

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА НАН УКРАЇНИ

На правах рукопису

КЕПЕНАЧ НАТАЛІЯ ПАВЛІВНА

УДК 539.3

**ДИНАМІКА ПДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК  
ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ  
НАВАНТАЖЕННЯХ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико – математичних наук

Науковий керівник:

доктор фізико – математичних наук, професор

**Володимир Федорович Мейш**

**Київ 2015**

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
<b>РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ТЕОРІЇ І ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ОБОЛОНОК .....</b>	
1.1. Моделі підкріплених пластин і оболонок.....	10
1.2. Вимушенні коливання підкріплених оболонок при динамічних навантаженнях .....	14
1.3. Характеристика основних чисельних методів дослідження задач нестационарних коливань підкріплених оболонок .....	19
<b>РОЗДІЛ 2. РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК .....</b>	
2.1. Вихідні положення та рівняння деформації пружних тіл.....	24
2.2. Основні положення теорії гладких оболонок з врахуванням зсувних деформацій (теорія типу Тимошенка).....	26
2.3. Основні положення теорії криволінійних стержнів з врахуванням деформацій поперечного зсуву.....	30
2.4. Постановка задач дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Загальний випадок .....	31
2.5. Плоска задача теорії дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Рівняння коливань .....	44
2.6. Постановка задач підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу в рамках конструктивно ортотропної моделі .....	46
<b>РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО – КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ .....</b>	
3.1. Чисельний алгоритм розв'язку плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу .....	52
3.1.1. Скінчено-різницеві рівняння розв'язку плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу .....	53

<i>3.1.2. Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для випадку рівнянь плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу.....</i>	59
<i>3.2. Чисельний алгоритм розв'язку рівнянь коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер.....</i>	61
<i>3.2.1. Чисельний алгоритм знаходження розв'язку в гладкій області оболонки .....</i>	61
<i>3.2.2. Розв'язок на <math>i</math>-й та <math>j</math>-й лінії розривів (для <math>i</math>-го та <math>j</math>-го підкріплюючих ребер).....</i>	67
<i>3.2.3. Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для рівнянь коливань дискретно підкріплених неоднорідних циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Загальний випадок .....</i>	74
<b>РОЗДІЛ 4. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ВРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОГО РОЗМІЩЕННЯ РЕБЕР ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ .....</b>	<b>79</b>
<i>4.1. Розв'язок плоскої динамічної задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестаціонарних навантаженнях .....</i>	80
<i>4.2. Динамічна поведінка поздовжньо підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу .....</i>	83
<i>4.3. Динамічна поведінка поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу .....</i>	90
<i>4.4. Динамічна поведінка неоднорідної циліндричної оболонки еліптичного перерізу з поздовжньо-поперечним набором підкріплюючих елементів .....</i>	94

4.5. Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу в рамках конструктивно ортотропної моделі. Порівняльний аналіз .....	103
4.6. Достовірність отриманих чисельних результатів .....	106
ВИСНОВКИ.....	112
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	114

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Тонкостінні елементи конструкцій у вигляді пластиинок і оболонок різноманітної форми знаходять широке застосування в машинобудуванні, промисловому та громадському будівництві, авіаційній та космічній техніці, суднобудуванні. В умовах експлуатації тонкостінні пружні оболонкові структури в ряді випадків підлягають дії інтенсивних динамічних навантажень, що може призвести до виникнення незворотних деформацій. Дану проблему можна вирішити двома способами. Перший спосіб полягає в збільшенні товщини оболонки, а другий – в підкріпленні її ребрами. В даній роботі розглядається другий підхід. При динамічному навантаженні підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу локальні збурення в області зміни фізико-механічних параметрів ребер приводять до значного перерозподілу параметрів напружено-деформованого стану у всій досліджуваній області. Складність процесів, що виникають при цьому, обумовлюють необхідність застосування сучасних чисельних методів розв'язку динамічних задач поведінки підкріплених циліндричних оболонкових структур з врахуванням дискретного розміщення ребер. Отже, дослідження протікання хвильових процесів в підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер при нестационарному навантаженні та розвиток чисельних методів розв'язування задач даного класу являє собою актуальну задачу механіки деформівного твердого тіла.

**Мета і задачі дослідження** полягають у вивченні нестационарних коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер і включають:

- постановку динамічних задач теорії дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на основі геометрично лінійного варіанту теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка;
- розвиток та обґрунтування ефективного чисельного методу розв'язування задач даного класу;

- дослідження на основі розвинутого методу динамічної поведінки дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з різними геометричними і фізико-механічними параметрами та граничними умовами;
- аналіз характерних закономірностей протікання хвильових процесів в неоднорідних оболонкових структурах при нестационарних навантаженнях, які обумовлені дискретністю розміщення ребер.

**Об'єкт дослідження.** Динамічні процеси, які відбуваються в підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при дії на них нестационарних навантажень.

**Предмет дослідження.** Предметом дослідження є неосесиметричні коливання підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер при дії на них нестационарних навантажень.

**Методи дослідження.** Для побудови математичної моделі і розв'язання задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер при дії на них нестационарних навантажень використовується теорія оболонок та стержнів типу Тимошенка. Чисельний метод розв'язування ґрунтуються на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевих схем по просторовим координатам і явній скінчено-різницевій апроксимації по часовій координаті.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- в постановці двовимірних динамічних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер в рамках теорії оболонок та стержнів типу Тимошенка при нестационарних навантаженнях;
- в розвитку ефективного чисельного методу розв'язування задач нестационарних коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер, що базується на використанні інтегро-інтерполяційного методу апроксимації вихідних

рівнянь по просторовим координатам та явній скінчено-різницевій апроксимації по часовій координаті;

- в теоретичному дослідженні умов стійкості різницевих схем для рівнянь коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу;
- в розробці алгоритмів і програм, що дозволяють реалізувати розв'язування досліджуваних динамічних задач на ПК;
- вперше комплексно отримано розв'язки двовимірних неосесиметричних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер під дією нестационарних навантажень;
- в дослідженні впливу геометричних та фізико-механічних параметрів вихідних конструкцій на їх напруженно-деформований стан при різних видах граничних умов та типах нестационарного навантаження;
- в виконанні аналізу результатів та виявленню нових властивостей і закономірностей протікання хвильових процесів, які обумовлені дискретністю розміщення підкріплюючих ребер.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розв'язки нових задач динаміки дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях, а також розроблені методи, алгоритми та програми розрахунку розв'язку задач, які одержані в роботі, можуть бути використані для дослідження прикладних задач в науково-дослідних організаціях та конструкторських бюро при проектуванні неоднорідних циліндричних елементів конструкцій. Використання розроблених алгоритмів та програм дозволяє проводити розрахунки з оцінки меж міцності елементів конструкцій, оцінки меж застосування більш простих теорій.

**Достовірність.** Достовірність результатів одержаних в роботі визначається строгостю та коректністю постановок вихідних задач; теоретичним обґрунтуванням скінченно-різницевих схем; заданою контролюваною точністю чисельних розрахунків; для конкретних

досліджуваних задач перевіркою практичної збіжності числових результатів; проведенням тестових розрахунків і порівняння їх результатів з відомими в літературі; відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям коливань тонкостінних елементів конструкцій та якісною узгодженістю результатів розрахунків з висновками, отриманими на підставі міркувань фізичного характеру.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідались та обговорювались на Міжнародній науковій конференції „Математичні проблеми технічної механіки” (Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014); VII Міжнародної научной конференции „Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела” (Донецк, Меликино, 2013); Всеукраїнській науково-методичній конференції „Сучасні науково-методичні проблеми у вищій школі” (Київ, 2013); Міжнародній науковій конференції „Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь” (Одеса, 2013); Міжнародної научной конференции „Теория оболочек и мембранны в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур” (Мінск, 2013); II Міжнародної конференции „Актуальные проблемы инженерной механики” (Киев, Одесса, 2015).

Окремі положення дисертації періодично доповідались на наукових семінарах відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2013–2015). Дисертація у завершенному вигляді доповідалася і обговорювалася на науковому семінарі відділу динаміки та стійкості суцільних середовищ Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015); на семінарі за науковим напрямком „Механіка композитних та неоднорідних середовищ” Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015).

**Публікації.** По матеріалах дисертації опубліковано 17 наукових робіт [1-17], серед яких статті [1-6] опубліковано у фахових виданнях затверджених ДАК МОН України.

**Особистий внесок здобувача.** В дисертаційній роботі особисто автору належить вивід рівнянь коливань, розробка методів їх розв'язання, створення алгоритмів та програм, проведення чисельних розрахунків на ПК і аналіз отриманих результатів. В роботах написаних у співавторстві з науковим керівником професором В.Ф.Мейшем [1-6, 8-17], співавтору належить загальний задум проведених досліджень, загальна постановка диференціальних задач, обговорення і аналіз отриманих результатів. В роботах [1, 5, 11, 13, 15] доцентам А.С.Богатирчуку та Ю.А.Мейш належить обговорення та аналіз отриманих результатів.

**Структура роботи та обсяг дисертації.** Робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел із 165 найменувань на 20 сторінках. Загальний обсяг дисертації становить – 133 сторінки, 31 рисунок, 1 таблиця.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику доктору фізики – математичних наук, професору В.Ф. Мейшу за постійну увагу до роботи, допомогу та корисні поради при написанні дисертаційної роботи.

## РОЗДІЛ 1

# СУЧАСНИЙ СТАН ТЕОРІЇ ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ПІДКРИПЛЕНИХ ОБОЛОНОК

Напружено–деформований стан та міцність підкріплених оболонок при динамічних навантаженнях залежать від ряду визначальних геометричних та фізико–механічних параметрів. В залежності від конкретних співвідношень між ними, а також від мети дослідження і необхідної точності можливі різноманітні допущення. Складність побудови механічних моделей підкріплених оболонок і застосування принципово різних кінематичних і статичних гіпотез приводять до значної різноманітності розрахункових схем і рівнянь. Відомо, що при побудові варіантів підкріплених оболонок існує два основних підходи використання математичної моделі: перший підхід базується на використанні конструктивно-ортотропної моделі оболонок; другий підхід враховує дискретне розміщення ребер. В даній роботі розглядаються підкріплені циліндричні оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер при динамічних нестационарних навантаженнях.

Перший підхід полягає у заміні ребристої оболонки деякою гладкою оболонкою, за рахунок “розмазування” фізичних та механічних властивостей підкріплюючих елементів по поверхні оболонки. Отримана таким чином оболонка розглядається як однорідна (конструктивно – ортотропна модель), але для неї характерні нові властивості, в залежності від конструктивних особливостей вихідної ребристої оболонки. Застосування конструктивної ортотропії не дає можливість враховувати особливості силової взаємодії між ребрами та обшивкою, що в свою чергу дозволяє значно спростити постановку вихідної задачі. Такий підхід застосовується, якщо розглядається оболонка з достатньо регулярним способом підкріплення. Даний підхід має ряд недоліків, коли дослідження стосуються розрахунку тонких оболонок з невеликою

кількістю ребер. Використання конструктивно – ортотропної моделі дозволяє визначати лише усереднені напруження і деформації, що в свою чергу (наприклад, при локальних і динамічних навантаженнях) може привести до значних похибок [18]. В рамках даної теорії не можливо визначити ряд важливих закономірностей, які пов'язані з наявністю дискретно підкріплюючих ребер. Тому, для виявлення закономірностей, які пов'язані саме з наявністю ребер, використовується другий підхід, в основі якого лежить аналіз поведінки підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер.

### **1.1.Моделі підкріплених пластин і оболонок**

Однією з моделей тонкостінних пружних дискретно підкріплених оболонок є модель, побудована на основі класичної теорії оболонок Кірхгофа – Лява і стержнів Кірхгофа – Клебша [18-22]. Класична теорія оболонок заснована на припущеннях, які ввів в розгляд Г. Кірхгоф в теорії пластин, а пізніше Ляв розповсюдив і узагальнив їх для оболонок. Перша гіпотеза полягає в тому, що елемент, перпендикулярний до вихідної поверхні, після деформації залишається прямолінійним і перпендикулярним до деформованої поверхні та не змінює своєї довжини. Згідно другої гіпотези, в співвідношеннях узагальненого закону Гука для пружних тіл можна знектувати поперечним нормальним напруженнями в порівнянні з іншими.

Згідно оглядових праць [19-23], основні результати досліджень по вивченю напружено – деформованого стану, коливань та стійкості ребристих оболонок, отримані за допомогою використання класичної теорії. В роботі [24] досліджено питання обґрунтування розрахункових схем даної теорії та наведено оцінку похибки її застосування для розв'язування задач коливань підкріплених оболонок.

Більшість опублікованих праць присвячено вивченю власних коливань підкріплених циліндричних оболонок в рамках класичної теорії [19- 22, 25-41]. В роботах проведено детальний аналіз впливу геометричних і фізичних параметрів оболонки та ребер, а також граничних умов на характеристики власних коливань. Досліджено оптимальні параметри підкріплень регулярною сіткою ребер [20, 31], та нерегулярно підкріплених повздовжніми ребрами циліндричних оболонок [26, 39, 40, 41]. Основні результати досліджень задач стійкості підкріплених циліндричних оболонок наведені в роботах [21, 31].

В рамках класичної теорії досліджено особливості власних коливань конічних підкріплених оболонок, які пов'язані з більш складною, ніж у циліндричних оболонок, геометрією [19-22, 25-38, 42, 43]. Зокрема, в роботі [43] досліджено вплив нелінійних факторів на частоти власних коливань конічних оболонок підкріплених, поперечними, повздовжніми та розглянута перехресна система ребер. Значну увагу приділено висвітленню питання про вплив граничних умов, кута конусності та геометрично – жорсткісних параметрів ребер на характеристики власних коливань.

Власні коливання сферичних підкріплених оболонок та вплив граничних умов, параметрів підкріплюючих елементів на процес коливання досліджено на основі класичної теорії в роботах [44-48]. Також, на основі даної теорії, досліджено вплив форми і розмірів шпангоутів на власні коливання оболонок обертання з врахуванням дискретного розміщення поперечних ребер в роботах [49-51].

Особливості напружено-деформованого стану ребристих оболонок в вакуумі та рідині розглянуто в [52, 53]. Досліджено вплив параметрів нерегулярно розміщених підкріплюючих ребер на гармонічні коливання. В роботі [52] розглянута задача динамічної поведінки шарнірно опертої циліндричної оболонки з повздовжніми ребрами, довжина яких менша довжини оболонки, згідно методу розв'язування задач такого типу [53].

В ряді випадків, при проведенні досліджень динамічних процесів в неоднорідних оболонкових конструкціях є необхідним врахування деформацій поперечного зсуву і інерції обертання нормального елементу.

Найбільшого розповсюдження набула некласична уточнююча теорія, яка враховує деформації поперечного зсуву і інерцію обертання нормального елементу для оболонки і підкріплюючих ребер жорсткості (теорія оболонок і стержнів типу Тимошенка). Дано модель була розроблена С.П. Тимошенко для розв'язування задач поперечних коливань балок [54]. Пізніше, ця теорія була узагальнена і поширина на задачі коливань оболонок і стержнів [55, 56] та отримала назву “моделі оболонок і стержнів типу Тимошенка”.

В основі даної теорії лежать гіпотези, перша з яких полягає в тому, що елемент, перпендикулярний до вихідної поверхні, після деформації залишається прямолінійним, але вже не перпендикулярним до деформованої поверхні, а повертається на деякий кут і не змінює своєї довжини. Згідно другої гіпотези, в співвідношеннях узагальненого закону Гука для пружних тіл можна знехтувати поперечним нормальним напруженням в порівнянні з іншими.

При розгляді ребер в основу покладається гіпотеза недеформованості поперечного перерізу криволінійного стержня.

Теорія оболонок і стержнів типу Тимошенка дає можливість розв'язати більш широкий клас прикладних задач, в порівнянні з використанням класичної теорії. Оскільки рівняння коливань підкріплених оболонок згідно теорії типу Тимошенка відносяться до гіперболічного типу, то даний факт дає змогу більш точно описати хвильові процеси в неоднорідних оболонках під дією короткочасних навантажень. Вважаємо, що при розгляді імпульсах тривалість навантаження менша часу пробігу пружною хвилею характерного розміру конструкції. Крім того, рівняння коливань типу Тимошенка можна застосовувати для досліджень підкріплених оболонок з більш складними геометричними та фізико – механічними параметрами.

Власні коливання підкріплених циліндричних та конічних оболонок досліджувались на основі уточнюючої теорії в роботах [32, 34, 35, 38, 57, 58, 59]. Зокрема, в роботі [35] отримано наближені рівняння для обчислення власних частот коливань повздовжньо підкріплених оболонок. Власні коливання ребристих циліндричних оболонок з низькою зсувною жорсткістю матеріалу досліджено в [38]. Розроблено методику розв'язування задач коливань для регулярно підкріплених поперечними ребрами оболонок [59]. Вільні коливання циліндричних оболонок, дискретно підкріплених нерегулярною системою повздовжніх ребер описані в [58].

Ряд задач про вільні коливання неоднорідних циліндричних оболонок розв'язано в рамках тривимірної теорії пружності. Зокрема, тут можна виділити наступні роботи [60, 61, 62].

## **1.2. Вимушені коливання підкріплених оболонок при динамічних навантаженнях**

Слід відмітити, що основні результати по вивченю вимушених коливань підкріплених оболонок на основі класичної теорії, отримано при гармонічних навантаженнях. Гармонічні коливання підкріплених циліндричних та конічних оболонок при різних граничних умовах досліджено в [52, 19, 20, 21, 26, 28, 63, 64]. Важливим фактором, який впливає на протікання хвильових процесів в ребристих оболонках, є розташування підкріплюючих ребер. В наведених роботах розглянуто коливання циліндричних та конічних оболонок, які підкріплені ребрами в одному напрямку. В [26] на основі теорії конструктивно – ортотропних циліндричних оболонок досліджено вплив граничних умов на закономірності процесу коливань [21, 26]. В роботах [20, 26, 28, 64] на основі теорії врахування дискретного розміщення ребер досліджено вплив дискретного розміщення підкріплюючих ребер, граничних умов, геометрично –

жорсткісних параметрів ребер на закономірності протікання гармонічних коливань підкріплених ребрами конічних оболонок. В роботі [28] дослідженno осесиметричні та неосесиметричні вимушені гармонічні коливання оболонок обертання.

В рамках класичної теорії досліджено вимушені гармонічні коливання пологих ребристих оболонок [65-68]. На основі теорії, яка враховує дискретне розміщення ребер досліджувано вплив геометричних розмірів оболонок та ребер, граничних умов на динамічний напружене – деформований стан конструкції [65-67]. В роботі [68] проведено порівняльний аналіз застосування теорії конструктивно – ортотропної моделі оболонок і теорії з врахуванням дискретного розміщення ребер при дослідженні динамічної поведінки пологих оболонок з перехресною системою ребер. В більшості робіт розглянуто неоднорідні оболонки з регулярною системою ребер [65-68]. Для підкріплених оболонок даної форми наведено порівняння теоретичних досліджень динамічної поведінки оболонок з експериментальними даними [68].

Переходячи до огляду робіт по нестационарним коливанням підкріплених оболонок в рамках класичної теорії слід відмітити, що найбільша кількість робіт присвячена дослідженню циліндричних оболонок [69-79]. Зокрема, більшість робіт присвячена циліндричним оболонкам, підкріплених поперечними ребрами жорсткості [69, 70, 72, 73, 77, 78, 79]. Розглянуто задачі динамічної поведінки підкріплених оболонок в рамках конструктивно – ортотропної моделі [77] і моделі з врахуванням дискретного розміщення ребер під дією зовнішнього імпульсного навантаження [77, 79] та осьового стискуючого навантаження [73]. Наведено порівняльну характеристику застосування вказаних моделей. Розв'язано задачі для вимушених осесиметричних коливань циліндричних оболонок, підкріплених пружними і жорсткими ребрами та досліджено вплив ширини ребер на прогини, деформації і напруження в області розміщення підкріплюючих ребер [77]. В роботі [80]

досліджено особливості процесу коливань для оболонки з ребрами довільної орієнтації. Розв'язана двовимірна динамічна задача для оболонок обертання під дією нестационарних навантажень [81].

Нестационарні коливання неоднорідних тіл різної форми (балка, циліндр, сфера) в рамках класичної теорії при дії на них акустичних імпульсів розглянуто в роботах [82, 83, 84].

Таким чином, на основі проведеного аналізу робіт, можна зробити висновок, що класична теорія оболонок Кірхгофа – Лява і стержнів Кірхгофа – Клебша є досить вагомим апаратом для досліджень динамічних процесів в неоднорідних оболонкових конструкціях під дією різного роду навантажень. На її основі розв'язано широкий клас задач, які можна вважати еталонними. Недоліком даної теорії є те, що вона дозволяє отримувати розв'язок лише при достатньо жорстких обмеженнях на області частот коливань, довжини хвиль переміщень, деформацій і напружень неоднорідних оболонкових структур. Рівняння коливань підкріплених оболонок отримані на основі класичної теорії, належать до рівнянь параболічного типу (згідно з класифікацією рівнянь математичної фізики). Для дослідження хвильових процесів при короткочасних навантаженнях більш доцільно використовувати рівняння гіперболічного типу. Дано невідповідність може привести до суттєвих похибок.

Достатньо значна кількість робіт присвячена дослідженню питань динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок при дії на них нестационарних навантажень в рамках теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка.

Вимушенні коливання поперечно підкріплених оболонок та вплив виду нестационарного навантаження на закономірності протікання процесу коливань досліджено в роботах [85-92]. Зокрема, в роботах [87, 88, 93, 94] наведені різницеві схеми та їх детальний аналіз для рівнянь руху ребристих циліндричних оболонок під дією імпульсного навантаження. Рівняння руху

отримано з використанням варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Динаміка поперечно підкріпленої циліндричної оболонки із зовнішнім амортизуючим шаром та оболонки з пружним заповнювачем досліджена в [90, 89]. Досліження нестационарної динаміки повздовжньо підкріплених циліндричних оболонок проведено в [95, 96, 97]. Нестационарна поведінка циліндричних оболонок з перехресним набором ребер при повздовжньому імпульсному навантаженні досліджена в [98, 99]. Теорія розв'язування динамічних задач нестационарної поведінки циліндричних оболонок з дискретним підкріпленням змінної жорсткості викладена в [99, 100].

Геометрично нелінійна постановка теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка застосовувалась при дослідженнях ребристих циліндричних оболонок і пластин в наступних роботах [95, 99, 100, 101, 102]. Особливості застосування лінійної та нелінійної теорії підкріплених оболонок відмічені в [99]. Вплив ортотропії матеріалу оболонки досліджено в [95, 99, 103]. Розв'язання хвильових рівнянь теорії оболонок і пластин типу Тимошенка наведено в [104, 105].

Динаміка ребристих циліндричних оболонок та оболонок обертання при нестационарних осесиметричних навантаженнях досліджена в [99, 106, 107]. Неосесиметричні коливання дискретно підкріплених циліндричних оболонок та оболонок обертання при нестационарних навантаженнях розглянуто в [98, 99, 108, 109]. Розв'язана двовимірна динамічна задача для оболонок обертання під дією нестационарних навантажень [81].

Нестационарна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки при повздовжньому ударі розглянута в роботах [98, 110]. Досліджено вплив імпульсних та рухомих навантажень на коливання ребристих циліндричних оболонок в [85, 86, 99, 91, 111]. Методика розрахунку напружене – деформованого стану тонкостінних циліндричних конструкцій при нерівномірному навантаженні наведена в [112].

В роботах [86, 113], на основі теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка, отримано аналітичні розв'язки задач динамічної поведінки підкріплених сферичних оболонок при нестационарних осесиметричних навантаженнях. Ці розв'язки вважають еталонними і використовуються як тестові задачі при дослідженнях. Динамічну поведінку сферичної підкріпленої оболонки з отвором при вибуховому навантаженні описано в [114, 115]. Вимушенні коливання багатошарових сферичних оболонок з підкріпленим отвором при нестационарному навантаженні досліджено в [116].

В рамках теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка проаналізовано вплив кільцевого підкріплення на динамічну поведінку конічних оболонок під дією ударних, імпульсних і рухомих навантажень [117, 86, 113]. Нестационарна поведінка підкріпленої ортотропної конічної оболонки при дії раптово прикладеного навантаження описано в [103]. Досліджено випучування дискретно підкріплених конічних оболонок при осьовому ударі з врахуванням геометричної та фізичної нелінійності [118]. Нелінійну поведінку підкріпленої конічної оболонки з приєднаними масами при співударі з перешкодою проаналізовано в [119].

В роботі [120] розв'язана задача динаміки підкріплених еліпсоїдальних оболонок при нестационарних навантаженнях.

Досліджено нестационарні процеси деформування дискретно підкріплених пластин і оболонок в некласичній постановці [121, 122, 123]. Проведено асимптотичне дослідження динаміки ексцентрично підкріплених пластин та проаналізовано вплив врахування розміщення ребер з врахуванням їх ширини [124, 125].

Розвязок задач динамічної поведінки підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу є достатньо складною, як в постановці так і в її реалізації. Задача визначення параметрів напруженого – деформованого стану дискретно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу включає в себе три основні складові частини: врахування геометрії конструкції неканонічного виду

(в даному випадку циліндричної оболонки еліптичного перетину), впливу підкріплень з врахуванням дискретного розміщення ребер, розрахунок вимушених коливань. В такій постановці в літературі практично не має досліджень. В основному в роботах [126 – 140] розглядаються вільні і вимущені коливання гладких циліндричних оболонок еліптичного перерізу або коливання підкріплених циліндричних оболонок кругового перерізу.

На основі проведеного аналізу робіт, можна зробити висновок, що теорії оболонок і стержнів типу С.П. Тимошенка, набула достатньо широкого розповсюдження для розв'язування динамічних задач підкріплених оболонок і є однією з найбільш поширених теорій для розв'язування вказаного класу задач. На її основі досліджено широкий клас прикладних задач для підкріплених оболонок різної канонічної форми (циліндричних, конічних, сферичних) з складними геометричними та фізико – механічними параметрами для ребер і оболонок при дії на них різного роду нестационарних навантажень (імпульсних (локальних та розподілених), ударних, рухомих та ін.).

### **1.3.Характеристика основних чисельних методів дослідження задач нестационарних коливань підкріплених оболонок**

Рівняння коливань оболонок і оболонкових структур являють собою рівняння в частинних похідних – в загальному випадку шостого, восьмого, десятого і т. д. порядку по просторовій і часовій координатам в залежності від прийнятих гіпотез. Умовно, методи розв'язку таких рівнянь можна розділити на дві групи – аналітичні (чисельно–аналітичні) і просто чисельні методи. Використання аналітичних методів дозволяє отримати розв'язки динамічних задач теорії оболонок простої геометрії (циліндр, сфера) і відносно простих граничних умов (наприклад, шарнірного закріплення). Достатньо повних аналіз розв'язку динамічних задач аналітичними методами представлено в [26, 22].

Розв'язок динамічних задач для оболонок більш складної форми аналітичними методами наштовхується на значні труднощі. Тому, широке застосування отримали чисельні методи. На сьогоднішній день, основними чисельними методами розв'язування нестационарних задач теорії оболонок є метод скінчених різниць, метод скінчених елементів і метод граничних елементів.

В основу метода граничних елементів (МГЕ) покладено перехід від системи диференціальних рівнянь і граничних умов до їх інтегрального аналізу на границі області. МГЕ дозволяє зменшити розмірність вихідної задачі на одиницю, тобто для двовимірних задач отримуємо одновимірне інтегральне рівняння, для тривимірних задач – двовимірне інтегральне рівняння, яке розв'язується відповідним чисельним методом. Використання цього методу для розв'язку відповідних задач теорії пружності викладено в монографіях [141, 142].

Метод скінчених елементів (МСЕ) в своїй основі має представлення вихідної області з складною формою границі сукупністю достатньо простих підобластей (скінчених елементів) при використанні відомих принципів механіки. Перевагою цього методу є висока фізична наочність. По методу скінчених елементів написана достатньо велика кількість статей і монографій, серед яких слід відмітити [92, 96, 143, 144, 145].

Не дивлячись на широке розповсюдження МСГ і МСЕ, найбільшого застосування, для розв'язку нестационарних задач, отримав метод скінчених різниць (МСР) в силу своєї простоти і можливості проведення теоретичних досліджень різницевих схем. Основні принципи застосування МСР викладені в монографіях [99, 146-148]. Слід відмітити, застосування різницевих схем, що отримані інтегро-інтерполяційним методом побудови МСР [99, 147-148]. Виходячи з різницевого підходу, побудовано ряд чисельних алгоритмів для розв'язку задач теорії оболонок з розривними коефіцієнтами [88, 94, 149, 150].

В цих роботах достатньо повно вивчено різноманітні аспекти побудови скінчено–різницевих схем розв’язку задач нестационарних коливань оболонок з врахуванням дискретності підкріplення в лінійній і нелінійній постановках. Різноманітність підходів пов’язано в першу чергу з тим, що при побудові математичної моделі оболонок з дискретним розміщенням ребер можливий двоякий підхід: або записати рівняння для гладкої частини оболонки і приєднати до них умови спряження ребер на лініях розривів, або використовуючи апарат узагальнених функцій представити рівняння в єдиній формі для всієї області. Виходячи з цих формальних представлень, можливі два підходи до побудови скінчено–різницевих рівнянь з виділенням розривів. Ці два підходи розглянуті в роботах [88, 94, 149, 150]. У випадку локального крайового навантаження різницеві схеми без виділення розривів “розмивають” ефект дискретного підкріplення. Цей підхід не дозволяє відслідковувати всі особливості впливу дискретності підкріplення на напружене–деформований стан неоднорідної структури. При таких задачах більш доцільним є застосування різницевих схем з виділенням особливостей (розривів), тобто представлення вихідних рівнянь у вигляді рівнянь в гладкій області та рівнянь на лініях розривів (рівнянь коливань підкріplюючих ребер) [99, 148].

