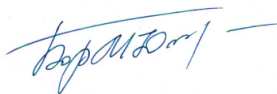


**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМЕНІ С.П. ТИМОШЕНКА**

БОРИСЕНКО МАКСИМ ЮРІЙОВИЧ



УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНИЙ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВІЛЬНИХ
КОЛИВАНЬ БАГАТОКУТНИХ ПЛАСТИН І ЦИЛІНДРИЧНИХ
ОБОЛОНОК З КОНСТРУКТИВНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 2025

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка Національної академії наук України.

Науковий консультант: академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Григоренко Олександр Ярославович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, завідувач відділу обчислювальних
методів.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Іванченко Григорій Михайлович,
Київський національний університет
будівництва і архітектури, декан будівельного
факультету;
доктор технічних наук, професор
Курпа Лідія Василівна,
Національний технічний університет «ХПІ»,
професор кафедри прикладної математики;
доктор фізико-математичних наук, професор
Лоза Ігор Андрійович,
Національний транспортний університет,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної
механіки

Захист відбудеться «16» жовтня 2025 р. о «11:00» годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.02 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (ауд. 311, вул. Нестерова, 3, м. Київ, 03057).

З дисертацією можна ознайомитися на офіційному сайті <http://inmech.kyiv.ua> та в науковій бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3.

Реферат розісланий «09» вересня 2025 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.02
доктор технічних наук



Юрій СКОЦАРЕНКО

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У багатьох галузях сучасної техніки, машинобудування та будівництва широке застосування знаходять багатокутні пластинчасті елементи, комбінацією яких можна отримати будь-яку складну форму корпусу космічного апарату або будівлі із нестандартним архітектурним рішенням, та оболонкові елементи різних поперечних перерізів, які мають високу міцність при порівняно невеликій масі. В залежності від призначення та дизайну такі пластинчасті та оболонкові елементи можуть мати товстостінність або змінну товщину, різні способи закріплення або з'єднання, технологічні отвори, складні контури поперечного перерізу та інші конструктивні неоднорідності. Прикладами таких конструкцій є різні деталі та корпуси літальних, космічних, підводних та наземних апаратів, елементи житлових та комерційних будівель, зерносховищ та нафтосховищ, стадіонів та портів, мостів та тунелів, об'єктів хімічної промисловості, електроніки, інженерії, робототехніки та інших галузей виробництва із застосуванням передових технологій. При проектуванні та експлуатації таких конструкцій необхідно враховувати дію різноманітних динамічних навантажень, оптимально підбирати форму, геометричні розміри, матеріал елементів конструкцій та варіанти їх поєднання з метою забезпечення міцності, стійкості, легкості та економічності. Необхідно мати надійні чисельні та експериментальні методи досліджень динамічних характеристик, які з високою точністю дають можливість визначити частоти і форми вільних коливань пластин та оболонок з конструктивними неоднорідностями з різних матеріалів при різних граничних умовах.

Аналіз наукової літератури з даної тематики показав, що для досліджень коливань пластин і оболонок простої геометрії існує багато аналітичних та теоретичних методів. У випадку визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок різної конструктивної неоднорідності або товстостінності багато аналітичних і теоретичних методів втрачають актуальність, оскільки дослідження пов'язані із значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами, при розв'язанні якої спостерігається нестійкість розрахунку та втрата необхідного порядку даних обчислень.

Дослідження складних об'єктів можливо здійснювати за допомогою чисельних методів, серед яких особливої популярності набув метод скінченних елементів (МСЕ). Проте результати кожного нового класу задач, розв'язаного МСЕ, необхідно підтверджувати експериментально, оскільки можна допуститись помилок при моделюванні об'єкта на ЕОМ.

Серед експериментальних методів добре себе зарекомендували резонансні методи та метод голографічної інтерферометрії, які дають можливість в реальному часі на реальному об'єкті спостерігати форми коливань, реєструвати момент виникнення резонансу та фіксувати частоту коливань.

Визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю на основі розвинених та удосконалених чисельних та експериментальних підходів є актуальною проблемою прикладної математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дослідження проведено і включено у наукові звіти науково-дослідних робіт: НДР № 1.3.1.401 «Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування», номер державної реєстрації 0115U005709, 2016-2020 рр.; НДР №1.3.1.410 «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторії механічних систем», номер державної реєстрації 0117U000700, 2017-2021 рр.; НДР №1.3.1.433 «Аналіз напружено-деформованого стану, коливань та стійкості спряжених оболонок обертання, некругових циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом та багатокутних пластин на основі чисельних та експериментальних підходів», номер державної реєстрації 0120U105681, 2021-2025 рр.; НДР №1.3.1.452-23 «Розрахунок параметрів напружено-деформованого стану конструктивних елементів ракетно-космічної техніки у вигляді циліндричних оболонок складної геометрії та неоднорідної структури за статичним і динамічним навантаженням. Розділ 1. Аналіз впливу складної геометрії та неоднорідної структури циліндричних оболонок, як конструктивних елементів ракетно-космічної техніки, на розподіл полів напружень і переміщень при різному характері деформування», номер державної реєстрації 0123U100910, 2023-2024 рр.; НДР ІМех-2024/2 «Дослідження фізико-механічних характеристик радіопоглинаючих композитних матеріалів та покриттів конструктивних елементів сучасних засобів ураження», номер державної реєстрації 0124U002590, 2024 р.; НДР ІМех-2025/1 «Вивчення структури та фізико-механічних характеристик матеріалів, що застосовуються у зразках крилатих, балістичних, гіперзвукових аеробалістичних, надзвукових протикорабельних ракет та авіаційних ракет повітря-повітря, безпілотних авіаційних комплексів, що застосовуються РФ у війні проти України», номер державної реєстрації 0125U000036д, 2025-2026 рр.; НДР №1.3.1.468-25 «Напружено-деформований стан пластин і оболонок складної форми як елементів конструкцій спеціального призначення та ракетної техніки з неоднорідною

структурою», номер державної реєстрації 0125U000957, 2025-2026 рр.

Мета дослідження полягає в аналізі вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю на основі розвинених чисельних та експериментальних підходів і встановленні залежностей частот та форм вільних коливань пластин та оболонок від зміни різних конструктивних параметрів.

Для досягнення поставленої мети було виконано такі **завдання**:

- розрахунок методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та встановлення залежності частоти вільних коливань пластин від товщини, наявності круглого отвору та величини його радіуса, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов;
- розрахунок методом скінченних елементів частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, аналіз впливу на спектр частот і форм вільних коливань оболонок її товщини та характеру зміни товщини, кута розкриття та способу розкриття оболонки, геометрії поперечного перерізу, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов;
- розробка комбінованого підходу визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами;
- розрахунок числових коефіцієнтів та розрахунок формулою частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами, узагальнення використання формули;
- розвинення експериментального підходу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин з отвором та без з різними граничними умовами на основі резонансного методу;
- розвинення експериментального підходу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та циліндричних оболонок з різними граничними умовами на основі методу стробоскопічної інтерферометрії;
- проведення експериментальних досліджень та порівняння отриманих частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок за допомогою двох запропонованих експериментальних підходів з частотами і формами вільних коливань розрахованими чисельно;
- проведення дослідження достовірності, точності та збіжності результатів, отриманих на основі чисельного та експериментальних підходів для розрахунків частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та циліндричних оболонок з різними конструктивними

неоднорідностями.

Об'єктом дослідження є динамічна поведінка багатокутних пластин та циліндричних оболонок різної конструктивної неоднорідності.

Предметом дослідження є спектр частот та форм вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу в залежності від характеру зміни різних конструктивних параметрів.

Методи дослідження. Чисельні розрахунки частот і форм вільних коливань пластин та циліндричних оболонок проводились методом скінченних елементів, який реалізовано в програмному середовищі FEMAP. Визначення частот вільних коливань багатокутних пластин проводились за допомогою модифікованої формули для визначення частот вільних коливань ізотропної прямокутної пластини. Експериментальні дослідження частот і форм вільних коливань пластин та циліндричних оболонок проводились методом строболографічної інтерферометрії. Експериментальні дослідження частот і форм вільних коливань пластин проводились резонансним методом.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань ізотропних багатокутних пластин з отвором і без та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, різної товщини, з різними варіантами граничних умов;
- розроблено комбінований підхід для розрахунку частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини на основі модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань ізотропної прямокутної пластини та розраховані методом скінченних елементів коефіцієнти для кожної багатокутної пластини з різними граничними умовами, які залежать від співвідношення товщини до сторони пластини;
- розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для демонстрації коливань в реальному часі та визначення з достатнім ступенем достовірності частот і форм вільних коливань багатокутних пластин;
- розвинено експериментальний підхід на основі строболографічної інтерферометрії та створено стробоккомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок, який в реальному часі демонструє коливання поверхні пружного тіла у вигляді інтерференційних картин, дає можливість змінювати режим віброзбудження та амплітуду коливань, з високим ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань;

- проведено аналіз вільних коливань широкого класу пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю та отримано нові результати у вигляді числових значень частот та ілюстрацій форм вільних коливань, проведено порівняння результатів отриманих за допомогою різних підходів;
- на основі результатів отриманих чисельним та експериментальними підходами проведено аналіз особливостей динамічних характеристик широкого класу пластин і оболонок, виявлені закономірності впливу геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот і форм вільних коливань кожного з розглянутих пружних тіл.

Обґрунтованість та достовірність результатів наведених у дисертації забезпечується застосуванням обґрунтованих чисельних методів і критерію практичної збіжності отриманих результатів; коректністю проведення експериментів та вимірювань; фізично правдоподібною інтерпретацією отриманих результатів; порівняльним аналізом точності та узгодженням результатів отриманих різними методами; чисельними розв'язками тестових задач.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати та розвинені підходи можуть бути використанні при розв'язанні широкого класу практичних задач визначення динамічних характеристик вільних коливань пластинчастих та оболонкових елементів з різною конструктивною неоднорідністю; розвинений чисельний підхід дає можливість отримувати достовірну інформацію про спектр частот і форм вільних коливань елементів конструкції в умовах максимально наближених до реальних умов експлуатації без значних затрат коштів та часу, змінюючи різні параметри, обирати оптимальні геометричні розміри, економічно вигідні матеріали та способи закріплення для забезпечення міцності, стійкості та надійності конструкції; розроблений комбінований підхід дає можливість швидко визначити частоти і форми вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами; розвинені експериментальні підходи дають можливість в реальному часі демонструвати вільні коливання пружних тіл, а одержані результати застосовувати для оцінки результатів, отриманих різними теоретичними методами.

Результати отримані комбінованим підходом були передані для впровадження в розрахункову практику державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля».

Результати дисертаційного дослідження використано в рамках виконання цільової програми з оборонної тематики за напрямом прикладні дослідження і розробки згідно з договорами ІМех-2024/2 та ІМех-2025/1.

Особистий внесок здобувача. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, опублікованих у співавторстві, здобувач брав

участь у постановці задач, розвинені підходів до їх розв'язання та реалізації розрахунків та експериментів, обговорені отриманих результатів досліджень. Здобувачеві повністю належить поширення чисельного підходу на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот і форм вільних коливань багатокутних пластин [1, 4, 8, 10-14, 16, 19, 21, 22, 23, 26, 30-32, 35, 38, 39] з отвором і без, різної товщини, з різною комбінацією граничних умов та замкнених і незамкнених циліндричних оболонок [2, 3, 5-7, 9, 15, 17, 18, 20, 24, 25, 27-29, 33, 36, 37] різного поперечного перерізу, з різним характером зміни товщини, з довільними граничними умовами; розробка комбінованого підходу для визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин [4, 10, 13, 16, 21, 34] різної товщини та розрахунок коефіцієнтів для кожної багатокутної пластини; розвинення експериментального підходу на основі резонансного методу та створення віброкомплексу для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин [8, 14, 19, 34], розвинення експериментального підходу на основі методу стробогологафічної інтерферометрії та створення віброкомплексу для визначення частот і форм вільних коливань пластин та оболонок. Співавтори академік НАН України О.Я. Григоренко, к.ф.-м.н. О.В. Бойчук брали участь у постановках задач та аналізі отриманих результатів; академік НАПН України В.Д. Будаєв, професор W.H. Muller та інші співавтори брали участь в деяких розрахунках та аналізі одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема: Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ITM – 2016» (Миколаїв, 2016); Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпропетровськ/Дніпро, Дніпродзержинськ/Кам'янське, 2016, 2019, 2021); Міжнародна науково-практична конференція «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук» (Миколаїв, 2016, 2018); Всеукраїнська науково-практична конференція «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів» (Миколаїв, 2016); IV, VI Міжнародні наукові конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2017, 2021); Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2018, 2023); II Міжнародна науково-технічна конференція «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні» (Харків, 2020); XXVI Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук» (Львів, 2021); Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» (Львів, 2022); Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» (Львів, 2024); Міжнародна наукова

конференція «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, 2024); Міжнародна науково-технічна конференція «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення» (Дніпро, 2025).

