге і втретє, потім у той самий спосіб для наступних інтервалів часу між двома послідовними змінами структури. Продовжуючи будувати і об'єднувати розв'язки таким чином, можна знайти координати і швидкості точок системи у будь-який момент часу, тобто розв'язок рівнянь динаміки на всьому інтервалі часу, на якому досліжується рух системи. Якщо розв'язок побудований правильно, то координати точок системи мають змінюватися з часом неперервно, а швидкості точок системи можуть мати розриви першого роду лише в моменти часу, коли відбуваються механічні удари або так звані дотичні удари, про які йтиме мова нижче. Приклад побудови у вказаний спосіб розв'язку диференціального рівняння

найпростішої коливальної системи з кулоновим тертям можна знайти у відомій книзі «Теория колебаний» (автори Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.) [38, с. 175–182], а також у підручнику «Курс теоретической механики. Том 2» (автори Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.) [22, с. 50–53].

1.2. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям

Застосування закону Амонтана–Кулона (1.1) для вивчення руху матеріальних систем може призводити до так званих парадоксів Пенлеве, які названі на честь автора, який вперше їх описав [24]. Класичний приклад матеріальної системи з кулоновим тертям, в якій виникають парадокси Пенлеве, можна знайти, окрім книжки П. Пенлеве [24], також у всесвітньо відомому підручнику «Теоретическая механика. Том 2» (автор Аппель П.) [39, с. 117–120] і у книзі «Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела» (автор Розенблат Г. М.) [40, с. 79–82]. Суть парадоксу Пенлеве полягає у тому, що в деяких матеріальних системах з кулоновим тертям можливі ситуації, коли одному або декільком рівнянням геометричних в'язей, якими стиснено систему, не задовольняє жодне значення сил реакції. Пенлеве, спираючись на можливість виникнення вказаних парадоксальних ситуацій, стверджував, що емпірично встановлений закон Амонтана–Кулона (1.1) є помилковим. Висновки, яких дійшов Пенлеве, викликали дискусію, в якій взяли участь, окрім нього самого, такі відомі вчені, як Л. Лекорню, де Спarr, Ф. Клейн, Р. Мізес, Г. Гамель, Л. Прандтль і Ф. Пфейфер. Зміст даної дискусії можна знайти у вже згадуваній книзі Пенлеве [24].

Вивчення матеріальних систем, в яких виникають парадокси Пенлеве, привертало і продовжує привертати увагу багатьох вчених. Можна вказати, наприклад, роботи С. С. Григоряна [41], Ю. І. Неймарка [42, 43], М. О. Фуфаєва [44], Ле Суан Ань [45], О. П. Іванова [46, 47], Н. Béghin [48],

E. Delassus [49, 50], M. Erdmann [51], F. Génot та B. Brogliato [52], M. T. Mason та Y. Wang [53], F. Pfeiffer та C. Glocke [54], D. E. Stewart [55, 56].

Для того, щоб зрозуміти, у чому полягає зміст парадоксу Пенлеве, розглянемо наступний приклад, зображенний схематично на Рис. 1.2.

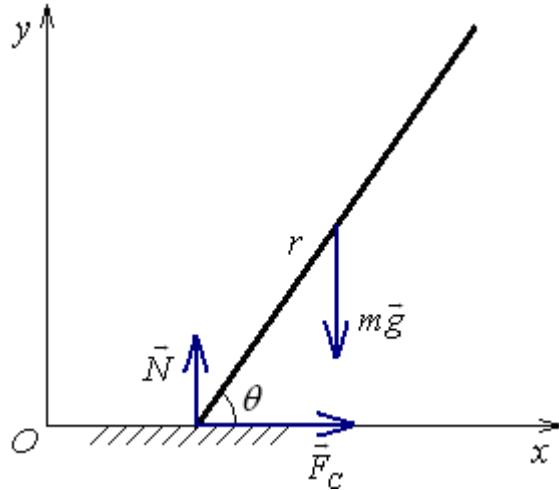


Рис. 1.2. Система, в якій може виникнути парадокс Пенлеве

Приклад, зображений на Рис. 1.2., був запропонований P. Lötstedt [57]. Даний приклад наводять також D. E. Stewart [58] і О. О. Кільчинський та А. Г. Забуга [2]. Система, зображена на Рис. 1.2., складається з недеформівного стрижня довжини r і маси m , яка розподілена симетрично відносно його середини. Стрижень дотикається одним кінцем до абсолютно твердої шорсткої горизонтальної нерухомої площини з коефіцієнтом тертя μ . Вісь Ox нерухомої прямокутної декартової системи координат Oxy знаходиться у цій площині. Система координат Oxy знаходиться у площині рисунка, в якій відбувається рух системи. Координати центра мас стрижня позначатимемо x і y , координати того кінця стрижня, який дотикається площини – x_C і y_C , кут нахилу стрижня по відношенню до площини – θ . Рівняння динаміки системи, що вивчається, мають вигляд

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_c, \\ m\ddot{y} = N - mg, \\ J\ddot{\theta} = -\frac{r}{2}N \cos \theta + \frac{r}{2}F_c \sin \theta, \end{cases} \quad (1.9)$$

де F_c – сила кулонового тертя між стрижнем і площиною, N – нормальні складові реакції, що діє на стрижень з боку площини, J – момент інерції стрижня відносно осі обертання, яка проходить через його центр мас перпендикулярно до площини рисунка. Недеформівна шорстка площаина накладає обмеження на рух стрижня, яке може бути виражене у вигляді рівняння неутримуючої геометричної в'язі

$$y_c = y - \frac{r}{2} \sin \theta \geq 0. \quad (1.10)$$

Для того, щоб умова (1.10) не була порушена, необхідно при $y_c = \dot{y}_c = 0$ (дана рівність виконується під час ковзання кінця стрижня по площині) виконання нерівності $\ddot{y}_c \geq 0$. Якщо врахувати формулу (1.10), то дана нерівність може бути переписана у вигляді

$$\ddot{y}_c = \ddot{y} - \ddot{\theta} \frac{r}{2} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \frac{r}{2} \sin \theta \geq 0 \text{ при } y_c = \dot{y}_c = 0. \quad (1.11)$$

Розглянемо більш детально складові реакції N і F_c у випадку ковзання кінця стрижня по площині, тобто при $\dot{x}_c \neq 0$ і $y_c = \dot{y}_c = 0$. Оскільки в'язь (1.10) неутримуюча, то нормальні складові реакції N буде у вибраній системі відліку невід'ємною, тобто має місце нерівність

$$N \geq 0. \quad (1.12)$$

Закон Амонтана-Кулона (1.1) при $\dot{x}_c \neq 0$ має, враховуючи нерівність (1.12), наступний вигляд:

$$F_c = -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}_c. \quad (1.13)$$

Виразимо \ddot{y} і $\ddot{\theta}$ з другого і третього рівнянь (1.9) і підставимо в умову (1.11), враховуючи співвідношення (1.13). В результаті отримаємо

$$\ddot{y}_c = \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{4J} (\cos \theta + \mu \operatorname{sign} \dot{x}_c \sin \theta) \cos \theta \right) N + \dot{\theta}^2 \frac{r}{2} \sin \theta - g \geq 0 \quad (1.14)$$

при $y_c = \dot{y}_c = 0$.

Неважко переконатися в тому, що при $\dot{x}_c < 0$ і певних значеннях параметрів m, r, J, μ і змінної θ , можуть мати місце нерівності

$$\frac{1}{m} + \frac{r^2}{4J} (\cos \theta + \mu \operatorname{sign} \dot{x}_c \sin \theta) \cos \theta < 0, \quad \dot{\theta}^2 \frac{r}{2} \sin \theta - g < 0. \quad (1.15)$$

Якщо мають місце нерівності (1.15), то виникає суперечність, яка полягає у тому, що умови (1.12) і (1.14) не можуть бути виконані одночасно. Власне, ця суперечність і являє собою парадокс Пенлеве.

Як відзначалося вище, Пенлеве вважав [24], що виявлені ним суперечності, які можуть виникати при застосуванні закону Амонтона-Кулона у вигляді (1.1), вказують на те, що цей закон має бути виправлений. Пенлеве частково правий, оскільки знайдені ним суперечності не виникають, якщо в системі врахувати пружні деформації твердих тіл в околі їхнього контакту або розглядати більш складну, ніж закон Амонтона-Кулона у вигляді (1.1), модель тертя [33]. Проте суперечності, пов'язані з парадоксами Пенлеве, можна усунути, не враховуючи пружних деформацій твердих тіл в околі їхнього контакту і залишаючись в рамках закону Амонтона-Кулона (1.1). Так, наприклад, М. В. Скатенок [59] вказує на те, що при вивченні системи, яку розглядав Пенлеве, не виникатиме суперечностей, якщо замінити утримуючі в'язі на неутримуючі. Щоправда, при цьому змінюється механіко-математична модель системи, що вивчається. Крім того, заміна утримуючих в'язей на неутримуючі не завжди може бути застосована і не завжди дає бажаний результат. Так, наприклад, у системі, зображеній на рис. 1.2., в'язь неутримуюча, але парадокс Пенлеве там може виникнути.

Проблема парадоксів Пенлеве може бути вирішена і без врахування пружних деформацій, зміни закону тертя чи механіко-математичної моделі. Для усунення суперечності достатньо відмовитися від припущення про те, що складові реакції є скінченими величинами [56, 57]. Дійсно, повернемось

до розгляду системи, зображеної на рис. 1.2. Невиконання умови (1.14) означає, що нижній кінець стрижня буде вдавлюватися у площину при будь-яких скінчених значеннях складових реакцій, що неможливо, оскільки і площа і стрижень є недеформівними. Але, якщо складові реакцій не вважати скінченими величинами, то неважко переконатися у тому, що невиконання умови (1.14) призведе до того, що нормальні складові реакцій N миттєво стане нескінченно великою внаслідок виникнення нескінченно малої деформації стрижня і площини (нескінченно малі деформації можливі у системі, що розглядається, оскільки абсолютно тверді тіла – це, строго кажучи, тіла, які деформуються, але деформації є настільки малими, що ними можна знехтувати). Те ж саме, як це видно з формули (1.13), відбудеться з силою кулонового тертя F_C , а це, в свою чергу, призведе до того, що швидкість ковзання \dot{x}_C стрижня по площині миттєво стане рівною нулю. При цьому парадоксальна ситуація миттєво зникне, оскільки вона може мати місце лише при $\dot{x}_C \neq 0$. Отже, парадокс Пенлеве зникає в той самий момент, коли він виникає. Це відбувається внаслідок того, що швидкість ковзання \dot{x}_C миттєво обертається в нуль. Для явища такої миттєвої зупинки В. О. Самсонов [60] пропонує назву «удар тертям». Деякі інші автори, такі як, наприклад, Z. Zhao, C. Liu, W. Ma і B. Chen [61], використовують термін «дотичний удар» («tangential impact»). Варто відмітити, що у згаданій роботі Z. Zhao та інших описані експериментальні дослідження, результати яких вказують на те, що при виникненні парадоксу Пенлеве дотичний удар дійсно має місце.

Внаслідок того, що у системах з кулоновим тертям можуть виникати суперечності на кшталт парадоксів Пенлеве, і те, що диференціальні рівняння динаміки таких систем мають розривну праву частину і змінну структуру, виникає питання про умови існування і єдності розв'язку цих рівнянь. Даній проблемі присвячені роботи О. П. Іванова [62], В. М. Матросова та I. A. Фіногенка [63], P. Lötstedt [57, 64], P. Dupont [65, 66], J.-S. Pang i

J. C. Trinkle [67], а також D. E. Stewart [55]. Відмітимо, що у роботі J.-S. Pang і J. C. Trinkle [67] було показано, що розв'язок рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям завжди існує за умови, що початкові швидкості дорівнюють нулю. Крім того, у роботі D. E. Stewart [55] було доведено існування розв'язку рівнянь динаміки систем, в яких є лише одна точка контакту з тертям, котре описується законом виду (1.1), а удари, які можуть мати місце при виникненні вказаного контакту, є абсолютно непружними.

1.3. Наближені методи розв'язку рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям

Рівняння динаміки систем з кулоновим тертям, яке описується формулою виду (1.1), є нелінійними. У випадку коливальної системи, в якій нелінійність обумовлена силами, які є малими у порівнянні з силами, котрі входять у рівняння динаміки у вигляді лінійних доданків, можна вважати, що коливання є гармонічними у першому наближенні. Застосування цієї ідеї для вивчення затухання у найпростішій коливальній системі з кулоновим тертям, коли сили тертя є малими, вперше запропоновано Дж. П. Ден-Гартогом і описано, наприклад, у книзі «Механические колебания» (автор Ден-Гартог Дж. П.) [68, с. 483–485]; [68, с. 501–504]. Також на основі цієї ідеї ґрунтуються асимптотичний метод М. М. Крилова і М. М. Боголюбова, описаний у книзі «Введение в нелинейную механику» (автори Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.) [69], перше видання якої вийшло у 1937 році. Приклад побудови за допомогою вказаного методу першого наближення для найпростішої коливальної системи з кулоновим тертям наведено у відомій монографії «Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний» (автори Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.) [70, с. 66–68]. Подальше вивчення застосування вказаного методу до аналізу динаміки систем з кулоновим тертям можна знайти у роботах М. П. Плахтієнка [71, 72].

Що стосується методу усереднення, то обґрунтування можливості його застосування у випадку диференціальних рівнянь з розривною правою

частиною, якими є, зокрема, рівняння динаміки систем з кулоновим тертям, можна знайти у книзі «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений» (автор Самойленко А. М.) [73 с. 90–95] і в книзі «Метод усереднения в нелинейной механике» (автор Митропольский Ю. А.) [74 с. 120–123]. Застосування методу усереднення для розв’язку рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям описане, наприклад, у вже згадуваній книзі «Сухое трение в задачах механики» (автори Андронов В. В., Журавлëв В. Ф.) [33, с. 21–38], а також у роботі М. П. Плахтієнка [75].

Основна проблема чисельного інтегрування диференціальних рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям полягає у тому, що ці рівняння мають розривну праву частину і змінну структуру. Для вирішення даної проблеми найчастіше змінюють механіко-математичну модель таким чином, щоб рівняння динаміки мали неперервну праву частину. Вказані ідеї розвинуті у роботах Е. Я. Антонюка і С. В. Зубарєва [76], Р. Lötstedt [77], D. E. Stewart [56, 58, 78], D. E. Stewart і J. C. Trinkle [79], A. Dontchev і F. Lempio [80], A. E. Kastner-Maresch [81], F. Lempio і V. Veliov [82], L. Bereteu [83], V. Acary і B. Brogliato [84], а також M.-F. Danca [85].

Один із способів вищезгаданої заміни механіко-математичної моделі полягає у тому, що у правій частині диференціальних рівнянь динаміки розривна функція (1.1) замінюється неперервною функцією

$$F_C = -\mu|N| \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \beta v_r, \quad (1.16)$$

де β – константа, яка вимірюється у секундах, поділених на метр, і обирається таким чином, щоб результат чисельного інтегрування був максимально точним. Відзначимо, що окрім (1.16) існують і інші неперервні функції, якими можна апроксимувати закон Амонтана-Кулона (1.1). Суть заміни функції (1.1) на функцію (1.16) можна зрозуміти з рис. 1.3.

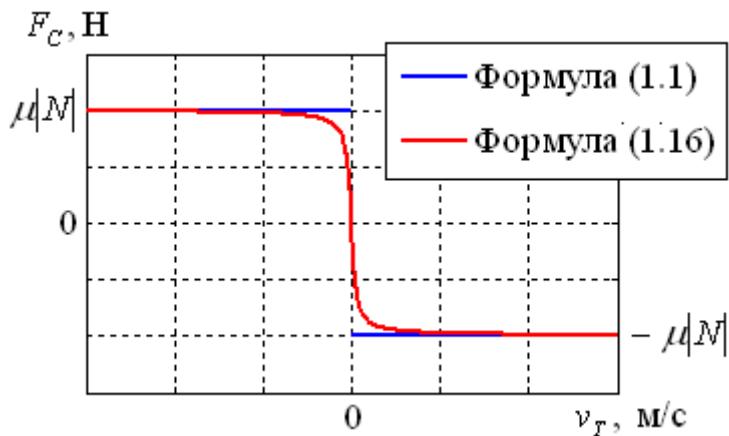


Рис. 1.3. Апроксимація закону Амонтона-Кулона неперервною функцією

Проте необхідно відзначити, що заміна закону Амонтона-Кулона (1.1) на функцію (1.16) має певні недоліки. По-перше, необхідно вибирати константу β . Якщо вибрати β занадто малою, то матимемо велику похибку апроксимації, а якщо занадто великою – функція (1.16) матиме велику похідну по v_T в околі $v_T = 0$, що може привести до значної похибки чисельного інтегрування. По-друге, формула (1.16) не враховує можливості зміни структури внаслідок переходу від тертя ковзання до тертя спокою при $v_T = 0$. Для того, щоб врахувати таку можливість, можна доповнити формулу (1.16) другим і третім рядками з формулі (1.1). Але тоді отримана функція буде багатозначною і розривною при $v_T = 0$, а отже при чисельному інтегруванні доведеться стикнутися з тими самими труднощами, що і при використанні формулі (1.1). І, по-третє, функція (1.16) не дозволяє усунути розриви, які можуть мати місце при механічному або дотичному ударі. Саме тому, як відзначено, зокрема, у монографії «Solving Ordinary Differential Equations. Vol. I. Nonstiff Problems» (автори Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.) [86, с. 196–200], актуальним є пошук чисельних методів, які б коректно працювали при $v_T = 0$, а також в околі даного значення швидкості ковзання.

1.4. Основна задача теорії механічного удару в системах з кулоновим тертям

При зіткненні абсолютно твердих тіл має місце явище механічного удару. З точки зору теоретичної механіки механічний удар полягає у зміні швидкостей тіл, що співударяються, за дуже короткий інтервал часу (у випадку абсолютно твердих тіл – нескінченно малий інтервал часу) внаслідок виникнення дуже великих (у випадку абсолютно твердих тіл – нескінченно великих) сил реакції в точці контакту. У вже згадуваній доповіді О. Г. Столетова [13] сказано, що явищем механічного удару цікавився Леонардо да Вінчі, який визначав удар, як «силу, зосереджену за малий час». Проте першою спробою математичного опису явища механічного удару є гіпотеза Ньютона [87], названа на честь її автора.

Основна задача теорії механічного удару полягає у тому, щоб, знаючи швидкості точок системи до удару, знайти вказані швидкості після удару. У теоретичній механіці для розв’язку цієї задачі використовуються теореми про зміну кількості руху і моменту кількості руху, а також робляться наступні припущення [87–91]. По-перше, деформації при ударі є величинами нескінченно малими у порівнянні з розмірами механічної системи. По-друге, сили, з якими взаємодіють тіла при ударі, є нескінченно великими в порівнянні з іншими силами, що діють в механічній системі. По-третє, інтервал часу, протягом якого відбувається удар, є нескінченно малим у порівнянні з інтервалом часу, на якому вивчається рух системи. Із зазначених припущень випливає наступне: удар призводить до миттєвої зміни швидкостей точок системи, а їхні координати не змінюються при ударі. Внаслідок цього при вивченні механічного удару виявляється більш зручним використання не сил, а ударних імпульсів, які являють собою інтеграли від складових сил реакції тіл у точці їхнього контакту по часу, протягом якого відбувається удар. Тут потрібно зазначити, що, внаслідок третього припущення, поняття часу, протягом якого відбувається удар, має сенс тільки

при розгляді безпосередньо процесу удару, а у випадку розгляду руху системи можна говорити лише про момент часу, коли відбувається удар.

Для того, щоб розв'язати основну задачу теорії механічного удару, треба, окрім основних теорем динаміки системи і вищезгаданих припущень, знати складові ударного імпульсу. У випадку механічного удару абсолютно твердих шорстких (тобто таких, між якими є кулонове тертя) тіл матимемо дві складові ударного імпульсу: нормальну I_N і дотичну I_T . Нормальна складова ударного імпульсу I_N являє собою інтеграл по часу, протягом якого відбувається удар, від нормальній складової N сили реакції, з якою взаємодіють тіла, що співударяються, в точці їхнього контакту. Дотична складова ударного імпульсу I_T – аналогічний інтеграл по часу від дотичної складової F_C сили реакції. Крім складових ударного імпульсу вводять іще нормальну v_N і дотичну v_T складові швидкості абсолютно твердих тіл в точці їхнього контакту. Нормальна складова швидкості v_N являє собою швидкість зближення центрів мас тіл, що співударяються, в напрямку, перпендикулярному до спільної дотичної до їхніх поверхонь площини. Внаслідок цього визначення v_N іноді так і називають: швидкість зближення. Аналогічно, швидкість v_T , яка направлена перпендикулярно до v_N , називають швидкістю ковзання.

У більшості моделей механічного удару недеформівних тіл з кулоновим тертям [87–95] робиться припущення про те, що закон Амонтона-Кулона залишається справедливим для нормальної I_N і дотичної I_T складових ударного імпульсу. При цьому доводиться розглядати три можливі випадки зміни швидкості ковзання v_T в результаті удару. В першому випадку швидкість ковзання не змінює знак і не обертається в нуль, в другому – обертається в нуль, в третьому – змінює знак. Щоправда, треба відмітити, що у деяких роботах розглядається лише перший випадок. Серед них, наприклад, книга «Основы теоретической механики» (автор Журавлëв В. Ф.)

[96]. Іще ряд авторів розглядають лише перші два випадки. Серед таких авторів, наприклад, Я. Г. Пановко [87] і Е. Т. Уіттекер [92].

Для знаходження складових ударного імпульсу I_N і I_T необхідно, окрім узагальнення закону Амонтана-Кулона для ударної взаємодії, ввести ще одне додаткове припущення. В теоретичній механіці в якості такого припущення приймають коефіцієнт відновлення, який вважають сталою величиною, що залежить лише від властивостей тіл, що співударяються. Спосіб введення коефіцієнта відновлення залежить від того, яка саме модель механічного удару шорстких недеформівних тіл використовується. Так, модель Кейна-Левінсона-Уіттекера [92, 93] ґрунтуються на гіпотезі Ньютона, згідно з якою взяті зі знаком мінус відношення значень нормальні складової швидкості після і до удару є сталою величиною, яка називається кінематичним коефіцієнтом відновлення і позначається e_K . В інших моделях для введення коефіцієнта відновлення розглядають два етапи механічного удару: перший триває від початку удару до максимального стиснення (воно має місце, коли нормальна складова швидкості v_N обертається в нуль) тіл, що співударяються, другий – від максимального стиснення до закінчення удару. Кожному з двох етапів відповідає своя частина нормальні складової ударного імпульсу I_N . До таких моделей належить модель Руаса [94], яка ґрунтуються на гіпотезі Пуасона, згідно з якою відношення частин нормальні складової I_N ударного імпульсу, що відповідають другому і першому етапам механічного удару, є сталою величиною, яка називається кінетичним або динамічним коефіцієнтом відновлення і позначається e_D . Модель Стронге [90, 95] ґрунтуються на гіпотезі Стронге, згідно з якою взяті зі знаком мінус відношення робіт, виконаних частинами нормальні складової I_N ударного імпульсу, що відповідають другому і першому етапам механічного удару, дорівнюють квадрату сталої величини, яка називається енергетичним коефіцієнтом відновлення і позначається e_E . Експериментальне дослідження вказаних моделей механічного удару можна

знайти у роботі D. Stoianovici i Y. Hurmuzlu [97], де було встановлено, що припущення про те, що коефіцієнт відновлення є сталою величиною для кожної пари твердих тіл, виконується лише наближено, а закон Амонтона-Кулона для складових ударного імпульсу, як правило, має місце.

Відмітимо, що не у всіх моделях механічного удару шорстких недеформівних твердих тіл робиться припущення щодо узагальнення закону Амонтона-Кулона для складових ударного імпульсу I_N і I_T . Існують моделі, в яких вводиться дотичний коефіцієнт відновлення, що дорівнює відношенню дотичних складових швидкості після і до удару. Припущення про те, що відношення дотичних складових швидкості після і до удару є сталою величиною, яка дорівнює дотичному коефіцієнту відновлення, Я. Г. Пановко [87] називає λ -гіпотезою (це пов'язано з тим, що він позначає дотичний коефіцієнт відновлення символом λ). У деяких роботах розвиваються моделі, в яких дотичний коефіцієнт відновлення вводиться, як певна функція коефіцієнта тертя і нормальні складової ударного імпульсу. Серед таких робіт, наприклад, статті R. M. Brach [98], C. E. Smith [99], T. Schwager, V. Becker i T. Pöschel [100], а також, A. Doménech-Carbó [101].

Дослідження різних моделей механічного удару, проведені, зокрема W. J. Stronge [95], J. B. Keller [102], а також Yu Wang i M. T. Mason [103], показали, що застосування моделі Кейна-Левінсона-Уіттекера іноді може давати результат, який суперечить закону збереження енергії, а застосування моделі Payса – результат, що суперечить закону збереження імпульсу. Модель Стронге завжди дає коректні результати [90, 91, 95].

Відмітимо, нарешті, той факт, що на даний момент з літератури [90, 91] відомі три випадки, коли застосування моделей Кейна-Левінсона-Уіттекера, Payса і Стронге дає однакові результати. Це удар твердих тіл без кулонового тертя, удар, при якому дотична складова швидкості не змінює знак і не обертається в нуль, а також центральний удар (удар, при якому пряма, що з'єднує центри мас тіл, що співударяються, проходить через точку їхнього контакту). Саме внаслідок цього факту у багатьох літературних джерелах з

теоретичної механіки і теорії механічного удару можна зустріти термін «коєфіцієнт відновлення» без уточнення того, який саме коєфіцієнт відновлення мається на увазі. Так, наприклад, М. В. Бутенін, Я. Л. Лунц і Д. Р. Меркін [22], М. М. Бухгольц [23], Я. Г. Пановко [87], Е. Т. Уттекер [92], В. Ф. Журавльов [96], Л. Г. Лойцянський і А. І. Лур'є [104], І. В. Кузьо, Т.-Н. М. Ванькович і Я. А. Зінько [105] під коєфіцієнтом відновлення мають на увазі кінематичний коєфіцієнт відновлення e_K . А інші автори, серед яких В. Гольдсміт [89], Е. Дж. Раус [94], Г. К. Суслов [106] і Й. Віттенбург [107], під коєфіцієнтом відновлення мають на увазі динамічний коєфіцієнт відновлення e_D . М. О. Кільчевський у книзі «Курс теоретической механики. Том 2» (автор Кильчевский Н. А.) [20, с. 461–463] вводить коєфіцієнт відновлення двома способами: за гіпотезою Ньютона (кінематичний коєфіцієнт відновлення e_K) і за гіпотезою Пуасона (динамічний коєфіцієнт відновлення e_D). Щоправда, М. О. Кільчевський розглядає систему без кулонового тертя і тому робить висновок про те, що обидва визначення коєфіцієнта відновлення, які він розглядає, дають еквівалентні результати.

1.5. Розвиток методів побудови і розв'язку рівнянь динаміки механіко-математичних моделей машин, що застосовуються в металургії

Одним із перспективних напрямків застосування сучасних методів побудови і аналізу механіко-математичних моделей є металургія. Машинам, які застосовуються в металургії, присвячена значна кількість спеціалізованої літератури. Так, наприклад, всебічний огляд машин та іншого обладнання для металургійних заводів можна знайти у книзі «Машины и агрегаты металлургических заводов» (автори Целиков А. И., Полухин И. И., Гребенник В. М.) [108]. Також можна згадати, наприклад, книгу В. М. Таловерова, И. М. Гудкова та О. В. Таловерова [109], в якій описане різне обладнання для пресування і штампування, книги О. И. Целікова [110] і Г. С. Нікітіна [111], в яких описані різні механізми та процеси прокатки, та

книгу М. І. Гріншпуна та В. І. Соколовського [112], де проводиться огляд станів холодної прокатки труб.

Для підвищення ефективності роботи металургійних машин необхідно, зокрема, зменшення динамічних навантажень, які виникають при різних процесах. Проблемам динамічних навантажень у металургійних машинах присвячена, наприклад, монографія «Нагрузки и перегрузки в металлургических машинах» (автор Артюх В. Г.) [113]. Вивченю динаміки механіко-математичних моделей металургійних машин присвячені роботи С. М. Кожевнікова [114, 115], Ф. К. Іванченка та інших [116], В. В. Вереньова, В. І. Большакова та інших [117, 118], О. Ю. Путнокі [119], В. В. Телегіна [120], а також В. Б. Ларіна, Є. Я. Антонюка, І. А. Бобуха, А. І. Ткачука та інших [121–123]. З наведених літературних джерел можна дійти висновку про те, що на сьогоднішній день найбільш розвиненими є методи побудови і розв'язку лінійних рівнянь динаміки механіко-математичних моделей машин, що застосовуються у металургії. Нелінійні моделі, які враховують кулонове тертя в кінематичних парах механізмів, розвинені недостатньо. Ще менш розвиненими є моделі систем, в яких можуть виникати механічні удари з кулоновим тертям. До такого типу систем можна віднести, наприклад, механізми із зазорами у кінематичних парах, рольганги, в яких відбуваються удари між заготовкою і роликами, а також штампувальні преси і прокатні стани, де мають місце удари робочого органу і заготовки. Зокрема, серед недостатньо вивчених механіко-математичних моделей машин можна відзначити віброударні системи з кулоновим тертям. Згідно з визначенням, яке можна знайти у довіднику «Вибрации в технике. Том 2» (автори Блехман И. И., Бутенин Н. В., Ганиев Р. Ф.) [124, с. 306], віброударною називають систему, яка здійснює коливальний рух, в процесі якого між окремими її ланками відбуваються удари. Всебічний огляд таких систем можна знайти у книзі «Vibro-Impact Dynamics. Modelling, Mapping and Applications» (автор Ibrahim R. A.) [125],

довіднику [124], та у книзі «Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость» (автор Кобринский А. Е.) [126].

З і сказаного випливає необхідність подальшого вивчення механіко-математичних моделей динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією та їх застосування до аналізу різних процесів, що використовуються, зокрема, в металургії. Крім того, слід відзначити доцільність більш грунтовного вивчення абсолютно непружного удару, оскільки, як сказано, наприклад, у книзі «Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость» (автор Кобринский А. Е.) [126, с. 28], при практичних розрахунках механічний удар найчастіше вважають або абсолютно пружним, або абсолютно непружним.

1.6. Висновки до першого розділу

Проведений огляд літератури свідчить про те, що подальший розвиток методів побудови механіко-математичних моделей систем з ударно-фрикційною взаємодією і розв'язку відповідних рівнянь динаміки залишається актуальним в наш час. Зокрема:

1. Актуальною є проблема побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування рівнянь динаміки матеріальних систем з ударно-фрикційною взаємодією і змінною структурою у випадку, коли використовується закон тертя у вигляді (1.1).
2. Важливим напрямком досліджень є подальший розвиток теорії механічного удару з кулоновим тертям і, зокрема, абсолютно непружного удару шорстких тіл.
3. Перспективним є розвиток механіко-математичних моделей з ударно-фрикційною взаємодією для машин, що застосовуються у металургії.

РОЗДІЛ 2

АБСОЛЮТНО НЕПРУЖНИЙ УДАР ШОРСТКИХ НЕДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ

2.1. Постановка основної задачі абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі

Розглянемо матеріальну систему, зображену на Рис. 2.1. На цьому рисунку показані два твердих тіла з масами m_1 і m_2 та центрами мас в точках C_1 і C_2 в процесі удару. Початок декартової системи координат Oxy знаходиться в точці контакту твердих тіл. Вісь Ox направлена уздовж загальної дотичної, а вісь Oy – уздовж загальної нормалі до поверхні тіл m_1 і m_2 . Плоскопаралельний рух тіл m_1 і m_2 відбувається у площині рисунку. У цій же площині знаходиться система координат Oxy .

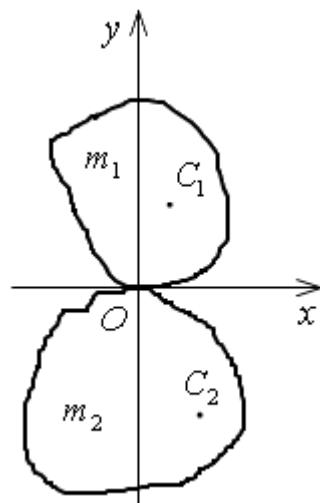


Рис. 2.1. Удар двох абсолютно твердих тіл при плоскопаралельному русі

Застосовуючи теореми про зміну кількості руху і моменту кількості руху і враховуючи третій закон Ньютона, знаходимо для зміни швидкостей поступального руху і обертання тіл m_1 і m_2 такі співвідношення:

$$\begin{cases} m_1(v_{1x} - v_{1x0}) = -I_T, \\ m_1(v_{1y} - v_{1y0}) = I_N, \\ G_1(\omega_1 - \omega_{10}) = -I_N x_1 - I_T y_1, \\ m_2(v_{2x} - v_{2x0}) = I_T, \\ m_2(v_{2y} - v_{2y0}) = -I_N, \\ G_2(\omega_2 - \omega_{20}) = I_N x_2 + I_T y_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

де v_{1x} и v_{1x0} – спрямована уздовж вісі Ox складова швидкості руху центру мас тіла m_1 після і до удару відповідно, v_{1y} і v_{1y0} – направлена вздовж вісі Oy складова швидкості руху центру мас тіла m_1 після і до удару відповідно, G_1 – момент інерції тіла m_1 відносно вісі, яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині рисунку, ω_1 і ω_{10} – кутова швидкість обертання навколо цієї вісі тіла m_1 після і до удару відповідно, x_1 і y_1 – координати центру мас тіла m_1 в системі Oxy , I_T – дотична (направлена вздовж вісі Ox) складова ударного імпульсу, I_N – нормальні (направлені вздовж вісі Oy) складова ударного імпульсу, v_{2x} і v_{2x0} – направлена вздовж вісі Ox складова швидкості руху центру мас тіла m_2 після і до удару відповідно, v_{2y} і v_{2y0} – спрямована вздовж вісі Oy складова швидкості руху центру мас тіла m_2 після і до удару відповідно, G_2 – момент інерції тіла m_2 відносно вісі, яка проходить через його центр мас перпендикулярно площині рисунка, ω_2 і ω_{20} – кутова швидкість обертання навколо цієї вісі тіла m_2 після і до удару відповідно, x_2 і y_2 – координати центру мас тіла m_2 в системі Oxy . Основна задача теорії механічного удару при плоскопаралельному русі полягає у тому, щоб, знаючи v_{1x0} , v_{1y0} , ω_{10} , v_{2x0} , v_{2y0} і ω_{20} , визначити v_{1x} , v_{1y} , ω_1 , v_{2x} , v_{2y} і ω_2 . Для того, щоб зробити це, використовуючи рівняння (2.1), необхідно знайти складові ударного імпульсу I_N і I_T , значення яких залежать, строго кажучи, від вибору моделі механічного удару.