Як вже відмічалося, при динамічному навантаженні тонкостінних пружних систем з різноманітними дискретними неоднорідностями однією з особливостей є хвильова природа процесу і зміна фізико–механічних параметрів не тільки в області неоднорідності, а і всій області дослідження. В силу хвильової природи процесу локальні збурення приводять до значної неоднорідності параметрів напружень і деформацій у всій пружній системі. Така ситуація викликає необхідність використання хвильових рівнянь, які достатньо коректно описують хвильові процеси з врахуванням наявності просторових розривів. Одним з варіантів таких рівнянь є гіперболічна модель теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка [54, 99, 148]. Але, як відомо,

рівняння теорії оболонок типу Тимошенка мають малий параметр (товщину оболонки), при прямуванні якого до нуля система вироджується в параболічну. Присутність в системі рівнянь малого параметру обумовлюють специфічні труднощі в її чисельному розв'язку і потребує особливі вимоги до різницевих схем. Схеми, які побудовані без врахування цієї специфіки можуть мати погану збіжність. Ці питання неодноразово розглядалися в літературі по методу скінчених елементів [151]. З точки зору МСР ці питання для системи рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка розглянуті в роботах [95, 104, 105]. Показано, що застосування інтегро–інтерполяційного підходу побудови різницевих схем дозволяє уникнути ряду особливостей на різницевому рівні, а також дозволяє виконувати закон збереження повної механічної енергії на різницевому рівні [152].

### *Висновки до першого розділу*

Виходячи з приведеного літературного огляду можна зробити висновок, що в сучасній літературі достатньо повно представлено дослідження по теорії і методам розв'язку задач динаміки підкріплених оболонок. При розгляді підкріплених оболонок автор досліджень в основному спирається на розрахункову модель теорії підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер. Слід відмітити невелику кількість робіт по дослідженю вимушених коливань в підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер. При розгляді підкріплених оболонок, враховуючи тему досліджень даної дисертації, аналізувалися роботи по динамічній поведінці оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер. Відмітимо, що в даному напрямі виконано достатньо широкий спектр досліджень по динаміці неоднорідних конструкцій.

Виходячи з приведеного літературного огляду можна зробити висновок, що практично відсутні дослідження процесів вимушених коливань та аналіз закономірностей протікання хвильових процесів в циліндричних оболонках еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер. Цей фактор обумовлює актуальність теми досліджень, яка полягає у вивченні динамічної поведінки циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер, розвитку ефективного чисельного методу розв'язування задач, розв'язку конкретних задач даного класу та аналізу отриманих результатів.

## РОЗДІЛ 2

### РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

В даному розділі наведені рівняння коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу, отримані за допомогою використання геометрично лінійного варіанту теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка. Застосовуючи варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського з врахуванням умов контакту між компонентами вектора переміщень центру ваги поперечного перерізу ребра та компонентами узагальненого вектора переміщень вихідної серединної поверхні, побудовані рівняння неосесиметричних коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу в варіаційній та диференціальній формах з відповідними природними граничними та початковими умовами.

#### **2.1. Вихідні положення та рівняння деформації пружних тіл**

Нехай пружне тіло під дією деяких сил деформується. Віднесемо його до ортогональної криволінійної системи координат  $\alpha_1, \alpha_2, z$ . Тоді деяка точка тіла М з координатами  $\alpha_1, \alpha_2, z$  отримає переміщення, яке може бути представлене трьома проекціями вектора повного переміщення в напрямках дотичних до координатних ліній  $\alpha_1, \alpha_2, z$ :

$$u_1^z = u_1^z(\alpha_1, \alpha_1, z), \quad u_2^z = u_2^z(\alpha_1, \alpha_1, z), \quad u_3^z = u_3^z(\alpha_1, \alpha_1, z). \quad (2.1)$$

Припустимо, додатний напрям переміщень  $u_1^z, u_2^z, u_3^z$  співпадає з додатним напрямком координатних ліній  $\alpha_1, \alpha_2, z$ .

Розглянемо вирази лінійних деформаційних співвідношень згідно [154]. Вирази, які визначають шість компонент деформації тіла в околі точки  $M(\alpha_1, \alpha_2, z)$ , у випадку лінійного варіанту мають вигляд:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1^z}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2^z + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial z} u_3^z, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_2^z}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial z} u_3^z + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1} u_1^z, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_3^z}{\partial z} + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} u_1^z + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} u_2^z, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2^z}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1^z}{H_1} \right), \\ \varepsilon_{13} &= \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_1^z}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_3^z}{H_3} \right), \\ \varepsilon_{23} &= \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_3^z}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_2^z}{H_2} \right).\end{aligned}\quad (2.2)$$

В співвідношеннях (2.2), величини  $H_i = H_i(\alpha_1, \alpha_2, z)$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ) – параметри Ляме [153], згідно яких в даній ортогональній системі координат квадрат довжини лінійного елементу простору виражається рівністю

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + H_3^2 dz^2.$$

При розгляді напруженого – деформованого стану тіла, будемо вважати, що тіло є анізотропним та в процесі деформації залишається пружним і підпорядковується узагальненому закону Гука для анізотропного тіла [154-156]. В даній роботі будемо розглядати частинний випадок анізотропного тіла, зокрема ортотропне тіло, в якому через кожну точку тіла проходить три взаємно ортогональні площини пружної симетрії. Тоді закон Гука для ортотропного тіла, який виражає лінійну залежність між компонентами напружень і малих деформацій в такому пружному тілі має вигляд [154-156]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

В формулах (2.3) пружні сталі мають наступний зміст:

$E_1, E_2, E_3$  – модулі Юнга у відповідних напрямах  $\alpha_1, \alpha_2, z$ ;

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модулі зсуву для поверхонь  $z = const$ ,  $\alpha_1 = const$ ,  $\alpha_2 = const$ ;

$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$  – коефіцієнти Пуассона, що характеризують поперечний стиск при розтягу в напрямі осей координат (перший індекс показує напрям поперечного стиску, другий – напрям дії сили). Причому, модулі зсуву незалежні, а модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона в силу симетрії пов’язані співвідношеннями:

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}, \quad E_3 \nu_{32} = E_2 \nu_{23}, \quad E_1 \nu_{13} = E_3 \nu_{31}.$$

## 2.2. Основні положення теорії гладких оболонок з врахуванням зсувних деформацій (теорія типу Тимошенка)

В якості вихідної поверхні приймемо серединну поверхню, яка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від зовнішньої та внутрішньої поверхонь оболонки. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $\alpha_1 \alpha_2 z$ . Координатні лінії  $\alpha_1, \alpha_2$  на серединній поверхні оболонки при  $z = 0$  співпадають з лініями головних кривизн; координатна лінія  $z$  є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні. Будемо вважати величину  $z$  додатною, якщо точка знаходиться зі сторони опукlostі серединної поверхні.

Диференціал дуги в цій системі координат визначається виразом

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + H_3^2 dz^2,$$

де величини  $H_1(\alpha_1, \alpha_2, z)$ ,  $H_2(\alpha_1, \alpha_2, z)$ ,  $H_3(\alpha_1, \alpha_2, z)$  – коефіцієнти Ляме і визначаються по формулам

$$H_1 = A_1(1 + k_1 z), \quad H_2 = A_2(1 + k_2 z), \quad H_3 = 1; \quad (2.4)$$

$A_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $A_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні;  $k_1$ ,  $k_2$  – головні кривизни серединної поверхні оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми  $A_1$ ,  $A_2$  пов'язані з величинами  $k_1$ ,  $k_2$  відомими співвідношеннями Кодаці – Гауса [99]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2 k_2) &= k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1 k_1) &= k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right) &= -k_1 k_2 A_1 A_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перехід від просторових співвідношень теорії пружності до наближених співвідношень двовимірної теорії оболонок пов'язаний з прийняттям ряду додаткових припущень.

При побудові математичної моделі теорії оболонок типу Тимошенка приймаються наступні кінематична і статичні гіпотези:

1. В процесі деформації прямолінійні і нормальні до вихідної поверхні оболонки волокна повертаються як жорстке ціле на деякий кут, не змінюючи при цьому своєї довжини і не залишаючись перпендикулярними до деформованої поверхні.
2. Нормальними напруженнями, що діють на площинках, які паралельні площинці вихідної поверхні, можна знехтувати, в порівнянні з іншими компонентами напружень.
3. Додатково будемо вважати, що поперечні дотичні напруження розподілені по товщині оболонки по деякому відомому закону.

Прийняту кінематичну гіпотезу математично запишемо так: тангенціальні переміщення розподілені по товщині оболонки по лінійному закону, а прогин не залежить від поперечної координати, тобто

$$u_1^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.6)$$

$$u_2^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_2(\alpha_1, \alpha_2) + z\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$u_3^z(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

де  $u_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $u_2(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $u_3(\alpha_1, \alpha_2)$  – переміщення точок серединної поверхні оболонки в напрямках  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $z$  відповідно;  $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)$  – кути повороту нормалі в площині  $\alpha_1 = const$ ,  $\alpha_2 = const$ .

Згідно другої статичної гіпотези в співвідношеннях (2.3) можна знехтувати величиною  $\sigma_{33}$  в порівнянні з  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{22}$ . Розв'язуючи перші три рівняння відносно  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  при врахуванні, що  $\varepsilon_{33} = 0$ , отримаємо вирази, які показують зв'язок напружень з відповідними деформаціями

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11}^z + B_{12}\varepsilon_{22}^z, \quad \sigma_{22} = B_{21}\varepsilon_{11}^z + B_{22}\varepsilon_{22}^z, \quad (2.7)$$

де величини  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$  мають наступний вигляд

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad B_{12} = B_{21} = \frac{E_1 \nu_{21} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_2 \nu_{12} h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}.$$

Беручи до уваги додаткове припущення про поперечні дотичні напруження  $\sigma_{13}$  і  $\sigma_{23}$ , запишемо закон їх зміни по товщині оболонки

$$\sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, z) = f_1(z)\sigma_{13}^0(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.8)$$

$$\sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, z) = f_1(z)\sigma_{23}^0(\alpha_1, \alpha_2),$$

де  $f_1(z)$  наперед задана функція, яка вибирається з умов

$$\sigma_{13}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h/2) = 0, \quad \sigma_{23}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h/2) = 0.$$

Компоненти деформацій визначаються згідно лінійного варіанту теорії оболонок [153]. В цьому випадку співвідношення (2.2), з врахуванням формул (2.3), (2.64), мають наступний вигляд

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}^z &= \varepsilon_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + z\chi_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\varepsilon_{22}^z &= \varepsilon_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + z\chi_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\varepsilon_{12}^z &= \varepsilon_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + z\chi_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\varepsilon_{13}^z &= \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{23}^z = \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2, \\
\chi_{12} &= \tau_1 + \tau_2 + k_1\omega_2 + k_2\omega_1.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Вирази, які пов'язують деформації з переміщеннями координатної поверхні, мають вигляд

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2 + k_1 u_3, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1 + k_2 u_3, \\
\omega &= \omega_1 + \omega_2, \\
\omega_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_1, \quad \omega_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_2, \\
\chi_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_2, \quad \chi_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_1, \\
\tau_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \varphi_1, \quad \tau_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \varphi_2, \\
\theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, \quad \theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - k_2 u_2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

В формулах (2.10)  $\varepsilon_{11}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\varepsilon_{22}(\alpha_1, \alpha_2)$  – нормальні деформації в напрямках  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  відповідно;  $\varepsilon_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$  – деформації зсуву;  $\chi_{11}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\chi_{22}(\alpha_1, \alpha_2)$  – зміна кривизни в напрямках  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ;  $\chi_{12}(\alpha_1, \alpha_2)$  – кручення координатної поверхні;  $\varepsilon_{13}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\varepsilon_{23}(\alpha_1, \alpha_2)$  – деформація поперечного зсуву в площині  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

### 2.3. Основні положення теорії криволінійних стержнів з врахуванням деформацій поперечного зсуву

Розглянемо тонкий криволінійний стержень довільного поперечного перерізу в криволінійній ортогональній системі координат  $\alpha_1$  у  $z$ . Початок координат розмістимо в центрі ваги площини поперечного перерізу, причому вісь  $\alpha_1$  направимо вздовж осі стержня, а осі  $y$  і  $z$  паралельні головним осям цього поперечного перерізу. Припустимо, що вздовж осі поперечний переріз стержня сталий. Координатна лінія  $\alpha_1$  при  $y=0$ ,  $z=0$  співпадає з лінією головної кривизни стержня, а лінії  $y$  і  $z$  ортогональні до координатної лінії  $\alpha_1$ . Будемо вважати величину  $z$  додатною, якщо розглядувана точка знаходиться зі сторони опукlostі координатної лінії. Отже, система координат  $\alpha_1$  у  $z$  ортогональна за побудовою і параметри Ляме в такій системі мають вигляд

$$H_1 = A_1(\alpha_1)(1 + zk_1), \quad H_2 = 1, \quad H_3 = 1, \quad (2.11)$$

де  $A_1(\alpha_1)$  – коефіцієнти першої квадратичної форми введеної одновимірної поверхні;  $k_1$  – кривизна осі стержня, яка проходить через центри ваги поперечних перерізів, причому  $k_1 = 1/R_1$ ,  $R_1$  – радіус кривизни.

Для опису напружено–деформованого стану криволінійного стержня скористаємося спiввiдношеннями тривимірної теорiї пружностi, зокрема теорiєю криволінiйних стержнiв [157, 158]. Компоненти вектора перемiщень довiльної точки  $M$  стержня мають вигляд

$$u_1^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_1(\alpha_1) + y\varphi_1(\alpha_1) + z\varphi_2(\alpha_1), \quad (2.12)$$

$$u_2^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_2(\alpha_1) + z\psi_1(\alpha_1),$$

$$u_3^{yz}(\alpha_1, y, z) = u_3(\alpha_1) - y\psi_2(\alpha_1).$$

Приймемо гiпотезу недеформованостi поперечного зrізу криволінiйного стержня, згiдно якої

$$e_{22}^{yz} = 0, \quad e_{33}^{yz} = 0, \quad e_{23}^{yz} = 0. \quad (2.13)$$

Вирази для компонент деформацій визначаються згідно лінійного варіанту теорії стержнів.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 u_3, & \varepsilon_{12} &= \theta_2 + \varphi_1, & \varepsilon_{13} &= \theta_1 + \varphi_2, \\ \theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} - k_1 u_1, & \theta_2 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \\ \chi_{11} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}, & \chi_{22} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} - k_1 \psi_2, & \chi_{kp} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1}.\end{aligned}\quad (2.14)$$

Припущення, що волокна в напрямку повздовжньої осі стержня не викликають поперечного розтягу, дозволяють записати співвідношення закону Гука для стержнів в вигляді

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}^{xz}, \quad \sigma_{12} = G \varepsilon_{12}^{xz}, \quad \sigma_{13} = G \varepsilon_{13}^{xz}, \quad (2.15)$$

де  $E$ ,  $G$  – модулі Юнга і зсуву матеріалу стержня.

## 2.4. Постановка задач дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Загальний випадок

Підкріплена циліндрична оболонка еліптичного перерізу розглядається як неоднорідна пружна структура, яка складається власне з гладкої оболонки (обшивки) і системи жорстко з'єднаних з нею повздовжньо – поперечних підкріплюючих ребер.

Віднесемо підкріплену циліндричну оболонку еліптичного перерізу до криволінійної ортогональної системи координат  $\alpha_1 \alpha_2 z$ . Координатні лінії  $\alpha_1, \alpha_2$  належать серединній поверхні оболонки і співпадають з лініями головних кривизн; координатна лінія  $z$  є прямою, яка ортогональна до серединної поверхні. Будемо вважати величину  $z$  додатною, якщо точка знаходиться зі сторони опукlostі серединної поверхні.

Згідно формул [65], вирази для коефіцієнтів першої квадратичної форми і кривизн серединної поверхні еліпсоїдальної оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned} A_1 &= 1, & A_2 &= (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2}, \\ k_1 &= 0, & k_2 &= ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

При побудові математичної моделі вихідної структури будемо виходити з наступних припущень. Вважаємо, що напружене–деформований стан оболонки може бути визначений в рамках геометрично лінійного варіанту теорії оболонок типу Тимошенка – співвідношення (2.6) – (2.10). Для розрахунку дискретно розміщених ребер приймається геометрично лінійний варіант теорії стержнів типу Тимошенка – співвідношення (2.12) – (2.14).

Введемо позначення  $s_1 = \alpha_1 A_1$ ,  $s_2 = \alpha_2 A_2$ , де  $A_1$ ,  $A_2$  – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні циліндричної оболонки еліптичного перерізу.

Виходячи зі зроблених припущень і згідно позначень, вважаємо, що деформований стан гладкої оболонки може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$ .

$$\begin{aligned} u_1^z(s_1, s_2, z) &= u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2), \\ u_2^z(s_1, s_2, z) &= u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2), \\ u_3^z(s_1, s_2, z) &= u_3(s_1, s_2), \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Деформований стан  $i$ -го підкріплюючого елементу, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ , визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів ребра  $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ .

$$\begin{aligned} U_{1i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{1i}(s_1) + z\varphi_{1i}(s_1), \\ U_{2i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{2i}(s_1) + z\varphi_{2i}(s_1), \\ U_{3i}^{yz}(s_1, y, z) &= U_{3i}(s_1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

А відповідно деформований стан  $j$ -го підкріплюючого елементу, направленого вздовж вісі  $\alpha_2$  – вектором  $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ .

$$U_{1j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{1j}(s_2) + z\varphi_{1j}(s_2), \quad (2.19)$$

$$U_{2j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{2j}(s_2) + z\varphi_{2j}(s_2),$$

$$U_{3j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{3j}(s_2).$$

Покладаємо, що оболонка та дискретні підкріплюючі елементи жорстко з'єднані між собою.

Умови контакту між компонентами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ , і компонентами узагальненого вектора переміщень вихідної серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу мають вигляді

$$U_{1i}(s_1) = U_1(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_1(s_1, s_{2i}), \quad (2.20)$$

$$U_{2i}(s_1) = U_2(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_2(s_1, s_{2i}),$$

$$U_{3i}(s_1) = U_3(s_1, s_{2i}),$$

$$\varphi_{1i}(s_1) = \varphi_1(s_1, s_{2i}),$$

$$\varphi_{2i}(s_1) = \varphi_2(s_1, s_{2i}),$$

де  $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$  – відстань від серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу до лінії центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го ребра;  $h_i$  – висота підкріплюючого  $i$ -го ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ ;  $s_{2i}$  – координата лінії проектування центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го ребра на координатну серединну поверхню обшивки. Знак “+” відповідає випадку зовнішнього підкріплення ребер, а знак “–” обирається у випадку внутрішнього підкріплення.

Надалі при виведенні рівнянь коливань використовується інтегральна форма представлення умов контакту [ 26; 148]

$$U_{1i}(s_1) = \int_{s_2} [U_1(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_1(s_1, s_{2i})] \delta(s_2 - s_{2i}) A_2 ds_2, \quad (2.21)$$

$$U_{2i}(s_1) = \int_{s_2} [U_2(s_1, s_{2i}) \pm h_{ci}\varphi_2(s_1, s_{2i})] \delta(s_2 - s_{2i}) A_2 ds_2,$$

$$U_{3i}(s_1) = \int_{s_2} U_3(s_1, s_{2i}) \delta(s_2 - s_{2i}) A_2 ds_2,$$

$$\varphi_{1i}(s_1) = \int\limits_{s_2} \varphi_1(s_1, s_{2i}) \delta(s_2 - s_{2i}) A_2 ds_2,$$

$$\varphi_{2i}(s_1) = \int\limits_{s_2} \varphi_2(s_1, s_{2i}) \delta(s_2 - s_{2i}) A_2 ds_2.$$

Аналогічним чином записуються умови контакту між компонентами узагальненого вектора переміщень  $j$ -го підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_2$ , і компонентами узагальненого вектора переміщень гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу.

Рівняння коливань для підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу і співвідношення пружності, які визначають компоненти напруженого стану через компоненти деформацій для гладкої оболонки і відповідно підкріплюючих ребер, знаходимо використовуючи варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського [26; 148].

Варіаційне рівняння оболонки з повздовжньо – поперечним дискретним підкріплением в напрямках  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  представимо у вигляді

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - K) + \delta A] dt = 0 \quad (2.22)$$

де

$$\Pi = \Pi_0 + \sum\limits_{i=1}^{n_1} \Pi_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} \Pi_j \quad (2.23)$$

$$K = K_0 + \sum\limits_{i=1}^{n_1} K_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} K_j \quad (2.24)$$

де  $\Pi_0$ ,  $K_0$  – потенціальна і кінетична енергія обшивки;  $\Pi_i$ ,  $K_i$  – потенціальна і кінетична енергії відповідно  $i$ -го підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ ;  $\Pi_j$ ,  $K_j$  – потенціальна і кінетична енергії відповідно  $j$ -го підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_2$ ;  $A$  – робота зовнішніх сил.

Вирази для величин  $\delta\Pi$  і  $\delta K$ , із врахуванням формул (2.23), (2.24) мають вигляд

$$\delta\Pi = \delta\Pi_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \delta\Pi_i + \sum_{j=1}^{n_2} \delta\Pi_j \quad (2.25)$$

$$\delta K = \delta K_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \delta K_i + \sum_{j=1}^{n_2} \delta K_j \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 = & \iint_S [T_{11}\delta\varepsilon_{11} + T_{22}\delta\varepsilon_{22} + S\delta\varepsilon_{12} + T_{13}\delta\varepsilon_{13} + T_{23}\delta\varepsilon_{23} + \\ & + M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22} + H\delta(\tau_1 + \tau_1)]dS; \end{aligned}$$

$$\delta\Pi_i = \int_{S_1} [T_{11i}\delta\varepsilon_{11i} + T_{12i}\delta\varepsilon_{12i} + T_{13i}\delta\varepsilon_{13i} + M_{11i}\delta\kappa_{11i} + M_{12i}\delta\kappa_{12i}]dS_1;$$

$$\delta\Pi_j = \int_{S_2} [T_{21j}\delta\varepsilon_{21j} + T_{22j}\delta\varepsilon_{22j} + T_{23j}\delta\varepsilon_{23j} + M_{21j}\delta\kappa_{21j} + M_{22j}\delta\kappa_{22j}]dS_2;$$

$$\delta K_0 = \rho h \iint_S \left[ \frac{\partial U_1}{\partial t} \delta \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_2}{\partial t} \delta \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_3}{\partial t} \delta \frac{\partial U_3}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right) \right] dS;$$

$$\delta K_i = \rho_i h_i \int_{S_1} \left[ \frac{\partial U_{1i}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{1i}}{\partial t} + \frac{\partial U_{2i}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{2i}}{\partial t} + \frac{\partial U_{3i}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{3i}}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{1i}}{F_i} \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} + \frac{I_{cri}}{F_i} \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} \right] dS_1;$$

$$\delta K_j = \rho_j h_j \int_{S_2} \left[ \frac{\partial U_{1j}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{1j}}{\partial t} + \frac{\partial U_{2j}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{2j}}{\partial t} + \frac{\partial U_{3j}}{\partial t} \delta \frac{\partial U_{3j}}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{crj}}{F_j} \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial t} + \frac{I_{2j}}{F_j} \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial t} \delta \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial t} \right] dS_2.$$

Після виконання операцій варіювання і інтегрування, з врахуванням умов контакту обшивка –  $i$ -те ребро (2.20), (2.21) та обшивка –  $j$ -те ребро, функціонал (2.22) представимо у вигляді

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S \left\{ \left\{ \rho h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - L_1(\bar{U}) + \right. \right. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_{1i}}{\partial t^2} - L_{1i}(\bar{U}_i) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \\
& + \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j F_j \frac{\partial^2 U_{1j}}{\partial t^2} - L_{1j}(\bar{U}_j) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) \Bigg\} \delta U_1 + \\
& + \left\{ \rho h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - L_2(\bar{U}) + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_{2i}}{\partial t^2} - L_{2i}(\bar{U}_i) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j F_j \frac{\partial^2 U_{1j}}{\partial t^2} - L_{2j}(\bar{U}_j) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) \right\} \delta U_2 + \\
& + \left\{ \rho h \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} - L_3(\bar{U}) + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i F_i \frac{\partial^2 U_{3i}}{\partial t^2} - L_{3i}(\bar{U}_i) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j F_j \frac{\partial^2 U_{1j}}{\partial t^2} - L_{3j}(\bar{U}_j) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2j}) \right\} \delta U_3 + \\
& + \left\{ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - L_4(\bar{U}) + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 U_{1i}}{\partial t^2} + \frac{I_{1i}}{F_i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2} \right) - L_{4i}(\bar{U}_i) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 U_{1j}}{\partial t^2} + \frac{I_{crj}}{F_j} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2} \right) - L_{4j}(\bar{U}_j) \right] \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right\} \delta \varphi_1 + \\
& + \left\{ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - L_5(\bar{U}) + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 U_{2i}}{\partial t^2} + \frac{I_{kri}}{F_i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2} \right) - L_{5i}(\bar{U}_i) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 U_{2j}}{\partial t^2} + \frac{I_{2j}}{F_j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2} \right) - L_{5j}(\bar{U}_j) \right] \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right\} \delta \varphi_2 \Bigg\} dS + \\
& + \int_{\Gamma_1} \left\{ \left[ T_{11} + \sum_{i=1}^{n_1} T_{11i} \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right] \delta U_1 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (S + k_2 H) + \sum_{i=1}^{n_1} \bar{T}_{12i} \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right] \delta U_2 + \\
& + \left[ T_{13} + \sum_{i=1}^{n_1} \bar{T}_{13i} \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right] \delta U_3 + \\
& + \left[ M_{11} + \sum_{i=1}^{n_1} (M_{11i} \pm h_i T_{11i}) \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right] \delta \varphi_1 + \\
& + \left. \left[ H + \sum_{i=1}^{n_1} (M_{22i} \pm h_i \bar{T}_{12i}) \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right] \delta \varphi_2 \right\} dS_1 + \\
& + \int_{\Gamma_2} \left\{ \left[ S + k_1 H + \sum_{j=1}^{n_2} \bar{T}_{21j} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right] \delta U_1 + \right. \\
& + \left[ T_{22} + \sum_{j=1}^{n_2} T_{22j} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right] \delta U_2 + \\
& + \left[ \bar{T}_{23} + \sum_{j=1}^{n_2} T_{23j} \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right] \delta U_3 + \\
& + \left. \left[ H + \sum_{j=1}^{n_2} (M_{21j} \pm h_j \bar{T}_{21j}) \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right] \delta \varphi_1 + \right. \\
& + \left. \left[ M_{22} + \sum_{j=1}^{n_2} (M_{22j} \pm h_j \bar{T}_{22j}) \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \right] \delta \varphi_2 \right\} dS_2 \Bigg\} dt - \\
& - \iint_S \left[ \rho h \left( \frac{\partial U_1}{\partial t} \delta U_1 + \frac{\partial U_2}{\partial t} \delta U_2 + \frac{\partial U_3}{\partial t} \delta U_3 \right) + \right. \\
& + \left. \rho \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \delta \varphi_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \delta \varphi_2 \right) \right]_{t_1}^{t_2} dS - \\
& - \int_{l_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \rho_i h_i \left( \frac{\partial U_{1i}}{\partial t} \delta U_{1i} + \frac{\partial U_{2i}}{\partial t} \delta U_{2i} + \frac{\partial U_{3i}}{\partial t} \delta U_{3i} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \rho_i \left( I_{1i} \frac{\partial \varphi_{1i}}{\partial t} \delta \varphi_{1i} + I_{cri} \frac{\partial \varphi_{2i}}{\partial t} \delta \varphi_{2i} \right) \right] \delta(\alpha_2 - \alpha_{2i}) \right|_{t_1}^{t_2} \right\} dS_1 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{l_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} \left[ \rho_j h_j \left( \frac{\partial U_{1j}}{\partial t} \delta U_{1j} + \frac{\partial U_{2j}}{\partial t} \delta U_{2j} + \frac{\partial U_{3j}}{\partial t} \delta U_{3j} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \rho_j \left( I_{crj} \frac{\partial \varphi_{1j}}{\partial t} \delta \varphi_{1j} + I_{2j} \frac{\partial \varphi_{2j}}{\partial t} \delta \varphi_{2j} \right) \right] \delta(\alpha_1 - \alpha_{1j}) \Big|_{t_1}^{t_2} \right\} dS_2 = 0.
\end{aligned}$$

Оператори  $L_1(\bar{U}), \dots L_5(\bar{U}); L_{1i}(\bar{U}), \dots L_{5i}(\bar{U}); L_{1j}(\bar{U}), \dots L_{5j}(\bar{U})$ ; мають вигляд:

$$L_1(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 S) \right\}, \quad (2.28)$$

$$L_2(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} [A_2 (S + k_2 H)] + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 T_{22}) \right\} + k_2 T_{23},$$

$$L_3(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 T_{13}) \right] - k_2 T_{22},$$

$$L_4(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 H) \right] - T_{13},$$

$$L_5(\bar{U}) = \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 H) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (A_1 M_{22}) \right] - T_{23};$$

$$L_{1i}(\bar{U}_i) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11i}}{\partial \alpha_1}, \quad L_{2i}(\bar{U}_i) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12i}}{\partial \alpha_1}, \quad (2.29)$$

$$L_{3i}(\bar{U}_i) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13i}}{\partial \alpha_1}, \quad L_{4i}(\bar{U}_i) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11i}}{\partial \alpha_1} - T_{13i} \pm h_i \left( \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11i}}{\partial \alpha_1} + k_{1i} T_{11i} \right),$$

$$L_{5i}(\bar{U}_i) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (M_{12i} \pm h_i \bar{T}_{12i});$$

$$L_{1j}(\bar{U}_j) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21j}}{\partial \alpha_2}, \quad L_{2j}(\bar{U}_j) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22j}}{\partial \alpha_2} + k_{2j} T_{23j}, \quad (2.30)$$

$$L_{3j}(\bar{U}_j) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{23j}}{\partial \alpha_2} - k_{2j} T_{22j}, \quad L_{4j}(\bar{U}_j) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (M_{21j} \pm h_j \bar{T}_{21j}),$$

$$L_{5j}(\bar{U}_j) = \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22j}}{\partial \alpha_2} - T_{23j} \pm h_j \left( \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22j}}{\partial \alpha_2} + k_{2j} T_{23j} \right).$$

У виразі (2.27) введено позначення:  $S_1 = A_1 d\alpha_1$ ,  $S_2 = A_2 d\alpha_2$ ;  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  – крайові контури, які обмежують оболонку і співпадають з координатними лініями.

