

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С. П. ТИМОШЕНКА**

**СЕМЕНОВИЧ Катерина Олексіївна**



УДК 532.595

**НЕЛІНІЙНІ МЕХАНІЗМИ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ЕНЕРГІЇ В СИСТЕМІ  
РЕЗЕРВУАР – РІДИНА НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ**

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка  
Міністерства освіти і науки України.

**Науковий керівник –**

доктор технічних наук, професор  
**ЛІМАРЧЕНКО Олег Степанович,**  
Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка,  
завідувач кафедри механіки суцільних середовищ.

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук, професор  
**КОНОНОВ Юрій Микитович,**  
Донецький національний університет (м. Вінниця),  
провідний науковий співробітник  
науково-дослідної частини;

доктор технічних наук, професор  
**ФІЛІМОНІХІН Геннадій Борисович,**  
Кіровоградський національний технічний  
університет,  
професор кафедри деталей машин і прикладної  
механіки.

Захист дисертації відбудеться «20» вересня 2016 р. о  $13^{30}$  год. на засіданні  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 при Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України за адресою: 03057, м. Київ – 57, вул. П. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці Інституту механіки  
ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ – 57,  
вул. П. Нестерова, 3.

Автореферат розіслано «4» серпня 2016 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01  
доктор фізико-математичних наук

О. П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

### **Актуальність теми.**

Конструкції, до складу яких входять баки з рідиною, використовуються у нафтохімічній промисловості, при транспортуванні рідин (наприклад, зрідженого природного газу), в аерокосмічній галузі, тощо. Найбільш цікавим з практичної точки зору є випадок, коли рідина заповнює резервуар не повністю, або ж заповненість змінюється в процесі експлуатації. Якщо маса рідини є значною у порівнянні з масою резервуару, необхідно враховувати динамічний вплив рідини на резервуар, що вимагає розгляду задачі в сумісній постановці.

Коливання на вільній поверхні рідини, що виникають в процесі експлуатації конструкцій, можуть призвести до небажаних наслідків, як то втрата стійкості конструкцій, руйнування резервуару тощо. Тому важливою є розробка надійної моделі сумісного руху таких систем, яка дасть можливість передбачити небажані режими експлуатації. Поведінка системи в сумісному русі істотно відрізняється від випадків нерухомого резервуару чи резервуару, що рухається за наперед заданим законом; зокрема, суттєво змінюються значення власних частот, резонансні режими, виникають нові внутрішні резонанси та інші механічні ефекти нелінійної природи, виявити які без врахування фактору сумісності руху неможливо.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертацію виконано в рамках держбюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-04 «Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ» (2012–2013 pp., № держреєстрації 0111U004956), №14БП038-01 «Конструктивні методи досліджень сучасних задач механіки суцільних середовищ, орієнтованих на застосування в техніці і медицині» (2014–2015 pp., № держреєстрації 0114U003473) науково-дослідної частини механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

### **Мета і задачі дослідження.**

Головна мета дисертаційної роботи: дослідити особливості поведінки системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі при імпульсному і вібраційному навантаженні в залежності від довжин підвісу, вивчити нелінійні механізми перерозподілу енергії при сумісному русі системи, дослідити зміни в розподілі власних частот і прояву резонансних властивостей системи.

Основні завдання, які необхідно було вирішити для досягнення поставленої мети, такі:

- Дослідити загальні закономірності руху резервуару з рідиною при різних довжинах маятникового підвісу.
- Дослідити закономірності розвитку динамічних процесів в системі.
- Проаналізувати зміну резонансних властивостей системи при врахуванні фактору сумісності.
- Провести аналіз перерозподілу енергії між формами коливань рідини та між різними формами руху в системі.

- На основі лабораторного досліду виконати аналіз достовірності одержаних чисельних результатів.

*Об'єктом дослідження* даної роботи є динаміка механічної системи, що складається з циліндричного резервуара на маятниковому підвісі та рідини з вільною поверхнею. Резервуар є абсолютно твердим та непроникним, рідина – ідеальною, однорідною та нестисливою.

*Предметом дослідження* роботи є особливості динаміки системи резервуар – рідина з вільною поверхнею в сумісному русі при початковому кінематичному збуренні і імпульсному та вібраційному навантаженні в залежності від довжини маятникового підвісу, перерозподіл енергії між різними формами руху в системі.

**Методи дослідження.** В роботі використано варіаційні формулювання та алгоритми розв'язання задачі. Модель системи побудовано на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, методів аналітичної і нелінійної механіки. Для переходу від континуальної моделі до дискретної використано метод модальної декомпозиції. При розгляді конкретних прикладів були використані чисельні методи реалізації аналітичних розв'язків і засоби графічного представлення даних.

**Наукова новизна** отриманих результатів полягає в тому, що:

- Досліджено задачу про коливання резервуару з рідиною на маятниковому підвісі в сумісній постановці при початковому кінематичному збуренні і під дією імпульсного і вібраційного навантаження.
- Досліджено зміну власних частот системи в залежності від довжини маятникового підвісу; показано, що для коротких підвісів може відбуватись зміна чергості розташування частот коливань в порівнянні з розташуванням парціальних частот; вказано наявність внутрішніх резонансів в системі і досліджено прояв внутрішнього резонансу між першими антисиметричною та осесиметричною формами коливань рідини.
- Встановлено особливості перерозподілу енергії між формами коливань рідини і ступінь прояву нелінійних механізмів в залежності від довжин підвісу і показано відмінність від випадку поступального руху резервуару.
- Досліджено перерозподіл енергії між різними формами руху в системі резервуар – рідина з урахуванням узагальненої дисипації енергії коливань рідини. Проведено порівняння одержаних результатів з лабораторним експериментом, в якому продемонстровано ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху в системі.

**Достовірність отриманих результатів** обумовлена використанням варіаційних методів формулювання та розв'язання задачі, контролем виконання законів симетрії та збереження енергії; порівнянням теоретичних результатів з лабораторним експериментом, а також з теоретичними і експериментальними роботами, виконаними іншими авторами.

**Практична цінність отриманих результатів** полягає в розвиненні прикладного алгоритму дослідження динаміки сумісного руху резервуару з рідиною на маятниковому підвісі; розробці засобів обмеження коливань резервуару на маятниковому підвісі шляхом вибору довжин підвісу і створення умов для

цілеспрямованого енергообміну між формами коливань рідини. Одержані результати можуть знайти застосування при розробці заходів вібро- і сейсмозахисту конструкцій з рідиною.

### **Особистий внесок здобувача.**

Представлені до захисту результати були отримані здобувачкою особисто. В опублікованих у співавторстві роботах дисертантці належить дослідження загальних закономірностей і особливостей розвитку динамічних процесів в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі, аналіз специфіки енергообміну між формами коливань рідини та між формами руху в системі, аналіз чисельних прикладів.

Науковому керівнику Лимарченку О.С. належить постановка задачі, ідея методу та участь в систематизації одержаних результатів. Константінову О.В. належить аналіз спектральних характеристик задачі, дослідження задачі про параметричні коливання резервуару з рідиною; Крамаренко Ю.О. належить порівняння результатів у випадках сумісного і заданого руху резервуару, частково заповненого рідиною.

### **Апробація результатів дисертації.**

Основні результати дисертаційної роботи були висвітлені у доповідях на наукових конференціях:

- Наукова конференція «Сучасні математичні методи досліджень в механіці», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, Київ, 8–11 жовтня 2012 р.;
- International Workshop «Hydrodynamics of Moving Objects», Ukraine, Kyiv, April, 2013;
- Міжнародна наукова конференція «Варіаційні методи механіки», Київ, 23–26 вересня, 2013 р.;
- III Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, Київ, 27–29 серпня 2015 р.;
- Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент», Львів, 22–24 вересня, 2015 р.