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалась на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2025 р.), на науковому семінарі за напрямом «Механіка оболонкових систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2025 р.), на загальноінститутському семінарі з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор В.М. Назаренко, 2025 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н., професор І.А. Лоза, 2025 р.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (керівник – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професор Я.О. Жук, 2025 р.).

Публікації. Основні результати дисертації висвітлені в 39 наукових працях, з них 18 [1, 5-21] статей у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України і статті у наукових періодичних виданнях інших держав із наукового напрямку, з якого підготовлено дисертацію; три [2-4] публікації, які є розділами у різних колективних монографіях видавництва Springer; одна стаття [22] у науковому журналі який не включений до Переліку наукових фахових видань України; 17 публікацій [23-39] в матеріалах вітчизняних та міжнародних наукових конференцій. Дванадцять праць [1-4, 7, 11, 13-15, 17, 18, 21] опубліковано у різних періодичних виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України та у закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та Scopus. Статі [7, 11, 13, 14, 15, 17, 18] опубліковані у виданнях віднесених до третього квартиля (Q3), статті [2-4] опубліковані у виданнях віднесених до четвертого квартиля (Q4) відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел з 303 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 341 сторінку, разом із 244 рисунками та 172 таблицями.

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому консультантові академіку НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Ярославовичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** аргументовано актуальність теми дисертаційної роботи; наведено відомості про зв'язок роботи з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; визначено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; приводяться дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок здобувача у кожній науковій праці у співавторстві; представлені дані про апробацію результатів дисертації, її структуру і обсяг.

У **першому розділі** подано огляд літератури за темою дисертації. На основі аналізу літературних джерел висвітлено сучасний стан тематики дисертації та встановлені актуальні методи дослідження вільних коливань пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю.

При розробці загальної теорії пластин і оболонок значну роль відіграли наукові доробки Л.А. Аголюяна, С.О. Амбарцумяна, О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, О.М. Кільчевського, А.Д. Коваленка, В.Д. Кубенка, Г.М. Савіна, С.П. Тимошенка, Ю.М. Шевченка, L. Babuska, E.F.F. Chladni, L. Librescu, A.E.H. Love, A.K. Noor, W. Petraszkiewicz, E. Ramm, L. Rayleigh, E. Reissner, W. Ritz, K.P. Soldatos та ін.

Розв'язанню деяких класів задач динаміки пластин та оболонок складної форми присвячені роботи О.І. Беспалової, А.Т. Василенка, О.Я. Григоренка, В.С. Гудрамовича, В.І. Гуляєва, А.П. Дзюби, І.І. Дияка, Я.О. Жука, В.Л. Заруцького, Г.М. Іванченка, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Б.Я. Кантора, В.Г. Карнаухова, В.І. Козлова, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, П.П. Лізунова, В.В. Лободи, І.А. Лози, П.З. Лугового, В.Ф. Мейша, Л.В. Мольченка, Б.Л. Пелеха, В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова, І.К. Сенченкова, Н.В. Сметанкіної, Є.А. Сторожука, І.Ю. Хоми, І.С. Чернишенка, М.О. Шульги, О.М. Шупікова, R.N. Arnold, M.L. Baron, P. A. Laura, A. W. Leissa, F. Pellicano та ін.

Ключовими працями у становленні та популяризації методу скінченних елементів є роботи О.С. Zienkiewicz. Застосуванню МСЕ для розрахунків задач механіки присвячені роботи К.Н. Рудакова, Я.Г. Савула, А.С. Сахарова, R.H. Gallagher, E. Madenci, G. Strang. Вільні коливання пластин і оболонок досліджувались МСЕ в роботах A. Adini, S. Chandra, D. Chapelle, Y. Lee, A. Rawat, M. Radwańska, J. Wang, Y. Yong, P. Zhu та ін.

Дослідженню методами голографічної, стробоголографічної та спелінтерферометрії вільних коливань пластин та оболонок різної геометрії присвячені роботи Ю.Г. Золотого, А.С. Каірова, М.Р. Ткача, С. Huang, K. Kumar, С. Ma, С. Shakher, S. Singh та ін.

Для досліджень вільних коливань пластин і оболонок простої геометрії існує багато аналітичних та теоретичних методів, які у випадку пластин і оболонок різної конструктивної неоднорідності або

товстостінності незастосовні, оскільки пов'язані із значними труднощами реалізації математичної моделі. Дослідження даної дисертаційної роботи спрямовані на розвинення та удосконалення чисельних та експериментальних методів визначення динамічних характеристик пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю.

Зроблений огляд літератури підтверджує доцільність та актуальність проведення досліджень у вибраному напрямку.

У **другому розділі** наведені основні співвідношення теорії пластин і оболонок в рамках теорії Кірхгофа – Лява, зроблена постановка задач про вільні коливання циліндричних оболонок та пластин. Запропоновано два експериментальні методи для визначення частот і форм вільних коливань пластин і оболонок: метод голографічної інтерферометрії, який дає можливість безконтактно з високою точністю досліджувати власні коливання об'єктів складної форми; резонансний метод, який полягає у безпосередньому збудженні коливань досліджуваної пластини. Обидва методи дають можливість плавно змінювати частоту коливань, а при досягненні резонансних частот фіксувати частоту та реєструвати розподіл амплітуд коливань.

Малі поперечні коливання ізотропної пластини сталої товщини h в ортогональній системі координат $x_1 x_2$ описуються диференціальним рівнянням

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q, \quad (1)$$

де D – циліндрична жорсткість; Δ – загальний оператор Лапласа; w – прогин; ρ – густина матеріалу; q – інтенсивність поперечного навантаження як функція від (x_1, x_2, t) ;

Циліндрична жорсткість визначається із співвідношення

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2)$$

На кожному з країв пластини можна задати один з видів граничних умов, наприклад, для краю $x_1 = \text{const}$:

– жорстко закріплений край (C)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad (3)$$

– шарнірно обпертий край (S)

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0; \quad (4)$$

– вільний край (F)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2 \partial x_1} = 0. \quad (5)$$

Власні форми коливань шарнірно обертої по всім краям прямокутної пластини зі сторонами a_1, a_2 зручно шукати у вигляді

$$w_{(s)} = w_0 \sin \frac{\pi m_s}{a_1} x_1 \cdot \sin \frac{\pi n_s}{a_2} x_2, \quad (m_s, n_s = 1, 2, 3, \dots), \quad (6)$$

де w_0 – амплітуда прогинів, m_s – кількість півхвиль вздовж сторони a_1 , n_s – кількість півхвиль вздовж сторони a_2 .

Вираз (6) задовольняє кінематичні та статичні граничні умови (4). Підставивши (6) в рівняння (1) при умові відсутності поперечного навантаження $q=0$ та провівши відповідні математичні операції отримаємо рівняння для визначення циклічної частоти

$$\omega_{(s)} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a_1^2} + \frac{n^2}{a_2^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad (7)$$

Розглянемо вільні коливання квадратної пластини $a_1=a_2=a$ з однаковими граничними умовами (S) на всіх краях. Для отримання частот вільних коливань f в Гц поділимо праву частину (7) на 2π . З урахуванням виразу (2) перепишемо (7) у вигляді

$$f_{(s)} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m^2 + n^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}} \frac{1}{\rho h}. \quad (8)$$

У виразі (8) згрупуємо величини за категоріями: величини, які відповідають за геометрію пластини; величини, які характеризують матеріал пластини; величини, які залежать від форми коливань. В результаті отримаємо зведену форму запису формули (7)

$$f_{(s)} = \left(\frac{h^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \left(\frac{\pi(m^2 + n^2)}{4\sqrt{3}} \right) \quad (9)$$

$$G = \frac{h}{a^2}; \quad M = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \quad F_{(s)} = \frac{\pi(m^2 + n^2)}{4\sqrt{3}}, \quad (10)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу; $F_{(s)}$ – коефіцієнт форми коливань шарнірно обертої по всім краям квадратної пластини.

Відмітимо, що у виразі (9) третім множником є величина, яка залежить від конкретної форми коливань пластини шарнірно обертої по всім краям, а перші два множники є відомими величинами і не залежать від граничних умов. Виходячи з цих міркувань, запишемо вираз (9) у загальному вигляді як формулу для розрахунку i -ої частоти вільних коливань квадратної пластини з

довільними граничними умовами

$$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i, \quad (11)$$

де F_i – коефіцієнт форми коливань і граничних умов квадратної пластини.

Якщо наперед будуть відомі частоти коливань пластин f^* при відповідних граничних умовах, наприклад, визначені експериментально або чисельно, то коефіцієнт F_i можна визначити за формулою

$$F_i = \left(\frac{a^2}{h} \right) \cdot \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \cdot f_i^*. \quad (12)$$

Оскільки вираз (11) залежить від відомих фізико-механічних характеристик матеріалу пластини, від товщини та сторони пластини, а третій множник визначається формулою (12), то можна зробити припущення, що математична модель, яка виражається цими двома формулами, може бути поширена на визначення частот багатокутних пластин, за умови, що a – сторона правильного багатокутника.

При розрахунку частот і форм вільних коливань методом скінченних елементів використовуються рівняння руху механічної системи (МС) зі скінченною кількістю ступенів вільності, які в разі відсутності зовнішніх сил описуються системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (13)$$

де $L = T - U$. Записавши в дискретній формі функціонал кінетичної енергії та функціонал енергії деформації

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\vec{\Phi}}_i; \quad U = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Phi}}_i^T \mathbf{K}_i \dot{\vec{\Phi}}_i, \quad (14)$$

де \mathbf{M}_i та \mathbf{K}_i – матриця мас та матриця жорсткості i -го скінченного елемента; $\vec{\Phi}_i$ – вектор вузлових переміщень i -го елемента, з рівняння Лагранжа (13), якщо демпфування відсутнє, отримаємо такі рівняння руху

$$\mathbf{K} \vec{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\vec{\Phi}}_j = 0, \quad (15)$$

де \mathbf{M} та \mathbf{K} – матриця мас та матриця жорсткості МС; $\vec{\Phi}_j$ – вектор переміщень вузлів МС, що відповідає j -му ступеню вільності та формує j -ту форму вільних коливань.

Під час вільних коливаннях пластин і оболонок усі вузлові точки скінченно-елементної сітки коливаються гармонічно як функція часу.

$$\vec{\Phi}_j(t) = \vec{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (16)$$

Підставивши (16) у (15), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь для

знаходження частот і форм вільних коливань

$$\mathbf{K}\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M}\vec{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (17)$$

де ω_j – пульсація або частота гармонічних коливань.

NX Nastran для визначення частот і форм вільних коливань, якщо не враховувати демпфування та дисипацію енергії, застосовує метод Ланцоша, який потребує менше ресурсів у порівнянні з іншими методами. Даний метод розраховує n -ну кількість частот і форм вільних коливань з достатньо малою похибкою розрахунків $\|\vec{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{\Phi}_j\| / \|\vec{\Phi}_j\| \leq 10^{-7}$.

За цим методом матриця \mathbf{T} зводиться до трьохдіагонального вигляду

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}_k^T \mathbf{M} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{Q}_k, \quad (18)$$

де $\mathbf{Q}_k = \{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times k$; N_{eq} – кількість рівнянь; k – номер кроку; \vec{q}_k – k -й вектор Ланцоша.

Вираз

$$\beta_{k+1} \vec{q}_{k+1} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \vec{q}_k - \alpha_k \vec{q}_k - \beta_k \vec{q}_k \quad (19)$$

здійснює побудову наступного вектору Ланцоша \vec{q}_{k+1} та встановлює значення для відповідного рядка матриці \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Як результат отримаємо задачу на власні значення:

$$\mathbf{T} \vec{s}_h^k - \lambda_h^k \vec{s}_h^k = 0, \quad h = 1, 2, \dots, k, \quad (\omega_h^k)^2 = 1/\lambda_h^k, \quad (21)$$

де ω_h^k – k -та апроксимація кругової частоти ω_h , $h = 1, 2, \dots, n$; n – число власних пар.

Розрахунки виконуються доти, доки не буде забезпечено необхідну точність для кожного з шуканих власних значень.