Прирівнюючи до нуля вирази при незалежних варіаціях  $\delta U_1$ ,  $\delta U_2$ ,  $\delta U_3$ ,  $\delta \varphi_1$ ,  $\delta \varphi_2$  в функціоналі (2.27), отримаємо наступні три групи рівнянь коливань дискретно підкріпленої оболонки:

- рівняння коливань циліндричної оболонки еліптичного перерізу в гладкій області

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

- рівняння коливань  $i$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ :

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S]_i = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_i = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} + [H]_i = \rho_i F_i \left( \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial s_1} + [M_{22}]_i = \rho_i F_i \left( \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right);$$

- рівняння коливань  $j$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_2$ :

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} - k_{2j} T_{22j} + [T_{13}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}]_j = \rho_j F_j \left( \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} \pm h_{cj} \left( \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} \right) + [H]_j = \\ = \rho_j F_j \left( \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

У виразах для рівнянь коливань дискретно підкріплюючих ребер (2.32) та (2.33) позначення типу  $[S]_i$  ( $[S]_j$ ) відповідають сумарній дії величин зусиль – моментів гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу на  $i$ -те ( $j$ -те) підкріплююче ребро.

Вирази для зусиль – моментів гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу мають вигляд

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}, & T_{22} &= B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}, \\ T_{13} &= B_{13}\varepsilon_{13}, & T_{23} &= B_{23}\varepsilon_{23}, \\ S &= B_s\varepsilon_{12}, & M_{11} &= D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22}, \\ M_{22} &= D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22}, & H &= D_s\chi_{12}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
&\text{де } D_s = G_{12} \frac{h^3}{12}, & B_s = G_{12} h, & B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
& B_{12} = \frac{E_1 \nu_{21} h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & B_{21} = \frac{E_2 \nu_{12} h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\
& B_{13} = G_{13} h k^2, & B_{23} = G_{23} h k^2, & D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\
& D_{12} = \frac{E_1 \nu_{21} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, & D_{21} = \frac{E_2 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, & D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}.
\end{aligned}$$

$E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{21}$  – фізико-механічні характеристики матеріалу оболонки.

Відповідні вирази зусиль – моментів для підкріплюючих елементів записуються у вигляді

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}, \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}, \quad T_{13i} = k_i^2 G_i F_i \varepsilon_{13i}, \quad (2.35)$$

$$M_{11i} = E_i I_{1i} \chi_{11i}, \quad M_{12i} = G_i I_{cri} \chi_{12i}.$$

$$T_{21j} = G_j F_j \varepsilon_{21j}, \quad T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j}, \quad T_{23j} = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23j}, \quad (2.36)$$

$$M_{21j} = G_j I_{crj} \chi_{21j}, \quad M_{22j} = E_j I_{2j} \chi_{22j}.$$

В формулах (2.34) – (2.36) величини  $k^2, k_i^2, k_j^2$  – коефіцієнти поперечного зсуву для оболонки і відповідних підкріплюючих ребер;  $F_i, I_{1i}, I_{cri}, F_j, I_{2j}, I_{crj}$  – геометричні характеристики відповідно повздовжніх і поперечних елементів.

Із врахуванням формул (2.10) та (2.16), вирази для компонент деформацій гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу мають вигляд

$$\varepsilon_{12} = \omega, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \theta_2, \quad (2.37)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, \quad \omega = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\omega_1 = \frac{\partial u_2}{\partial s_1}, \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial s_2},$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, & \theta_2 &= \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2, \\ \chi_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, & \chi_{22} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, & \chi_{12} &= \tau_1 + \tau_2 + \kappa_1 \omega_1 + \kappa_2 \omega_2, \\ \tau_1 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, & \tau_2 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}.\end{aligned}$$

Компоненти деформацій для  $i$ -го ( $j$ -го) ребра виражаються через компоненти відповідного вектора переміщень за наступними формулами

$$\varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{12i} = \theta_{2i}, \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_1 + \theta_{1i}, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\theta_{1i} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_1}, & \theta_{2i} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \\ \chi_{11i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, & \chi_{12i} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \\ \varepsilon_{22j} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + k_{2j} u_3, & (2.39) \\ \varepsilon_{21j} &= \theta_{2j}, & \varepsilon_{23j} &= \varphi_2 + \theta_{1j}, \\ \theta_{1j} &= \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_{2j} (u_2 \pm h_{cj} \varphi_2), & \theta_{2j} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}, \\ \chi_{21j} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}, & \chi_{22j} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}.\end{aligned}$$

Рівняння коливань (2.31) – (2.33) доповнюються природними граничними умовами, які отримуються з виразу функціоналу (2.27)

- на контурі  $\alpha_1 = const$

$$T_{11} + \sum_{i=1}^I T_{11i} \Big|_{\alpha_2=\alpha_{2i}} = T_{11}^*, \quad \text{або} \quad U_1 = U_1^*, \quad (2.40)$$

$$S + k_2 H + \sum_{i=1}^I T_{12i} \Big|_{\alpha_2=\alpha_{2i}} = S^*, \quad \text{або} \quad U_2 = U_2^*,$$

$$T_{13} + \sum_{i=1}^I T_{13i} \Big|_{\alpha_2=\alpha_{2i}} = \bar{T}_{13}^*, \quad \text{або} \quad U_3 = U_3^*,$$

$$M_{11} + \sum_{i=1}^I (M_{11i} \pm h_i T_{11i}) \Big|_{\alpha_2=\alpha_{2i}} = M_{11}^*, \quad \text{або} \quad \varphi_1 = \varphi_1^*,$$

$$H + \sum_{i=1}^I (M_{12i} \pm h_i T_{12i}) \Big|_{\alpha_2=\alpha_{2i}} = H^*, \quad \text{або} \quad \varphi_2 = \varphi_2^*,$$

- на контурі  $\alpha_2 = const$

$$S + k_1 H + \sum_{j=1}^J T_{21j} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = S^*, \quad \text{або} \quad U_1 = U_1^*, \quad (2.41)$$

$$T_{22} + \sum_{j=1}^J T_{22j} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{1i}} = T_{22}^*, \quad \text{або} \quad U_2 = U_2^*,$$

$$T_{23} + \sum_{j=1}^J T_{23j} \Big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = \bar{T}_{23}^*, \quad \text{або} \quad U_3 = U_3^*,$$

$$H + \sum_{j=1}^J (M_{21j} \pm h_j T_{21j}) \Big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = H^*, \quad \text{або} \quad \varphi_1 = \varphi_1^*,$$

$$M_{22} + \sum_{j=1}^J (M_{22j} \pm h_j T_{22j}) \Big|_{\alpha_1=\alpha_{1j}} = M_{22}^*, \quad \text{або} \quad \varphi_2 = \varphi_2^*.$$

В спiввiдношеннях (2.40) – (2.41) величини  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_2^*$ ,  $U_1^*$ ,  $U_2^*$ ,  $U_3^*$ ,  $T_{11}^*$ ,  $S^*$ ,

$T_{13}^*$ ,  $M_{11}^*$ ,  $H^*$ ,  $T_{22}^*$ ,  $T_{23}^*$ ,  $M_{22}^*$  – наперед заданi кiнематичнi i силовi значення, що прикладенi на контурах  $\alpha_1 = const$ ,  $\alpha_2 = const$  вiдповiдно.

Рiвняння коливань (2.31) – (2.33) доповнюються нульовими початковими умовами виду

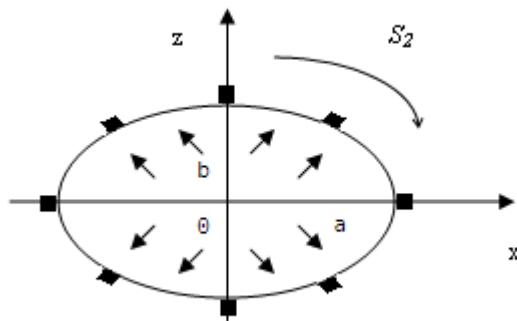
$$\varphi_1 = \varphi_2 = U_1 = U_2 = U_3 = 0, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{\partial U_2}{\partial t} = \frac{\partial U_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0.$$

Таким чином, система співвідношень (2.28) – (2.42), являє собою повну систему рівнянь, яка дозволяє описувати динамічну поведінку дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням поперечних кутових деформацій в рамках геометрично лінійної теорії оболонок і стержнів з відповідними граничними і початковими умовами.

## 2.5. Плоска задача теорії дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Рівняння коливань

Як частинний випадок теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу розглядається плоска задача підкріплених циліндричних оболонок. Нехай маємо нескінчуний циліндричну оболонку еліптичного перерізу, яка підкріплена набором повз涓ніх ребер. При постановці задачі враховується дискретне розміщення підкріплених елементів (ребер). Схематично це виглядає згідно рис. 1.



*Рис. 1. Схематичне зображення підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу у випадку плоскої задачі*

В цьому випадку рівняння коливань неоднорідної пружної структури мають вигляд в гладкій області

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(S_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

на  $i$ -й лінії просторових розривів (дискретних ребер)

$$[T_{22}]_i = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \quad (2.44)$$

$$[T_{23}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$[M_{22}]_i = \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( l_{ci}^2 + \frac{I_{kvi}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

В рівняннях (2.43), (2.44) введено наступні позначення:  $S_2$ ,  $t$  – просторова та часова координата;  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\varphi_2$  – компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні вихідної оболонки;  $h$  – товщина оболонки;  $k_2$  – кривизна оболонки;  $P_3(S_2, t)$  – розподілене навантаження;  $\rho$ ,  $\rho_i$  – густина матеріалу оболонки та відповідного  $i$ -го підкріпленого ребра;  $h_{ci}$ ,  $F_i$ ,  $I_{kvi}$  – геометричні параметри  $i$ -го ребра,  $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$ ,  $h_i$  – висота  $i$ -го ребра.

В рівняннях (2.44) знаки  $\pm$  відповідають зовнішньому (знак плюс) або внутрішньому (знак мінус) випадкам підкріплення. Вирази в квадратних дужках

$$[T_{22}]_i = T_{22}^+ - T_{22}^-, \quad [T_{23}]_i = T_{23}^+ - T_{23}^-, \quad [M_{22}]_i = M_{22}^+ - M_{22}^-$$

відповідають реакції відповідних зусиль моментів на  $i$ -те ребро.

Зв'язок між зусиллями-моментами та відповідними деформаціями записується згідно наступних формул

$$T_{22} = B_{22} \varepsilon_{22}, \quad T_{23} = B_{23} \varepsilon_{23} \quad (2.45)$$

$$M_{22} = D_{22} \chi_{22}, \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$B_{23} = G_{23} h, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

де  $E_2$ ,  $G_{23}$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  – фізико-механічні параметри матеріалу оболонки ( $E_2$ - модуль Юнга;  $G_{23}$ - модуль зсуву;  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  - коефіцієнти Пуассона).

Деформації  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\chi_{22}$  пов'язані з компонентами узагальненого вектора переміщень серединної поверхні наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, & \varepsilon_{23} &= \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2 \\ \chi_{22} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

Крайові умови для розв'язку рівнянь (2.43)-(2.46) задаються виходячи з постановки задачі.

Початкові умови при  $t = 0$  мають вигляд

$$u_2 = u_3 = \varphi_2 = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = 0.$$

## 2.6. Постановка задач підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу в рамках конструктивно ортотропної моделі

Розглядається підкріплена циліндрична оболонка еліптичного перерізу при дії на неї розподіленого навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$ , де  $s_1, s_2$  – просторові координати серединної поверхні обшивки;  $t$  – часова координата. Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні вихідної оболонки записуються наступним чином [159]:

$$A_1 = 1, \quad k_1 = 0; \quad (2.48)$$

$$A_2 = (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2};$$

$$k_2 = ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}.$$

де  $a$  і  $b$  – півосі еліпсу, який характеризує поперечний перетин циліндричної оболонки.

Припускалось, що циліндрична оболонка підкріплена регулярним набором поздовжніх і поперечних ребер. Для опису напруженого-деформованого стану (НДС) вихідної неоднорідної оболочної структури застосовується конструктивно-ортотропна модель теорії підкріплених оболонок типу Тимошенка [160-162]. При цьому, підкріплена оболонка розглядається як деяка двохшарова оболонка, яка складається із обшивки і шару з приведеними фізико-механічними параметрами в напрямах  $s_1$  і  $s_2$ . Покладаємо, що НДС обшивки можна визначити через узагальнений вектор переміщення серединної поверхні  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$ . Відповідно, НДС поданого шару визначається через узагальнений вектор переміщення шару  $\bar{U}_c = (u_{1c}, u_{2c}, u_{3c}, \varphi_{1c}, \varphi_{2c})$ . Зв'язок між компонентами векторів  $\bar{U}$  і  $\bar{U}_c$  у випадку поздовжнього підкріплення визначається формулами

$$u_{1c}(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) \pm h_{ci} \varphi_1(s_1, s_2); \quad (2.49)$$

$$u_{2c}(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \pm h_{ci} \varphi_2(s_1, s_2); \quad u_{3c}(s_1, s_2) = u_3(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{1c}(s_1, s_2) = \varphi_1(s_1, s_2); \quad \varphi_{2c}(s_1, s_2) = \varphi_2(s_1, s_2).$$

У випадку поперечного підкріплення рівняння зв'язків мають вигляд

$$u_{1c}(s_1, s_2) = u_1(s_1, s_2) \pm h_{cj} \varphi_1(s_1, s_2); \quad (2.50)$$

$$u_{2c}(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) \pm h_{cj} \varphi_2(s_1, s_2); \quad u_{3c}(s_1, s_2) = u_3(s_1, s_2);$$

$$\varphi_{1c}(s_1, s_2) = \varphi_1(s_1, s_2); \quad \varphi_{2c}(s_1, s_2) = \varphi_2(s_1, s_2).$$

В рівняннях (2.49), (2.50)  $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$ ,  $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$ , де  $h$  - товщина обшивки;  $h_i, h_j$  - висота ребер в повздовжньому і поперечному напрямах. Знаки  $\pm$  відповідають випадкам зовнішнього і внутрішнього підкріплення.

Для виводу рівнянь коливань циліндричної оболонки на пружній основі використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона-

Остроградського [1-6]. Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі отримаємо рівняння коливань гладкої циліндричної оболонки з еліптичним поперечним перетином

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s_1} (T_{11} + T_{11c}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm \\
 &\pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} (T_{22} + T_{22c}) + k_2 (T_{23} + T_{23c}) &= \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm \\
 &\pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial s_1} (T_{13} + T_{13c}) + \frac{\partial}{\partial s_2} (T_{23} + T_{23c}) - k_2 (T_{22} + T_{22c}) + P_3(s_1, s_2, t) &= \\
 = \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial}{\partial s_1} (M_{11} + M_{11c} \pm h_{ci} T_{11c}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} &= \\
 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 + \left[ \rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
 \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} (M_{22} + M_{22c} \pm h_{cj} T_{22c}) - T_{23} &= \\
 = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} +
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$+ \left[ \rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}.$$

Величини зусиль і моментів в рівняннях коливань для неоднорідної оболонки (2.51) зв'язані з відповідними величинами деформацій наступними співвідношеннями:

$$T_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}, \quad T_{22} = B_{21}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22}, \quad (2.52)$$

$$T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}, \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}, \quad T_{12} = B_{12}^*\varepsilon_{12},$$

$$M_{11} = D_{11}\kappa_{11} + D_{12}\kappa_{22}, \quad M_{22} = D_{21}\kappa_{11} + D_{22}\kappa_{22}, \quad H = D_{12}^*\kappa_{12};$$

$$T_{11c} = B_{11c}\varepsilon_{11c}, \quad T_{22c} = B_{22c}\varepsilon_{22c},$$

$$T_{13c} = B_{13c}\varepsilon_{13c}, \quad T_{23c} = B_{23c}\varepsilon_{23c},$$

$$M_{11c} = D_{11c}\kappa_{11c}, \quad M_{22c} = D_{22c}\kappa_{22c};$$

де

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial s_1} + \frac{\partial u_1}{\partial s_2}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \varphi_1,$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \varphi_2 - k_2 u_2,$$

$$\kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2};$$

$$\varepsilon_{11c} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \varepsilon_{22c} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} + k_2 u_3,$$

$$\varepsilon_{13c} = \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \varphi_1, \quad \varepsilon_{23c} = \frac{\partial u_3}{\partial s_2} + \varphi_2 - k_2 (u_2 \pm h_{cj} \varphi_2),$$

$$\kappa_{11c} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22c} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2};$$

$$B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{22} = \frac{\nu_1 E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2},$$

$$B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}, \quad B_{21} = B_{12}, \quad B_{12}^* = G_{12} h,$$

$$B_{13} = G_{13} h, \quad B_{23} = G_{23} h,$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)},$$

$$D_{12} = \frac{\nu_1 E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{21} = D_{12}, \quad D_{12}^* = G_{12} \frac{h^3}{12};$$

$$B_{11c} = \frac{E_{1c} F_1}{l_1}, \quad B_{13c} = \frac{G_1 F_1}{l_1},$$

$$D_{11c} = \frac{E_{1c} I_1}{l_1}, \quad B_{22c} = \frac{E_{2c} F_2}{l_2},$$

$$B_{23c} = \frac{G_{2c} F_2}{l_2}, \quad D_{22c} = \frac{E_{2c} I_2}{l_2}.$$

де  $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$  – фізико-механічні параметри ортотропного матеріалу оболонки;  $l_1, l_2$  – відстань між ребрами для повздовжнього і поперечного набору;  $a_1, h_1, F_1$  – геометричні параметри ребер вздовж осі  $s_1$ ;  $a_2, h_2, F_2$  – геометричні параметри ребер вздовж осі  $s_2$ .

Рівняння (2.51), (2.52) доповнюються відповідними граничними і початковими умовами.

### *Висновки до другого розділу*

В даному розділі розглянуто постановку задач та вивід рівнянь неосесиметричних коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Як частковий випадок розглянуто постановку плоскої

задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Покладалося, що напружено – деформований стан неоднорідної пружної структури може бути визначений в рамках геометрично лінійної теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка. Для виведення рівнянь коливань неоднорідної структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського. Приведені вирази для потенціальної та кінетичної енергій обшивки та відповідних дискретних підкріплюючих елементів. Приведено кінематичні умови контакту обшивки і дискретних підкріплюючих елементів. Після стандартних перетворень в варіаційному функціоналі, отримано рівняння коливань для гладкої оболонки та відповідних повздовжніх і поперечних дискретних підкріплюючих ребер. Рівняння коливань доповнені відповідними природними граничними та початковими умовами для обшивки і дискретних підкріплюючих ребер. Виведено рівняння коливань для конструктивно-ортотропної теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу.

## РОЗДІЛ 3

### **ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОЧАТКОВО – КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ**

Системи диференціальних рівнянь (2.33) – (2.35), які описують напружене – деформований стан дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу в загальному випадку являють собою рівняння в частинних похідних по двом просторовим координатам  $\alpha_1, \alpha_2$  і часовій координаті  $t$ . Розв'язання вказаних задач відомими аналітичними методами практично неможливий. У зв'язку з цим, виникає необхідність застосування чисельних методів для розв'язання початково – крайових задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного розміщення ребер та розробки відповідних алгоритмів, з подальшою їх реалізацією на сучасних персональних комп’ютерах. Зокрема, в даній роботі для розв'язування поставлених задач використовується метод скінчених різниць. Побудова чисельного алгоритму базується на застосуванні інтегро–інтерполяційного методу побудови скінченно – різницевих схем по просторовим координатам та явної скінченно – різницевої схеми по часовій координаті [147, 163, 148, 164]. При цьому, виникає необхідність проведення теоретичних досліджень побудови різницевих схем (питання апроксимації, стійкості і т.д.). Складність розв'язання задач коливань неоднорідних пружних структур з врахуванням дискретності розміщення ребер полягає в наявності розривних коефіцієнтів в рівняннях коливань. Тому чисельні різницеві алгоритми окремо будуються в гладкій області циліндричної оболонки і “склеюються” на лініях розривів з врахуванням кінематичних умов спряження. Використаний в даній роботі підхід є розвитком відомих чисельних алгоритмів для розв'язку задач теорії неоднорідних оболонок з врахуванням дискретності підкріплюючих ребер [71].

Метою даного розділу є побудова ефективних чисельних алгоритмів розв'язування динамічних задач теорії дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу та їх теоретичне обґрунтування.

### **3.1. Чисельний алгоритм розв'язку плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу**

#### *3.1.1. Скінчено-різницеві рівняння розв'язку плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу*

Рівняння коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу у випадку плоскої задачі при динамічних навантаженнях є найбільш простою моделлю коливань вказаних структур. На прикладі цих рівнянь в даному параграфі буде детально проаналізовано підхід побудови чисельного алгоритму.

Викладення матеріалу ґрунтуються на постановці плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу згідно параграфа 2.5. Рівняння коливань запишемо в наступному вигляді

- в гладкій області

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(S_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

- на лініях розриву  $s_2 = s_{2i}$

$$\begin{aligned} [T_{22}]_i &= \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \\ [T_{23}]_i &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ [M_{22}]_i &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( l_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В рівняннях (3.1) вирази для величин зусиль і моментів мають наступний вигляд

$$T_{22} = B_{22} \varepsilon_{22}, \quad T_{23} = B_{23} \varepsilon_{23} \quad M_{22} = D_{22} \chi_{22}, \quad (3.3)$$

де

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3, \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2 \quad \chi_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}. \quad (3.4)$$

Позначення в рівняннях (3.1) – (3.4) введено згідно позначень параграфа 2.5.

Побудову чисельного алгоритму почнемо з побудови різницевої сітки. Розглянемо інтервал  $[s_{20}, s_{2M}]$ , де  $s_{20}$  – початкова точка,  $s_{2M}$  – кінцева точка дуги серединної поверхні оболонки. При цьому  $\alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2M}$ . Поділимо інтервал  $[\alpha_{20}; \alpha_{2M}]$  на  $M$  рівних частин з кроком  $\Delta \alpha_2 = \frac{(\alpha_{2M} - \alpha_{20})}{M}$ . Отримаємо дискретні вузли по координаті  $\alpha_{2l} = l \cdot \Delta \alpha_2$ , ( $l = \overline{0, M}$ ). Координатам по  $\alpha_2$  відповідають значення по координаті  $s_2$ . Тобто  $s_{2l} = \alpha_{2l} \cdot A_{2l}$ , де величина  $A_{2l} = A_{2l}(\alpha_{2l})$ , тобто величина  $A_{2l}$  є функцією від величини  $\alpha_{2l}$  згідно геометрії вихідної циліндричної оболонки еліптичного перерізу. В результаті маємо різницеву сітку по просторовій координаті  $s_2$ :  $s_{20}, s_{21}, \dots, s_{2M}$ . При цьому різницевий крок визначається згідно формули  $\Delta s = s_{2l+1} - s_{2l}$ .

Наряду з основною різницевою сіткою вводиться допоміжна різницева сітка в вузлах  $s_{2l \pm 1/2}$ , яка відповідає значенням координати  $s_2$  в напіввузлах. По часовій координаті  $t$  вводиться аналогічна сітка на інтервалі  $[0; T]$  розбиттям на

$N$  рівних підінтервалів з кроком  $\Delta t = T/N$ , причому  $t_n = n \cdot \Delta t$ . Також вводиться допоміжна сітка по часу  $t_{n+1/2}$ , яка відповідає значенням величини в напіввузлах.

Надалі будемо покладати, що величини переміщень узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої оболонки  $u_2$ ,  $u_3$ ,  $\varphi_2$  віднесемо до цілих вузлів різницевої сітки по просторовій та часовій координатам, тобто також покладаємо, що центри ваги поперечного перерізу  $i$ -го ребра покладають в цілі вузли різницевої сітки.

$$u_2, u_3, \varphi_2 \rightarrow (u_2)_l^n, (u_3)_l^n, (\varphi_2)_l^n \quad (3.5)$$

Верхній індекс  $n$  відповідає дискретному значенню в час  $t_n = n\Delta t$ . Нижній індекс  $l$  відповідає дискретному значенню по координаті  $s_2 - s_{2l}$ . Для спрощення запису будемо використовувати позначення  $u_{2l}^n$ ,  $u_{3l}^n$ ,  $\varphi_{2l}^n$ .

Для побудови різницевої схеми для рівнянь (3.1) - (3.4), з врахуванням (3.5), будемо використовувати інтегро-інтерполяційний метод побудови скінчено-різницевих схем [99, 148, 163, 147] для гіперболічних рівнянь. Згідно цього підходу, рівняння (3.1) представимо в наступному вигляді в області

$$\{s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \left[ \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} \right] ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \left[ \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_2, t) \right] ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \left[ \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} \right] ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1/2}}^{s_{2l+1/2}} \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} ds_2 dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Після стандартних перетворень в співвідношеннях (3.6) отримаємо наступні апроксимації рівнянь (3.1)

$$\frac{T_{22l+1/2}^n - T_{22l-1/2}^n}{\Delta s_{2l}} + k_{2l} \frac{T_{23l+1/2}^n + T_{23l-1/2}^n}{2} = \rho h (u_{2l}^n)_{tt}, \quad (3.7)$$

$$\frac{T_{23l+1/2}^n - T_{23l-1/2}^n}{\Delta s_{2l}} - k_{2l} \frac{T_{22l+1/2}^n + T_{22l-1/2}^n}{2} + P_3(s_{2l}, t_n) = \rho h(u_{3l}^n)_{\bar{t}t}$$

$$\frac{M_{22l+1/2}^n - M_{22l-1/2}^n}{\Delta s_{2l}} - \frac{T_{23l+1/2}^n + T_{23l-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2l}^n)_{\bar{t}t}.$$

В співвідношеннях (3.7) позначення дискретних функцій і похідних введено згідно [147, 163].

Як видно з представлення (3.7), величини зусиль і моментів співвідносяться до різницевих точок в напівцілих точках по просторовій координаті і в цілих точках по часовій координаті, тобто

$$(T_{22}, T_{23}, M_{22}) \rightarrow (T_{22l \pm 1/2}^n, T_{23l \pm 1/2}^n, M_{22l \pm 1/2}^n).$$

Виходячи з цього, рівняння (3.3) інтегруються в областях

$$\{s_{2l-1} \leq s_2 \leq s_{2l}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \text{ і } \{s_{2l} \leq s_2 \leq s_{2l+1}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} T_{22} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} B_{22} \varepsilon_{22} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} T_{23} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} B_{23} \varepsilon_{23} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} M_{22} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} D_{22} \chi_{22} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} T_{22} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} B_{22} \varepsilon_{22} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} T_{23} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} B_{23} \varepsilon_{23} ds_2 dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} M_{22} ds_2 dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} D_{22} \chi_{22} ds_2 dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Після операції інтегрування в (3.8) отримаємо наступні різницеві співвідношення

$$T_{22l \pm 1/2}^n = B_{22} \varepsilon_{22l \pm 1/2}^n, \quad T_{23l \pm 1/2}^n = B_{23} \varepsilon_{23l \pm 1/2}^n, \quad M_{22l \pm 1/2}^n = D_{22} \chi_{22l \pm 1/2}^n \tag{3.9}$$

Відповідно співвідношення (3.4) теж інтегруються в областях

$$\{s_{2l-1} \leq s_2 \leq s_{2l}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \text{ i } \{s_{2l} \leq s_2 \leq s_{2l+1}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \varepsilon_{22} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3 \right] ds_2 dt, \\
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \varepsilon_{23} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \left[ \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_3 \right] ds_2 dt, \\
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \chi_{22} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l-1}}^{s_{2l}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} ds_2 dt, \\
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \varepsilon_{22} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3 \right] ds_2 dt, \\
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \varepsilon_{23} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \left[ \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_3 \right] ds_2 dt, \\
& \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \chi_{22} ds_2 dt = \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \int_{s_{2l}}^{s_{2l+1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2} ds_2 dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

З співвідношень (3.10) отримаємо наступні різницеві співвідношення для величин деформацій через дискретні величини узагальненого вектора переміщень  $u_{2l}^n, u_{3l}^n, \varphi_{2l}^n$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22l+1/2}^n &= \frac{u_{2l+1}^n - u_{2l}^n}{\Delta s_{l+1/2}} + k_{2l+1/2} \frac{u_{3l+1}^n + u_{3l}^n}{2}, \\
\varepsilon_{22l-1/2}^n &= \frac{u_{2l}^n - u_{2l-1}^n}{\Delta s_{l-1/2}} + k_{2l-1/2} \frac{u_{3l}^n + u_{3l-1}^n}{2}, \\
\varepsilon_{23l+1/2}^n &= \frac{\varphi_{2l+1}^n + \varphi_{2l}^n}{2} + \frac{u_{3l+1}^n - u_{3l}^n}{\Delta s_{l+1/2}} - k_{2l+1/2} \frac{u_{2l+1}^n + u_{2l}^n}{2}, \\
\varepsilon_{23l-1/2}^n &= \frac{\varphi_{2l}^n + \varphi_{2l-1}^n}{2} + \frac{u_{3l}^n - u_{3l-1}^n}{\Delta s_{l-1/2}} - k_{2l-1/2} \frac{u_{2l}^n + u_{2l-1}^n}{2}, \\
\chi_{22l+1/2}^n &= \frac{\varphi_{2l+1}^n - \varphi_{2l}^n}{\Delta s_{l+1/2}}, \quad \chi_{22l-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l}^n - \varphi_{2l-1}^n}{\Delta s_{l-1/2}}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Для отримання різницевих спiввiдношень на лiнiях розривiв (miсце проектування центрiв ваги поперечного перерiзу  $i$ -го ребра на середину поверхню оболонки) iнтегруємо рiвняння (3.2) по областi

$$\{t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} [T_{22}]_i dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right) dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} [T_{23}]_i dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \rho_i h_{ci} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} dt, \\ \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} [M_{22}]_i dt &= \int_{t_{n-1/2}}^{t_{n+1/2}} \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Пiсля стандартних перетворень в (3.12) отримаємо

$$\begin{aligned} [T_{22}]_i^n &= \rho_i F_i \left[ (u_{2i}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{2i}^n)_{tt} \right], \\ [T_{23}]_i^n &= \rho_i F_i (u_{3i}^n)_{tt}, \\ [M_{22}]_i^n &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} (u_{2i}^n)_{tt} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{kvi}}{F_i} \right) (\varphi_{2i}^n)_{tt} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Виходячи з вище отриманих рiзницевих формул (3.7), (3.9), (3.11) чисельний алгоритм розв'язку поставленої задачi полягає в послiдовностi виконання наступних формул:

- на  $n$ -му часовому шарi в гладкiй областi по просторовiй координатi  $s_2$  обчислюються величини вiдповiдних деформацiй i зусиль-моментiв по формулам (3.11), (3.9);
- по обчисленним величинам зусиль-моментiв на  $n$ -му часовому шарi обчислюються величини узагальненого векторa перемiщень  $u_2, u_3, \varphi_2$  в гладкiй областi на  $n+1$ -му часовому шарi згiдно формул (3.7);
- згiдно формул (3.13) обчислюються величини компонент узагальненого векторa перемiщень для  $i$ -го дискретного елемента на лiнiях розриву  $s_2 = s_{2i}$ .