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася і була підтримана на семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.С. Лимарченка (2015); об'єднаному семінарі кафедр теоретичної та прикладної механіки і механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора Я.О. Жука (2015); семінарі відділів диференціальних рівнянь та теорії коливань і аналітичної механіки Інституту математики НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора А.М. Самойленка (2015); семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора А.А. Мартинюка (2015); семінарі секції за напрямком «Динаміка та

стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В.Д. Кубенка (2015).

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 10 наукових праць. Серед них 7 наукових статей [1–4, 6, 7, 10] у вітчизняних фахових виданнях, затверджених МОН України, з них одна [7] – у науковому журналі, який має міжнародний імпакт-фактор. За результатами дисертації також опубліковано 3 статті [5, 8, 9] у матеріалах наукових конференцій.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертаційна робота складається з вступу, 4 розділів, які містять 85 рисунків та 5 таблиць, висновків та списку використаних літературних джерел із 104 найменувань на 12 сторінках. Загальний обсяг дисертації складає 119 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано вибір теми дослідження, сформульовано основну мету і задачі роботи, окреслено актуальність обраної теми дисертаційної роботи, наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено перелік публікацій з теми дисертаційної роботи та дані про апробацію результатів на конференціях та семінарах.

**Розділ 1** являє собою огляд літературних джерел з тематики дисертації, аналіз підходів та методів розв'язання задач нелінійної динаміки резервуарів з рідиною при кутових рухах резервуару, подано обґрунтування вибору методів розв'язання задачі, що розглядається.

Задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі привернули увагу дослідників ще у 50-х роках ХХ століття. При цьому на початкових етапах розвитку відповідної галузі механіки переважну увагу приділяли загальним постановкам задач динаміки тіл з рідиною, а також коливанням рідини у випадку нерухомого резервуару та резервуару, що рухається поступально за наперед заданим законом. Постановки і методи розв'язання таких задач були розроблені: Г.С. Нарімановим, Л.В. Докучаєвим, В.В. Румянцевим, Б.І. Рабиновичем, В.Д. Кубенком, Г. Бауером, М.М. Мойсеєвим, І.О. Луковським, Р.Ф. Ганієвим, Дж. Майлзом, О.М. Фалтінсеном, М. Ля Рокко, Ж.-П. Шортіно, О.С. Лимарченком, П.С. Ковальчуком та іншими. Задачі нелінійного кутового руху резервуару було реалізовано в роботах М. Ля Рокка, Ж.-П. Шортіно, П. С. Ковальчука для випадку заданого руху резервуару в околі парціальних частот системи. Явище зародження кругової хвилі на поверхні рідини було предметом досліджень в роботах Б.П. Ковальчука.

Побудовані на даний час моделі широко застосовуються в ракетній техніці, для дослідження динаміки і стійкості конструкцій під дією різних видів зовнішнього впливу, зокрема, вибухових хвилях, сейсмонавантаженнях, при розрахунку висотних споруд, конструктивні транспортувальні резервуарів тощо.

Аналіз літературних джерел свідчить про те, що задача динаміки резервуару з рідиною при кутових рухах системи залишається малодослідженою, зокрема, практично немає робіт, присвячених таким нелінійним задачам в сумісній постановці.

В розділі 2 описано побудову математичної моделі руху циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі. Схарактеризовано складності, що виникають внаслідок наявності кінематичної граничної умови на вільній поверхні, та методи, які були використані для виключення цієї граничної умови. Виконано перехід до дискретної моделі механічної системи та аналітично отримано розв'язуючу систему рівнянь мінімальної розмірності.

При побудові моделі динаміки системи були прийняті наступні припущення: рідина вважається ідеальною, однорідною та нестисливою, її рух є безвихровим; вплив поверхневого натягу на коливання вільної поверхні рідини є нехтовно малим; стінки резервуару є абсолютно твердими та непроникними; тертя у закріпленні маятникового підвісу відсутнє.

Методика розв'язання ґрунтуюється на формулюванні задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського та використанні методу Канторовича з попереднім виключенням кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини. Математичне формулювання задачі про рух циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, складається з кінематичних обмежень задачі, динамічних умов, рівнянь руху та початкових умов. Для досліджуваної системи до кінематичних умов відносяться вимога нерозривності потоку в області, умова неперетікання на границі контакту резервуар – рідина та умова непротікання через вільну поверхню рідини:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = 0, \Delta\vec{\Omega} = 0 &\text{ в } \tau; \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = 0, \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{n}} &= \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma; \\ \frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot [\vec{\nabla}\varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z, \xi = z; \\ \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{n}} &= \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S, \end{aligned}$$

де  $\tau$  – область, яку займає рідина,  $S$  – вільна поверхня рідини,  $\Sigma$  – змочувана поверхня резервуару. Динамічні граничні умови та рівняння сумісного руху системи отримано з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського для функції Лагранжа механічної системи, яка має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} [\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \frac{1}{2} I_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_r + M_l) g \varepsilon_r + \\ + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\ - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - \\ - (M_r h_r + M_l h_l) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla}\xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \end{aligned}$$

Кінематичні умови розглядаються як кінематичні в'язі відносно варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно забезпечити задовільнення кінематичних в'язей до початку розв'язання варіаційної задачі. Ця вимога виконується вибором відповідних представлень шуканих величин, що задовольняють кінематичні обмеження задачі автоматично. В результаті одержуємо варіаційну задачу для вільної механічної системи, рух якої описують рівняння Лагранжа другого роду.

Перехід від континуальної до дискретної моделі системи було здійснено із застосуванням методу модальної декомпозиції. Було обрано представлення для шуканих величин, які задовольняють всі кінематичні граничні умови до початку розв'язання варіаційної задачі:

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta); \\ \varphi &= \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{ch \kappa_n(z + H)}{\kappa_n sh \kappa_n H}; \\ \vec{\Omega} &= \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{ch \kappa_n(z + H)}{\kappa_n sh \kappa_n H}.\end{aligned}$$

Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар – рідини були введені наступні узагальнені координати:  $a_i$  – амплітуди збудження форм коливань рідини;  $\alpha_i$  – кути відхилення резервуару від положення рівноваги;  $\varepsilon_i$  – параметри поступального руху резервуару. Рівняння руху системи в загальному вигляді в параметрах  $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$  можна подати наступним чином:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r, \quad r = \overline{1, N+6},$$

де  $p_{rn}$  і  $q_r$  – квадратна матриця та вектор розміру  $N+6$  відповідно,  $N$  – кількість форм коливань рідини, яку приймаємо до розгляду. Елементи матриці та вектору залежать від форм коливань  $\psi_i$  та векторного потенціалу Стокса – Жуковського  $\vec{\Omega}$ . Побудована система рівнянь придатна для загального випадку просторового руху системи, в тому числі для задач з поступальним рухом резервуару. Цю розв'язуючу систему рівнянь було побудовано аналітично для довільної кількості форм коливань рідини. Розмірність такої системи рівнянь мінімальна і дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи, що вивчається. У випадку кутового руху резервуару на маятниковому підвісі, що розглядається в даній роботі, внаслідок вибору початку координат в точці підвісу, яка є нерухомою, параметри поступального руху відсутні

і відповідні рівняння виключені з розгляду. Тому розмірність системи рівнянь скорочується до  $N+3$ . Для отримання чисельних результатів до розгляду було прийнято 12 форм коливань рідини.

**В розділі 3** проведено аналіз чисельних результатів, отриманих при розв'язанні задач про рух системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішнього імпульсного та періодичного моментного навантаження, а також у випадку початкового кінематичного збурення руху. Для отримання числових даних було прийнято до розгляду 12 форм коливань рідини.