У **третьому розділі** методом скінченних елементів проведено розрахунок частот і форм вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними фізико-механічними характеристиками при різних граничних умовах на краях. Розрахунки методом скінченних елементів проводились за допомогою програмного продукту FEMAP з розв'язувачем NX Nastran. Запропонований програмний засіб відноситься до систем

автоматизованого конструювання і дає можливість обчислювати об'єкти складної форми, оцінювати поведінку комп'ютерної моделі конструкції в реальних умовах експлуатації, давати оцінку її несучої здатності без значних затрат часу та коштів. Для побудови коректної скінченно-елементної моделі пластини та забезпечення високої точності розрахунків проведено дослідження вибору типу та розміру скінченного елемента з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів. Достовірність результатів, отриманих за допомогою МСЕ, перевірено на двох тестових задачах для ізотропних квадратних пластин з вільними краями та жорстко закріпленими краями. Розраховані частоти вільних коливань для обох тестових задач показують хорошу збіжність з частотами отриманими іншими авторами.

За допомогою FEMAP побудовано геометрію шестикутної пластини правильної форми зі стороною $a = 240\text{ мм}$, товщиною $h = 4\text{ мм}$ ($h/a = 1/60$). В якості матеріалу пластини задавався алюміній з наступними параметрами: модуль Юнга $E = 71\text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$, густина $\rho = 2710\text{ кг/м}^3$. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених (C) і вільних (F) країв (рис. 1). Скінченно-елементна розбивка проводилась solid-елементами розміром сторони h . Розрахунок проводився на визначення частот і форм вільних коливань. В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань шестикутної пластини з різними варіантами закріплення, які представлені в таблиці 1.

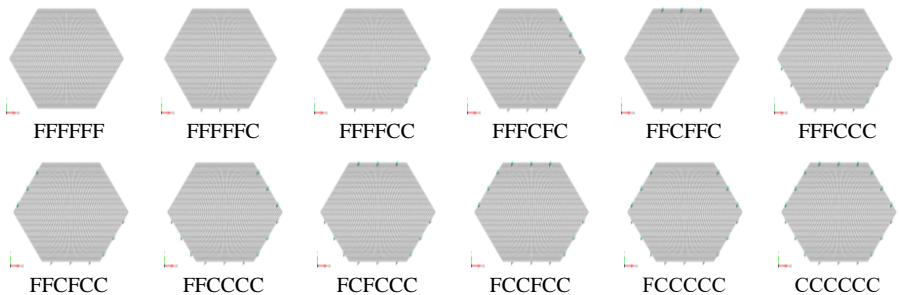


Рис. 1. Варіанти закріплення шестикутної пластини

Для встановлення залежності частоти від накладених граничних умов були введені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення відповідної частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластини з вільними краями, отримані коефіцієнти представлені в нижній частині таблиці 1. Аналізуючи дані таблиці 1 можна спостерігати, що частоти шестикутної пластини з вільними краями не є самими низькими в порівнянні

з відповідними частотами при інших варіантах закріплення, найнижчими є частоти пластинки з жорстко закріпленим одним торцем. Спостерігається мале відхилення, в межах до 1%, між першими частотами для двох пар варіантів закріплення FFFCFC і FFFCCC та FCFCCC і FCCFCC.

Таблиця 1

Частоти вільних коливань шестикутної пластини

Form	$f, \text{Гц}$											
	FFFFF	FFHHC	HHHHC	HHHFC	HHHFC	HHHCC	HHHCC	HHHCC	HHHCC	HHHCC	HHHCC	HHHCC
1	108,22	19,35	28,72	48,40	98,36	48,60	99,45	99,67	190,44	191,12	203,27	221,05
2	108,22	47,07	79,08	138,90	99,65	139,03	195,98	210,92	307,96	300,99	339,29	457,72
3	185,76	103,76	154,36	183,42	202,69	195,86	308,01	309,18	370,47	391,79	455,34	458,08
4	230,65	175,36	202,19	304,46	302,18	315,43	330,49	421,27	491,82	452,42	517,21	746,12
5	273,69	188,35	290,73	337,27	316,91	385,90	449,11	471,82	530,09	564,53	716,16	746,78
6	410,74	295,34	397,90	385,06	392,05	433,45	501,93	622,59	718,99	695,52	771,48	851,38
7	410,99	363,34	411,03	497,01	484,37	547,08	629,62	729,06	769,02	784,90	865,70	1040,43
8	435,66	409,91	455,39	542,31	582,30	662,24	707,94	744,36	873,31	871,81	932,85	1139,42
9	435,72	422,25	626,16	661,93	654,08	743,82	766,39	872,67	890,15	887,02	1152,82	1288,33
10	685,25	540,39	692,22	720,45	714,76	746,60	876,37	1013,22	1046,45	1058,51	1166,74	1290,11
Form	$\frac{f_{HHHHC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{HHHFC}}{f_{FFFFF}}$	$\frac{f_{HHHFC}}{f_{HHHHC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHHC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHFC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$	$\frac{f_{HHHCC}}{f_{HHHCC}}$
1	0,18	0,27	0,45	0,91	0,45	0,92	0,92	1,76	1,77	1,88	2,04	
2	0,43	0,73	1,28	0,92	1,28	1,81	1,95	2,85	2,78	3,14	4,23	
3	0,56	0,83	0,99	1,09	1,05	1,66	1,66	1,99	2,11	2,45	2,47	
4	0,76	0,88	1,32	1,31	1,37	1,43	1,83	2,13	1,96	2,24	3,23	
5	0,69	1,06	1,23	1,16	1,41	1,64	1,72	1,94	2,06	2,62	2,73	
6	0,72	0,97	0,94	0,95	1,06	1,22	1,52	1,75	1,69	1,88	2,07	
7	0,88	1,00	1,21	1,18	1,33	1,53	1,77	1,87	1,91	2,11	2,53	
8	0,94	1,05	1,24	1,34	1,52	1,62	1,71	2,00	2,00	2,14	2,62	
9	0,97	1,44	1,52	1,50	1,71	1,76	2,00	2,04	2,04	2,65	2,96	
10	0,79	1,01	1,05	1,04	1,09	1,28	1,48	1,53	1,54	1,70	1,88	

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFFCC) представлені на рис. 2.

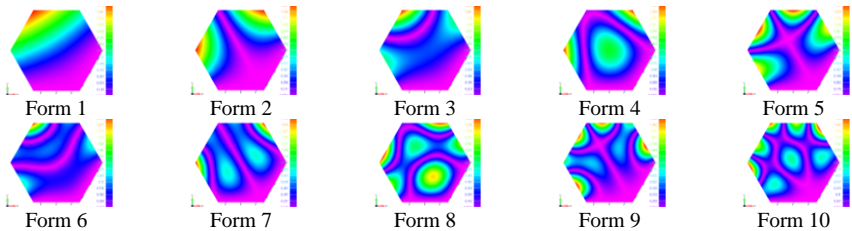


Рис. 2. Форми коливань шестикутної пластини (FFFFCC)

Перші десять форм коливань шестикутної пластини з варіантом закріплення (FFFCFC) представлені на рис. 3.

Для деяких способів закріплення можна встановити однакові форми коливань, наприклад: Form 2 (FFFFFC), Form 2 (FFFFCC), Form 2 (FFFCFC),

Form 2 (FFFCFC), Form 3 (FFCFCC) та Form 3 (FFCCCC).

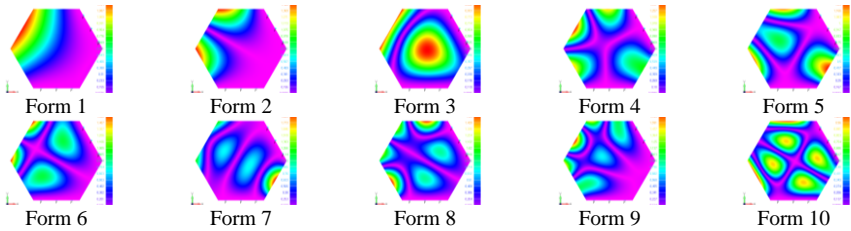


Рис. 3. Форми коливань шестикутної пластини (FFFCFC)

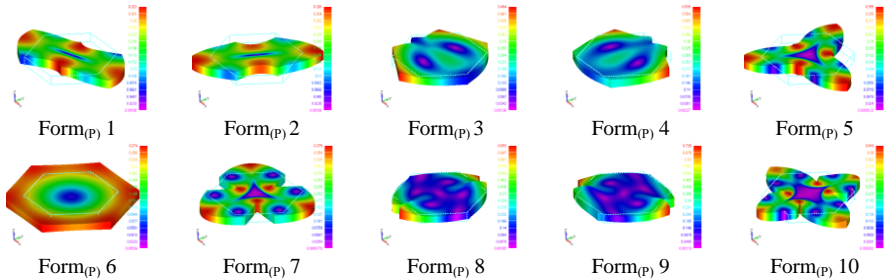
Проводились розрахунки частот вільних коливань алюмінієвих шестикутних пластин з вільними (FFFFFF) краями, стороною $a = 0,24\text{ м}$, співвідношенням товщини пластини до її сторони h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/8, 1/6, 1/5.

Розраховані частоти для шестикутних пластини з вільними краями (FFFFFF) представлені в таблиці 2. Форми коливань шестикутної пластини з вільними краями (FFFFFF) є однаковими для всіх розглянутих товщин пластини. При збільшенні товщини пластини в діапазоні перших десяти частот виявлено збільшення кількості планарних форм (Form_(p)) коливань. Поперечні форми коливань шестикутної пластини при $h/a=1/5$ наведені (рис. 4).

Таблиця 2
Частоти вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF)

Form	$f, \Gamma u$										
	1/240	1/120	1/60	1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/8	1/6	1/5
1	27,10	54,17	108,22	215,91	322,8	428,76	533,58	637,2	790,13	1036,72	1225,30
2	27,10	54,17	108,22	215,92	322,81	428,78	533,65	637,31	790,22	1036,96	1225,92
3	46,49	92,96	185,76	370,9	554,97	737,41	917,25	1094,95	1356,26	1772,27	2084,67
4	57,89	115,65	230,65	458,46	681,86	900,6	1114,49	1322,34	1622,59	2090,96	2435,04
5	68,54	137,04	273,69	545,88	815,41	1081,17	1341,51	1596,83	1968,3	2548,42	2973,61
6	102,97	205,83	410,74	817,8	1218,62	1610,69	1990,22	2358,7	2887,09	3685,47	4246,01
7	103,00	205,88	410,99	818,64	1219,86	1612,31	1993,34	2362,38	2889,94	3691,06	4258,69
8	109,39	218,52	435,66	865,38	1285,29	1693,56	2087,84	2467,23	3006,58	3818,61	4388,38
9	109,39	218,54	435,72	865,51	1285,39	1693,58	2088,14	2467,77	3007,13	3820,09	4392,22
10	172,26	344,04	685,25	1358,21	2010,2	2636,62	3232,35	3796,7	4581,46	5717,00	6477,74

Перші десять частот планарних коливань п'ятикутної пластини з вільними краями (FFFFFF) зі співвідношеннями $h/a=1/240$ і $h/a=1/5$ представлені в таблиці 3, де ε – відхилення між частотами у відсотках. Пошук перших десяти планарних форм коливань для пластин зі співвідношенням $h/a=1/5$ відбувався в діапазоні частот від 3 до 26 частоти та для пластин зі співвідношенням $h/a=1/240$ в діапазоні частот від 47 до 346 частоти.

Рис. 4. Форми планарних коливань шестикутної пластини (FFFFFF) $h/a=1/5$

Таблиця 3

Частоти планарних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) різної товщини

Form _(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$	Form _(p)	1/240	1/5	$\varepsilon, \%$
1	5367,22	5367,12	0,00	6	8121,13	8096,89	0,30
2	5367,22	5367,14	0,00	7	8465,13	8461,84	0,04
3	6128,35	6124,49	0,06	8	9182,99	9169,35	0,15
4	6128,36	6124,53	0,06	9	9183,07	9169,61	0,15
5	7984,31	7983,21	0,01	10	10798,79	10792,49	0,06

За наведеною вище методикою дослідження вільних коливань шестикутної пластини побудовані скінченно-елементні моделі та проведено розрахунок частот та форм вільних коливань трикутних, чотирикутних та п'ятикутних пластин при різних варіантах жорстко закріплених та вільних країв, встановлені коефіцієнти граничних умов. Розраховані частоти вільних коливань багатокутних пластин з десяти різних ізотропних матеріалів та із співвідношенням товщини пластини до її сторони h/a від 1/240 до 1/5. Встановлені залежності частот вільних коливань від фізико-механічних властивостей матеріалу пластини. Отримані частотні коефіцієнти багатокутних пластин різної товщини при відповідних граничних умовах. Визначенні поперечні форми коливань та планарні форми коливань. Планарні форми коливань наявні для всіх розглянутих співвідношень h/a , їх кількість та частота появи збільшується при збільшенні співвідношення h/a , і є прогнозованими, оскільки частота на якій утворюється відповідна планарна форма не залежить від товщини пластини.