Перед тим, як перейти до розгляду різних моделей механічного удару, зручно ввести швидкість зближення тіл m_1 і m_2 вздовж вісі Oy у точці контакту (нормальна складова швидкості). Значення цієї швидкості після і до удару позначимо v_N і v_{N0} відповідно. Введемо також швидкість ковзання (дотична складова швидкості) тіл m_1 і m_2 одне відносно одного уздовж вісі Ox у точці їхнього контакту. Значення швидкості ковзання до і після удару позначимо v_T і v_{T0} відповідно. Виходячи із кінематики системи, яка вивчається, знаходимо для v_N , v_{N0} , v_T і v_{T0} такі співвідношення:

$$\begin{aligned} v_N &= v_{2y} - \omega_2 x_2 - v_{1y} + \omega_1 x_1, & v_{N0} &= v_{2y0} - \omega_{20} x_2 - v_{1y0} + \omega_{10} x_1, \\ v_T &= v_{1x} + \omega_1 y_1 - v_{2x} - \omega_2 y_2, & v_{T0} &= v_{1x0} + \omega_{10} y_1 - v_{2x0} - \omega_2 y_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Виключаючи з рівнянь (2.1) і (2.2) v_{1x} , v_{1x0} , v_{1y} , v_{1y0} , ω_1 , ω_{10} , v_{2x} , v_{2x0} , v_{2y} , v_{2y0} , ω_2 і ω_{20} , отримаємо

$$\begin{cases} v_N = v_{N0} - aI_N - bI_T, \\ v_T = v_{T0} - bI_N - \tilde{a}I_T, \end{cases} \quad (2.3)$$

де були введені такі позначення:

$$a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{x_1^2}{G_1} + \frac{x_2^2}{G_1}, \quad \tilde{a} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{y_1^2}{G_1} + \frac{y_2^2}{G_1}, \quad b = \frac{x_1 y_1}{G_1} + \frac{x_2 y_2}{G_2}. \quad (2.4)$$

Відзначимо той факт, що, оскільки маси і моменти інерції завжди є позитивними, то нескладно переконатися у тому, що завжди мають місце нерівності $a > 0$, $\tilde{a} > 0$ і $a\tilde{a} > b^2$.

В усіх розглянутих у даній роботі моделях механічного удару шорстких недеформівних тіл вводиться припущення про те, що закон тертя Амонтона–Кулона справедливий для нормальної і дотичної складових ударного імпульсу. Це означає, що необхідно розглядати три можливі випадки. У першому випадку швидкість ковзання не перетворюється в нуль і не змінює знак у процесі удару. При цьому закон Амонтона–Кулона має вигляд:

$$I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0}, \quad (2.5)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання.

У другому випадку швидкість ковзання перетворюється в процесі удару в нуль і зберігає нульове значення до закінчення удару. При цьому

$$I_T = I_{T1} + I_{T2}, \quad I_N = I_{N1} + I_{N2}, \quad I_{T1} = -\mu I_{N1} \operatorname{sign} v_{T0}, \quad I_{T2} = -\frac{b}{\tilde{a}} I_{N2}, \quad (2.6)$$

де I_{T1} і I_{N1} – дотична і нормальна складові ударного імпульсу відповідно на інтервалі часу від початку удару до моменту часу, коли швидкість ковзання перетворюється в нуль, а I_{T2} і I_{N2} – дотична і нормальна складові ударного імпульсу відповідно на інтервалі часу від моменту часу, коли швидкість ковзання перетворюється в нуль, до закінчення удару.

У третьому випадку швидкість ковзання проходить у процесі удару через нуль, змінюючи знак на протилежний. Закон Амонтана–Кулона для складових ударного імпульсу має за таких умов вигляд:

$$I_T = I_{T1} + I_{T2}, \quad I_N = I_{N1} + I_{N2}, \quad I_{T1} = -\mu I_{N1} \operatorname{sign} v_{T0}, \quad I_{T2} = \mu I_{N2} \operatorname{sign} v_{T0}. \quad (2.7)$$

Визначити, який із трьох згаданих вище випадків має місце, можна в такий спосіб. Спочатку робиться припущення про те, що має місце перший випадок. Якщо в результаті обчислень отримане значення v_T має такий же знак, що і v_{T0} , або $v_T = 0$, тоді вказане припущення є правильним і має місце перший випадок, тобто справедливою є формула (2.5). Якщо ж v_T і v_{T0} мають різні знаки, тоді має місце або другий або третій випадок. Причому, другий випадок, тобто співвідношення (2.6), матимуть місце при виконанні умови

$$|b|/\tilde{a} \leq \mu. \quad (2.8)$$

У разі невиконання умови (2.8) має місце третій випадок, тобто формули (2.7).

Відзначимо, що оскільки співвідношення (2.1)–(2.8) можуть бути отримані без жодного припущення про коефіцієнт відновлення, то вони є справедливими при використанні усіх моделей механічного удару, що розглядаються у даній роботі.

2.2. Дослідження абсолютно непружного удару при плоскопаралельному русі за допомогою моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера

Модель Кейна–Левінсона–Уіттекера [92, 93] ґрунтуються на припущені про те, що для досліджуваної системи справедлива гіпотеза Ньютона, згідно якої має місце співвідношення

$$e_K = -\frac{v_N}{v_{N0}}, \quad (2.9)$$

де e_K – кінематичний коефіцієнт відновлення, який вважається відомим. Тут розглядається абсолютно непружний удар, для якого $e_K = 0$. Підставляючи $e_K = 0$ у (2.9), знаходимо, що у випадку абсолютно непружного удару швидкість $v_N = 0$.

У першому випадку удару з тертям, коли швидкість ковзання не перетворюється в нуль і не змінює знак в процесі удару, знаходимо з рівнянь (2.3), (2.5) і (2.9), враховуючи, що $e_K = 0$, такі значення складових ударного імпульсу:

$$I_N = \frac{v_{N0}}{a - \mu b \operatorname{sign} v_{T0}}, \quad I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0}. \quad (2.10)$$

Формули (2.10) і рівняння (2.1) являють собою розв'язок основної задачі теорії механічного удару з тертям у першому випадку. Зазначимо, що в цьому випадку співвідношення (2.10) будуть справедливі також при застосуванні моделей Руза і Стронге, оскільки, як було зазначено у попередньому розділі, де проводився огляд літератури, всі розглянуті тут підходи призводять до однакових результатів, якщо швидкість ковзання не змінює знак і не перетворюється в нуль в процесі удару.

Перейдемо до другого випадку удару із тертям, коли швидкість ковзання перетворюється в нуль у процесі удару і зберігає нульове значення до закінчення удару. Із другого рівняння системи (2.3), враховуючи, що $v_T = 0$, отримуємо

$$I_T = \frac{v_{T0} - bI_N}{\tilde{a}}. \quad (2.11)$$

Підставляючи (2.11) в перше рівняння системи (2.3) і враховуючи, що після абсолютно непружного удару $v_N = 0$, отримаємо

$$I_N = \frac{\tilde{a}v_{N0} - bv_{T0}}{a\tilde{a} - b^2}. \quad (2.12)$$

Формули (2.1), (2.11) і (2.12) являють собою розв'язок основної задачі теорії механічного удару з тертям у другому випадку в межах моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера.

Щоб застосувати модель Кейна–Левінсона–Уіттекера у третьому випадку удару з тертям, зручно виділити два етапи. На першому етапі швидкість ковзання зменшується від початкового значення v_{T0} до нуля, на другому – зростає за модулем від нуля до кінцевого значення v_T і має напрямок та знак, протилежні напрямку й знаку початкового значення v_{T0} . Застосовуючи для двох зазначених етапів такі ж міркування, як і при виведенні рівнянь (2.3), отримаємо

$$\begin{cases} v_{N1} = v_{N0} - aI_{N1} - bI_{T1}, \\ 0 = v_{T0} - bI_{N1} - \tilde{a}I_{T1}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_N = v_{N1} - aI_{N2} - bI_{T2}, \\ v_T = -bI_{N2} - \tilde{a}I_{T2}, \end{cases} \quad (2.13)$$

де v_{N1} – нормальна складова швидкості після першого етапу удару. Зрозуміло, що перша система рівнянь (2.13) відповідає першому етапу удару, а друга – другому, причому складові ударного імпульсу I_{N1} , I_{T1} , I_{N2} і I_{T2} мають такі ж значення, що й у формулах (2.7). Нескладно переконатися в тому, що, додаючи рівняння систем (2.13) і враховуючи перші два співвідношення (2.7), отримаємо рівняння (2.3).

Виключаючи з рівнянь (2.7) і (2.13) невідомі v_{N1} , I_{N1} , I_{T1} , I_{N2} і I_{T2} та враховуючи, що для абсолютно непружного удару $v_N = 0$, знаходимо, що

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{v_{N0}(b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign} v_{T0}) + 2\mu bv_{T0}\operatorname{sign} v_{T0}}{(a + \mu b\operatorname{sign} v_{T0})(b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign} v_{T0})}, \\ I_T &= \mu \left(I_N - \frac{2v_{T0}}{b - \mu\tilde{a}\operatorname{sign} v_{T0}} \right) \operatorname{sign} v_{T0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Формули (2.1) і (2.14) являють собою розв'язок основної задачі теорії механічного удару з тертям у третьому випадку в рамках моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера.

2.3. Дослідження абсолютно непружного удару при плоскопаралельному русі за допомогою моделей Payса і Стронге

Модель Payса [94] ґрунтуються на припущеннях про те, що для досліджуваної системи є справедливою гіпотеза Пуассона, згідно з якою мають місце співвідношення

$$e_D = \frac{I_{NA}}{I_{NB}}, \quad I_{NB} + I_{NA} = I_N, \quad (2.15)$$

де e_D – кінетичний (динамічний) коефіцієнт відновлення, який вважається відомим, I_{NB} – нормальні складові ударного імпульсу на інтервалі часу від початку удару до моменту часу, коли досягається максимальне стиснення (тобто, нормальна складова швидкості перетворюється в нуль), I_{NA} – нормальні складові ударного імпульсу на інтервалі часу від моменту, коли досягається максимальне стиснення, до закінчення удару. Зазначимо, що значення нормальних складових ударного імпульсу I_{NB} і I_{NA} , які містяться в (2.15), взагалі кажучи, не збігаються зі значеннями нормальних складових ударного імпульсу I_{N1} і I_{N2} , які містяться в (2.6) і (2.7), хоча, звичайно, завжди справедлива рівність $I_{NB} + I_{NA} = I_{N1} + I_{N2} = I_N$.

У випадку абсолютно непружного удару маємо $e_D = 0$. В результаті, з рівнянь (2.15) знаходимо $I_{NA} = 0$ і $I_{NB} = I_N$. Рівність $I_{NA} = 0$ означає, що абсолютно непружний удар закінчується у момент часу досягнення максимального стиснення, звідки випливає, що застосування моделі Payса

призводить до рівності $v_N = 0$, тобто до такого ж результату, як і той, що був отриманий раніше при використанні моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера. Крім того, як було сказано вище, співвідношення (2.1)–(2.8) і (2.10) справедливі для всіх розглянутих у даній роботі моделей. Те ж саме стосується і рівнянь (2.11) та (2.13), оскільки вони були отримані без використання будь-яких припущень щодо вибору типу коефіцієнта відновлення. Звідси випливає, що співвідношення (2.12) і (2.14) для відповідно другого і третього випадків абсолютно непружного удару із тертям також будуть справедливі, оскільки вони є наслідком рівності $v_N = 0$, а також формул (2.1)–(2.7), (2.11) і (2.13). В результаті доходимо висновку, що використання моделей Кейна–Левінсона–Уіттекера і Руза призводить у всіх трьох випадках абсолютно непружного удару із тертям до однакових результатів.

Розглянемо, нарешті, модель Стронге [90, 95]. Вона ґрунтуються на припущення про те, що для досліджуваної системи є справедливою гіпотеза Стронге, згідно з якою мають місце співвідношення:

$$e_E^2 = -\frac{W_{NA}}{W_{NB}}, \quad (2.16)$$

де e_E – енергетичний коефіцієнт відновлення, який вважається відомим, W_{NB} – робота нормальні складової сили реакції в точці контакту на інтервалі часу від початку удару до моменту часу, коли досягається максимальне стиснення, W_{NA} – робота нормальні складової сили реакції у точці контакту на інтервалі часу від моменту, коли досягається максимальне стиснення, до закінчення удару.

Для використання моделі Стронге потрібно визначити роботу нормальні складової сили реакції у точці контакту при ударі. Як відомо, у випадку руху матеріальної точки по прямій, робота сили може бути визначена співвідношенням $W = \int_{S_1}^{S_2} F(s)ds$, де $F(s)$ – проекція сили, що діє на матеріальну точку, на пряму, вздовж якої рухається точка, s – шлях,

пройдений цією точкою, $[s_1; s_2]$ – інтервал шляху, на якому обчислюється робота сили $F(s)$. Однак, застосовувати визначення роботи у такому вигляді для випадку удару незручно, оскільки сили реакції, що діють у процесі удару, є нескінченно великими величинами, а інтервал шляху, по якому ведеться інтегрування – нескінченно мала величина, оскільки деформації вважаються нескінченно малими. Тому при вивчені удару зручно, скориставшись співвідношенням $ds = v(t)dt$, де $v(t)$ – швидкість матеріальної точки, як функція часу t , перейти від інтегрування по шляху до інтегрування по часу, а потім, скориставшись співвідношенням $F(t)dt = I_F$, де I_F – імпульс сили, – до інтегрування по імпульсу. Здійснюючи вказаний перехід, одержуємо $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds = \int_{t(s_1)}^{t(s_2)} F(t)v(t)dt = \int_{I_F(s_1)}^{I_F(s_2)} v(I_F)dI_F$, де $t(s_1)$ і $I_F(s_1)$ – значення часу і імпульсу відповідно, коли точка пройшла шлях s_1 , а $t(s_2)$ і $I_F(s_2)$ – значення часу і імпульсу відповідно, коли точка пройшла шлях s_2 , і $v(I_F)$ – швидкість матеріальної точки, визначена, як функція імпульсу I_F . У аналогічний спосіб можна представити роботи W_{NB} і W_{NA} , які входять у (2.16) (приклад із рухом матеріальної точки по прямій був обраний для простоти викладення). В результаті отримаємо

$$W_{NB} = \int_0^{I_{NB}} v_N(I)dI, \quad W_{NA} = \int_{I_{NB}}^{I_N} v_N(I)dI, \quad I_{NB} + I_{NA} = I_N, \quad (2.17)$$

де $v_N(I)$ – нормальнна складова швидкості, як функція ударного імпульсу I . Явний вигляд функції $v_N(I)$ може бути отриманий у той самий спосіб, що й рівняння (2.3) і (2.13), до яких входить нормальна складова швидкості. Ударні імпульси I_{NB} і I_{NA} , що входять до співвідношень (2.15) і (2.17), мають один і той же зміст, але їх значення, отримані при використанні моделі Рауса і моделі Стронге, будуть, взагалі кажучи, різні.

У випадку абсолютно непружного удару маємо $e_E = 0$. Отже, виходячи із формул (2.16), отримаємо $W_{NA} = 0$. Це означає, що після досягнення максимального стиснення, нормальнна складова ударного імпульсу не

виконує ніякої роботи. Таким чином, зі співвідношень (2.15) випливає, що $I_{NA} = 0$ і $I_{NB} = I_N$. Крім того, значення ударного імпульсу I_{NB} досягається за визначенням при максимальному стисканні, а це означає, що $v(I_{NB}) = 0$. З усього цього можна зробити висновок про те, що у випадку абсолютно непружного удару, з рівності $I_N = I_{NB}$ випливає, що $v_N = v(I_N) = v(I_{NB}) = 0$. З цього випливає, що, у випадку абсолютно непружного удару із тертям, застосування моделі Стронге, також як і моделей Кейна–Левінсона–Уіттекера або Руза, призводить до результату $v_N = 0$. Далі, повторюючи ті ж самі міркування, що і при використанні моделі Руза, доходимо висновку, що формули (2.10)–(2.13) будуть справедливими і при використанні моделі Стронге для дослідження абсолютно непружного удару із тертям.

2.4. Висновки до другого розділу

Розглянуто загальний випадок абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі. Показано, що у випадку, коли удар абсолютно непружний, застосування моделей Кейна–Левінсона–Уіттекера, Руза і Стронге дає однакові розв'язки основної задачі теорії механічного удару. Таким чином, доведено, що абсолютно непружний удар при плоскопаралельному русі являє собою четвертий, раніше не відомий, випадок (перші, відомі з літератури [90, 91], три випадки: удар без тертя, центральний удар і удар, при якому швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак), коли вказані моделі дають однакові результати.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковані в роботах [9, 10].

РОЗДІЛ 3
ДИНАМІКА ДВОМАСОВОЇ ВІБРОУДАРНОЇ
СИСТЕМИ З КУЛОНОВИМ ТЕРТЯМ

3.1. Постановка задачі про рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям

Розглянемо плоскопаралельний поступальний рух віброударної системи, яка складається з двох абсолютно твердих тіл (Рис. 3.1.) під дією сили ваги. Тіла зв'язані пружиною з в'язким демпфером. Цю систему будемо називати умовно «циліндр–поршень».

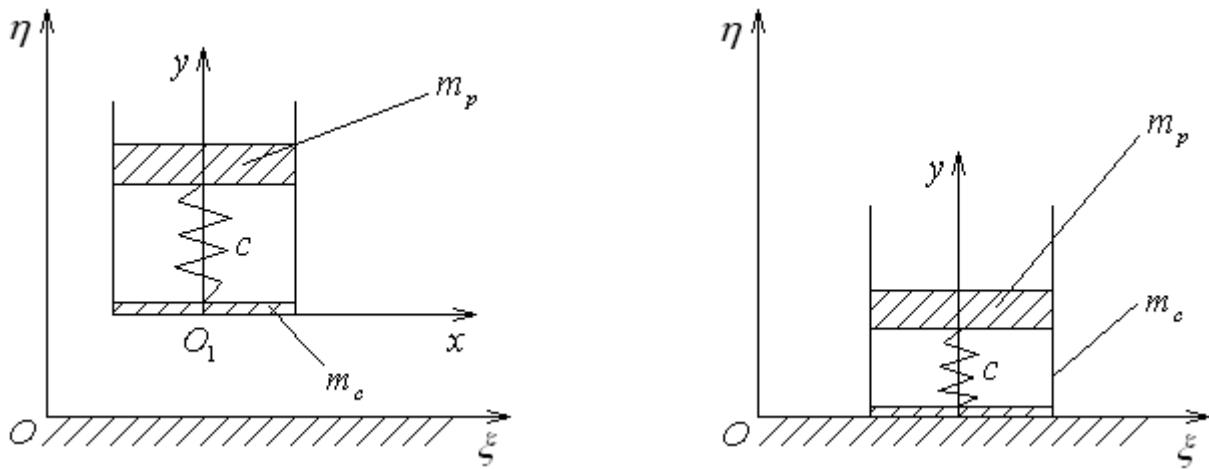


Рис. 3.1. Двомасова віброударна система з кулоновим тертям

Під час руху система може бути або вільною, або її переміщення у просторі буде обмежене недеформівною горизонтальною площею. Позначимо масу поршня, як m_p , а масу циліндра разом з дном – як m_c . Циліндр вважаємо недеформівним, тобто рух поршня відносно дна циліндра у горизонтальному напрямку неможливий. Декартова система координат $O\xi\eta$ інерціальна, а система осей O_1xy зв'язана з дном циліндра і має початок в точці O_1 , яка знаходиться у центрі зовнішньої поверхні дна циліндра. Центри мас циліндра і поршня знаходяться на їхній осі симетрії, яка при вказаному виборі системи осей O_1xy збігається з віссю O_1y . Точки кріплення

пружини до циліндра і поршня також знаходяться на осі O_1y . Оскільки циліндр і поршень недеформівні, то при вказаному виборі системи осей O_1xy зміна довжини пружини дорівнює зміні координати у центра мас поршня у системі O_1xy . Значення координати y , при якому пружина недеформована, дорівнює l . Жорсткість пружини дорівнює c , а її коефіцієнт дисипації – $2n$. Очевидно, що положення точок системи у будь-який момент часу може бути визначене за допомогою абсциси ξ і ординати η точки O_1 дна циліндра, а також ординати y . Через наявність абсолютно твердої шорсткої площини рух системи обмежений неідеальною неутримуючою геометричною в'яззю, рівняння якої

$$\Phi(\xi, \eta, y) = \eta \geq 0, \quad (3.1)$$

де знак рівності має місце тоді, коли циліндр перебуває у контакті з площеиною. Зі сказаного випливає, що механічна система, яка вивчається, матиме три ступеня вільності при $\eta > 0$ і два ступеня вільності при $\eta = 0$.

Будемо вважати, що під час руху поршня відносно циліндра у вертикальному напрямку на поршень з боку циліндра діє сила кулонового тертя Q , обумовлена тертям поршня об стінки циліндра. Силу кулонового тертя Q будемо описувати за допомогою залежності

$$Q = \begin{cases} -q_0 \operatorname{sign} \dot{y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -q_0 \operatorname{sign} \sum F_A & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| > q_0, \\ -\sum F_A & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } \left| \sum F_A \right| \leq q_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

де q_0 – додатна стала, що має розмірність сили, \dot{y} – швидкість руху у вертикальному напрямку поршня відносно циліндра і $\sum F_A$ – сума проекцій на вісь O_1y активних сил і сил інерції, що діють на поршень у рухомій системі відліку O_1xy . У формулі (3.2) другий рядок відповідає ситуації, коли \dot{y} , проходячи через нуль, миттєво змінює знак, а третій дає значення сили тертя спокою, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$ протягом певного скінченного проміжку

часу (поки виконується умова $|\sum F_A| \leq q_0$). Неважко бачити, що рівняння (3.2) являють собою закон Амонтана-Кулона виду (1.1).

Рух системи, що вивчається, може бути представлений у вигляді декількох однотипних циклів. Номер циклу позначатимемо індексом k , який може набувати значень 1, 2, 3, ... У кожному циклі буде дві стадії. На першій стадії має місце рух при відсутності контакту з поверхнею $\eta = 0$. Перша стадія триває протягом інтервалу часу $t \in [t_{k-1,2}; t_{k1}]$ (де $t_{k-1,2}$ – момент часу, коли закінчується друга стадія $k-1$ -го циклу). Відзначимо, що тут і в подальшому при $k = 1$ замість $t_{k-1,2}$ буде початковий момент часу $t_0 = 0$.

Після досягнення циліндром у момент часу t_{k1} в'язі $\eta = 0$ виникає реакція в'язі і має місце друга стадія, на якій відбувається ковзний сповільнений рух циліндра вздовж площини на інтервалі часу $t \in (t_{k1}; t_{k2})$. Сила реакції, яка діє на циліндр на вказаному інтервалі часу, може бути розкладена на нормальну до площини складову N і тангенціальну (дотичну) до площини складову F_T , котра являє собою силу кулонового тертя між дном циліндра і площиною.

Очевидно, може трапитися ситуація, коли реакція в'язі $\eta = 0$ не обертається в нуль на другій стадії циклу. У цьому випадку система залишається на другій стадії руху нескінченно довго, перехід на наступний цикл не відбувається, а t_{k2} для даного циклу не існує.

Віброударна система, що вивчається, може бути застосована в якості механіко-математичної моделі явищ, які мають місце при фрикційно-ударній взаємодії робочого органу машини (наприклад, штампувального пресу) і заготовки в процесі металообробки [109].

3.2. Рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям

Ці рівняння мають у декартовій системі координат $O\xi\eta$ вигляд:

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= F_T, \\ m_c\ddot{\eta} &= -m_c g + c(y - l) + 2n\dot{y} - Q + N, \\ m_p(\ddot{\eta} + \ddot{y}) &= -m_p g - c(y - l) - 2n\dot{y} + Q, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де було враховано, що ордината маси m_p у системі $O\xi\eta$ дорівнює $\eta + y$, а також той факт, що вздовж осі $O\xi$ система рухається, як єдине ціле. У рівняннях (3.3) $M = m_c + m_p$, а $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

Розв'язуючи рівняння (3.3) відносно других похідних і виконуючи очевидні алгебраїчні перетворення, отримуємо

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi} &= F_T, \\ m_c\ddot{\eta} &= -m_c g + c(y - l) + 2n\dot{y} - Q + N, \\ \frac{m_c m_p}{M}\ddot{y} + c(y - l) + 2n\dot{y} &= Q - \frac{m_p}{M}N. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для того, щоб дослідити рух системи за допомогою рівнянь (3.4), треба знайти невідомі значення складових реакцій N , F_T і Q .

Розглянемо спочатку силу кулонового тертя Q . Очевидно, співвідношення (3.2) дозволяють одразу знайти значення Q у випадку, коли $\dot{y} \neq 0$. У випадку, коли $\dot{y} = 0$, необхідно іще знайти $\sum F_A$. Для того, щоб це зробити, застосуємо принцип Даламбера до останнього з рівнянь (3.4). Покладаючи у даному рівнянні $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$Q = c(y - l) + \frac{m_p}{M}N \text{ при } \dot{y} = 0 \text{ і } \ddot{y} = 0. \quad (3.5)$$

Порівнюючи (3.5) з останнім рядком у (3.2), який відповідає ситуації, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, отримуємо:

$$\sum F_A = -c(y - l) - \frac{m_p}{M}N. \quad (3.6)$$

Для того, щоб визначити Q за допомогою (3.2) і (3.6), необхідно визначити складову реакції N , яка входить до (3.6). У випадку, коли $\dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$, це можна зробити, якщо згадати, що при цьому поршень не рухається відносно циліндра, а, отже, система матиме ті ж самі властивості, що і

абсолютно тверде тіло з масою $M = m_c + m_p$. Таким чином, враховуючи рівняння неутримуючої геометричної в'язі (3.1), можемо записати

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ Mg & \text{при } \eta = 0, \dot{y} = 0 \text{ і } \ddot{y} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) і (3.7) у (3.2), отримаємо

$$Q = \begin{cases} -q_0 \operatorname{sign} \dot{y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ q_0 \operatorname{sign}(c(y-l)) & \text{при } \dot{y} = 0, \eta > 0 \text{ і } |c(y-l)| > q_0, \\ c(y-l) & \text{при } \dot{y} = 0, \eta > 0 \text{ і } |c(y-l)| \leq q_0, \\ q_0 \operatorname{sign}(c(y-l) + m_p g) & \text{при } \dot{y} = 0, \eta = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| > q_0, \\ c(y-l) + m_p g & \text{при } \dot{y} = 0, \eta = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| \leq q_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Формула (3.7) визначає нормальну складову реакції N при $\eta > 0$ і у випадку, коли $\eta = 0, \dot{y} = 0$ і $\ddot{y} = 0$. Для того, щоб знайти N в загальному випадку, підставимо рівняння в'язі (3.1) і співвідношення (3.8) у друге рівняння (3.4) і скористаємося принципом Даламбера. В результаті отримаємо

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta > 0, \\ N_1 & \text{при } \eta = 0 \text{ і } \dot{y} \neq 0, \\ N_2 & \text{при } \eta = 0, \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| > q_0, \\ Mg & \text{при } \eta = 0, \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| \leq q_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

де були використані позначення: $N_1 = m_c g - c(y-l) - 2n\dot{y} - q_0 \operatorname{sign} \dot{y}$ і $N_2 = m_c g - c(y-l) + q_0 \operatorname{sign}(c(y-l) + m_p g)$. У співвідношенні (3.9) враховано той факт, що ситуація $\ddot{y} = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $|c(y-l) + m_p g| \leq q_0$. Зазначимо, що, оскільки в'язь (3.1) неутримуюча, то має виконуватися умова $N \geq 0$. Причому, якщо під час ковзання циліндра вздовж площини $\eta = 0$ складова реакції N обертається в нуль, то має місце відскачування циліндра від в'язі.

Що стосується дотичної складової реакції F_T , то, оскільки вона є єдиною силою, що діє на систему в напрямку осі $O\xi$, можемо, застосовуючи закон Амонтана–Кулона (1.1) і враховуючи, що $N \geq 0$, записати

$$F_T = -\mu N \operatorname{sign} \dot{\xi}, \quad (3.10)$$

де μ – коефіцієнт тертя.

Рівняння динаміки (3.4) разом зі складовими реакцій, записаними у вигляді співвідношень (3.8)–(3.10), дозволяють повністю дослідити рух системи, що вивчається. Вказані рівняння мають шостий порядок і змінну структуру. Останнє випливає зі співвідношень (3.8)–(3.10), які визначають складові реакцій Q , N і F_T , що входять до рівнянь (3.4).

3.3. Рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при відсутності контакту з площею

Перша стадія кожного циклу руху характеризується відсутністю контакту системи, що вивчається, з поверхнею. При цьому виконується нерівність $\eta > 0$. Таким чином, підстановка (3.8), (3.9) і (3.10) у (3.4) з урахуванням вказаної нерівності дозволяє отримати наступну систему рівнянь:

$$\ddot{\xi} = 0,$$

$$m_c \ddot{\eta} = \begin{cases} -m_c g + c(y - l) + 2n\dot{y} + q_0 \operatorname{sign} \dot{y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -m_c g + c(y - l) - q_0 \operatorname{sign}(c(y - l)) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y - l)| > q_0, \\ -m_c g & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y - l)| \leq q_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\frac{m_c m_p}{M} \ddot{y} = \begin{cases} -c(y - l) - 2n\dot{y} - q_0 \operatorname{sign} \dot{y} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -c(y - l) + q_0 \operatorname{sign}(c(y - l)) & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y - l)| > q_0, \\ 0 & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y - l)| \leq q_0. \end{cases}$$

Система (3.11) являє собою систему трьох звичайних диференціальних рівнянь, причому друге і третє рівняння мають змінну структуру. Дано система має шостий порядок. Початкові умови на першій стадії першого циклу руху (тобто при $k = 1$) визначаються за умовою задачі і мають вигляд

$$\xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0, \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \dot{\eta}(0) = 0, \quad y(0) = l, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (3.12)$$

На усіх інших циклах руху ($k > 1$) початкові умови мають вигляд $\xi(t_{k-1,2})$, $\dot{\xi}(t_{k-1,2})$, $\eta(t_{k-1,2}) = 0$, $\dot{\eta}(t_{k-1,2}) = 0$, $y(t_{k-1,2})$ і $\dot{y}(t_{k-1,2})$ і являють собою значення координат і швидкостей ξ , $\dot{\xi}$, η , $\dot{\eta}$, y і \dot{y} відповідно у момент часу $t_{k-1,2}$, в який відбувається перехід від другої стадії $k - 1$ -го циклу до першої стадії k -го циклу. Значення координати $\eta(t_{k-1,2})$ і швидкості $\dot{\eta}(t_{k-1,2})$ були отримані з рівняння в'язі (3.1).

Розглянемо спочатку систему рівнянь (3.11) на першій стадії першого ($k = 1$) циклу руху. Оскільки початкові умови при цьому мають вигляд (3.12), то можна помітити, що на першій стадії першого циклу виконуються співвідношення $\dot{y} = 0$ і $|c(y - l)| = 0 < q_0$, а, отже, система (3.11) зводиться до

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = -g, \quad \ddot{y} = 0. \quad (3.13)$$

Рівняння системи (3.13) при початкових умовах (3.12) мають розв'язок:

$$\xi = \dot{\xi}_0 t, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \eta = \eta_0 - \frac{gt^2}{2}, \quad \dot{\eta} = -gt, \quad y = l, \quad \dot{y} = 0. \quad (3.14)$$

Для того, щоб розв'язати систему (3.11) при $k > 1$, зазначимо, що перше і третє рівняння можуть бути розв'язані незалежно від другого і одне від одного. Розв'язок першого рівняння системи (3.11) загальновідомий і має при $k > 1$ вигляд

$$\xi = \xi(t_{k-1,2}) + \dot{\xi}(t_{k-1,2})(t - t_{k-1,2}), \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}(t_{k-1,2}). \quad (3.15)$$

У роботах [11, 12] було наведено аналітичний і чисельний розв'язки диференціального рівняння, що має вигляд, аналогічний до третього рівняння системи (3.11). Побудова вказаного аналітичного розв'язку найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям описана також у четвертому розділі даної роботи і представлена формулами (4.8), (4.13), (4.14), (4.17)–(4.21). Будемо вважати, що за умовою задачі виконується нерівність $c > \frac{n^2 M}{m_c m_p}$. Спираючись на результати, отримані у роботах [11, 12],

знаходимо аналітичний розв'язок третього рівняння системи (3.11) при $k > 1$ і за умови, що $\dot{y}(t_{k-1,2}) \neq 0$, у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -A_{ki}\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_k) - A_{ki}\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_k), \\ y &= A_{ki}e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_k) + l - \frac{q_0}{c} \operatorname{sign} \dot{y}, \\ i = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi_k &= \arctg \frac{(\dot{y}(t_{k-1,2}) + B\delta) \cos \omega t_{k-1,2} + B\omega \sin \omega t_{k-1,2}}{(\dot{y}(t_{k-1,2}) + B\delta) \sin \omega t_{k-1,2} - B\omega \cos \omega t_{k-1,2}}, \\ \delta &= \frac{nM}{m_c m_p}, \quad \omega = \sqrt{\frac{cM}{m_c m_p} - \frac{n^2 M^2}{m_c^2 m_p^2}}, \quad B = y(t_{k-1,2}) - l + \frac{q_0}{c} \operatorname{sign}(\dot{y}(t_{k-1,2})). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Індекс i у розв'язку (3.16) дорівнює нулю у моменти часу $t_{k-1,2}$ і збільшується на одиницю кожен раз, коли система проходить через $\dot{y} = 0$. Моменти часу T_{ki} , в які система i -й раз проходить через $\dot{y} = 0$ на k -му циклі, визначаються за формулою

$$T_{ki} = -\frac{1}{\omega} \left(\arctg \frac{\delta}{\omega} + \varphi_k - \pi(p_k + i - 1) \right), \quad (3.17)$$

де p_k – найменше ціле число, для якого виконується умова $T_{k1} \geq t_{k-1,2}$. Знаючи T_{ki} , можна визначити величини A_{ki} за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} A_{k,0} &= \frac{e^{\delta t_{k-1,2}}}{\omega} \sqrt{\dot{y}(t_{k-1,2})^2 + B^2(\delta^2 + \omega^2) + 2\dot{y}(t_{k-1,2})B\delta}, \\ A_{ki} &= A_{k,0} - \frac{2q_0}{c} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\delta T_{ki}} \sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\delta\pi\alpha}{\omega}}, \quad (i > 0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

де B визначено у формулах (3.16).