При початковому кінематичному збуренні та імпульсному моментному збудженні руху системи рух резервуару відбувається з незначними відхиленнями від періодичного; разом з тим кутова швидкість резервуару демонструє значні розбіжності із гармонічним законом, що є наслідком взаємодії рідини та резервуару в процесі руху системи. Коливання вільної поверхні рідини мають суттєво нелінійний характер; зокрема, значних збурень зазнає перша осесиметрична форма коливань, що свідчить про наявність нелінійних зв'язків в системі. Ці два типи задач було використано як тестові для перевірки працездатності побудованої математичної моделі динаміки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі, виконання законів збереження енергії та симетрії, демонстрації придатності моделі для вивчення нелінійних задач.

Було проведено дослідження для різних співвідношень маси резервуару та рідини, при змінній довжині маятникового підвісу. В усіх розглянутих задачах при кінематичному збуренні та імпульсному збудженні руху системи було виявлено суттєве зменшення амплітуди хвиль на вільній поверхні після проходження нетривалого перехідного періоду, що відповідає 5–7 періодам коливань резервуару. Потрібно відзначити, що при динамічному збудженні руху таке зменшення амплітуд коливань рідини проявляється більш суттєво, спостерігаються значні прояви нелінійних властивостей хвиль (несиметричність профілю хвиль, наявність супергармонік в динамічних реакціях).

Отримані результати дозволяють висунути гіпотезу про те, що відбувся перерозподіл енергії в системі, і енергія хвильового руху на вільній поверхні перейшла в деяку іншу форму руху. Впродовж перехідного періоду коливання резервуару відбуваються з певними порушеннями гармонічного закону, що є свідченням взаємозалежності коливань на вільній поверхні рідини і кутового руху резервуару. Було показано, що при зростанні маси резервуару у порівнянні з масою рідини вплив хвильового руху на вільній поверхні на коливання резервуару знижується.

Було встановлено, що при врахуванні фактору сумісності руху відбувається суттєва зміна розподілу власних частот системи. Сумісні коливання системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі мають власні частоти, які значно відрізняються від парціальних частот коливань. Крім того, значення деяких власних частот системи залежать також від довжини маятникового підвісу. Всі значення частот подаються в  $1/c$ , а амплітуди форм коливань рідини – в безрозмірному вигляді.

На рис. 1 представлено розподіл частот системи для значення довжини підвісу  $l=R$ , де  $R$  – радіус основи резервуара. Індексом «0» позначено парціальну та власну (із зірочкою) частоти резервуара, індексом «1» – частоту першої антисиметричної форми коливань рідини. Індекс «2» відповідає частоті першої осесиметричної форми рідини.

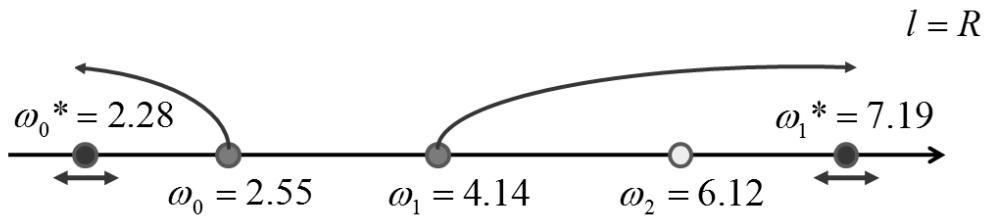


Рис. 1. Розподіл парціальних та власних частот системи резервуар – рідина,  $l=R$

В той час як власні частоти резервуару та першої антисиметричної форми (індекси «0;1») залежать від довжини підвісу, частота першої осесиметричної форми (індекс «2») зберігає значення:  $\omega_2 = \omega_2^* = \text{const}$ . Це створює передумови для виникнення внутрішніх резонансів в системі.

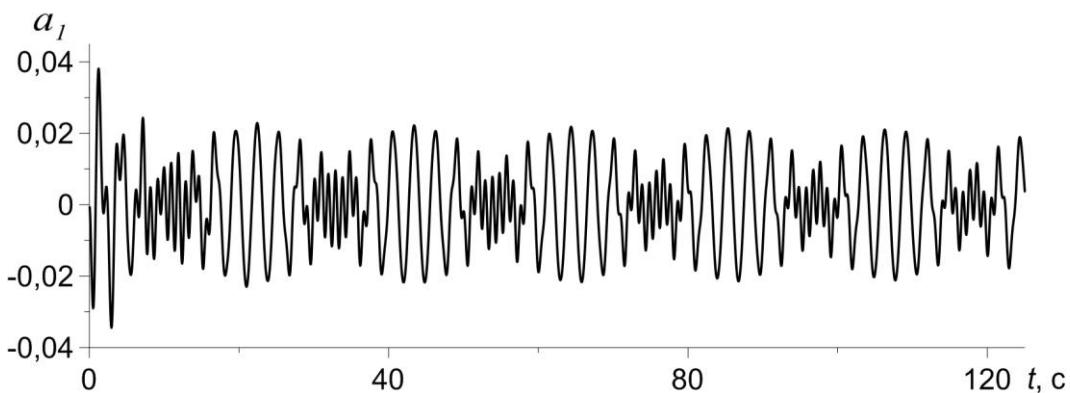


Рис. 2. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини для  $\omega = 2,1$

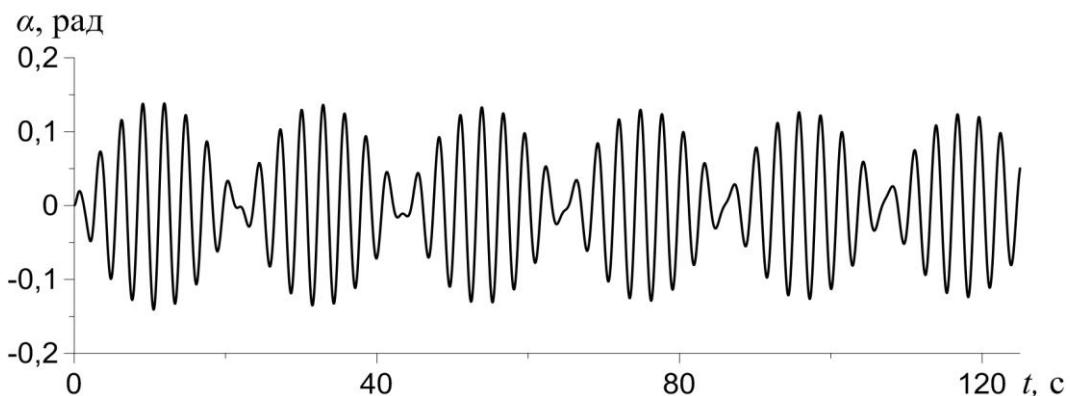


Рис. 3. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі для  $\omega = 2,1$

Було розглянуто задачу про рух системи під дією зовнішнього періодичного навантаження. В початковий момент часу система знаходиться в спокої в положенні рівноваги, зовнішнє моментне навантаження вигляду  $M = M_0 \cos \omega t$  діє на систему протягом усього часу руху. Було проведено дослідження для різних значень частот

зовнішнього навантаження і виявлено, що резонансні властивості системи суттєво проявляються на частотах, що пов'язані з домінуванням маятниковых коливань (в околі власної частоти резервуару  $\omega_0^*$ ), і практично непомітні на частотах, що відповідають домінуванню коливань вільної поверхні рідини.

При частоті зовнішнього навантаження  $\omega = 2,1$ , близькій до власної частоти коливань резервуару, кут відхилення резервуару від вертикалі практично не згасає протягом руху і є суттєво модульованим.