В **четвертому розділі** методом скінченних елементів проведено розрахунок частот і форм вільних коливань багатокутних пластин з отвором різного розміру при різних граничних умовах.

В середовищі програми FEMAP побудована геометрична модель пластини у вигляді правильного п'ятикутника зі стороною $a=87,19$ мм, товщиною $h=2$ мм, отвором в центрі радіусом $r=6$ мм та без отвору. Як матеріал пластини був вибраний алюміній. Пластина досліджувалась при

різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h), деякі з варіантів закріплення наведені на рис. 5. Скінченно-елементна розбивка проводилась tetra-елементами розміром сторони h .

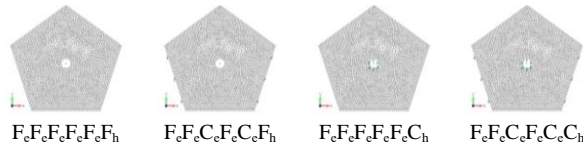


Рис. 5. Варіанти закріплення п'ятикутної пластини з отвором

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з отвором з різними варіантами жорсткого закріплення та п'ятикутних пластин без отвору з різними варіантами жорсткого закріплення. Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями представлені в таблиці 4.

Таблиця 4

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з вільними краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e C_h$		$F_e F_e F_e F_e F_e$	$F_e F_e F_e F_e F_h$	$F_e F_e F_e F_e C_h$
1	605,93	600,48	629,99	6	2072,91	2069,72	2314,71
2	605,96	600,50	630,05	7	2073,00	2069,84	2552,03
3	1033,47	1009,42	1438,20	8	2818,53	2813,64	3299,42
4	1434,64	1433,68	1438,25	9	2818,56	2813,66	3299,85
5	1434,65	1433,72	2314,57	10	3336,49	3320,71	3944,44

Порівняння I–V форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями представлені на рис. 6, порівняння VI–X форм представлені на рис. 7.

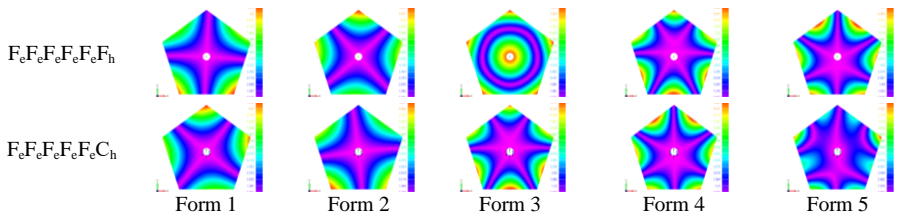


Рис. 6. I-V форми коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями

Частоти вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленими двома несуміжними краями та трьома вільними краями представлені в таблиці 5.

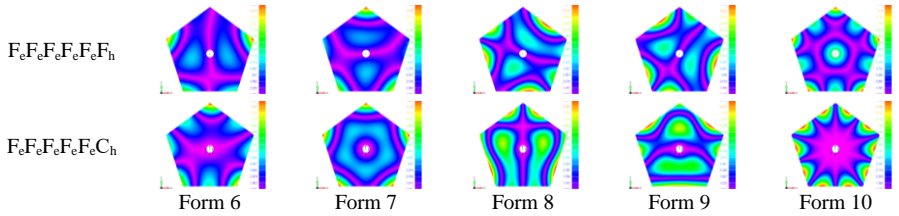


Рис. 7. VI-X форми коливань п'ятикутних пластин з отвором з вільними краями

Таблиця 5

Частоти вільних коливань пластин з жорстко закріпленими двома краями

Form	$f, \text{Гц}$			Form	$f, \text{Гц}$		
	$F_e F_e C_e F_e C_e$	$F_e F_e C_e F_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e F_e C_e C_h$		$F_e F_e C_e F_e C_e$	$F_e F_e C_e F_e C_e F_h$	$F_e F_e C_e F_e C_e C_h$
1	403,81	402,97	572,30	6	2620,30	2612,57	3564,76
2	1030,13	1022,32	1377,50	7	3015,33	3005,29	3600,58
3	1307,79	1304,97	1582,97	8	3558,51	3546,93	3610,55
4	1526,93	1520,39	2170,72	9	4020,20	3997,63	4270,93
5	2325,09	2314,86	3283,62	10	4230,64	4225,61	4500,53

Порівняння I-V форм коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома несуміжними краями та трьома вільним краями представлені на рис. 8, порівняння VI-X форм представлені на рис. 9.

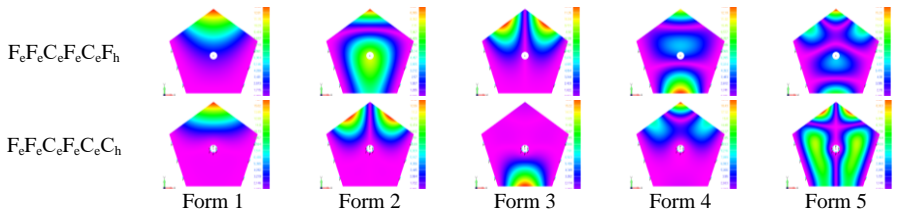


Рис. 8. I-V форми коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

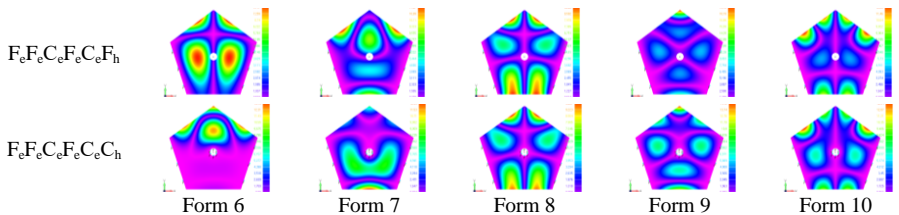


Рис. 9. VI-X форми коливань п'ятикутних пластин з отвором з жорстко закріпленими двома краями

За наведеною вище методикою розрахунку шестикутної пластини з отвором побудовані скінченно-елементні моделі та проведено розрахунок частот та форм вільних коливань ізотропних тонких трикутних, чотирикутних та шестикутних пластин з отвором при різних варіантах жорстко закріплених країв (C_e) та отвору (C_h) і вільних країв (F_e) та отвору (F_h). Встановлено вплив наявності кругового отвору та його розміру, а також вплив накладання на отвір граничних умов на частоти і форми вільних коливань пластин.

В п'ятому розділі за попередніми розрахунками, проведених методом скінченних елементів, результати яких представлені в розділі 3, розраховані коефіцієнти форми коливань і граничних умов для різних багатокутних пластин з різними граничними умовами. Поширено формулу (11) на розрахунок частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами.

Для розрахунку перших десяти коефіцієнтів форм коливань і граничних умов алюмінієвої шестикутної пластини (FFFFFF) при $h/a=1/60$ використаємо формулу (12) та частоти розраховані МСЕ з таблиці 2. Геометрія пластини відповідає геометрії пластини розглянутої в третьому розділі. Отримані коефіцієнти наведені в таблиці 6. Розраховані частоти вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF) різної товщини за формулою (11) з підстановкою коефіцієнтів з таблиці 6 представлені в таблиці 7.

Таблиця 6

Коефіцієнти шестикутних пластин (FFFFFF) при $h/a=1/60$

i	F_i	i	F_i
1	0,287401	6	1,090808
2	0,287401	7	1,091472
3	0,493325	8	1,156988
4	0,612540	9	1,157147
5	0,726842	10	1,819828

У таблиці 7 зазначені частоти для різних співвідношень h/a : 1/240, 1/120, 1/60, 1/30, 1/20, 1/15, 1/12, 1/10, 1/5, частоти розраховані МСЕ з таблиці 2 та відносна різниця розрахунків ε у відсотках. Для перших трьох частот розбіжність розрахунків за формулою (11) і МСЕ для всіх розглянутих співвідношень не перевищують 7%.

Таблиця 7

Перші десять частот вільних коливань шестикутних пластин (FFFFF)

Form	1/240		$\varepsilon, \%$	1/120		$\varepsilon, \%$	1/60		$\varepsilon, \%$
	$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE	
1	27,05	27,10	0,18	54,11	54,17	0,11	108,22	108,22	0,00
2	27,05	27,10	0,18	54,11	54,17	0,11	108,22	108,22	0,00
3	46,44	46,49	0,11	92,88	92,96	0,09	185,76	185,76	0,00
4	57,66	57,89	0,40	115,32	115,65	0,29	230,65	230,65	0,00
5	68,42	68,54	0,18	136,84	137,04	0,15	273,69	273,69	0,00
6	102,69	102,97	0,27	205,37	205,83	0,22	410,74	410,74	0,00
7	102,75	103,00	0,24	205,50	205,88	0,18	410,99	410,99	0,00
8	108,91	109,39	0,44	217,83	218,52	0,32	435,66	435,66	0,00
9	108,93	109,39	0,42	217,86	218,54	0,31	435,72	435,72	0,00
10	171,31	172,26	0,55	342,63	344,04	0,41	685,25	685,25	0,00
Max			0,55			0,41			0,00
Form	1/30		$\varepsilon, \%$	1/20		$\varepsilon, \%$	1/15		$\varepsilon, \%$
	$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE	
1	216,44	215,91	0,25	324,66	322,80	0,58	432,88	428,76	0,96
2	216,44	215,92	0,24	324,66	322,81	0,57	432,88	428,78	0,96
3	371,52	370,90	0,17	557,28	554,97	0,42	743,04	737,41	0,76
4	461,30	458,46	0,62	691,95	681,86	1,48	922,60	900,60	2,44
5	547,38	545,88	0,27	821,07	815,41	0,69	1094,76	1081,17	1,26
6	821,48	817,80	0,45	1232,22	1218,62	1,12	1642,96	1610,69	2,00
7	821,98	818,64	0,41	1232,97	1219,86	1,07	1643,96	1612,31	1,96
8	871,32	865,38	0,69	1306,98	1285,29	1,69	1742,64	1693,56	2,90
9	871,44	865,51	0,69	1307,16	1285,39	1,69	1742,88	1693,58	2,91
10	1370,50	1358,21	0,90	2055,75	2010,20	2,27	2741,00	2636,62	3,96
Max			0,90			2,27			3,96
Form	1/12		$\varepsilon, \%$	1/10		$\varepsilon, \%$	1/5		$\varepsilon, \%$
	$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE		$\Phi(11)$	MCE	
1	541,10	533,58	1,41	649,32	637,20	1,90	1298,64	1225,30	5,99
2	541,10	533,65	1,40	649,32	637,31	1,88	1298,64	1225,92	5,93
3	928,80	917,25	1,26	1114,56	1094,95	1,79	2229,12	2084,67	6,93
4	1153,25	1114,49	3,48	1383,90	1322,34	4,66	2767,80	2435,04	13,67
5	1368,45	1341,51	2,01	1642,14	1596,83	2,84	3284,28	2973,61	10,45
6	2053,70	1990,22	3,19	2464,44	2358,70	4,48	4928,88	4246,01	16,08
7	2054,95	1993,34	3,09	2465,94	2362,38	4,38	4931,88	4258,69	15,81
8	2178,30	2087,84	4,33	2613,96	2467,23	5,95	5227,92	4388,38	19,13
9	2178,60	2088,14	4,33	2614,32	2467,77	5,94	5228,64	4392,22	19,04
10	3426,25	3232,35	6,00	4111,50	3796,70	8,29	8223,00	6477,74	26,94
Max			6,00			8,29			26,94

Для підвищення точності обчислення власних частот для випадків $1/8 \leq h/a \leq 1/5$ перерахуємо коефіцієнти форм коливань і граничних умов на основі частот шестикутної пластини (FFFFF) при $h/a=1/6$. У таблиці 8 наведено розраховані уточнені коефіцієнти F_i . Перші десять частот, розраховані формулою (11) за уточненими коефіцієнтами з таблиці 8 та MCE, наведено в таблиці 9 для $1/8 \leq h/a \leq 1/5$, спостерігається зменшення розбіжності між двома розрахунками.

