

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА**



**Юрчук Василь Миколайович**

УДК 539.3

**ТЕОРІЯ ПООДИНОКИХ ХВИЛЬ В НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ МАТЕРІАЛАХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**АВТОРЕФЕРАТ**  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

**Київ – 2019**

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

**Науковий керівник:** член-кореспондент НАН України,  
доктор фізико - математичних наук, професор  
**Рушицький Ярема Ярославович,**  
Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка  
НАН України, завідувач відділу реології

Офіційні опоненти: доктор фізико - математичних наук, професор  
**Лоза Ігор Андрійович,**  
Національний транспортний Університет,  
завідувач кафедри теоретичної та прикладної  
механіки

доктор фізико - математичних наук, професор  
**Городецька Наталія Сергіївна,**  
Інституті гідромеханіки  
НАН України, учений секретар

Захист відбудеться «9» липня 2019 року о 13<sup>30</sup> годині на засіданні спеціалізованої  
вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за  
адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту механіки  
ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «\_\_\_\_» 2019 року.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01  
доктор фізико-математичних наук

 О.П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Теорія нелінійних хвиль в пружних матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії пружності, який через властиві теорії нелінійних хвиль математичні труднощі не є закінченим до цього часу і розвивається у багатьох наукових центрах світової механіки. З іншого боку, сучасна промисловість виробляє незлічену кількість машин, конструкцій, приладів, устаткування, які або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення хвиль, або в яких часом спостерігаються хвильові процеси. Тому знання про хвилі є затребуваним продуктом для сучасної промисловості.

З посеред маси різноманітних хвиль виділяються певні типи, затребуваність яких є особливою. Саме до таких відносяться поодинокі хвилі, знання про які є потрібним фактично у всіх галузях практичної діяльності людини – від медицини до архітектури, від машинознавства до історії. Підтвердження цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами *solitary waves in materials*.

Поодинокі хвилі мають давню історію. Вважається, що дослідження таких хвиль бере початок від спостережень Рассела 1838 рік поодиноких хвиль в одному із водних каналів Англії. З тих пір поодинокі хвилі традиційно вивчаються в рамках гідромеханіки. Переважаюча кількість результатів відноситься до особливого типу поодиноких хвиль – солітонів. Існує багато монографій і оглядів на цю тему.

Поодинока хвиля в даній дисертаційній роботі розуміється як хвиля з залежним від просторових координат профілем, що концентрується в обмеженій частині простору і здебільшого має вигляд одного або кількох горбів. Відмінність так означеної поодинокої хвилі від солітону полягає у тому, що вона взаємодіє сама з собою і іншими хвильами, змінюючи при поширенні свій початковий профіль.

Поодинокі хвилі в матеріалах дослідженні значно менше і досліджуються вони, головним чином, як один із видів простих хвиль. Тому розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах представляється актуальним з точки зору розвитку самої теорії хвиль. З практичної точки зору, знання закономірностей розповсюдження поодиноких хвиль корисно при інженерних розрахунках конструкцій, на які діє ударний імпульс. Отже, розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах актуальній з точки зору як фундаментальних, так і прикладних аспектах теорії хвиль.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

Дисертаційна робота виконана у відповідності з основними напрямками наукових досліджень відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка; зокрема, з науково – дослідницькою темою № 1.3.1.399-16 «Ефекти локалізації напружень в околі криволінійних отворів та зовнішніх границь в елементах композитних конструкцій» (І. 2016 – IV. 2019, номер державної реєстрації 0115U005701). Отримані наукові результати увійшли до звіту науково-дослідної роботи № 1.3.1.399-16;

**Мета і задачі дослідження.** *Метою* роботи є дослідження еволюції поодиноких хвиль. Вона включає:

- постановку задач про динамічні процеси в матеріалах (середовищах), що описуються пружним потенціалом Мурнагана;
- отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль в рамках двох різних наближених підходів до розв'язку хвильової задачі;
- вибір трьох типів початкового профіля поодинокі хвилі, які є близькими до реально спостережуваних профілів хвиль в матеріалах;
- теоретичний і числовий аналіз поширення поздовжніх хвиль з початковим гармонічним і дзвіноподібним профілями з метою вивчення еволюції початкового профіля внаслідок слабкої нелінійності матеріалу;
- теоретичний і числовий аналіз поширення поперечних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера з метою вивчення еволюції початкового профіля внаслідок слабкої нелінійності матеріалу;
- теоретичний і числовий аналіз поширення циліндричних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Макдональда;
- проведення порівняльного аналізу нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих автором розв'язків, який включає вплив частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю.

*Об'ектом дослідження є поодинокі поздовжна, поперечна та циліндрична хвилі в матеріалах (середовищах), що описуються пружним потенціалом Мурнагана, та еволюція їхнього початкового профіля.*

*Предметом дослідження є вплив нелінійності деформування матеріалу на поширення поодиноких хвиль, що описуються пружним потенціалом Мурнагана, та вплив початкової амплітуди, розміру підошви хвилі і параметрів матеріалу на характер еволюції початкового профілю.*

**Методи дослідження.** Дослідження проводилися в рамках нелінійної теорії пружності. Нелінійні хвильові рівняння отримувались методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт зміщення для різних початкових профілів хвилі. Чисельний аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур комп'ютерного пакету «Wolfram Mathematica 10.2».

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в таких положеннях, що виносяться на захист:

1. Отримані нові нелінійні хвильові рівняння для поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль в рамках двох різних наближених підходів до розв'язування хвильової задачі.
2. Розвинутого наближеного метод обмеження на градієнт зміщення стосовно поодиноких хвиль.
3. Порівняно два різні методи розв'язування нелінійної задачі поширення поодинокої хвилі з початковим гармонічним та дзвіноподібним профілями в рамках двох перших наближень.
4. Проведено числове моделювання для різних типів матеріалів, підошв і максимальних амплітуд хвиль з метою виявлення впливу нелінійності матеріалу на процес еволюції (спотворення) початкового профілю хвилі.

5. Показано, що три досліджені типи поодиноких хвиль (з початковим профілем у вигляді функції Гауса, Уіттекера та Макдональда) поширяються за різними сценаріями еволюції. Симетричні профілі (у вигляді функції Гауса) спотворюються симетрично – максимальна амплітуда зменшується, профіль розширюється, стаючи двогорбим.

6. Показано, що еволюція хвилі суттєво залежить від типу нелінійності деформування матеріалу (розділену квадратичну і кубічну нелінійності).

**Обґрунтованість та достовірність** забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль, класичного підходу до аналізу поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль, застосуванням апробованого методу послідовних наближень та методу обмеження на градієнт зміщення, використанням графічних алгоритмів пакету «Wolfram Mathematica 10.2», узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль і відповідністю міркуванням фізичного характеру.

**Практичне значення одержаних результатів** полягає в можливості кращого розуміння впливу різних параметрів хвилі і матеріалу на поширення поодиноких хвиль в матеріалах, що описуються пружним потенціалом Мурнагана. Показано що застосування методу обмеження на градієнт зміщення до розв'язку хвильової задачі, дає практично прийнятні результати.

**Особистий внесок здобувача.** Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. Дисертанту належать аналітичні викладки, числові та графічна реалізація в системі символічних обчислень «Wolfram Mathematica 10.2». Визначення загального напрямку досліджень, постановка задач належать науковому керівникові Рушицькому Я.Я. Аналіз отриманих результатів проводився спільно з Я.Я. Рушицьким.

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень, що включенні в дисертацію, були представлені на таких міжнародних наукових конференціях: 1. Int. Math. Conf. (to 100 birthday of G.N.Polozhii), Kiev, Ukraine. April 23 – 24, 2014. 2. Int. Sci. Conf.ce «Micro - and nanoheterogeneous materials: models and experiment» Lviv, Ukraine, Sept. 21 – 25, 2015. 3. Міжн.наук.-практ. конф. «Modern problems of thermomechanics», Львів, Україна, 22 – 24 вересня, 2016. 4. Міжн.наук.-практ. конф. «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, Україна, 22 – 24 вересня, 2016. 5. XVIII Int.Conf.ce «Dynamical system modeling and stability investigation», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, 24–26 травня, 2017. 6. Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки». Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Кафедра теоретичної та прикладної механіки, Київ, Україна, 27–30 серпня, 2017. 7. Міжн. наук.- практ. конф. «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання», Івано-Франківськ – Яремча, Україна, 14 – 19 травня, 2018.