Кожен раз, коли має місце ситуація $\dot{y} = 0$, необхідно перевіряти, чи виконується умова $|c(y - l)| > q_0$. Якщо дана умова виконується, то швидкість \dot{y} змінює знак при проходженні через нульове значення, якщо ні – залишається нулем до тих пір, поки ця умова не почне виконуватися. Як бачимо, для перевірки виконання вказаної умови необхідно знати значення координати y в моменти часу T_{ki} , тобто $y(T_{ki})$. Значення $y(T_{ki})$ можна знайти шляхом підстановки (3.17) і (3.18) у (3.16). В результаті маємо

$$y(T_{ki}) = \left(A_{k,0} e^{-\delta T_{ki}} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2q_0}{c} \sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\delta\pi\alpha}{\omega}} + \frac{q_0}{c} \right) (-1)^{p_k+i-1} + l. \quad (3.19)$$

Якщо у певний момент часу T_{ki} має місце нерівність $|c(y(T_{ki}) - l)| \leq q_0$, то рух поршня відносно циліндра припиняється і, починаючи з даного моменту часу, розв'язок третього рівняння системи (3.11) має вигляд

$$y = y(T_{ki}), \quad \dot{y} = 0. \quad (3.20)$$

Ситуація, котра описується співвідношеннями (3.20), матиме місце до тих пір, поки у момент часу t_{k1} поршень не почне рух відносно циліндра в результаті удару останнього об площину $\eta = 0$.

Формули (3.16)–(3.20) являють собою розв'язок третього рівняння системи (3.11) за умови, що початкова швидкість $\dot{y}(t_{k-1,2}) \neq 0$. Якщо ж має місце ситуація, коли $\dot{y}(t_{k-1,2}) = 0$ і $|c(y(t_{k-1,2}) - l)| > q_0$, то розв'язок визначатиметься формулами, що мають той самий вигляд, що і (3.16)–(3.20), але з тією різницею, що замість $\text{sign}(\dot{y}(t_{k-1,2}))$ у цих формулах буде $(-\text{sign}[c(y(t_{k-1,2}) - l)])$. Що ж стосується ситуації, коли $\dot{y}(t_{k-1,2}) = 0$ і $|c(y(t_{k-1,2}) - l)| \leq q_0$, то її немає сенсу розглядати, оскільки у такому випадку рух поршня відносно циліндра буде відсутній, а, отже, циліндр не відриветься від площини $\eta = 0$ і перехід на наступний цикл не відбудеться.

Залишається знайти розв'язок другого рівняння системи (3.11). Для того, щоб це зробити, додамо друге і третє рівняння даної системи. В результаті отримаємо

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\eta + \frac{m_p}{M} y \right) = -g. \quad (3.21)$$

Нескладно переконатися у тому, що рівняння (3.21) описує рух центра мас у вертикальному напрямку в системі $O\xi\eta$. Розв'язуючи дане рівняння при початкових умовах, що були визначені вище, знаходимо значення координати η і швидкості $\dot{\eta}$ у вигляді

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{m_p}{M} (y(t_{k-1,2}) - y) + \frac{m_p}{M} \dot{y}(t_{k-1,2})(t - t_{k-1,2}) - \frac{g(t - t_{k-1,2})^2}{2}, \\ \dot{\eta} &= \frac{m_p}{M} (\dot{y}(t_{k-1,2}) - \dot{y}) - g(t - t_{k-1,2}),\end{aligned}\quad (3.22)$$

де y і \dot{y} визначаються за допомогою формул (3.16)–(3.20).

Формули (3.14)–(3.20) і (3.22) являють собою розв'язок диференціальних рівнянь (3.11), які описують динаміку системи при $\eta > 0$. У моменти часу t_{k1} дана умова перестає виконуватися, оскільки на систему накладається геометрична в'язь $\eta = 0$. На першій стадії первого циклу відповідний момент часу $t_{1,1}$ може бути знайдений із розв'язку (3.14), якщо прийняти $\eta = 0$ у відповідному співвідношенні. В результаті маємо

$$t_{1,1} = \sqrt{\frac{2\eta_0}{g}}. \quad (3.23)$$

Моменти часу t_{k1} при $k > 1$ визначаються з первого співвідношення (3.22), якщо у ньому прийняти $\eta = 0$. Алгебраїчне рівняння відносно t_{k1} , отримане вказаним шляхом, може бути розв'язане аналітично лише у тому випадку, коли рух поршня відносно циліндра припинився під дією сил кулонового тертя раніше, ніж виник контакт з поверхнею $\eta = 0$. Дійсно, після того, як рух поршня відносно циліндра припинився, розв'язок третього рівняння системи (3.11) має вигляд (3.20). Якщо підставити (3.20) у перве із співвідношень (3.22) і прийняти $\eta = 0$, то отримаємо алгебраїчне рівняння, яке має аналітичний розв'язок:

$$t_{k1} = t_{k-1,2} + \frac{1}{g} \frac{m_p}{M} \dot{y}(t_{k-1,2}) + \frac{1}{g} \sqrt{\left(\frac{m_p}{M} \dot{y}(t_{k-1,2}) \right)^2 - 2g \frac{m_p}{M} (y(T_{ki}) - y(t_{k-1,2}))}, \quad (3.24)$$

де $k > 1$, а $y(T_{ki})$ визначається за формулами (3.20).

Якщо рух поршня не припинився за час, поки виконується умова $\eta > 0$, то алгебраїчне рівняння відносно t_{k1} при $k > 1$ не може бути розв'язане аналітично, оскільки координата y , що входить до первого співвідношення

(3.22), визначається за формулами (3.16). Для чисельного розв'язку вказаного алгебраїчного рівняння був застосований метод хорд [127]. Причому інтервали часу, на яких чисельно визначалися t_{k1} , вибиралися таким чином, щоб кожен інтервал містив лише один розв'язок t_{k1} і не містив жодного з моментів часу T_{ki} , коли відбувається зміна структури системи.

3.4. Рух двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при наявності контакту з площею

У моменти часу t_{k1} на систему накладається геометрична в'язь (3.1). При цьому відбувається абсолютно непружний механічний удар абсолютно твердого циліндра маси m_c з абсолютно твердою шорстою площею. Нормальна до площини складова $\dot{\eta}$ швидкості циліндра обертається при ударі в нуль. Отже, маємо

$$\dot{\tilde{\eta}}(t_{k1}) = 0. \quad (3.25)$$

Тут і далі позначення «~» над символом означає, що мається на увазі значення величини, яке вона має матиме після удару.

Оскільки між площею і циліндром при контакті виникають сили кулонового тертя, то в результаті механічного удару змінюватиметься не лише нормальна $\dot{\eta}$, а й дотична $\dot{\xi}$ складова швидкості циліндра. Визначити миттєву зміну дотичної складової швидкості, коли відома миттєва зміна нормальної складової швидкості, можна за допомогою розв'язку основної задачі теорії механічного удару шорстких недеформівних твердих тіл, отриманого у попередньому розділі даної роботи. Для цього зручно піти наступним шляхом. Обчислимо спочатку значення нормальної складової ударного імпульсу I_N . Щоб це зробити, підставимо у друге рівняння системи (2.1) значення нормальної до площини складової швидкості циліндра після удару $\dot{\tilde{\eta}}(t_{k1})$, яке визначається співвідношенням (3.25), а також значення даної складової швидкості до удару $\dot{\eta}(t_{k1})$, яке знайдемо, обчислюючи

значення координат і швидкостей при $t = t_{k1}$ за допомогою формул (3.16)–(3.20) і (3.22). В результаті отримаємо: $I_N = -m_c \dot{\eta}(t_{k1})$. Крім того, відзначимо той факт, що, оскільки обертальний рух в системі відсутній і у горизонтальному напрямку не діють ніякі активні сили, то швидкість ковзання $\dot{\xi}$ не може (у тому числі, в результаті механічного удару) змінити знак на протилежний. Таким чином, в системі можливі лише два випадки удару з кулюзовим тертям: в першому випадку швидкість ковзання в результаті удару не обертається в нуль і не змінює знак, в другому – вона обертається в нуль. В першому з цих двох випадків дотична складова ударного імпульсу I_T визначається за допомогою формули (2.5). А у другому – отримуємо з першого рівняння системи (2.1) рівність $I_T = -M\dot{\xi}(t_{k1})$, де згідно зі співвідношеннями (3.15) маємо $\dot{\xi}(t_{k1}) = \dot{\xi}(t_{k-1,2})$. Щоб визначити, який саме випадок має місце, перший чи другий, робимо спочатку припущення про те, що має місце другий випадок. Якщо в результаті зробленого припущення виконується нерівність $I_T = -M\dot{\xi}(t_{k1}) \leq \mu I_N = -\mu m_c \dot{\eta}(t_{k1})$, то воно є правильним, а якщо ця нерівність не виконується, то має місце перший випадок удару з тертям і для знаходження I_T треба застосовувати формулу (2.5). Враховуючи все вищесказане, знаходимо дотичну до площини складову швидкості після миттєвого накладання в'язі (3.1) у вигляді

$$\dot{\xi}(t_{k1}) = \begin{cases} \dot{\xi}(t_{k1}) + \frac{\mu m_c \dot{\eta}(t_{k1}) \operatorname{sign}(\dot{\xi}(t_{k1}))}{M} & \text{при } M\dot{\xi}(t_{k1}) > -\mu m_c \dot{\eta}(t_{k1}), \\ 0 & \text{при } M\dot{\xi}(t_{k1}) \leq -\mu m_c \dot{\eta}(t_{k1}). \end{cases} \quad (3.26)$$

Вертикальна складова швидкості поршня у системі координат $O\xi\eta$ не зміниться при миттєвому накладанні в'язі $\eta = 0$. А от у системі координат O_1xy вона зміниться, оскільки точка O_1 зв'язана з циліндром, нормальна складова швидкості якого при ударі обертається в нуль. Отже, враховуючи

сказане і формулу (3.25), знаходимо значення вертикальної складової швидкості поршня у системі координат O_1xy у вигляді

$$\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) = \dot{\eta}(t_{k1}) + \dot{y}(t_{k1}). \quad (3.27)$$

Що ж стосується значень координат, то вони при ударі абсолютно твердих тіл не змінюються. Отже, враховуючи, що у моменти часу t_{k1} на систему накладається в'язь $\eta = 0$, можемо записати

$$\tilde{\xi}(t_{k1}) = \xi(t_{k1}), \quad \tilde{\eta}(t_{k1}) = \eta(t_{k1}) = 0, \quad \tilde{y}(t_{k1}) = y(t_{k1}). \quad (3.28)$$

Рівняння динаміки (3.4) з урахуванням (3.8)–(3.10), а також рівності $\eta = 0$, мають наступний вигляд:

$$M\ddot{\xi} = \begin{cases} -\mu N_1 \operatorname{sign} \dot{\xi} & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ -\mu N_2 \operatorname{sign} \dot{\xi} & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| > q_0, \\ -\mu Mg \operatorname{sign} \dot{\xi} & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| \leq q_0, \end{cases}$$

$$\dot{\eta} = 0, \quad (3.29)$$

$$m_p \ddot{y} = \begin{cases} N_1 - Mg & \text{при } \dot{y} \neq 0, \\ N_2 - Mg & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| > q_0, \\ 0 & \text{при } \dot{y} = 0 \text{ і } |c(y-l) + m_p g| \leq q_0, \end{cases}$$

де позначення N_1 і N_2 мають той же самий зміст, що і у формулі (3.9).

Рівняння (3.29) описують динаміку системи при $\eta = 0$. Початковий момент часу дорівнює t_{k1} , а початкові значення координат і швидкостей визначаються за формулами (3.25)–(3.28).

Друге і третє рівняння системи (3.29) можуть бути розв'язані незалежно від першого і одне від одного. Друге рівняння має розв'язок

$$\eta = \tilde{\eta}(t_{k1}) = 0, \quad \dot{\eta} = \dot{\tilde{\eta}}(t_{k1}) = 0, \quad (3.30)$$

який узгоджується з рівнянням в'язі $\eta = 0$.

Третє рівняння системи (3.29) має ті ж самі властивості, що і третє рівняння системи (3.11), а, отже, може бути розв'язане у аналогічний спосіб. За умови, що початкова швидкість $\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) \neq 0$, третє рівняння системи (3.29) має при початкових умовах (3.25)–(3.28) розв'язок

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -\tilde{A}_{ki}\tilde{\delta}e^{-\tilde{\delta}t} \cos(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi}_k) - \tilde{A}_{ki}\tilde{\omega}e^{-\tilde{\delta}t} \sin(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi}_k), \\
y &= \tilde{A}_{ki}e^{-\tilde{\delta}t} \cos(\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi}_k) + l - \frac{m_p g}{c} - \frac{q_0}{c} \operatorname{sign} \dot{y}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \\
\tilde{\varphi}_k &= \operatorname{arctg} \frac{(\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) + \tilde{B}\tilde{\delta}) \cos \tilde{\omega}t_{k1} + \tilde{B}\tilde{\omega} \sin \tilde{\omega}t_{k1}}{(\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) + \tilde{B}\tilde{\delta}) \sin \tilde{\omega}t_{k1} - \tilde{B}\tilde{\omega} \cos \tilde{\omega}t_{k1}}, \\
\tilde{\delta} &= \frac{n}{m_p}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{c}{m_p} - \frac{n^2}{m_p^2}}, \quad \tilde{B} = y(t_{k1}) - l + \frac{m_p g}{c} + \frac{q_0}{c} \operatorname{sign}(\dot{\tilde{y}}(t_{k1})),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

де $\dot{\tilde{y}}(t_{k1})$ визначається за формулою (3.27). Відмітимо, що, оскільки $\frac{M}{m_c} = \frac{m_p + m_c}{m_c} > 1$ і, як було сказано вище, $c > \frac{n^2 M}{m_c m_p}$, то $\frac{c}{m_p} > \frac{n^2}{m_p^2}$, а, отже, $\tilde{\omega}$ у формулах (3.31) буде дійсним числом.

Формули (3.31) за своїм механічним змістом аналогічні формулам (3.16). Співвідношення, аналогічні до (3.17)–(3.19), матимуть у випадку третього рівняння системи (3.29) вигляд

$$\tilde{T}_{ki} = -\frac{1}{\tilde{\omega}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\omega}} + \tilde{\varphi}_k - \pi (\tilde{p}_k + i - 1) \right), \tag{3.32}$$

де \tilde{p}_k – найменше ціле число, для якого виконується умова $\tilde{T}_{k1} \geq t_{k1}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{k,0} &= \frac{e^{\tilde{\delta}t_{k1}}}{\tilde{\omega}} \sqrt{\dot{\tilde{y}}(t_{k1})^2 + \tilde{B}^2 (\tilde{\delta}^2 + \tilde{\omega}^2)} + 2\dot{\tilde{y}}(t_{k1})\tilde{B}\tilde{\delta}, \\
\tilde{A}_{ki} &= \tilde{A}_{k,0} - \frac{2q_0}{c} \frac{\sqrt{\tilde{\delta}^2 + \tilde{\omega}^2}}{\tilde{\omega}} e^{\tilde{\delta}\tilde{T}_{ki}} \sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\tilde{\delta}\pi\alpha}{\tilde{\omega}}}, \quad (i > 0),
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$y(\tilde{T}_{ki}) = \left(\tilde{A}_{k,0} e^{-\tilde{\delta}\tilde{T}_{ki}} \frac{\tilde{\omega}}{\sqrt{\tilde{\delta}^2 + \tilde{\omega}^2}} - \frac{2q_0}{c} \sum_{\alpha=0}^{i-1} e^{-\frac{\tilde{\delta}\pi\alpha}{\tilde{\omega}}} + \frac{q_0}{c} \right) (-1)^{\tilde{p}_k+i-1} + l - \frac{m_p g}{c}. \tag{3.34}$$

Якщо у певний момент часу \tilde{T}_{ki} має місце нерівність $|c(y(\tilde{T}_{ki}) - l) + m_p g| \leq q_0$, то рух поршня відносно циліндра припиняється і, починаючи з даного моменту часу, розв'язок третього рівняння системи (3.29) має вигляд

$$y = y(\tilde{T}_{ki}), \quad \dot{y} = 0. \tag{3.35}$$

Коли розв'язок третього рівняння системи (3.29) має вигляд (3.35), виконується нерівність $|c(y - l) + m_p g| \leq q_0$. Виконання даної нерівності при $\eta = 0$ і $\dot{y} = 0$ означає згідно з (3.9), що нормальнна складова реакції буде $N = Mg$, а, отже, не обертатиметься в нуль. Звідси випливає, що, починаючи з того моменту часу, коли розв'язок третього рівняння системи (3.29) матиме вигляд (3.35), контакт циліндра з поверхнею $\eta = 0$ матиме місце нескінченно довго.

Формули (3.31)–(3.35) являють собою розв'язок третього рівняння системи (3.29) за умови, що початкова швидкість $\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) \neq 0$. Якщо ж має місце ситуація, коли $\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) = 0$ і $|c(y(t_{k1}) - l) + m_p g| > q_0$, то розв'язок визначатиметься формулами, що мають той самий вигляд, що і (3.31)–(3.35), але з тією різницею, що замість $\text{sign}(\dot{\tilde{y}}(t_{k1}))$ у цих формулах буде $(-\text{sign}|c(y(t_{k1}) - l) + m_p g|)$. Що ж стосується ситуації, коли $\dot{\tilde{y}}(t_{k1}) = 0$ і $|c(y(t_{k1}) - l) + m_p g| \leq q_0$, то, починаючи з моменту часу t_{k1} , розв'язок матиме вигляд співвідношень (3.35), в яких замість $y(\tilde{T}_{ki})$ буде $y(t_{k1})$.

Залишається розв'язати перше рівняння системи (3.29). Для цього відмітимо спочатку, що права частина даного рівняння являє собою силу кулонового тертя. Оскільки ніякі активні сили в напрямку $O\xi$ не діють, а площа $\eta = 0$ нерухома, то швидкість $\dot{\xi}$ не може змінити знак, а може лише обернутися в нуль.

Нехай початкова швидкість $\dot{\xi}_0 > 0$. Спираючись на вищесказане, необхідно знайти розв'язок першого рівняння системи (3.29) у двох випадках: при $\dot{\xi} > 0$ і при $\dot{\xi} = 0$. Розглянемо спочатку випадок $\dot{\xi} > 0$. Для того, щоб це зробити, врахуємо той факт, що $\text{sign} \dot{\xi} = 1$ при $\dot{\xi} > 0$, помножимо ліву і праву частини третього рівняння системи (3.29) на μ і додамо отриманий результат до першого рівняння системи (3.29). Неважко

переконатися, що в результаті при будь-яких значеннях \dot{y} і $|c(y - l) + m_p g|$ отримаємо за умови, що $\dot{\xi} > 0$, наступне рівняння:

$$\frac{d^2}{dt^2}(M\xi + \mu m_p y) = -\mu Mg. \quad (3.36)$$

Розв'язок рівняння (3.36) при початкових умовах, що визначаються формулами (3.25)–(3.28), має вигляд:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t_{k1}) - \frac{\mu m_p}{M} (y - y(t_{k1})) + \left(\dot{\tilde{\xi}}(t_{k1}) + \frac{\mu m_p}{M} \dot{\tilde{y}}(t_{k1}) \right) (t - t_{k1}) - \frac{\mu g}{2} (t - t_{k1})^2, \\ \dot{\xi} &= \dot{\tilde{\xi}}(t_{k1}) - \frac{\mu m_p}{M} (\dot{y} - \dot{\tilde{y}}(t_{k1})) - \mu g (t - t_{k1}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

де $\dot{\tilde{\xi}}(t_{k1})$ визначається за формулою (3.26), $\dot{\tilde{y}}(t_{k1})$ – формулою (3.27), а y і \dot{y} – співвідношеннями (3.31)–(3.35). Оскільки у правих частинах співвідношень (3.37) стоять величини, знайдені нами раніше, то дані формули дозволяють знайти ξ і $\dot{\xi}$ при $\dot{\xi} > 0$.

Співвідношення (3.37) являють собою розв'язок першого рівняння системи (3.29) при $\dot{\xi} > 0$. Якщо ж $\dot{\xi} = 0$, то дане рівняння зводиться до вигляду

$$\ddot{\xi} = 0. \quad (3.38)$$

Для розв'язання рівняння (3.38) необхідно знати момент часу, який ми позначимо t_s , коли швидкість $\dot{\xi}$ обертається в нуль. Якщо формула (3.26) дає $\dot{\tilde{\xi}}(t_{k1}) = 0$, то, очевидно, $t_s = t_{k1}$ і $\xi(t_s) = \xi(t_{k1})$. У протилежному випадку t_s необхідно шукати шляхом розв'язку алгебраїчного рівняння, яке випливає зі співвідношення (3.37) для $\dot{\xi}$, якщо там прийняти $\dot{\xi} = 0$ і $t = t_s$. Отримане у такий спосіб алгебраїчне рівняння було розв'язане чисельно методом хорд. Особливості застосування даного методу – ті ж самі, що і описані у попередньому параграфі. Значення координати $\xi(t_s)$ знаходимо шляхом підстановки $t = t_s$ у перше зі співвідношень (3.37). Розв'язок рівняння (3.38)

при початковому моменті часу t_s , початковій координаті $\xi(t_s)$ і початковій швидкості $\dot{\xi}(t_s) = 0$ має вигляд

$$\xi = \xi(t_s), \quad \dot{\xi} = 0. \quad (3.39)$$

Співвідношення (3.30)–(3.35), (3.37) і (3.39) являють собою розв'язок диференціальних рівнянь (3.29), а, отже, описують динаміку системи при kontaktі з площиною $\eta = 0$. У моменти часу t_{k_2} цей контакт зникає, тобто відбувається відскакування циліндра від в'язі $\eta = 0$. Для того, щоб знайти моменти часу t_{k_2} , відзначимо, що, оскільки в'язь (3.1) неутримуюча, то контакт циліндра із площиною $\eta = 0$ має місце до тих пір, поки виконується умова $N > 0$. З формули (3.9) випливає, що нормальнна складова реакції N може зменшитися до нуля лише у одному з двох випадків: $\dot{y} \neq 0$ або $\dot{y} = 0$ і $|c(y - l) + m_p g| > q_0$. У випадку, коли $\dot{y} = 0$ і $|c(y - l) + m_p g| \leq q_0$, формула (3.9) дає $N = Mg > 0$, а, значить, відскакування циліндра від площини не відбувається. Отже, враховуючи сказане, знаходимо рівняння відносно t_{k_2} шляхом підстановки співвідношень (3.31)–(3.34) у формулу (3.9) і приймаючи $t = t_{k_2}$ і $N = 0$. Отримане у такий спосіб алгебраїчне рівняння було розв'язане чисельно методом хорд. Особливості застосування даного методу – ті ж самі, що і описані у попередньому параграфі.

3.5. Аналіз динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям при конкретних значеннях параметрів і початкових умовах

Виберемо наступні значення параметрів системи:

$$\begin{aligned} m_c &= 0,1 \text{ кг}, & m_p &= 1 \text{ кг}, & l &= 0,1 \text{ м}, & c &= 2000 \text{ Н/м}, & n &= 1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}, \\ \mu &= 0,4, & q_0 &= 0,5 \text{ Н}, & \dot{\xi}_0 &= 6 \text{ м/с}, & \eta_0 &= 0,04 \text{ м}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Початкові умови визначаються формулами (3.12).

У Таблиці 3.1. наведено результати обчислення величин t_{k_1} і t_{k_2} , а також тих моментів часу T_{ki} і \tilde{T}_{ki} , коли рух поршня відносно циліндра

припиняється, і відповідні значення $y(T_{ki})$ і $y(\tilde{T}_{ki})$. Ті моменти часу T_{ki} і \tilde{T}_{ki} , коли рух поршня відносно циліндра не припиняється, в Таблиці 3.1. наведені не будуть.

Таблиця 3.1.

Результати обчислення величин t_{k1} , t_{k2} , T_{ki} , $y(T_{ki})$, \tilde{T}_{ki} і $y(\tilde{T}_{ki})$

k	T_{ki} , с	$y(T_{ki})$, м	t_{k1} , с	t_{k2} , с	\tilde{T}_{ki} , с	$y(\tilde{T}_{ki})$, м
1	—	—	0,0903	0,1719	—	—
2	$T_{2,6} = 0,2882$ с	0,1001	0,3156	0,4006	—	—
3	$T_{3,5} = 0,4953$ с	0,1000	0,5120	0,6017	—	—
4	$T_{4,4} = 0,6743$ с	0,0998	0,6847	0,7812	—	—
5	—	—	0,8359	0,9502	—	—
6	—	—	0,9753	—	$\tilde{T}_{6,9} = 1,5906$ с	0,0952

Як можна бачити з Таблиці 3.1., відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ при початкових умовах (3.12) і значеннях параметрів (3.40) відбувається п'ять разів. На перших стадіях другого, третього і четвертого циклів рух поршня відносно циліндра припиняється раніше, ніж відбувається удар останнього об площину $\eta = 0$. Причому, на другому циклі рух поршня відносно циліндра припиняється, коли ситуація $\dot{y} = 0$ трапляється в шостий раз, на третьому – в п'ятий, а на четвертому – в четвертий. На перших стадіях п'ятого і шостого циклів рух циліндра відносно поршня не встигає припинитися раніше, ніж відбувається удар. На шостому циклі відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ не відбувається. Рух поршня відносно циліндра на другій стадії шостого циклу припиняється тоді, коли ситуація $\dot{y} = 0$ трапляється в дев'ятий раз.

Рух циліндра у горизонтальному напрямку припиняється на другій стадії шостого циклу в момент часу $t_s = 1,5293$ с.

На Рис. 3.2. наведено графік залежності координати y від часу t на інтервалі $t \in [0; 1,7]$ с.

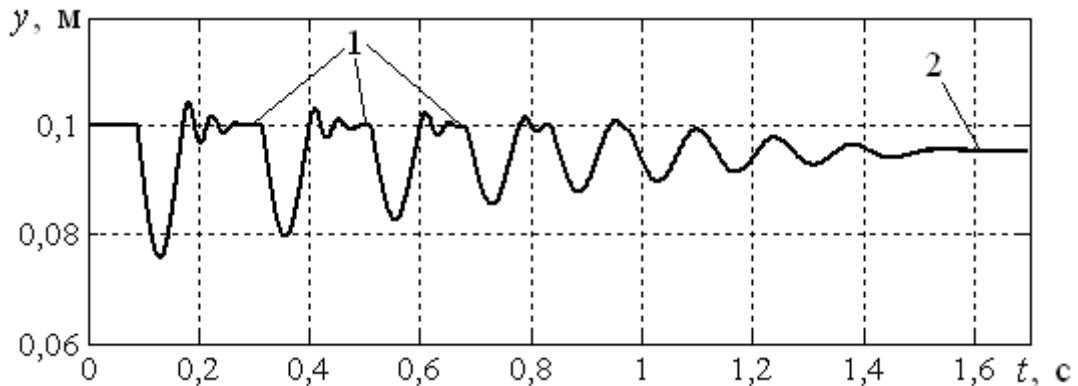


Рис. 3.2. Рух циліндра і поршня один відносно одного

З графіку на Рис. 3.2. видно, що рух циліндра і поршня один відносно одного у вертикальному напрямку являють собою складний коливальний процес. Причому, частоти коливань при $\eta > 0$ і $\eta = 0$ різні. Це узгоджується з формулами (3.16) і (3.31), які при значеннях параметрів (3.40) дають для $\eta > 0$ частоту $\omega \approx 148 \text{ c}^{-1}$, а для $\eta = 0$ буде $\tilde{\omega} \approx 45 \text{ c}^{-1}$. Коливання в системі затухають внаслідок дії сил в'язкого і кулонового тертя. На перших стадіях другого, третього і четвертого циклів рух поршня і циліндра один відносно одного припиняється повністю, внаслідок чого на графіку виникають інтервали, для яких $y = y(T_{ki}) = \text{const}$ (T_{ki} і відповідні значення $y(T_{ki})$ наведені у таблиці 1). На Рис. 3.2. вказані інтервали позначені цифрою 1. На п'ятому і шостому циклах така зупинка не відбувається. Це означає, що на п'ятому і шостому циклах удар циліндра об площину $\eta = 0$ відбувається за наявності руху в системі O_1xy . В результаті величина ударного імпульсу залежатиме не лише від вертикальної складової швидкості руху центра мас у системі $O\xi\eta$, а й від швидкості руху циліндра відносно центра мас системи. Це треба враховувати при проектуванні механізмів, в яких може виникати фрикційно-ударна взаємодія. На другій стадії шостого циклу відскакування циліндра від площини $\eta = 0$ не відбувається, коливання затухають і в момент часу

$\tilde{T}_{6,9} = 1,5906$ с рух поршня відносно циліндра припиняється. Ділянка графіку, для якої $y = y(\tilde{T}_{6,9}) = 0,0952$ м = const, позначена на Рис. 3.2. цифрою 2.

На Рис. 3.3. наведено графік залежності швидкості $\dot{\xi}$ від часу t на інтервалах $t \in [0;2]$ с (графік зліва) і $t \in [0,5;0,54]$ с (графік справа) відповідно. Залежність на Рис. 3.3. являє собою послідовність інтервалів, на яких швидкість $\dot{\xi}$ стала, що має місце при $\eta > 0$, і інтервалів, на яких вона зменшується, що характерно для ситуації $\eta = 0$. Останній інтервал часу, для якого швидкість $\dot{\xi}$ відмінна від нуля і стала, закінчується в момент часу $t_{6,1} = 0,9753$ с (див. Таблицю 3.1.), коли відбувається перехід від першої до другої стадії шостого циклу. На інтервалі, що починається в момент часу $t_{6,1} = 0,9753$ с і закінчується в момент часу $t_s = 1,5293$ с, швидкість $\dot{\xi}$ монотонно спадає. Починаючи з моменту часу $t_s = 1,5293$ с, маємо $\dot{\xi} = 0$.

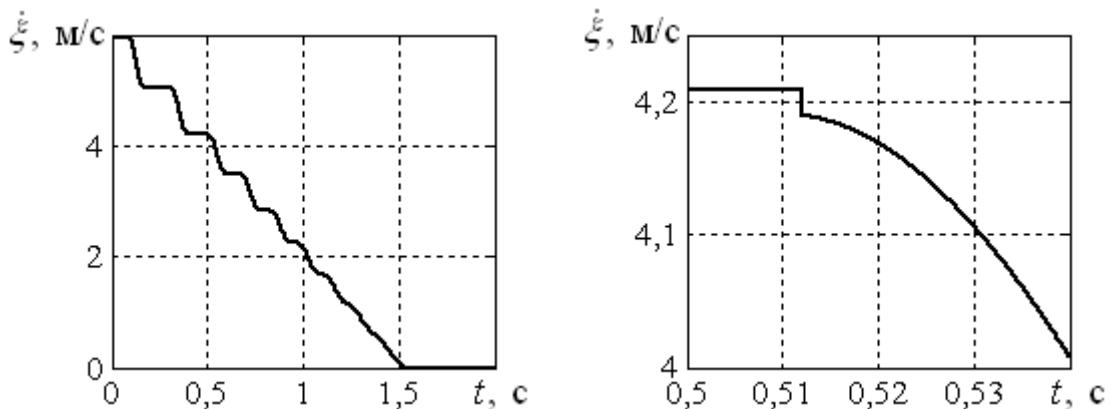


Рис. 3.3. Залежність дотичної складової швидкості циліндра від часу

З правого графіку на Рис. 3.3. видно, що залежність $\dot{\xi}$ від t є розривною. Розрив, який можна побачити на правому графіку Рис. 3.3., виникає через те, що в момент часу $t_{3,1} = 0,5120$ с відбувається механічний удар абсолютно твердого циліндра з абсолютно твердою шорсткою площею. Миттєва зміна швидкості $\dot{\xi}$ при ударі була описана за допомогою формули (3.26). Очевидно, розриви такого типу мають місце у кожен з моментів часу t_{k1} . Для того, щоб залежності швидкостей від часу були

неперервними, необхідно при побудові механіко-математичних моделей вводити безінерційні пружні елементи в тих частинах системи, де відбувається удар абсолютно твердих тіл.

На Рис. 3.4. наведено графік залежності нормальної складової N реакції в'язі (3.1) від часу t на інтервалі $t \in [0,8;1,7]$ с.