### **3.1.2. Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для випадку рівнянь плоскої задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу**

Отримана різницева схема згідно формул (3.7), (3.11), (3.13) є явною по часовій координаті, і виходячи з цього, є умовно стійкою по просторовій і часовій координатам, тобто існує залежність величини  $\tau$  від величини  $\Delta x$  в залежності від геометричних і фізико-механічних параметрів обшивок і підкріплюючих елементів. В наступному, при розгляді чисельного розв'язку задач осесиметричних коливань, будемо виходити з наступних формул для величин різницевих кроків  $\Delta x$  і  $\tau$ .

В матрично-векторному вигляді різницеві рівняння (3.7), (3.11), (3.13) можна представити наступним чином

$$[C]\bar{U} + [M]\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t),$$

де  $[M]$  і  $[C]$  – матриці мас і жорсткості дискретної різницевої системи,  $\bar{U}$  і  $\bar{F}$  - вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження.

Вважаючи, що матриця  $[M]$  не вироджена, запишемо останнє рівняння у вигляді

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t),$$

де матриця  $[D] = [M]^{-1}[C]$ .

В роботі [165] встановлено, що при використанні явної скінчено-різницевої схеми для інтегрування рівнянь необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь є умова наступного вигляду

$$\tau \leq 2/\Omega_{\max} = 2\sqrt{\beta(D)},$$

де  $\Omega_{\max}$  - максимальна частота власних коливань різницевої системи;  $\beta(D)$ - верхня межа спектру матриці  $[D]$ .

Використовуючи для оцінки значення  $\beta(D)$  зверху теорему Гершгоріна, отримаємо

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max_j \sum_j |d_{ij}|,$$

де  $d_{ij}$  - елементи матриці  $[D]$ .

Згідно позначень в рівняннях (3.7), (3.11), (3.13) умова стійкості різницевих рівнянь має вигляд

$$\Delta t \leq 2 / \Omega_{\max} \quad (3.14)$$

де  $\Omega_{\max}$  визначається виходячи з наступних нерівностей

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max i}^2), \quad (3.15)$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max([\Omega_1]^2, [\Omega_2]^2, [\Omega_3]^2) \quad (3.16)$$

$$\Omega_{\max i}^2 \leq \max \Omega_{1i}^2, \quad i = \overline{1, I}. \quad (3.17)$$

Величини  $[\Omega_1]^2, [\Omega_2]^2, [\Omega_3]^2$  визначаються згідно співвідношень

$$[\Omega_1]^2 = \frac{B_{11}}{I_1} \left[ \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + v_{21} \left( \frac{1}{k_2 \Delta s_2} \right) \right],$$

$$[\Omega_2]^2 = \frac{B_{31}}{I_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_2 h} + \frac{4}{(\Delta s_2)^2} \right] + \frac{B_{22}}{I_1} \left[ \frac{1}{k_2^2} + v_{12} \frac{1}{k_2 \Delta s_2} \right],$$

$$[\Omega_3]^2 = \frac{D_{11}}{I_3} \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + \frac{B_{31}}{I_3} \left[ \frac{1}{\Delta s_2 h} + \frac{1}{h^2} \right],$$

де  $k_2, \Delta s_2$  - відповідні максимальні значення на різницевій сітці.

Рівняння коливань  $i$ -го підкріплюючого елемента (3.2), (3.13) не залежать від просторової координати  $s_2$ . Тому, в цьому випадку, при розгляді різницевої умови стійкості (3.14) будемо використовувати співвідношення (3.15), (3.16).

### **3.2. Чисельний алгоритм розв'язку рівнянь коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер**

#### **3.2.1. Чисельний алгоритм знаходження розв'язку в гладкій області оболонки**

Рівняння неосесиметричних коливань дискретно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу (2.33) –(2.385) являють собою систему диференціальних рівнянь в частинних похідних по змінним  $s_1, s_2, t$  при наявності просторових розривів по координатам  $s_1$  і  $s_2$ . Просторовими розривами є лінії проектування центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го повздовжнього ребра по координаті  $s_1$  та  $j$ -го поперечного ребра по координаті  $s_2$  на серединну поверхню циліндричної оболонки еліптичного перерізу. Виходячи з цього, чисельний алгоритм розв'язання задачі теорії циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретного підкріплення будеться наступним чином: шукається розв'язок в гладкій області циліндричної оболонки еліптичного перерізу і на лініях просторових розривів [148]. Різницевий алгоритм заснований на застосуванні інтегро–інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем по просторовим координатам і явній скінчено – різницевій апроксимації по часовій координаті.

Перехід від неперервної системи (2.33) до скінчено – різницевої виконується в 2 етапи:

- 1-ий етап полягає в скінчено – різницевій апроксимації рівнянь коливань (2.33) в зусиллях – моментах.
- 2-ий етап апроксимації рівнянь полягає в скінчено – різницевій апроксимації зусиль – моментів (2.36) і відповідних деформацій (2.39).

Розглянемо область  $D$ , яка задається наступним чином

$$D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq 2\pi A_2, 0 \leq t \leq T\}.$$

В області  $D$  введемо різницеву сітку  $\Omega = \Omega_{\Delta s_1 \Delta s_2} \cdot \Omega_\tau$ , де

$$\Omega_{\Delta s_1 \Delta s_2} = \{(s_{1l}, s_{2m}) = (l\Delta s_1, m\Delta s_2), \Delta s_1 = L/l,$$

$$\Delta s_2 = 2\pi R/M; l = \overline{0, L}; m = \overline{0, M}\},$$

$$\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, \tau = T/N, n = \overline{0, N}\}.$$

Поряд з основною різницевою сіткою, будемо користуватися допоміжними різницевими сітками в дискретних точках  $(s_{1l \pm 1/2}, s_{2m})$ ,  $(s_{1l}, s_{2m \pm 1/2})$ ,  $(s_{1l \pm 1/2}, s_{2m \pm 1/2})$ , де  $s_{1l \pm 1/2} = (l \pm 1/2)\Delta s_1$ ,  $s_{2m \pm 1/2} = (m \pm 1/2)\Delta s_2$ .

Оскільки різницева сітка будується таким чином, щоб точки розривів попадали в цілі вузли, то користуючись допоміжними різницевими сітками, застосуємо інтегро – інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь в області  $\Omega_1$ :

$$\Omega_1 = \left\{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}, s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \right\}, \quad \text{при } t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}.$$

Рівняння коливань (2.33) для гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу при цьому матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt, \\ \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 S) + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt, \\ \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{13}) + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3 \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt, \\ \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt \\ \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 H) + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.18) на вказаних інтервалах, з використанням явної апроксимації по часовій координаті, отримаємо наступні різницеві рівняння, які апроксимують вихідні рівняння (2.33) в гладкій області циліндричної оболонки еліптичного перерізу

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{A_{2l}} \left( \frac{(A_2 T_{11})_{l+1/2,m}^n - (A_2 T_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) + \frac{S_{l,m+1/2}^n - S_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} = \rho h (u_1^n)_{\bar{t}t}, \quad (3.19) \\
& \frac{1}{A_{2l}} \left( \frac{(A_2 S)_{l+1/2,m}^n - (A_2 S)_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) + \frac{T_{22l,m+1/2}^n - T_{22l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + \\
& + k_{2l} \left( \frac{T_{23l,m+1/2}^n + T_{23l,m-1/2}^n}{2} \right) = \rho h (u_2^n)_{\bar{t}t}, \\
& \frac{1}{A_{2l}} \left( \frac{(A_2 T_{13})_{l+1/2,m}^n - (A_2 T_{13})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) + \frac{T_{23l,m+1/2}^n - T_{23l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - k_{2l} \left( \frac{T_{22l,m+1/2}^n + T_{22l,m-1/2}^n}{2} \right) + P_3^n(S_{1l}, S_{2m}, t^n) = \rho h (u_3^n)_{\bar{t}t}, \\
& \frac{1}{A_{2l}} \left( \frac{(A_2 M_{11})_{l+1/2,m}^n - (A_2 M_{11})_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) + \frac{H_{l,m+1/2}^n - H_{l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{T_{13l+1/2,m}^n + T_{13l-1/2,m}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1l,m}^n)_{\bar{t}t}, \\
& \frac{1}{A_{2l}} \left( \frac{(A_2 H)_{l+1/2,m}^n - (A_2 H)_{l-1/2,m}^n}{\Delta s_1} \right) + \frac{M_{22l,m+1/2}^n - M_{22l,m-1/2}^n}{\Delta s_2} - \\
& - \frac{T_{23l,m+1/2}^n + T_{23l,m-1/2}^n}{2} = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2l,m}^n)_{\bar{t}t}.
\end{aligned}$$

Таким чином, в різницевих рівняннях (3.19) компоненти узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)$  віднесені до цілих вузлів різницевої сітки  $\bar{U}_{l,m} = (u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m})$  по просторовим координатам.

В рівняннях (3.19) зусилля – моменти віднесені до різницевої сітки з дробовими індексами  $(s_{1l \pm 1/2}, s_{2m}), (s_{1l}, s_{2m \pm 1/2})$ . Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів в (3.18) рівняння (2.36) інтегруються в областях:  $\Omega_1$ ,

$$\Omega_2 = \left\{ s_{1l-1} \leq s_1 \leq s_{1l}; \quad s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \right\},$$

$$\Omega_3 = \left\{ s_{1l} \leq s_1 \leq s_{1l+1}; \quad s_{2m-1/2} \leq s_2 \leq s_{2m+1/2} \right\},$$

$$\Omega_4 = \left\{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}; \quad s_{2m-1} \leq s_2 \leq s_{2m} \right\},$$

$$\Omega_5 = \left\{ s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}; \quad s_{2m} \leq s_2 \leq s_{2m+1} \right\},$$

при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Для області  $\Omega_2$  маємо наступні співвідношення:

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22}] d\Omega_2 dt, \quad (3.20)$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [S] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_s \varepsilon_{12}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [H] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_s \chi_{12}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{12}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [S + k_2 H] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{13}\varepsilon_{13}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{11}\chi_{11} + D_{12}\chi_{22}] d\Omega_2 dt,$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{22}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{21}\chi_{11} + D_{22}\chi_{22}] d\Omega_2 dt.$$

Аналогічні співвідношення записуються для областей  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$ .

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.20), отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують величини зусиль – моментів з відповідними величинами деформацій

$$T_{11l-1/2,m}^n = B_{11}\varepsilon_{11l-1/2,m}^n + B_{12}\varepsilon_{22l-1/2,m}^n, \quad (3.21)$$

$$T_{12l-1/2,m}^n = S_{l-1/2,m}^n + k_{1l-1/2} H_{l-1/2,m}^n,$$

$$T_{13l-1/2,m}^n = B_{13}\varepsilon_{13l-1/2,m}^n,$$

$$M_{11l-1/2,m}^n = D_{11}\chi_{11l-1/2,m}^n + D_{12}\chi_{22l-1/2,m}^n,$$

$$M_{12l-1/2,m}^n = D_s \chi_{12l-1/2,m}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (2.36) по області  $\Omega_3$  маємо

$$T_{11l+1/2,m}^n = B_{11} \varepsilon_{11l+1/2,m}^n + B_{12} \varepsilon_{22l+1/2,m}^n, \quad (3.22)$$

$$T_{12l+1/2,m}^n = S_{l+1/2,m}^n + k_{1l+1/2} H_{l+1/2,m}^n,$$

$$T_{13l+1/2,m}^n = B_{13} \varepsilon_{13l+1/2,m}^n,$$

$$M_{11l+1/2,m}^n = D_{11} \chi_{11l+1/2,m}^n + D_{12} \chi_{22l+1/2,m}^n,$$

$$M_{12l+1/2,m}^n = D_s \chi_{12l+1/2,m}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (2.36) по області  $\Omega_4$  маємо

$$T_{21l,m-1/2}^n = S_{l,m-1/2}^n + k_{1l} H_{l,m-1/2}^n, \quad (3.23)$$

$$T_{22l,m-1/2}^n = B_{21} \varepsilon_{11l,m-1/2}^n + B_{22} \varepsilon_{22l,m-1/2}^n,$$

$$M_{21l,m-1/2}^n = D_s \chi_{12l,m-1/2}^n,$$

$$M_{22l,m-1/2}^n = D_{21} \chi_{11l,m-1/2}^n + D_{22} \chi_{22l,m-1/2}^n.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (2.36) по області  $\Omega_5$  маємо

$$T_{21l,m+1/2}^n = S_{l,m+1/2}^n + k_{1l} H_{l,m+1/2}^n, \quad (3.24)$$

$$T_{22l,m+1/2}^n = B_{21} \varepsilon_{11l,m+1/2}^n + B_{22} \varepsilon_{22l,m+1/2}^n,$$

$$M_{21l,m+1/2}^n = D_s \chi_{12l,m+1/2}^n,$$

$$M_{22l,m+1/2}^n = D_{21} \chi_{11l,m+1/2}^n + D_{22} \chi_{22l,m+1/2}^n.$$

В різницевих рівняннях (3.19), (3.21) – (3.24) позначення різницевих функцій і різницевих похідних введені згідно [148, 147].

Для того, щоб отримати узгоджені величини деформацій в співвідношеннях (3.21) – (3.24), проінтегруємо вирази для компонент деформацій (2.39) в областях  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$  відповідно при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Після стандартних перетворень в інтегральних співвідношеннях для деформацій в областях  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$  отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують відповідні деформації з компонентами

узагальненого вектора переміщень серединної поверхні гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу.

Для області  $\Omega_2$  маємо наступні різницеві співвідношення:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11l-1/2,m}^n &= \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l-1,m}^n}{\Delta s_1}, \\ \theta_{1l-1/2,m}^n &= \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l-1,m}^n}{\Delta s_1}, \\ \omega_{1l-1/2,m}^n &= \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l-1,m}^n}{\Delta s_1}, \\ \omega_{2l-1/2,m}^n &= \frac{u_{1l-1/2,m+1/2}^n - u_{1l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2}, \\ \omega_{l-1/2,m}^n &= \omega_{1l-1/2,m}^n + \omega_{2l-1/2,m}^n, \\ \varepsilon_{13l-1/2,m}^n &= \varphi_{1l-1/2,m}^n + \theta_{1l-1/2,m}^n, \\ \chi_{11l-1/2,m}^n &= \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta s_1}, \\ \chi_{12l-1/2,m}^n &= \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta s_1} + \frac{\varphi_{1l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{1l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2l-1/2} \omega_{2l-1/2,m}^n, \\ \varepsilon_{22l-1/2,m}^n &= \frac{u_{2l-1/2,m+1/2}^n - u_{2l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2l-1/2} u_{3l-1/2,m}^n, \\ \theta_{2l-1/2,m}^n &= \frac{u_{3l-1/2,m+1/2}^n - u_{3l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2}, \\ \chi_{22l-1/2,m}^n &= \frac{\varphi_{2l-1/2,m+1/2}^n - \varphi_{2l-1/2,m-1/2}^n}{\Delta s_2}.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Аналогічним чином отримаємо різницеві співвідношення для деформацій в областях  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$ ,  $\Omega_5$ .

Детально викладення матеріалу для отримання різницевих співвідношень для зусиль- моментів та величин деформацій викладено в [99,148].

### 3.2.2. Розв'язок на $i$ -й та $j$ -й ліній розривів (для $i$ -го та $j$ -го підкріплюючих ребер)

Розглянемо побудову різницевого алгоритму для  $i$ -го підкріплюючого повздовжнього ребра. Перехід від неперервної системи (2.34) до скінчено – різницевої виконується в 2 етапи:

- 1-ий етап полягає в скінчено – різницевій апроксимації рівнянь коливань (2.34) в зусиллях – моментах.
- 2-ий етап апроксимації рівнянь полягає в скінчено – різницевій апроксимації зусиль – моментів (2.37) і відповідних деформацій (2.40).

Оскільки різницева сітка буде використана таким чином, щоб точки розривів попадали в цілі точки сітки, то по аналогії з різницевою сіткою для гладкої циліндричної оболонки буде використана різницева сітка для  $i$ -го підкріплюючого повздовжнього ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$ , в областях  $\Omega_{1i} = \{s_{1l-1/2} \leq s_1 \leq s_{1l+1/2}\}$ ,  $\Omega_{2i} = \{s_{1l-1} \leq s_1 \leq s_{1l}\}$ ,  $\Omega_{3i} = \{s_{1l} \leq s_1 \leq s_{1l+1}\}$ , при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Рівняння коливань (2.34) по області  $\Omega_{1i}$  для  $i$ -го ребра, при цьому матимуть вигляд

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt, \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [H]_i \right\} d\Omega_{1i} dt &= \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left[ h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt, \\
&\int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [M_{22}]_i \right\} d\Omega_{1i} dt = \\
&= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt.
\end{aligned}$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.26) на вказаних інтервалах, з використанням явної апроксимації по часовій координаті, отримаємо наступні різницеві рівняння, які апроксимують вихідні рівняння (2.34) для  $i$ -го повздовжньо підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$

$$\begin{aligned}
&\frac{T_{11il+1/2}^n - T_{21il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [S]_i^n = \rho_i F_i \left[ (u_{1l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{1l,m}^n)_{tt} \right], \\
&\frac{T_{12il+1/2}^n - T_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [T_{22}]_i^n = \rho_i F_i \left[ (u_{2l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{2l,m}^n)_{tt} \right], \\
&\frac{T_{13il+1/2}^n - T_{13il-1/2}^n}{\Delta s_1} + [T_{23}]_i^n = \rho_i F_i (u_{3l,m}^n)_{tt}, \\
&\frac{M_{11il+1/2}^n - M_{21il-1/2}^n}{\Delta s_1} - T_{13il}^n \pm h_{ci} \left( \frac{T_{11il+1/2}^n - T_{11il-1/2}^n}{\Delta s_1} + k_{1il} T_{13il}^n \right) + [H]_i^n = \\
&= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} (u_{1l,m}^n)_{tt} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) (\varphi_{1l,m}^n)_{tt} \right], \\
&\frac{M_{12il+1/2}^n - M_{12il-1/2}^n}{\Delta s_1} \pm h_{ci} \frac{T_{12ik+1/2}^n - T_{12ik-1/2}^n}{\Delta s_1} + [M_{22}]_i^n = \\
&= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} (u_{2l,m}^n)_{tt} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) (\varphi_{2l,m}^n)_{tt} \right].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Аналогічно до випадку гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу, в різницевих рівняннях (3.27) компоненти узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го ребра

$\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$  віднесені до цілих вузлів різницевої сітки  
 $\bar{U}_{l,m} = (u_{1l,m}, u_{2l,m}, u_{3l,m}, \varphi_{1l,m}, \varphi_{2l,m})$  по просторовим координатам.

В рівняннях (3.27) зусилля – моменти віднесені до різницевої сітки з дробовими індексами  $(s_{1l\pm 1/2}, s_{2m})$ . Для отримання узгоджених різницевих величин зусиль – моментів в (3.27) рівняння (2.37) інтегруються в областях  $\Omega_{2i}$ ,

$\Omega_{3i}$ , при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Для області  $\Omega_{2i}$  маємо співвідношення

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i F_i \varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \quad (3.28)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i F_i \varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{13i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [k_i^2 G_i F_i \varepsilon_{13i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i I_{1i} \chi_{11i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i I_{cri} \chi_{12i}] d\Omega_{2i} dt.$$

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.28), отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують величини зусиль – моментів з відповідними величинами деформацій

$$T_{11il-1/2}^n = E_i F_i \varepsilon_{11il-1/2}^n, \quad (3.29)$$

$$T_{12il-1/2}^n = G_i F_i \varepsilon_{12il-1/2}^n,$$

$$T_{13il-1/2}^n = k_i^2 G_i F_i \varepsilon_{13il-1/2}^n,$$

$$M_{11il-1/2}^n = E_i I_{1i} \chi_{11il-1/2}^n,$$

$$M_{12il-1/2}^n = G_i I_{cri} \chi_{12il-1/2}^n.$$

Аналогічні співвідношення отримуємо в області  $\Omega_{3i}$ .

Для того, щоб отримати узгоджені різницеві величини деформацій в співвідношеннях (3.29), проінтегруємо вирази для компонент деформацій (2.40) відповідно в областях  $\Omega_{2i}$ ,  $\Omega_{3i}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Для області  $\Omega_{2i}$  маємо співвідношення

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [e_{11i}] d\Omega_{2i} dt, \quad (3.30)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [e_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varepsilon_{13i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [\varphi_1 + \theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{1i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[ \frac{\partial u_3}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\theta_{2i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[ \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\chi_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt,$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [\chi_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} \left[ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1} \right] d\Omega_{2i} dt.$$

Після стандартних перетворень в (3.30) отримаємо наступні різницеві співвідношення, які пов'язують відповідні деформації з компонентами узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го ребра.

Виконуючи операцію інтегрування рівнянь (3.30), маємо

$$\varepsilon_{11il-1/2}^n = e_{11il-1/2}^n, \quad (3.31)$$

$$e_{11l-1/2}^n = \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l-1,m}^n}{\Delta s_1} \pm h_{ci} \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta s_1},$$

$$\varepsilon_{12il-1/2}^n = \theta_{2il-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{13il-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{2} + \theta_{1il-1/2}^n, \quad \theta_{1il-1/2}^n = \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l-1,m}^n}{\Delta s_1},$$

$$\theta_{2il-1/2}^n = \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l-1,m}^n}{\Delta s_1} \pm h_{ci} \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta s_1},$$

$$\chi_{11l-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l-1,m}^n}{\Delta s_1}, \quad \chi_{12il-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l-1,m}^n}{\Delta s_1}.$$

Аналогічні різницеві співвідношення для величин деформацій отримаємо для області  $\Omega_{3i}$ .

Побудову різницевого алгоритму для  $j$ -го підкріплюючого поперечного ребра виконується аналогічно алгоритму побудови різницевих рівнянь для  $i$ -го ребра. В результаті маємо наступні різницеві рівняння для  $j$ -го ребра:

- рівняння коливань

$$\frac{T_{21jm+1/2}^n - T_{21jm-1/2}^n}{\Delta s_2} + [T_{11}]_j^n = \rho_j F_j \left[ (u_{1l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{1l,m}^n)_{tt} \right], \quad (3.32)$$

$$\frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2jm} T_{23jm}^n + [S]_j^n =$$

$$= \rho_j F_j \left[ (u_{2l,m}^n)_{tt} \pm h_{ci} (\varphi_{2l,m}^n)_{tt} \right],$$

$$\frac{T_{23jm+1/2}^n - T_{23jm-1/2}^n}{\Delta s_2} - k_{2jm} T_{22jm}^n + [T_{13}]_j^n = \rho_j F_j (u_{3l,m}^n)_{tt},$$

$$\frac{M_{21jm+1/2}^n - M_{21jm-1/2}^n}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{T_{21jm+1/2}^n - T_{21jm-1/2}^n}{\Delta s_2} + [M_{11}]_j^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho_j F_j \left[ \pm h_{cj} \left( u_{1l,m}^n \right)_{tt} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \left( \varphi_{1l,m}^n \right)_{tt} \right], \\
&\frac{M_{22jm+1/2}^n - M_{22jm-1/2}^n}{\Delta s_2} - T_{23jm}^n \pm h_{cj} \left( \frac{T_{22jm+1/2}^n - T_{22jm-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2jm} T_{23jm}^n \right) + [H]_j^n = \\
&= \rho_j F_j \left[ \pm h_{cj} \left( u_{2l,m}^n \right)_{tt} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \left( \varphi_{2l,m}^n \right)_{tt} \right].
\end{aligned}$$

- співвідношення зусилля - моменти-деформації

$$T_{21jm-1/2}^n = G_j F_j \varepsilon_{21jm-1/2}^n, \quad T_{21jm+1/2}^n = G_j F_j \varepsilon_{21jm+1/2}^n, \quad (3.33)$$

$$T_{22jm-1/2}^n = E_j F_j \varepsilon_{22jm-1/2}^n, \quad T_{22jm+1/2}^n = E_j F_j \varepsilon_{22jm+1/2}^n,$$

$$T_{23jm-1/2}^n = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23jm-1/2}^n, \quad T_{23jm+1/2}^n = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23jm+1/2}^n,$$

$$M_{21jm-1/2}^n = G_j I_{crj} \chi_{21jm-1/2}^n, \quad M_{21jm+1/2}^n = G_j I_{crj} \chi_{21jm+1/2}^n,$$

$$M_{22jm-1/2}^n = E_j I_j \chi_{22jm-1/2}^n, \quad M_{22jm+1/2}^n = E_j I_j \chi_{22jm+1/2}^n.$$

- різницеві співвідношення деформації-переміщеня

$$\varepsilon_{22jm-1/2}^n = e_{22jm-1/2}^n, \quad (3.34)$$

$$e_{22jm-1/2}^n = \frac{u_{2l,m}^n - u_{2l,m-1}^n}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta s_2} + k_{2j} u_{3l,m-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{21jm-1/2}^n = \theta_{2jm-1/2}^n,$$

$$\varepsilon_{23jm-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta s_2} + \theta_{1jm-1/2}^n,$$

$$\theta_{1jm-1/2}^n = \frac{u_{3l,m}^n - u_{3l,m-1}^n}{\Delta s_2} - k_{2j} \left( u_{2l,m-1/2}^n \pm h_{cj} \varphi_{2l,m-1/2}^n \right),$$

$$\theta_{2jm-1/2}^n = \frac{u_{1l,m}^n - u_{1l,m-1}^n}{\Delta s_2} \pm h_{cj} \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l,m-1}^n}{\Delta s_2},$$

$$\chi_{21jl-1/2}^n = \frac{\varphi_{1l,m}^n - \varphi_{1l,m-1}^n}{\Delta s_2},$$

$$\chi_{22jl-1/2}^n = \frac{\varphi_{2l,m}^n - \varphi_{2l,m-1}^n}{\Delta s_2}.$$

Таким чином, чисельний алгоритм розв'язування задач теорії циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням повздовжньо – поперечного набору ребер складається з наступних етапів:

1. Знаходиться розв'язок в гладкій області:

- по відомим величинам узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини деформацій по формулам (3.25);
- по обчисленим величинам деформацій згідно формул (3.25) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів по формулам (3.21) – (3.24);
- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів по формулам (3.21) – (3.24) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень серединної поверхні оболонки згідно різницевих рівнянь коливань (3.19) на  $(n+1)$ -му часовому шарі;

2. Знаходження різницевого розв'язку на  $i$ -й лінії розриву вздовж осі  $\alpha_1$ :

- по відомим величинам узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го підкріплюючого ребра на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини деформацій по формулам (3.31);
- по обчисленим величинам деформацій згідно формул (3.31) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для  $i$ -го підкріплюючого ребра по формулам (3.29);
- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів по формулам (3.29) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $i$ -го підкріплюючого ребра згідно різницевих рівнянь коливань (3.27) на  $(n+1)$ -му часовому шарі;

3. Знаходження різницевого розв'язку на  $j$ -й лінії розриву вздовж осі  $\alpha_2$ :

- по відомим величинам узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $j$ -го підкріплюючого ребра на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини деформацій по формулам (3.34);
- по обчисленим величинам деформацій згідно формул (3.34) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини зусиль – моментів для  $j$ -го підкріплюючого ребра по формулам (3.33);
- виходячи з отриманих величин зусиль – моментів по формулам (3.33) на  $n$ -му часовому шарі знаходяться величини узагальненого вектора переміщень центрів ваги поперечних перерізів  $j$ -го підкріплюючого ребра згідно різницевих рівнянь коливань (3.32) на  $(n+1)$ -му часовому шарі;

### ***3.2.3. Теоретичні дослідження стійкості різницевих схем для рівнянь коливань дискретно підкріплених неоднорідних циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Загальний випадок***

Скінчено – різницеві схеми, які апроксимують вихідні рівняння (2.33) – (2.41), явні по часовій координаті, тому вони умовно стійкі по просторовим і часовій координатам. У зв'язку з цим виникає необхідність провести дослідження на стійкість різницевих схем.

Оскільки скінчено – різницеві схеми умовно стійкі, то існує залежність між величинами  $\tau$  і величинами  $\Delta s_1$ ,  $\Delta s_2$  в залежності від геометричних і фізико – механічних параметрів гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу і підкріплюючих ребер, при яких обчислювальний процес є стійким.

Представимо різницеві рівняння (3.19) – (3.34) в матрично – векторній формі

$$[C]\bar{U} + [M] \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = \bar{F}(t), \quad (3.35)$$

де  $[C]$  і  $[M]$  – матриці мас і жорсткостей дискретної різницевої системи;  $\bar{U}$  і  $\bar{F}$  – вектори дискретних переміщень і зовнішнього навантаження.

Припускаючи, що матриця  $[M]$  невироджена, запишемо рівняння (3.35) у вигляді

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1}\bar{F}(t), \quad (3.36)$$

де матриця  $[D] = [M]^{-1}[C]$ .

В роботі Г.І Марчука [165] встановлено, що необхідною умовою стійкості різницевих рівнянь, при використанні явної скінчено – різницевої схеми для інтегрування рівнянь коливань є умова вигляду

$$\tau \leq 2/\Omega_{\max} = \sqrt{\beta(D)}, \quad (3.37)$$

де  $\Omega_{\max}$  – оцінка максимальних частот власних коливань різницевої системи;

$\beta(D)$  – верхня границя спектру матриці  $[D]$ .