У повному обсязі дисертація доповідалася і обговорювалася на наукових семінарах: відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка, відділу поверхневих хвиль Інституту гідромеханіки НАН України,, секції вченої

ради Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка за напрямком «Механіка композитних і неоднорідних середовищ».

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 5 наукових робіт у фаховому виданні Міжнародному науковому журналі Прикладная механика - «International Applied Mechanics.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається із анотації, вступу, 6 розділів, висновків, списку використаних джерел із 99 найменувань на 8 сторінках та додаку. Загальний обсяг дисертації становить 189 сторінок разом з 51 рисунками а також 4 додатків які складаються з 57 сторінок в яких наведені 48 рисунків та 5 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику дисертації. В ньому обґрунтована актуальність вибраної теми, сформульовані мета та задачі дослідження, наукова новизна та практичне значення одержаних результатів дисертаційної роботи. Наведено відомості про апробацію та публікації результатів дослідження. Зазначено особистий внесок здобувача.

У **розділі 1** розглядаються основні характеристики хвилі та необхідна термінологія. У підрозділі 1.1 наведено класичні хвильові рівняння та їхні характеристики, які пояснюються за допомогою класичного хвильового розв'язку Д'Алямбера. На прикладі біжучої гармонічної хвилі  $u(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ , що є розв'язком класичного хвильового рівняння, наведено основні поняття: періоду, швидкості поширення, хвильового числа та фази хвилі. Розглянуто поляризацію біжучої гармонічної хвилі, де введено поняття плоскої хвилі зміщення та два поняття: поперечно та вертикально поляризованих хвиль.

У підрозділі 1.2 розглядаються плоскі хвилі. Для плоских хвиль в ізотропних матеріалах записані хвильові рівняння в припущені, що напрямок поширення збігається з віссю абсцис ( $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$ ). Ці рівняння описують одну поздовжню плоску хвиллю (*P*-хвиллю), дві поперечні плоскі хвилі – горизонтально поляризовану хвиллю (*SH* – хвиллю) і вертикально поляризовану хвиллю (*SV* – хвиллю).

У підрозділі 1.3 розглядаються класичні лінійно-пружні циліндричні хвилі. Якщо вибрати циліндричну систему координат  $O\varphi z$  у такий спосіб, що вісь  $Oz$  співпадає з віссю порожнини, то задача про рух хвилі стає осесиметричною і всі функції, які описують рух, залежатимуть від однієї просторової координати – радіуса  $r$  - і часу  $t$ . Циліндрична хвilia поширюється вздовж радіальної координати перпендикулярно до осі симетрії від поверхні порожнини до нескіченності. Розв'язок записується через функцію Ханкеля першого роду і нульового індекса  $\Phi(r, t) = \Phi_o H_o^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}$  ( $\Phi_o = \text{const}$ ). Описано подібність поширення поздовжньої і плоскої хвиль щодо великих відстаней поширення циліндричної хвилі: параметри циліндричної хвилі будуть дуже близькими до параметрів відповідної плоскої поздовжньої хвилі (крім амплітуди).

У розділі 2 розглядаються основні моделі пружних матеріалів та модель нелінійного пружного деформування Мурнагана, в рамках якої і побудована дана робота.

У підрозділі 2.1 необхідна попередня інформація про основні три групи моделі пружного деформування: гіперпружні, пружні і гіпопружні матеріали.

Модель Мурнагана відноситься до групи гіперпружних матеріалів. При описі моделі зазвичай використовується тензор деформації Коші-Гріна, який задається за відомим вектором переміщень  $\vec{u}(x_k, t)$

$$\varepsilon_{nm}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{i,m}). \quad (1)$$

Також у цьому підрозділі описана необхідна інформація про поділ деформацій на малі, помірні та великі.

У підрозділі 2.2 розглянуто потенціал Мурнагана. Він є кубічним щодо тензора деформацій і записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Гріна

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}) = & (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + \\ & + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3 \end{aligned} \quad (2)$$

або через перші алгебраїчні інваріанти  $I_k$  цього тензора

$$\begin{aligned} W(I_1, I_2, I_3) = & \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}CI_1^3; \\ (I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ik}), I_2 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^2], I_3 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^3]), \quad & \lambda, \mu \text{ є пружними постійними Ляме, } A, B, \\ C - \text{ постійними Мурнагана).} \end{aligned}$$

Модель Мурнагана вважається класичною в нелінійній теорії гіперпружних матеріалів, вона враховує всі квадратичні і кубічні складові і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів.

Далі використано певне спрощення потенціалу Мурнагана. У представленні потенціалу через зміщення зберігаються лише нелінійності порядку 2, 3

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2}\lambda(u_{m,m})^2 + \frac{1}{4}\mu(u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + \\ & + \frac{1}{2}(\lambda + B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \frac{1}{3}C(u_{m,m})^3. \end{aligned} \quad (3)$$

Загальна схема переходу від потенціалу до хвильових рівнянь фактично складається з двох кроків: спочатку слід записати конститутивні рівняння і далі використати рівняння руху. В результаті отримується нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме.

$$\rho\ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu)u_{n,mn} = F_m. \quad (4)$$

Справа в рівнянні (4) зібрані всі нелінійні члени

$$\begin{aligned} F_i = & [\mu + (1/4)A](u_{l,kk}u_{l,i} + u_{l,kk}u_{i,l} + 2u_{i,lk}u_{l,k}) + \\ & + [\lambda + \mu + (1/4)A + B](u_{l,ik}u_{l,k} + u_{k,ik}u_{i,l}) + (\lambda + B)u_{i,kk}u_{l,l} + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+(B+2C)u_{k,ik}u_{l,l}+\left[(1/4)A+B\right]\left(u_{k,lk}u_{l,i}+u_{l,ik}u_{k,l}\right).$$

Також показано таблиці значень пружних постійних моделі Мурнагана, взяті з трьох найбільш інформативних монографій: Лур'є А.І., Гузя О.М. та Гаука В.

У підрозділі 2.4 розглядаються нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мурнагана.

Розглядаються плоскі поляризовані хвилі і припускається, що  $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$ . Тоді потенціал (3) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned} W = & (1/2) \left[ (\lambda + 2\mu)(u_{1,1})^2 + \mu \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \\ & \left[ \mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B)u_{1,1} \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Відповідні компоненти тензора напружень Кірхгофа є наступними:

$$\begin{aligned} t_{11} = & (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + (3/2) \left[ \lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C) \right] (u_{1,1})^2 + \\ & + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] \left[ (u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right], \\ t_{12} = & \mu u_{2,1} + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1}u_{2,1}, \\ t_{13} = & \mu u_{3,1} + (1/2) \left[ \lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1}u_{3,1}, \end{aligned} \quad (7)$$

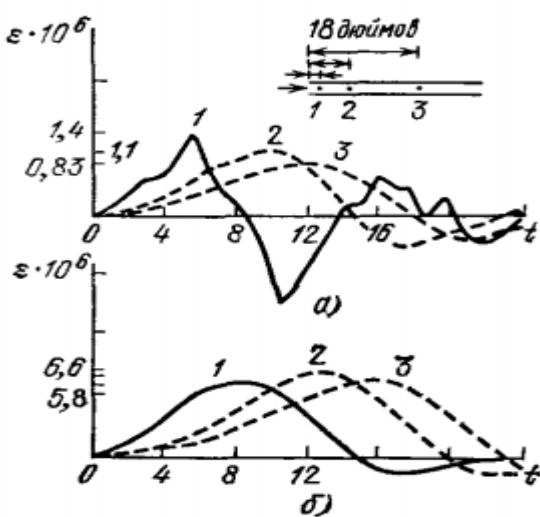
Підстановка даних формул в рівняння руху дає квадратичне нелінійне хвильове рівняння для трьох поляризованих плоских пружних  $P, SH, SV$  хвиль

$$\begin{aligned} \rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = & N_1 u_{1,11}u_{1,1} + N_2 (u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}), \\ \rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = & N_2 (u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}), \\ \rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = & N_2 (u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}), \\ N_1 = & 3 \left[ (\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C) \right], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \end{aligned} \quad (8)$$