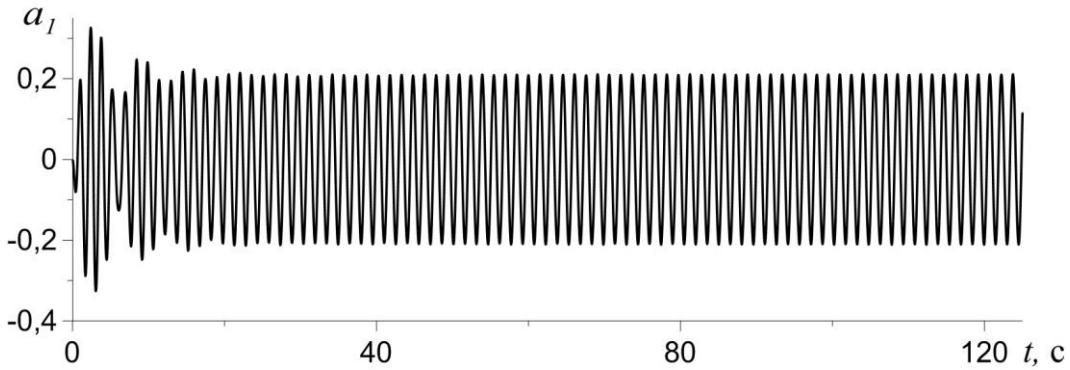


Рис. 4. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини для  $\omega = 4,14$

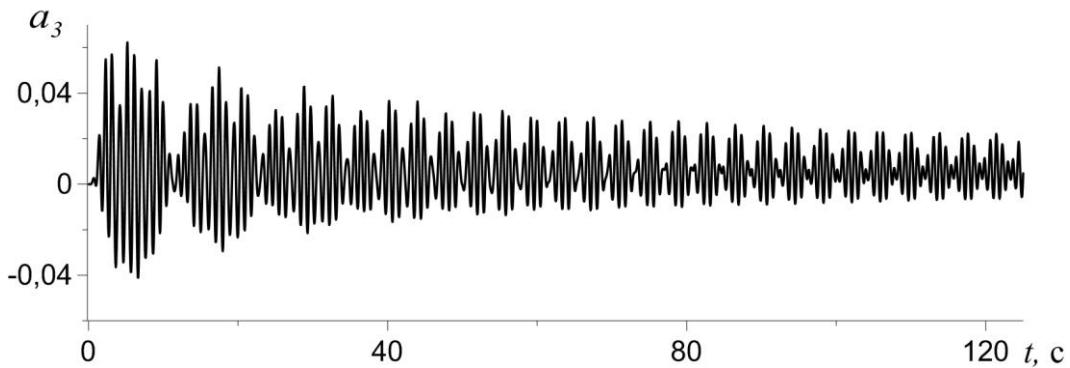


Рис. 5. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини для  $\omega = 4,14$

При частоті зовнішнього навантаження, рівній парціальній частоті першої антисиметричної форми коливань рідини  $\omega = 4,14$ , після нетривалого переходного періоду система переходить в квазіусталений режим руху. Прояви нелінійних ефектів незначні і поступово зникають, про це свідчить поведінка першої осесиметричної форми рідини (рис. 5), яка є індикатором нелінійності динаміки системи. Важливим результатом досліджень є наступний висновок: при жодному значенні частоти зовнішнього навантаження не відбувається вихід системи на усталений режим руху.

Було показано, що є група таких власних частот системи, які залежать від довжини маятникового підвісу, та група незмінних власних частот. Внаслідок цього в системі можуть виникати внутрішні резонанси для певних довжин підвісу та співвідношення мас резервуару та рідини. Було виявлено, що один з таких резонансів призводить до зростання енергії першої осесиметричної форми коливань рідини після тривалого часу руху.

Для значення довжини підвісу  $l = 3,08R$  ( $R$  – радіус основи резервуара), власні частоти першої антисиметричної та першої осесиметричної форм коливань рідини рівні між собою:  $\omega_1^* = \omega_2 = 6.12$ . Дослідження показали, що в цьому випадку на частоті зовнішнього навантаження  $\omega = 6.12$  в системі виникають резонансні ефекти, що проявляються у значному зростанні амплітуди першої осесиметричної форми коливань після тривалого часу руху. Перша антисиметрична форма коливань рідини зазнає досить суттєвих збурень вже на початку руху, на відміну від осесиметричної форми, яка лише після приблизно 80 періодів коливань резервуару стрімко зростає і сягає значення  $0,1R$ . Такий ефект може бути як проявом резонансних властивостей механічної системи, так і результатом накопичення обчислювальної похибки, тому було проведене додаткове дослідження.

Спектральний аналіз рівнянь системи в околі внутрішнього резонансу показав наявність суттєвого прояву збурень на резонансній частоті в правій частині рівнянь для першої осесиметричної форми коливань. Графіки спектрограм для значень частоти зовнішнього навантаження 6,11 та 6,25 наведено на рис. 6, 7.

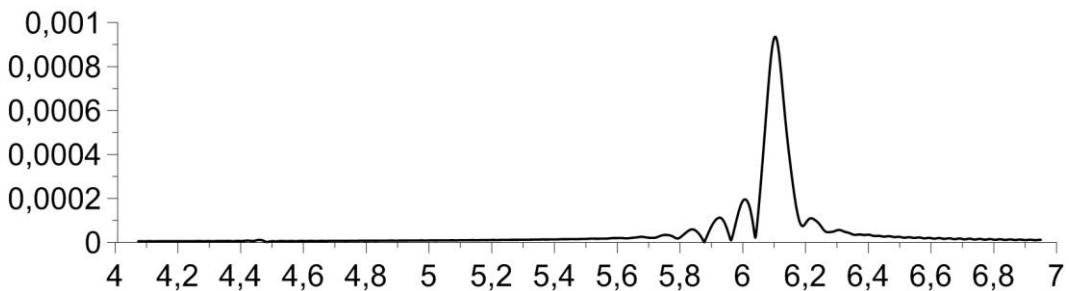


Рис. 6. Спектрограма першої осесиметричної форми при частоті зовнішнього навантаження  $\omega = 6,11$

Динаміка системи описується системою рівнянь в дискретній формі, яка зводиться до нормальної форми Коші; для одержання кількісних результатів застосовується метод Рунге – Кутта 4-го порядку. Порівняння результатів для різних значень кроку інтегрування дає підстави вважати, що спостережений процес не є результатом накопичення обчислювальної похибки.

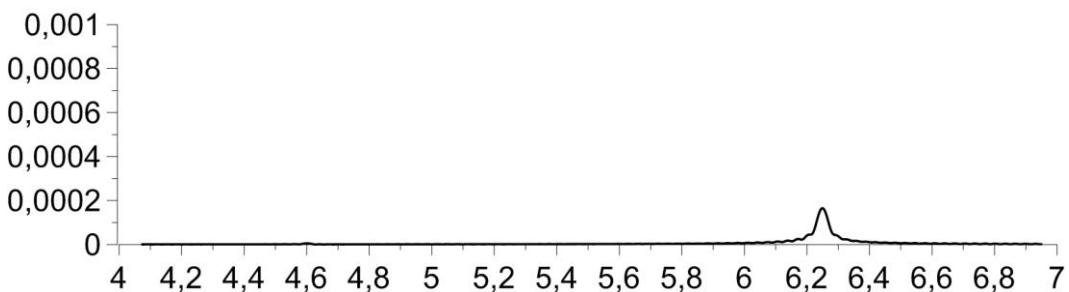


Рис. 7. Спектрограма першої осесиметричної форми при частоті зовнішнього навантаження  $\omega = 6,25$

На відміну від резонансу на власній частоті фізичного маятника, діапазон частот в околі власної частоти першої осесиметричної форми коливань рідини, в якому проявляються резонансні ефекти, є дуже вузьким, і найменше відхилення призводить до кардинальної зміни поведінки системи: осесиметрична форма, що є

показником нелінійності коливань, практично не зазнає збурення, а коливання за домінуючою першою формою відбуваються з незначними відхиленнями від гармонічного закону. Цей ефект є досить цікавим через те, що не можна збудити осесиметричну форму напряму внаслідок зовнішнього впливу на резервуар.