Для оцінки верхнього значення  $\beta(D)$  скористаємося теоремою Гершгоріна і отримаємо

$$\beta = \Omega_{\max}^2 \leq \max_j |d_{ij}|, \quad (3.38)$$

де  $d_{ij}$  – елементи матриці  $[D]$ .

Враховуючи позначення в формулах (3.19) – (3.34) та вираз (3.38), умова стійкості різницевих рівнянь (3.37) матиме вигляд

$$\tau \leq 2/\Omega_{\max},$$

де  $\Omega_{\max}$  визначається з наступних нерівностей

$$\Omega_{\max}^2 \leq \max(\Omega_{\max 0}^2, \Omega_{\max i}^2, \Omega_{\max j}^2),$$

$$\Omega_{\max 0}^2 \leq \max(\Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, \Omega_4^2, \Omega_5^2),$$

$$\Omega_{\max i}^2 \leq \max(\Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2), \quad i = \overline{1, I},$$

$$\Omega_{\max j}^2 \leq \max(\Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2, \Omega_{5j}^2), \quad j = \overline{1, J},$$

$$\text{де величини } \Omega_1^2, \Omega_2^2, \Omega_3^2, \Omega_4^2, \Omega_5^2, \Omega_{1i}^2, \Omega_{2i}^2, \Omega_{3i}^2, \Omega_{4i}^2, \Omega_{5i}^2,$$

$\Omega_{1j}^2, \Omega_{2j}^2, \Omega_{3j}^2, \Omega_{4j}^2, \Omega_{5j}^2$  визначаються з наступних співвідношень

$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \left[ \frac{4}{(\Delta s_1)^2} + \nu_{21} \left( \frac{1}{k_2 \Delta s_1} + \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_2)^2} \right] \right\}, \\ \Omega_2^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{E_1} \left[ \frac{1}{k_2 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + \nu_{12} \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{k_2 \Delta s_2} + \frac{1}{k_2 h} - \frac{1}{k_2^2} \right] \right\}, \\ \Omega_3^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 h} + \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{E_1} \left[ \frac{1}{k_2^2} + \frac{1}{k \Delta s_2} + \nu_{12} \frac{1}{k \Delta s_1} \right] \right\}, \\ \Omega_4^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \left[ \nu_{12} \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_2)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 h} + \frac{1}{h^2} \right] \right\}, \\ \Omega_5^2 &= \frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left\{ \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} + \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{E_2}{E_1} \left[ \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + \nu_{12} \frac{1}{\Delta s_1 \Delta s_2} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{12G_{13}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \left[ \frac{1}{h\Delta s_2} + \frac{1}{kh} - \frac{1}{h^2} \right] \Bigg\};$$

$$\rho_i F_i \Omega_{1i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{4i}^2 = E_i F_i \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \pm E_i F_i h_i \frac{1}{h(\Delta s_1)^2},$$

$$\rho_i F_i \Omega_{2i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{5i}^2 = G_i F_i \frac{4}{(\Delta s_1)^2} \pm G_i F_i h_i \frac{1}{h(\Delta s_1)^2},$$

$$\rho_i F_i \Omega_{3i}^2 = k_i^2 G_i F_i \left[ \frac{4}{(\Delta s_1)^2} + \frac{1}{\Delta s_1 h} \right],$$

$$\rho_i F_i \left( h_i^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \Omega_{4i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{1i}^2 = E_i F_i I_{1i} \frac{4}{(\Delta s_1)^2} + k_i^2 G_i F_i \left( \frac{h}{\Delta s_1} + 1 \right),$$

$$\rho_i F_i \left( h_i^2 + \frac{I_{cri}}{F_i} \right) \Omega_{5i}^2 \pm \rho_i F_i h_i \Omega_{2i}^2 = G_i I_{cri} \frac{4}{(\Delta s_1)^2};$$

$$\rho_j F_j \Omega_{1j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{4j}^2 = G_j F_j \frac{4}{(\Delta s_2)^2} \pm G_j F_j h_j \frac{1}{h(\Delta s_2)^2},$$

$$\rho_j F_j \Omega_{2j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{5j}^2 = E_j F_j \frac{4}{(\Delta s_2)^2} \pm E_j F_j h_j \frac{1}{h(\Delta s_2)^2},$$

$$\rho_j F_j \Omega_{3j}^2 = k_j^2 G_j F_j \left[ \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + \frac{1}{h \Delta s_2} \right],$$

$$\rho_j F_j \left( h_j^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \Omega_{4j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{1j}^2 = G_j I_{crj} \frac{4}{(\Delta s_2)^2},$$

$$\rho_j F_j \left( h_j^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \Omega_{5j}^2 \pm \rho_j F_j h_j \Omega_{2j}^2 = E_j I_{2j} \frac{4}{(\Delta s_2)^2} + k_j^2 G_j F_j \left( \frac{h}{\Delta s_2} + 1 - \frac{h}{k_{2j}} \right).$$

### ***Висновки до третього розділу***

В третьому розділі представлені чисельні алгоритми розв'язування задач неосесиметричних коливань теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер. окремо

розглянуто, як частинний випадок, рівняння коливань у випадку плоскої задачі теорії циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер. Різницевий алгоритм заснований на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінчено – різницевих схем по просторовим координатам і явній скінчено – різницевій апроксимації по часовій координаті. Побудовано чисельний алгоритм розв'язування задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Виходячи з того, що явні скінченно – різницеві схеми є умовно стійкими, то для різницевих рівнянь теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу проведено дослідження стійкості відповідних рівнянь і отримано необхідну умову стійкості різницевих рівнянь.

## РОЗДІЛ 4

### **ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ВРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОГО РОЗМІЩЕННЯ РЕБЕР ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

В даному розділі наведені розв'язки конкретних задач динамічного деформування підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при неосесиметричних нестационарних розподілених навантаженнях. Досліджуються закономірності протікання хвильових процесів в оболонкових структурах з різними фізико – механічними параметрами. Дослідження проводились з врахуванням дискретного розміщення ребер на оболонках при різних граничних умовах. Проводиться аналіз розв'язку плоскої динамічної задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях, динамічна поведінка з поздовжньо підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу, динамічна поведінка поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу, динамічна поведінка неоднорідної циліндричної оболонки еліптичного перерізу з поздовжньо-поперечним набором підкріплюючих елементів.

Побудовані чисельні алгоритми розв'язку задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу відпрацьовуються на тестових розрахунках, а також перевіряються на практичну збіжність.

#### 4.1. Розв'язок плоскої динамічної задачі теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях

Розглядається нескінченна повздовжньо підкріплена циліндрична оболонка еліптичного перерізу при дії розподіленого внутрішнього навантаження  $P_3(s_2, t)$ , де  $s_2$  і  $t$  – просторова та часова координати. При постановці враховується дискретне розміщення повздовжніх ребер. Повна постановка задачі приведена в розділі 2. Алгоритм розв'язку задачі наведено в розділі 3.

Для випадку плоскої задачі рівняння коливань мають вигляд:

- в гладкій області

$$\frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

- на  $i$ -й лінії просторового розриву (лінія проектування центру ваги поперечного перерізу  $i$ -го ребра на серединну поверхню циліндричної оболонки)

$$[T_{22}]_i = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \quad (4.2)$$

$$[T_{23}]_i = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$[M_{22}]_i = \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( l_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

В рівняннях (4.1), (4.2) позначення введені згідно розділу 2.

Як числовий приклад, розглядалася плоска задача динамічної поведінки повздовжньо підкріпленої ребрами циліндричної оболонки еліптичного перерізу при дії розподіленого внутрішнього навантаження. Повздовжні ребра розташовані в перерізах  $\alpha_{2i} = \frac{\pi}{4} i$ ,  $i = \overline{0, 7}$  (оболонка підкріплена 8-ма ребрами).

Розподілене імпульсне навантаження  $P_3(s_2, t)$  задавалося наступним чином

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

де  $A$  – амплітуда навантаження,  $T$  – тривалість навантаження. Задача розв'язувалася при наступних геометричних та фізико – механічних параметрах оболонки:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $b/h = 10$ ;  $E_1/A = 7 \cdot 10^4$ ;  $T = 2,5b/c_1$ ;  $c_1^2 = E_1/[\rho(1-\nu_1^2)]$ . Для підкрілюючих ребер покладалося  $E_i = E_1$ ;  $F_i = a_i h_i$ ;  $a_i = h$ ;  $h_i = 2h$ . Параметри еліптичності наступні: 1)  $a/b = 1$ ; 2)  $a/b = 1,1$ ; 3)  $a/b = 1,2$ .

Розрахунки проводилися на часовому інтервалі  $0 \leq t \leq 80T$ .

На рис. 4.1, 4.2 приведено результати чисельних розрахунків для величин  $u_3$  та  $\varepsilon_{22}$  відповідно вздовж координати  $s_2$ ,  $0 \leq s_2 \leq A_2\pi/2$  (в силу симетрії розташування ребер). Враховуючи динамічний характер розподілу шуканих величин по просторовій координаті  $s_2$  та часу  $t$ , проведено аналіз напружене – деформованого стану вихідної конструкції для часу досягнення ними максимальних по модулю величин. На рис. 4.2 крива 1 відповідає величині переміщення  $u_3$  в момент часу  $t = 7T$  для варіанту  $a/b = 1$ . Крива 2 відповідає величині  $u_3$  в момент часу  $t = 10,25T$  для варіанту  $a/b = 1,1$ . Як бачимо, невелике збільшення величини  $a/b$  приводить до значного збільшення величини  $u_3$  по максимальним величинам. На рис. 3 приведені залежності величини  $\varepsilon_{22}$  по просторовій координаті. Крива 1 відповідає часу  $t = 13,75T$  ( $a/b = 1$ ), крива 2 –  $t = 4,25T$  ( $a/b = 1,1$ ), крива 3 –  $t = 11,5T$  ( $a/b = 1,2$ ).

На рис. 4.3 приведено залежності величин прогину  $u_3$  по часу  $t$  в точці  $s_2 = 0$  на часовому інтервалі  $0 \leq t \leq 20T$ . Крива 1 відповідає випадку  $a/b = 1$ ; крива 2 – випадку  $a/b = 1,1$ ; крива 3 –  $a/b = 1,2$ . Чітко спостерігається збільшення величини переміщення  $u_3$  при збільшенні величини відношення  $a/b$ .

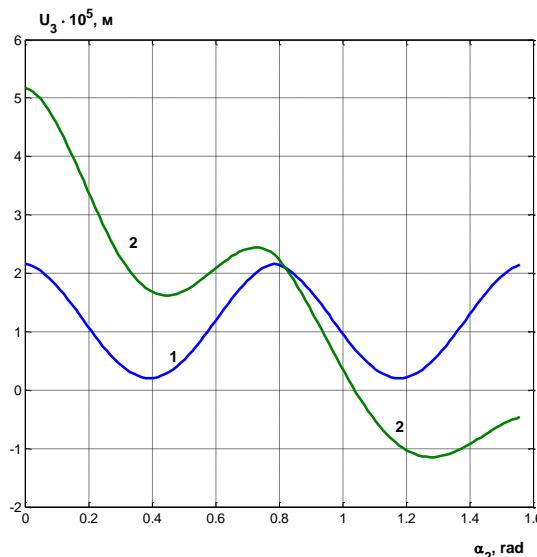


Рис.4.1. Залежність переміщення  $u_3$  від величини  $\alpha_2$

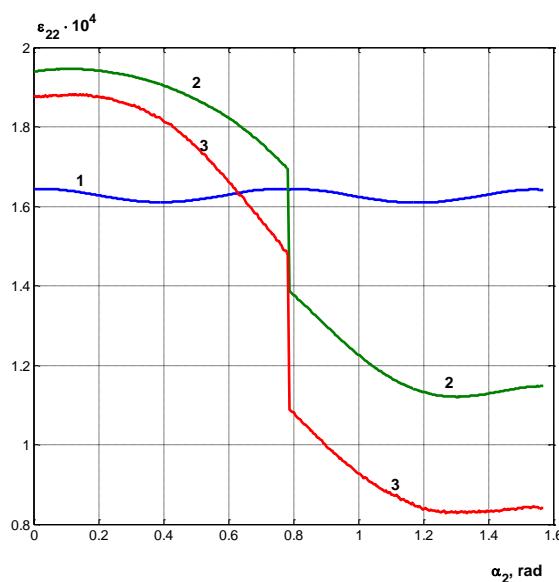


Рис.4.2. Залежність деформації  $\varepsilon_{22}$  від величини  $\alpha_2$

Як бачимо з приведених результатів, величина  $a/b$  в підкріплених оболонках суттєво впливає на розподіл величин  $u_3$  та  $\varepsilon_{22}$  по просторовій та часовій координаті. Спостерігаються не тільки кількісні зміни по відношенню до задачі коливань підкріпленої оболонки кругового перерізу (рис. 4.2), але і

якісні. На лінії контакту оболонка – ребро у випадку циліндричної оболонки еліптичного перерізу для величин  $\varepsilon_{22}$  спостерігається просторовий розрив (рис.4.1).

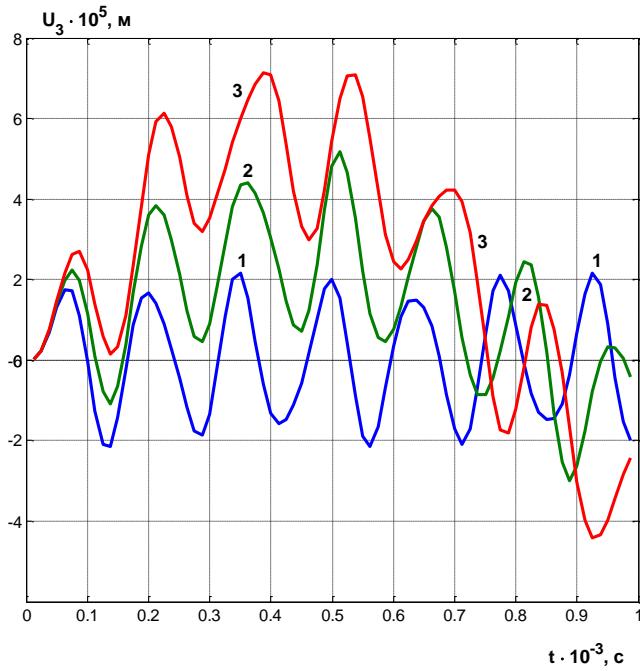


Рис.4.3. Залежність переміщення  $u_3$  від часу в перерізі  $\alpha_2 = 0$

#### 4.2. Динамічна поведінка поздовжньо підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу

Розглянута задача вимушених коливань підкріпленої поздовжніми ребрами циліндричної оболонки еліптичного перерізу під дією нестационарного навантаження.

Для гладкої циліндричної оболонки еліптичного перерізу рівняння коливань мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} &= \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

Рівняння коливань  $i$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S] &= \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}] &= \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}] &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13} + [H] &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right], \\ \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} - T_{23} + [M_{22}] &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Позначення величин в рівняннях (4.3), (4.4) приймаються згідно згаданої розділу 2.

Як числовий приклад розглядалась задача динамічної поведінки повздовжньо підкріпленими ребрами циліндричної панелі еліптичного перерізу при розподіленому внутрішньому імпульсному навантаженні. Покладалось, що всі сторони циліндричної панелі жорстко защемлені. Повздовжне ребро при  $0 \leq s_1 \leq L$  розміщене в перерізі  $s_2 = 0$ .

Розподілене імпульсне навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$  задавалось наступним чином

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

де  $A$  - амплітуда навантаження,  $T$  - часовий інтервал навантаження. В розрахунках покладалось  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Вирішувалась задача з наступними геометричними і фізико-механічними параметрами для оболонки:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $h = 10^{-2}$  м;  $L = 0,4$  м. Параметри еліптичного поперечного перерізу бралися наступні:

1)  $a=b=0,1$ ; 2)  $a=1,1b$ ; 3)  $a=1,2b$ . Для підкріплюючого ребра покладалось:  $E_i = E$ ;  $F_i = a_i h_i$ ;  $a_i = h$ ;  $h_i = 2h$ .

Були проведені розрахунки для трьох варіантів еліптичного поперечного перетину циліндричної панелі: 1)  $a=b$ ; 2)  $a=1,1b$ ; 3)  $a=1,2b$ . Розрахунки проводились в області  $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \pi / 8\}$ . На рис. 4.4.- 4.6. приведені результати числових розрахунків для величини  $u_3$ . Рис. 4.4. відповідає залежності величини  $u_3$  в перетині  $s_2 = 0$  (місце розміщення підкріплюючого ребра) вздовж координати  $s_1 - 0 \leq s_1 \leq L$  в момент часу  $t = 2,5T$ . Рис. 4.5. відповідає залежності величини  $u_3$  в перетині  $s_2 = A_2 \pi / 16$  вздовж координати  $s_1$  в момент часу  $t = 4,5T$ .

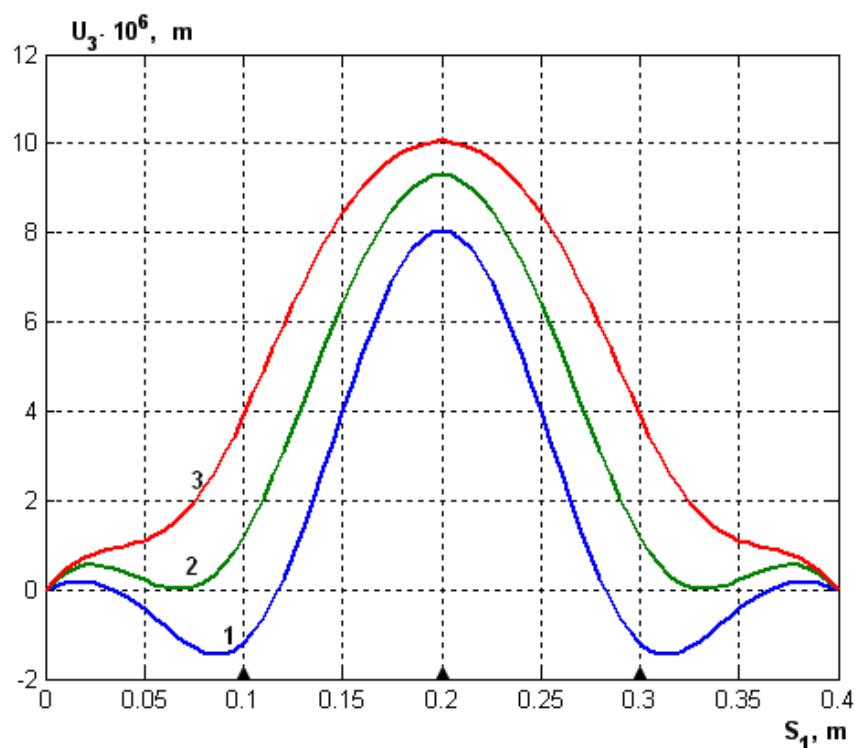


Рис. 4.4. Залежність переміщення  $u_3$  по просторовій координаті  $s_1$  в перетині  $s_2 = 0$  в момент часу  $t = 2,5T$

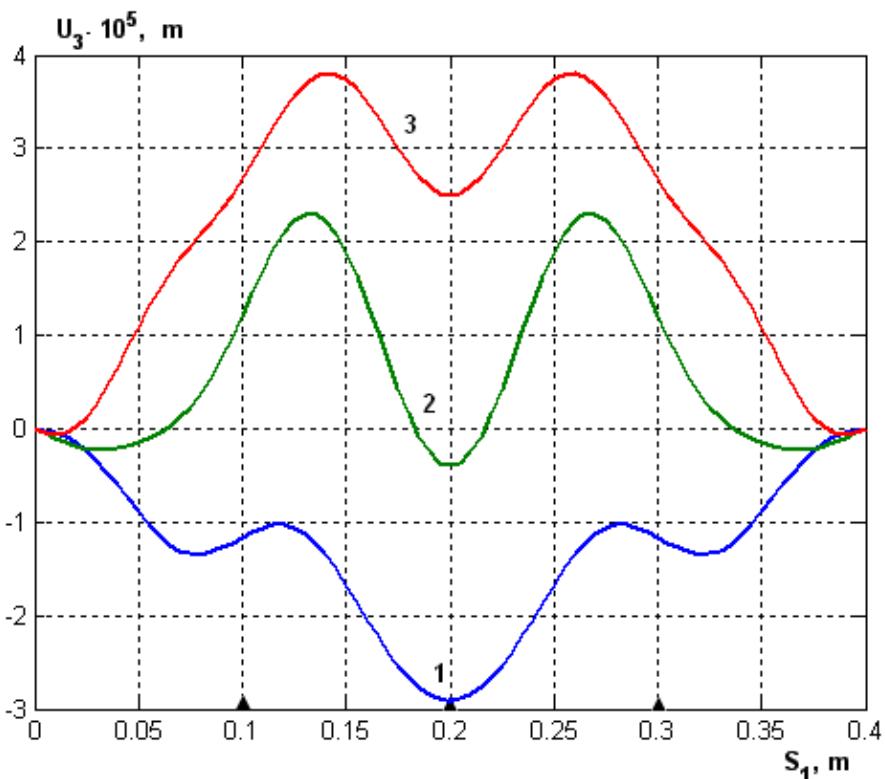


Рис. 4.5. Залежність переміщення  $u_3$  по просторовій координаті  $s_1$  в перетині  $s_2 = A_2\pi/16$  в момент часу  $t = 4,5T$

Розрахунки показали, що величини  $u_3$  в вказані моменти часу для даних перетинів досягають максимальні значення на досліджуваному проміжку часу (обчислення проводились для часу  $0 \leq t \leq 40T$ ). Позначення на рис.4.4. і рис.4.5. наступні: крива 1 відповідає випадку  $a/b = 1$ ; крива 2 -  $a/b = 1,1$ ; крива 3 -  $a/b = 1,2$ . На Рис.4.6. приведені залежності величин  $u_3$  від часу  $t$  в точці  $s_1 = L/2$ ,  $s_2 = 0$  (в точні середини підкріплюючого ребра). Крива 1 відповідає випадку  $a/b = 1$ ; крива 2 -  $a/b = 1,1$ .

На рис. 4.7.- 4.9 представлена залежності кінематичних ( $U_3, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ ) та силових параметрів ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}$ ) для різних значень величини  $a/b$  в різні моменти часу. В зв'язку з тим, що вихідна модель теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу є багато параметричною, то будемо розглядати величини прогинів деформацій та напружень в моменти часу, коли ці величини досягають максимальних значень (по модулях).

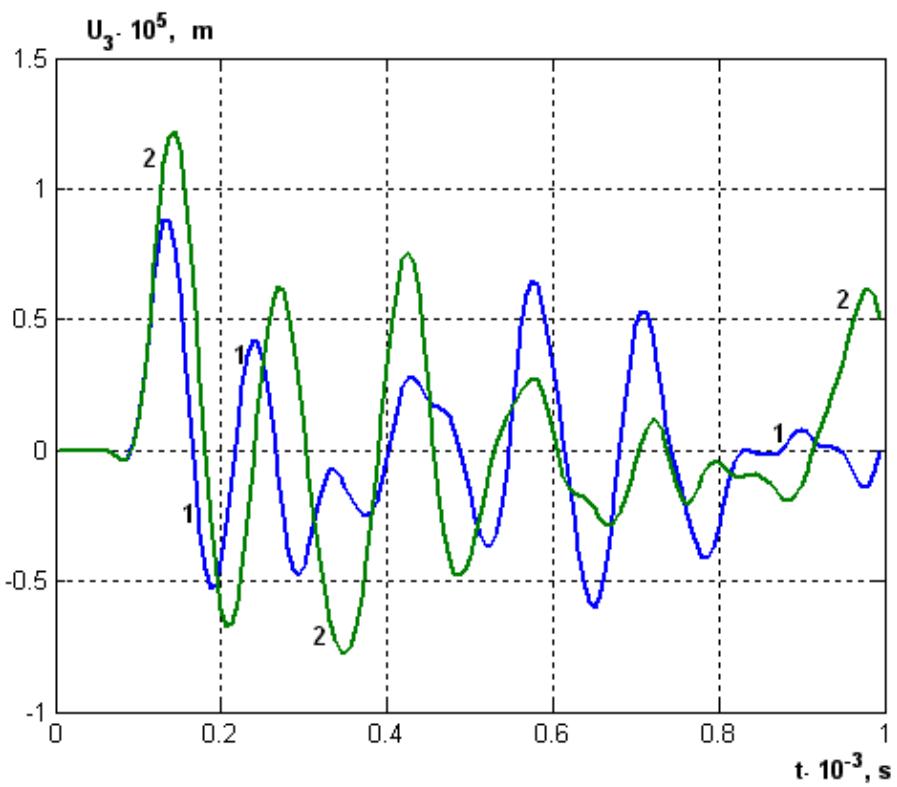


Рис.4.6. Залежність величини  $u_3$  в перетині  $s_2 = 0$   
по часовій координаті  $t$

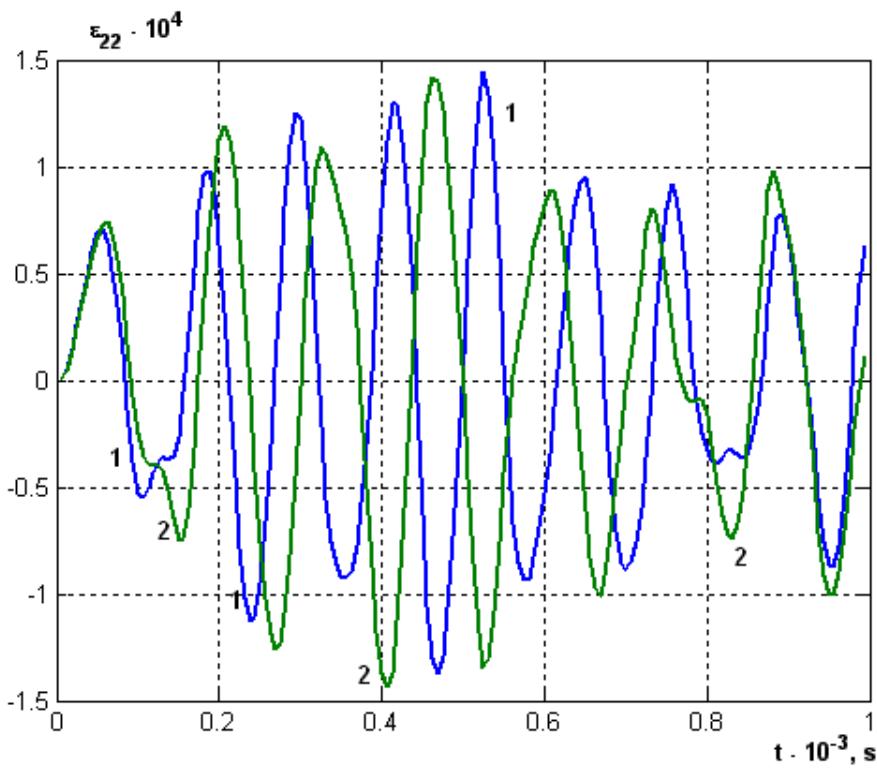


Рис. 4.7. Залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від часової координати  $t$  в точці  
( $s_1 = L/2$ ;  $s_2 = 0$ ) при різних значеннях відношення  $a/b$

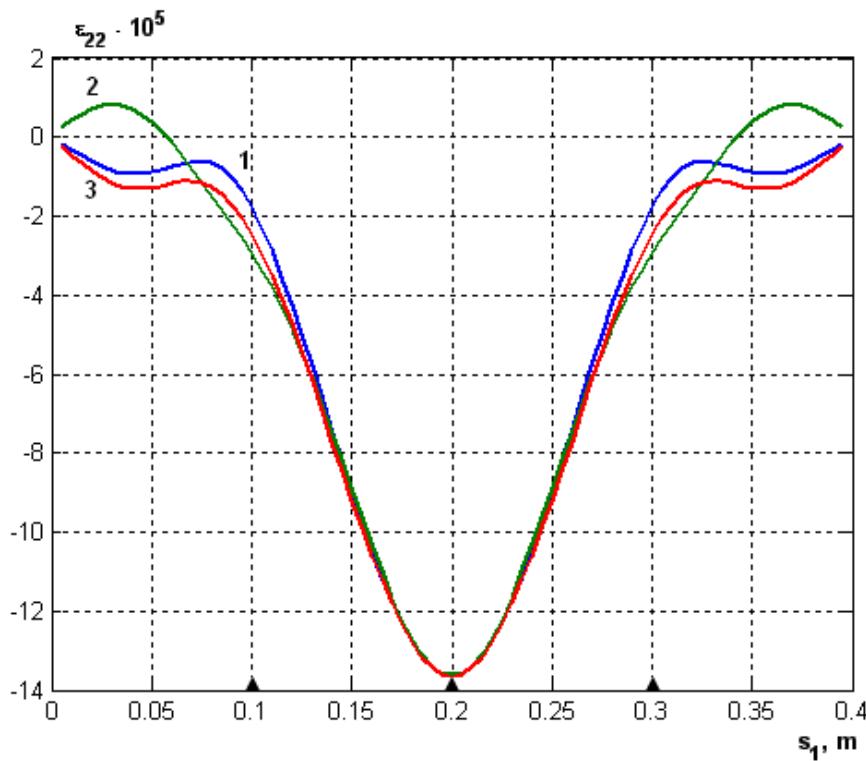


Рис. 4.8. Залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі  $s_2 = A_2\pi/16$  при різних значеннях відношення  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

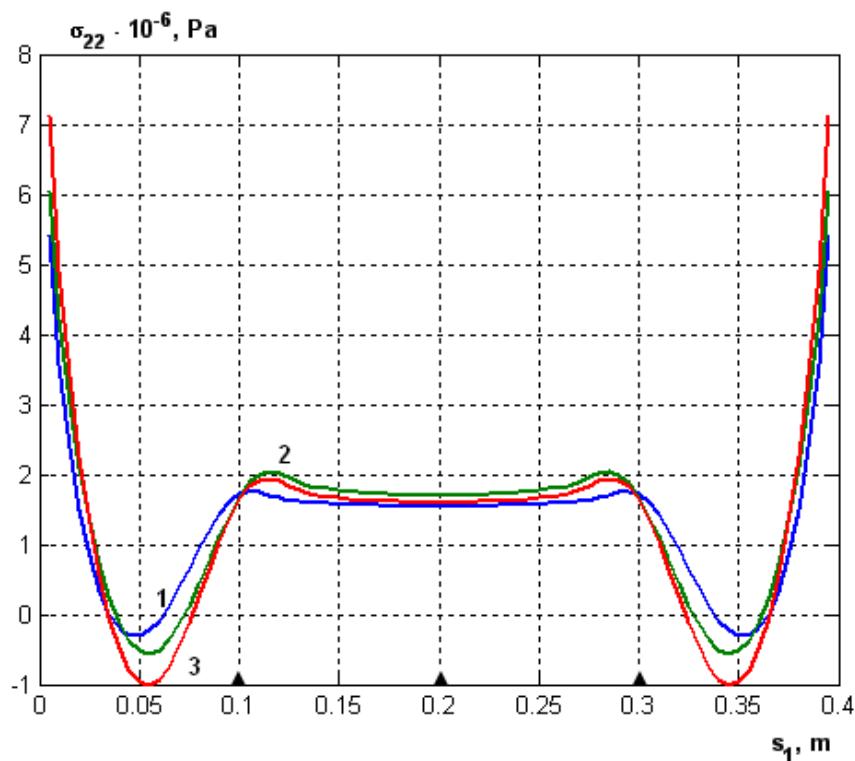


Рис. 4.9. Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі  $s_2 = 0$  при різних значеннях відношення  $a/b$  в момент часу  $t = T$ .