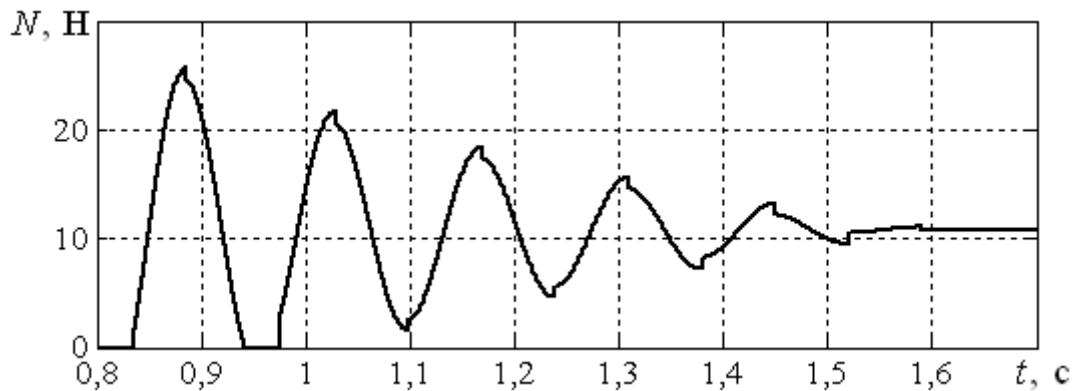


Рис. 3.4. Залежність нормальної складової реакції від часу

Як можна бачити з Рис. 3.4., залежність N від t є розривною. Наявність розривів пов'язана з тим, що, як видно з (3.9), нормальна складова реакції N залежить від сили кулонового тертя між циліндром і поршнем, яка є розривною. Отже, розриви мають місце в моменти часу \tilde{T}_{ki} , коли трапляється ситуація $\dot{y} = 0$ при наявності контакту циліндра із площиною $\eta = 0$.

Інтервали часу, для яких $N = 0$, мають місце на першій стадії кожного циклу, тобто при $t \in [t_{k-1,2}; t_{k1}]$.

На Рис. 3.5. наведено траєкторію руху точки O_1 циліндра у системі відліку $O\xi\eta$.

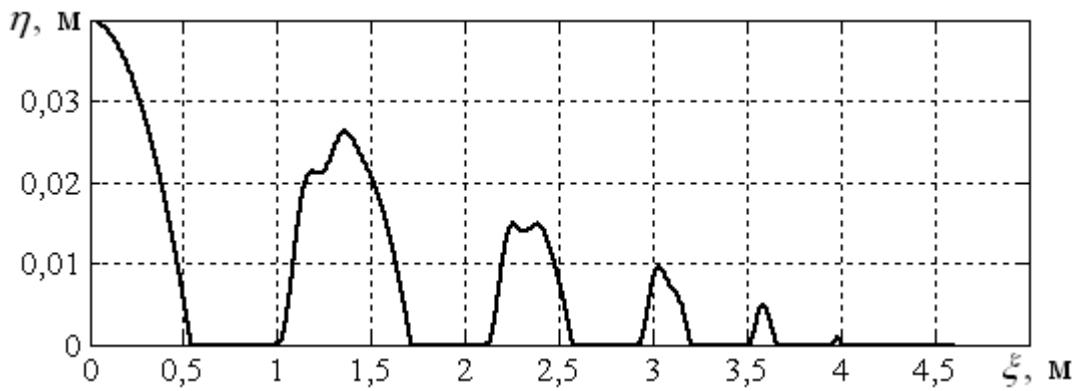


Рис. 3.5. Траєкторія руху точки O_1 циліндра у системі координат $O\xi\eta$

Траєкторія руху точки O_1 циліндра, наведена на Рис. 3.5., являє собою послідовність інтервалів, для яких $\eta > 0$, і інтервалів, для яких $\eta = 0$. При $\eta = 0$ отриманий вид траєкторії є результатом ковзання циліндра вздовж площини. Якщо $\eta > 0$, то траєкторія виникає внаслідок суперпозиції руху центра мас в системі $O\xi\eta$ і руху точки O_1 відносно центра мас. Цим пояснюється, наприклад, той факт, що на третьому циклі руху можна побачити два максимуми на графіку. Коли рух циліндра і поршня один відносно другого відсутній, то траєкторія руху точки O_1 при $\eta > 0$ являє собою параболу.

Завершуючи даний розділ, порівняємо динаміку двомасової віброударної системи, яка вивчається, при різних значеннях початкової висоти. Всі параметри системи, окрім жорсткості пружини c і початкової висоти η_0 , визначаються формулами (3.40). Жорсткість пружини, що з'єднує циліндр і поршень, приймемо $c = 20000 \text{ Н/м}$. Задача полягає у тому, щоб порівняти динаміку системи при двох різних значеннях початкової висоти: $\eta_0 = 0,09 \text{ м}$ і $\eta_0 = 0,005 \text{ м}$.

На Рис. 3.6. показано залежність координати y від часу t , причому верхній графік побудований при $\eta_0 = 0,09 \text{ м}$, а нижній – при $\eta_0 = 0,005 \text{ м}$. Червоними стрілками показані точки, які відповідають моментам часу, коли відбуваються удари.

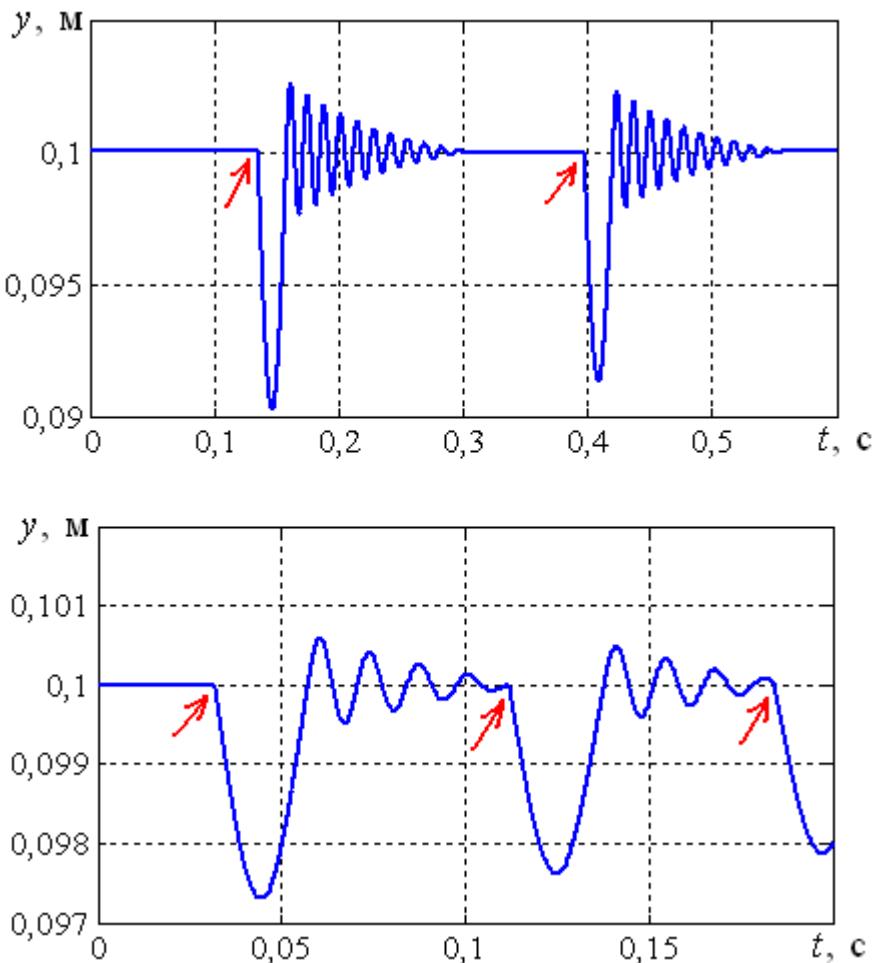


Рис. 3.6. Залежність координати y від часу t

при різних значеннях початкової висоти

Як можна бачити, при більшій початковій висоті (верхній графік) коливання циліндра і поршня один відносно одного встигають повністю затухнути на інтервалі часу між двома послідовними ударами, а при меншій початковій висоті (нижній графік) – не встигають. Цікавим при цьому є те, що при більшій початковій висоті початкова амплітуда коливань, що виникають внаслідок удару, а також кількість коливань на інтервалі часу між двома послідовними ударами, більші, ніж при меншій початковій висоті. Якщо коливання циліндра і поршня один відносно одного, а, отже, і відносно їхнього спільногого центра мас, не встигають припинитися на інтервалі часу між двома послідовними ударами, то це означає, що при виникненні контакту з площиною рух циліндра може підсилювати або послаблювати

силу ударної взаємодії. Вказане явище треба враховувати при проектуванні різного обладнання, зокрема штампувальних пресів, оскільки згадане підсилення або послаблення сили ударної взаємодії може впливати на швидкість зношування деталей машин, а також на якість обробки.

На Рис. 3.7. показано графіки залежності висоти η від часу t при $\eta_0 = 0,09$ м (верхній графік) і при $\eta_0 = 0,005$ м (нижній графік).

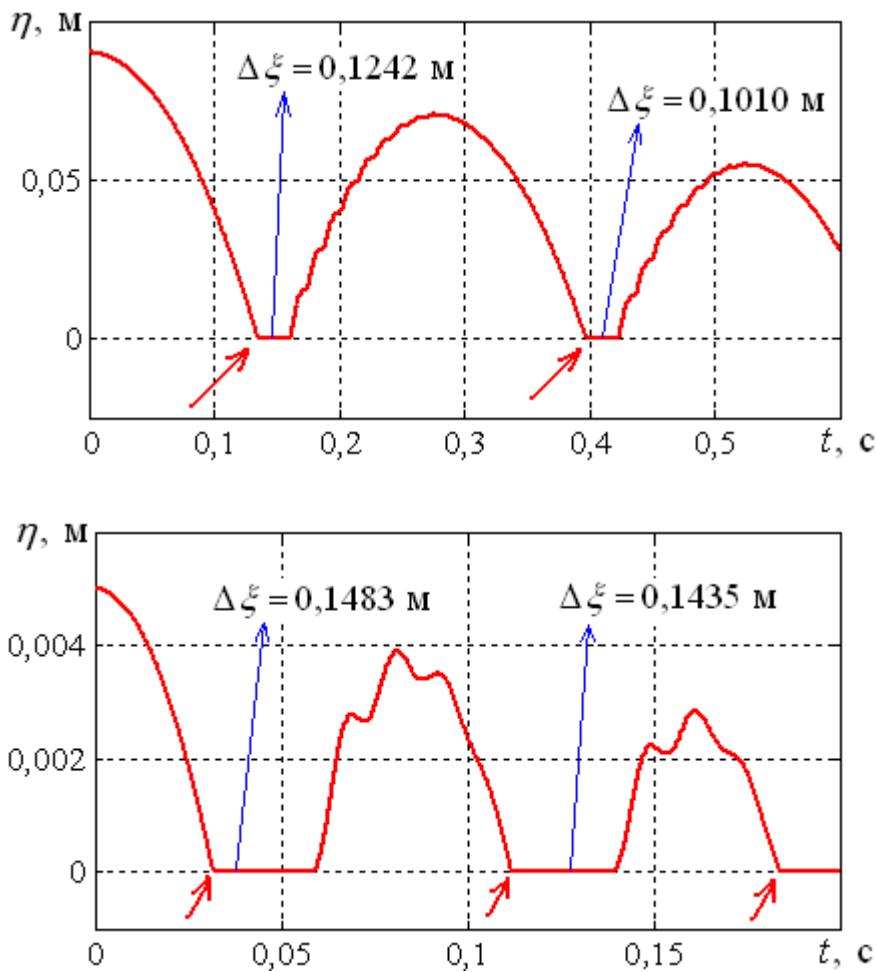


Рис. 3.7. Залежність координати η від часу t
при різних значеннях початкової висоти

Червоними стрілками на Рис. 3.7. показані точки, які відповідають моментам часу, коли відбуваються удари. А синіми – шлях $\Delta\xi$, пройдений циліндром по горизонталі на інтервалі часу від моменту удару до відскакування циліндра від площини. Як можна бачити, при більшому значенні початкової висоти шлях $\Delta\xi$ виявляється меншим.

3.6. Висновки до третього розділу

Були побудовані і розв'язані рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка може бути застосована в якості механіко-математичної моделі явищ, що мають місце при фрикційно-ударній взаємодії робочого органу машини (наприклад, штампувального пресу) і заготовки в процесі металообробки. Можемо зробити висновки:

1. Розв'язки рівнянь динаміки мають розриви по швидкості у моменти часу, коли відбувається удар абсолютно твердого тіла з абсолютно твердою шорсткою площиною. Розривів по координаті в моменти, коли відбувається удар, немає. Коли швидкість \dot{y} обертається в нуль або змінює знак, розривів по координаті і швидкості немає, а є лише розриви по силі реакції. Такі результати узгоджуються з положеннями теоретичної механіки, а, отже, свідчать про те, що система диференціальних рівнянь зі змінною структурою була розв'язана правильно.
2. За час, поки виконується умова $\eta > 0$, коливання циліндра і поршня один відносно другого можуть або зникнути під дією сил кулонового тертя, або затухати не остаточно. Це залежить від параметрів конкретної системи, що вивчається, та інтервалу часу, протягом якого виконується умова $\eta > 0$. Коливання можуть викликати перевантаження в системі при механічному ударі.
3. Шляхом порівняння розв'язків рівнянь динаміки двомасової віброударної системи при різних значеннях початкової висоти показано, що при більшій початковій висоті коливання циліндра і поршня один відносно одного повністю затухають на інтервалі часу між двома послідовними ударами, а шлях $\Delta\xi$, пройдений циліндром по горизонталі на інтервалі часу між ударом і наступним відскакуванням, виявляється меншим.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковані в роботах [3–5].

РОЗДІЛ 4

РОЗРАХУНКОВА СХЕМА ДЛЯ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ З КУЛОНОВИМ ТЕРТЯМ

4.1. Проблема побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертятм

Рівняння динаміки механічної системи з одним ступенем свободи має в декартових координатах загальний вигляд

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x_0 = x(t_0), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0), \quad (4.1)$$

де t – час, x – координата, \dot{x} – перша похідна від координати по часу, тобто швидкість, \ddot{x} – друга похідна від координати по часу, тобто прискорення, t_0 – початковий момент часу, x_0 – початкова координата і \dot{x}_0 – початкова швидкість. У рівнянні (4.1) маса m була перенесена у праву частину. Якщо права частина рівняння (4.1) неперервна, то воно може бути проінтегроване чисельно за допомогою, наприклад, методу Рунге-Кутта для диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \Delta t, \\ x_{n+1} &= x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{1}{6} (k_1 + k_2 + k_3) \Delta t, \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n, \dot{x}_n) \Delta t, \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}\right) \Delta t, \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4} \Delta t, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}\right) \Delta t, \\ k_4 &= f\left(t_n + \Delta t, x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{k_2}{2} \Delta t, \dot{x}_n + k_3\right) \Delta t. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Формули (4.2) і (4.3) наведені, зокрема, у довіднику «Справочник по математике для научных работников и инженеров» (автори Корн Г. А., Корн Т. М.) [128, с. 707–708], а також у довіднику «Handbook of mathematics for engineers and scientists» (автори Polyanin A. D., Manzhirov A. V.) [129, с. 511–512].

У системах з кулоновим тертям права частина рівняння (4.1) залежить від кулонового тертя, яке визначається співвідношеннями виду (1.1), а тому є розривною при $v_T = 0$ (v_T має той самий зміст, що і в першому розділі). Отже, застосувати напряму формули Рунге-Кутта у вигляді (4.2) і (4.3) не можна. В той же час, як було зазначено у першому розділі, актуальним є пошук чисельних методів, які б коректно працювали при $v_T = 0$, а також в околі даного значення швидкості ковзання.

4.2. Рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям і відповідний аналітичний розв'язок

Для побудови розрахункової схеми для рівняння (4.1) у випадку, коли його права частина залежить від сили кулонового тертя (1.1), розглянемо приклад найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям, зображеного на Рис. 4.1., рівняння динаміки якої має аналітичний розв'язок. Знайдемо спочатку цей аналітичний розв'язок для того, щоб використовувати його потім для оцінки точності розрахункової схеми.

Абсолютно тверде тіло маси $m = 2 \text{ кг}$ ковзає по нерухомій недеформівній горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя ковзання $\mu = 0,75$. Зліва тіло з'єднане з недеформівною вертикальною стінкою за допомогою пружини, що має жорсткість $k = 3 \text{ Н/м}$ і коефіцієнт дисипації $2h$, де $h = 0,3 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$. Прискорення вільного падіння $g = 9,81 \text{ м}/\text{с}^2$. Початковий момент часу $t_0 = 0$, початкова координата $x_0 = 85 \text{ м}$ і початкова швидкість $\dot{x}_0 = 225 \text{ м}/\text{с}$. В якості початку відліку координати x виберемо точку, в якій

знаходиться центр мас тіла m , коли пружина недеформована. Розглянемо динаміку цієї системи протягом 20 с, починаючи з моменту часу t_0 .

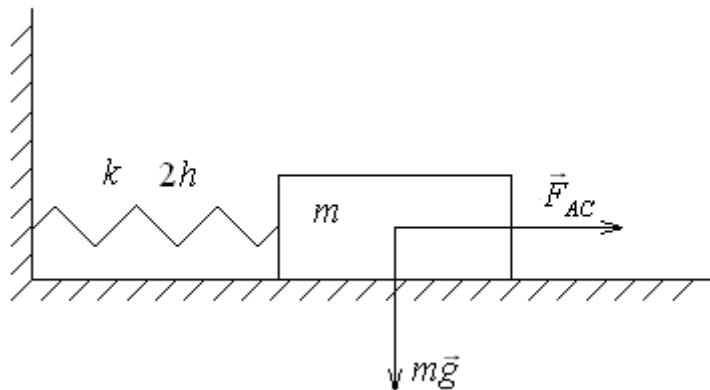


Рис. 4.1. Найпростіша коливальна система з в'язким і кулоновим тертям

На Рис. 4.1. F_{AC} – активна сила, яка починяє діяти в момент часу $t_F = 16$ с і зростає пропорційно часу. Ця сила може бути описана залежністю

$$F_{AC} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_F, \\ a(t - t_F) & \text{при } t \geq t_F, \end{cases} \quad (4.4)$$

де $a = 50 \text{ H/c}$.

До системи, зображененої на Рис. 4.1., може бути застосований закон тертя у вигляді (1.1), якщо прийняти

$$\nu_T = \dot{x}, \quad |\mathbf{N}| = mg, \quad \sum F_A = -2h\dot{x} - kx + F_{AC}. \quad (4.5)$$

Отже, якщо врахувати закон тертя у вигляді (1.1) і формули (4.5), то рівняння динаміки системи, що вивчається, може бути записане у вигляді

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -\mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}) + F_{AC} & \text{при } \dot{x} \neq 0, \\ m\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = -\mu mg \operatorname{sign}(\sum F_A) + F_{AC} & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ і } |\sum F_A| > \mu mg, \\ m\ddot{x} = 0 & \text{при } \dot{x} = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leq \mu mg, \end{cases} \quad (4.6)$$

де з метою скорочення запису використано позначення $\sum F_A$ згідно (4.5).

Рівняння (4.6) можна легко привести до виду (4.1), якщо поділити ліву і праву частини на m і перенести усі доданки, окрім \ddot{x} , у праву частину. Як можна бачити, рівняння динаміки (4.6) має змінну структуру.

Рівняння (4.6) можна розв'язати аналітично. Для того, щоб це зробити, зазначимо, що, оскільки $t_0 = 0$, то спочатку має місце ситуація, коли $t < t_F$. Крім того, в початковий момент часу $\dot{x} \neq 0$. Щоб отримати аналітичний розв'язок рівняння (4.6) при $\dot{x} \neq 0$, треба окремо розглядати ситуації, коли $\dot{x} > 0$ і $\dot{x} < 0$. При $\dot{x} > 0$ маємо $\text{sign}(\dot{x}) = 1$. Отже, для даної ситуації, яка має місце у початковий момент часу, знаходимо розв'язок

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\mu mg}{k}, \\ \dot{x} &= -A\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \\ \delta &= \frac{h}{m} = 0,15 \text{ c}^{-1}, \quad \omega = \frac{\sqrt{km - h^2}}{m} \approx 1,2155 \text{ c}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для побудови розв'язку (4.7) був використаний той факт, що при обраних значеннях m , h і k відповідне характеристичне рівняння має два комплексно спряжених кореня. У (4.7) величини A і φ визначаються з початкових умов наступним чином:

$$\begin{aligned} A &= \frac{e^{\delta t_0}}{\omega} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right)^2 (\delta^2 + \omega^2) + 2\dot{x}_0 \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \delta} \approx 215,8177 \text{ м}, \\ \varphi &= \arctg \frac{\left(\dot{x}_0 + \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \delta\right) \cos \omega t_0 + \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \omega \sin \omega t_0}{\left(\dot{x}_0 + \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \delta\right) \sin \omega t_0 - \left(x_0 + \frac{\mu mg}{k}\right) \omega \cos \omega t_0} \approx -1,1411. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Формули (4.7) і (4.8) являють собою розв'язок рівняння (4.6) на інтервалі часу, протягом якого виконується умова $\dot{x} > 0$. Ситуація, коли \dot{x} обертається в нуль, вперше трапиться у момент часу T_1 , який визначається з розв'язку тригонометричного рівняння, одержаного шляхом підстановки $\dot{x}(T_1) = 0$ у відповідне співвідношення (4.7). Даний розв'язок має вигляд

$$T_1 = -\frac{1}{\omega} \left(\arctg \frac{\delta}{\omega} + \varphi - \pi p \right) \approx 0,8378 \text{ с}, \quad (4.9)$$

де p – найменше ціле число, при якому виконується нерівність $T_1 \geq t_0$ (в даному випадку $t_0 = 0$ і $p = 0$). Значення координати x в момент часу T_1

визначаємо шляхом підстановки (4.9) у відповідне співвідношення (4.7).
Маємо

$$x(T_1) = \left(A e^{-\delta T_1} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{\mu m g}{k} \right) (-1)^p \approx 183,9938 \text{ м.} \quad (4.10)$$

Використовуючи (4.4), (4.5), (4.9) і (4.10), переконуємося, що в момент часу T_1 виконується умова $|\sum F_A| > \mu m g$. Отже, в момент часу T_1 має місце ситуація, коли $\dot{x} = 0$ і $|\sum F_A| > \mu m g$. Але оскільки ця ситуація має місце тільки в момент часу T_1 і координата $x(T_1)$ та швидкість $\dot{x}(T_1)$ вже відомі, то розв'язувати диференціальне рівняння (4.6) окремо для цього випадку немає необхідності.

Після моменту часу T_1 має місце випадок $\dot{x} < 0$, для якого $\text{sign}(\dot{x}) = -1$. Для цього випадку розв'язок рівняння (4.6) має майже той самий вигляд, що і (4.7). Різниця у тому, що перед $\frac{\mu m g}{k}$ буде знак «+», і замість A буде $A(T_1)$. Множник $A(T_1)$ визначається з початкових умов T_1 , $x(T_1)$, $\dot{x}(T_1) = 0$ за формулою, яка аналогічна (4.8) і відрізняється від неї лише тим, що перед $\frac{\mu m g}{k}$ буде знак «-». Враховуючи сказане та співвідношення (4.10), знаходимо

$$A(T_1) = A - \frac{2\mu m g}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\delta T_1} \approx 204,6098 \text{ м.} \quad (4.11)$$

Зазначимо, що $\varphi(T_1) = \varphi$, у чому легко переконатися шляхом підстановки (4.9) і (4.10) у відповідне співвідношення (4.8), враховуючи зауваження щодо знаків, зроблені вище.

Повторюючи ті ж самі міркування, які були наведені вище, знаходимо момент часу T_2 , коли матиме місце ситуація $\dot{x} = \dot{x}(T_2) = 0$. Так само, як і раніше, переконуємося, що в момент часу T_2 виконується умова $|\sum F_A| > \mu m g$. Маємо

$$\begin{aligned}
T_2 &= -\frac{1}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega} + \varphi - \pi(p+1) \right) \approx 3,4223 \text{ с}, \\
x(T_2) &= \left(A e^{-\delta T_2} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2\mu mg}{k} \left(1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}} \right) + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{p+1} \approx \\
&\approx -116,6295 \text{ м}, \\
A(T_2) &= A - \frac{2\mu mg}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\delta T_2} \left(1 + e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}} \right) \approx 188,0941 \text{ м}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Продовжуючи наведені міркування, можемо знайти момент часу T_l , коли ситуація $\dot{x} = 0$ матиме місце l -й раз. Маємо

$$T_l = -\frac{1}{\omega} \left(\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\omega} + \varphi - \pi(p+l-1) \right). \tag{4.13}$$

Так само знаходимо $x(T_l)$ і $A(T_l)$ за формулами

$$\begin{aligned}
x(T_l) &= \left(A e^{-\delta T_l} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2\mu mg}{k} \sum_{i=0}^{l-1} e^{-\frac{\delta\pi i}{\omega}} + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{p+l-1}, \\
A(T_l) &= A - \frac{2\mu mg}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\delta T_l} \sum_{i=0}^{l-1} e^{-\frac{\delta\pi i}{\omega}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Сума, що входить у (4.14), являє собою суму членів геометричної прогресії. При $\delta = 0$ формули (4.14) можуть бути переписані у вигляді

$$\begin{aligned}
x(T_l) &= \left(A - (2l-1) \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{p+l-1}, \\
A(T_l) &= A - \frac{2l\mu mg}{k}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

При $\delta \neq 0$ отримуємо, застосовуючи формулу для обчислення суми членів геометричної прогресії, наступне:

$$\begin{aligned}
x(T_l) &= \left(A e^{-\delta T_l} \frac{\omega}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} - \frac{2\mu mg}{k} \frac{e^{-\frac{\delta\pi l}{\omega}} - 1}{e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}} - 1} + \frac{\mu mg}{k} \right) (-1)^{p+l-1}, \\
A(T_l) &= A - \frac{2\mu mg}{k} \frac{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}{\omega} e^{\delta T_l} \frac{e^{-\frac{\delta\pi l}{\omega}} - 1}{e^{-\frac{\delta\pi}{\omega}} - 1}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Враховуючи сказане, можна узагальнити розв'язок (4.7) для будь-якого моменту часу, в який $\dot{x} \neq 0$. Такий узагальнений розв'язок може бути представлений формулами

$$\begin{aligned} x &= A(T_l)e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\mu mg}{k}, \\ \dot{x} &= -A(T_l)\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A(T_l)\omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi), \\ \delta &= \frac{h}{m} = 0,15 \text{ c}^{-1}, \quad \omega = \frac{\sqrt{km - h^2}}{m} \approx 1,2155 \text{ c}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

де $A(T_l)$ визначається зі співвідношень (4.14), або (4.15), або (4.16).

Користуючись формулами (4.4), (4.5), (4.13) і (4.16), знаходимо, що при $l = 6$ буде мати місце випадок $\dot{x} = 0$ і $|\sum F_A| \leq \mu mg$. Згідно з рівнянням (4.6) це означає, що в момент часу $T_6 \approx 13,7606$ с відбудеться перехід від тертя ковзання до тертя спокою, тобто зупинка. Це означає, що протягом певного часу, починаючи з T_6 , система перебуватиме у стані спокою. Розв'язок рівняння (4.6) матиме при цьому вигляд

$$x = x(T_6) \approx -4,5498 \text{ м}, \quad \dot{x} = \dot{x}(T_6) = 0. \quad (4.18)$$

В момент часу $t_F = 16$ с починає діяти активна сила F_{AC} , що описується співвідношенням (4.4). Оскільки ця сила постійно зростає, то в певний момент часу t_{br} почнеться рух, тобто відбудеться розрив кінематичної в'язі $\dot{x} = 0$. Виходячи з того, що до вказаного моменту часу система перебувала у стані спокою, можемо прийняти $x(t_{br}) = x(T_6)$ і $\dot{x}(t_{br}) = \dot{x}(T_6) = 0$. Звідки, користуючись співвідношеннями (4.4), (4.5) і (4.18), знаходимо

$$t_{br} = t_F + \frac{\mu mg + x(T_6)k}{a} \approx 16,0213 \text{ с}. \quad (4.19)$$

Оскільки сила F_{AC} діє у додатньому напрямку, то, починаючи з моменту часу t_{br} , матиме місце ситуація $\dot{x} > 0$. При вказаних умовах рівняння (4.6) має з урахуванням (4.4) наступний розв'язок:

$$x = A(t_{br}) e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi(t_{br})) - \left(\frac{2ha}{k^2} + \frac{a(t_F - t)}{k} + \frac{\mu mg}{k} \right), \quad (4.20)$$

$$\dot{x} = -A(t_{br}) \delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi(t_{br})) - A(t_{br}) \omega e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi(t_{br})) + \frac{a}{k},$$

де $A(t_{br})$ і $\varphi(t_{br})$ визначаються з початкових умов $t = t_{br}$, $x = x(t_{br})$ і $\dot{x} = \dot{x}(t_{br}) = 0$ за формулами, аналогічними (4.8), де замість \dot{x}_0 буде $-\frac{a}{k}$, а замість $\left(x_0 + \frac{\mu mg}{k} \right)$ потрібно підставити $\left(x(t_{br}) + \left(\frac{2ha}{k^2} + \frac{a(t_F - t)}{k} + \frac{\mu mg}{k} \right) \right)$.

Виконуючи обчислення, отримуємо

$$A(t_{br}) \approx 151,6283 \text{ м}, \quad \varphi(t_{br}) \approx 0,7005. \quad (4.21)$$

Таким чином, рівняння (4.6) розв'язане для всіх випадків, що мають місце за умов задачі. На Рис. 4.2. зображені залежності $x(t)$ і $\dot{x}(t)$, побудовані за допомогою наведеного вище розв'язку (4.8), (4.13), (4.14), (4.17)–(4.21) на інтервалі $t \in [0; 20]$.

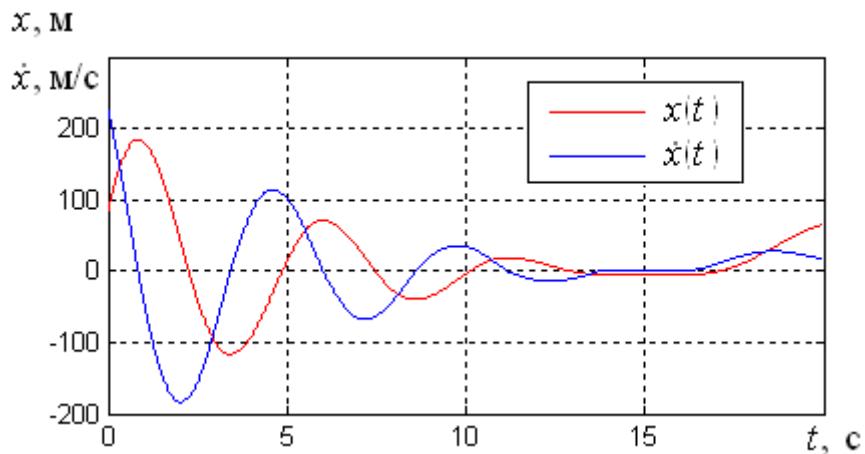


Рис. 4.2. Розв'язок рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям

Відсутність видимих розривів на графіках вказує на те, що диференціальне рівняння динаміки (4.6), яке має змінну структуру, розв'язане правильно.

4.3. Чисельний аналіз рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям

Розв'яжемо тепер рівняння динаміки (4.6) чисельно за допомогою формул Рунге-Кутта. Для цього рівняння (4.6) має бути приведене до виду (4.1). Крім того, формули Рунге-Кутта у вигляді (4.2) і (4.3) можуть бути напряму застосовані лише в тому випадку, коли права частина диференціального рівняння неперервна на інтервалі часу, на якому вивчається динаміка системи.

Для побудови розрахункової схеми для чисельного інтегрування диференціального рівняння (4.6) на основі формул Рунге-Кутта розглянемо спочатку випадок, коли $\dot{x} > 0$. До тих пір, поки виконується ця умова, права частина рівняння (4.6) буде неперервною. Отже, враховуючи сказане, можемо застосувати для рівняння динаміки (4.6) при $\dot{x} > 0$ формули Рунге-Кутта у вигляді (4.3). Маємо

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{m} [F_{AC}(t_n) - kx_n - 2h\dot{x}_n - \mu mg] \Delta t, \\ k_2 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) - k\left(x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}\right) - 2h\left(\dot{x}_n + \frac{k_1}{2}\right) - \mu mg \right] \Delta t, \\ k_3 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) - k\left(x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4} \Delta t\right) - 2h\left(\dot{x}_n + \frac{k_2}{2}\right) - \mu mg \right] \Delta t, \\ k_4 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}(t_n + \Delta t) - k\left(x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{k_2}{2} \Delta t\right) - 2h(\dot{x}_n + k_3) - \mu mg \right] \Delta t, \end{aligned} \quad (4.22)$$

де $F_{AC}(t_n)$ обчислюється шляхом підстановки $t = t_n$ у формулу (4.4).

Формули Рунге-Кутта (4.3) для випадку $\dot{x} < 0$ матимуть той самий вигляд, що і (4.22), але перед μmg буде знак «+». Отже, формули (4.3) для випадків $\dot{x} > 0$ і $\dot{x} < 0$ відрізняються лише знаком перед μmg . Цей знак може бути врахований за допомогою множника $\text{sign}(\dot{x})$. Це означає, що формули Рунге-Кутта для обох випадків, коли $\dot{x} > 0$ і $\dot{x} < 0$, разом можуть бути записані у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{m} [F_{AC}(t_n) - kx_n - 2h\dot{x}_n - \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}_n)] \Delta t, \\
k_2 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) - k\left(x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}\right) - 2h\left(\dot{x}_n + \frac{k_1}{2}\right) - \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}_n) \right] \Delta t, \\
k_3 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) - k\left(x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4}\Delta t\right) - 2h\left(\dot{x}_n + \frac{k_2}{2}\right) - \right. \\
&\quad \left. - 2h\left(\dot{x}_n + \frac{k_2}{2}\right) - \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}_n) \right] \Delta t, \\
k_4 &= \frac{1}{m} \left[F_{AC}(t_n + \Delta t) - k\left(x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{k_2}{2}\Delta t\right) - 2h(\dot{x}_n + k_3) - \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x}_n) \right] \Delta t.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Тут варто звернути увагу на той факт, що, якщо спробувати одразу записати формули (4.3) для рівняння (4.6) при будь-якому $\dot{x} \neq 0$, то для різних k_s , де $s = \overline{1, 4}$, знак перед μmg у формулах (4.23) залежав би не лише від \dot{x}_n . Наприклад, у виразі для k_2 був би множник $\operatorname{sign}\left(\dot{x}_n + \frac{k_1}{2}\right)$, а у виразі для k_4 – множник $\operatorname{sign}(\dot{x}_n + k_3)$. Це означає, що у процесі чисельного інтегрування при наближенні до $\dot{x} = 0$ може трапитися ситуація, коли, наприклад, у виразах для k_1 і k_2 буде мінус μmg , а у виразах для k_3 і k_4 буде плюс μmg . В цьому випадку k_1 , k_2 і k_3 , k_4 знаходитимуться з різних боків від розриву $\dot{x} = 0$ і відноситимуться до різних структур рівняння (4.6). Виникнення такої ситуації може привести до некоректного результату чисельного інтегрування. Формули Рунге-Кутта у вигляді (4.23) позбавлені вказаного недоліку.