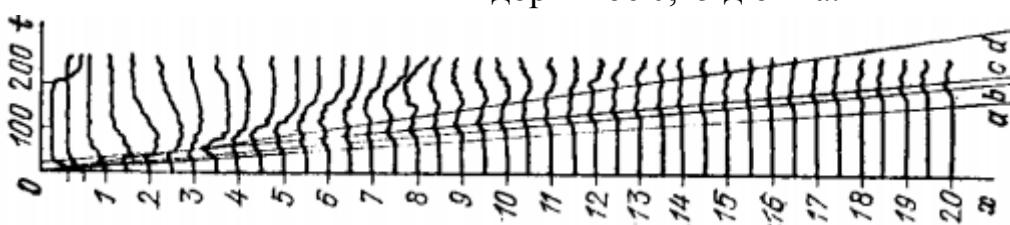
Особливістю нелінійних хвильових рівнянь (8) є те, що ліві частини є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві частини включають тільки квадратично нелінійні доданки. Ця структура виявилася дуже зручною в наближеніях дослідженнях поширення хвилі. Друга особливість полягає в тому, що, на відміну від лінійних хвильових рівнянь, нелінійні рівняння є зв'язаними і цей зв'язок не є симетричним.

У **розділі 3** розглядаються прості хвилі та їх поведінка в різних середовищах. Підрозділ 3.1 присвячений простим хвилям Рімана в нелінійній акустиці, простим хвилям в механіці рідин і газів, простим хвилям в механіці електромагнітних середовищ. Простою хвилею в механіці рідин і газів визначають хвиллю, яка рухається з постійною швидкістю  $u_1$  і характеризується просторовою координатою  $x - u_1 t$ . Зокрема, розв'язок типу Д'Алямбера має вигляд простої хвилі в системі відліку з просторовою координатою  $x - u_1 t$ .

Далі розглядаються поодинокі хвилі, що виникали у експериментах у різних фізичних дослідах, наприклад: співударі стержнів (Фаннінг і Бассетт, 1940 р.), удар кульки в стержень (Ріппергер, 1953 р.), дослід Белла (1960).



Дослід Ріппергера (1953): визначає за допомогою п'єзоелектричних датчиків профіль хвилі деформації в трьох різних точках стержня при осьовому зіткненні кульок. Діаметр стержня дорівнює одному дюйму. 1- перший датчик, 2- другий датчик, 3- третій датчик;  $t$  – час в  $10^{-6}$  с,  $\varepsilon$  – деформація. а) Випадок коли діаметр кульки дорівнює 0,125 дюйма б) Випадок, коли діаметр кульки дорівнює 0,25 дюйма.



Профілі хвилі з дослідів на дію імпульса на стержень

В досліді Белла (1960) досліджено радіальні переміщення, стержня при дії імпульса. На рисунку:  $t$  – час в мкс,  $x$  – довжина від торця, по якому відбувся удар (одиницею виміру являється довжина діаметра стержня). Для кожного перетину, який знаходиться на вказаній відстані на осі, отримано графік профілю хвилі радіальних переміщень точок поперечного перетину.

Отже, в експериментальній механіці накопичено велика кількість спостережень поширення простих поодиноких хвиль. На даний час існує велика кількість робіт за заданою тематикою.

У підрозділі 3.2 розглядаються профілі поодиноких хвиль: у вигляді функції, яка описує гармонічну хвиллю, і у вигляді функцій Чебишова – Ерміта, Уіттекера та Макдональда.

Гармонічною називають хвилю з формою профіля, заданою функціями: комплексно-значна функція  $u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$  або  $u(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$ , та дійсна функція  $u(x,t) = A \cos(kx - \omega t)$  або  $u(x,t) = A \cos k(x - vt)$ .

Далі розглянуто функції Чебишова-Ерміта, Уіттекера, Макдональда.

Функції Чебишова-Ерміта задаються формулою

$$\psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n^*(z),$$

де  $H_n^*(z)$  є поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n^*(z) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}z); H_n(z) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x^2/2} \right)$$

Функції Чебишова-Ерміта нульового індекса має вигляд  $\psi_0(x) = e^{-x^2/2}$ . Ця функція добре відома в теорії сигналів і загальній теорії хвиль і має там називатися “дзвіноподібна функція”.

Функції Уіттекера  $M_{k,m}(z)$  і  $W_{k,m}(z)$  генеруються таким рівнянням

$$w'' + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) w = 0.$$

Фундаментальну систему розв'язків цього рівняння формують функції  $W_{k,m}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Phi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right)$ ,  $\Phi(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$ .

Функція Макдональда – це модифікована функція Бесселя другого роду наступного вигляду  $K_\nu(u) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(u) - I_\nu(u)}{\sin \nu \pi}$ , де  $\nu$  є не ціле дійсне число і

$I_\nu(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}$ , є циліндричною функцією з чисто уявним аргументом.

Функція Макдональда представляється рядами:

$$K_{n+1/2}(z) = \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)(2z)^r}, \text{ n – ціле невід’ємне;}$$

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} \psi(m+1),$$

$$\psi(1) = -C, \psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - C,$$

$C = 0,5772157\dots$  – стала Ейлера.

У розділі 4 розглянуті три підходи до розв'язування нелінійної хвильової задачі: метод послідовних наближень, метод повільно змінних амплітуд, та наближений метод, оснований на перетворенні хвильового рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Проведено теоретичний та числовий аналіз поширення повздовжних хвиль з початковим гармонічним та дзвіноподібним профілями. Тут застосовано метод послідовних наближень та метод обмеження на градієнт зміщення. Також проведено числовий аналіз хвилі з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера.

В числовому аналізі нелінійних повздовжних, поодиноких хвиль з вказаними вище початковими профілями досліджено вплив частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію профілю хвилі.

У підрозділі 4.1 докладно розглядаються два підходи розв'язування нелінійної хвильової задачі:

*Метод послідовних наближень (метод 1).* Цей метод ще називають методом збурень або методом малого параметра. Він оснований на введенні малого параметра  $\varepsilon$ . Застосовувати метод зручно, коли відомий розв'язок задачі, близької до задачі, яку треба розв'язати. У випадку нелінійних хвиль близькою задачею вважають лінійну задачу і використовують її класичний розв'язок. Для прикладу, розглядається повздовжна хвиля рух якої описується рівняння яке треба розв'язати

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = \varepsilon (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}.$$

Згідно з методом, розв'язок  $u_1(x_1, t, \varepsilon)$  шукають у вигляді збіжного ряду

$$u_1(x_1, t) = u_1(x_1, t, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_1^{(n)}(x_1, t) = u_1^{(0)}(x_1, t) + \varepsilon u_1^{(1)}(x_1, t) + \varepsilon^2 u_1^{(2)}(x_1, t) + \dots$$

Тоді розв'язок у вигляді перших двох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned}$$

Даний розв'язок описує головний хвильовий ефект, що формується у три етапи. Спочатку хвиля слабко відрізняється від лінійної гармонічної хвилі. Далі зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи часу її поширення перша гармоніка сумується з другою гармонікою, амплітуда якої повільно зростає, і вони утворюють модульовану хвиллю. На етапі 3 вплив другої гармоніки зростає і вона стає домінантною.

*Наближений метод, оснований на перетворенні хвильового рівняння i обмежені на градієнт зміщення (метод 2).* Розглядається нелінійне хвильове рівняння отримане в рамках квадратично нелінійного наближення

$$u_{1,tt} - \{1 + \alpha u_{1,1}\} (v_L)^2 u_{1,11} = 0.$$

Припускається, що поодинока хвиля з початковим профілем у вигляді  $F(ax_1)$  поширюється у такому ж вигляді, але функція  $F$  вже залежить від фазової змінної  $\sigma = a(x_1 - vt)$ , тобто  $u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)]$ , де  $v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$ ,  $v$  – це швидкість поширення хвилі,  $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$ . Далі корінь  $\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}}$  розкладається за умови  $|\alpha u_{1,1}| \ll 1$  за першими двома наближеннями і записується розв'язок у вигляді

$$u_1(x_1, t) \cong F[a(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha v_L u_{1,1} t)]. \quad (9)$$

Розв'язок (9) можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром  $\delta$  в околі класичного постійного значення фази  $\sigma = a(x_1 - v_L t)$  – що є другим припущенням даного методу.