Індексне позначення 1, 2, 3 відповідає вище заданому позначенню  
 $(1 - a/b = 1; 2 - a/b = 1,1; 3 - a/b = 1,2)$ .

На рис. 4.7 подано залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від часової координати  $t$  в точці ( $s_1 = L/2$ ;  $s_2 = 0$ ) при різних значеннях відношення  $a/b$ .

На рис. 4.8 приведено залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі  $s_2 = A_2\pi/16$  при різних значеннях відношення  $a/b$  в момент часу  $t = 9T$  і моменти досягнення максимальних величин .

Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі  $s_2 = 0$  при різних значеннях відношення  $a/b$  в момент часу  $t = T$  показано на рис. 4.9.

### 4.3. Динамічна поведінка поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу

Розглянута задача вимушених коливань підкріпленої поперечними ребрами циліндричної панелі еліптичного перерізу під дією нестационарного навантаження.

Для гладкої циліндричної оболонки еліптичної перерізу рівняння коливань мають вигляд

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

Рівняння коливань  $j$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_2$  мають вигляд:

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}] = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left( \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right).$$

Позначення величин в (4.5), (4.6) приймаються згідно позначень розділу 2.

Як числовий приклад розглядалась задача вимушених коливань підкріпленої поперечними ребрами циліндричної панелі еліптичного перерізу з жорстко защемленими краями в області  $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2\pi/8\}$  під дією нестационарного розподіленого нормального навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$ .

В розрахунках покладалось  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Задача розглядалась при наступних геометричних і фізико – механічних параметрах вихідної конструкції:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $h = 10^{-2}$  м;  $L = 0,4$  м. Параметри еліптичного перерізу панелі та позначення бралися згідно попереднього параграфу 4.2.

Поперечні підкріплюючі елементи розміщувались вздовж по координаті  $s_2$ . Поперечні підкріплюючі ребра розташовані в перерізах  $s_{1j} = iL/4, i = \overline{1,3}$ . Місця розташування поперечних підкріплень по осі  $s_1$  на рисунках позначено чорними трикутниками.

На рисунках 4.10 – 4.13 приведені найбільш характерні криві для величин  $\varepsilon_{11}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , які дозволяють проводити аналіз напруженого – деформованого стану досліджуваної структури.

Рис. 4.10 відповідає залежностям величин  $\varepsilon_{11}$  від просторової координати  $s_1$  відповідно для різних значень  $a/b$  в моменти часу досягнення ними максимальних величин.

На рис. 4.11, 4.13 наведено величини  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{22}$  по просторовій координаті  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин. Рис. 4.12, відповідає величинам  $\sigma_{11}$  по просторовій координаті  $s_1$  в перерізі  $s_2 = 0$  для різних значень  $a/b$  в момент часу  $t = 17,75T$ . Як слідує з приведеного графічного матеріалу, можна візуально визначити місце розташування підкріплюючих ребер в перерізах.

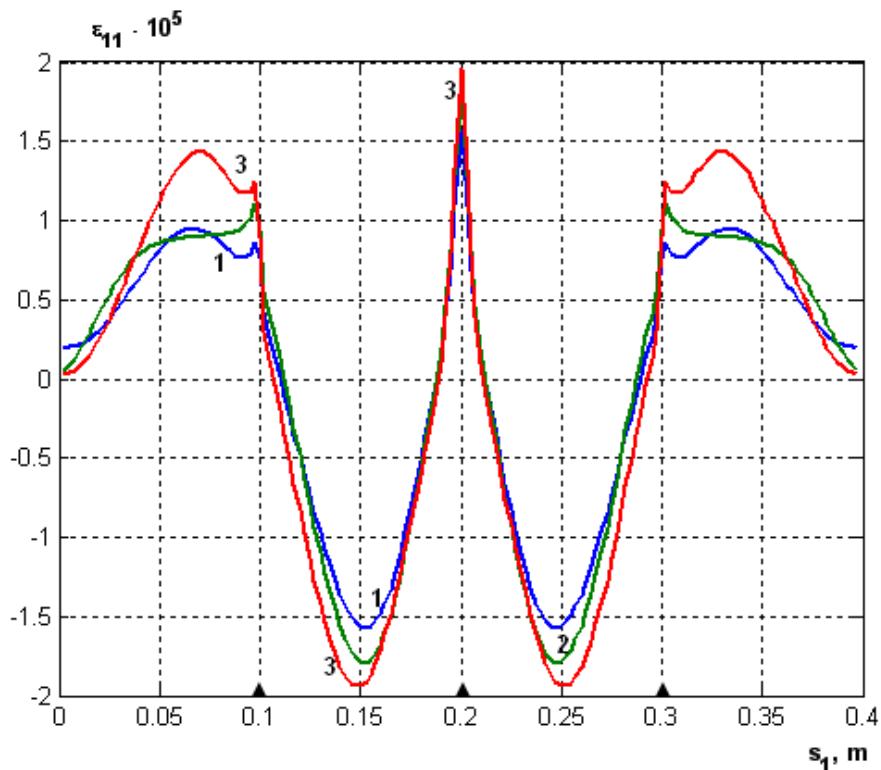


Рис. 4.10. Залежність величини  $\varepsilon_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

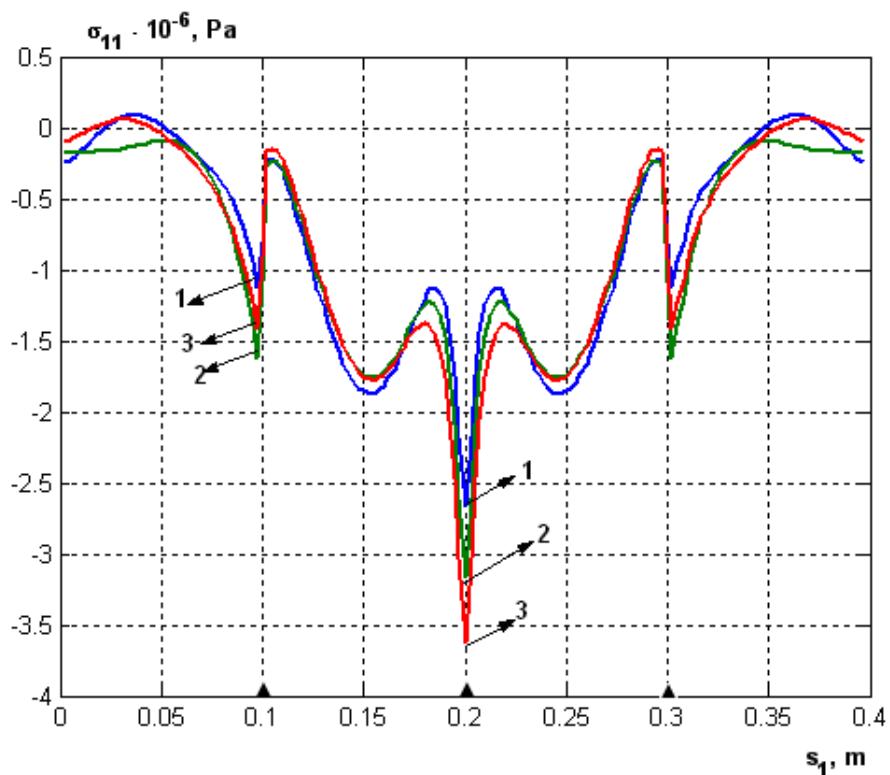


Рис. 4.11. Залежність величини  $\sigma_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

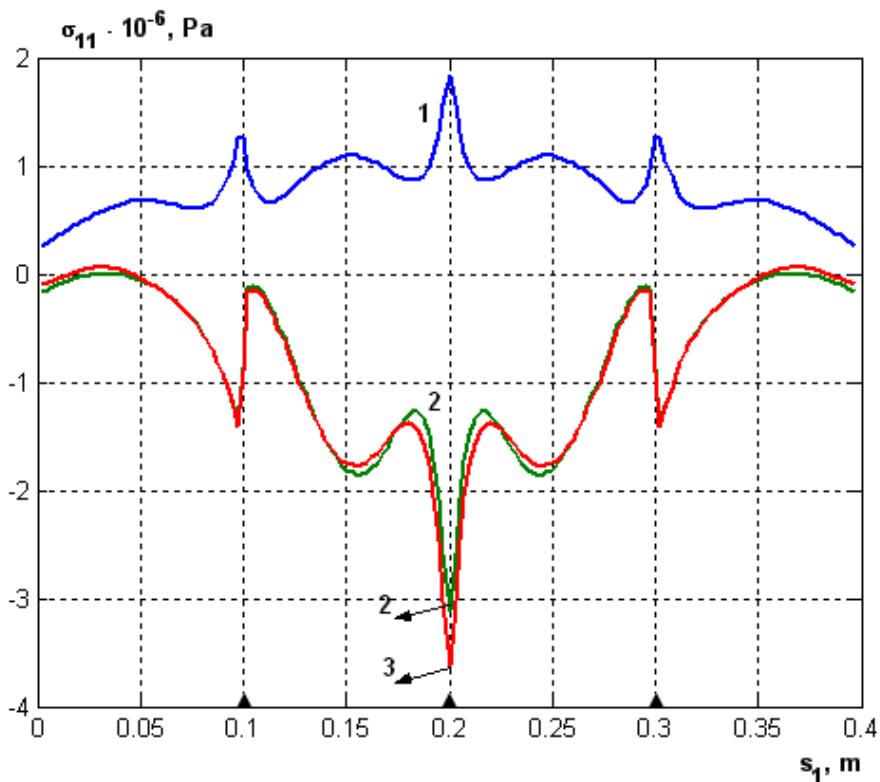


Рис. 4.12. Залежність величини  $\sigma_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в момент часу  $t = 17,75T$

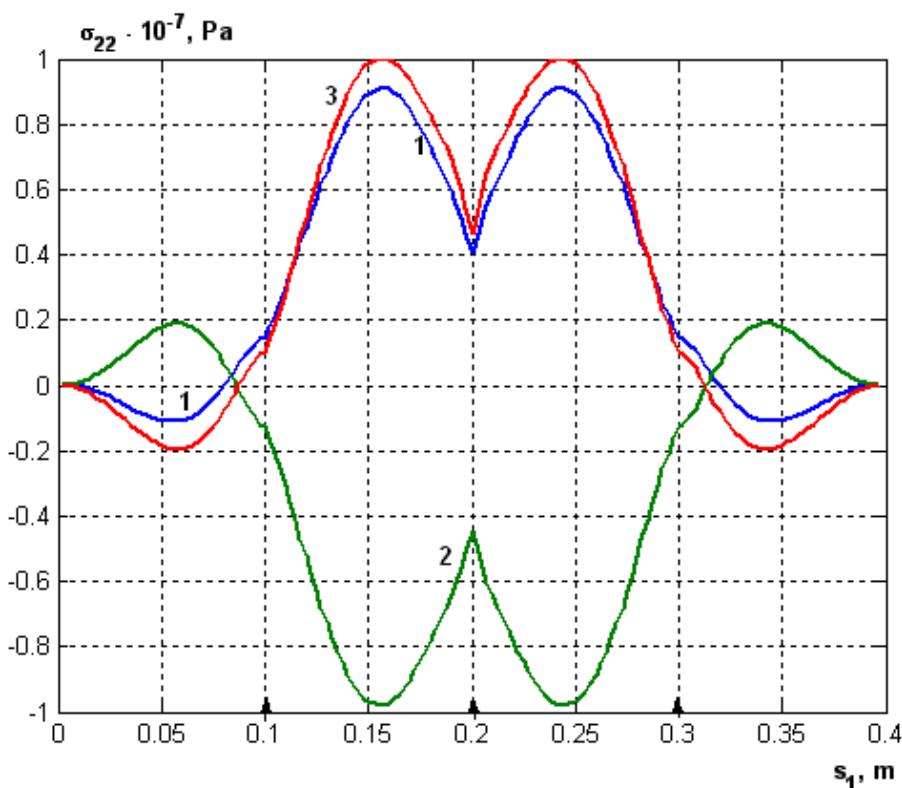


Рис. 4.13. Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

#### 4.4. Динамічна поведінка неоднорідної циліндричної оболонки еліптичного перерізу з поздовжньо-поперечним набором підкріплюючих елементів

Розглянута задача вимушених коливань підкріпленої поперечними і поздовжніми ребрами циліндричної панелі еліптичного перерізу під дією нестационарного навантаження.

Для гладкої циліндричної оболонки еліптичної перерізу рівняння коливань мають вигляд 4.3. Рівняння коливань  $i$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_1$  мають вигляд 4.4. Рівняння коливань  $j$ -го дискретно підкріплюючого ребра, направленого вздовж осі  $\alpha_2$  мають вигляд 4.6.

Як числовий приклад розглядалась задача вимушених коливань підкріпленої поздовжніми і поперечними ребрами циліндричної панелі еліптичного перерізу з жорстко защемленими краями в області  $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2\pi/8\}$  під дією нестационарного розподіленого нормальногонавантаження.  $P_3(s_1, s_2, t)$ . Формула для навантаження  $P_3(s_1, s_2, t)$  задавалась згідно матеріалам попередніх параграфів 4.2, 4.3.

В розрахунках покладалось  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Задача розглядалась при наступних геометричних і фізико – механічних параметрах вихідної конструкції:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $h = 10^{-2}$  м;  $L = 0,4$  м.

Поздовжні підкріплюючі елементи розміщувались вздовж по координаті  $s_1$  в перерізі  $s_2 = 0$ . Поперечні підкріплюючі елементи розміщувались вздовж по координаті  $s_2$  в перерізах  $s_{1j} = iL/4, i = \overline{1, 3}$ .

На рисунках 4.14 – 4.22 приведені найбільш характерні криві для величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , які дозволяють проводити аналіз напружено – деформованого стану досліджуваної структури.

На рисунках 4.14. - 4.18. приведені криві для різних значень  $a/b$  ( $a/b = 1; 1.1; 1.2$ ). Рис. 4.14. відповідає залежностям величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин.

Рис. 4.15 – 4.16 відповідає аналогічним залежностям величин  $\varepsilon_{11}$  і  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$  відповідно для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

Рис. 4.17, 4.18 – величин  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{22}$  по просторовій координаті  $s_1$  у для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин.

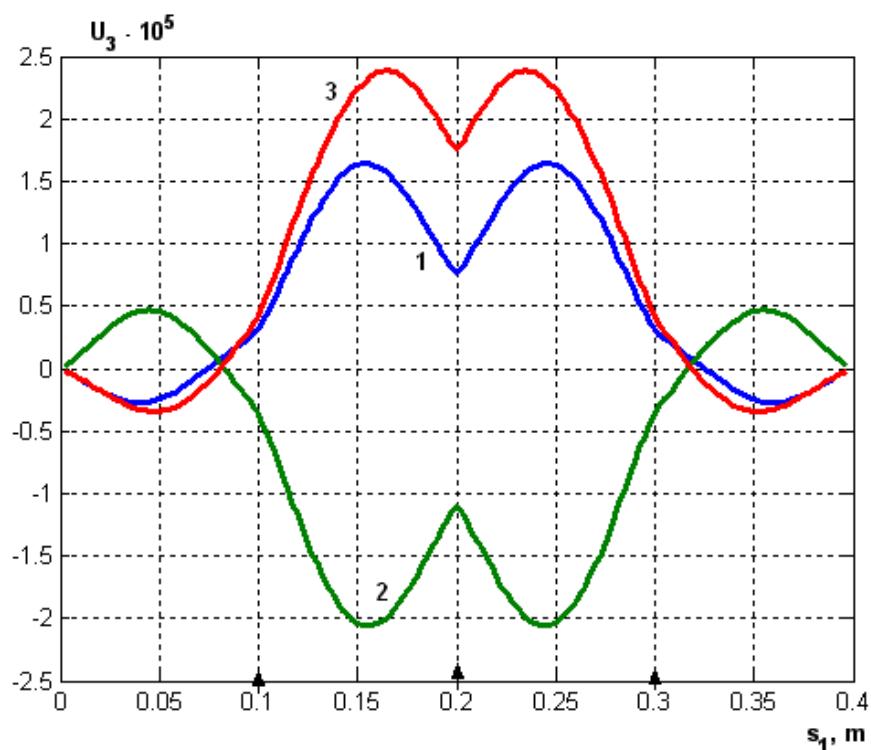


Рис. 4.14. Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин

$$(a/b = 1; 1.1; 1.2)$$

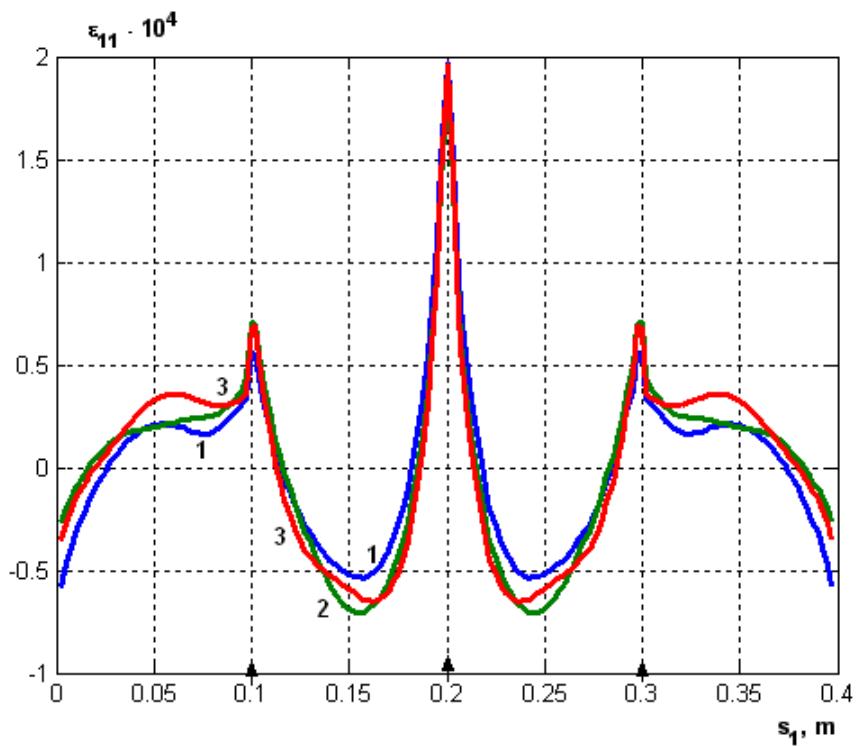


Рис. 4.15. Залежність величини  $\varepsilon_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.1; 1.2)$

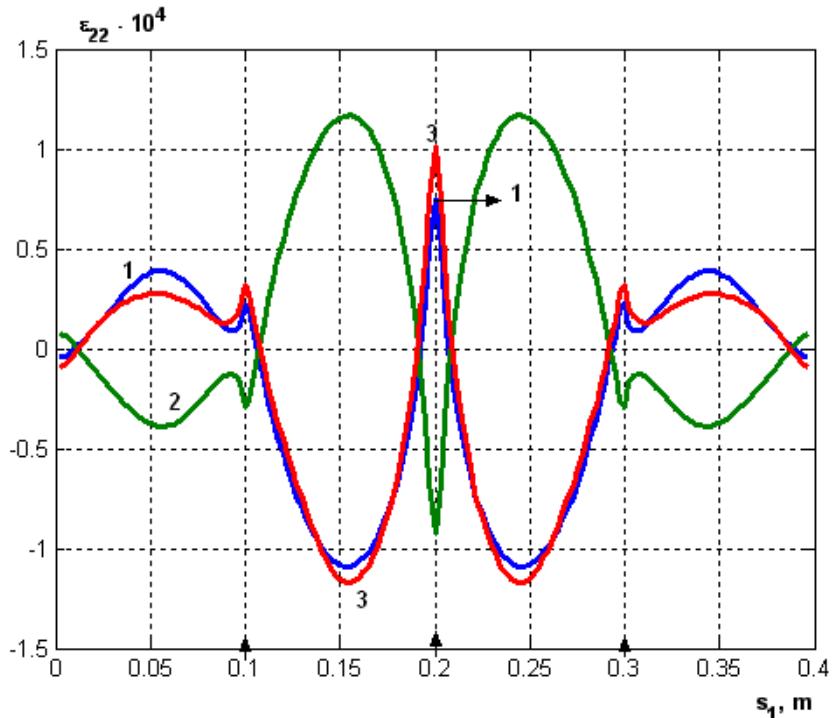


Рис. 4.16. Залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.1; 1.2)$

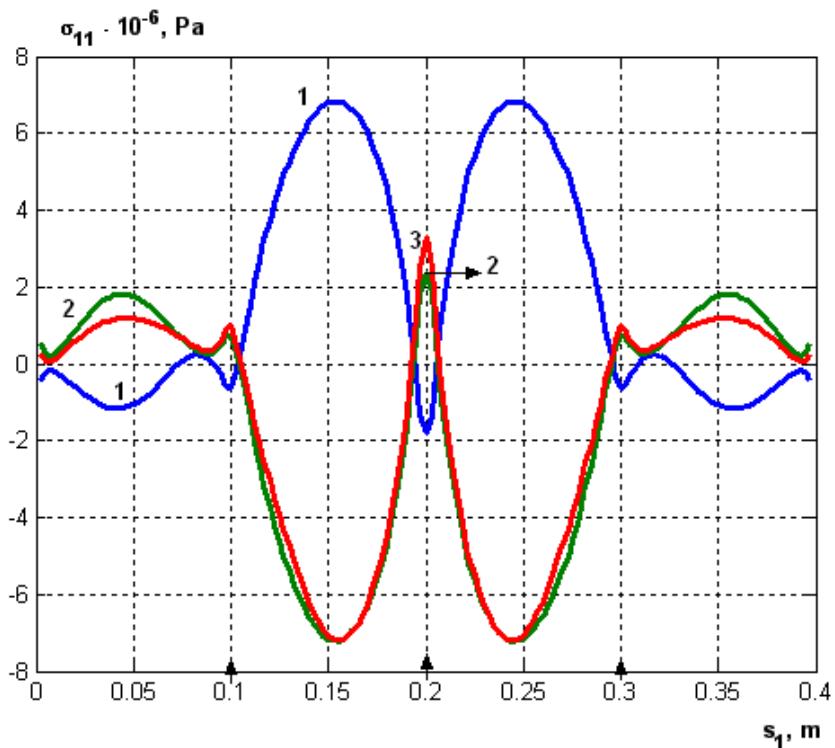


Рис. 4.17. Залежність величини  $\sigma_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.1; 1.2)$

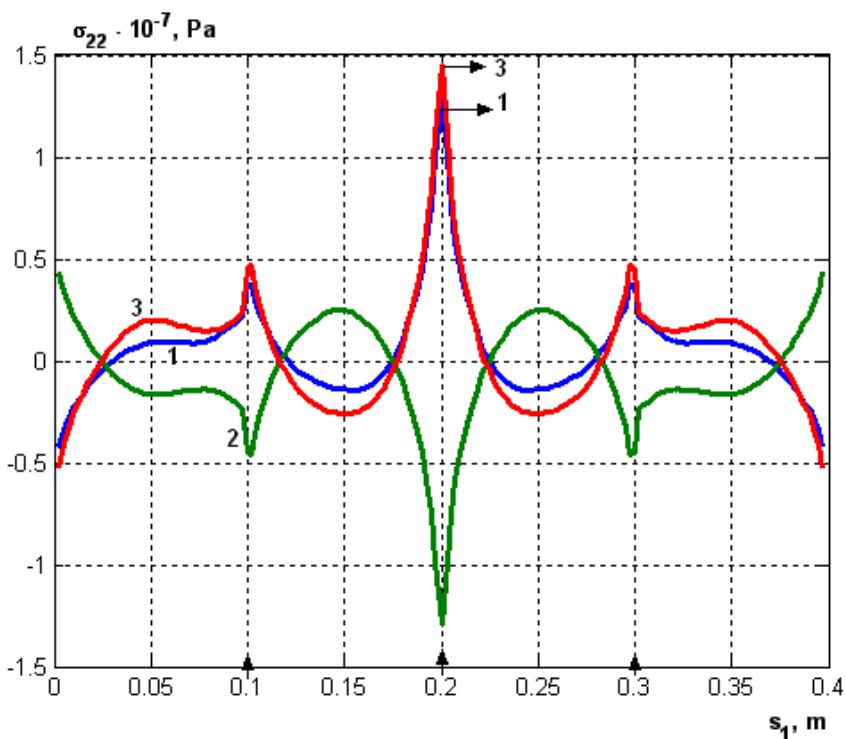


Рис. 4.18. Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.1; 1.2)$

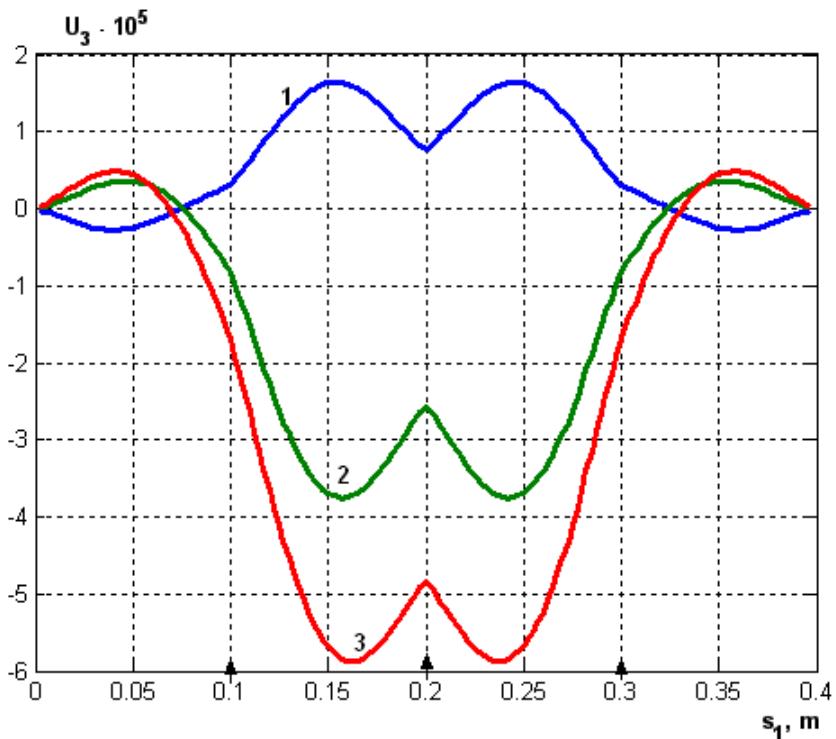


Рис. 4.19. Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.5; 2)$

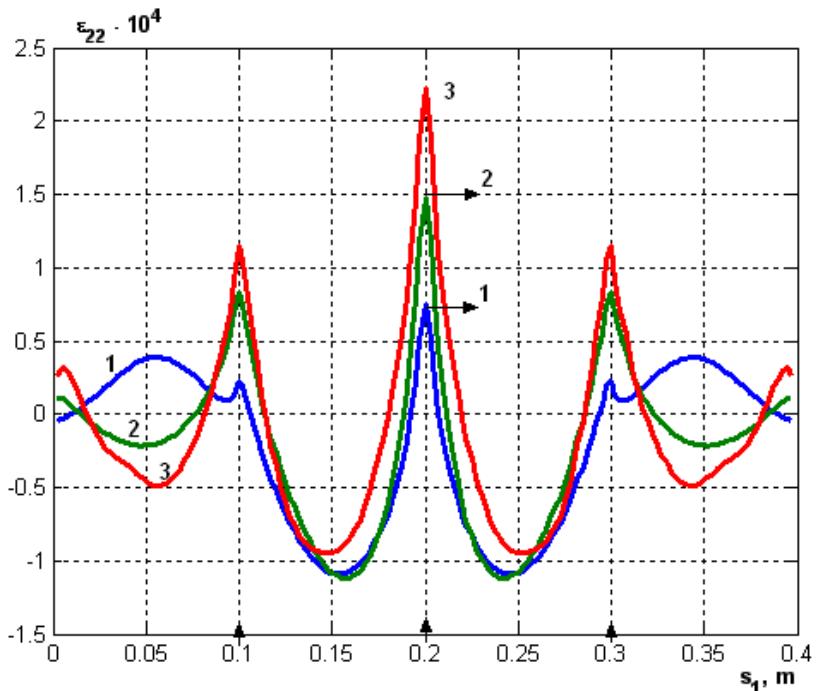


Рис. 4.20. Залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин  
 $(a/b = 1; 1.5; 2)$

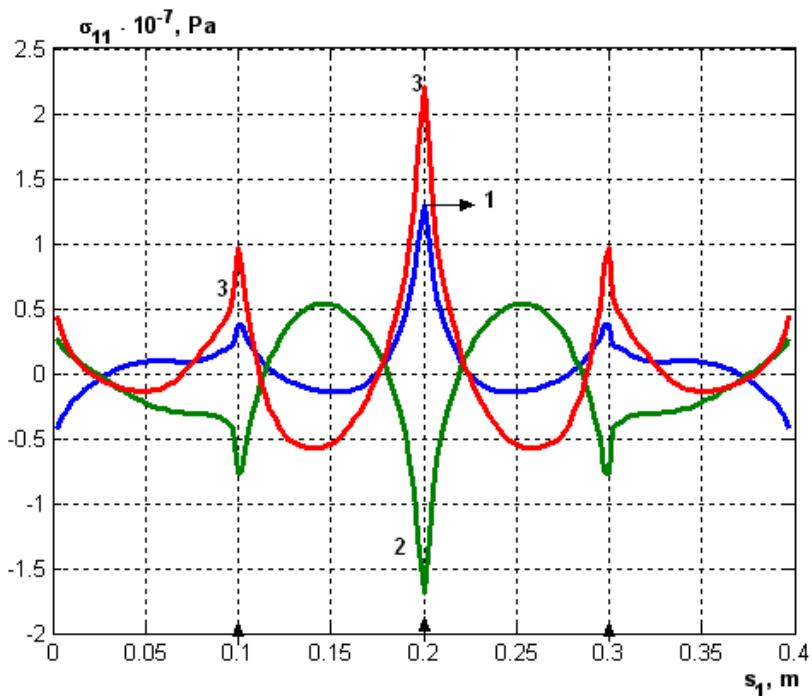


Рис. 4.21. Залежність величини  $\sigma_{11}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин ( $a/b = 1; 1.5; 2$ )

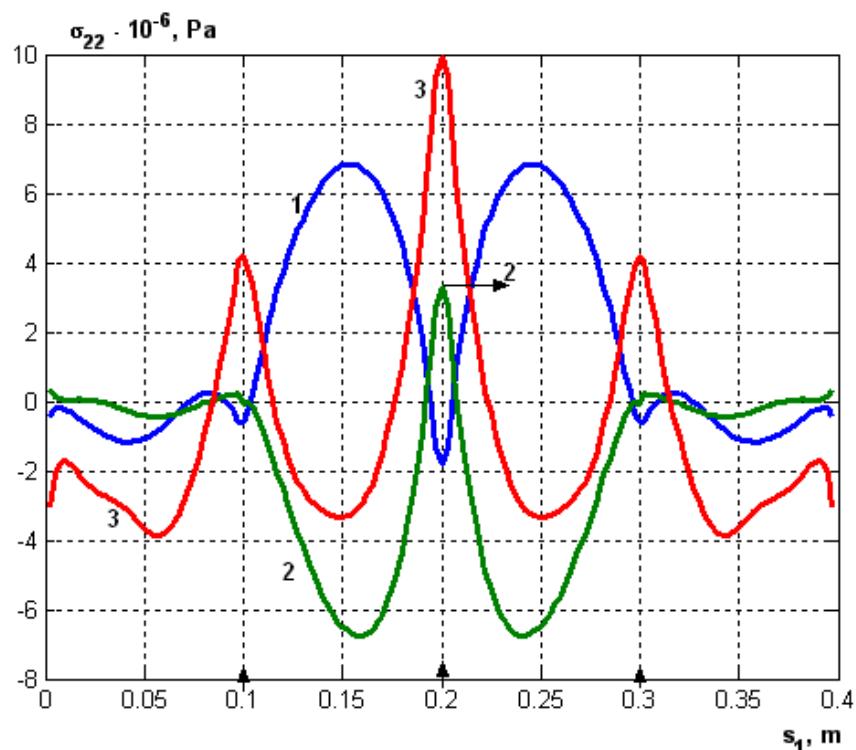


Рис. 4.22. Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин ( $a/b = 1; 1.5; 2$ )

На рисунках 4.19. - 4.22. приведені криві для різних значень  $a/b$  ( $a/b = 1; 1.5; 2$ ). Рис. 4.19 – приведено залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин. Рис. 4.20 відповідає залежності величини  $\varepsilon_{22}$ , від просторової координати  $s_1$  відповідно для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин.