Таблиця 8

Уточнені коефіцієнти шестикутних пластин (FFFFFF) при $h/a=1/6$

i	F_i , при $h/a=1/6$	i	F_i , при $h/a=1/6$
1	0,275323	6	0,978755
2	0,275387	7	0,980240
3	0,470664	8	1,014113
4	0,555299	9	1,014506
5	0,676787	10	1,518271

Таблиця 9











Перші десять частот вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF)

Form	1/8		ε , %	1/6		ε , %	1/5		ε , %
	Φ (11)	MCE		Φ (11)	MCE		Φ (11)	MCE	
1	777,54	790,13	1,59	1036,72	1036,72	0,00	1244,06	1225,30	1,53
2	777,72	790,22	1,58	1036,96	1036,96	0,00	1244,35	1225,92	1,50
3	1329,20	1356,26	2,00	1772,27	1772,27	0,00	2126,72	2084,67	2,02
4	1568,22	1622,59	3,35	2090,96	2090,96	0,00	2509,15	2435,04	3,04
5	1911,31	1968,30	2,90	2548,42	2548,42	0,00	3058,10	2973,61	2,84
6	2764,10	2887,09	4,26	3685,47	3685,47	0,00	4422,56	4246,01	4,16
7	2768,30	2889,94	4,21	3691,06	3691,06	0,00	4429,27	4258,69	4,01
8	2863,96	3006,58	4,74	3818,61	3818,61	0,00	4582,33	4388,38	4,42
9	2865,07	3007,13	4,72	3820,09	3820,09	0,00	4584,11	4392,22	4,37
10	4287,75	4581,46	6,41	5717,00	5717,00	0,00	6860,40	6477,74	5,91
Max			6,41			0,00			5,91

Формулу (11) з таблицями коефіцієнтів форм коливань та граничних умов можна використовувати для швидкого інженерного розрахунку перших десяти частот вільних коливань шестикутних пластин (FFFFFF). Коефіцієнти разом з рисунками форм коливань наведені в таблиці 10.

Таблиця 10

Узагальнення використання формули (11) для шестикутних пластин (FFFFFF)

$f_i = \left(\frac{h}{a^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot F_i$							
i	F_i $1/240 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 4\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 7\%$	Form	i	F_i $1/240 \leq h/a \leq 1/10$; $\varepsilon < 4\%$	F_i $1/8 \leq h/a \leq 1/5$; $\varepsilon < 7\%$	Form
1	0,287401	0,275323		6	1,090808	0,978755	
2	0,287401	0,275387		7	1,091472	0,980240	
3	0,493325	0,470664		8	1,156988	1,014113	
4	0,612540	0,555299		9	1,157147	1,014506	
5	0,726842	0,676787		10	1,819828	1,518271	

За наведеною вище методикою розрахунку шестикутної пластини за формулою (11) та розрахунками, проведеними в розділі 3, розраховані коефіцієнти форм коливань і граничних умов для трикутних, чотирикутних та п'ятикутних пластин із фіксованим співвідношенням товщини пластини до сторони пластини при різних варіантах жорстко закріплених та вільних країв. Поширено формулу (11) на розрахунок частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами. Зроблено узагальнення використання формули (11) для кожної з розглянутих пластин. Проведено порівняння отриманих частот вільних коливань за формулою (11) з частотами, розрахованими МСЕ у розділі 3.

В шостому розділі резонансним методом (РМ) та методом стробогологафічної інтерферометрії (МСГІ) визначені частоти та форми вільних коливань багатокутних пластин з отвором та без з різними граничними умовами та проведено порівняння з розрахунками проведеними МСЕ. Для реалізації експериментальних досліджень створено дві віброустановки та представлені методики проведення кожного з експериментів.

Для проведення експериментального дослідження резонансним методом частот і форм вільних коливань пластин була створена віброустановка, яка створює керовані механічні коливання та передає їх пластинці за допомогою контакту у вигляді жорсткого наскрізного болтового з'єднання штоку установки з пластиною через отвір або притискного точкового контакту з поверхнею пластини. Віброустановка складається з п'єзокерамічного вібратора, генератора частот, частотоміра, підсилювача частот, досліджуваної пластини, сипучої речовини фракцією 0,5 мм та цифрової фотокамери. При задаванні частоти коливань віброустановки та досягання резонансу пластини можна спостерігати форми вільних коливань пластин на фіксованій частоті в реальному часі з можливістю реєстрації їх на фотокамеру.

За допомогою представленої методики проведення експерименту резонансним методом отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої трикутної пластини у вигляді правильного трикутника зі стороною $a=207,846$ мм, товщиною $h=2$ мм, з жорстко закріпленим отвором в центрі радіусом $r=6$ мм та вільними краями ($F_e F_c F_e C_h$).

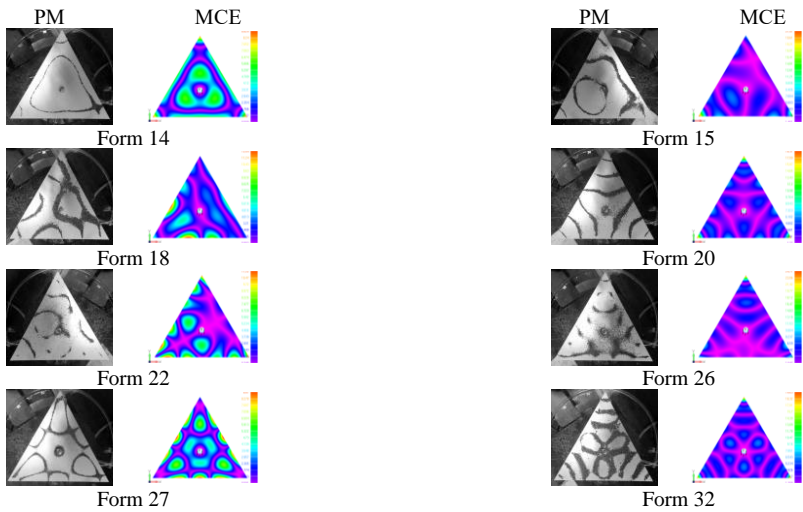
Деякі частоти вільних коливань представлені в таблиці 11, де додатково наведені частоти розраховані МСЕ та відносне відхилення ε у відсотках між частотами визначеними двома методами.

Максимальне відхилення між частотами, отриманими двома різними способами, не перевищує 6%. Нумерація форм коливань відповідає загальній нумерації форм коливань отриманих МСЕ. На рис. 10 представлені деякі форми вільних коливань отримані експериментально та МСЕ.

Таблиця 11

Частоти вільних коливань трикутної пластини ($F_e F_c F_c C_h$)

Form	$f, \text{Гц}$		
	PM	MCE	$\varepsilon, \%$
14	2564	2714	5,53
15	2582	2728	5,35
18	3092	3148	1,78
20	4033	4093	1,47
22	4095	4158	1,52
26	5247	5291	0,83
27	5363	5375	0,22
32	6742	6756	0,21

Рис. 10. Форми вільних коливань трикутної пластини ($F_e F_c F_c C_h$)

Для визначення методом стробоголографічної інтерферометрії частот і форм вільних коливань пластин використовується оптична схема, яка зображена на рис. 11.

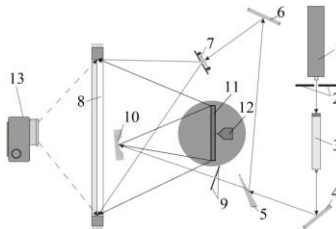


Рис. 11. Оптична схема установки

Промінь лазера ЛГН-222 (1) проходить через затвор з електроприводом (2), який призначений для технічного переривання променя, та потрапляє в канал електрооптичного модулятора МЛ-3 (3). Після проходження модулятора та відбивання від дзеркала (4) промінь за допомогою світлоподільвача (5) ділиться на два промені, один з яких, відбившись дзеркалом (6) та пройшовши через мікрооб'єктив (7), формує опорну світлову хвилю, яка освітлює фотопластину (8), в свою чергу інший промінь, пройшовши через пінхол (9) та відбившись від сферичного дзеркала (10), освітлює пластину (11), в результаті відбивання від поверхні якої формується предметна світлова хвиля, яка освітлює фотопластину (8). Як результат на фотопластинці фіксується голограма пластини (11). Після відтворення голограми пластини та збудження резонансних коливань пластини (11) п'єзокерамічним вібратором (12) можна спостерігати інтерференційні картини та фіксувати їх фотокамерою (13).

МСГІ та МСЕ отримані частоти і форми вільних коливань алюмінієвої квадратної пластини зі стороною $a = 140 \text{ мм}$, товщиною $d = 3 \text{ мм}$ та жорстко затиснутими двома краями і двома вільними краями (FFCC). Частоти вільних коливань з відносним відхиленням ϵ представлені в таблиці 12. Максимальне відхилення між частотами, отриманими двома різними способами, не перевищує 7%. Відповідні форми вільних коливань представлені на рис. 12.

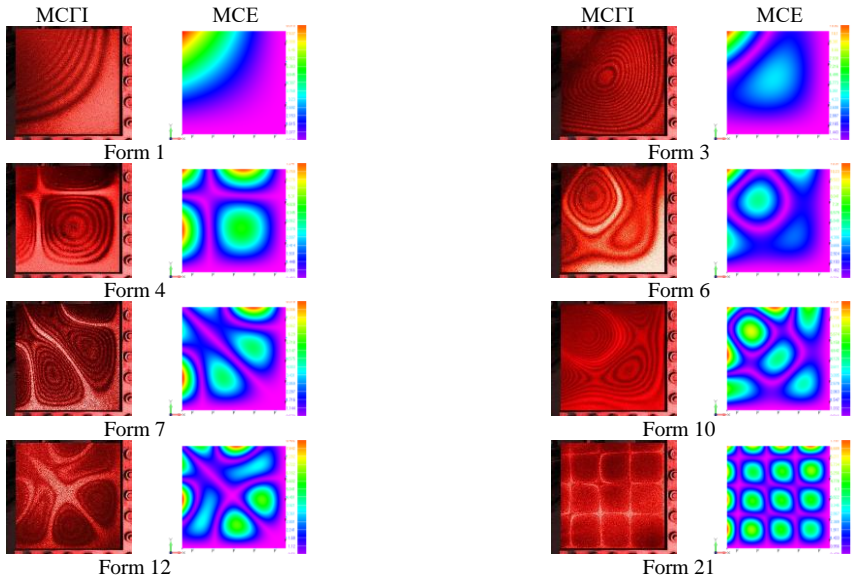


Рис. 12. Форми вільних коливань квадратної пластини (FFCC)

Таблиця 12

Частоти вільних коливань квадратної пластини (FFCC)

Form	$f, \Gamma\text{ц}$		
	PM	MCE	$\varepsilon, \%$
1	245	260	5,77
3	978	1009	3,07
4	1660	1782	6,85
6	2371	2480	4,40
7	3084	3196	3,50
10	4532	4656	2,66
12	5200	5373	3,22
21	8786	9089	3,33

За наведеною вище методикою проведення експерименту резонансним методом (PM) та методом стробогологафічної інтерферометрії (МСГІ) визначенні частоти і форми вільних коливань алюмінієвої квадратної, прямокутної, п'ятикутної, шестикутної та круглої пластин з отвором та без, з різними граничними умовами та проведено порівняння з розрахунками проведеними MCE, в результаті якого виявлено, що відхилення між частотами не перевищує 12%, що свідчить про коректність застосування обох методів.

В **сьомому розділі** проведено методом скінченних елементів розрахунок частот і форм вільних коливань замкнутих та незамкнутих циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу різної товщини з різними граничними умовами та різними фізико-механічними характеристиками матеріалу. Експериментально визначені частоти та форми вільних коливань товстостінних циліндричних оболонок. Проведена оцінка достовірності отриманих результатів розрахунку MCE за допомогою розв'язування трьох тестових задач та порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими методом голографічної інтерферометрії та методом сплайн-колокації. Для побудови коректної скінченно-елементної моделі оболонки та забезпечення високої точності розрахунків проведено дослідження типу та розміру скінченного елемента з урахуванням оптимального комп'ютерного часу розрахунку та збіжності отриманих результатів.

За допомогою системи FEMAP побудовано геометрію десяти еквівалентних по масі замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок (рис. 13) висотою $h=0,12\text{ м}$, товщиною $d=0,002\text{ м}$, серединною поверхнею, що описується параметричними рівняннями:

$$x_1 = [a + r \cos(k\theta)] \cos \theta, \quad x_2 = [b + r \cos(k\theta)] \sin \theta, \quad (22)$$

де $r=0,002\text{ м}$, значення a, b при різних кількостях гофрів k по контуру наведені в таблиці 13. Матеріалом задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E=214\text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,32$, густина $\rho=7820\text{ кг/м}^3$. Оболонки досліджувались при жорстко (C) закріпленому одному торці.