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) a[\delta - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2 \quad (10)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (10) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий

ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

Необхідність застосування методу 2 до задач про поодинокі хвилі з профілями, які не описуються експоненціальними функціями, виникає через те, що метод 1 не може бути ефективно застосований у випадку таких профілів.

У підрозділі 4.2 теоретично проаналізовано поширення повздовжних хвиль з початковим профілем у вигляді гармонічного профілю які описані за допомогою методів 1 та 2.

З метою числового аналізу описано властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі: алюміній, мідь та сталь. Вибрані основні параметри зміни хвильових характеристик. В результаті на основі отриманих результатів проаналізовано вплив підошви хвилі, максимальної амплітуди та параметрів матеріалу на спотворення початкового профілю хвилі.

Далі вивчено особливості еволюції хвилі при застосуванні методу 2.

Тут хвильове рівняння для гармонічного профілю має наступний вигляд:

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - c_L t)} - (1/2)c_L t \alpha(k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - c_L t)}.$$

На рис. 1 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, для плоскої повздовжної хвилі гармонічного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811, a_0 = 1 \cdot 10^{-5}, \omega = 0.8 \cdot 10^5$ .

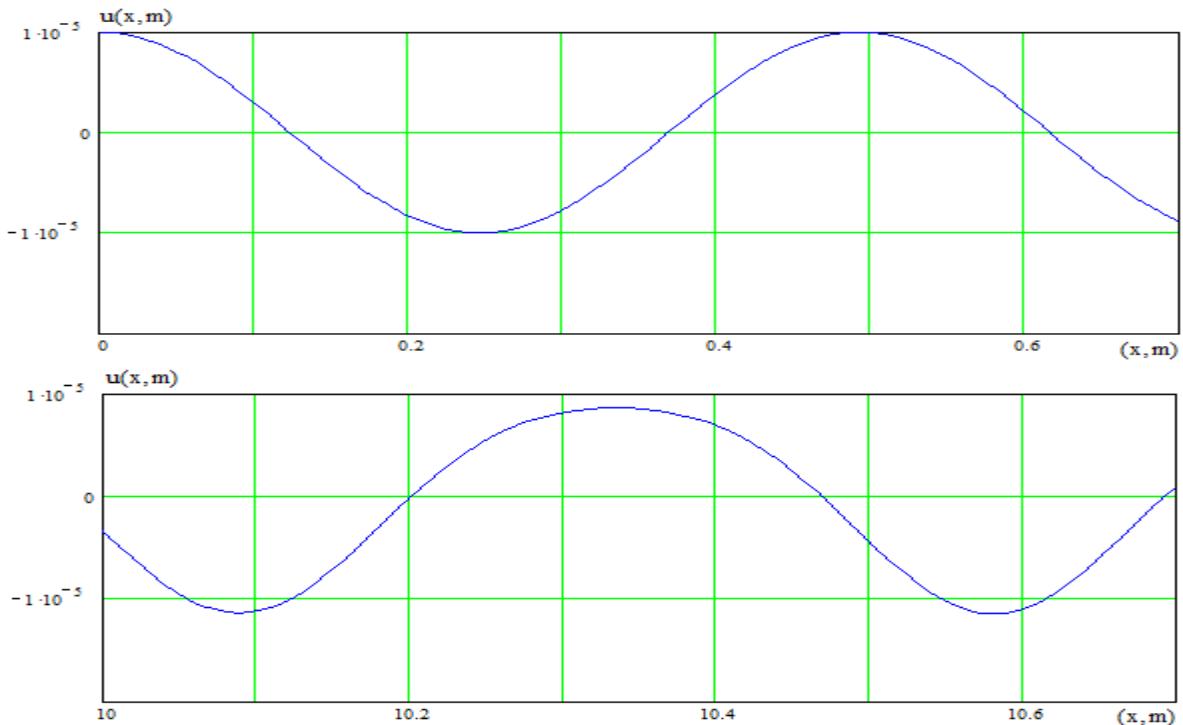


Рис. 1

На наступному кроці вивчені особливості еволюції при застосуванні методу 1. Тут розв'язок хвильового рівняння для гармонічного профілю має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_1^{(0)}(x_1, t) + u_1^{(1)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[ \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned}$$

На рис. 2 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, для плоскої повздовжної хвилі гармонічного профілю для тих же значень параметрів, що використані у побудові графіків на рис. 1.

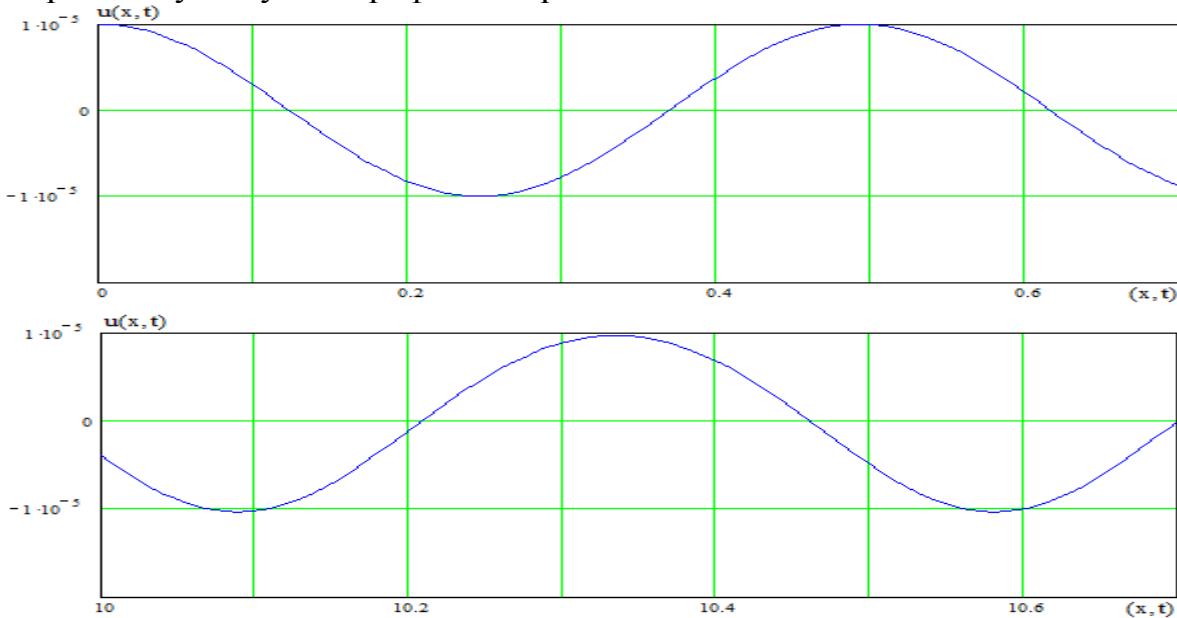


Рис. 2

Із зіставленням рисунків 1 та 2 випливає що еволюція початкового профілю хвилі відбувається з практично однаковим якісним результатом, однак швидкість спотворення різна. Це пов'язано з тим, що методи основані на дещо відмінних обмеженнях.