Рис. 4.21, 4.22 – величин  $\sigma_{11}$  і  $\sigma_{22}$  по просторовій координаті  $s_1$  у для різних значень  $a/b$  в моменти досягнення ними максимальних величин.

Як слідує з приведеного графічного матеріалу, можна візуально визначити місце розташування підкріплюючих ребер в перерізах.

Розглядалася задача динамічної поведінки повздовжньо-поперечно підкріпленої замкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу при внутрішньому імпульсному навантаженні. Фізико-механічні параметри обшивки і ребер і навантаження аналогічні оболонковим структурам, які розглядалися в попередніх параметрах.

Задача розглядалася при наступних геометричних параметрах для оболонки та ребер  $a/h = 40$ ,  $h_i = h_j = 2h$ ,  $a_i = a_j = h$ ,  $a/b = 1,2$ .

Покладалося, що оболонка підкріплена 16 повздовжніми ребрами та 3 поперечними ребрами рівномірно по повздовжній та поперечній координатам  $s_1$  і  $s_2$ .

Повздовжні ребра знаходяться в перерізах по координаті  $\alpha_{2i} = \frac{\pi}{8}(i-1)$ ,  $i = \overline{1,16}$ . Поперечні ребра знаходяться в перерізах  $\alpha_{1j} = j\frac{L}{4}$ ,  $j = \overline{1,3}$ .

На рис. 4.23 – 4.25 приведені результати розрахунків. На рис. 4.23 приведено залежності величини  $u_3$  в різних перерізах по осі  $S_2$  по довжині оболонки  $S_1$ . Чорним трикутником на осі  $S_1$  позначено розташування поперечних ребер. Крива 1 відповідає залежності  $u_3$  в перерізі  $S_2 = 0$  в момент

часу досягнення нею максимального значення в  $t = 8,5T$ . Всі криві на рис.4.23-4.25 цьому значенню часу. Кривій 1 на всіх рисунках відповідають значення в перерізі  $\alpha_2 = 0$ , кривій 2 -  $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ , кривій 3 -  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ . Як бачимо з ілюстрованого матеріалу максимальне значення прогину  $u_3$  досягається в перерізі  $\alpha_2 = 0$ , а максимальні значення величин  $\varepsilon_{22}$  та  $\sigma_{22}$  в перерізі  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ . Значення величин  $u_3$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\sigma_{22}$  для перерізу  $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$  знаходяться між ними.

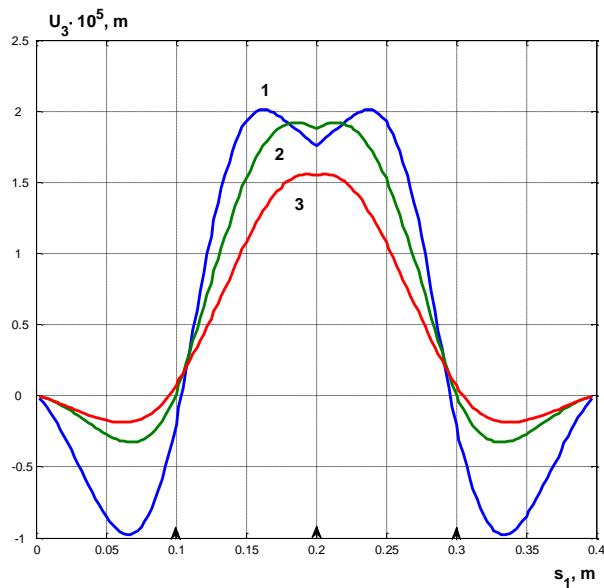


Рис.4.23. Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$

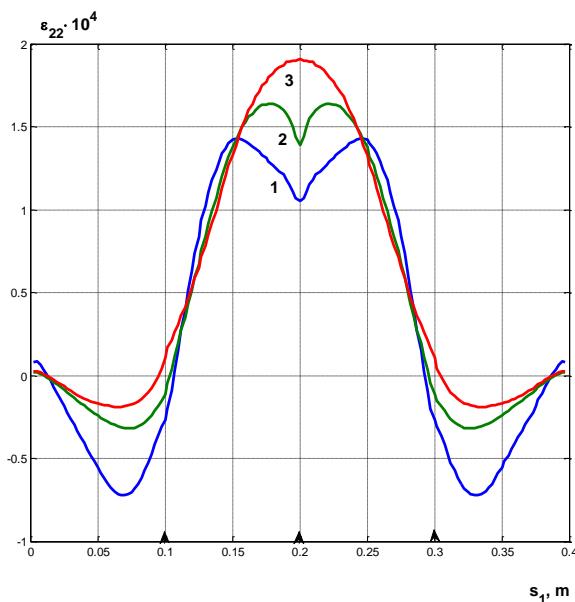
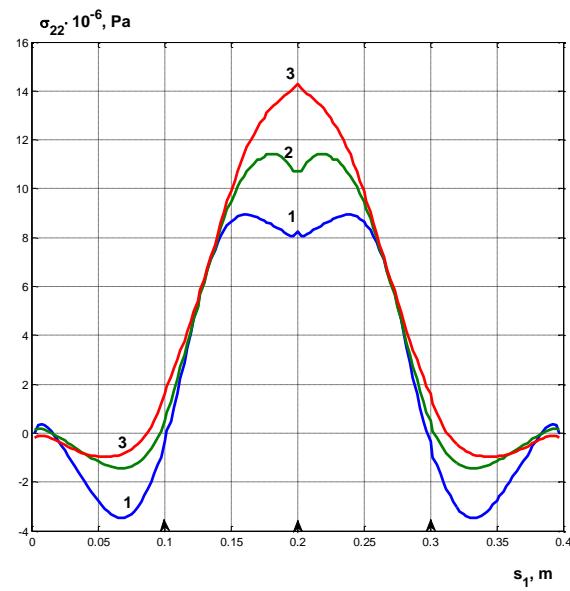


Рис. 4.24. Залежність величини  $\varepsilon_{22}$  від просторової координати  $s_1$



*Рис.4.25. Залежність величини  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$*

#### 4.5. Динамічна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу в рамках конструктивно ортотропної моделі. Порівняльний аналіз

Розглядаються рівняння підкріпленої оболонки в рамках конструктивно-ортотропної моделі при дії внутрішнього імпульсного навантаження.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s_1} (T_{11} + T_{11c}) + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 & \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} (T_{22} + T_{22c}) + k_2 (T_{23} + T_{23c}) = \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
 & \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}; \\
 & \frac{\partial}{\partial s_1} (T_{13} + T_{13c}) + \frac{\partial}{\partial s_2} (T_{23} + T_{23c}) - k_2 (T_{22} + T_{22c}) + P_3(s_1, s_2, t) = \\
 & = \left( \rho h + \rho_1 \frac{F_1}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
 & \frac{\partial}{\partial s_1} (M_{11} + M_{11c} \pm h_{ci} T_{11c}) + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \\
 & = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\
 & + \left[ \rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \\
 & \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2} (M_{22} + M_{22c} \pm h_{cj} T_{22c}) - T_{23} =
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \pm \left( \rho_1 \frac{F_1 h_{ci}}{l_1} + \rho_2 \frac{F_2 h_{cj}}{l_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\
&+ \left[ \rho_1 \frac{F_1}{l_1} \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_1} \right) + \rho_2 \frac{F_2}{l_2} \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_2} \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Позначення величин в рівняннях (4.7) введено згідно параграфу 2.6. Фізична постановка задачі аналогічна постановці задачі для замкнутої циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності повздовжньо поперечного набору ребер при дії внутрішнього імпульсного навантаження (див. параграф 4.4). Різницевий алгоритм розв'язку даної задачі базується на застосуванні інтегроінтерполяційного методу побудови різницевих схем по просторовим координатам  $s_1$ ,  $s_2$  та явній різницевій апроксимації по часовій координаті. Алгоритм аналогічний побудові чисельного алгоритму чисельного розв'язку в гладкій області підкріпленої оболонки (див. розділ 3).

Задача розв'язувалась при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах. В розрахунках покладалось  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с; (формула імпульсу задавалась згідно попередніх задач)  $E_1 = E_2 = E_i = E_j = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $h = 10^{-2}$  м;  $a/h = 40$ ,  $h_i = h_j = 2h$ ,  $a_i = a_j = h$ ,  $a/b = 1,2$ ;  $l_1 = L_y/4$ ;  $l_2 = L/4$ ; де  $L_y = [\pi(a+b) - (a-b)^2]/(a+b)$  - (наближена формула для обчислення четвертинки дуги еліпса з точністю 0,5%).

Розрахунки проводилися в області  $\Omega = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L; 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{2} \right\}$ . Розглядався варіант розрахунків по величинам прогинів  $u_3$ . Також проводився порівняльний аналіз розрахунків з варіантом динамічної поведінки замкненої циліндричної оболонки з врахуванням дискретності розміщення ребер (див. параграф 4.4). На рис. 4.26 приведено залежності для величин  $u_3$  для випадку оболонки з врахуванням дискретного розміщення ребер та випадку підкріплених оболонок в рамках конструктивно-ортотропної теорії по координаті  $s_1$  в

перерізі  $s_2 = 0$ . Крива 1 відповідає залежності для випадку дискретного розміщення ребер  $t = 14,75T$  (час досягнення величини  $u_3$  на дослідженному інтервалі часу), 2 – конструктивно ортотропний випадок  $t = 7,5T$  (час досягнення величини  $u_3$  на дослідженному інтервалі часу). Як бачимо, величини  $u_3$  по максимальним значенням практично не відрізняються.

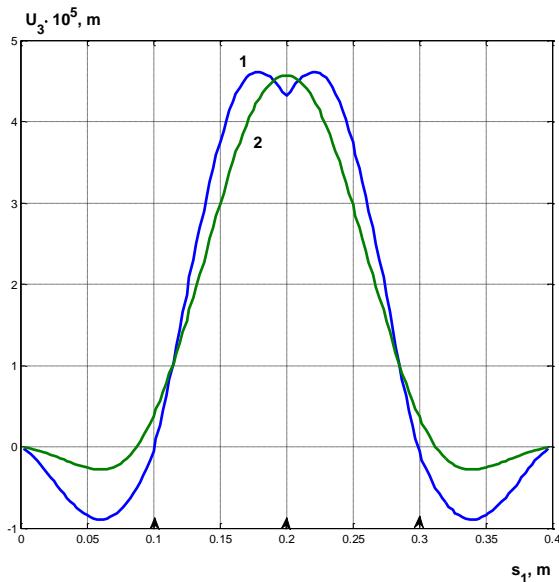


Рис.4.26. Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі

$$s_2 = 0$$

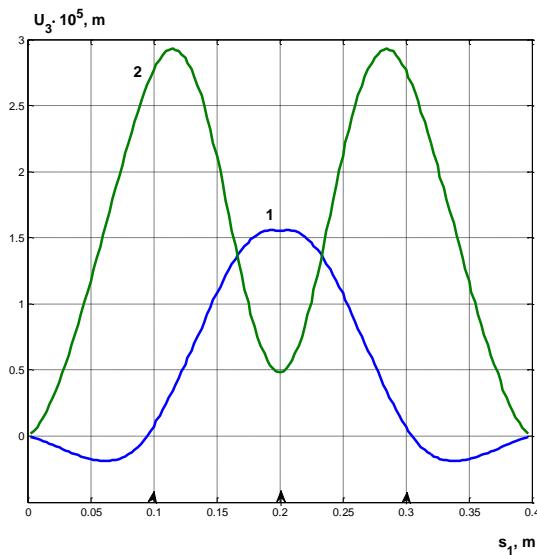
На рис.4.27 представлена залежність величин  $u_3$  по кординаті  $s_1$  в перерізі

$s_2 = \frac{\pi}{2}$ . Крива 1 відповідає залежності для випадку дискретного розміщення ребер  $t = 8,5T$  (час досягнення величини  $u_3$  на дослідженному інтервалі часу), 2 – конструктивно ортотропний випадок  $t = 19,4T$  (час досягнення величини  $u_3$

на дослідженному інтервалі часу). Як бачимо, в перерізі  $s_2 = \frac{\pi}{2}$  результати по

максимальним значенням відрізняються до 80%. В перерізах,  $s_2 = \frac{\pi}{8}$ ,  $s_2 = \frac{\pi}{4}$ ,

$s_2 = \frac{3\pi}{8}$  різниця результатів знаходиться в межах від 0 до 80%.



*Рис.4.27. Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  в перерізі*

$$s_2 = \pi / 2$$

#### 4.6. Достовірність отриманих чисельних результатів

Достовірність одержаних в роботі результатів визначається коректністю постановок задач; теоретичним обґрунтуванням скінчено – різницевих схем, які використовуються; контролюваною точністю чисельних розрахунків; проведеним тестиових розрахунків; відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям коливань тонкостінних елементів конструкцій.

Коректність постановки задач досягається використанням відомих рівнянь теорії оболонок (пункт 2.2 даної роботи) і стержнів (пункт 2.3 даної роботи) типу Тимошенка, які являють собою апроксимацію вихідних рівнянь тривимірної теорії пружності. При виводі рівнянь отримано рівняння коливань циліндричної оболонки в гладкій області, та рівняння коливань підкріплюючих елементів (поперечні та повздовжні ребра). Неважко показати, що вказані рівняння по класифікації рівнянь в частинних похідних є рівняннями гіперболічного типу, які є апроксимацією рівнянь коливань тривимірних

пружних тіл і достатньо коректно [75] відтворюють хвильові процеси в неоднорідних оболонкових структурах з врахуванням просторових розривів.

Чисельні алгоритми наближених розв'язків вихідних рівнянь базуються на використанні інтегро – інтерполяційного методу побудови різницевих схем. При побудові різницевих схем кінематичні величини відносяться до різницевих точок з цілими індексами, а величини деформацій та зусиль – моментів відносяться до різницевих точок з напівцілими індексами (3.19), (3.38), (3.48). Така апроксимація вихідних кінематичних та статичних величин дозволяє виконання закону збереження повної механічної енергії пружної структури на різницевому рівні. Чисельний алгоритм базується на використанні окремих скінчено – різницевих співвідношень в гладкій області та на лініях просторових розривів з другим порядком точності по просторовим та часовій координатам. При цьому, в ряді випадків проведено теоретичне дослідження питань стійкості різницевих рівнянь. Зокрема, для скінчено – різницевих рівнянь коливань циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер при неосесиметричних навантаженнях (див. розділ 3 даної дисертації). Вихідна апроксимація скінчено – різницевих рівнянь та умова стійкості різницевих рівнянь, згідно теорії різницевих схем дозволяють говорити про збіжність чисельних результатів, які отримані з використанням вказаних скінчено – різницевих схем (див. розділ 3).

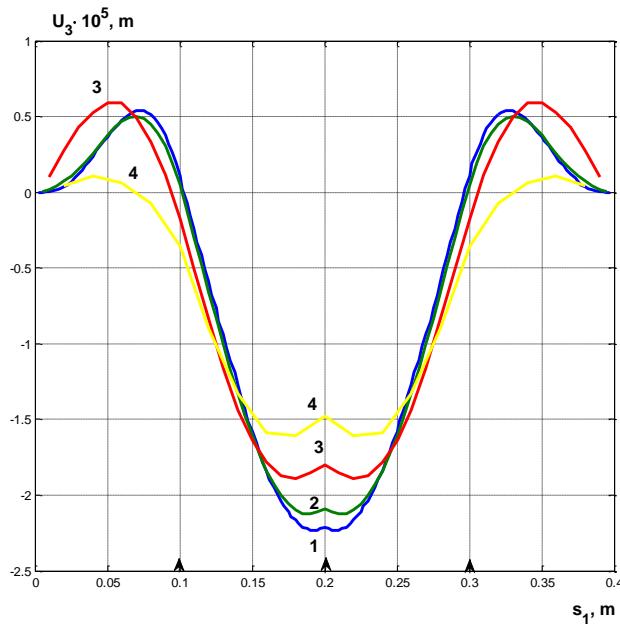
Практична збіжність досліджено на прикладі задачі динамічної поведінки повздовжньо-поперечного підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу (параграф 4.4) – задача замкненої дискретно підкріпленої циліндричної оболонки еліптичного перерізу в області  $D = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{2} \right\}$  при дії на неї внутрішнього розподіленого навантаження  $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$ , яке розглядалося в попередніх задачах. В

розрахунках покладалось  $A = 10^6 \text{ Па}$ ;  $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ . Покладалося, що краї оболонки жорстко защемлені. Початкові умовами нульові.

Задача розглядалась при наступних фізико – механічних параметрах вихідної конструкції (випадок ізотропної оболонки) в області  $D$ .

$$\frac{a}{h} = 40; \quad \frac{a}{b} = 1,2; \quad E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,33; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Розглядалася задача для випадку, коли оболонка підкріплена 16 повздовжніми і 3 поперечними ребрами рівномірно по координатам  $s_1(A_1\alpha_1)$  і  $s_2(A_2\alpha_2)$ . Як частковий випадок, розглянемо збіжність чисельних результатів по просторовій координаті  $s_1$  при фіксованому значенні  $s_{2j}(\alpha_{2j} = \pi/4)$  для розглянутої задачі. На рис.4.28 приведено залежності величин  $u_3$  від просторової координати  $s_1$  в момент часу  $t=16,75T$ .



*Рис. 4.28. Збіжність величини  $u_3$  по просторовій координаті  $s_1$  в перерізі  $s_{2j}$  ( $\alpha_{2j} = \pi/4$ )*

На рис.4.28 позначення 1 відповідають випадку  $n = 160$  (кількість розбиттів по просторовій координаті  $s_1$ ). Крива 2 відповідає випадку  $n = 80$ . Крива 3

відповідає випадку -  $n = 40$ ; крива 4 -  $n = 20$ . Випадок  $n = 320$  повністю лягає на криву при  $n = 160$ .

На рис.4.29 приведено залежності величин  $\sigma_{22}$  від просторової координати  $s_1$  в момент часу  $t=16,6T$  (момент досягнення величини  $\sigma_{22}$  максимального по модулю значення для випадку  $n = 160 - 320$ ), кривим відповідають значення: 1 - випадку  $n = 160$ , 2 -випадку  $n = 80$ , 3 -  $n = 40$ ; крива 4 -  $n = 20$ .

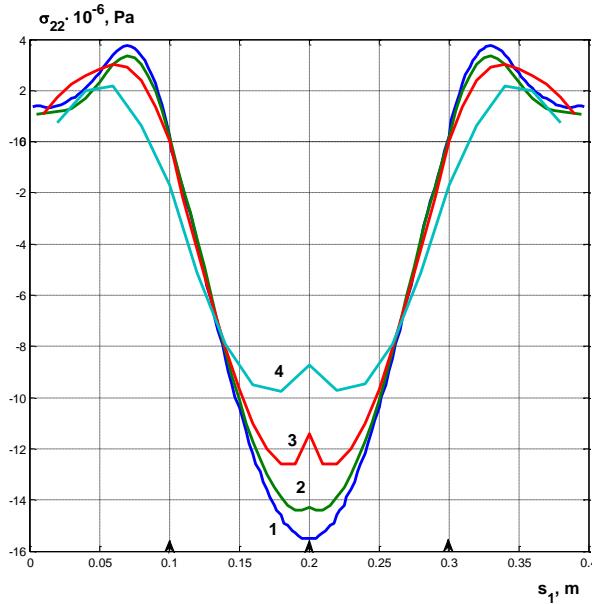


Рис. 4. 29. Збіжність величини  $\sigma_{22}$  по просторовій координаті  $s_1$  в перерізі  $s_{2j}$  ( $\alpha_{2j} = \pi/4$ )

Таблиця 4.1. Практична збіжність по просторовим координаті  $s_1$  величин  $u_3$ ,  $\sigma_{22}$  в перерізі  $s_{2j}$  ( $\alpha_{2j} = \pi/4$ ).

	$u_3 \cdot 10^5, m$	$\Delta, \%$	$\sigma_{22} \cdot 10^{-6} Pa$	$\Delta, \%$
	$\alpha_{2j} = \pi/4$		$\alpha_{2j} = \pi/4$	
$N = 20$	-1,491	33	-8,952	42
$N = 40$	-1,812	19	-11,561	26
$N = 80$	-2,111	6	-14,450	7
$N = 160$	-2,251	-	-15,530	-
$N = 320$	-2,251	-	-15,530	-

Побудовані чисельні алгоритми розв'язку задач теорії оболонок з локальними неоднорідностями відпрацьовувались на тестових розрахунках.

Зокрема, було проведено порівняльний аналіз динамічної поведінки циліндричної підкріпленої оболонки при короткочасному навантаженні згідно аналітичного розв'язку, викладеному в роботі [86] і чисельному алгоритму розв'язку рівнянь коливань підкріплених циліндричних оболонок згідно рівнянь (3.1) – (3.9).

Розглядається задача нестационарних осесиметричних коливань циліндричної оболонки типу Тимошенка, підкріпленої зовнішнім пружним кільцем, під дією внутрішнього імпульсу тиску.

Розглядається випадок конструкції з шарнірним закріпленням на кінцях. Границі умови для цього випадку мають наступний вигляд при  $x=0$ ,  $x=L$

$$T_{11}=0, M_{11}=0, \quad U_3=0$$

Початкові умови задаються у вигляді

$$u_1=u_3=\varphi_1=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_3}{\partial t}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}=0.$$

Розрахунки проводилися для оболонки підкріпленої в середній частині кільцем (центр ваги знаходитьться в точці  $x=L/2$ ). Параметри оболонки і кільця наступні:  $L=1,5$  м;  $R=0,6$  м;  $h=3 \cdot 10^{-2}$  м;  $H=0,1$  м;  $F=0,015$  м<sup>2</sup>.

Навантаження задавалося у вигляді:

$$P_3=A \cdot [\eta(\tau)-\eta(\tau-\tau_0)];$$

$$\tau=t \cdot c/L; \quad c^2=E/[\rho(1-\nu^2)];$$

$$A=10^3 \text{ н/м}^2; \quad \tau_0=0,5$$

На рис.4.30 показано порівняння результатів розрахунків даної задачі з результатами роботи [86]. Суцільною лінією представлені залежності величини

$U_3$  від величини  $x$  згідно чисельної методики даної роботи, штриховою – згідно аналітичного розрахунку [86]. Крива 1 відповідає часу  $\tau = 0,8$ ; крива 2 –  $\tau = 0,4$ . Вибір розрахункових параметрів різницевого алгоритму проводився на основі дослідження стійкості відповідних різницевих рівнянь згідно співвідношень приведених в розділі 3.

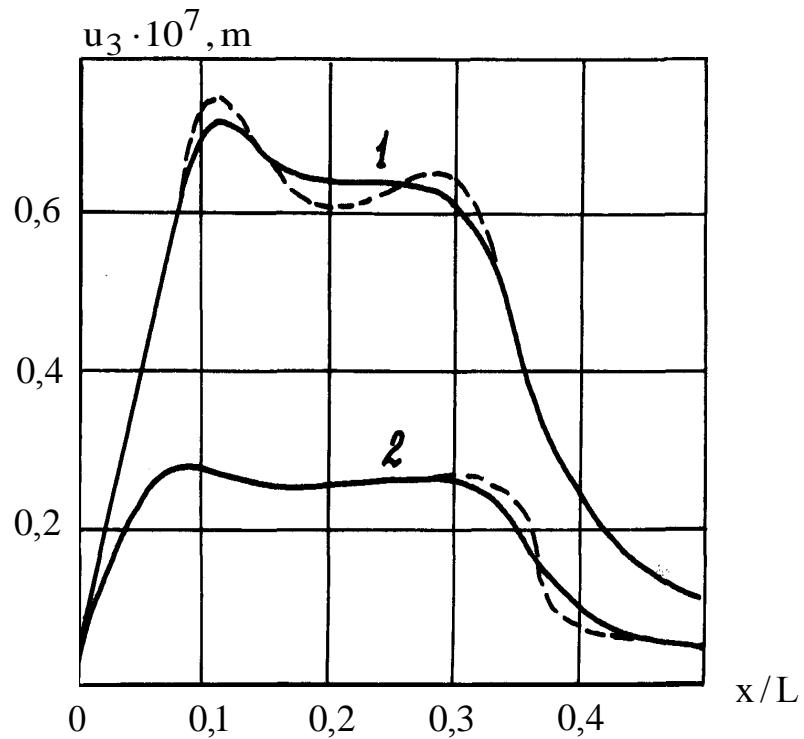


Рисунок 4.30 – Залежність величини  $u_3$  від просторової координати  $x$  в моменти часу  $\tau_1$  і  $\tau_2$

## ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації полягають в наступному:

1. Проведено постановку динамічних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер та вивід рівнянь коливань та відповідних природничих граничних та початкових умов на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остоградського в рамках геометрично лінійної теорії оболонок та стержнів типу Тимошенка. Також проведено постановку динамічних задач підкріплених оболонок в рамках конструктивно-ортотропної моделі.
2. Розвинено ефективний чисельний метод та розроблено алгоритми розв'язку задач нестационарних неосесиметричних коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер та в рамках конструктивно-ортотропної моделі. Чисельний метод базується на використанні інтегро–інтерполаційного методу побудови різницевих схем по просторовим координатам та явній скінченно–різницевій схемі по часовій координаті.
3. Отримано чисельні роз'язки динамічних задач теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер та проведено аналіз напружено – деформованого стану підкріплених оболонок при нестационарних навантаженнях в широкому діапазоні зміни геометричних та фізико – механічних параметрів. Розглянуто задачі динамічної поведінки неоднорідних циліндричних оболонок еліптичного перерізу з різними видами підкріплень (поздовжнє підкріплення, поперечне підкріплення, повздовжньо-поперечне підкріплення) при різних граничних умовах та типах навантаження. Проведено аналіз числових результатів, закономірностей та механічних ефектів, які характерні для хвильових процесів в розглянутих дискретно підкріплених оболонках.

4. Проведено порівняння чисельних результатів для величин прогину згідно теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу з врахуванням дискретності розміщення ребер та конструктивно – ортотропної теорії підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу. Розрахунки показують, що величина прогину в ряді випадків згідно конструктивно – ортотропної моделі відрізняється від відповідних величин прогину згідно теорії з врахуванням дискретності розміщення ребер. Зокрема, при конкретних геометричних та фізико – механічних параметрах циліндричних оболонок, приведених в роботі, кількісна різниця по величинам максимальних прогинів сягає порядка 25-80% (прогини згідно розрахункової конструктивно-ортотропної моделі більші).