Важливо підкреслити, що, як було встановлено, при коротких довжинах маятникового підвісу в системі відбувається зміна порядку розташування власних частот: частота першої антисиметричної форми рідини стає другою за значенням власною частотою рідини, на відміну від випадку довгих підвісів, де ця частота є першою за значенням. Така особливість частотного розподілу є важливою для розуміння динаміки системи в залежності від довжин маятникового підвісу. Зокрема, відмінностями у взаєморозташуванні частот пояснюється поведінка системи на коротких підвісах, зниження прояву нелінійних ефектів та практично відповідний лінійний теорії рух на ультракоротких підвісах.

**Розділ 4** присвячено питанням залежності динаміки системи від довжини маятникового підвісу та перерозподілу енергії в системі між різними формами руху. Проведено порівняння отриманих чисельних даних з лабораторним експериментом, яке показало добре узгодження результатів на якісному рівні.

Було проаналізовано динаміку системи при різних довжинах маятникового підвісу. Дослідження показали, що в залежності від довжини підвісу фактично існує три діапазони поведінки системи. Для випадку підвісів довжиною  $5R - 25R$  і більше, де  $R$  – радіус резервуару, розвинення хвилеутворення в значній мірі подібне до випадку з поступальним рухом резервуару, який докладно описано в роботах інших авторів. Зокрема, для амплітуд коливань рідини на вільній поверхні суттєво проявляється модуляція, період якої не збігається з періодом коливань резервуару, а залежить від співвідношення маси рідини та резервуару.

На рис. 8–10 наведено зміни в часі амплітуд першої антисиметричної форми коливань рідини (пунктирна лінія), першої осесиметричної форми коливань рідини (точкова лінія), а також кута відхилення резервуару від вертикалі (суцільна лінія) для випадку довжин маятникового підвісу  $l = 25R$ ,  $l = 5R$ ,  $l = 0,1R$  відповідно.

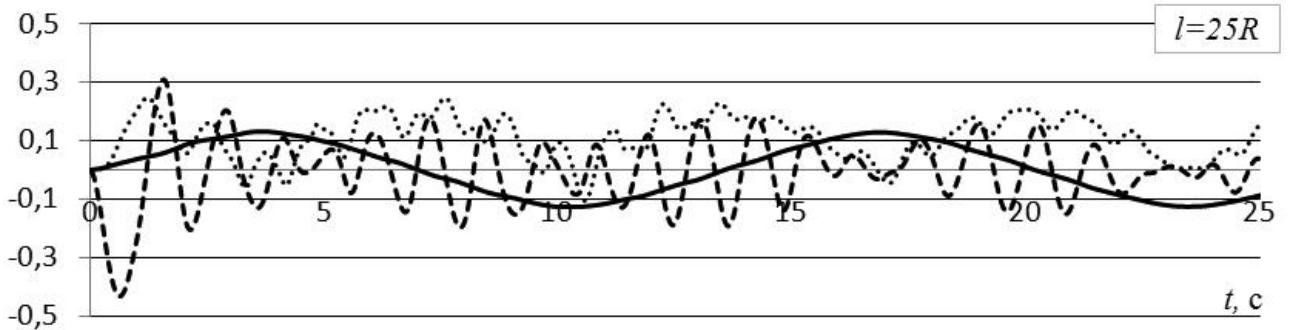


Рис. 8. Зміни амплітуд коливань для довжини маятникового підвісу  $l = 25R$

Привертає увагу динаміка зміни амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини. Для цього діапазону довжин характерним є те, що коливання є суттєво нелінійними, відхилення вільної поверхні в центрі практично всюди додатні (графік першої осесиметричної форми практично повністю знаходиться вище нуля),

що свідчить про несиметричність профілю хвиль з опусканням рівня рідини в серединній точці, коли висота горба хвилі більша за глибину впадини.

В другому діапазоні зміни довжин підвісу  $1,5R - 5R$  амплітуди коливань вільної поверхні та кутових коливань резервуара мають одинаковий порядок (рис. 9). В цьому діапазоні середнє значення першої осесиметричної форми коливань рідини також має характер сильного зміщення, що зумовлено несиметричністю профілю хвиль, але це проявляється не настільки яскраво, як для великих довжин підвісу. Для цього діапазону характерним є спадання амплітуди коливань на вільній поверхні з часом у 3–4 рази.

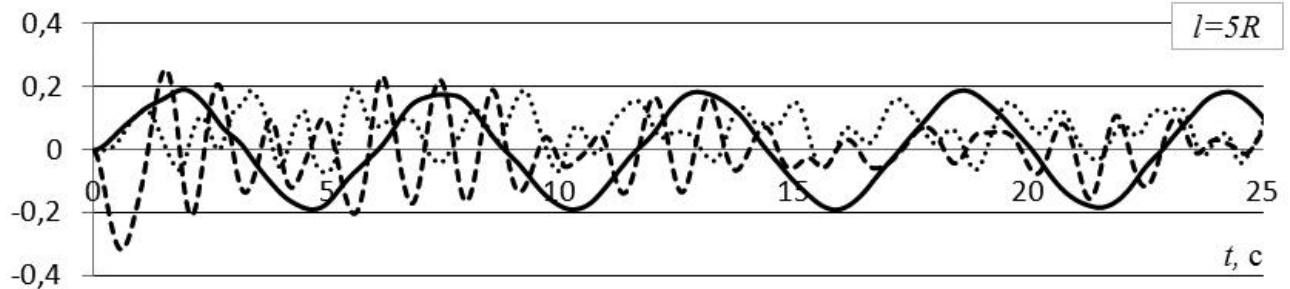


Рис. 9. Зміни амплітуд коливань для довжини маятникового підвісу  $l = 5R$

В діапазоні коротких довжин підвісу  $0R - 1,5R$  енергія коливань значною мірою зосереджується в квазіверному русі резервуару, коливання вільної поверхні незначні, характер зміни амплітуди першої антисиметричної форми наближається до гармонічного з малою амплітудою, що вказує на те, що рух рідини є майже лінійним, зумовленим в значній мірі протифазним рухом резервуару і рідини, який визначається потенціалом Стокса – Жуковського (рис. 10). Для всіх діапазонів довжин підвісу характерним є те, що коливання рідини та рух резервуару відбуваються у протифазі, хоча для довгих підвісів рідина встигає виконати декілька коливань за один період коливання резервуару. Типовим для коротких підвісів є значне затухання коливань вільної поверхні рідини з часом.