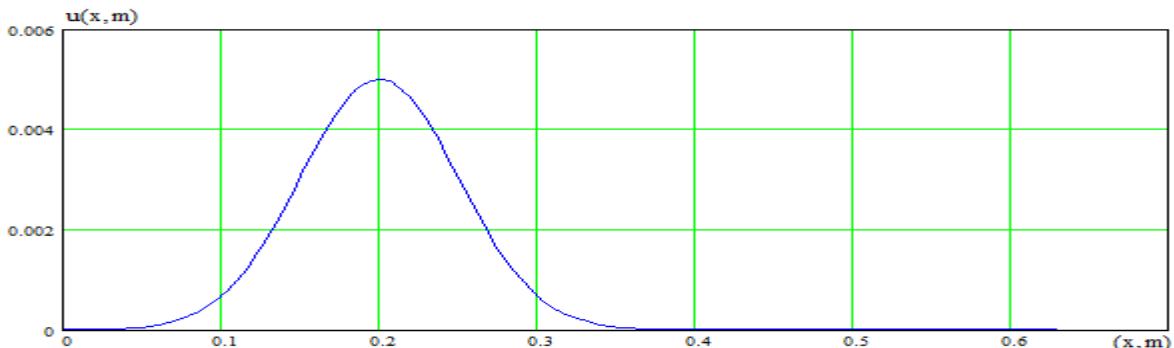
У підрозділі 4.3 проаналізовано плоску поодиноку хвилю з дзвіноподібним профілем з врахуванням нелінійності деформування на основі отриманих наближених розв'язків.

Розв'язок, що оснований на методі обмеженні на градієнт зміщення, є таким:

$$u_1(x_1, t) = A^o e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - c_L t)^2}{2}\right]} - \left(\frac{1}{2}\right) t \alpha c_L a^2 (x_1 - c_L t)^2 (A^o)^2 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - c_L t)^2}{2}\right]} \quad (11)$$

На рис. 3 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (11) для хвилі дзвіноподібного профілю при наступних значеннях параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та значення параметру, що визначає довжину підошви хвилі  $a = 20$ .

На нижньому графіку рис. 3 зіставлено початковий і деформований профіль



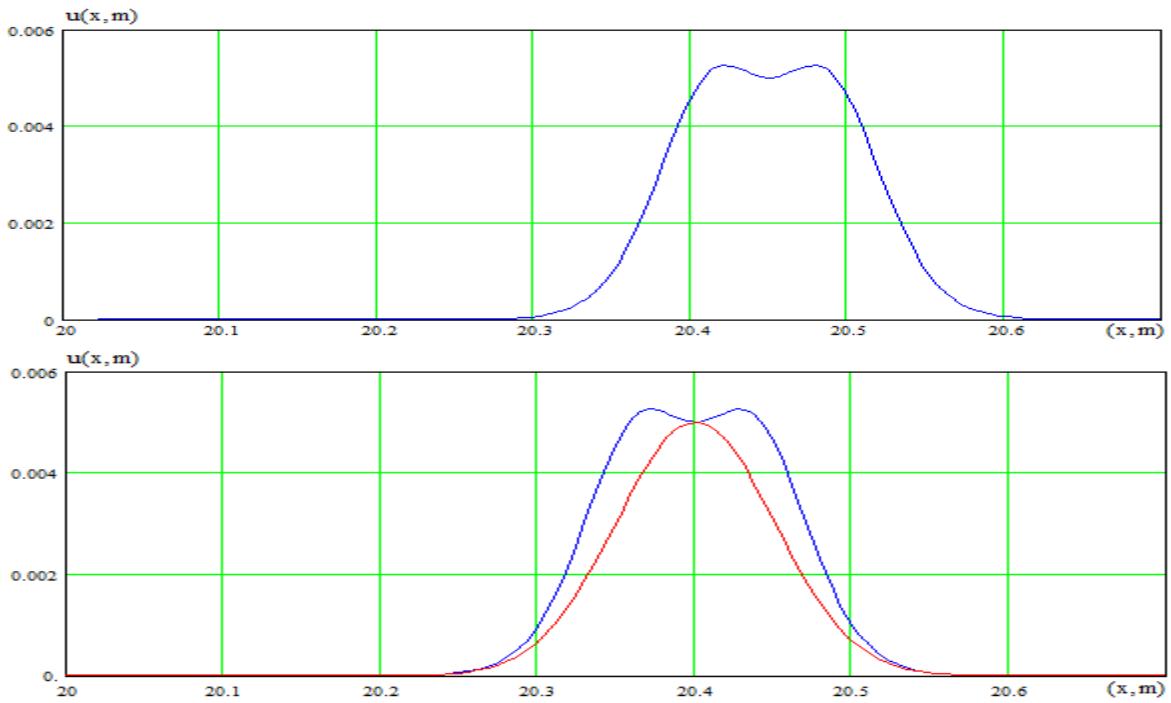


Рис. 3

З графіків рис. 3 випливає, що дисторсія початкового профілю зростає зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля. Отже, вплив другої гармоніки на еволюція початкового профілю хвилі достатньо великий. Аналогічно проведені дослідження для різного типу матеріалів, різної підошви хвилі та різного максимального значення амплітуди. Всі отримані графіки свідчать, що дисторсія початкового профілю є суттєвою. Швидкість спотворення залежить від характеристик матеріалу і профіля.

У підрозділі 4.4 аналізовано плоску поодиноку хвилю з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера з врахуванням нелінійності деформування на основі отриманих наблизених розв'язків.

Розв'язок, що оснований на методі 2, є таким:

$$u(x, t) = a_0 W_{1/4;1/4} \left( a(x - c_L t) \right) - (1/2)t\alpha c_L (a)^2 (a_0)^2 \times \\ \times \left( \left( \frac{1}{4a(x - c_L t)} - \frac{1}{2} \right) W_{1/4,1/4} \left( a(x - c_L t) \right) \right)^2 \quad (12)$$

На рис. 4 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (12) для плоскої хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha = -16.811$ ,  $a_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  та значення параметру, що визначає довжину підошви хвилі  $a = 30$  на нижньому графіку рис. 4 зіставлено початковий і деформований профіль.