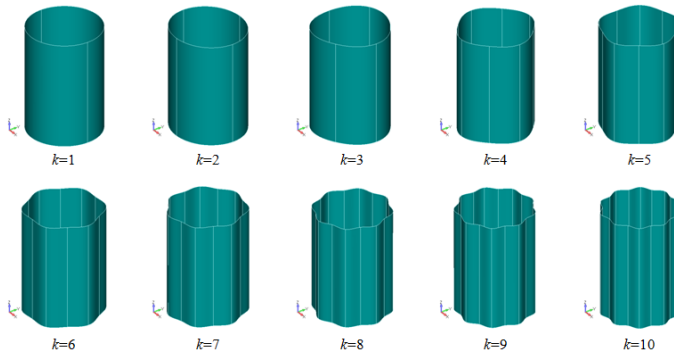


Рис. 13. Геометрія замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок

Таблиця 13

Значення напіввісей базового еліпсу a, b при різних кількостях гофрів k

k	1	2	3	4	5
$a=b, m$	0,041547	0,043455	0,043340	0,043179	0,042971
k	6	7	8	9	10
$a=b, m$	0,042716	0,042414	0,042064	0,041665	0,041217

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевих консольних замкнутих гофрованих кругових циліндричних оболонок еквівалентної маси, які представлені в таблиці 14 та 15, де m – кількість вузлів вздовж твірної, n – кількість вузлів вздовж дугової координати оболонки; Form ($m; n$) – симетричні форми коливань; Form ($m'; n'$) – несиметричні форми коливань.

Таблиця 14

Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів $k \leq 5$

Form		$f, \Gamma y$				
m	n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
1	2	3633,52	3565,30	3663,94	3817,38	3041,47
1'	2'	3636,61	3816,02	3663,92	3817,38	3041,48
1	4	1815,49	1809,03	1764,48	2197,84	1672,47
1'	4'	1815,35	1839,60	1764,49	1447,19	1672,47
1	6	2424,94	2247,68	2250,33	2104,68	2509,06
1'	6'	2424,94	2251,45	2191,30	2104,68	2509,05
1	8	4323,40	3953,15	3990,28	3631,37	4625,79
1'	8'	4323,40	3953,38	3990,29	3913,25	4625,79
1	10	6886,91	6285,77	6253,79	6103,60	5072,81
1'	10'	6887,10	6285,76	6253,78	6103,60	5926,92
1	12	10024,50	9148,11	9109,10	9008,85	8424,99
1'	12'	10024,73	9148,22	9113,79	10052,03	8425,01

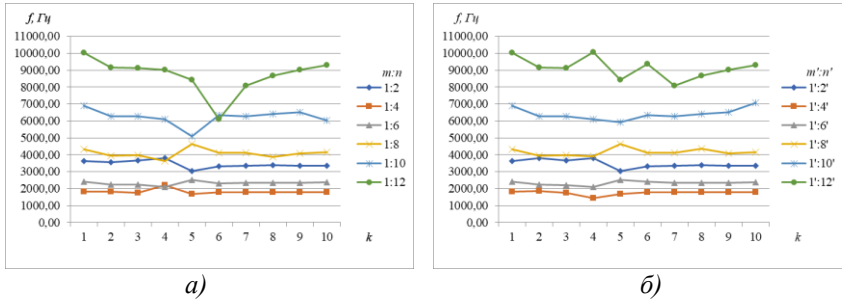
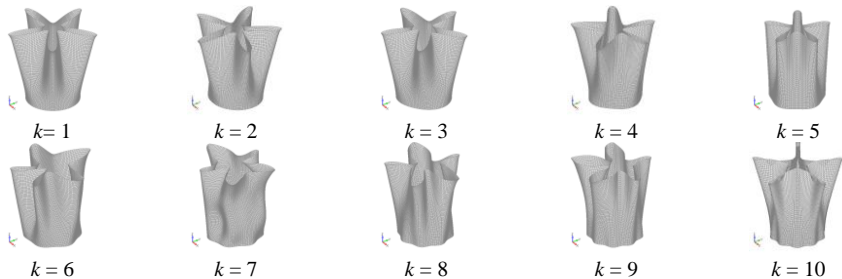
Таблиця 15

Частоти вільних коливань гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів $k \geq 6$

Form		$f, \text{Гц}$				
m	n	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
1	2	3307,61	3361,60	3368,61	3357,64	3336,93
1'	2'	3307,61	3361,61	3368,61	3357,64	3336,94
1	4	1786,36	1798,94	1796,62	1789,80	1780,77
1'	4'	1786,34	1798,93	1796,62	1789,79	1780,78
1	6	2295,07	2345,73	2347,22	2356,65	2371,31
1'	6'	2412,21	2345,73	2347,21	2356,65	2371,30
1	8	4126,88	4123,40	3857,00	4083,29	4138,01
1'	8'	4126,87	4123,39	4360,93	4083,29	4138,00
1	10	6340,51	6287,41	6393,69	6530,70	6035,40
1'	10'	6340,52	6287,42	6393,69	6530,71	7066,81
1	12	6111,88	8073,83	8667,69	9029,40	9288,05
1'	12'	9355,50	8073,81	8667,70	9029,39	9288,05

Криві залежності частот при відповідних симетричних (а) і несиметричних (б) формах коливань від кількості гофрів представлені на рис. 14.

Для порівняння форм коливань представлені симетричні форми $m=1$, $n=10$ на рис. 15 і $m=1$, $n=12$ на рис. 16, оскільки при цих формах коливань розбіжність частот при різних дослідженій кількості гофрів максимальна.

Рис. 14. Частоти вільних коливань оболонок з різною кількістю гофрів k Рис. 15. Симетричні форми $m=1$, $n=10$ коливань гофрованих оболонок

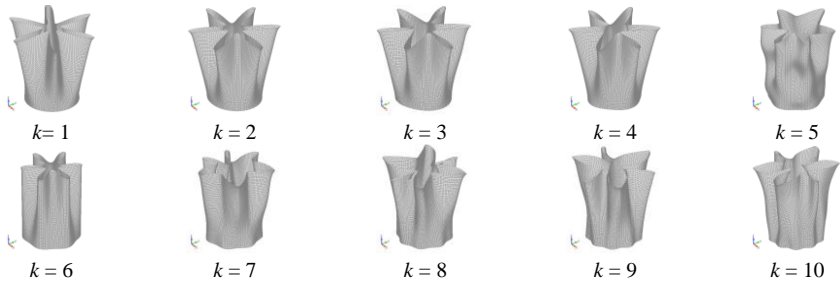


Рис. 16. Симетричні форми $m=1$, $n=12$ коливань гофрованих оболонок

Порівняння деяких симетричних і несиметричних форм коливань представлені на рис. 17 для оболонок з різною кількістю гофрів k . Відмітимо, що поділ форм коливань на симетричні та несиметричні інколи формальний, оскільки не завжди спостерігається порушення симетрії форми. Можна спостерігати поворот коливань або поворот форми, при цьому глобальна зміна вигляду проекції форми на площину закріплення оболонки може відбуватися чи не відбуватися, що залежить від конструктивної жорсткості оболонки і додає складностей при класифікації форм коливань. Таким чином, на рис. 17, а) спостерігається поворот форми із збереженням симетрії, на рис. 17, б) – поворот форми без збереження симетрії, на рис. 17, в) – зміна проекції форми з поворотом та збереженням симетрії.

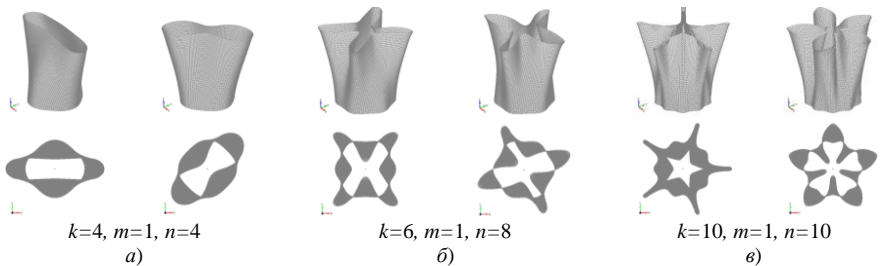


Рис. 17. Симетричні та несиметричні форми коливань

При розрахунку частот вільних коливань досліджуваних гофрованих оболонок було отримано частоти, наведені в таблиці 16, форми коливань яких відповідають деформаціям кручення, розтягу-стиску та зсуву. При цьому тільки при зсувних коливаннях спостерігаються симетричні (рис. 18) та несиметричні форми коливань.

Зміна частоти коливань розтягу-стиску та кручення із збільшенням кількості гофрів має монотонний характер. Для оболонки з кількістю гофрів $k=5$ відсутня частота і форма крутильних коливань. Зміна частоти зсувних коливань має значний стрибок при переході кількості гофрів від $k=5$ до $k=6$.

Таблиця 16

Частоти вільних коливань кручення, розтягу-стиску та зсуву

Form	$f, \Gamma\text{ц}$				
	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
Кручення	6708,45	6708,59	6711,84	6738,60	—
Розтяг-стиск	10771,52	10748,01	10758,89	10810,42	10862,66
Зсув	15711,89	15820,94	15730,42	16197,54	17162,35
Зсув'	15725,23	16259,80	15730,44	16197,54	17162,38
Form	$f, \Gamma\text{ц}$				
	$k=6$	$k=7$	$k=8$	$k=9$	$k=10$
Кручення	6456,06	6472,24	6441,02	6392,24	6332,08
Розтяг-стиск	10930,70	10988,13	10915,60	11006,41	11022,96
Зсув	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12860,98
Зсув'	12179,12	12349,77	12646,06	12789,03	12861,01

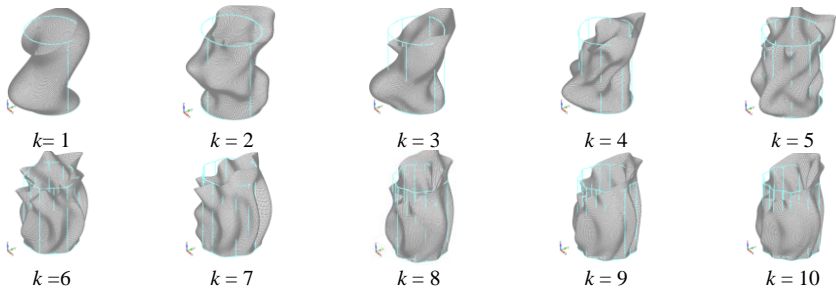


Рис. 18. Форми вільних коливань зсуву гофрованих оболонок

Досліджувалась гофрована незамкнута циліндрична оболонка, яка отримана із замкнутої гофрованої оболонки з кількістю гофрів $k=8$ розрізанням навпіл на max-ax (рис. 19 а), середині (або 0) (рис. 19 б) або min-ax (рис. 19 в) хвиль гофрів. Як матеріал задавалась сталь. Оболонки досліджувалась при різних варіантах жорстко закріплених (С) і вільних країв (F) (рис. 20).

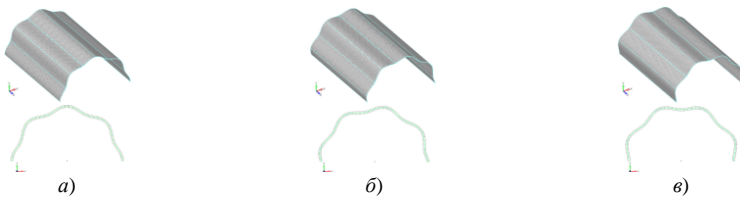


Рис. 19. Способи розрізання гофрованих оболонок

В результаті розрахунків отримано частоти і форми вільних коливань сталевих кругових гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл при всіх вільних торцях та всіх жорстко закріплених торцях. Перші десять частот вільних коливань трьох

досліджуваних гофрованих оболонок еквівалентної маси представлені в таблиці 17, де ε – розбіжність між частотами у відсотках.