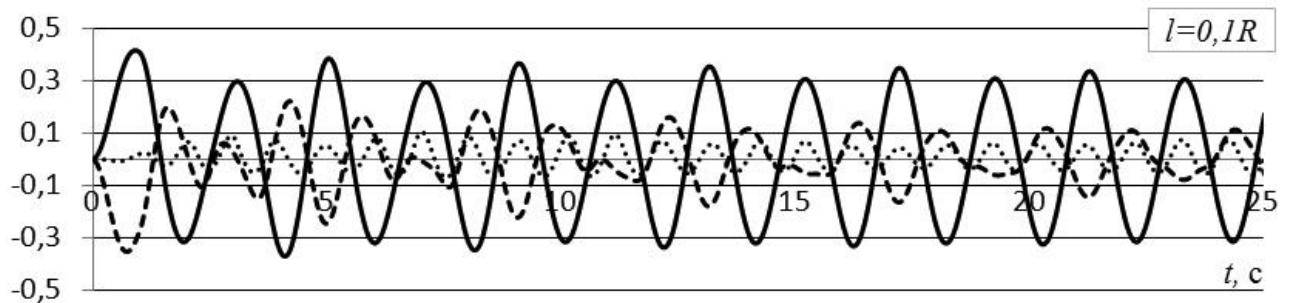


Рис. 10. Зміни амплітуд для довжини маятникового підвісу  $l = 0,1R$

Також було проаналізовано динамічний вплив рідини на резервуар в залежності від довжин маятникового підвісу. Узагальнюючи отримані результати, можемо стверджувати, що в діапазоні коротких підвісів спостерігається такий рух системи, що практично відповідає лінійній теорії. В процесі руху амплітуди сил тиску рідини на стінки резервуару знижуються. У випадку довгих підвісів динаміка системи істотно нелінійна, присутні модуляції в вертикальній складовій головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару.

Особливість даного класу задач полягає в тому, що можна умовно поділити кінетичну енергію системи на складові, які описують різні форми руху. Для дослідження характеру перерозподілу енергії в системі, було розглянуто зміну в часі складових кінетичної енергії системи, що відповідають різним формам руху. Кінетична енергія системи резервуар – рідина може бути представлена в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[ \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[ (\vec{\nabla} \varphi)^2 + 2 \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) + (\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}))^2 \right] d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}))^2 d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j + \rho \int_{\tau} \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) d\tau. \end{aligned}$$

У вищеприведеній формулі перший доданок кінцевої суми містить лише хвильовий потенціал, другий та третій доданки описують квазітвердину рух системи, а останній доданок містить як хвильовий потенціал, так і потенціал Стокса – Жуковського, і тому відповідає за зв'язок хвильового та квазівердого рухів системи. Таким чином, кінетична енергія системи може бути подана у вигляді суми доданків, що відповідають різним формам руху:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Було проаналізовано зміну в часі вищеприведених складових кінетичної енергії системи резервуар – рідина. Модель ідеальної рідини, яка була застосована в першу чергу, не дозволила досягти узгодження зі спостереженнями на лабораторному досліді, який буде описано далі, хоча перерозподіл енергії вдалося продемонструвати і на цій моделі.

Було висунуто гіпотезу про те, що розбіжність спостережень з чисельними результатами пов'язана з неідеальністю рідини в дослідній установці. В системі було введено узагальнену дисипацію згідно з підходом Мікішева, який ґрунтуються на теорії примежевого шару. Для забезпечення подібності між експериментальною установкою і побудованою математичною моделлю було введено коефіцієнт дисипації  $k_v = 46$ , виходячи з критерію Рейнольдса. Для повного аналізу задачі було отримано дані для значень критерію Рейнольдса, що відповідають різним значенням коефіцієнту дисипації  $k_v$ .

На графіках (рис. 11–15) подано зміну в часі складових кінетичної енергії для випадку з введенням дисипацією у відповідності з параметрами експериментальної установки. Відбувається суттєве зниження внеску хвильової енергії та енергії зв'язку хвильового і квазівердого рухів. Натомість, енергія квазівердого руху змінюється набагато повільніше, подібно до поведінки кута відхилення резервуару при  $k_v = 46$  (рис. 16). Ці результати дозволяють говорити про наявність перерозподілу енергії між хвильовим та квазівердим кутовим рухами. Такий перерозподіл проявляється лише при застосуванні нелінійного підходу з введенняю

узагальненою дисипацією і є майже непомітним, якщо застосовувати модель ідеальної рідини без дисипації.