Треба відзначити, що пряме застосування формул (4.2) і (4.23) для чисельного інтегрування рівняння динаміки (4.6) може призводити до значних похибок розрахунку. Це пов'язано з тим, що при переході через розрив $\dot{x} = 0$ скоріш за все трапиться ситуація, коли на відповідному кроці $n = j$ значення \dot{x}_j буде знаходитися по один бік від розриву, а \dot{x}_{j+1} – по

інший. І при цьому \dot{x}_{j+1} буде обчислена в межах тієї структури рівняння (4.6), де знаходиться \dot{x}_j .

Для того, щоб мінімізувати вказану вище похибку, доповнимо формули Рунге-Кутта (4.2) і (4.23) наступним чином. Будемо на кожному кроці інтегрування обчислювати добуток \dot{x}_n і \dot{x}_{n+1} . Зрозуміло, що при певному $n = j$ можливе виконання нерівності $\dot{x}_j \cdot \dot{x}_{j+1} \leq 0$, яка означає, що має місце ситуація, коли \dot{x}_j і \dot{x}_{j+1} знаходяться по різні боки від розриву або коли \dot{x}_{j+1} обертається в нуль і потрапляє у розрив, що має місце при $\dot{x} = 0$. При виникненні ситуації $\dot{x}_j \cdot \dot{x}_{j+1} \leq 0$ будемо повторно обчислювати \dot{x}_{j+1} (повторно обчислене значення позначимо \dot{x}'_{j+1}) при іншому кроці інтегрування $\Delta t'$, який виберемо таким чином, щоб \dot{x}'_{j+1} було якомога близче до розриву $\dot{x} = 0$. В якості наближеного значення t_r , моменту часу, коли система потрапляє у розрив $\dot{x} = 0$, виберемо точку перетину з віссю абсцис відрізка, який з'єднує точки з координатами $(t_j; \dot{x}_j)$ і $(t_{j+1}; \dot{x}_{j+1})$ у декартовій системі координат, в якій по вісі абсцис відкладено час t , а по вісі ординат – швидкість \dot{x} . Оскільки визначене у вказаний спосіб t_r являє собою наближене значення моменту часу, коли система потрапляє у розрив $\dot{x} = 0$, то, прийнявши $\Delta t' = t_r - t_j$, будемо мати $t'_{j+1} = t_j + \Delta t' = t_r$, а, отже, повторно обчислене за формулами (4.23) і (4.2) значення \dot{x}'_{j+1} буде близьким до нуля, а тому можна прийняти $\dot{x}'_{j+1} = 0$. Що стосується повторно обчисленого значення координати, то воно знаходиться за формулами Рунге-Кутта (4.2) і (4.23), в яких Δt замінено на $\Delta t'$. На наступному кроці інтегрування величини t_{j+2} , x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} обчислюються за формулами Рунге-Кутта (4.2) і (4.23), в які замість t_{j+1} , x_{j+1} і \dot{x}_{j+1} входять відповідно повторно обчислені значення $t'_{j+1} = t_j + \Delta t' = t_r$, x'_{j+1} і $\dot{x}'_{j+1} = 0$, а замість Δt буде $\Delta t''$, яке

обчислюється виходячи з умови $t_{j+2} = t'_{j+1} + \Delta t'' = t_j + \Delta t' + \Delta t'' = t_j + 2\Delta t$.

Узагальнюючи сказане, можемо записати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{\dot{x}_{j+1}t_j - \dot{x}_j t_{j+1}}{\dot{x}_{j+1} - \dot{x}_j}, \quad \Delta t' = t_r - t_j, \quad t'_{j+1} = t_r = t_j + \Delta t', \quad \dot{x}'_{j+1} = 0, \\ \Delta t'' &= 2\Delta t - \Delta t', \quad t_{j+2} = t'_{j+1} + \Delta t''. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Доповнення формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.23) співвідношеннями (4.24) являє собою регулювання довжини кроку чисельного інтегрування таким чином, щоб момент часу $t'_{j+1} = t_r$ наближено дорівнював моменту часу, в який система потрапляє у розрив $\dot{x} = 0$. Вказане регулювання кроку дозволяє отримати більш точні і коректні результати чисельного інтегрування, оскільки при $\dot{x} = 0$ можлива зміна структури системи. При цій зміні розв'язок рівняння динаміки, який відповідає структурі, з якої система виходить, дозволяє отримати початкові умови для знаходження розв'язку, який відповідає структурі, до якої система переходить. Такими початковими умовами будуть момент часу, в який відбувається зміна структури (тобто, коли система потрапляє у розрив), і відповідні значення координат і швидкості. Саме через це важливо, щоб величина t'_{j+1} , яка являє собою перший момент часу, який обчислюється після зміни структури, була якомога близькою до моменту часу, в який відбувається вказана зміна. Рівність $\dot{x}'_{j+1} = 0$ обумовлена тим, що зміна структури рівняння (4.6) відбувається при $\dot{x} = 0$.

Відзначимо, що у випадку, коли застосовуються формули (4.24), а, отже, і співвідношення $\dot{x}'_{j+1} = 0$, то, згідно з (4.6), при обчисленні x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} необхідно перевіряти, чи виконується умова $|\sum F_A| > \mu mg$. Якщо ця умова виконується, то x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} обчислюються за допомогою формул Рунге-Кутта (4.23), де замість $\text{sign}(\dot{x}'_{j+1})$ буде $\text{sign}(\sum F_A)$. Наступні кроки чисельного інтегрування, починаючи з $n = j + 2$, проводяться за формулами Рунге-Кутта

(4.2) і (4.23) у незмінному вигляді до тих пір, поки виконується умова $\dot{x}_n \cdot \dot{x}_{n+1} > 0$.

Якщо у випадку, коли застосовуються формули (4.24) і співвідношення $\dot{x}'_{j+1} = 0$, має місце нерівність $|\sum F_A| \leq \mu m g$, то при обчисленні x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} матимемо, згідно з (4.6), замість формул (4.23) рівності $k_s = 0$, де $s = \overline{1,4}$, з яких, враховуючи співвідношення (4.2), випливає, що у даному випадку $x_{j+2} = x'_{j+1}$ і $\dot{x}_{j+2} = \dot{x}'_{j+1} = 0$. Рівності $k_s = 0$ необхідно застосовувати, починаючи з $n = j + 2$, до тих пір, поки виконується умова $|\sum F_A| \leq \mu m g$.

Якщо при певному значенні $n = u$ ця умова перестає виконуватися, то t_{u+1} , x_{u+1} і \dot{x}_{u+1} обчислюються за допомогою формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.23), де замість $\text{sign}(\dot{x}'_{u+1})$ буде $\text{sign}(\sum F_A)$. Наступні кроки чисельного інтегрування, починаючи з $n = u + 2$, проводяться за формулами Рунге-Кутта (4.2) і (4.23) у незмінному вигляді до тих пір, поки виконується умова $\dot{x}_n \cdot \dot{x}_{n+1} > 0$. Після цього усі вищеописані дії повторюються.

З метою оцінки точності наведеної розрахункової схеми вона була застосована для чисельного аналізу диференціального рівняння динаміки (4.6) при тих же параметрах і початкових умовах, які були використані у попередньому параграфі для отримання аналітичного розв'язку. Загальна кількість кроків чисельного інтегрування була $L = 250$. Отриманий результат порівнювався з результатом чисельного інтегрування, отриманим за допомогою звичайних формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.3), не доповнених автоматичним регулюванням (4.24) довжини кроку в околі розриву. Графіки залежності $x(t)$ і $\dot{x}(t)$, отримані шляхом чисельного інтегрування візуально не відрізняються від графіків, отриманих з точного аналітичного розв'язку, зображеніх на Рис. 4.2. Внаслідок цього для оцінки точності розрахунків були використані середні похибки, які обчислювалися за формулами

$$\Delta x = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L (x(t_n) - x_n)^2, \quad \Delta \dot{x} = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L (\dot{x}(t_n) - \dot{x}_n)^2, \quad (4.25)$$

де $x(t_n)$ і $\dot{x}(t_n)$ – значення відповідно координати і швидкості в моменти часу t_n , обчислені за допомогою аналітичного розв'язку (4.8), (4.13), (4.14), (4.17)–(4.21). Виявляється, що при обчисленні за допомогою звичайних формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.3) маємо похибки $\Delta x = 1,9 \cdot 10^{-3}$ м і $\Delta \dot{x} = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м/с, а при застосуванні розрахункової схеми на основі формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.23), доповнених автоматичним регулюванням довжини кроку (4.24), – похибки $\Delta x = 1,39 \cdot 10^{-4}$ м і $\Delta \dot{x} = 2,17 \cdot 10^{-4}$ м/с. Як бачимо, при застосуванні запропонованої розрахункової схеми похибка чисельного інтегрування рівнянь динаміки виявляється меншою.

4.4. Розрахункова схема на основі формул Рунге-Кутта для систем з кулоновим тертям

На завершення відзначимо, що ті ж самі міркування, які були здійснені при отриманні запропонованої розрахункової схеми для рівняння динаміки (4.6), можуть бути застосовані для будь-якого рівняння динаміки системи з кулоновим тертям (1.1). Таке рівняння може бути записане для системи з одним ступенем свободи в декартових координатах у загальному вигляді

$$\ddot{x} = \begin{cases} f(t, x, \dot{x}, \text{sign}[v_T]) & \text{при } v_T \neq 0, \\ f(t, x, \dot{x}, \text{sign}[\sum F_A]) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| > \mu |N|, \\ g(t) & \text{при } v_T = 0 \text{ і } |\sum F_A| \leq \mu |N|, \end{cases} \quad (4.26)$$

де v_T – швидкість ковзання, $g(t)$ – функція часу, яка являє собою праву частину рівняння динаміки при накладанні кінематичної в'язі $v_T = 0$, N – нормальні складові реакції. Початкові умови: $x_0 = x(t_0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0)$. Ситуація, коли в системі з одним ступенем свободи швидкість ковзання v_T відмінна від \dot{x} можлива, наприклад, у системі, яка являє собою матеріальну точку на рухомій шорсткій площині, координата і швидкість руху якої являють собою відомі функції часу.

Проводячи по відношенню до рівняння (4.26) ті ж міркування, що були здійснені при отриманні формул (4.23) і (4.24), знаходимо формули Рунге-Кутта, які матимуть при $v_T \neq 0$ вигляд

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n, \dot{x}_n, \text{sign}[v_T]) \Delta t, \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2}, \dot{x}_n + \frac{k_1}{2}, \text{sign}[v_T]\right) \Delta t, \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \dot{x}_n \frac{\Delta t}{2} + \frac{k_1}{4} \Delta t, \dot{x}_n + \frac{k_2}{2}, \text{sign}[v_T]\right) \Delta t, \\ k_4 &= f\left(t_n + \Delta t, x_n + \dot{x}_n \Delta t + \frac{k_2}{2} \Delta t, \dot{x}_n + k_3, \text{sign}[v_T]\right) \Delta t. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Якщо при якомусь $n = j$ маємо $v_T(t_j) \cdot v_T(t_{j+1}) \leq 0$, де $v_T(t_j)$ і $v_T(t_{j+1})$ – значення швидкості ковзання, обчислені відповідно при t_j і t_{j+1} , то крок $n = j + 1$ треба перерахувати за формулами

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{v_T(t_{j+1})t_j - v_T(t_j)t_{j+1}}{v_T(t_{j+1}) - v_T(t_j)}, \quad \Delta t' = t_r - t_j, \quad t'_{j+1} = t_r = t_j + \Delta t', \\ v'_T(t_{j+1}) &= 0, \quad \Delta t'' = 2\Delta t - \Delta t', \quad t_{j+2} = t'_{j+1} + \Delta t''. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Відзначимо, що рівність $v'_T(t_{j+1}) = 0$ означає, що \dot{x}'_{j+1} вибирається таким чином, щоб швидкість ковзання дорівнювала нулю.

При обчисленні x_{j+1} і \dot{x}_{j+1} треба перевіряти, чи виконується умова $|\sum F_A| > \mu mg$. Якщо ця умова виконується, то x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} обчислюються за допомогою формул Рунге-Кутта (4.27), де замість $\text{sign}(v_T)$ буде $\text{sign}(\sum F_A)$. Наступні кроки чисельного інтегрування, починаючи з $n = j + 2$, проводяться за формулами Рунге-Кутта (4.2) і (4.27) у незмінному вигляді до тих пір, поки виконується умова $v_T(t_j) \cdot v_T(t_{j+1}) > 0$.

Якщо у випадку, коли застосовуються формулі (4.28) і \dot{x}'_{j+1} визначається зі співвідношення $v'_T(t_{j+1}) = 0$, має місце нерівність $|\sum F_A| \leq \mu mg$, то при обчисленні x_{j+2} і \dot{x}_{j+2} матимемо згідно з (4.26) замість формул (4.27) рівності

$$k_1 = g(t_n) \Delta t, \quad k_2 = g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t, \quad k_3 = g\left(t_n + \frac{3\Delta t}{2}\right) \Delta t, \quad k_4 = g(t_n + \Delta t) \Delta t. \quad (4.29)$$

Рівності (4.29) необхідно застосовувати, починаючи з $n = j + 2$, до тих пір, поки виконується умова $|\sum F_A| \leq \mu m g$. Якщо при певному значенні $n = u$ ця умова перестає виконуватися, то t_{u+1} , x_{u+1} і \dot{x}_{u+1} обчислюються за допомогою формул Рунге-Кутта (4.2) і (4.27), де замість $\text{sign}(v_T)$ буде $\text{sign}(\sum F_A)$. Наступні кроки чисельного інтегрування, починаючи з $n = u + 2$, проводяться за формулами Рунге-Кутта (4.2) і (4.27) у незмінному вигляді до тих пір, поки виконується умова $v_T(t_j) \cdot v_T(t_{j+1}) > 0$. Після цього усі вищеописані дії повторюються необхідну кількість разів.

Відзначимо, що формули Рунге-Кутта (4.2), (4.27)–(4.29) можуть бути легко узагальнені на випадок системи з декількома ступенями свободи, якщо застосувати перетворення, описані, наприклад, у довіднику «Справочник по математике для научных работников и инженеров» (автори Корн Г. А., Корн Т. М.) [128, с. 706–707]. При цьому треба зауважити, що у випадку накладання кінематичної в'язі $v_T = 0$ матимемо у правих частинах диференціальних рівнянь замість $g(t)$ відповідні функції координат, швидкостей і часу.

Нарешті, треба сказати, що у випадку застосування формул Рунге-Кутта (4.2), (4.27)–(4.29) для чисельного інтегрування рівнянь динаміки систем, в яких можуть мати місце механічні удари, треба для більш точного обчислення моментів часу, в які відбуваються удари, застосовувати формулі, аналогічні (4.28). Відповідні значення швидкостей точок системи після удару визначаються за допомогою теорії механічного удару.

4.5. Висновки до четвертого розділу

Розглянуто рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям. Запропоновано розрахункову схему на основі

формул Рунге-Кутта для чисельного аналізу диференціальних рівнянь динаміки матеріальних систем з кулоновим тертям. В результаті можемо зробити наступні висновки:

1. Було побудоване і розв'язане аналітично рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям.
2. На прикладі чисельного аналізу рівняння динаміки найпростішої коливальної системи з в'язким і кулоновим тертям запропоновано розрахункову схему на основі модифікованих формул Рунге-Кутта, доповнену співвідношеннями для автоматичного регулювання кроку інтегрування, які дозволяють більш точно визначати моменти часу, коли система проходить через розрив і визначати відповідні значення координат і швидкостей.
3. Ефективність запропонованої розрахункової схеми показана шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування за допомогою звичайних і модифікованих формул Рунге-Кутта з точним аналітичним розв'язком. Результат, отриманий за допомогою розрахункової схеми на основі модифікованих формул Рунге-Кутта, є більш точним.
4. Запропонована розрахункова схема на основі модифікованих формул Рунге-Кутта може бути узагальнена на випадок рівнянь динаміки матеріальних систем з декількома ступенями свободи і механічними ударами.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковані в роботах [11, 12].

РОЗДІЛ 5

ДИНАМІКА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТАНУ ХПТ-75

5.1. Постановка задачі про рух механіко-математичної моделі стану ХПТ-75

Дослідимо питання про вплив параметрів стану холодної прокатки труб (тут і далі – ХПТ-75) на динамічну навантаженість у його складових. Головна частина стану ХПТ-75, зображеного схематично на Рис. 5.1., являє собою спарений дезаксіальний кривошипно-повзунний механізм (5,6 – кривошипи, 3,4 – шатуни, 1 – кліті із відповідними кінематичними парами). Шатун 3 і кліті 1 з погляду структури [130] є просторовою діадою, число ступенів свободи якої повинно дорівнювати нулю. Три кінематичні пари діади повинні накладати 12 в'язей, наприклад 5+4+3. Такий одноконтурний чотириланковий механізм (діада, кривошип 5 і станина 2) статично визначений, пасивні натяги в ньому відсутні.

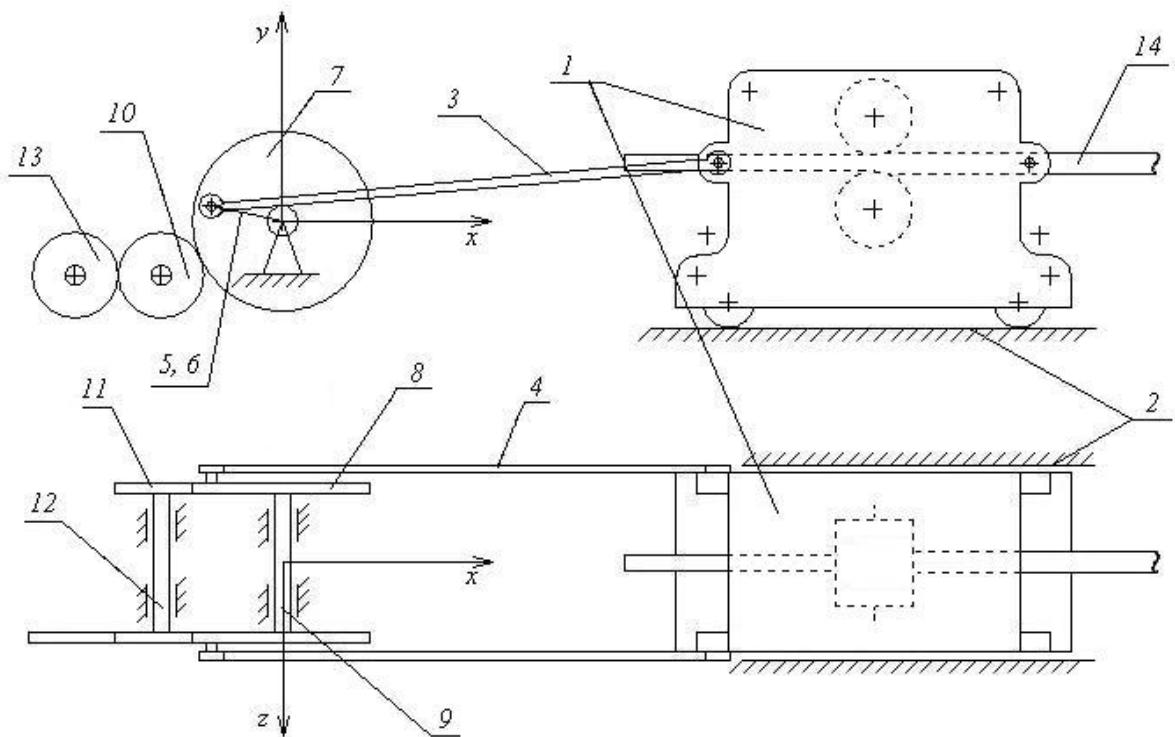


Рис. 5.1. Схематичне зображення приводу кліті стану ХПТ-75.

Координата x кліті за відсутності деформацій ланок визначається із залежності

$$x = l_3 \sqrt{1 - \frac{(h - r \sin \varphi)^2}{l_3^2}} - r \cos \varphi,$$

де φ – кут нахилу кривошипу до вісі Ox , r – довжина кривошипа, l_3 – міжцентрова довжина шатуна. Для того, щоб навантаження, яке передається на кліть, було симетричним, введений другий шатун 4 і кривошип 6 з аналогічними кінематичними парами. Таким чином, утворюється паралельне відгалуження, координата x кліті якого вторинно обчислюється за допомогою тієї ж залежності. Внаслідок цього у систему вноситься повторна (пасивна) в'язь. В ідеальному механізмі при абсолютно твердих ланках повторна в'язь не здійснює додаткового впливу на кінематику та навантаженість. Однак у зв'язку з неминучими відхиленнями розмірів при виготовленні деталей (у межах встановлених технічною документацією допусків) вплив пасивної в'язі може виявитися суттєвим. Рух кліті стане можливим тільки за рахунок зазорів або деформацій. У замкнутих контурах механізму виникнуть додаткові натяги, збільшиться робота сил тертя.

Виключити згаданий дефект структури можливо шляхом введення між кліттю й шатунами додаткової ланки, з якою шатуни з'єднуються тими ж кінематичними парами, а кліть – двома додатковими шарнірами, центри яких розташовані на спільній вертикалі. Додаткова ланка за рахунок незначних поворотів буде компенсувати неспівпадіння базових розмірів ланок.

Також пасивні натяги можуть виникати у замкненому контурі, який складається із зубчастих коліс 7, 8, 9 і 11, а також валів 9 і 12. Ці пасивні натяги можуть бути зменшені, якщо дозволити зубчастим колесам 7 і 8 вільно обертатися одне навколо одного.

Метою побудови механіко-математичної моделі стану ХПТ-75 і дослідження її динаміки було з'ясування впливу вищеописаних пасивних

натягів на динамічну навантаженість у складових системи. Модель будувалася, виходячи із припущення про те, що ланки, які мають масу, є такими, що не деформуються, а ті, які можуть пружно деформуватися, не мають маси. Подібна модель дозволяє досить точно описати динаміку системи, уникнувши необхідності розв'язування рівнянь в частинних похідних.

Наведемо параметри системи [108, 112]: маса кліті $m = 7800 \text{ кг}$, момент інерції відносно центральної вертикальної осі $G_K = 2770 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, розрахункова ширина кліті $\Delta l_K = 0,864 \text{ м}$, довжина кліті $\Delta h = 1,5 \text{ м}$, зазор між кліттю 1 і бічними направляючими 2 станини $\Delta L = 0,0025 \text{ м}$, зведений коефіцієнт тертя ковзання кліті $\mu = 0,05$, номінальна довжина шатунів 3 і 4 $l = 2,45 \text{ м}$, а їхні фактичні довжини, обумовлені похибками виготовлення $l_1 = l + \Delta l$ і $l_2 = l - \Delta l$, $\Delta l = 0,0012 \text{ м}$, поздовжня жорсткість шатунів $k = 9,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$, довжини кривошипів 5, 6, сполучених з колесами 7 і 8, відповідно $r - \Delta r/2$ і $r + \Delta r/2$, $r = 0,35 \text{ м}$, $\Delta r = 0,001 \text{ м}$, радіуси початкових кіл зубчастих коліс 7 і 8 $r_3 = 0,546 \text{ м}$, їхні центральні моменти інерції $G = 130 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, крутильна жорсткість валу 9 у випадку немодифікованого стану ХПТ-75 $c_3 = 6,9 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}$ (у випадку стану, модифікованого таким чином, що зубчасті колеса 7 і 8 можуть вільно обертатися одне навколо одного, маємо $c_3 = 0$), жорсткості зубців коліс при вигинанні $k_3 = 3,44 \cdot 10^9 \text{ Н/м}$. Шарнірне закріплення шатунів на кліті розміщено на висоті $h = 0,28 \text{ м}$ над віссю зубчастих коліс 7 і 8. Колеса 7 і 8 зачіпляються з колесами 10 і 11, які мають радіуси початкових кіл $r_2 = 0,21 \text{ м}$ і з'єднані валом 12 з крутильною жорсткістю $c_2 = 8,6 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Привід здійснюється через зубчасте колесо 13 з радіусом початкового кола $r_1 = 0,21 \text{ м}$. При прокатці на трубу 14 діє сила F_P . Кут повороту $\varphi_1(t)$ зубчастого колеса 13 обраний таким, щоб перші дві похідні ($\dot{\varphi}_1(t) = \omega(t)$ і $\ddot{\varphi}_1(t)$) не мали розривів при $t = 0$ і $t = t_1$, де t_1 – момент

часу, коли кутова швидкість $\omega(t)$ виходить на стаціонарний режим. Крім того, залежність $\varphi_1(t)$ була вибрана таким чином, щоб на проміжку часу $0 < t < t_1$ не було нулів кутового прискорення $\ddot{\varphi}_1(t)$. Отримане співвідношення для $\varphi_1(t)$ має вигляд

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{2\omega_0}{t_1^2}t^3 - \frac{2\omega_0}{t_1^3}t^4 + \frac{3}{5}\frac{\omega_0}{t_1^4}t^5 & \text{при } t < t_1, \\ -\frac{2}{5}\omega_0 t_1 + \omega_0 t & \text{при } t \geq t_1, \end{cases} \quad (5.1)$$

де $\omega_0 = 6,28 \text{ c}^{-1}$, $t_1 = 1 \text{ с}$.

5.2. Рівняння динаміки механіко-математичної моделі стану ХПТ-75

Колеса 7 і 8 мають по одному ступеню свободи, тобто можуть здійснювати незалежні обертання навколо осі Oz , перпендикулярної до площини Рис. 5.1. Відповідні кути повороту позначимо φ_{31} і φ_{32} . Клітка 1 має два ступеня свободи – поступальний вздовж осі Ox і обертальний навколо осі Oy з кутом повороту α . Динаміка такої системи описується чотирма диференціальними рівняннями другого порядку

$$\begin{aligned} G\ddot{\varphi}_{31} &= c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31}) - k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3 + k\Delta l_1 p_1 + D_{31}, \\ G\ddot{\varphi}_{32} &= c_3(\varphi_{31} - \varphi_{32}) - k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3 + k\Delta l_2 p_2 + D_{32}, \\ m\ddot{x} &= -k\Delta l_1 \cos \varphi_{41} - k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - F_T - F_P + D_K, \\ G_K \ddot{\alpha} &= (k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_K}{2} \cos \alpha - M_E - M_T + D_4. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В (5.2) доданок $c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31})$ являє собою момент сил пружності, який діє на зубчасті колеса 7 і 8 з боку валу 9, $k_3(\varphi_{31}r_3 + \varphi_{21}r_2)r_3$ і $k_3(\varphi_{32}r_3 + \varphi_{22}r_2)r_3$ – моменти сил пружності, що діють на колеса 10 і 11 з боку коліс 7 і 8; φ_{21} і φ_{22} – кути повороту коліс 10 і 11 навколо осі Oz ; доданки $k\Delta l_1 p_1$ та $k\Delta l_2 p_2$ – моменти сил пружності, що діють на колеса 7 та 8 з боку шатунів 3 і 4; Δl_1 і Δl_2 – абсолютні видовження шатунів 3 і 4; p_1 і p_2 – плечі векторів сил

пружності шатунів 3 і 4; доданки $k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}$ і $k\Delta l_2 \cos \varphi_{42}$ – проекції сил пружності в шатунах 3 і 4 на вісь Ox , φ_{41} і φ_{42} – кути нахилу шатунів 3 і 4 відповідно до осі Ox , F_T – сила тертя, що діє на кліті 1 при поступальному русі вздовж направляючої 2. Доданок $(k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41}) \frac{\Delta l_K}{2} \cos \alpha$ – обертовий момент відносно осі Oy , який діє на кліті 1 з боку шатунів 3 і 4, M_T – момент сил тертя, який виникає при повороті кліті 1 навколо осі Oy , M_E – момент сил пружності, що діє на кліті, після виникнення її контакту з вертикальними стінками направляючої 2 внаслідок повороту на кут δ . Доданки D_{31} , D_{32} , D_K і D_4 являють собою дисипативні опори.

Щоб можна було розв'язати рівняння динаміки (5.2), необхідно знайти в явному вигляді усі величини, які входять у праву частину. Кут δ , при повороті на який виникає контакт кліті 1 зі стінками направляючої, може бути визначений зі співвідношення

$$\delta = \arcsin \frac{\Delta h \Delta l - \Delta l_K^2 \sqrt{\Delta l_K^2 + \Delta h^2 - \Delta L^2}}{\Delta l_K^2 + \Delta h^2}. \quad (5.3)$$

Плечі p_1 і p_2 визначаються за формулами

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) (\sin \varphi_{31} \cos \varphi_{41} + \cos \varphi_{31} \sin \varphi_{41}), \\ p_2 &= \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) (\sin \varphi_{32} \cos \varphi_{42} + \cos \varphi_{32} \sin \varphi_{42}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Кути нахилу φ_{41} і φ_{42} шатунів 3 і 4 по відношенню осі Ox визначаються зі співвідношень

$$\varphi_{41} = \arcsin \frac{h - (r - \Delta r/2) \sin \varphi_{31}}{l_1 + \Delta l_1}, \quad \varphi_{42} = \arcsin \frac{h - (r + \Delta r/2) \sin \varphi_{32}}{l_2 + \Delta l_2}. \quad (5.5)$$

Формули (5.3)–(5.5) були отримані, виходячи з геометрії системи, що вивчається.

Доданки D_{31} , D_{32} , D_K і D_4 являють собою дисипативні опори, які визначаються шляхом диференціювання по часу відповідних виразів для сил

пружності та моментів сил пружності і заміни відповідних жорсткостей на коефіцієнти дисипації. Враховуючи сказане, маємо для D_{31} , D_{32} , D_K і D_4 такі співвідношення:

$$\begin{aligned} D_{31} &= H_{C3}(\dot{\phi}_{32} - \dot{\phi}_{31}) - H_{k3}(\dot{\phi}_{31}r_3 - \dot{\phi}_{21}r_2)r_3 + Hp_1 \frac{d\Delta l_1}{dt}, \\ D_{32} &= H_{C3}(\dot{\phi}_{31} - \dot{\phi}_{32}) - H_{k3}(\dot{\phi}_{32}r_3 - \dot{\phi}_{22}r_2)r_3 + Hp_2 \frac{d\Delta l_2}{dt}, \\ D_K &= -H \frac{d\Delta l_1}{dt} \cos \varphi_{41} - H \frac{d\Delta l_2}{dt} \cos \varphi_{42}, \\ D_4 &= H \left(\frac{d\Delta l_2}{dt} \cos \varphi_{42} - \frac{d\Delta l_1}{dt} \cos \varphi_{41} \right) \frac{\Delta l_K}{2} \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5.6)$$

де були прийняті такі значення коефіцієнтів дисипації: $H = 188000 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$, $H_{C3} = 13800 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $H_{C2} = 17200 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ і $H_{k3} = 68800 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$.

Зусилля прокатки F_P , яке з'являється при виникненні контакту кліті 1 з трубою 14, прокатка якої здійснюється, було введено за допомогою формули

$$F_P = \frac{1}{4} F_0 (1 + \text{sign}[x - x_P])(1 + \text{sign} \dot{x}), \quad (5.7)$$

де $F_0 = 29400 \text{ Н}$ і $x_P = 2,2 \text{ м}$ – положення кліті 1, при якому виникає її контакт з турбою 14.

Момент сил пружності M_E , який виникає при повороті кліті на кут $|\alpha| \geq \delta$, при якому виникає контакт кліті 1 з бічними стінками направляючої 2, був описаний за допомогою формули

$$M_E = \frac{1}{2} [c_K (\alpha - \delta \text{sign} \alpha) + H_K \dot{\alpha}] [\text{sign}(|\alpha| - \delta) + 1], \quad (5.8)$$

де $c_K = 1 \cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{м}$ – зведенна крутільна жорсткість і $H_K = 2 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ – відповідний коефіцієнт дисипації.