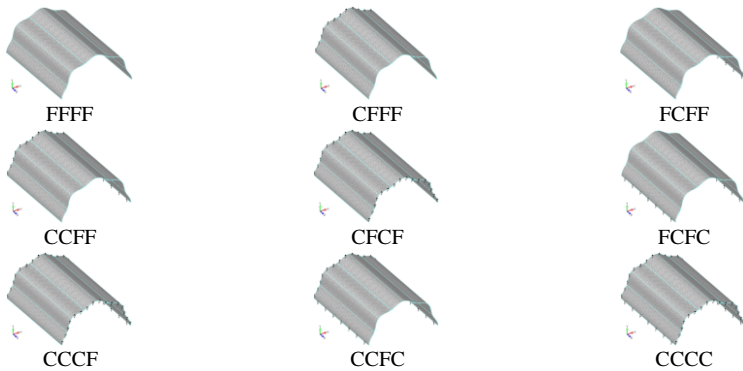


Рис. 20. Граничні умови гофрованих незамкнутих оболонок

Таблиця 17

Частоти вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом поздовжнього розрізання навіпіл

Form	(FFFF)			$\varepsilon_0, \%$	$\varepsilon_{min}, \%$	(CCCC)			$\varepsilon_0, \%$	$\varepsilon_{min}, \%$
	max	0	min			max	0	min		
1	428	429	430	0,23	0,47	5050	4801	4764	4,93	5,66
2	502	503	506	0,20	0,80	5193	5136	5123	1,10	1,35
3	842	849	852	0,83	1,19	6650	6668	6647	0,27	0,05
4	1430	1444	1463	0,98	2,31	6833	6705	6700	1,87	1,95
5	1771	1799	1821	1,58	2,82	7344	7205	7175	1,89	2,30
6	2087	2708	3146	29,76	50,74	7462	8105	8043	8,62	7,79
7	2154	2798	3518	29,90	63,32	8660	8195	8150	5,37	5,89
8	2868	2981	3846	3,94	34,10	8861	9279	9271	4,72	4,63
9	3113	3280	3921	5,36	25,96	9343	9732	9685	4,16	3,66
10	3786	4570	4577	20,71	20,89	9623	10312	10325	7,16	7,30

Аналізуючи дані таблиці 17, можна побачити, що для оболонок з граничними умовами (FFFF) перші п'ять частот для оболонок з різним способом розрізання мають малу розбіжність в порівнянні з наступними п'ятьма частотами. Починаючи з шостої форми коливань, розбіжність між частотами досягає майже 65%, що зумовлено різною конструктивною жорсткістю, що обумовлює різне формоутворення, тобто одному і тому ж номеру форми відповідають різні форми коливань або дещо спотворенні форми коливань. Для оболонок з граничними умовами (CCCC) перші десять частот мають розбіжність між частотами, що не перевищує 9%, при цьому спостерігається менша розбіжність частот та однаковість форм коливань для оболонок з розрізанням по міні-ах та серединах хвиль гофрів. Форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним

способом повздовжнього розрізання навпіл з вільними краями представлені (рис. 21, рис. 22).

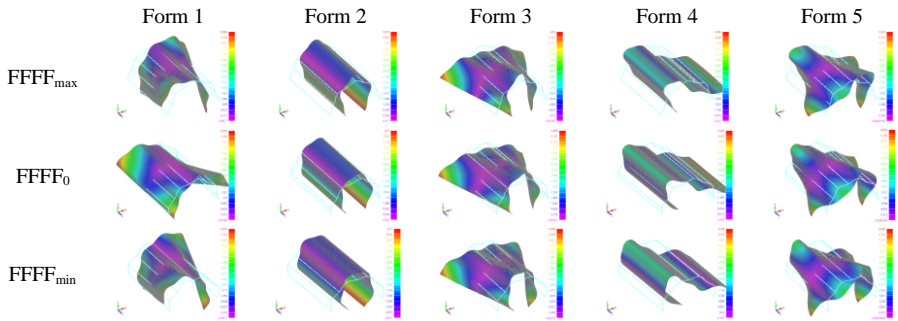


Рис. 21. I-V форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл (FFFF)

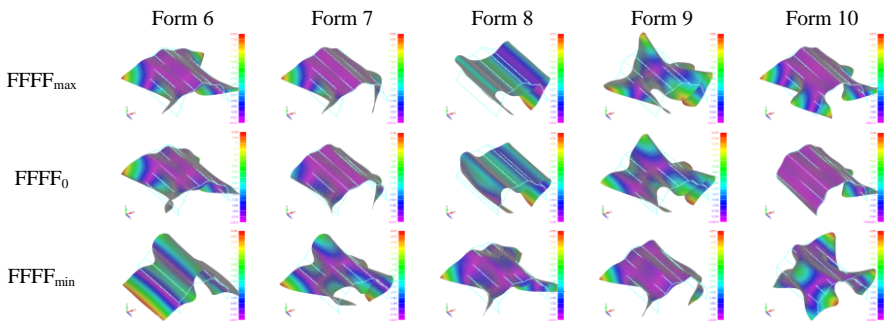


Рис. 22. VI-X форми вільних коливань гофрованих незамкнутих циліндричних оболонок з різним способом повздовжнього розрізання навпіл (FFFF)

Для проведення експериментального дослідження виготовлено товстостінну циліндричну оболонку (1) (рис. 23), яка виточена разом з масивним тілом (2) точінням на станку з ЧПУ з припуском 0,05 мм на діаметр.

Оскільки при експериментальних дослідженнях МСПГ малих вільних коливань оболонок з інтерферограм можна спостерігати нульові переміщення в місці з'єднання оболонки (1) з масивним тілом (2), з точністю до амплітуди коливань 10^{-4} мм, то граничні умови жорсткого закріплення одного торця оболонки забезпечені, інший торець вільний (FC). Геометричні розміри оболонки в мм зазначені на креслені (рис. 23).

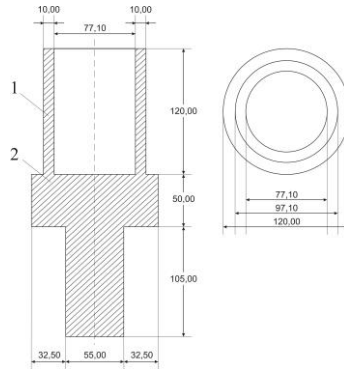


Рис. 23. Креслення товстостінної оболонки (FC) з масивним тілом

В якості матеріалу використовувалась сталь з характеристиками: модуль Юнга $E = 214 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$. Оболонка вважається однорідною та ізотропною. Для реалізації експерименту методом стробоголографічної інтерферометрії (МСГІ) використовується розроблений стробокомплекс, який описаний в шостому розділі, та аналогічна оптична схема, яка використовується для дослідження пластин, відмінність якої полягає у використанні іншого вібробуджувача.

Частоти вільних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC), отримані МСГІ та розраховані МСЕ представлені в таблиці 18, де ε – відносна розбіжність між частотами.

Таблиця 18

Частоти вільних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

m	n	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
		МСГІ	МСЕ	
1	4	3908	4118	5,1
1	6	9377	9758	3,9
1	8	16552	17478	5,3
1	10	25565	26520	3,6
2	4	8814	9031	2,4
2	6	12617	12901	2,2
2	8	18956	20059	5,5
2	10	27831	28811	3,4

Форми вільних коливань ($m=1$) отримані експериментально та чисельно представлені на рис. 24. Форми вільних коливань ($m=2$) отримані експериментально та чисельно представлені на рис. 25.

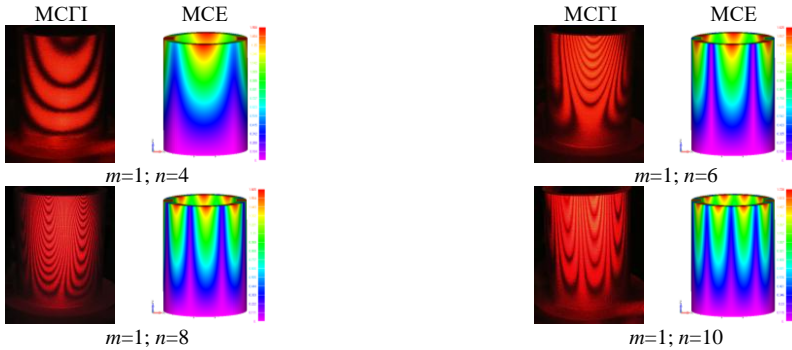


Рис. 24. Форми вільних коливань ($m=1$) товстостінної циліндричної оболонки (FC)

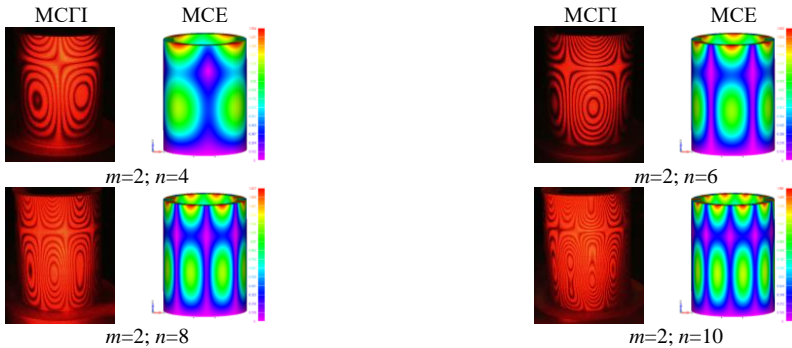


Рис. 25. Форми вільних коливань ($m=2$) товстостінної циліндричної оболонки (FC)

Чисельно отримані форми вільних коливань дають змогу більш якісно класифікувати форми коливань, отримані експериментально у вигляді інтерференційних картин, та встановити діапазон пошуку частот вільних коливань.

При експериментальних дослідженнях встановлені згинні форми коливань (рис. 26), частоти яких представлені в таблиці 19, а також підтверджено існування симетричних та несиметричних форми коливань (рис. 27) з різницею частот до 10 Гц.

Таблиця 19

Частоти згинних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

Form	$f, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
	МСГІ	МСЕ	
Згин 1	10028	10818	7,3
Згин 2	18443	19033	3,1
Згин 3	23722	25183	5,8

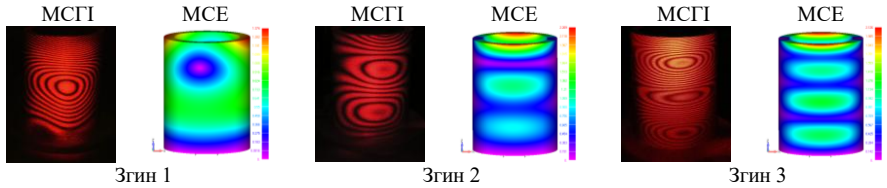


Рис. 26. Форми згинних коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

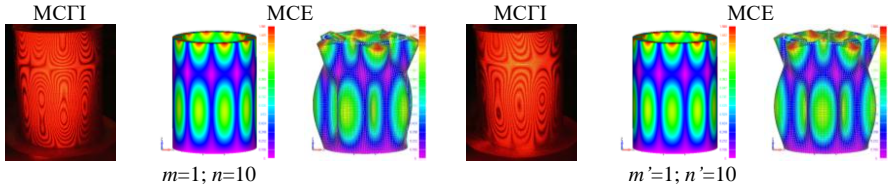


Рис. 27. Симетрична та несиметрична форми коливань товстостінної циліндричної оболонки (FC)

За наведеною вище методикою розрахунку замкнутих та незамкнутих циліндричних оболонок гофрованого поперечного перерізу побудовані скінченно-елементні моделі та проведено розрахунок частот та форм вільних замкнутих та незамкнутих циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу сталої та змінної товщини з різними граничними умовами та торцях. Встановлені залежності частоти вільних коливань від граничних умов накладених на торці оболонки та фізико-механічних характеристик матеріалу. При розрахунку частот вільних коливань досліджуваних замкнутих оболонок було отримано симетричні і несиметричні форми коливань, а також форми коливань які відповідають деформаціям кручення, розтягу-стиску та зсуву, при цьому тільки при зсувних коливаннях спостерігаються симетричні та несиметричні форми коливань. Розглянуті різні способи розкриття некругових циліндричних оболонок сталої та змінної товщини та встановлені залежності частоти вільних коливань від кута розкриття та характеру розкриття оболонки. Розраховані частоти і форми вільних коливань оболонок різної товщини, встановлені залежності частоти вільних коливань від співвідношень товщини оболонки до серединного радіуса поперечного перерізу d/R_c в межах від 1/20 до 1/4. Визначені експериментально MCGI частоти і форми вільних коливань товстостінної оболонки, які підтверджують чисельні розрахунки.

ВИСНОВКИ

Представлена дисертаційна робота присвячена аналізу вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю на основі розвинених чисельних та експериментальних підходів, встановленню залежностей частот та форм вільних коливань пластин та оболонок від різних конструктивних параметрів.

На основі методу скінченних елементів, модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань ізотропних квадратних пластин, резонансного методу та методу стробогологафічної інтерферометрії розвинено та поширено чисельні та експериментальні підходи для визначення частот і форм вільних коливань пластин та оболонок з різною конструктивною неоднорідністю, створено дві віброустановки та представлені методики проведення експериментів та розрахунків.