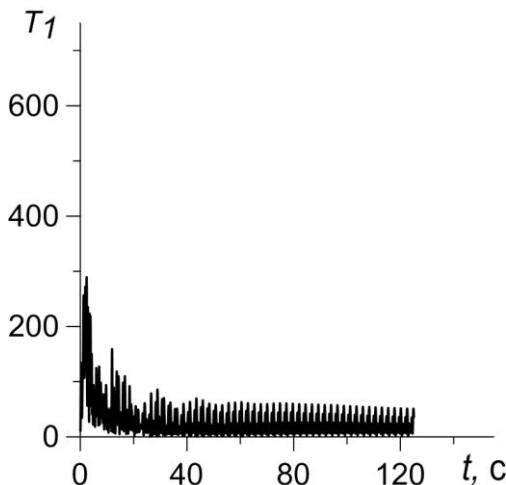


Рис. 11. Графік зміни в часі кінетичної енергії хвильового руху

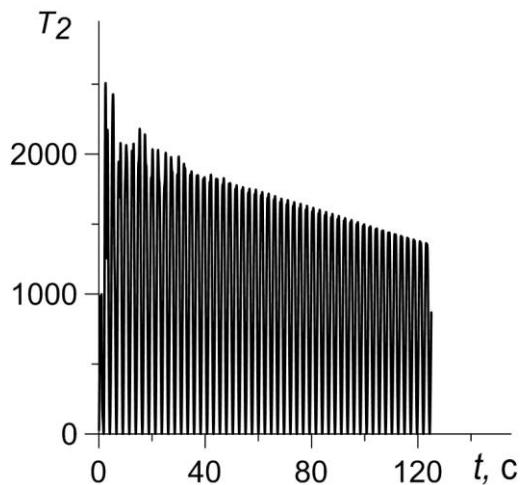


Рис. 12. Графік зміни в часі кінетичної енергії квазітвердого руху

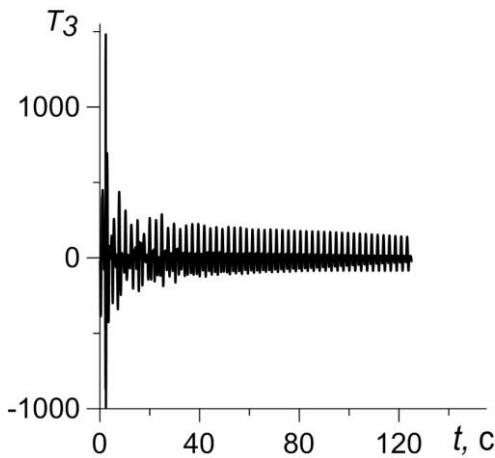


Рис. 13. Графік зміни в часі кінетичної енергії зв'язку

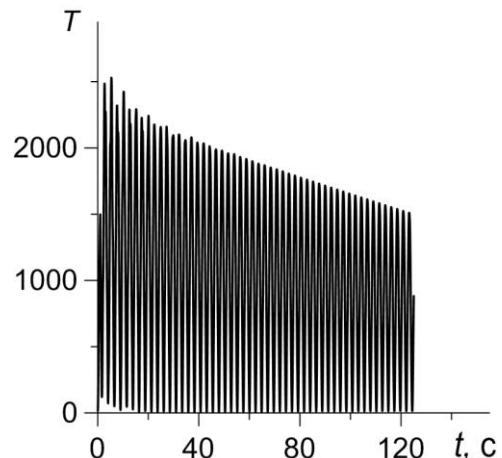


Рис. 14. Графік зміни в часі повної кінетичної енергії системи

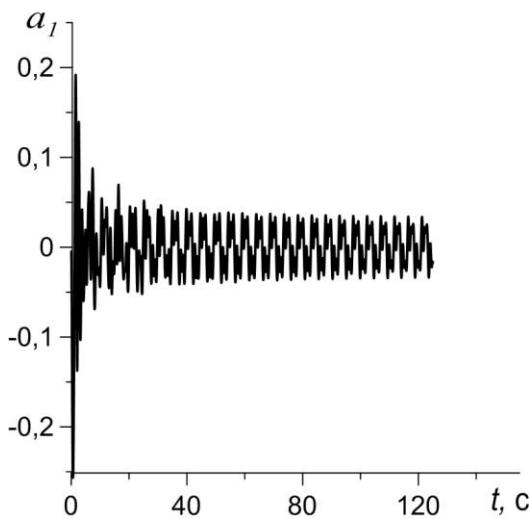


Рис. 15. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини

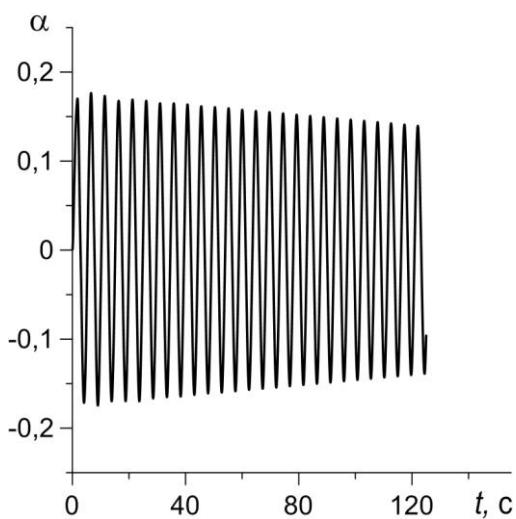


Рис. 16. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі

Для того, щоб продемонструвати, що згасання руху на вільній поверхні не обумовлене лише дисипацією, було розглянуто задачу руху рідини при нерухомому резервуарі. В початковий момент часу рідина зазнає збурення, рівного за величиною до випадку початкового збурення рідини в задачі кінематичного збурення руху системи. Було показано, що у випадку нерухомого резервуару і за відсутності дисипації при початковому збуренні рідини коливання на вільній поверхні не згасають. Це є цілком природним результатом і свідчить про адекватність моделі динаміки системи. За наявності дисипації у випадку нерухомого резервуару згасання коливань на вільній поверхні відбувається відчутно повільніше, ніж у випадку сумісного руху системи на маятниковому підвісі. Таким чином, було показано, що дисипація не є єдиним чинником, який призводить до зменшення амплітуд коливань на вільній поверхні рідини, інший вагомий фактор це перерозподіл енергії між хвильовим та квазітвердим рухами в системі.

Для верифікації побудованої математичної моделі динаміки системи було проведено серію лабораторних дослідів. Було використано експериментальну установку, яка являє собою частково заповнений рідиною резервуар циліндричної форми на маятниковому підвісі.

Конструкція підвісу дозволяє резервуару коливатись в одній площині. Підвіс, що є жорстким металевим прутом, закріплено за допомогою підшипників, які мінімізують дисипацію енергії коливань в закріпленні підвісу. Рідиною в резервуарі є вода, підфарбована для зручності спостережень. Для контролю процесів на вільній поверхні рідини було використано легкий поплавок у вигляді пінопластової кульки. Наразі експериментальна установка не має засобів кількісної реєстрації коливань системи і дає можливість лише на якісному рівні спостерігати механічні ефекти.

Було проведено серію дослідів, яка включала два типи експериментів:

- початкове кінематичне збурення руху системи (в початковий момент часу резервуар є відхиленим від положення рівноваги на деякий кут, рідина знаходиться в спокої, вільна поверхня рідини є горизонтальною. Резервуар відпускають і далі система рухається за інерцією);
- імпульсне збудження руху системи (в початковий момент часу резервуар знаходиться в положенні рівноваги, рідина незбурена. Рух системи починається після короткого поштовху резервуара, далі система рухається за інерцією).

В експериментах обох типів було спостережено наступний ефект: впродовж 5–7 періодів коливань резервуару після початку руху хвильовий рух на вільній поверхні рідини практично зникає, і надалі поверхня рідини залишається візуально нерухомою і паралельною до дна резервуара. Використання поплавка на поверхні рідини дозволило виявити, що насправді відбувається поворотний рух рідини у протифазі з рухом резервуару, тобто квазітвердий тип рухів, який визначається потенціалом Стокса – Жуковського.

Побудована математична модель системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі демонструє якісно подібну до лабораторних спостережень поведінку, причому при введенні коефіцієнта дисипації, який встановлює подібність з

експериментальною установкою, згасання коливань на вільній поверхні рідини в чисельних результатах, отриманих на основі побудованої математичної моделі, відбувається за такий же проміжок часу, що і в експериментах. Інші значення коефіцієнта дисипації призводять до збільшення або зменшення тривалості коливань на вільній поверхні рідини, проте аналогічна тенденція зберігається.

Таким чином, було показано, що одержані чисельні результати добре узгоджуються на якісному рівні зі спостереженнями на лабораторних дослідах, що, зокрема, є свідченням адекватності розробленої математичної моделі і сукупності механічних гіпотез, на яких вона ґрунтується.

## ВИСНОВКИ

1. Реалізовано метод дослідження нелінійних задач кінематичного збурення і динамічного (імпульсного і вібраційного) збудження коливань системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі при кутових рухах системи в сумісній постановці.
2. При аналізі поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі у випадку вібраційного навантаження суттєвою є зміна розподілу частот при врахуванні сумісності руху. Показано, що резонансні властивості системи суттєво проявляються на частотах, що пов’язані з домінуванням маятниковых коливань, і практично непомітні на частотах, що є близькими до резонансних частот рідини. На парціальних частотах система резонансних властивостей не проявляє.
3. Встановлено, що внаслідок залежності групи власних частот системи в сумісному русі від довжини маятникового підвісу в системі можуть виникати внутрішні резонанси. Один з таких ефектів було детально розглянуто. Було виявлено ефект внутрішнього резонансу на довжині підвісу, за якої власні частоти першої осесиметричної та першої антисиметричної форм коливань рідини збігаються. При цьому відбувається зростання амплітуди першої осесиметричної форми після тривалого часу руху, що є проявом нелінійного перерозподілу енергії в системі.
4. Досліджено залежність розвинення динамічних процесів від довжини підвісу. Встановлено, що при малих довжинах підвісу в системі значно знижуються прояви нелінійних механізмів. Натомість, при великих довжинах підвісу динаміка рідини уподоблюється до випадку поступального руху резервуару, зростає внесок нелінійних механізмів. Встановлено, що така зміна характеру поведінки системи пояснюється зміною взаємного розташування власних частот коливань системи в залежності від довжини маятникового підвісу.
5. Для імпульсного збудження і початкового кінематичного збурення руху рідини встановлено ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії в системі. Зокрема,

показано, як залежить згасання кінетичної енергії хвильового руху від дисипації енергії рідини. Показано узгодженість встановленого ефекту на якісному рівні з проведеним лабораторним експериментом.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Семенович К. О. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / К. О. Семенович, О. С. Лимарченко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 67–70.
2. Семенович К. А. Динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром при угловых колебаниях / К. А. Семенович, О. С. Лимарченко // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування : зб. пр. Ін-ту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 4–5. – С. 520–525.
3. Лимарченко О. С. Поверхневе хвилеутворення в системі резервуар – рідина при кутовому збуренні руху резервуару / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2014. – № 3. – С. 50–53.
4. Лимарченко О. С. Особливості руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішньої гармонічної сили / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології / Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстрігача НАН України. – 2014. – № 20. – С. 140–146.
5. Konstantinov O. V. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems / O. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko, K. O. Semenovych // Mathematical Modeling & Computing. – Lviv, 2015. – Vol. 2, No. 1. – P. 48–57.
6. Семенович К. О. Внутрішній резонанс в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі / К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвип. – С. 239–242.
7. Лимарченко О. С. Перерозподіл енергії між резервуаром і рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Нелінійні коливання / Інститут математики НАН України. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 85–92.
8. Семенович К. О. Перехідний рух резервуара на маятниковому підвісі при кінематичних та силових збуреннях / К. О. Семенович // Зб. матеріалів наук. школи-семінару «Сучасні математичні методи досліджень в механіці», (Київ, 8–11 жовт. 2012 р.). / відп. ред. О. С. Лимарченко ; Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка. – К. : Вид-во «Адверта», 2012. – С. 32–37.
9. Семенович К. О. Цілеспрямований перерозподіл енергії в процесі руху резервуару з рідиною на маятниковому підвісі / К. О. Семенович // Зб. матеріалів

міжнар. конф. «Варіаційні методи механіки», (Київ, 23–26 верес. 2013 р.) / відп. ред. О. С. Лимарченко ; Київський нац. ун-т імені Тараса Шевченка. – К. : Вид-во «Адверта», 2014. – С. 8–12.