Сила тертя F_T являє собою суму двох складових. Перша складова F_{T1} присутня завжди і являє собою дотичну складову сили реакції, яка діє на кліті 1 з боку направляючої 2 внаслідок наявності сили тяжіння mg і вертикальної складової сил, які діють на кліті 1 з боку шатунів 3 і 4. Друга

складова F_{T_2} виникає при появі контакту кліті 1 з бічними стінками направляючої 2. Враховуючи сказане, можемо записати наступне:

$$\begin{aligned} F_T &= F_{T_1} + F_{T_2}, \\ F_{T_1} &= \mu \left(mg + k\Delta l_1 \sin \varphi_{41} + k\Delta l_2 \sin \varphi_{42} + H \frac{d\Delta l_1}{dt} \sin \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \sin \varphi_{42} \right) * \\ &\quad * \operatorname{sign} \dot{x}, \\ F_{T_2} &= \frac{\mu}{2} \left(k\Delta l_2 \cos \varphi_{42} - k\Delta l_1 \cos \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \cos \varphi_{42} - H \frac{d\Delta l_1}{dt} \cos \varphi_{41} \right) * \\ &\quad * \frac{\Delta l_K}{\Delta h - \Delta l_K \operatorname{tg} \alpha} [\operatorname{sign}(|\alpha| - \delta) + 1] \operatorname{sign} \dot{x}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Момент сил тертя M_T , який виникає при обертанні кліті 1 навколо вісі Oy , можна визначити, як добуток нормальної складової реакції на коефіцієнт пропорційності μ_G , який, по суті, являє собою зведений коефіцієнт тертя вертіння. Визначимо коефіцієнт μ_G через відомий коефіцієнт тертя ковзання μ для поступального руху. При цьому вважатимемо, що нормальна складова реакції, яка діє на кліті 1 з боку направляючої 2 у напрямку осі Oy , рівномірно розподілена по поверхні контакту кліті 1 і направляючої 2. Також вважатимемо, що кліті стоїть на двох ніжках прямокутної форми, довжина яких дорівнює довжині кліті Δh , а ширина – 0,1 м. Відстань кожної ніжки від осі обертання кліті $\frac{\Delta l_K}{2} = 0,1$ м. Виходячи зі сказаного, коефіцієнт μ_G може бути обчислений наступним чином

$$\mu_G = \frac{4\mu}{S} \int_0^{\frac{\Delta h}{2}} d\xi \int_{\frac{\Delta l_K}{2} - 0,1\text{ м}}^{\frac{\Delta l_K}{2}} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\eta \approx 0,028 \text{ м}, \quad (5.10)$$

де $S = 0,3 \text{ м}^2$ – площа поверхні контакту кліті 1 і направляючої 2. Обчисливши коефіцієнт μ_G за формулою (5.10) і враховуючи сказане, можемо визначити момент сил тертя M_T наступним чином:

$$M_T = \mu_G \left(mg + k\Delta l_1 \sin \varphi_{41} + k\Delta l_2 \sin \varphi_{42} + H \frac{d\Delta l_1}{dt} \sin \varphi_{41} + H \frac{d\Delta l_2}{dt} \sin \varphi_{42} \right) \text{sign } \dot{\alpha}. \quad (5.11)$$

Що стосується абсолютних видовжень шатунів Δl_1 і Δl_2 , то вони будуть різними у звичайному стані ХПТ-75 і стані ХПТ-75, модифікованому додатковою ланкою, яка компенсує неспівпадіння базових розмірів деталей. Для звичайного стану ХПТ-75 маємо, виходячи з геометрії системи, такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \left[x + \frac{\Delta l_K}{2} \sin \alpha + \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{31} \right] \sqrt{1 - \frac{[h - (r - \Delta r/2) \sin \varphi_{31}]^2}{l_1^2}} + \\ &+ \frac{[h - (r - \Delta r/2) \sin \varphi_{31}]^2}{l_1} - l_1, \\ \Delta l_2 &= \left[x + \frac{\Delta l_K}{2} \sin \alpha + \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{32} \right] \sqrt{1 - \frac{[h - (r + \Delta r/2) \sin \varphi_{32}]^2}{l_2^2}} + \\ &+ \frac{[h - (r + \Delta r/2) \sin \varphi_{32}]^2}{l_2} - l_2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

У випадку стану ХПТ-75, модифікованого додатковою ланкою, поворот кліті на кут α буде відсутній, оскільки у модифікованій системі сили, з якими діють шатуни 3 і 4 на кліті 1, зрівноважені. Таким чином, можемо записати

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \left[x + \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{31} \right] \sqrt{1 - \frac{[h - (r - \Delta r/2) \sin \varphi_{31}]^2}{l_1^2}} + \\ &+ \frac{[h - (r - \Delta r/2) \sin \varphi_{31}]^2}{l_1} - l_1, \\ \Delta l_2 &= \left[x + \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \cos \varphi_{32} \right] \sqrt{1 - \frac{[h - (r + \Delta r/2) \sin \varphi_{32}]^2}{l_2^2}} + \\ &+ \frac{[h - (r + \Delta r/2) \sin \varphi_{32}]^2}{l_2} - l_2, \\ \Delta l_1 &= \Delta l_2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Крім того, введемо величини x_1 і x_2 , які являють собою координати точок кріплення шатунів 3 і 4 відповідно до зрівнювальної ланки. Тоді для координат кліті матимемо співвідношення

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (5.14)$$

Остаточний вираз для Δl_1 і Δl_2 у випадку стану, модифікованого зрівнювальною ланкою, отримуємо шляхом виключення x_1 і x_2 з рівнянь (5.13) і (5.14).

Система диференціальних рівнянь динаміки стану ХПТ-75 в явному вигляді була отримана шляхом підстановки величин, які визначаються зі співвідношень (5.3)–(5.14) у рівняння (5.2). В якості початкових умов виберемо початковий момент часу $t = 0$, початкові значення координати кліті і кутів повороту кліті і зубчастих коліс, які відповідають крайньому лівому положенню кліті, а початкові значення швидкостей виберемо рівними нулю.

5.3. Чисельний аналіз рівнянь динаміки механіко-математичної моделі стану ХПТ-75

Система диференціальних рівнянь (5.2) з урахуванням співвідношень (5.3)–(5.14) була проінтегрована чисельно за допомогою запропонованої у четвертому розділі даного дослідження і роботах [11, 12] розрахункової схеми на основі формул Рунге-Кутта (4.2), (4.27)–(4.29). В якості першої характеристики, яка обчислювалася для порівняння немодифікованої та модифікованої систем, була обрана залежність моменту сил пружності M_V валу 12 від часу при наявності похибки виготовлення кривошипа $\Delta r = 1 \cdot 10^{-3}$ м. Отримані результати наведені на Рис. 5.2. Синіми кривими на обох графіках показано момент сил пружності валу 12 у випадку стану, в якому зубчасті колеса 7, 8, 9 і 11, а також вали 9 і 12 являють собою замкнений контур (при повороті коліс 7 і 8 одне відносно одного на них діє момент сил пружності $c_3(\varphi_{32} - \varphi_{31})$ з боку валу 9). Червоними кривими на

обох графіках показано момент сил пружності валу 12 у випадку стану, в якому зубчасті колеса 7 і 8 можуть вільно обертатися одне відносно одного ($c_3 = 0$). Нижній графік відповідає стану ХПТ-75, модифікованому додатковою ланкою, яка зрівноважує сили, які діють на кліті 1 з боку шатунів.

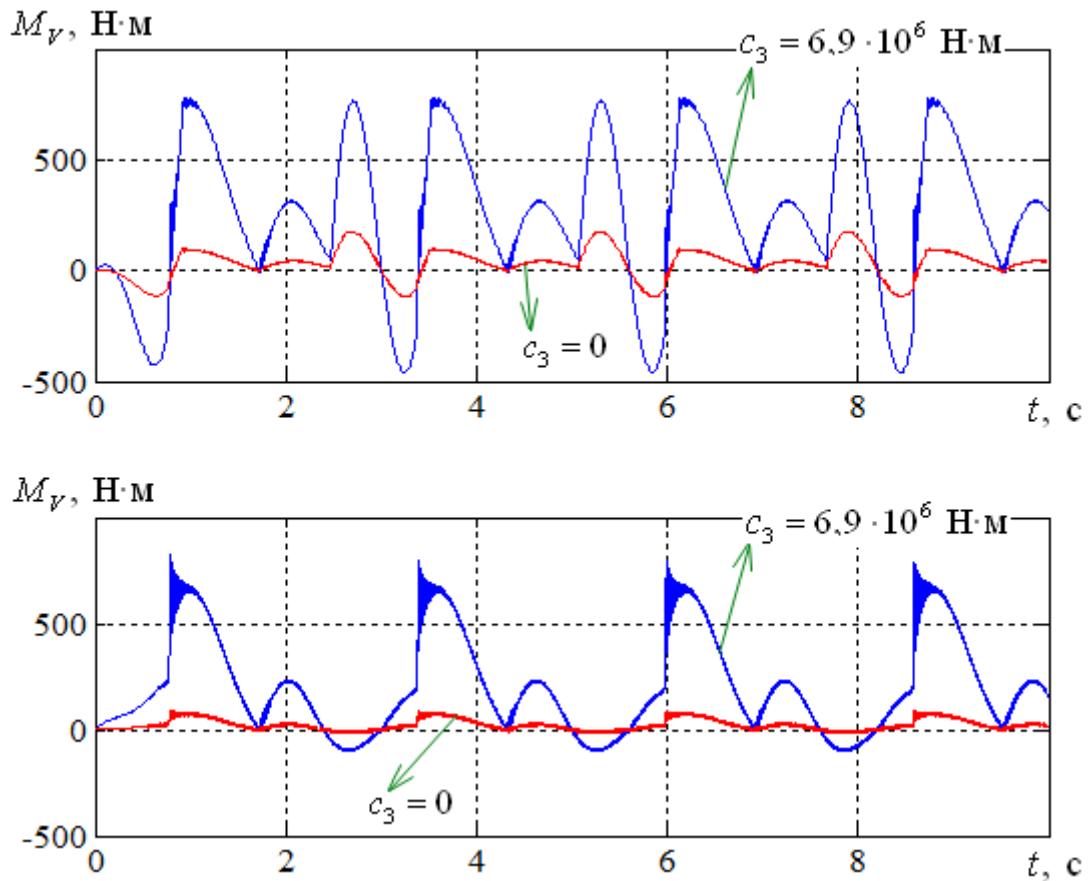


Рис. 5.2. Графіки залежності моменту сил пружності валу 9 від часу

Зростання навантажень на обох графіках Рис. 5.2. відповідає початку прокатки, тобто виникненню контакту кліті 1 з трубою 14. Як можна бачити, найменші значення моменту сил пружності M_V валу 12 виникають у стані ХПТ-75, який має обидві модифікації (червона крива на нижньому графіку): додаткову зрівнювальну ланку і вісь, яка забезпечує вільне обертання коліс 7 і 8 одно навколо одного. Найвищі значення моменту сил пружності M_V валу

12 виникають у стані ХПТ-75, який не має жодної модифікації (синя крива на верхньому графіку).

В якості іще однієї характеристики, яка використовувалася для порівняння системи, модифікованої додатковою зрівнювальною ланкою і стану, який не має вказаної модифікації, були обрані сили пружності в шатунах 3 і 4. Графіки залежності сил пружності в шатунах 3 і 4 зображені на Рис. 5.3. Криві, що відповідають системі, яка не має зазначеної модифікації, показані на верхньому графіку. На нижньому графіку показана залежність, характерна для системи, модифікованої зрівнювальною ланкою.

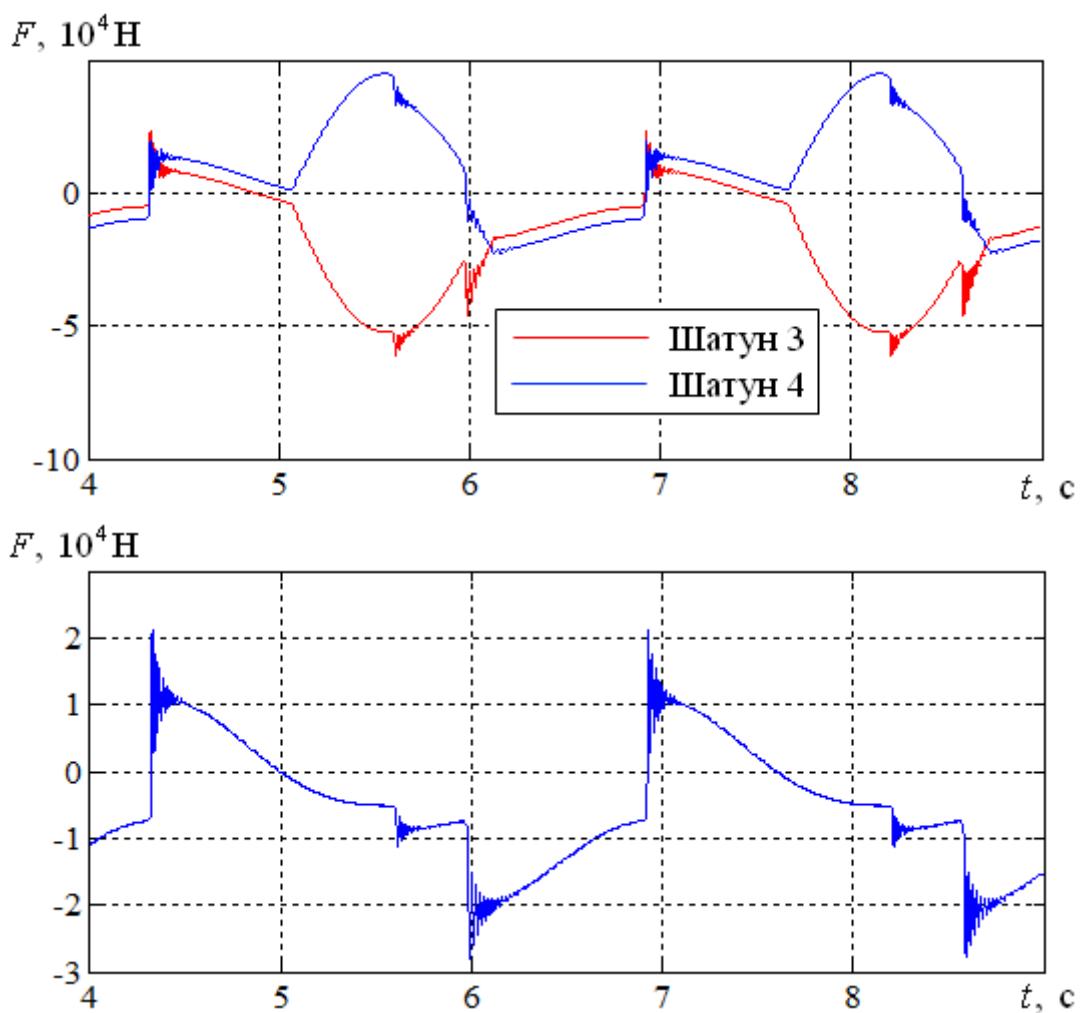


Рис. 5.3. Графіки залежності сил пружності в шатунах від часу

Як можна бачити з Рис. 5.3., на деяких інтервалах часу сили пружності в шатунах 3 і 4 мають різні знаки (один з них виконує корисну роботу, а другий – навпаки). Це свідчить про пасивний натяг контуру ланок, що має

місце навіть за відсутності зусилля прокатки. Крім того, коли сили пружності в шатунах 3 і 4 одного знаку, то сила в шатуні 4 перевершує за амплітудою силу в шатуні 3. У випадку системи, модифікованої зрівнювальною ланкою, сили пружності в шатунах 3 і 4 будуть однакові (червона і синя криві, які характеризують сили пружності у шатунах 3 і 4 відповідно на нижньому графіку накладаються одна на одну).

5.4. Висновки до п'ятого розділу

Побудовано і чисельно проінтегровано рівняння динаміки матеріальної системи, яка являє собою механіко-математичну модель стану холодної прокатки труб ХПТ-75. За допомогою отриманих результатів чисельного аналізу проведено порівняння динамічних навантажень у звичайному стані ХПТ-75; стані ХПТ-75, модифікованому зрівнювальною ланкою, яка зрівноважує зусилля, що діють на робочу кліті з боку шатунів; стані ХПТ-75, в якому зубчасті колеса, з'єднані з шатунами, можуть вільно обертатися одне відносно одного; а також стані ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації. Шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування рівнянь динаміки вказаних систем показано, що динамічні навантаження будуть найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві зазначені модифікації.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковані в роботі [6].

РОЗДІЛ 6

ДИНАМІКА МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РОЛЬГАНГА

6.1. Постановка задачі про рух механіко-математичної моделі рольганга

Побудуємо механіко-математичну модель рольганга прокатного стану, а саме: проведемо дослідження динаміки цієї системи при ударі заготовки і ролика. Система, що досліджується, схематично представлена на Рис. 6.1. На Рис. 6.1 *a* і *б* показано одну й ту саму систему в різні моменти часу.

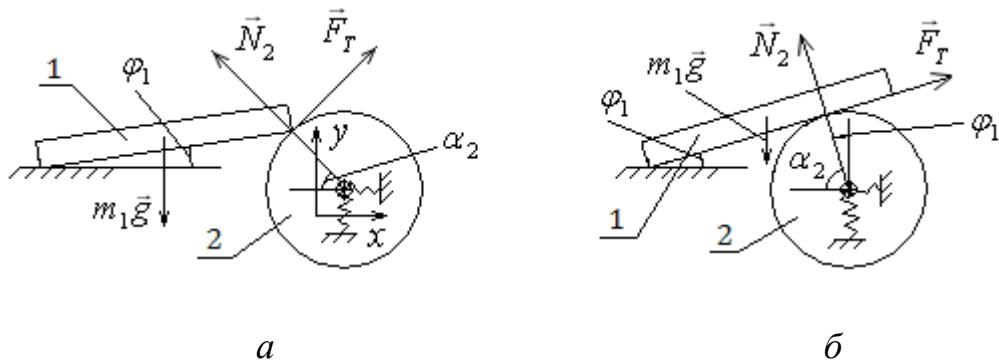


Рис. 6.1. Схематичне зображення механіко-математичної моделі рольганга прокатного стану

У досліджуваній системі абсолютно тверде тіло 1, яке являє собою заготовку, котра подається на рольганг, має форму прямокутного паралелепіпеда, масу $m_1 = 20000$ кг та довжину $l = 10$ м, здійснює плоскопаралельний рух в площині Oxy . До удару з абсолютно твердим тілом 2 циліндричної форми, яке являє собою ролик рольгангу, з масою $m_2 = 4631$ кг, радіусом $R = 0,2$ м, та віссю симетрії, перпендикулярно до площини Рис. 6.1., тіло 1 рухається поступально у додатньому напрямку осі абсцис. Вісь симетрії тіла 2 до удару є нерухомою. Поступальний рух тіла 2 обмежено по вертикалі і горизонталі пружними ланками. Коефіцієнт жорсткості по горизонталі $k_x = 8,5 \cdot 10^7$ Н/м і відповідний коефіцієнт

дисипації $H_x = 85000 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$. По вертикальному руху тіла 2 обмежено амортизатором з коефіцієнтом жорсткості $k_y = 8,5 \cdot 10^6 \text{ Н}/\text{м}$ та великим коефіцієнтом дисипації $H_y = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}$. Причому, окрім амортизатора, руху тіла 2 по вертикальному перешкоджає ще й обмежувач з коефіцієнтом жорсткості $k_{2y} = 8,5 \cdot 10^7 \text{ Н}/\text{м}$. Сумарна сила, що діє на тіло 2 з боку амортизатора й обмежувача, була описана за допомогою функції

$$F_E = k_y \cdot y_2 + H_y \cdot \dot{y}_2 + \frac{1}{2} k_{2y} \cdot y_2 \cdot [1 - \text{sign}(y_2 + \Delta h)], \quad (6.1)$$

де $\Delta h = 0,02 \text{ м}$ – максимальне просідання тіла 2 по вертикальному, що допускає обмежувач.

Тіло 2 приводиться в обертальний рух навколо своєї осі симетрії за допомогою асинхронного електродвигуна, ротор якого з'єднаний із цим тілом через пружний вал із крутильною жорсткістю $c = 5,45 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}$ та відповідним коефіцієнтом дисипації $H = 50,886 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$. Для чисельного аналізу були використані наступні параметри електродвигуна: момент інерції ротора $G_3 = 13,4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, максимальний обертовий момент $M_k = 5300 \text{ Н}\cdot\text{м}$, кутова швидкість ідеального холостого ходу $\omega_0 = 18,378 \text{ с}^{-1}$ і кутова швидкість при навантаженні M_k прийнята $\omega_k = 16,319 \text{ с}^{-1}$.

Система координат Oxy розташована так, як показано на Рис. 6.1. Початок відліку знаходитьться у положенні статичної рівноваги осі симетрії тіла 2. Тіло 1 спирається ліворуч на недеформівну горизонтальну направлячу, вздовж якої ковзає без тертя. У роботі проводиться порівняння динаміки системи за різних висот цієї направляючої відносно початку відліку: $h = 0,18 \text{ м}$ та $h = 0,133 \text{ м}$. Тіло 1 має два ступеня свободи: x_1 – горизонтальна складова радіус-вектора його центру мас в обраній системі відліку та φ_1 – кут між направляючою і нижньою поверхнею тіла 1. Тіло 2 має три ступеня свободи: x_2 та y_2 – відповідно горизонтальна і вертикальна складові радіус-вектора його центра мас в обраній системі відліку і φ_2 – кут

повороту тіла 2 навколо своєї осі симетрії. Ротор електродвигуна має один обертальний ступінь свободи φ_3 .

При виникненні контакту тіл 1 і 2 відбувається абсолютно непружний удар з кулоновим тертям. Коефіцієнт тертя ковзання прийнятий $\mu = 0,3$.

Як видно з порівняння Рис. 6.1. *a* і *b*, у системі можливі два різних типи геометрії контакту тіл 1 і 2 у момент удару. Причому, оскільки геометрична в'язь, яка утворюється в момент удару, є неутримуючою, то в системі можуть послідовно відбутися кілька ударів.

6.2. Рівняння динаміки механіко-математичної моделі рольганга

6.2.1. Рівняння динаміки у неявному вигляді та механічний удар у механіко-математичній моделі рольганга

У загальному випадку рівняння динаміки системи, що вивчається, можуть бути представлені в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} G_1 \ddot{\varphi}_1 &= p_1 N_2 + p_T F_T - \frac{l}{2} m_1 g \cos \varphi_1, \\ m_1 \ddot{x}_1 &= -N_2 \cos \alpha_2 + F_T \sin \alpha_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= N_2 \cos \alpha_2 - k_x x_2 - H_x \dot{x}_2 - F_T \sin \alpha_2, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -N_2 \sin \alpha_2 - F_E - F_T \cos \alpha_2, \\ G_2 \ddot{\varphi}_2 &= c(\varphi_3 - \varphi_2) + H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) - R F_T, \\ G_3 \ddot{\varphi}_3 &= M - c(\varphi_3 - \varphi_2) - H(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2), \\ N_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Слід зазначити, що відсутність доданка $-m_2 g$ у четвертому рівнянні системи обумовлена вибором початку відліку в положенні статичної рівноваги.

У системі рівнянь (6.2) N_2 – сила реакції, що діє з боку тіла 2 на тіло 1. Наявність умови $N_2 \geq 0$ обумовлена тим, що геометрична в'язь, яка може виникати між тілами 1 і 2, є односторонньою. F_T – сила кулонового тертя між тілами 1 і 2. Сили N_2 та F_T наперед не відомі, вони змінюються під час руху частин досліджуваної системи та при розв'язку задачі підлягають визначенню. G_1 – момент інерції тіла 1 відносно осі обертання, яка

проходить через точку його контакту з горизонтальною направляючою перпендикулярно до площини Рис. 6.1. Оскільки довжина тіла 1 набагато більшою, ніж його товщина, то зазначений момент інерції $G_1 = m_1 l^2 / 3$. p_1 та p_T – плечі сил N_2 і F_T – відповідно відносно осі обертання тіла 1. α_2 – кут між радіусом тіла 2, опущеним у точку контакту тіл 1 і 2, та віссю абсцис. Визначається α_2 так, як показано на рис. 6.1. $G_2 = m_2 R^2 / 2$ – момент інерції тіла 2 відносно його осі симетрії. M – обертовий момент, який розвиває електродвигун. Він був введений за допомогою формул Клосса [131, 132], приведеної до виду, зручного для розрахунку:

$$M = \frac{2M_k(\omega_0 - \omega_k)(\omega_0 - \dot{\phi}_3)}{(\omega_0 - \dot{\phi}_3)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2}. \quad (6.3)$$

Оскільки довжина тіла 1 l набагато перевищує радіус R тіла 2, то кут нахилу φ_1 буде досить малою величиною. Це означає, що у співвідношеннях, до яких входить φ_1 , можна відкинути нескінченно малі другого та більш високих порядків, прийнявши

$$\sin \varphi_1 \approx \varphi_1, \quad \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 \approx \varphi_1. \quad (6.4)$$

Також припускається, що на обертовий рух тіла 1 накладено обмеження $\varphi_1 \geq 0$.

Явний вигляд правих частин системи (6.2) та її порядок залежать від взаємного розташування тіл 1 і 2 та характеру їхнього руху. Це означає наявність змінної структури.

Для вивчення абсолютно непружного удару застосовувалися результати, отримані у другому розділі даного дослідження і в роботах [9, 10]. Використовуючи співвідношення (2.4), неважко переконатися у тому, що при будь-якому ударі в системі, що вивчається, матиме місце нерівність (2.8). Це означає, що можливі два випадки механічного удару. В першому випадку, для якого справедливі співвідношення (2.10), швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак в результаті удару. У другому

випадку, коли мають місце формули (2.11) і (2.12), швидкість ковзання обертається в нуль в результаті удару. Визначити, який із двох згаданих вище випадків має місце, можна в такий спосіб. Спочатку робиться припущення про те, що має місце перший випадок. Якщо отримане в результаті обчислень значення швидкості ковзання після удару має такий же знак, що і до удару, тоді вказане припущення є правильним і має місце перший випадок, тобто справедливою є формула (2.10). Якщо ж швидкість ковзання до і після удару має в результаті обчислень за допомогою формул (2.10) і (2.3) різні знаки, тоді має місце другий випадок механічного удару, а отже, мають бути застосовані формули (2.11) і (2.12).

Миттєві зміни швидкостей тіл внаслідок удару можуть бути знайдені за допомогою формул (2.1), які матимуть для системи, що вивчається, наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1' - \dot{\phi}_1 &= \frac{p_1 I_N}{G_1} + \frac{p_T I_T}{G_1}, \quad \dot{x}_1' - \dot{x}_1 = -\frac{I_N \cos \alpha_2}{m_1} + \frac{I_T \sin \alpha_2}{m_1}, \\ \dot{x}_2' - \dot{x}_2 &= \frac{I_N \cos \alpha_2}{m_2} - \frac{I_T \sin \alpha_2}{m_2}, \quad \dot{y}_2' - \dot{y}_2 = -\frac{I_N \sin \alpha_2}{m_2} - \frac{I_T \cos \alpha_2}{m_2}, \\ \dot{\phi}_2' - \dot{\phi}_2 &= -\frac{R I_T}{G_2},\end{aligned}\quad (6.5)$$

де I_N і I_T – відповідно нормальні і дотичні складові ударного імпульсу. Штрихами позначені значення швидкостей і кутових швидкостей, яких набувають точки системи в результаті механічного удару.

Рівняння динаміки системи (6.2) можуть мати п'ять структур. Структура I відповідає ситуації, коли контакту між тілами 1 і 2 немає. Структури II і III мають місце при наявності контакту тіл 1 і 2 в ситуації, зображеній на Рис. 6.1 *a*. Причому, структура III відрізняється від структури II наявністю кінематичної в'язі, яка забороняє проковзування між тілами 1 і 2. Структури IV і V мають місце при наявності контакту тіл 1 і 2 в ситуації, зображеній на Рис. 6.1 *б*. Причому, структура V відрізняється від структури

IV наявністю кінематичної в'язі, яка забороняє проковзування між тілами 1 і 2.

6.2.2. Структура I рівнянь динаміки механіко-математичної моделі роліганга та умови змін структури I-II і I-III

Розглянемо динаміку системи у випадку структури I. Цей випадок має місце до зіткнення тіл 1 і 2, а також після того, як відбудувся розрив геометричного зв'язку між ними.

Структура I є найпростішою, оскільки перші два та інші чотири рівняння системи (6.2) є незалежними одне від одного. Крім того, очевидно, що

$$N_2 = 0, \quad F_T = 0. \quad (6.6)$$

Підставляючи (6.1), (6.3), (6.4) і (6.6) в (6.2), одержуємо систему диференціальних рівнянь, у якій праві частини записані у явному вигляді.

Розглянемо ситуацію, зображену на Рис. 6.1 *a*. На цьому етапі систему рівнянь (6.2) необхідно розглядати окремо для випадку проковзування між тілами 1 і 2 (структуря II) і при наявності фрикційної в'язі між ними (структуря III).

Зміна структури I-II або I-III відбувається, враховуючи (6.4), при виконанні одночасно двох умов. Перша умова

$$\sqrt{[x_2 - x_1 + l/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R - h + y_2)^2} > l \quad (6.7)$$

забезпечує перехід системи саме до ситуації, зображеній на Рис. 6.1 *a*, а не Рис. 6.1 *b*. Друга умова являє собою рівняння геометричної в'язі, що утворюється при зазначеному переході, та може бути записане в наступному вигляді:

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}}{l}. \quad (6.8)$$

Виходячи з геометрії системи (Рис. 6.1 *a*), рівняння геометричної в'язі (6.8) та враховуючи (6.4), можемо записати

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_2 - x_1 - l/2}{R}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}}{R}, \quad (6.9)$$

а також

$$p_1 = l(\varphi_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2), \quad p_T = l(\cos \alpha_2 - \varphi_1 \sin \alpha_2). \quad (6.10)$$

6.2.3. Структура II рівнянь динаміки механіко-математичної моделі роліганга

Для складання рівнянь динаміки системи у випадку структури II залишається визначити невідомі складові реакції N_2 і F_T . Це можна зробити за допомогою рівнянь динаміки системи (6.2), рівнянь в'язі та принципу Даламбера. Для обчислення реакцій у випадку структури II врахуємо також той факт, що у випадку руху із проковзуванням F_T являє собою силу тертя ковзання. Це означає, що у випадку структури II маємо відповідно до закону кулонового тертя (1.1) таке співвідношення:

$$F_T = -\mu N_2 \operatorname{sign} \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}} \right), \quad (6.11)$$

де вираз, що стоїть в дужках, являє собою швидкість ковзання тіла 1 вздовж тіла 2 у точці їхнього контакту. Ця швидкість визначає напрямок дії сили тертя F_T (напрямок сили тертя буде протилежний швидкості ковзання). Підставляючи рівняння геометричної в'язі (6.8) та рівняння (6.4) і (6.11) у перше рівняння системи (6.2), можемо, скориставшись принципом Даламбера, знайти невідому реакцію N_2 . Маємо

$$N_2 = \frac{1}{\left[p_1 + p_T \mu \operatorname{sign} \left(\dot{\varphi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}} \right) \right]} * \\ * \left(\frac{G_1(x_2 - x_1 - l/2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{l\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}} + \frac{G_1\ddot{y}_2}{l} - \frac{G_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 R^2}{l[R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2]^{3/2}} + \frac{lm_1 g}{2} \right). \quad (6.12)$$

Підстановка (6.1), (6.3), (6.4), (6.8)–(6.12) у друге – п'яте рівняння системи (6.2) дає явний вигляд рівнянь динаміки системи у випадку структури II.

6.2.3. Структура III рівнянь динаміки механіко-математичної моделі роліганга та зміни структури I-II, I-III, II-I і III-I

Рівняння (6.8)–(6.10) є загальними для структур II і III. Структура III відрізняється від структури II відсутністю проковзування між тілами 1 і 2. Умова відсутності проковзування призводить до наявності лінійної кінематичної в'язі, що характеризується рівнянням

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2} \dot{\varphi}_2 = 0. \quad (6.13)$$

Дане рівняння є повним диференціалом, інтегрування якого дозволяє звести кінематичну в'язь до геометричної, яка характеризується рівнянням

$$x_1 = x_2 + \frac{2R\sin(\varphi_2 + C_1) - l}{2}, \quad (6.14)$$

де C_1 – константа інтегрування, що визначається з виразу

$$C_1 = \arcsin\left(\frac{l + 2(x_1(t_3) - x_2(t_3))}{2R}\right) - \varphi_2(t_3), \quad (6.15)$$

де $x_1(t_3)$, $x_2(t_3)$ і $\varphi_2(t_3)$ – значення координат у момент часу t_3 утворення кінематичної в'язі (6.15).

Для визначення невідомих складових реакцій N_2 і F_T у випадку структури III потрібно скористатися рівняннями в'язі (6.8) і (6.14). При цьому будемо виключати з рівнянь (6.2) координати φ_1 і x_1 та їхні похідні. Для цього підставимо спочатку (6.14) в (6.8), звідки одержимо співвідношення

$$\varphi_1 = \frac{y_2 - h + R\cos(\varphi_2 + C_1)}{l}, \quad (6.16)$$

яке являє собою рівняння геометричної в'язі, з якого виключена змінна x_1 .

Підстановка (6.14) в (6.9) дає формули

$$\cos \alpha_2 = -\sin(\varphi_2 + C_1), \quad \sin \alpha_2 = \cos(\varphi_2 + C_1). \quad (6.17)$$

I, нарешті, підстановка (6.16) і (6.17) в (6.10) приводить до виразів

$$\begin{aligned} p_1 &= l \cos(\varphi_2 + C_1) - [y_2 - h + R \cos(\varphi_2 + C_1)] \sin(\varphi_2 + C_1), \\ p_T &= -l \sin(\varphi_2 + C_1) - [y_2 - h + R \cos(\varphi_2 + C_1)] \cos(\varphi_2 + C_1). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Співвідношень (6.4), рівнянь в'язі у вигляді (6.14) і (6.16), а також співвідношень (6.17) і (6.18) достатньо, щоб визначити невідомі реакції N_2 та F_T у випадку структури III, виходячи з перших двох рівнянь системи (6.2).

Відповідно до принципу Даламбера маємо

$$\begin{aligned} N_2 &= \left[\frac{G_1}{l^2} \ddot{y}_2 - \left(\frac{G_1 R \sin(\varphi_2 + C_1)}{l^2} + \frac{R \cdot p_T m_1 m_2}{l(m_1 + m_2)} \right) \dot{\varphi}_2 + \frac{m_1 g}{2} \right] \cos(\varphi_2 + C_1) + \\ &+ \left(\frac{R \cdot p_T m_1 m_2 \sin(\varphi_2 + C_1)}{l(m_1 + m_2)} - \frac{G_1 R \cos^2(\varphi_2 + C_1)}{l^2} \right) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{p_T m_1 (k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{l(m_1 + m_2)}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} F_T &= \left[\left(\frac{G_1 R \cos(\varphi_2 + C_1)}{l^2} - \frac{R \cdot p_1 m_1 m_2}{l(m_1 + m_2)} \right) \dot{\varphi}_2^2 - \frac{G_1}{l^2} \ddot{y}_2 - \frac{m_1 g}{2} \right] \sin(\varphi_2 + C_1) + \\ &+ \left(\frac{G_1 R \sin^2(\varphi_2 + C_1)}{l^2} + \frac{R \cdot p_1 m_1 m_2 \cos(\varphi_2 + C_1)}{l(m_1 + m_2)} \right) \dot{\varphi}_2^2 - \frac{p_1 m_1 (k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{l(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Підстановка (6.1), (6.3), (6.4), (6.14)–(6.20) у третє – п'яте рівняння системи (6.2) дає явний вигляд рівнянь динаміки системи у випадку структури III.