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мейш В.Ф. Динамическое поведение продольно подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровський національний університет. – 2012. – Вип.20. – С.245 - 252.
2. Мейш В.Ф. Вынужденные колебания поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2013. – Вип. 21. – С.157 – 166.
3. Мейш В.Ф. К расчету вынужденных колебаний продольно - поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках /В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – Вип. 22. – С. 155-168.
4. Мейш В.Ф. Нестационарная динамика продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Прик. механика. – 2014. – Т. 50, № 6. – С. 83-89.
5. Мейш В.Ф. Решение задач динамического поведения цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач //Теоретическая и прикладная механика. – 2014. №8(54). – С. 98-105.
6. Мейш В.Ф. Чисельний розв'язок плоских задач теорії підкріплених циліндрических оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Науковий вісник Тернопільського національного університету. – 2014. №4(76). – С. 44-52.

7. Кепенач Н.П. До розрахунку вимушених коливань підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при розподілених нестационарних навантаженнях / Н.П.Кепенач // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ (20-23 квітня 2009р.) – С.204.
8. Кепенач Н.П. Побудова чисельного алгоритму розв'язування задач про вимушені коливання підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях / Н.П.Кепенач, В.Ф.Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. - Дніпродзержинськ (19-22 квітня 2010р.) – С.131.
9. Кепенач Н.П. Динамічна поведінка підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу при нестационарних навантаженнях в залежності від поперечних геометричних параметрів вихідної конструкції / Н.П.Кепенач, В.Ф.Мейш, // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. (Том 1) – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ (13-15 квітня 2011р.) – С.38.
10. Кепенач Н.П. К решению динамических задач теории продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / Н.П.Кепенач, В.Ф.Мейш // Математичні проблеми технічної механіки. Міжнародна наукова конференція. Матеріали конференції (Том 2) – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ (16-19 квітня 2012р.) – С. 37.
11. Мейш В.Ф. Решение задач о вынужденных колебаниях дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела / Труды VII Международной научной конференции. (Донецк – Мелекино, 11 – 14 июня 2013 г.). – Т. 2. – Донецк: ДНУ, 2013. – С. 49 – 52.
12. Кепенач Н.П. К расчету напряженно деформируемого состояния продольно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического

сечения при нестационарных нагрузках / Н.П.Кепенач, В.Ф.Мейш // Математичні проблеми технічної механіки / Матеріали міжнародної наукової конференції. 15 – 18 квітня, 2013 р. – Дніпродзержинськ, 2013. – С. 29.

13. Мейш В.Ф. Динаміка підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач, А.С.Богатирчук // Матеріали Всеукраїнської науково – методичної конференції «Сучасні науково – методичні проблеми у вищій школі», 26 – 27 червня 2013. – Київ: НУХТ, 2013. – С.43 – 44.

14. Мейш В.Ф., Кепенач Н.П. Численный анализ напряженно деформируемого состояния дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь / Тези доповідей Міжнародної наукової конференції (23 – 26 серпня 2013, м. Одеса). – Одеса: Астропrint, 2013. – С. 66 – 67.

15. Мейш В.Ф. Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Ю.А.Мейш, Н.П.Кепенач // Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от макро- до наноразмерных структур: Материалы международной научной конференции. 16 – 20 сентября 2013 г., Минск, Беларусь. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2013. – С. 243 – 245.

16. Мейш В.Ф. Об одном варианте динамических уравнений теории подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач // Математичні проблеми технічної механіки / Матеріали міжнародної наукової конференції. 14 – 17 квітня, 2014 р. – Дніпродзержинськ, 2014. – С. 19.

17. Мейш В.Ф. К численному решению динамических задач теории подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения (конструктивно-ортотропная модель) / В.Ф.Мейш, Н.П.Кепенач //

Актуальные проблемы инженерной механики. / II Международная конференция (16-20 марта 2015 г. Киев-Одесса). – С. 67 – 68.

18. Андрианов И.В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.В.Андринов, Б.В.Нерубайло, Образцов И.Ф. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
19. Амиро И.Я. Исследования в области динамики ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17, № 11. – С. 3 – 20.
20. Амиро И.Я. Методы расчета оболочек: в 5 т. / И.Я. Амиро, В.А.Заруцкий. – К.: Наукова думка, 1980. – Т. 2: Теория ребристых оболочек. – 1980. – 368 с.
21. Амиро И.Я. Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Итоги науки и техники – ВИНИТИ. Сер. Механика деформ. твердого тела. – 1990. – Т. 21. – С. 132 – 191.
22. Гузь А.Н. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек: в 5 т. / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко. – К.: Наук. думка, 1982 – . – Т.5: Методы расчета оболочек. – 1982. – 400 с.
23. Жигалко Ю.П. Динамика ребристых пластин и оболочек / Ю.П.Жигалко, Л.М. Дмитриева // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1978. – № 13. – С. 3 – 30.
24. Варвак А.П. О погрешности теории ребристых оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява / А.П. Варвак, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1970. – Т. 4, №6. – С. 49 – 57.
25. Амиро И.Я. Ребристые цилиндрические оболочки / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. – К.: Наук. думка, 1973. – 248с.
26. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 204с.
27. Амиро И.Я. Устойчивость ребристых оболочек вращения / Амиро И.Я., Грачев О.А., Заруцкий В.А.– К. : Наук. думка, 1987. – 160с.

28. Амиро И.Я. Колебания ребристых оболочек вращения / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
29. Заруцький В.О. Рівняння рівноваги ребристих циліндричних оболонок та їх наближене розв'язання / В.О. Заруцький // Прикл. механіка. – 1961. – Т. 7, №5. – С. 503 – 511.
30. Заруцкий В.А. Вынужденные колебания продольно подкрепленной цилиндрической оболочки, несущей локально присоединенную массу / В.А.Заруцкий // Прикл. механика. – 1982. – Т. 17, № 1. – С. 50 – 56.
31. Заруцкий В.А. Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек / Заруцкий В.А., Почтман Ю.М., Скалозуб В.В. – К.: Выща школа, 1990. – 140 с.
32. Заруцкий В.А. О влиянии деформаций поперечного сдвига на собственные колебания цилиндрических оболочек, усиленных кольцевыми ребрами / В.А. Заруцкий, Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, №2. – С. 54 – 61.
33. Заруцкий В.А. Приближенный учет дискретного размещения ребер при решении задач о собственных и вынужденных колебаниях / В.А.Заруцкий // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 6. – С. 37 – 44.
34. Заруцкий В.А. Колебания ребристых оболочек колебаниях / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 10. – С. 87 – 93.
35. Заруцкий В.А. Приближенные уравнения для вычисления собственных частот колебаний продольно подкрепленных цилиндрических оболочек, полученные с помощью уточненной теории колебаний / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №3. – С. 40 –44.
36. Заруцкий В. А. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек колебаниях / В.А. Заруцкий, Н. Я. Прокопенко // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 92 – 98.

37. Заруцкий В. А. Краевой резонанс в конструктивно ортотропных цилиндрических оболочках колебаниях / В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 93 –101.
38. Заруцкий В. А. Собственные колебания ребристых цилиндрических оболочек при низкой сдвиговой жесткости материала / В.А. Заруцкий, Н.Я.Прокопенко // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 66 – 74.
39. Андрианов И.В. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / Андрианов И.В., Лесничая В.А., Маневич Л.И. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
40. Антуфьев Б. А. Свободные колебания цилиндрической оболочки, дискретно подкрепленной нерегулярной системой стрингеров / Б.А.Антуфьев, С. Б. Антуфьев, В. Н. Сергеев // Изв. вузов. Авиац. техн. – 2000. – № 1. – С. 54 – 56.
41. Рыбаков Л. С., Сильченко Л. Г. Собственные колебания дискретно подкрепленных цилиндрических панелей / Л. С. Рыбаков, Л. Г. Сильченко // Мех. композиц. матер. и конструкций. – 1998. – Т.4, № 1. – С. 73 – 86.
42. Callahan Joseph, A closed-form solution procedure for circular cylindrical shell vibrations / Joseph Callahan, Haim Baruh // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – Vol. 36, № 20. – P. 2973 – 3013.
43. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И.Н. Преображенский, В.З. Грищак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
44. Кормилкин М.Д. Колебания подкрепленной тонкостенными кольцами сферической оболочки / М.Д. Кормилкин, Б.П. Умушкин // Динамика и колебания механических систем. – Иваново, 1979. – С. 74 – 80.
45. Кормилкин М.Д. Колебания сферической оболочки, эксцентрично подкрепленной тонкостенными кольцами / М.Д. Кормилкин, Б.П.Умушкин // Динамика и колебания механических систем. – Иваново, 1983. – С. 93 – 102.

46. Кормилкин М.Д. Колебания эксцентрично подкрепленной кольцевыми ребрами сферической оболочки, оснащенной пространственной системой упругосвязанных твердых тел и массами / М.Д. Кормилкин, Б.П.Умушкин // Динамика и колебания механических систем. – Иваново, 1984 (1985). – С. 90 – 107.
47. Ревуцкий В.Н. О собственных колебаниях ребристых сферических оболочек / В.Н. Ревуцкий // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 7. – С. 42–48.
48. Ревуцкий В.Н. Собственные колебания сферических оболочек, подкрепленных меридиональными ребрами / В.Н. Ревуцкий // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, № 9. – С. 119 – 121.
49. Левицька Т.І. Розрахунок оболонок обертання, замкнених в вершині, із шпангоутами малих розмірів / Т.І. Левицька // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 2. – С. 73 – 78.
50. Сисоєв Ю.О. Вибір форми шпангоутів для підкріплення замкненої оболонки обертання / Ю.О. Сисоєв, Т.І. Левицька // Вісник Запорізького державного університету. – 1998. – № 2. – С. 136 – 139.
51. Скосаренко Ю.В. Вынужденные колебания оребренной конической оболочки под действием динамической нагрузки / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1979. – Т. 15, № 6. – С. 55 – 61.
52. Авербух А.З. Колебания подкрепленных цилиндрических оболочек в вакууме и в жидкости / А.З. Авербух, Р.И. Вейцман, М.Д. Генкин // Вопр. судостроения. Сер. Технология и орг. судового машиностоения. – 1983. – Вып. 33. – С. 25 – 33.
53. Авербух А.З. Колебания элементов конструкций в жидкости / Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д. – М.: Наука, 1987. – 158 с.
54. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars / S.P. Timoshenko // Philosophical Magazine and Journal of science. – 1921. – Vol. 41, Ser. 6, № 245. – P. 744 – 746.

55. Галиныш А.К. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям / А.К.Галиныш // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Издво Казан, гос. ун-та, 1967. – Вып. 5. – С. 66 – 92; – Вып. 6, 7.– С. 23 – 63.
56. Григолюк Э.И. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Ч. 5 / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М.: Наука, 1972. – 271 с.
57. Будз И.С. Численный анализ динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительного нагружения / И.С. Будз. – Львов, 1992. – 37 с. – Деп. в Укр. НИИНТИ 21.01.92, 77-Ук92.
58. Малютин И.С. К решению задач о собственных колебаниях цилиндрических оболочек, дискретно подкрепленных кольцевыми ребрами, при произвольных граничных условиях / И.С. Малютин // Динамика и колебания механических систем. – Иваново, 1981. – С. 3 – 8.
59. Скосаренко Ю.В. К определению напряженно – деформированного состояния оболочек вращения, подкрепленных регулярной системой меридиональных ребер / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 68 – 73.
60. Grigorenko A., Müller W.H., Wille R., Loza I. Nonaxisymmetric Vibrations of Radially Polarized Hollow Cylinders Made of Functionally Gradient Piezoelectric Materials.// Continuum Mech. Thermodyn, 24(4-6), P. 515-524 (2012).
61. A. Ya. Grigorenko, I.A. Loza. Solution of the Problem of Nonaxisymmetrical Free Vibrations of the Piezoceramic Hollow Cylinders with Axial Polarization. // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 184, No. 1, July, 2012, P. 69 – 77.
62. А.Я. Григоренко, И.А. Лоза. Неосесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими радиально поляризованными слоями.// Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 17–25.

63. Жигалко Ю.П. Некоторые вопросы динамики подкрепленных оболочек / Ю.П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Каз. ун-та, 1979. – № 14. – С. 172 – 184.
64. Скосаренко Ю.В. Напряженно – деформированное состояние конической оболочки, подкрепленной шпангоутом, под действием динамической нагрузки / Ю.В. Скосаренко // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 3. – С. 122 – 126.
65. Дорофеев В.Ю. Вынужденные колебания пологих оболочек, подкрепленных ребрами одного направления / В.Ю. Дорофеев // Экспериментальные и численные методы оценки прочности конструкций. – Калининград, 1990. – С. 37 – 44.
66. Дорофеев В.Ю. Уравнения движения пологой подкрепленной оболочки под действием динамической нагрузки / В.Ю. Дорофеев // Совершенствование эксплуатации и ремонта корпусов судов: науч. – техн. конф.: тезисы докл. – Калининград, 1981. – С. 266 – 268.
67. Дорофеев В.Ю. Уравнения движения пологой подкрепленной оболочки с учетом сдвигов и инерции вращения / В.Ю. Дорофеев // Экспериментальные и численные методы оценки прочности конструкций. – Калининград, 1990. – С. 26 – 37.
68. Столыпина Л.И., Жив А.С. Экспериментально – теоретические исследования динамической работы подкрепленных ребрами жесткости пологих граненых оболочек, опирающихся по контуру на жесткие диафрагмы / Л.И. Столыпина, А.С. Жив // Эффективные пространственные железобетонные и сталежелезобетонные конструкции для строительства в районах Севера. – Красноярск, 1983. – С. 61 – 72.
69. Богданович А.Е. Решение нелинейных задач динамического выпучивания подкрепленных слоистых цилиндрических оболочек / А.Е.Богданович // Прикл. механика. – 1986. – Т. 22, № 8. – С. 57 – 66.
70. Богданович А.Е. Деформирование и прочность ортотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости

при динамических сжимающих нагрузках / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // Механика композит. материалов. – 1983. – № 3. – С. 476 – 488.

71. Богданович А.Е. Деформирование и прочность ортотропных цилиндрических оболочек, подкрепленных продольными ребрами жесткости при динамических сжимающих нагрузках / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // Механика композит. материалов. – 1984. – № 5. – С. 866 – 876.

72. Богданович А.Е. О решении нелинейной задачи динамического выпучивания цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами жесткости / А.Е. Богданович, Т.Б. Кошкина // Электродинамика и механика сплошных сред: Мат. моделирование. – Рига, 1982. – С. 123 – 135.

73. Гордиенко Б.А. Реакция подкрепленных и соосных цилиндрических оболочек на ударную нагрузку / Б.А. Гордиенко // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 3. – С. 25 – 29.

74. Кармишин А.В. Статика и динамика оболочечных конструкций / Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. – М.: Машиностроение, 1975. – 374 с.

75. Кошкина Т.Б. Анализ эффективности подкрепления продольными ребрами жесткости цилиндрических оболочек, нагруженных динамическим внешним давлением / Т.Б. Кошкина // Электродинамика и механика сплошных сред: Пром. процессы и устройства. – Рига, 1983. – С. 117 – 127.

76. Мяченков В.И. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭОМ: Справочник / В.И. Мяченков, И.В. Григорьев. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с.

77. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи) / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов. – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.

78. Перцев А.К. Воздействие ударной волны на круговую цилиндрическую оболочку, подкрепленную ребрами жесткости / А.К.Перцев, Л.В. Слепнева // Актуальные проблемы механики сплошных сред. – Л.: ЛГУ, 1980. – С. 191 – 199.

79. Слепов Б.И. Разрушающая динамическая нагрузка цилиндрической оболочки, подкрепленной поперечными ребрами и подверженной действию гидростатического давления / Б.И. Слепов, Э.Г. Платонов, А.К. Перцев // Труды симпозиума по теории оболочки и пластин. – Казань: Наука, 1971. – С. 261 – 266.
80. Shangchow C. Response of a cylindrical shell to the sudden breakdown of a ring stiffener / C. Shangchow // AIAA Journal. – 1984. – Vol. 22, № 7. – P. 1018 – 1020.
81. Рассказов А.О. Численное исследование неосесимметричных колебаний вращения при нестационарном нагружении / А.О. Рассказов, А.В.Козлов // Прикл. мех. – 1998. – Т. 34, №5. – С. 68 – 75.
82. И.В. Янчевский, А.А. Бабаев. Влияние колебательного контура на излучения нестационарных акустических волн электроупругой сферой. Математичні методи та фізико-механічні поля.-2013.-Т.56, № 1 с. 102-115.
83. В.Г. Савин, Н.И. Штефан, А.А. Бабаев. Экспериментальные исследования излучения акустических импульсов цилиндрическими пьезоэлектрическими преобразователями находящимися в жидкости. Механіка гіроскопічних систем. Науково-технічний збірник.- 2013, Випуск 26. с. 68-74.
84. Бабаев А. А., Гнатейко Н. В., Штефан Н. И. Активное демпфирование нестационарных изгибных колебаний биморфной балки. 21 century: fundamental science and technology IV, North Charleston, USA. Vol. 1., 2014, с.159-164.
85. Кармишин А.В. Нестационарная аэроупругость тонкостенных конструкций / Кармишин А.В., Скурлатов Э.Д., Старцев В.Г. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с.
86. Кохманюк С.С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко А.Г. – К.: Наук. думка, 1980. – 232 с.

87. Луговой П.З. Построение разностных схем для уравнений движения подкрепленных цилиндрических оболочек с разрывными коэффициентами / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Краевые задачи математической физики. – К.: Наук. думка. – 1989. – С. 136 – 140.
88. Мейш В.Ф. Численное моделирование поведения подкрепленных цилиндрических конструкций при импульсном нагружении / В.Ф.Мейш, С.Ю. Богданов // Теория и практика совершенствование технологии взрывных работ. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 27 – 32.
89. Пожуєв А.В. Динаміка ребристої циліндричної оболонки із зовнішнім амортизуючим шаром / А.В. Пожуев // Вісник Запорізького державного університету. Фізико – математичні. Біологічні науки. – 1999. – № 2. – С. 98 – 101.
90. Пожуев А.В. Компьютерный анализ динамики ребристой цилиндрической оболочки с упругим заполнителем / А.В. Пожуев // Прикладная геометрия и инж. графика. – Мелитополь, 1998. – Т. 3, № 4. – С. 45 – 48.
91. Пожуев А.В. Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки конечной длины / А.В. Пожуев // Вісник Запорізького державного університету. Фізико – математичні. Біологічні науки. – 1999. – № 1. – С. 82 – 85.
92. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В. П. Майборода и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
93. Луговой П.З. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии / П.З.Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 38 – 44.
94. Луговой П.З. Численное решение задач динамики ребристых оболочек вращения / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Вычислительная и прикладная математика. – 1992. – Вып. 74. – С. 45 – 48.

95. Мейш В.Ф. Нелинейное деформирование продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш // Механика композитных материалов. – 1993. – Т. 29, № 2. – С. 184 – 190.
96. Метод конечных элементов в механике твердых тел. / науч. ред. А.С. Сахаров и Н. Альтенбах. – К.: Выща школа, 1982. – 478 с.
97. Пожуев А.В. Нестационарная динамика ребристой цилиндрической оболочки / А.В. Пожуев // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. – 1998. – С. 130 – 132.
98. Мейш В.Ф. Неосесимметричные волновые процессы в подкрепленной цилиндрической оболочке при продольном ударе / В.Ф.Мейш // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 9. – С. 55 – 62.
99. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536 с.
100. Луговой П.З. К теории и решению динамических задач нестационарного поведения цилиндрических оболочек с дискретным подкреплением переменной жесткости / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 6. – С. 53 – 59.
101. Луговой П.З. Нелинейное деформирование составных подкрепленных конструкций при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Доклады АН Украины. – 1993. – № 3. – С. 60 – 65.
102. Мейш В.Ф. Геометрически и физически нелинейное деформирование подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузлениях / В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1992. – Т. 28, № 2. – С. 46 – 52.
103. Мейш В.Ф. Нестационарное поведение подкрепленной ортотропной конической оболочки при действии внезапно приложенной нагрузки / В.Ф.Мейш // Технологические проблемы прочности несущих конструкций: I Всесоюзн. конф.: тезисы докл. – Запорожье, 1991. – Т. 1. – С. 149 – 154.

104. Баженов В.Г. Об одном подходе к конечно – разностной аппроксимации функций и производных при численном решении задач теории пластин и оболочек типа Тимошенко / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд. ГГУ, 1983.– С. 78 – 86.
105. Баженов В.Г. О конечно – разностном решении волновых уравнений теории оболочек типа Тимошенко / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – Горький: Изд. ГГУ, 1981. – С. 41 – 50.
106. Мейш В.Ф. Динамика ребристой цилиндрической оболочки при действии кратковременной осесимметричной нагрузки / В.Ф. Мейш, П.З.Луговой // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 21 – 24.
107. Мейш В.Ф. Нестационарная деформация ребристых труб при осесимметричных нагрузках / В.Ф. Мейш // Горные породы при динамических нагрузках. – К.: Наук. думка, 1989. – С. 105 – 108.
108. Луговой П.З. Неосесимметричные колебания ребристой оболочки с учетом сдвиговых деформаций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 5. – С. 50 – 55.
109. Мейш В.Ф. Неосесимметричные колебания неоднородных многослойных дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш, Н.В. Кравченко // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 9. – С. 88 – 95.
110. Мейш В.Ф. Нестационарна поведінка підкріпленої циліндричної оболонки з зосередженими масами при повздовжньому ударі / В.Ф. Мейш // Доповіді АН України. – 1991. – С. 84 – 89.
111. Абросимов Н.А. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек при импульсном нагружении / Н.А. Абросимов, В.Г.Баженов, А.В. Елесин // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2000. – № 2. – С. 181 – 189.

112. Иерусалимовский К.М. Методика расчета напряженно – деформированного состояния тонкостенных цилиндрических конструкций при неравномерных нагрузках / К.М. Иерусалимовский, А.Н. Корнеев, В.П.Фомин // Тр. ЦАГИ. – 1997. – №2628. – С. 21 – 28.
113. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций при действии ударных и импульсных нагрузок / Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. – К.: Наук. думка, 1978. – 184 с.
114. Луговой П.З. Исследование ребристых взрывных камер при импульсной обработке материалов / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Сопротивл. матер. и теория сооруж. – Киев: Будівельник, 1989. – Вып. 54. – С. 79 – 82.
115. Луговой П.З. Осесимметричные колебания ребристых сферических оболочек с отверстием при импульсных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 5. – С. 51 – 56.
116. Мейш В.Ф. Вынужденные колебания многослойных сферических оболочек с подкрепленным отверстием при нестационарном нагружении / В.Ф. Мейш, Н.В. Кравченко // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 146 – 150.
117. Колодяжный А.В. Нестационарные колебания подкрепленных кольцами конических оболочек / А.В. Колодяжный, В.И. Севрюков // Вопр. механики деформируемого твердо тела. – 1983. – № 4. – С. 59 – 64.
118. Ломунов В.К. Исследование выпучивания дискретно – подкрепленных цилиндрических и конических упруго – пластических оболочек при осевом ударе / В.К. Ломунов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. – Горьк. ун-т, 1977. – вып. 7. – С. 64 – 71.
119. Абросимов Н. А. Численное моделирование нелинейного поведения подкрепленной конической оболочки с присоединенными массами при соударении с препятствием / Н. А. Абросимов, А. В. Елесин // Прикл. проблем. прочн. и пластич. – 2000. – № 62. – С. 51 – 57.

120. Мейш В.Ф. К численному решению задач динамики подкрепленных эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 53 – 59.
121. Луговой П.З. Исследование волновых процессов в дискретно подкрепленных оболочках / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 51 – 54.
122. Луговой П.З. Исследование нестационарных процессов деформирования дискретно подкрепленных пластин и оболочек в неклассической постановке / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 88 – 94.
123. Луговой П.З. Уточненная модель дискретно подкрепленных пластин и оболочек при нестационарных нагрузках / П.З. Луговой, В.Ф.Мейш // Исследования по теории пластин и оболочек (Казань). – 1992. – Вып. 25. – С. 14 – 20.
124. Андрианов И.В. Новый асимптотический метод расчета подкрепленных конструкций при учете дискретности размещения ребер и их ширины / И.В. Андрианов // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352, № 4. – С. 474 – 476.
125. Андрианов И.В. Асимптотическое исследование динамики эксцентрично подкрепленных пластин / И.В. Андрианов, В.И. Пискунов // Прикл. матем. и механика. – 1997. – Т. 61, № 2. – С. 341 – 344.
126. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya. The problems of statical and dynamical deformation of anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 193.
127. Grigorenko .Ya.M, Yaremenko S.N. Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 2. – P. 195 – 204.
128. Irie T., Yamada G., Kobayashi Y. Free vibrations of non – circular shells with longitudinal interior partitions // J. of Sound and Vibration. – 1984. – **96** (1). – P. 133 – 142.

129. Kumar U., Singh V. Approximate vibrations analysis of noncircular cylinders having varying thickness // AIAA Journal. – 1991. – 30, N 7. – P. 1929 – 1931.
130. Maiborodina N.V., Meish V.F. Forced vibrations of ellipsoidal shells reinforced with transverse ribs under nonstationary distributed load // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6. – P. 693 – 701.
131. Patel B.P., Gupta S.S., Loknath M.S., Kadu C.P. Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher – order theory // Compos. Structure. – 2005. – 69. – P. 259 – 270.
132. Soldatos P.K. Mechanics of cylindrical shells with non- circular cross section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – 52, N 8. – P. 237 – 274.
133. Soldatos K.P., Tzivanidis G.J. Buckling and vibrations of cross – ply laminated non – circular cylindrical shells // J. of Sound and Vibration. – 1982. – 82 (3). – P. 425 – 434.
134. Suzuki K., Leissa A.W. Free vibrations of noncircular cylindrical shells having circumferentially varying thickness // J. of Applied Mechanics. – 1985. – 52, N1. – P. 149 – 154.
135. Suzuki K., Shikanai G., Leissa A.W. Free vibrations of laminated composite noncircular thin cylindrical shells // J. of Applied Mechanics. – 1994. – 61, N4. – P. 861 – 871.
136. Tornabene F. Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shells and annular plate structure with a four – parameter power – law distribution // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2009. – 198. – P. 2911 – 2935.
137. Firer M., Sheinman I. Nonlinear analysis of laminated noncircular cylindrical shells // Int. Journal of Solids and Structures. – 1995. – 32 (10). – P. 1405 – 1416.
138. Xiang Y., Huang Y.Y. A novel semi – analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non – circular cylindrical shells in water // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2005. – 18. – P. 1 – 12.

139. Yamada G., Irie T., Tagana Y. Free vibrations of non – circular cylindrical shells with variable circumferential profile // J. of Sound and Vibration. – 1984. – 95 (1). – P. 117 – 126.
140. Zou S.Z., Huang Y.Y. He Z., Xiang Y. New matrix method for response analysis of circumferentially stiffened non – circular shells under harmonic pressure // Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – 28 (10). – P. 1397 – 1405.
141. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттеркрилд. – М.: Мир, 1984. – 486 с.
142. Бребна К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бребна, С. Уокер. – М.: Мир, 1982. – 247 с.
143. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 539с.
144. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 446 с.
145. Галагер Р. Метод конечных элементов / Галагер Р. – М.: Мир, 1984. – 323 с.
146. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
147. Самарский А.А. Теория разностных схем / Самарский А.А. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
148. Головко К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г.Головко, П.З.Луговой, В.Ф.Мейш; под ред. акад. НАН Украины А.Н.Гузя. – К.: Издательскополиграфический центр «Киевский университет», 2012. – 541 с.
149. Богданов С.Ю. О численном решении динамических задач нелинейной теории подкрепленных оболочек / С.Ю. Богданов, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 46–52.
150. Шульга Н.А. К исследованию нестационарных колебаний подкрепленных оболочек конечно – разностными методами / Н.А. Шульга,

В.Ф. Мейш, С.Ю. Богданов // Современные проблемы концентрации напряжений. – 1998. – С. 269 – 273.

151. Болдычев А.Е. Повышение эффективности метода конечных элементов при решении вырождающихся задач / А.Е. Болдычев // Вопросы динамики и прочности. – 1983. – № 42. – С. 38 – 48.

152. Навал И.К. Нестационарные волны в деформируемых средах / Навал И.К., Пацюк В.И., Римский В.К. – Кишинев: Штиница, 1986. – 236 с.

153. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И.И.Ворович // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – 1964. – № 3. – С. 116 – 137.

154. Liao C.L. Dynamic stability of stiffened laminated composite plates and shells subjected to in – plane pulsating forces / C.L. Liao, C.R. Cheng // Sound Vib. – 1994. – Vol. 174, № 3. – P. 335 – 351.

155. Mustafa B.A.J. Free vibration analysis of multisymmetric stiffened shells / B.A.J. Mustafa, R. Ali // Comput. and Struct. – 1987. – Vol. 27, № 6. – P. 848 – 856.

156. Анкянец Е. К. Собственные колебания цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами, присоединенными к ней с помощью дискретных упругих связей / Е. К. Анкянец // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 108 – 113.

157. Абовский Н.П. Ребристые оболочки: учебное пособие. Ч. 1 / Абовский Н.П. – Красноярск: Красноярск. политех. ин-т, 1967. – 64 с.

158. Абовский Н.П. Колебания подкрепленных оболочек: учебное пособие. Ч. 1 / Н.П. Абовский, В.И. Савченко. – Красноярск, 1971. – 132 с.

159. Григоренко Я.М. Свободные колебания элементов оболочных конструкций / Я.М.Григоренко, Е.И.Беспалова, А.Б.Китайгородский – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.

160. Вольмир А.С. Об устойчивости цилиндрических оболочек при динамическом нагружении / А.С. Вольмир // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 113, № 5. – С. 806 – 808.

161. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / Вольмир А.С. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
162. Агамиров В.Л. Экспериментальное исследование поведения подкрепленной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления при ударном нагружении чистым изгибом / В.Л. Агамиров, Минь Кам Во // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 5. – С. 114 – 118.
163. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / Самарский А.А. – М.: Наука, 1976. – 582 с.
164. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / Болотин В.В. – М.: Физматгиз. – 1961. – 339 с.
165. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Марчук Г.И. – М.: Наука, 1980. – 536 с.