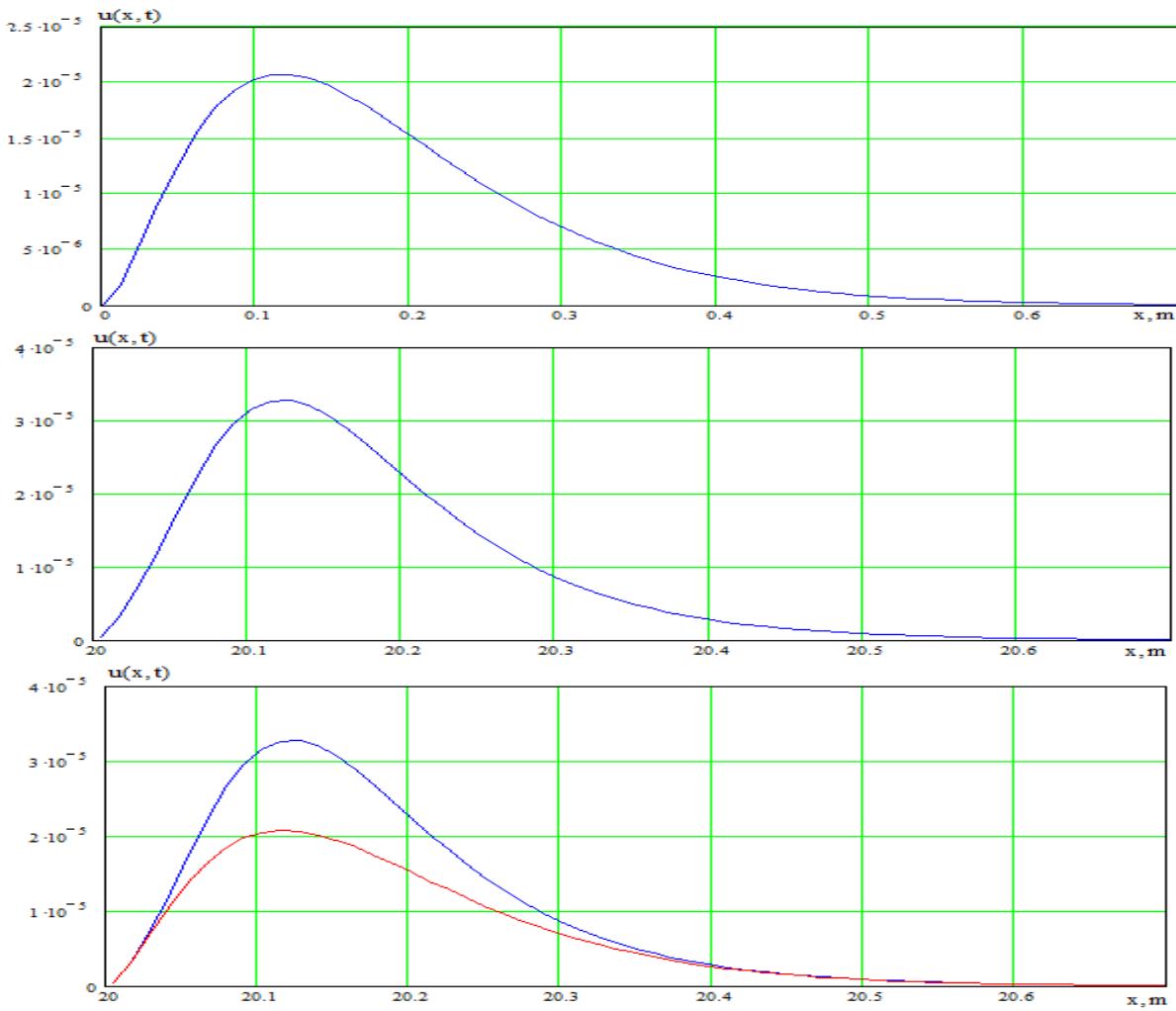


Рис. 4

Отже одинична хвиля з несиметричним профілем у вигляді функції Уіттекера еволюціонує таким чином: зменшується початкова амплітуда, ліва та права частини горба поступово стають крутішими, сам профіль поступово зміщується вправо, спотворений профіль нагадує дзвінкоподібний. Підошва хвилі у всіх випадках залишається незмінною.

Порівняння еволюції симетричної дзвінкоподібної хвилі та хвилі з несиметричним профілем у вигляді функції Уіттекера показує, що профілі першої змінюються симетрично, тоді як профіль другої – несиметрично.

У розділі 5 розглянуто поширення нелінійно пружної плоскої поодинокої поперечної хвилі з початковим дзвінкоподібним профілем. Проведено порівняльний аналіз із поздовжною поодинокою хвилею з тим же початковим профілем.

Нелінійне рівняння поширення SV-хвилі має вигляд:

$$u_{3,tt} - \left\{ 1 + \alpha_3 (u_{3,1})^2 \right\} (v_T)^2 u_{3,11} = 0,$$

При застосуванні методу обмеження на градієнт зміщення розв'язок даного рівняння буде наступним:

$$u_3(x_1, t) \approx F_3(\sigma) + F'_3(\sigma) \left[ \delta = -(1/2) \alpha_3 v_T (u_{3,1})^2 t \right] = F_3(\sigma) - (1/2) \alpha_3 v_T t [F'_3(\sigma)]^3$$

Для початкового профіля у вигляді функції Гаусса  $u_3(x_1, t) = u_3^o e^{-(\sigma^2/2)}$  розв'язок має вигляд:

$$u_3(x_1, t) \approx u_3^o e^{-(\sigma^o)^2(x_1 - v_T t)^2/2} + (1/2)t\alpha_3 v_T (\sigma^o)^3 (x_1 - v_T t)^3 (u_3^o)^3 e^{-3(\sigma^o)^2(x_1 - v_T t)^2/2} \quad (13)$$

На рис. 5 показані графіки зміни амплітуди з шляхом, який пройшла хвиля, що відповідають розв'язку (13) для плоскої поперечної хвилі дзвіноподібного профілю для наступних значень параметрів: алюміній  $\alpha_3 = -82,648$ ;  $u_3^o = 8 \cdot 10^{-3}$  та значення параметру, що визначає довжину підошви хвилі  $\sigma^o = 0,8$ .

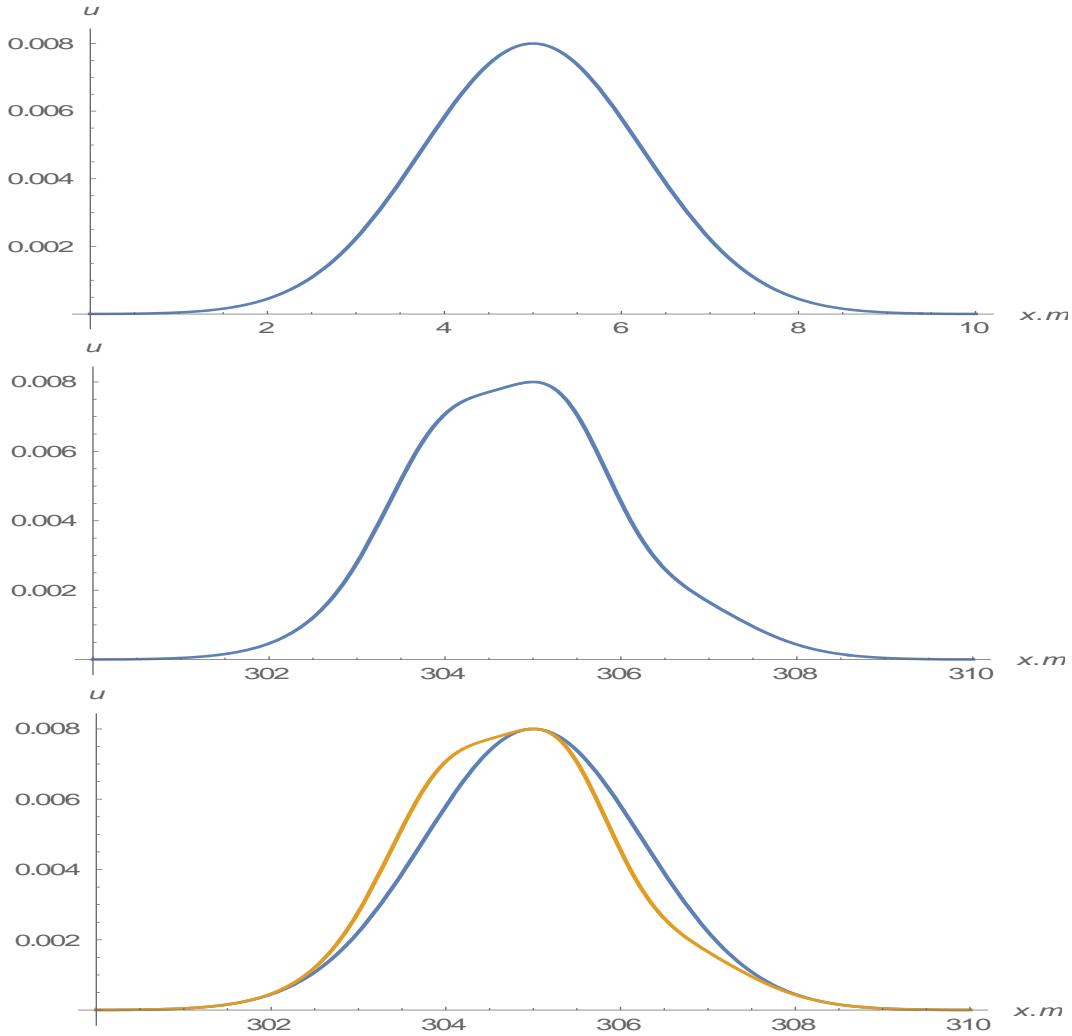


Рис. 5

Графіки рис. 5 свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля хвилі. При цьому ширина горба та значення максимальної амплітуди залишаються незмінними. Порівняння зі зміною профіля дзвіноподібної поодинокої повздовжної хвилі показує, що дзвіноподібна поперечна хвіля змінює свій профіль дещо по-іншому – перш завсе, профіль стає несиметричним. Відмінності в еволюції поперечної та повздовжної хвилі, що викликані відмінностями нелінійного деформування – кубічна для поперечного та квадратична для поздовжнього.

У розділі 6 розглянуто поширення нелінійно плоскої поодинокої циліндричної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда.