Крім сказаного вище, відсутність проковзування між тілами 1 і 2 у випадку структури III накладає наступну умову на нормальну й дотичну складові реакції:

$$|F_T| \leq \mu N_2, \quad (6.21)$$

де складова реакції N_2 стоїть поза знаком модуля, оскільки $N_2 \geq 0$. В момент часу, коли умова (6.21) перестає виконуватися, відбувається зміна структури III-II. Зворотній перехід, тобто зміна структури II-III, відбувається при одночасному виконанні двох умов: коли швидкість ковзання обертається в нуль і коли справедлива нерівність (6.21).

Розглянемо зміни структури I-II і I-III. При зазначених змінах структури відбувається удар тіл 1 і 2. Причому удар, в результаті якого швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак, відповідає зміні структури I-II, а удар, в результаті якого швидкість ковзання обертається в нуль, – до зміни структури I-III. У випадку удару, при якому швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак, маємо, застосовуючи формули (2.10), наступні співвідношення:

$$I_N = \frac{\dot{x}_1 \cos \alpha_2 - \dot{\phi}_1 l \sin \alpha_2 + \dot{y}_2 \sin \alpha_2 - \dot{x}_2 \cos \alpha_2}{\left[p_1 + p_T \mu \operatorname{sign} v_{T0} \right] l \sin \alpha_2 + \frac{\cos^2 \alpha_2 - \mu \operatorname{sign} v_{T0} \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{m_1} + \frac{1}{m_2}}, \quad (6.22)$$

$$I_T = -\mu I_N \operatorname{sign} v_{T0},$$

де

$$v_{T0} = \dot{\phi}_2 - \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\sqrt{R^2 - (x_2 - x_1 - l/2)^2}}, \quad (6.23)$$

$\sin \alpha_2$ і $\cos \alpha_2$ визначаються за формулами (6.9) і p_1 , p_T – за формулами (6.10).

Якщо в результаті обчислень за формулами (6.5), (6.22) і (6.23) отримаємо, що швидкість ковзання змінює знак в результаті удару, тоді вказаний тип удару не має місця і треба застосовувати формули (2.11) і (2.12). В результаті отримаємо наступні співвідношення:

$$I_T = \frac{\dot{y}_2 \sin \alpha_2 - \dot{x}_2 \cos \alpha_2 - \dot{\phi}_1 l \sin \alpha_2 + \dot{x}_1 \cos \alpha_2 - A \cdot C}{G_1 - \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{m_1} - B \cdot C}, \quad I_N = A - BI_T, \quad (6.24)$$

де були введені позначення

$$A = \frac{\dot{x}_2 \sin \alpha_2 + \dot{y}_2 \cos \alpha_2 + R \dot{\phi}_2 - \dot{x}_1 \sin \alpha_2 - \dot{\phi}_1 l \cos \alpha_2}{G_1 - \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_2}{m_1}},$$

$$B = \frac{\frac{m_1 + m_2}{G_1} + \frac{p_T l \cos \alpha_2}{G_1} + \frac{R^2}{G_2}}{\frac{m_1 m_2}{G_1} - \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_2}{m_1}}, \quad C = \frac{p_1 l \sin \alpha_2}{G_1} + \frac{\cos^2 \alpha_2}{m_1} - \frac{1}{m_2}. \quad (6.25)$$

У співвідношеннях (6.24) і (6.25) $\sin \alpha_2$ та $\cos \alpha_2$ визначаються за формулами (6.17), а p_1 і p_T – за формулами (6.18).

Зміни структури II-I або III-I відбуваються тоді, коли нормальнна складова реакції N_2 обертається в нуль. Такий перехід не супроводжується ударом, а, отже, стрибкоподібної зміни швидкостей не відбувається.

6.2.4. Структура IV рівнянь динаміки механіко-математичної моделі роліганга та умови змін структури I-IV, I-V, II-IV і III-V

Розглянемо ситуацію, зображену на Рис. 6.1 б. На цьому етапі також варто окремо розглядати рух із проковзуванням (структуря IV) і рух без проковзування (структуря V).

У системі можливі, зокрема, зміни структури I-IV або I-V. Перша умова такої зміни структури після урахування (6.4) може бути записана в наступному вигляді:

$$\sqrt{[x_2 - x_1 + l/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R - h + y_2)^2} \leq l. \quad (6.26)$$

Виконання умови (6.26) забезпечує перехід до ситуації, зображенії саме на Рис. 6.1 б, а не Рис. 6.1 а. Друга умова являє собою рівняння геометричної в'язі, що утворюється в момент зазначеного переходу, і може бути записана в наступному вигляді

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + l/2}. \quad (6.27)$$

Також у досліджуваній системі можливі зміни структури II-IV і III-V. З порівняння Рис. 6.1 а і б легко бачити, що ці зміни структури відбуваються, коли починає виконуватися умова

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1. \quad (6.28)$$

Оскільки співвідношення (6.28) буде справедливим протягом усього часу руху в рамках структури IV або V, то, враховуючи (6.4) і (6.27), маємо для зазначених випадків

$$\sin \alpha_2 = \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{x_2 - x_1 + l/2}. \quad (6.29)$$

Виходячи з геометрії системи, маємо для структур IV і V наступні співвідношення:

$$p_1 = \sqrt{[x_2 - x_1 + l/2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R + h - y_2)^2}, \quad p_T = 0, \quad (6.30)$$

де φ_1 визначається із рівняння геометричної в'язі (6.27).

Виключимо із системи (6.2) невідомі складові реакцій N_2 і F_T у випадку структури IV. Відповідно до закону кулонового тертя (1.1), ці складові пов'язані між собою співвідношенням, яке з урахуванням (6.4), має вигляд

$$F_T = -\mu N_2 \operatorname{sign}(R\dot{\varphi}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2), \quad (6.31)$$

де вираз, що знаходиться в дужках, являє собою швидкість ковзання тіла 1 відносно тіла 2 у точці їхнього контакту. Підставляючи (6.4), (6.27) і (6.29)–(6.31) у перше рівняння системи (6.2), знаходимо за допомогою принципу Даламбера нормальну складову реакції

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{G_1}{p_1(x_2 - x_1 + l/2)} \left(\ddot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{(x_2 - x_1 + l/2)} \right) + \\ &+ \frac{G_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{p_1(x_2 - x_1 + l/2)^2} \left(2 \frac{(y_2 + R - h)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{(x_2 - x_1 + l/2)} - \dot{y}_2 \right) + \frac{lm_1 g}{2p_1}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

Підстановка (6.1), (6.3), (6.4), (6.27), (6.29)–(6.32) у друге – п'яте рівняння системи (6.2) дає записане у явному вигляді рівняння динаміки системи для структури IV.

6.2.5. Структура V рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга та зміни структури I-IV, I-V, IV-I і V-I

Структура V відрізняється від випадку IV відсутністю проковзування між тілами 1 і 2. Умова відсутності проковзування являє собою лінійну неголономну в'язь, рівняння якої має вигляд

$$R\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{\cos \varphi_1}. \quad (6.33)$$

Якщо врахувати (6.4), то в'язь (6.33) зводиться до кінематичної й може бути проінтегрована. В результаті такого інтегрування отримаємо

$$x_1 = x_2 + R\varphi_2 + C_2, \quad (6.34)$$

де C_2 – константа інтегрування, що визначається зі співвідношення

$$C_2 = x_1(t_5) - x_2(t_5) - R\varphi_2(t_5), \quad (6.35)$$

де $x_1(t_5)$, $x_2(t_5)$ та $\varphi_2(t_5)$ – значення координат у момент часу t_5 утворення в'язі (6.33).

Для визначення невідомих реакцій N_2 і F_T у випадку структури V підставимо спочатку (6.34) в (6.27) і (6.29). Маємо

$$\varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{l/2 - R\varphi_2 - C_2}, \quad (6.36)$$

$$\sin \alpha_2 = \cos \varphi_1 \approx 1, \quad \cos \alpha_2 = \sin \varphi_1 \approx \varphi_1 = \frac{y_2 + R - h}{l/2 - R\varphi_2 - C_2}. \quad (6.37)$$

Далі, підставляючи (6.34) у (6.30), знаходимо

$$p_1 = \sqrt{[l/2 - R\varphi_2 - C_2 - (h - y_2)\varphi_1]^2 - (R + h - y_2)^2}, \quad p_T = 0, \quad (6.38)$$

де φ_1 визначається з рівняння (6.38).

Співвідношень (6.4) і рівнянь в'язі у вигляді (6.34) і (6.36), а також співвідношень (6.37) і (6.38) достатньо, щоб визначити невідомі складові реакцій N_2 і F_T у випадку структури V, виходячи з перших двох рівнянь системи (6.2). Враховуючи сказане і застосовуючи принцип Даламбера, маємо

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{G_1}{p_1(l/2 - R\varphi_2 - C_2)} \left(\ddot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h)R\ddot{\varphi}_2}{(l/2 - R\varphi_2 - C_2)} \right) + \\ &+ \frac{G_1 R \dot{\varphi}_2}{p_1(l/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} \left(2 \frac{(y_2 + R - h)R\dot{\varphi}_2}{(l/2 - R\varphi_2 - C_2)} + \dot{y}_2 \right) + \frac{lm_1 g}{2p_1}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned}
F_T = & \frac{G_1(y_2 + R - h)}{p_1(l/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} \left(\ddot{y}_2 + \frac{(y_2 + R - h)R\ddot{\varphi}_2}{(l/2 - R\varphi_2 - C_2)} \right) + \\
& + \frac{m_1 m_2 R \ddot{\varphi}_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1(k_x x_2 + H_x \dot{x}_2)}{m_1 + m_2} + \\
& + \frac{(y_2 + R - h)}{p_1(l/2 - R\varphi_2 - C_2)} \left(\frac{2G_1(y_2 + R - h)(R\dot{\varphi}_2)^2}{(l/2 - R\varphi_2 - C_2)^3} + \frac{G_1 \dot{y}_2 R \dot{\varphi}_2}{(l/2 - R\varphi_2 - C_2)^2} + \frac{l m_1 g}{2} \right).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Підстановка (6.1), (6.3), (6.4), (6.34)–(6.40) у третє – п'яте рівняння системи (6.2) дає записане у явному вигляді рівняння динаміки системи у випадку структури V.

Окрім сказаного вище, відсутність проковзування між тілами 1 і 2 у випадку структури V накладає умову на нормальну і дотичну складові реакції. Ця умова, як і у випадку структури III, має вигляд (6.21), але з тією лише різницею, що тепер N_2 і F_T визначаються за формулами (6.39) і (6.40). В момент часу, коли умова (6.21) перестає виконуватися, відбувається зміна структури V-IV. Зворотній перехід, тобто зміна структури IV-V, відбувається при одночасному виконанні двох умов: коли швидкість ковзання тіла 1 відносно тіла 2 у точці їхнього контакту обертається в нуль і коли справедлива нерівність (6.21).

Зміни структури I-IV або I-V супроводжуються абсолютно непружним ударом, який описується відповідно за формулами (2.10) (швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак) або (2.11) і (2.12) (швидкість ковзання обертається в нуль). Співвідношення, за якими розраховуються складові ударного імпульсу, (6.22), (6.24) і (6.25) залишаються справедливими, але з тією різницею, що у випадку удару, в результаті якого швидкість ковзання не обертається в нуль і не змінює знак, $\sin \alpha_2$ і $\cos \alpha_2$ визначаються за формулами (6.29), а p_1 і p_T – за формулами (6.30). У випадку удару, в результаті якого швидкість ковзання обертається в нуль, $\sin \alpha_2$ та $\cos \alpha_2$ визначаються за формулами (6.37), а p_1 і p_T – за формулами (6.38). Окрім

того, швидкість ковзання до удару v_{T_0} визначатиметься замість (6.23) таким співвідношенням

$$v_{T_0} = R\dot{\phi}_2 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2. \quad (6.41)$$

Зміна структури IV-I або V-I відбувається, так само як і II-I або III-I, тоді, коли нормальнна складова реакцїї N_2 обертається в нуль.

6.3. Чисельний аналіз рівнянь динаміки механіко-математичної моделі ролльганга

Система диференціальних рівнянь динаміки (6.2) була проінтегрована чисельно за допомогою запропонованої у четвертому розділі даного дослідження і роботах [11, 12] розрахункової схеми на основі формул Рунге-Кутта (4.2), (4.27)–(4.29). Були обрані наступні початкові умови:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) &= 0, & x_1(t_0) &= -5,5 \text{ м}, & x_2(t_0) &= 0, & y_2(t_0) &= 0, \\ \varphi_2(t_0) &= 0, & \varphi_3(t_0) &= 0, & \dot{\varphi}_1(t_0) &= 0, & \dot{x}_1(t_0) &= 3,5 \text{ м/с}, \\ \dot{x}_2(t_0) &= 0, & \dot{y}_2(t_0) &= 0, & \dot{\varphi}_2(t_0) &= \omega_0, & \dot{\varphi}_3(t_0) &= \omega_0, \end{aligned} \quad (6.42)$$

де $t_0 = 0$. Вивчалася динаміка системи протягом першої секунди від початку відліку.

У якості першої характеристики задля аналізу динаміки досліджуваної системи були обрані нормальнна й дотична складові сили реакцїї. На Рис. 6.2. N_2 показана червоною лінією, а F_T – синьою. Причому верхній графік побудований при $h = 0,18 \text{ м}$, а нижній – при $h = 0,133 \text{ м}$. З порівняння графіків видно, що у випадку $h = 0,133 \text{ м}$ максимальні значення нормальнї й дотичної складових ударного імпульсу будуть вищими приблизно на порядок, ніж при $h = 0,18 \text{ м}$. Як буде показано нижче, стрибки нормальнї складової реакцїї у випадку, зображеному на нижньому графіку Рис. 6.2. обумовлені тим, що тіло 2 при русі вертикально вниз упирається в обмежувач.

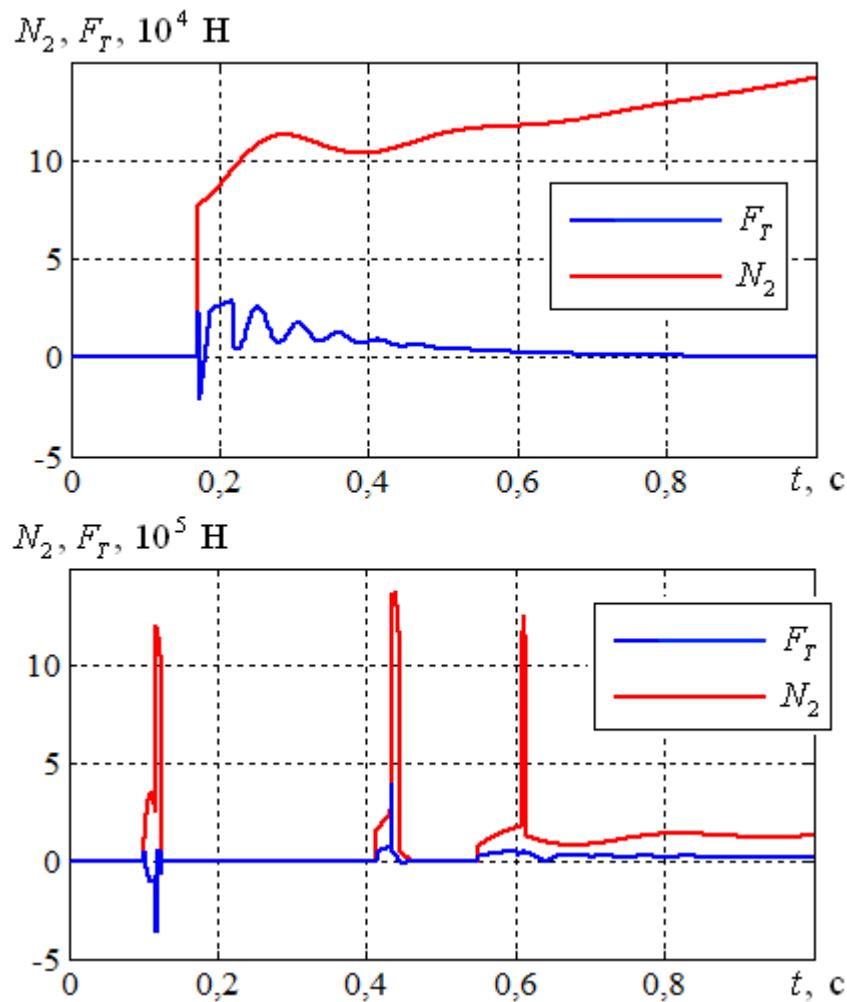


Рис. 6.2. Нормальна й дотична складові реакції

Розглянемо більш уважно випадок руху при $h = 0,18 \text{ м}$. Розрахунок показує, що в цьому випадку послідовно відбуваються два удари. Спочатку в момент часу $t = 0,118 \text{ с}$ відбувається удар, який описується формулами (6.24) і (6.25). Складові ударного імпульсу при цьому $I_N = 4,342 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ і $I_T = 489,219 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Однак, як можна бачити з верхнього графіка на рис. 6.2., геометрична в'язь (6.16) не утворюється, оскільки $N_2 = 0$. Відсутність переходу до структури III після зазначеного удару пояснюється наявністю кривизни поверхонь, що співударяються, та швидкостей поступального руху тіл, достатніх для розриву геометричної в'язі між тілами 1 і 2. Таким чином, після першого удару протягом деякого проміжку часу має місце структура I. У момент часу $t = 0,17 \text{ с}$ відбувається удар, що описується формулами (6.22) і

(6.23). Складові ударного імпульсу при цьому $I_N = 1,234 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ та $I_T = 370,282 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Даний удар супроводжується зміною структури I-IV, що видно на графіку, як різкий стрибок нормальної складової реакції. У момент часу $t = 0,174 \text{ с}$ відбувається зміна структури IV-V, тобто утворюється неголономна в'язь (6.33). Потім дана в'язь розривається в момент часу $t = 0,189 \text{ с}$ і потім знову утворюється при $t = 0,218 \text{ с}$. Після цього має місце рух в рамках структури V. Зазначений рух супроводжується поступовим падінням до нуля дотичної складової реакції. Це пояснюється тим, що швидкість поступального руху тіла 1 і швидкість обертання тіла 2, як буде показано нижче, поступово досягають постійних значень. Нормальна складова реакції монотонно зростає внаслідок того, що центр мас тіла 1 при русі наближається до точки контакту тіл 1 і 2.

Розглянемо випадок руху при $h = 0,133 \text{ м}$. В момент часу $t = 0,1003 \text{ с}$ відбувається удар, який описується формулами (6.24) і (6.25). Складові ударного імпульсу $I_N = 8,214 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ і $I_T = 1,196 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Цей удар супроводжується зміною структури I-III, але кінематична в'язь (6.13) розривається (zmіна структури III-II) відразу ж після удару. Ця в'язь утвориться знову (zmіна структури II-III) в момент часу $t = 0,103 \text{ с}$, а потім знову розривається в момент часу $t = 0,11 \text{ с}$. Після цього в'язь (6.13) утворюється ще раз у момент часу $t = 0,118 \text{ с}$. І, нарешті, у момент часу $t = 0,126 \text{ с}$ відбувається розрив кінематичної в'язі (6.13) і геометричної в'язі (6.16), тобто відбувається зміна структури III-I. На нижньому графіку, зображеному на Рис. 6.2. це видно, виходячи з того, що після зазначеного проміжку часу $N_2 = 0$. Через деякий час, при $t = 0,414 \text{ с}$, відбувається удар, який описується формулами (6.24) і (6.25). Складові ударного імпульсу $I_N = 5,281 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ та $I_T = 1,118 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Цей удар супроводжується зміною структури I-V. Після цього в момент часу $t = 0,418 \text{ с}$ відбувається розрив неголономної в'язі (6.33), тобто має місце зміна структури V-IV. У

наступні моменти часу, $t = 0,434\text{ с}$ та $t = 0,447\text{ с}$, відбувається утворення й розрив в'язі (6.33). Нарешті, у момент часу $t = 0,463\text{ с}$ відбувається розрив геометричної в'язі (6.27), тобто має місце зміна структури IV-I. При $t = 0,55\text{ с}$ відбувається удар, який описується формулами (6.22) і (6.23). Складові ударного імпульсу $I_N = 1,092 \cdot 10^3 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ та $I_T = 327,581 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}$. Цей удар супроводжується зміною структури I-IV. Після цього відбувається серія змін структури IV-V і навпаки. Зазначені зміни структури (чергаються утворення в'язі (6.33) та її розрив) відбуваються в моменти часу $t = 0,602\text{ с}$, $t = 0,615\text{ с}$, $t = 0,623\text{ с}$, $t = 0,656\text{ с}$, $t = 0,701\text{ с}$, $t = 0,709\text{ с}$ і $t = 0,733\text{ с}$. Після останнього із зазначених переходів і, як мінімум, до закінчення першої секунди руху, має місце динаміка в рамках структури V. У цілому, після моменту часу $t = 0,733\text{ с}$ поводження нормальної й дотичної складових реакції на нижньому і верхньому графіках Рис. 6.2. якісно не відрізняється. Різниця полягає лише в тому, що на нижньому графіку Рис. 6.2. величина дотичної складової реакції не встигає впасти до нуля. Це означає, що швидкість поступального руху тіла 1 і швидкість обертання тіла 2 не встигають досягти постійних значень протягом першої секунди руху.

Наступні характеристики, показані на Рис 6.3., які були обрані для аналізу динаміки досліджуваної системи, – це кутові швидкості обертання тіла 2 (синя лінія) і ротора електродвигуна (червона лінія). На верхньому графіку Рис. 6.3. показані кутові швидкості у випадку, коли $h = 0,18\text{ м}$, а на нижньому графіку – $h = 0,133\text{ м}$. Зміни кутових швидкостей обумовлені дотичними складовими ударного імпульсу й реакції. Напрямки нормальних складових проходять через вісь обертання тіла 2 і, отже, створювані ними моменти дорівнюють нулю. Як можна бачити, найбільш сильні зміни швидкостей спостерігаються тоді, коли відбуваються удари, а також у ті інтервали часу, коли дотичні складові реакції мають найбільші значення. Це добре узгоджується з теорією, оскільки саме дотичні складові реакції створюють обертальний момент відносно осі симетрії тіл циліндричної

форми. Відсутність видимих розривів на графіках кутової швидкості $\dot{\phi}_2$ в моменти часу, коли відбуваються зміни структури II-III і навпаки, а також зміни структури IV-V і навпаки, говорить про те, що рівняння динаміки (6.2) для різних структур були правильно узгоджені між собою в процесі чисельного аналізу.

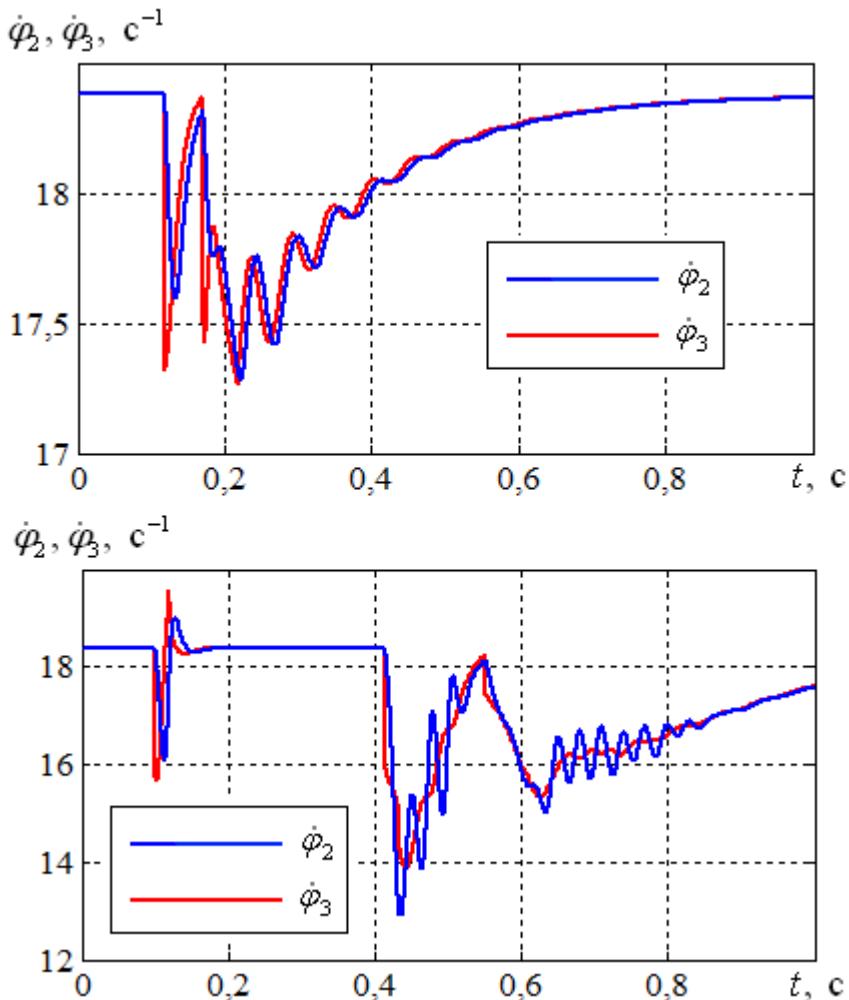


Рис. 6.3. Кутова швидкість тіла 2 і ротора електродвигуна

Кутові швидкості $\dot{\phi}_2$ и $\dot{\phi}_3$, зображені на верхньому графіку Рис. 6.3., мало відрізняються між собою протягом усього інтервалу часу, коли вивчається рух. На нижньому графіку Рис. 6.3. ситуація трохи інша. Після другого удару, що відбувається при $t = 0,414\text{ с}$, спостерігаються явні розбіжності в кутових швидкостях протягом близько $0,4\text{ с}$. В зазначений проміжок часу зміни $\dot{\phi}_3$ мають вигляд складних коливань.

Також можна бачити, що у випадку, зображеному на верхньому графіку Рис. 6.3., кутові швидкості протягом першої секунди руху встигають досягти постійного значення, що дорівнює ω_0 . У випадку, зображеному на нижньому графіку Рис. 6.3., однієї секунди виявляється недостатньо для досягнення зазначеного значення кутових швидкостей. Про дану особливість також було сказано вище при розгляді складових реакції.

Нарешті, як можна бачити з Рис. 6.3., у випадку, зображеному на нижньому графіку, кутова швидкість $\dot{\phi}_3$ має у певний інтервал часу значення, менше, ніж ω_k . Це означає, що $\dot{\phi}_3$ виходить за межі стаціонарної роботи електродвигуна. У випадку, показаному на верхньому графіку Рис. 6.3., настільки сильне падіння $\dot{\phi}_3$ не спостерігається.

Зазначені особливості залежностей кутових швидкостей у випадку $h = 0,133\text{м}$ можуть призводити до швидкого зношування деталей і збоям у роботі машин.

Наступна характеристика, що аналізувалася, – це зміна горизонтальної складової швидкості \dot{x}_1 тіла 1. Вона показана на Рис. 6.4. Причому верхній графік відповідає руху при $h = 0,18\text{м}$, а нижній – $h = 0,133\text{м}$. Як видно з порівняння верхнього і нижнього графіків на Рис. 6.4., при $h = 0,18\text{м}$ \dot{x}_1 зменшується після першого удару приблизно до $3,43\text{м/с}$, а при $h = 0,133\text{м}$ – приблизно до $2,85\text{м/с}$. Більш сильна зміна \dot{x}_1 у другому випадку обумовлена більшими в порівнянні з першим випадком значеннями складових ударного імпульсу та реакції і меншим кутом α_2 .

Крива на верхньому графіку Рис. 6.4. має дві горизонтальних ділянки, які відповідають руху в рамках структури I, коли на тіло 1 у горизонтальному напрямку не діють ніякі сили. По закінченні кожної з горизонтальних ділянок внаслідок удару відбувається стрибкоподібна зміна швидкості. Причому в результаті другого удару швидкість зростає. Цей факт пояснюється тим, що при другому ударі нормальна складова ударного імпульсу спрямована

практично по вертикалі. Отже, основний внесок у зміну \dot{x}_1 при другому ударі вносить дотична складова ударного імпульсу. Після другого удару \dot{x}_1 зростає, наближаючись до деякого постійного значення, що узгоджується зі сказаним при аналізі попередніх графіків.

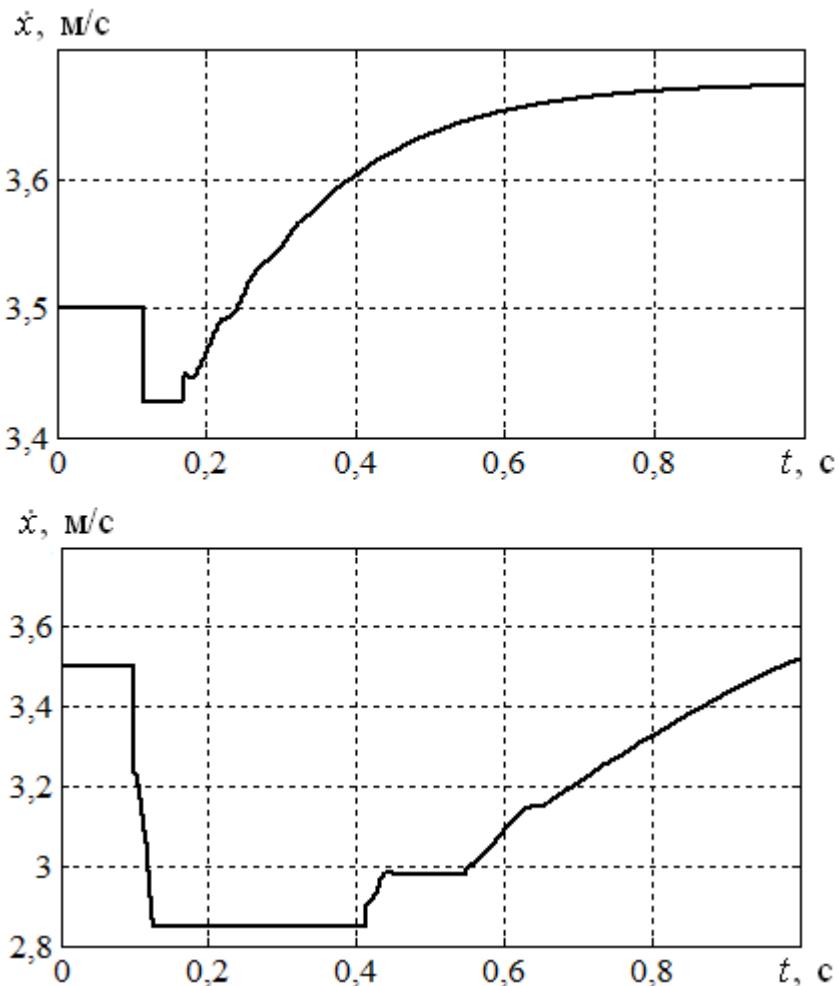


Рис. 6.4. Горизонтальна складова поступальної швидкості тіла 1

Крива, зображена на нижньому графіку Рис. 6.4., має три горизонтальні ділянки, що відповідають руху в рамках структури I. Це узгоджується зі сказаним вище про те, що в системі при русі відбувається три удари. Також можна бачити, що за час руху \dot{x}_1 не встигає досягти постійного значення, що також узгоджується зі сказаним вище.

Ще слід зазначити, що на графіках, зображених на Рис. 6.4., немає видимих розривів у ті моменти часу, коли відбуваються переходи від руху із проковзуванням до руху без проковзування і навпаки. Це вказує на те, що

рівняння динаміки (6.2) для різних структур були правильно узгоджені між собою в процесі чисельного аналізу.

На Рис. 6.5. показана залежність кута φ_1 від часу. Верхній графік відповідає руху при $h = 0,18$ м, а нижній – $h = 0,133$ м. З порівняння верхнього і нижнього графіків видно, що максимальне значення, якого досягає кут φ_1 , у другому випадку приблизно на порядок вище, ніж у першому. Ця відмінність цілком зрозуміла, виходячи з геометрії досліджуваної системи.

Величини, яких досягає кут φ_1 при русі складових досліджуваної системи, дозволяють зробити висновок про те, що припущення, яке виражається співвідношеннями (6.4), було зроблене цілком обґрунтовано.

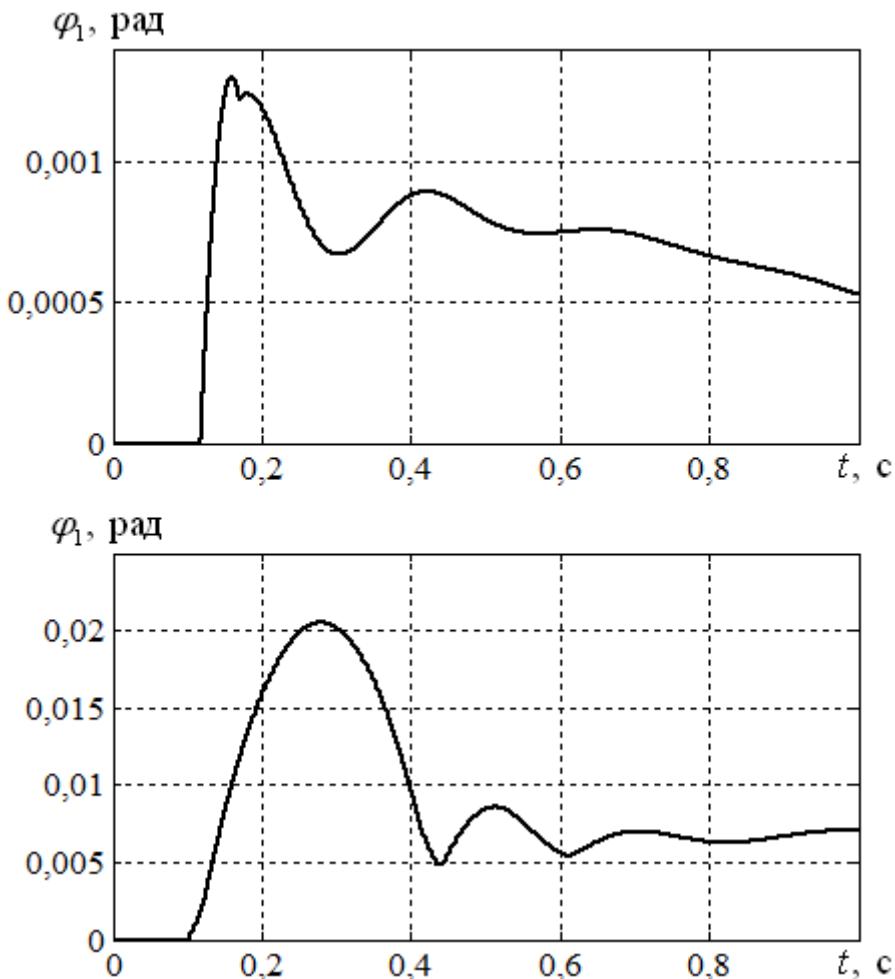


Рис. 6.5. Залежність кута φ_1 від часу

Також можна бачити, що на обох графіках не спостерігаються розриви у моменти часу, коли відбуваються удари або переходи від руху із

проковзуванням до руху без проковзування й навпаки. Єдине, що спостерігається, це стрибкоподібна зміна в момент удару кута нахилу дотичної до графіка функції, яка означає, що кутова швидкість $\dot{\varphi}_1$ має розрив. Цей результат добре узгоджується з теорією удару абсолютно твердих тіл, згідно з якою в момент удару відбувається стрибкоподібна зміна швидкості, а координата не змінюється. Таким чином, отримані дані про зміну кута φ_1 також дозволяють стверджувати, що рівняння динаміки (6.2) для різних випадків руху були правильно узгоджені між собою в процесі чисельного аналізу.