10. Крамаренко Ю. О. Роль фактора сумісності руху рідини з вільною поверхнею при різних способах закріплення резервуару / Ю. О. Крамаренко, О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвип. – С. 129–132.

## АНОТАЦІЯ

**Семенович К. О. Нелінійні механізми перерозподілу енергії в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, 2016.

В дисертаційній роботі розглянуто задачі сумісного кутового руху резервуару з рідиною на маятниковому підвісі. Для дослідження цього класу задач застосовано нелінійну модель з врахуванням 12 форм коливань рідини. Досліджено задачу про коливання резервуару з рідиною в сумісній постановці при кінематичному збуренні і під дією імпульсного і вібраційного навантаження. Проведено порівняння одержаних результатів з лабораторним експериментом, в якому продемонстровано ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху в системі. В роботі було встановлено особливості перерозподілу енергії між формами коливань рідини і ступінь прояву нелінійних механізмів в залежності від довжин підвісу і показано відмінність від випадку поступального руху резервуару. Досліджено зміну власних частот системи в залежності від довжини маятникового підвісу; показано, що для коротких підвісів може відбуватись зміна черговості розташування частот коливань, вказано наявність внутрішніх резонансів в системі.

**Ключові слова:** нелінійна динаміка рідини, вільна поверхня рідини, кутовий рух резервуара, циліндричний резервуар.

## АННОТАЦИЯ

**Семенович К. О. Нелинейные механизмы перераспределения энергии в системе резервуар – жидкость на маятниковом подвесе.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2016.

В диссертационной работе рассмотрены задачи совместного углового движения резервуара с жидкостью на маятниковом подвесе. Для изучения этого класса задач применена нелинейная модель с учетом 12 форм колебаний жидкости. Рассмотрена задача про колебания резервуара с жидкостью в совместной постановке при

кинематическом возбуждении и под действием импульсной и вибрационной нагрузки. Произведено сравнение полученных результатов с лабораторным экспериментом, в котором было продемонстрировано эффект целенаправленного перераспределения энергии между разными формами движения в системе. В работе установлены особенности перераспределения энергии между формами колебаний жидкости и степень проявления нелинейных механизмов в зависимости от длины маятникового подвеса и показаны отличия от задачи поступательного движения резервуара. Исследовано изменение собственных частот системы в зависимости от длин маятникового подвеса; показано, что для коротких подвесов может изменяться очередность расположения частот колебаний, указано наличие внутренних резонансов в системе.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика жидкости, свободная поверхность жидкости, угловое движение резервуара, цилиндрический резервуар.

## ANNOTATION

**Semenovych K. O. Nonlinear mechanisms of energy redistribution in the system reservoir – liquid on pendulum suspension. – Manuscript.**

Thesis for Candidate's Degree of Physical and Mathematical Sciences in specialty 01.02.01 – theoretical mechanics. – S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The problem of combined motion of cylindrical reservoir, partially filled by ideal incompressible liquid on pendulum suspension, is considered in the thesis. The reservoir is assumed to have absolutely rigid impermeable walls, liquid motion is vortex-free. Variational formulation of the problem is applied. According to this approach problem statement should be considered as aggregate of kinematic boundary conditions (constraints) and variational principle, which includes motion equations and dynamical boundary conditions. Mathematical modeling is performed on the basis of the Hamilton – Ostrogradsky variational principle with preliminary elimination of kinematic boundary conditions and further transition to discrete system by the Kantorovich method (modal decomposition). Specifically chosen representations of unknowns are applied to hold all kinematic boundary conditions.

Nonlinear model involving 12 normal modes of free surfaced liquid is applied to obtain numerical data, although the obtained resolving system of equations is eligible for arbitrary large number of normal modes. The resolving system of equations, obtained in the course of problem investigation, is of minimal dimension equal to the number of degrees of freedom of the system reservoir – liquid with a free surface. This approach makes it possible to obtain all coefficients of the nonlinear model of the system in quadratures. Due to selection of origin of reference frame at the point of pendulum suspension of the reservoir and since suspension point is immovable, translational motion of the reservoir in the problem under investigation is taken out of consideration and it is possible to describe motion of the reservoir only by angular parameters.

The problem of oscillations of cylindrical tank with liquid in combined formulation

under kinematic disturbance and impulse and periodic external loading is investigated. The obtained numerical results are compared and it was shown their concordance with laboratory experiment, which showed the effect of directed redistribution of energy between different modes of motion in the system. Peculiarities of redistribution of energy between normal modes of liquid oscillations and different modes of motion in the system and manifestation of nonlinear effects depending on the length of pendulum suspension are specified and differences from the case of translational motion of the tank with liquid were shown. It was shown that for short length of suspension oscillations on a free surface of liquid are insignificant and subside quickly and energy is concentrated in quasi-rigid motion, which is described by the Stokes – Zhukovsky vector potential. Long suspension lengths imply system dynamics, which is similar to the case of translational motion of the reservoir. Oscillations on the free surface are significantly modulated and sharply nonlinear.

For the class of problems under consideration it's possible to represent kinetic energy of the system as sum of three addends, which correspond to different modes of motion of the system. Redistribution of energy between different modes of motion was investigated by analysis of variation of the corresponding components of kinetic energy in time. For complete description of the system real properties we took into account viscous properties of liquid according to technique of the generalized dissipation, suggested by G.N. Mikishev. Variation of amplitudes of normal modes of the system depending on length of pendulum suspension is investigated. It was ascertained that partial frequencies of the system become non-resonant frequencies and the system manifests no special effects in their vicinities. Normal frequencies of liquid modes differ considerably from their partial values. It was shown that for short lengths arrangement of normal frequencies changes in comparison with arrangement of partial frequencies. We pointed out on possibility of internal resonances in the system and particular case of internal resonance between two normal frequencies was investigated. In the case of such internal resonance phenomenon of increase of amplitude of axisymmetric mode in comparatively durable period is manifested. It is worthy to note that axisymmetric mode of liquid motion cannot be excited by any external loading of the reservoir, however, on excitation of the system with parameters, which correspond to internal resonant, this becomes possible.

*Keywords:* nonlinear liquid dynamics, liquid free surface, angular motion of reservoir, cylindrical tank.

---

Підписано до друку 16.05.2016 р. Формат 60x90/16.  
Ум. друк. арк. 0,9. Обл.-вид. арк. 0,9.  
Тираж 100. Зам. 71.

---

«Видавництво “Науковий світ”»<sup>®</sup>  
Свідоцтво ДК № 249 від 16.11.2000 р.  
м. Київ, вул. Казимира Малевича (Боженка), 23, оф. 414.  
200-87-15, 050-525-88-77  
E-mail: [nsvit23@ukr.net](mailto:nsvit23@ukr.net)  
Сайт: [nsvit.cc.ua](http://nsvit.cc.ua)