Отримано нелінійне хвильове рівняння є наступним:

$$(c_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - u_{r,tt} = 0$$

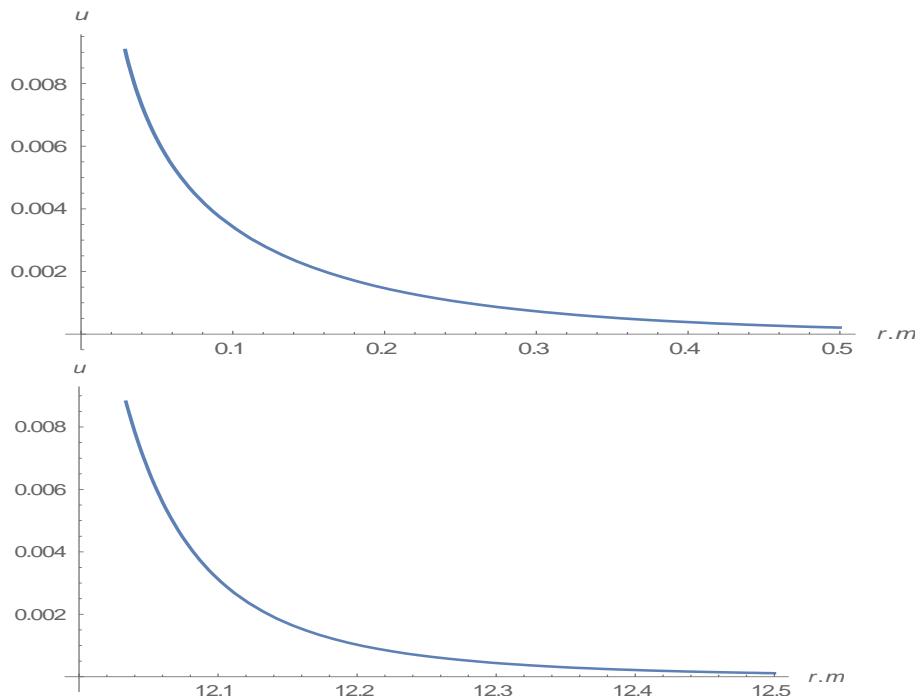
Якщо одинична хвиля поширюється у вигляді  $u_r(r,t) = F(a(r-vt))$ , де початковий профіль має вигляд  $u_r(r,t) = a^o \sqrt{\frac{2}{\pi a(r-c_L t)}} e^{-a(r-c_L t)}$ . Тоді загальний розв'язок, оснований на обмеженні на градієнт зміщення з початковим профілем у вигляді функції Макдональда має вигляд:

$$u_r(r,t) \approx a^o K_0(a(r-c_L t)) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2 [K_1(a(r-c_L t))]^2. \quad (14)$$

Підставляючи в (14) наближені значення функцій  $K_0$  і  $K_1$  отримаємо розв'язок:

$$u_r(r,t) \approx a^o \sqrt{\frac{2}{\pi a(r-c_L t)}} e^{-a(r-c_L t)} - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t (a^o)^2 \times \\ \times \left[ \left( \frac{1}{2\sqrt{(a(r-c_L t))^3}} + \frac{1}{\sqrt{a(r-c_L t)}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-a(r-c_L t)} \right]^2. \quad (15)$$

На рис. 6 показані графіки поширення хвилі, що відповідають розв'язку (15) для циліндричної радіальної хвилі профілю функції Макдональда для наступних значень параметрів: алюміній  $\tilde{N}_1 = -16,811$ ;  $a_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  та значення параметра що відповідає довжині підошви хвилі  $a = 5$ .



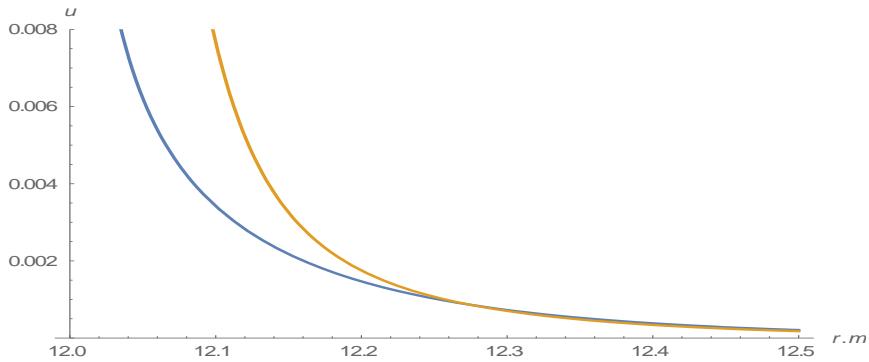


Рис. 6

На нижньому графіку рис. 6 зіставлено початковий і деформований профіль.

Графіки рис. 6 свідчать про суттєву еволюцію початкового профіля і зміну параметрів хвилі.

Тобто при проходженні радіальної циліндричної хвилі деякої відстані початковий профіль, стає крутішим і в залежності від зміни параметрів хвилі змінюється швидкість дисторсії початкового профілю хвилі.

## ВИСНОВКИ

1. Запропоновано постановку ряду нових хвильових задач нелінійної теорії пружності, які мають в основі введення потенціалу Мурнагана, і проведено аналіз отриманих хвильових рівнянь, що дозволило виявити теоретично певні нелінійні ефекти поширення поздовжніх, поперечних та циліндричних хвиль.
2. Застосовано і розвинуто наближений підхід до розв'язання нелінійних хвильових рівнянь, що дало змогу чисельно проаналізувати поставлені задачі про поширення хвиль.
3. Знайдено три типи початкового профілю поодинокій хвилі, які є близькими до спостережуваних в експериментах профілів хвиль в матеріалах і які описуються аналітично функціями, відомими з математичної фізики.
4. Проведено порівняльний аналіз нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих розв'язків, який включає дослідження впливу частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю. З аналізу розв'язків, отриманих методами 1 і 2 випливає, що якісно розв'язки є близькими, а відмінності між швидкостями еволюції викликані відмінностями в обмеженнях, прийнятих в цих методах.
5. Показано, що отримані методами 1 і 2 розв'язки для поздовжніх гармонічних хвиль в рамках перших двох наближень задовільно описують початковий етап еволюції початкового профілю хвилі.
6. Показано, що вплив нелінійності на поширення повздовжніх поодиноких хвиль з початковим гармонічним профілем (у вигляді косинусоїdalnoї функції), дзвіноподібним профілем (у вигляді функції Гауса) та профілем у вигляді функції Уіттекера є суттєвим. Також спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється симетрично, тоді як

- несиметричний профіль у вигляді функції Уіттекера деформується несиметрично.
7. Розв'язано задачу про поширення поперечної хвилі з дзвіноподібним профілем та зроблено порівняльний аналіз з задачею про поширення поздовжної хвилі аналогічного профіля. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, де, зокрема, спостережено, що симетричний профіль дзвіноподібної хвилі спотворюється симетрично у випадку поздовжної хвилі і несиметрично у випадку поперечної, а відмінності в еволюції поперечної та поздовжної хвиль викликані відмінностями моделі нелінійного деформування: вона є кубічна для поперечного та квадратична для поздовжнього.
  8. Розв'язано задачу про поширення циліндричної радіальної хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда. Прокоментовано отримані нелінійні розв'язки, де, зокрема, спостережено, що еволюція початкового профіля відбувається з часом поширення хвилі.
  9. Проведено теоретичний і числовий аналіз нелінійних поздовжніх, поперечних та циліндричних поодиноких хвиль з різними початковими профілями, в межах якого вивчено вплив довжини підошви хвилі, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію профілю хвилі та показано, що вибір моделі нелінійного деформування і початкових параметрів хвилі є суттєвим в описі еволюції хвилі.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* Один приближенный метод анализа одиночных волн // Прикл. механика. – 2016. – 52, N3. – С. 83 – 94; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* One Approximate Method for Analyzing Solitary Waves in Nonlinearly Elastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N3. – Р. 282 – 290.
2. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* Числовой анализ эволюции плоской продольной нелинейно упругой волны с разными начальными профилями //Прикл. механика. – 2017. – 53, N2. – С. 88 – 96. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Numerical Analysis of Evolution Plane Longitudinal Nonlinearly Elastic Wave with Different Initial Profiles // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N1. – Р. 104 – 111.
3. *Рущицкий Я.Я., Юрчук В.Н.* К эволюции SV-волны с колообразным начальным профилем // Прикл. механика. – 2017. – 53, N3. – С. 77 – 81; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.*, Evolution of SV-Wave with Gaussian Profile//Int.Appl.Mech. – 2017. – 53, N3. – Р. 300 – 305.
4. *Юрчук В.Н., Рущицкий Я.Я.* Числовой анализ эволюции одиночной цилиндрической радиальной волны с начальным профилем в виде функции Макдональда // Прикл. механика. – 2018. – 54, N3. – С. 18 – 26; *Yurchuk V.N., Rushchitsky J.J.* Numerical Analysis of Evolution of Solitay Cylindrical Radial Wave with an Initial Profile in the Form of Macdonald Function // Int. Appl.Mech.– 2018. – 54, N3. – Р. 259 – 265.