На Рис. 6.6. показана залежність координати y_2 осі симетрії тіла 2 від часу. Верхній графік відповідає руху при $h = 0,18 \text{ м}$, а нижній – $h = 0,133 \text{ м}$.

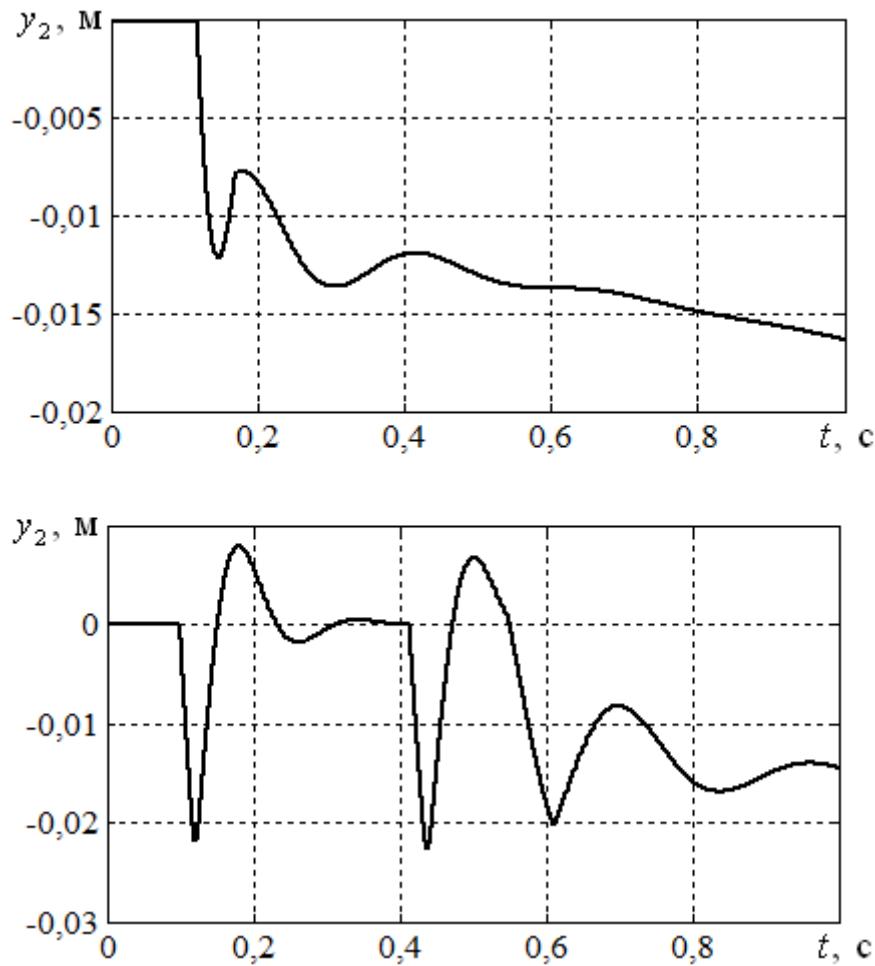


Рис. 6.6. Вертикальний зсув тіла 2

В цілому, обидва графіки, зображені на Рис. 6.6., добре узгоджуються з тим, що було сказано вище. Основна відмінна риса нижнього графіку на Рис. 6.6. полягає в тому, що координата y_2 тричі досягає значень, менших $\Delta h = 0,02$ м. При цьому тіло 2 у зазначені моменти часу впирається в обмежувач, що супроводжується стрибкоподібним збільшенням жорсткості згідно (6.1). З порівняння нижнього графіка на Рис. 6.6. з нижнім графіком на Рис. 6.2. видно, що зазначене збільшення жорсткості призводить до відповідного збільшення нормальної складової реакції. Три виражених максимуми на нижньому графіку Рис 6.2., спостерігаються в ті ж самі моменти часу, що й три виражених мінімуми на нижньому графіку Рис. 6.6.

На Рис. 6.7. показано залежність координати x_2 осі симетрії тіла 2 від часу. Верхній графік відповідає руху при $h = 0,18$ м, а нижній – $h = 0,133$ м.

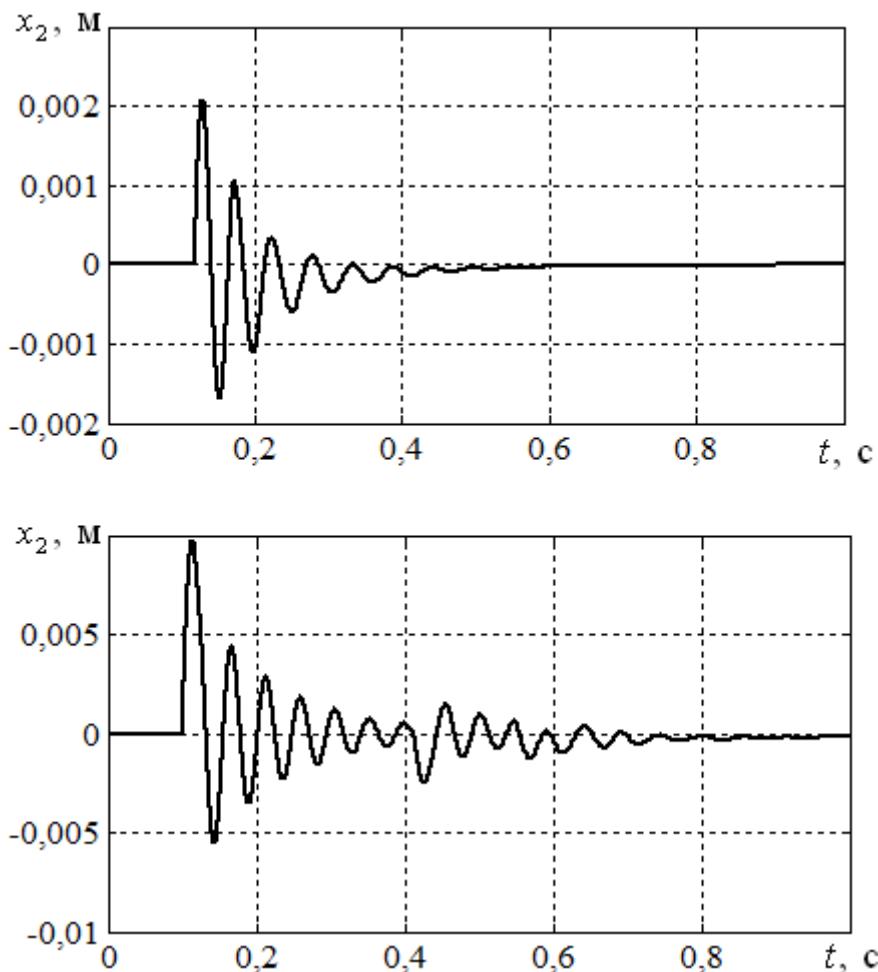


Рис. 6.7. Горизонтальний зсув тіла 2

З порівняння верхнього і нижнього графіків на Рис. 6.7. видно, що максимальне відхилення по горизонталі тіла 2 від положення статичної рівноваги в другому випадку майже в п'ять разів більше, ніж у першому. Це обумовлено тим, що, по-перше, у другому випадку значення складових ударного імпульсу при першому ударі приблизно у два рази перевищують такі самі в першому випадку. По-друге, виходячи з геометрії системи, очевидно, що в другому випадку кут α_2 між нормальню складовою ударного імпульсу та віссю абсцис буде меншим, ніж у першому.

Також можна бачити, що на верхньому графіку Рис 6.7. x_2 досить швидко зменшується до нуля. На нижньому графіку Рис. 6.7. координата x_2 не встигає досягти постійного значення в положенні статичної рівноваги. Цей факт перебуває в повній відповідності з тим, що спостерігається на попередніх графіках.

6.4. Висновки до шостого розділу

Побудовано рівняння динаміки механіко-математичної моделі рольганга. Механічні удари, які відбуваються між складовими системи, були описані за допомогою результатів, отриманих у другому розділі даного дослідження. Чисельний аналіз рівнянь динаміки механіко-математичної моделі рольганга проведений за допомогою розрахункової схеми, запропонованої у четвертому розділі даного дослідження. В результаті можна зробити висновки:

1. Побудовані рівняння динаміки механіко-математичної моделі рольганга мають п'ять структур. Перша структура відповідає ситуації, коли контакту тіл 1 і 2 немає. При наявності контакту цих тіл можливі два випадки їхнього взаємного розташування. Причому у кожному з цих випадків можливі дві структури, що є наслідком можливості утворення і розриву кінематичної в'язі, яка забороняє ковзання тіл 1 і 2 одне по одному.

2. Відсутність на отриманих графіках, що характеризують зміну координат, розривів у моменти часу, коли відбувається утворення або розрив якого-небудь із геометричних або кінематичних в'язей, свідчить про те, що рівняння динаміки (6.2) для різних випадків руху були правильно узгоджені між собою в процесі чисельного аналізу. Analogічний висновок випливає з того, що при ударах стрибкоподібно змінюються швидкості, але не змінюються координати, що узгоджується з теорією механічного удару абсолютно твердих тіл.
3. Виходячи з порівняння результатів аналізу динаміки досліджуваної системи, отриманих при $h = 0,18\text{ м}$ та $h = 0,133\text{ м}$, можна бачити, що в другому випадку динамічна навантаженість системи буде значно вищою. Крім того, у другому випадку системі потрібно в декілька разів більше часу на проходження перехідного процесу. Це варто враховувати при проектуванні реальних машин, оскільки зазначені особливості динаміки досліджуваної системи при $h = 0,133\text{ м}$ можуть призводити до збоїв у роботі двигунів і швидкому виходу з ладу деталей обладнання.

Результати, наведені у даному розділі, опубліковані в роботах [7, 8].

ЗАКЛЮЧНІ ВИСНОВКИ

1) Доведено, що у випадку абсолютно непружного удару шорстких недеформівних твердих тіл при плоскопаралельному русі застосування моделі Кейна–Левінсона–Уіттекера, що ґрунтуються на застосуванні кінематичного коефіцієнта відновлення, моделі Рауса, що ґрунтуються на застосуванні кінетичного коефіцієнта відновлення, і моделі Стронге, що ґрунтуються на застосуванні енергетичного коефіцієнта відновлення, дає однакові результати.

2) Побудовано та розв'язано за допомогою отриманих результатів рівняння динаміки двомасової віброударної системи з кулоновим тертям, яка є механіко-математичною моделлю штампувального пресу. Встановлено інтервал часу між двома послідовними механічними ударами в такій системі, необхідний для завершення перехідного процесу, а також знайдено умови, за яких шлях, пройдений центром мас вздовж горизонтальної осі, буде меншим.

3) Запропоновано розрахункову схему, що ґрунтуються на методі Рунге–Кутта, яка дає коректні з точки зору механіки результати при чисельному аналізі динаміки систем з кулоновим тертям і механічними ударами. Встановлено граничну похибку розрахунків за допомогою вказаної розрахункової схеми, а також показано її ефективність на конкретному прикладі рівняння динаміки системи з кулоновим тертям, що має точний аналітичний розв'язок.

4) Досліджено динаміку матеріальної системи з кулоновим тертям, яка являє собою механіко-математичну модель звичайного стану ХПТ-75; стану ХПТ-75, модифікованого зрівнювальною ланкою, яка зрівноважує зусилля, які діють на робочу кліті з боку шатунів; стану ХПТ-75, в якому зубчасті колеса, з'єднані з шатунами, можуть вільно обертатися одне відносно одного; а також стану ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації. Шляхом порівняння результатів чисельного інтегрування рівнянь динаміки вказаних

систем показано, що динамічні навантаження будуть найменшими у стані ХПТ-75, який має обидві вказані модифікації.

5) За допомогою результатів, отриманих при вивченні моделей механічного удару і запропонованої розрахункової схеми, побудовано і проведено чисельний аналіз рівняння динаміки трьохмасової системи абсолютно твердих шорстких тіл, яка є механіко-математичною моделлю рольганга прокатного стану; розв'язано задачу оптимізації вхідних параметрів машини даного типу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1]. Posa M., Tobenkin M., Tedrake R. Stability Analysis and Control of Rigid-Body Systems with Impacts and Friction // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. Vol. 61, no 6. pp. 1423–1437.
- [2]. Забуга А. Г., Кільчинський О. О. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку диференціальних рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям // Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, 2016. С. 130–132.
- [3]. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Коливання системи двох пружно-зв'язаних твердих тіл при ударно-фрикційній взаємодії // Тези XIII Міжнародної науково-технічної конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, 2014. С. 9.
- [4]. Плахтиенко Н. П., Забуга А. Г. Фрикционное взаимодействие упруго связанных твердых тел с шероховатой плоскостью // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 2. С. 111–125.
- [5]. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Нелінійна модель фрикційно-ударної взаємодії твердого тіла з твердою шорсткою площею // Дослідження в математиці і механіці. 2015. Т. 20, № 2 (26). С. 26–42.
- [6]. Антонюк Е. Я., Забуга А. Г. О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределенными кинематическими цепями // Обработка материалов давлением. 2012. Т. 32, № 3. С. 235–241.
- [7]. Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием // Вісник

- Одеського національного університету. Серія: Математика і механіка. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–121.
- [8]. Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В., Забуга А. Г. О динамическом взаимодействии горячего сляба с рольгангом прокатного стана // Обработка материалов давлением. 2013. Т. 37, № 4. С. 57–62.
 - [9]. Забуга А. Г. Моделирование абсолютно неупругого удара шероховатых недеформируемых тел при плоскопаралельном движении // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 5. С. 137–144.
 - [10]. Забуга А. Г. Моделі удару шорстких недеформівних тіл при плоскопаралельному русі // Матеріали XII Міжнародної конференції "Розвиток науки в ХХІ столітті". Харків, 2016. С. 39–44.
 - [11]. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, 2013. pp. 215–225.
 - [12]. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2014. Vol. 115, no 1. pp. 173–182.
 - [13]. Столетов А. Г. Избранные сочинения. М., Л.: Гостехиздат, 1950. 660 с.
 - [14]. Крагельский И. В., Щедров В. С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 236 с.
 - [15]. Coulomb C. A. Théorie des Machines Simples. Paris: Bachelier, 1821. 368 p.
 - [16]. Мур Д. Ф. Основы и применения трибоники [пер. с англ. С. А. Харламова]. М.: Мир, 1978. 488 с.

- [17]. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
- [18]. Крагельский И. В., Виноградова И. Э. Коэффициенты трения. М.: Машгиз, 1962. 220 с.
- [19]. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1988. 640 с.
- [20]. Кильчевский Н. А., Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. М.: Наука, 1977. 544 с.
- [21]. Кильчевский Н. А., Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1977. 480 с.
- [22]. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. Кинематика, статика, динамика точки. М.: Наука, 1979. 544 с.
- [23]. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 2. Динамика системы материальных точек. М.: Наука, 1966. 332 с.
- [24]. Пэнлеве П. Лекции о трении [пер. с франц. И. Н. Веселовского]. М.: Гостехиздат, 1954. 314 с.
- [25]. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
- [26]. Лурье А. И. Заметки по аналитической механике // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 6. С. 760–768.
- [27]. Филиппов А. Ф., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
- [28]. Moreau J.-J. Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. Vol. II. Boston: Pitman, 1979. 342 p.
- [29]. Moreau J.-J. Topics in Nonsmooth Mechanics. Basel, Boston: Birkhäuser, 1988. 235 p.
- [30]. Moreau J.-J., Panagiotopoulos P. D. Nonsmooth Mechanics and Applications. Vienna, New York: Springer-Verlag, 1988. 322 p.

- [31]. Schatzman M. A class of nonlinear differential equations of second order in time // Nonlinear Analysis. 1978. Vol. 2, no 3. pp. 355–373.
- [32]. Monteiro Marques M. D. P. Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser-Verlag, 1993. 437 p.
- [33]. Андронов В. В., Журавлëв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.
- [34]. Антонюк Е. Я. Динамика механизмов переменной структуры. Киев: Наук. думка, 1988. 182 с.
- [35]. Хохлова О. А. Исследование влияния сил и моментов сил трения в механизме переменной структуры с комбинированным шатуном // Вестник АГТУ. 2010. Т. 49, № 1. С. 7–12.
- [36]. Финогенко И. А. О дифференциальных уравнениях, возникающих в динамике систем с сухим трением // Соросовский образовательный журнал. 1999. № 8. С. 122–127.
- [37]. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Нелинейные задачи динамики машин. Л.: Машиностроение, 1968. 284 с.
- [38]. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
- [39]. Аппель П., Теоретическая механика. В 2 т. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика [пер. с франц. И. Г. Малкина]. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
- [40]. Розенблат Г. М., Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS, 2010. 205 с.
- [41]. Григорян С. С. Разрешение парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 1. С. 54–58.
- [42]. Неймарк Ю. И. Еще раз о парадоксах Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17–21.

- [43]. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 366–375.
- [44]. Фуфаев Н. А. Динамика системы в примере Пэнлеве–Клейна. О парадоксах Пэнлеве // Изв. АН СССР МТТ. 1991. № 4. С. 48–53.
- [45]. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновским трением // Прикл. математика и механика. 1990. Т. 54, № 4. С. 520–529.
- [46]. Иванов А. П. Об особенностях динамики систем с неидеальными связями // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 212–221.
- [47]. Иванов А. П. Комментарий к статье П. Пенлеве «О законах трения скольжения» // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 5. С. 981–984.
- [48]. Béghin H. Sur certain problemes de frottement // Nouv. Ann. Math. 1923. Vol. 5, Sér. 2. pp. 305–312.
- [49]. Delassus E. Considérations sur le frottement de glissement // Nouv. Ann. Math. 1920. Sér. 4. pp. 485–496.
- [50]. Delassus E. Sur les lois du frottement de glissement // Bull. Soc. France. 1923. Vol. 51. pp. 22–33.
- [51]. Erdmann M. On a representation of friction in configuration space // Internat. J. Robotics Research. 1994. Vol. 13, no. 3. pp. 240–271.
- [52]. Génot F., Brogliato B. New results on Painlevé paradoxes // European J. Mech. of A Solids. 1999. Vol. 18, no. 4. pp. 653–677.
- [53]. Mason M. T., Wang Y. On the inconsistency of rigid-body frictional planar mechanics // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics Automation. Piscataway: IEEE, 1988. pp. 524–528.
- [54]. Pfeiffer F., Glocker C. Multibody Dynamics with Unilateral Constraints. New York: John Wiley, 1996. 256 p.

- [55]. Stewart D. E. Existence of solutions to rigid body dynamics and the paradoxes of Painlevé // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1997. Vol. 325, no. 6. pp. 689–693.
- [56]. Stewart D. E. Convergence of a time-stepping scheme for rigid body dynamics and resolution of Painlevé’s problems // Arch. Rational Mech. Anal. 1998. Vol. 145, no. 3. pp. 215–260.
- [57]. Lötstedt P. Coulomb friction in two-dimentional rigid body systems // Zeitschrift für Angewandte Mathematik un Mechanik. 1981. Vol. 61, no. 12. pp. 605–615.
- [58]. Stewart D. E. Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact // SIAM Review. 2000. Vol. 42, no 1. pp. 3–39.
- [59]. Скатенок М. В. “Wedjing”, “jamming” и парадоксы Пэнлеве в системах с кулоновым трением // Техн. механика. 2006. № 1. С. 39–48.
- [60]. Самсонов В. А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 80 с.
- [61]. Zhao Z., Liu C., Ma W. Experimental Investigation of the Painlevé Paradox in a Robotic System // ASME J. of Appl. Mech. 2008. Vol. 75, no 4. pp. 1006–1017.
- [62]. Иванов А. П. Условия однозначной разрешимости уравнений динамики систем с трением // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, № 4. С. 531–546.
- [63]. Матросов В. М., Финогенко И. А. О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 6. С. 3–13.
- [64]. Lötstedt P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints // SIAM J. Appl. Math. 1982. Vol. 42, no. 2. pp. 281–296.

- [65]. Dupont P. The Effect of Coulomb Friction on the Existence and Uniqueness of the Forward Dynamics Problem // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics Automation. Nice: IEEE, 1992. pp. 1442–1447.
- [66]. Dupont P. Existence and Uniqueness of rigid-body dynamics with Coulomb friction // Trans. of the Canadian Society of Mechanical Engineers. 1993. Vol. 17, no. 4A. pp. 513–525.
- [67]. Pang J.-S., Trinkle J. C. Complementarity formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction // Math. Program. Ser. A. 1996. Vol. 73, no. 2. pp. 199–226.
- [68]. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания [пер. с англ. А. Н. Обморщева]. М: Физматгиз, 1960. 580 с.
- [69]. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 352 с.
- [70]. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Физматгиз, 1958. 408 с.
- [71]. Плахтиенко Н. П. Об одном эффекте кулонова трения при неустановившихся вынужденных колебаниях // Прикл. механика. 1978. Т. 14, № 2. С. 136–138.
- [72]. Плахтиенко Н. П. О вынужденных колебаниях системы с немонотонной разрывной характеристикой трения // Прикл. механика. 1980. Т. 16, № 7. С. 108–115.
- [73]. Самойленко А. М. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 156 с.
- [74]. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971. 440 с.

- [75]. Плахтиенко Н. П. К исследованию движения тел под действием разрывных сил методом усреднения // Прикл. механика. 1985. Т. 21, № 8. С. 84–91.
- [76]. Антонюк Е. Я., Зубарев С. В. Исследование некоторых механизмов переменной структуры методом аппроксимаций // Полимерные материалы. 1985. № 1. С. 91–97.
- [77]. Lötstedt P. Numerical simulation of time-dependent contact friction problems in rigid-body mechanics // SIAM Journal of Scientific Statistical Computing. 1982. Vol. 5, no. 2. pp. 370–393.
- [78]. Stewart D. E. Numerical methods for friction problems with multiple contacts // J. Austral. Math. Soc. 1996. Vol. 37, no. 2. pp. 288–308.
- [79]. Stewart D. E., Trinkle J. C. An implicit time-stepping scheme for rigid body dynamics with inelastic collisions and Coulomb friction // Intern. J. of Numerical Methods. 1996. Vol. 39, no. 15. pp. 2673–2691.
- [80]. Dontchev A., Lempio F. Difference methods for differential inclusions // SIAM Review. 1992. Vol. 34, no. 2. pp. 263–294.
- [81]. Kastner-Maresch A. E. The implicit midpoint rule applied to discontinuous differential equations // Computing. 1992. Vol. 49, no. 1. pp. 45–62.
- [82]. Lempio F., Veliov V. Discrete approximations of differential inclusions // Bayreuth. Math. Schr. 1998. Vol. 54. pp. 149–232.
- [83]. Bereteu L. Numerical integration of the differential equations for one dynamic system with dry friction coupling // Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. 2003. Vol. 3, no. 14. pp. 931–936.
- [84]. Acary V., Brogliato B. Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems: Applications in Mechanics and Electronics. New York: Springer-Verlag, 2008. 526 p.

- [85]. Danca M.-F. Continuous approximations of a class of piece-wise continuous systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2015. Vol. 25, no. 11. pp. 3102–3118.
- [86]. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. In II volumes. Vol. I. Nonstiff Problems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. 528 p.
- [87]. Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. М.: Наука, 1977. 224 с.
- [88]. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
- [89]. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяющихся тел [пер. с англ. М. С. Лужиной, О. В. Лужина]. М.: Стройиздат, 1965. 450 с.
- [90]. Stronge W. J. Impact mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 302 p.
- [91]. Gilardi G., Sharf I. Literature survey of contact dynamics modeling // Mechanism and Machine Theory. 2002. Vol. 37. pp. 1213–1239.
- [92]. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика [пер. с англ. И. Г. Малкина]. М.: ОНТИ, 1937. 500 с.
- [93]. Kane T. R., Levinson D. A. Dynamics. Theory and Applications. New York: McGraw-Hill Book Company, 2005. 402 p.
- [94]. Payc Э. Дж. Динамика системы твердых тел. В 2 т. Т. 1. [пер. с англ. Ю. А. Архангельского]. М.: Наука, 1983. 464 с.
- [95]. Stronge W. J. Unraveling Paradoxical Theories for Rigid Body Collisions // ASME J. of Appl. Mech. 1991. Vol. 58, no 4. pp. 1049–1055.
- [96]. Журавлёв В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

- [97]. Stoianovici D., Hurmuzlu Y. A Critical Study of the Applicability of Rigid-Body Collision Theory // ASME J. of Appl. Mech. 1996. Vol. 63, no 2. pp. 307–316.
- [98]. Brach R. M. Rigid Body Collisions // ASME J. of Appl. Mech. 1989. Vol. 56, no 1. pp. 133–138.
- [99]. Smith C. E. Predicting Rebounds Using Rigid-Body Dynamics // ASME J. of Appl. Mech. 1991. Vol. 58, no 3. pp. 754–758.
- [100]. Schwager T., Becker V., Pöschel T. Coefficient of tangential restitution for viscoelastic spheres // The European Physical Journal E. 2008. Vol. 27. pp. 107–114.
- [101]. Doménech-Carbó A. On the tangential restitution problem: independent friction–restitution modelling // Granular Matter. 2014. Vol. 16, no 4. pp. 573–582.
- [102]. Keller J. B. Impact with Friction // ASME J. of Appl. Mech. 1986. Vol. 53, no 1. pp. 1–4.
- [103]. Wang Yu, Mason M. T. Two-Dimensional Rigid-Body Collisions with Friction // ASME J. of Appl. Mech. 1992. Vol. 59, no 3. pp. 635–642.
- [104]. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. В 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Наука, 1983. 640 с.
- [105]. Кузьо І. В., Ванькович Т.-Н. М., Зінько Я. А. Теоретична механіка. Спеціальні розділи. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2011. 112 с.
- [106]. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.: ОГИЗ, 1946. 670 с.
- [107]. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел [пер. с англ. В. Н. Рубановского, В. С. Сергеева, С. Я. Степанова]. М.: Мир, 1980. 294 с.
- [108]. Целиков А. И., Полухин И. И., Гребенник В. М. Машины и агрегаты металлургических заводов. В 3 т. М.: Металлургия, 1988.

- [109]. Таловеров В. Н., Гудков И. Н., Таловеров А. В. Кузнечно-штамповочное оборудование: курс лекций. Ульяновск: УлГТУ, 2006. 145 с.
- [110]. Целиков А. И. Механизмы прокатных станов. М.: Машгиз, 1946. 272 с.
- [111]. Никитин Г. С. Теория непрерывной продольной прокатки. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. 399 с.
- [112]. Гриншпун М. И., Соколовский В. И. Станы холодной прокатки труб. М.: Машиностроение, 1967. 240 с.
- [113]. Артюх В. Г. Нагрузки и перегрузки в металлургических машинах. Мариуполь: ПГТУ, 2008. 246 с.
- [114]. Кожевников С. Н. Динамика машин с упругими звеньями. К.: Издательство Академии наук Украинской ССР, 1961. 160 с.
- [115]. Кожевников С. Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. К.: Наукова думка, 1986. 288 с.
- [116]. Иванченко Ф. К., Полухин П. И., Тылкин М. А. Динамика и прочность прокатного оборудования. М.: Металлургия, 1970. 486 с.
- [117]. Веренев В. В., Большаков В. И., Путноки А. Ю. Диагностика и динамика прокатных станов. Днепропетровск: ИМА-пресс, 2007. 144 с.
- [118]. Большаков В. И., Веренев В. В. Особенности динамических процессов в прокатных станах и их диагностические свойства // Вісник ТНТУ. 2013. Т. 72, № 4. С. 173–178.
- [119]. Путноки А. Ю. Моделирование динамического взаимодействия клетей через прокатываемую полосу // Материалы IV Международной интерактивной научно-практической конференции. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. С. 185–190.

- [120]. Телегин В. В. Моделирование динамики механических систем с учетом зазоров в кинематических парах // Научный альманах. 2015. Т. 10, № 8. С. 899–903.
- [121]. Ларин В. Б., Ясинский С. А. Понижение порядка нелинейной модели прокатного стана // Автоматика. 1992. № 5. С. 17–25.
- [122]. Ларин В. Б., Педченко А. М., Ткачук А. И., Ясинский С. А. Понижение порядка динамической модели прокатного стана // Автоматика. 1992. № 2. С. 67–75.
- [123]. Ларин В. Б., Антонюк Е. Я., Бобух И. А. Проблемы динамики прокатных станов // Прикл. механика. 1997. Т. 33 (43), № 3. С. 3–27.
- [124]. Блехман И. И., Бутенин Н. В., Ганиев Р. Ф. Вибрации в технике. В 6 т. Т. 2. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
- [125]. Ibrahim R. A. Vibro-Impact Dynamics. Modelling, Mapping and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 297 р.
- [126]. Кобринский А. Е. Механизмы с упругими связями. Динамика и устойчивость. М.: Наука, 1964. 392 с.
- [127]. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
- [128]. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров [пер. с англ. И. Г. Арамановича и др.]. М.: Наука, 1973. 832 с.
- [129]. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of mathematics for engineers and scientists. Boca Raton, London, New York: Chapman and Hall/CRC, 2007. 1509 р.
- [130]. Кожевников С. Н. Основания структурного синтеза механизмов. К.: Наукова думка, 1986. 230 с.
- [131]. Справочник по автоматизированному электроприводу [под. ред. В. А. Елисеева и А. В. Шиняńskiego]. М.: Енергоатомиздат, 1983. 616 с.

[132]. Москаленко В. В. Электрический привод: учебник. М.: Издательский центр «Академия», 2007. 368 с.

**ДОДАТОК: СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА
ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ
ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ**

Результати дисертації опубліковані у роботах:

- [1]. Антонюк Е. Я., Забуга А. Г. О динамической нагруженности машин с параллельными статически неопределенными кинематическими цепями // Обработка материалов давлением. 2012. Т. 32, № 3. С. 235–241.
- [2]. Забуга А. Г., Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В. К вопросу о динамике соударения абсолютно твердых тел в сложных системах с фрикционным взаимодействием // Вісник Одеського національного університету. Серія: Математика і механіка. 2013. Т. 18, № 2. С. 105–121.
- [3]. Антонюк Е. Я., Бобух И. А., Соколов Е. В., Забуга А. Г. О динамическом взаимодействии горячего сляба с рольгангом прокатного стана // Обработка материалов давлением. 2013. Т. 37, № 4. С. 57–62.
- [4]. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Journal of Computational & Applied Mathematics. 2014. Vol. 115, no 1. pp. 173–182.
- [5]. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Нелінійна модель фрикційно-ударної взаємодії твердого тіла з твердою шорсткою площею // Дослідження в математиці і механіці. 2015. Т. 20, № 2 (26). С. 26–42.
- [6]. Плахтиенко Н. П., Забуга А. Г. Фрикционное взаимодействие упруго связанных твердых тел с шероховатой плоскостью // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 2. С. 111–125.

- [7]. Забуга А. Г. Моделирование абсолютно неупругого удара шероховатых недеформируемых тел при плоскопараллельном движении // Прикл. механика. 2016. Т. 52, № 5. С. 137–144.
- [8]. Zabuga A. G. Specificity of numerical integration of second-order differential equations for systems with Coulomb friction by Runge-Kutta method // Proceedings of the 3rd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, 2013. pp. 215–225.
- [9]. Плахтієнко М. П., Забуга А. Г. Коливання системи двох пружно-зв'язаних твердих тіл при ударно-фрикційній взаємодії // Тези XIII Міжнародної науково-технічної конференції "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, 2014. С. 9.
- [10]. Забуга А. Г. Моделі удару шорстких недеформівних тіл при плоскопаралельному русі // Матеріали XII Міжнародної конференції "Розвиток науки в ХХІ столітті". Харків, 2016. С. 39–44.
- [11]. Забуга А. Г., Кільчинський О. О. Парадокси Пенлеве і проблема існування розв'язку диференціальних рівнянь динаміки систем з кулоновим тертям // Матеріали Міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, 2016. С. 130–132.

Апробація результатів дисертації:

- III International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics". Kyiv, Ukraine, November 25 – 29, 2013, форма участі: очна (виступ з доповіддю);
- XIII Міжнародна науково-технічна конференція "Вібрації в техніці та технологіях". Львів, Україна, 14-16 жовтня 2014, форма участі: очна (виступ з доповіддю);

- XII Міжнародна конференція "Розвиток науки в ХХІ столітті". Харків, Україна, 16 квітня 2016, форма участі: заочна (публікація тез);
- Міжнародна наукова конференція, присвячена 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка. Чернівці, Україна, 28-30 жовтня 2016, форма участі: заочна (публікація тез);
- Семінар відділу динаміки складних систем Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України А. А. Мартинюка, Київ, Україна, 6 вересня 2017, форма участі: очна (виступ з доповіддю);
- Семінар секції за напрямком «Динаміка і стійкість руху механічних систем» при спеціалізованій вченій раді Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В. Д. Кубенка, 21 вересня 2017, форма участі: очна (виступ з доповіддю).