5. *Юрчук В.Н.* О различии эволюции плоских продольной и поперечной колокообразных волн при их распространении в нелинейно упругих композитах// Прикл. Механика – 2019. – 55, N1. – С. 60 – 63; *Yurchuk V.N.* Difference in the evolution of longitudinal and transverse bell-shaped plane waves propagating in nonlinear elastic composites// Int. Appl. Mech. – 2019. – 55, N1. – P. 47 – 50.

6. *Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M.* On cubically nonlinear solitary plane transverse vertical wave in hyperelastic material // Abstracts of Int.Math.Conf. "Differential equations,computational mathematics, theory of functions and mathematical methods of mechanics" (to 100 birthday of G.N.Polozhii), Kiev, Ukraine. April 23 – 24, – 2014. – P. 125.

7. *Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M.* To analysis of solitary wave in nonlinear elastic material // Abstracts of the int. sci.-techn. conf. "Micro - and nanoheterogeneous materials: models and experiment". Lviv, Sept. 21 – 25, 2015. – P. 31 – 33.

8. *Юрчук В.М., Руцицький Я. Я.* Наближений спосіб аналізу поодинокої нелінійно пружної плоскої хвилі // Аннотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. «Modern problems of thermomechanics», Львів, 22 – 24 вересня, – 2016. – Р. 104 – 105.

9. *Юрчук В.М., Руцицький Я.Я.* Еволюція поодиноких хвиль з початковими профілями, що описуються функціями Чебишова-Ерміта // Аннотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. « Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук ». Україна, Миколаїв, 22–24 вересня –2016. – С. 92 – 94.

10. *Руцицький Я.Я., Юрчук В.М.* Незвичайна еволюція поодинокої циліндричної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдоальда // Аннотації доповідей XVIII International Conference. «DYNAMICAL SYSTEM MODELLING AND STABILITY», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 24-26 травня– 2017. Київ, Україна. – С. 133.

11. *Yurchuk V. M., Rushchitsky Ya. Ya.* Murnaghan's nonlinear elastic model: SV-wave with initial bell-shaped profile IV // Аннотації доповідей Міжн. наук.-практ. конф. «Сучасні проблеми механіки». Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Кафедра теоретичної та прикладної механіки 27–30 серпня – 2017. Київ, Україна. – С. 108.

12. *Руцицький Я.Я., Юрчук В.М.* Моделювання еволюції поодиноких хвиль в конструкційних матеріалах // Матеріали міжн. наук.- практ.конф.«Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання», Івано-Франківськ–Яремча, 14 – 19 травня – 2018.– С. 258-261.

## АНОТАЦІЯ

**Юрчук В.М. До теорії поодиноких хвиль в нелінійно пружних матеріалах.** – Рукопис.Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла (131 – прикладна механіка) . – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2018.

У дисертації досліджено певний фрагмент теорії поодиноких хвиль в матеріалах, що деформуються пружно нелінійно. Основну увагу приділено еволюції

початкового профіля поодиноких хвиль.

Нелінійність основана на введені потенціалу Мурнагана і наступному врахуванні квадратичної та кубічної нелінійностей в отриманих хвильових рівняннях. Вивчено плоскі поздовжні і поперечні та циліндричні радіальні хвилі.

Досліджено типи початкового профіля поодинокої хвилі, які є близькими до спостережуваних в експериментах профілів хвиль в матеріалах і які описуються аналітично відомими з математичної фізики функціями - у вигляді косинусоїdalnoї функції (гармонічний симетричний профіль), функції Гаусса (дзвінкоподібний симетричний профіль), Уіттекера та Макдональда (обидва профілі несиметричні).

Застосовано і розвинуто наближений підхід до розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, що дало змогу чисельно проаналізувати поставлені задачі про поширення хвиль.

Проведений теоретичний і числовий аналіз нелінійних поздовжніх, поперечних та циліндричних поодиноких хвиль з різними початковими профілями, де вивчено вплив розміру підошви хвилі, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію профіля хвилі, показав, що вибір моделі нелінійного деформування і початкових параметрів хвилі є суттєвим в описі еволюції хвилі.

**Ключові слова:** нелінійна пружна поодинока хвиля, плоскі поздовжні і поперечні хвилі, циліндрична хвиля, пружний потенціал Мурнагана, квадратична і кубічна нелінійність, метод послідовних наближень, метод обмеження на градієнт зміщення, еволюція початкового профіля хвилі.

## АННОТАЦИЯ

Юрчук В.М. К теории одиночных волн в нелинейно упругих материалах. - Рукопись. Диссертация на получение ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела (131 – прикладная механика). - Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертации исследован некоторый фрагмент теории одиночных волн в материалах, деформирующихся упруго нелинейно. Основное вниманиеделено эволюции начального профиля одиночных волн.

Нелинейность основана на введении потенциала Мурнагана и последующем учете квадратичной и кубической нелинейностей в полученных волновых уравнениях. Изучены плоские продольные и поперечные и цилиндрические радиальные волны.

Исследованы типы начального профиля одиночной волны, близкие к наблюдаемым в экспериментах профилям волн в материалах и описываемые аналитически известными из математической физики функциями - в виде косинусоидальной функции (гармонический симметричный профиль), функций Гаусса (колоколообразный симметричный профиль), Уиттекера и Макдональда (оба профиля несимметричны).

Применен и развит приближенный подход к решению нелинейных волновых уравнений, что позволило численно проанализировать поставленные задачи о

распространении волн.

Проведенный теоретический и числовой анализ нелинейных продольных, поперечных и цилиндрических одиночных волн с разными начальными профилями, где изучено влияние размера подошвы волны, начальной амплитуды и параметров материала на эволюцию профиля волны, показал, что выбор модели нелинейного деформирования и начальных параметров волны существенен в описании эволюции волны.

**Ключевые слова:** нелинейная упругая одиночная волна, плоские продольная и поперечная волны, цилиндрическая волна, упругий потенциал Мурнагана, квадратичная и кубическая нелинейности, метод последовательных приближений, метод ограничения на градиент смещения, эволюция начального профиля волны.

## ANNOTATION

Yurchuk V.M. On the theory of solitary waves in nonlinearly elastic materials. - The Manuscript. A dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, specialty 01.02.04 - solid mechanics (131-applied mechanics). – S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

In this thesis, some fragment of the theory of solitary waves in the deforming elastically nonlinearly materials is studied. The main attention is drawn to evolution of the initial profile of solitary waves.

A nonlinearity is based on introduction of the Murnaghan potential and subsequent allowance for the quadratic and cubic nonlinearities in the obtained wave equations. The plane longitudinal and transverse and cylindrical radial waves are studied.

The types of initial profile of solitary wave are considered that are close to the wave profiles in materials observed in experiments and are described analytically by the known from the mathematical physics functions – in the form of the cosine function (harmonic symmetric profile), Gauss function (bell-shaped symmetric profile), Whittaker and Macdonald functions (both profiles are non-symmetric).

An approximate approach to solving the nonlinear wave equations is applied and developed what allowed to analyze numerically the stated problems on propagation of waves.

The carried out theoretical and numerical analysis of nonlinear longitudinal, transverse and cylindrical solitary waves with different initial profiles, where an effect of the wave bottom length, initial amplitude and material parameters on the wave profile evolution is studied, showed that a choice of the model of nonlinear deforming and initial wave parameters is essential in description of the wave evolution.

**Key words:** nonlinear elastic solitary wave, plane longitudinal and transverse waves, cylindrical wave, Murnaghan elastic potential, quadratic and cubic nonlinearities, method of successive approximations, method of restrictions on displacement gradient, evolution of wave initial profile.