Одержано нові розв'язки широкого класу задач динаміки багатокутних пластин та некругових циліндричних оболонок, на основі яких проведено аналіз впливу конструктивної неоднорідності, геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частоти та форми вільних коливань пружних механічних об'єктів, що розглядалися.

Основні результати проведених досліджень, що представлені в дисертації, наведені нижче:

1. Розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань ізотропних багатокутних пластин з отвором і без та замкнутих і незамкнутих циліндричних оболонок різного поперечного перерізу, різної товщини, з різними варіантами граничних умов.
2. Розроблено комбінований підхід для визначення частот вільних коливань ізотропних багатокутних пластин різної товщини та розраховані методом скінченних елементів коефіцієнти для кожної багатокутної пластини з різними граничними умовами залежно від співвідношення товщини до сторони пластини.
3. Розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для демонстрації коливань в реальному часі та визначення з достатнім ступенем достовірності частот і форм вільних коливань багатокутних пластин.
4. Розвинено експериментальний підхід на основі стробогологафічної інтерферометрії та створено стробоккомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок, який в реальному часі демонструє коливання

поверхні пружного тіла у вигляді інтерференційних картин, дає можливість змінювати режим віброзбудження та амплітуду коливань, з високим ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань.

5. Різними підходами побудовано нові розв'язки задач динаміки для таких пластин та оболонок:
 - трикутні, чотирикутні, п'ятикутні та шестикутні пластини різної товщини з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв;
 - трикутні, чотирикутні, п'ятикутні, шестикутні та круглі пластини з отвором з різними варіантами вільних та жорстко закріплених країв та отвору, трикутні пластини з різним розміщенням круглого отвору та отвору різного радіуса;
 - замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки еліптичного поперечного перерізу з різним значенням ексцентриситету, сталі та змінної товщини, з різним характером розкриття, з різними граничними умовами на торцях;
 - замкнуті та незамкнуті циліндричні оболонки гофрованого поперечного перерізу з різною кількістю гофрів, з різним характером розкриття, з різними граничними умовами на торцях;
 - товстостінні циліндричні оболонки з різними граничними умовами на торцях.
6. Проведено аналіз вільні коливання широкого класу пластин і оболонок з різною конструктивною неоднорідністю та отримано нові результати у вигляді числових значень частот та ілюстрацій форм вільних коливань, проведено порівняння результатів отриманих за допомогою різних підходів.
7. На основі результатів, отриманих різними чисельними та експериментальними підходами, проведено аналіз особливостей динамічних характеристик широкого класу неоднорідних пластин і оболонок, виявлені закономірності впливу геометричних параметрів, фізико-механічних характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот і форм вільних коливань кожного з розглянутих пружних тіл.

Отримані результати та розвинені підходи можуть бути використанні при розв'язанні широкого класу практичних задач визначення динамічних характеристик вільних коливань пластинчастих та оболонкових елементів з різною конструктивною неоднорідністю; розвинений чисельний підхід дає можливість отримувати достовірну інформацію про спектр частот і форм вільних коливань елементів конструкції в умовах максимально наближених до реальних умов експлуатації без значних затрат коштів та часу, змінюючи різні параметри, обирати оптимальні геометричні розміри, економічно вигідні матеріали та

способи закріплення для забезпечення міцності, стійкості та надійності конструкції; розроблений комбінований підхід дає можливість швидко визначити частоти і форми вільних коливань багатокутних пластин різної товщини з різними граничними умовами; розвинені експериментальні підходи дають можливість в реальному часі демонструвати вільні коливання пружних тіл, а одержані результати застосовувати для оцінки результатів, отриманих різними теоретичними методами.

Результати отримані комбінованим підходом були передані для впровадження в розрахункову практику державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля».

Результати дисертаційного дослідження використано в рамках виконання цільової програми з оборонної тематики за напрямом прикладні дослідження і розробки згідно з договорами ІМех-2024/2 та ІМех-2025/1.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

Статті та розділи у колективних монографіях в закордонних виданнях

1. Borysenko M, Zavhorodnii A., Skupskyi R. Numerical analysis of frequencies and forms of own collars of different forms with free zone. J. Appl. Math. Comput. Mech. **18** (1), 5-13 (2019). <https://doi.org/10.17512/jamcm.2019.1.01> (Web of Science)
2. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Y. Free Vibrations of an Open Non-circular Cylindrical Shell of Variable Thickness. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Müller W. (eds) Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials, vol 134. Springer, Cham. 141-154 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_8 (Scopus, Q4, SJR – 0.168)
3. Grigorenko A.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Boreiko N.P. Free Vibration Corrugated Open Cylindrical Shells. In: Altenbach H., Bauer S., Eremeyev V., Mikhasev G., Morozov N. (eds) Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials, vol 151. Springer, Cham. 63-74 (2021). https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_6 (Scopus, Q4, SJR – 0.168)
4. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate. In: Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A.Y., Kushnir R.M., Nazarenko V.M., Eremeyev V.A. (eds) Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials, vol 204. Springer, Cham. 201-220 (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_15 (Scopus, Q4, SJR – 0.168)

Статті у фахових наукових виданнях України

5. Будак В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Розв'язування задачі про вільні коливання некругової циліндричної оболонки на основі методу скінченних елементів. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 27, 24-33 (2017).
6. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П. Чисельний розрахунок частот вільних коливання некругової циліндричної оболонки з жорстко закріпленими торцями. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 91-103 (2017).
7. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В., Пригода А.П. Численное определение частот и форм свободных колебаний толстостенной цилиндрической оболочки. Прикл. механика. **54** (1), 90-100 (2018).
 Te same: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Prigoda A.P. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **54** (1), 75-84 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0861-7> (Scopus, Q3, SJR – 0.211)
8. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Застосування експериментального і чисельного методів до дослідження вільних коливань прямокутних пластин. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Вип. 29, 103-112 (2019).
<https://doi.org/10.15421/4219009>
9. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельний аналіз вільних коливань незамкнених циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. Вип. 2, 51-58 (2019).
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/2.5>
10. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Новицький В.С. Чисельний аналіз вільних коливань прямокутних пластин на основ різних підходів. Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. Вип. 1, 33-41 (2019).
<https://doi.org/10.26661/2413-6549-2019-1-05>
11. Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Свободные колебания незамкнутой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения. Прикл. механика. **56** (4), 3-14 (2020).
 Te same: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V. Free Vibrations of an Open Elliptical Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **56** (4), 389-401 (2020).
<https://doi.org/10.1007/s10778-020-01023-9> (Scopus, Q3, SJR – 0.218)
12. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінченних елементів. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

- Серія: фізико-математичні науки. Вип. 1-2, 61-66 (2020).
<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.10>
13. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань рівнобедрених трикутних пластин з вільними краями. Мат. методи та фіз.-мех. Поля. **63** (3), 28-39 (2020).
 Те саме: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V. Numerical Evaluation of Frequencies and the Modes of Free Vibrations of Isosceles Triangular Plates with Free Edges. J. Math. Sci. **273**, 27-43 (2023).
<https://doi.org/10.1007/s10958-023-06481-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.302**)
 14. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання трикутних пластин з отвором. Прикл. механіка. **57** (5), 46-56 (2021).
 Те саме: Grigorenko A.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk E.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole. Int. Appl. Mech. **57** (5), 534-542 (2021).
<https://doi.org/10.1007/s10778-021-01104-3> (**Scopus, Q3, SJR – 0.242**)
 15. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Про вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки. Прикл. механіка. **58** (1), С. 48-58 (2022).
 Те саме: Grigorenko O.Ya., Borisenko M.Yu., Boichuk O.V. Free Vibrations of a Corrugated Closed Cylindrical Shell. Int. Appl. Mech. **58** (1), 43-52 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s10778-022-01133-6> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)
 16. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Сперкач С.О., Безугла А.Д., Міхрін Е.О. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. Доп. НАН України. № 6, 36-45 (2022).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.036>
 17. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкнутих циліндричних оболонок різного еліптичного поперечного перерізу. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **65** (1-2), 188-198 (2022).
<https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.188-198>
 Те саме: Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boychuk O.V., Vasil'eva L.Ya. Free Vibrations of Open Cylindrical Shells with Various Elliptic Cross Sections. J. Math. Sci. **282**, 836-848 (2024).
<https://doi.org/10.1007/s10958-024-07219-5> (**Scopus, Q3, SJR – 0.280**)
 18. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Шумська А.А. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань гофрованих замкнутих циліндричних оболонок. Прикл. механіка. **58** (5), 27-38 (2022).
 Те саме: Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boichuk O.V., Shums'ka A.A. Numerical determination of natural frequencies and modes of closed corrugated cylindrical shells. Int. Appl. Mech. **58** (5), 520-532 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s10778-023-01177-2> (**Scopus, Q3, SJR – 0.225**)
 19. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Вільні коливання п'ятикутних пластин з отвором. Доп. НАН

України. № 1, 24-31 (2023).

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.024>

20. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Сперкач С.О., Безугла А.Д. Чисельне визначення частот вільних коливань гофрованої не замкнутої циліндричної оболонки. Доп. НАН України. № 2, 47-54 (2023).
<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.047>
21. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Борейко Н.П., Бабуров В.В. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин з жорстко закріпленим одним краєм. Прикл. механіка. **61** (1), С. 35-44 (2025).

Статті в наукових виданнях України

22. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. Геометричне моделювання та інформаційні технології. Вип. 2, 29-33 (2016).

Праці апробаційного характеру

23. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Пригода О.П., Борисенко І.А. Комп'ютерне моделювання вільних коливань квадратних та круглих пластин. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Інформаційні технології в моделюванні. ІТМ – 2016», Миколаїв, 24-25 березня 2016 р., 14 (2016).
24. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2016», Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 18-21 квітня 2016 р., 11 (2016).
25. Будак В.Д., Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок змінної товщини з жорстко закріпленими торцями. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних та фізико-математичних наук», Миколаїв, 22-24 вересня 2016 р., 113-114 (2016).
26. Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борисенко І.А., Роговцов Ю.О. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів. В: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Прикладна геометрія та інформаційні технології в моделюванні об'єктів, явищ і процесів», Миколаїв, 19-21 жовтня 2016 р., 16 (2016).
27. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Вільні коливання незамкненої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу. В: Матеріали IV Міжнародної наукової конференції «Сучасні

- проблеми механіки», Київ, 20-30 серпня 2017 р., 28 (2017).
28. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Вільні коливання циліндричних оболонок з некруговим гофрованим перерізом. В: Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції «Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук», Миколаїв, 13-15 вересня 2018 р., 33 (2018).
 29. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Чисельне визначення частот і форм вільних коливань циліндричної оболонки з круговим гофрованим перерізом. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т., Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Т. 2, 124-125 (2018).
 30. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот вільних коливань чотирикутних пластин складної форми. В: Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2019», Дніпро, Кам'янське, 15-18 квітня 2019 р., 40-41 (2019).
 31. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В. Визначення частот і форм вільних коливань п'ятикутних пластин методом скінчених елементів. В: Тези доповідей II Міжнародної науково-технічної конференції «Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні», Харків, 05-08 жовтня 2020 р., 45-46 (2020).
 32. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Васильєва Л.Я. Визначення частот і форм вільних коливань шестикутної пластини з вільними краями. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2021», Дніпро, Кам'янське, 13-16 квітня 2021 р., 37-38 (2021).
 33. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Пінчук Т. Застосування чисельного аналізу до визначення частот вільних коливань товстостінних оболонок. В: Збірник наукових праць «Сучасні проблеми прикладної математики та комп'ютерних наук», Львів, 27-28 вересня 2021 р. 88-91 (2021).
 34. Grigorenko A.Ya., Muller W.H., Borisenko M.Yu., Boychuk E.V. Numerical and Experimental Approaches to Determining the Frequencies of Free Vibrations of Plates of Complex Shape. В: Матеріали VI Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми механіки», Київ, 30-31 серпня 2021 р., 19 (2021).
 35. Борисенко М. Чисельний аналіз частот вільних коливань п'ятикутних пластин. В: Матеріалах конференції молодих учених «Підстригачівські читання – 2022», Львів, 25–27 травня 2022 р. (2022).
 36. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борейко Н. Вільні коливання гофрованої замкнутої циліндричної оболонки змінної товщини. В: Збірник наукових праць Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми

- механіки та математики – 2023», Львів, 23-25 травня 2023 р., 99-100 (2023).
37. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О. Чисельний аналіз вільних коливань тонкостінних та товстостінних циліндричних оболонок. В: Тези доповіді 11-тої Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів, 24-26 вересня 2024р., 77-78 (2024).
 38. Григоренко О.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук О.В., Борецько Н.П. Вільні коливання шестикутних пластин з різними варіантами закріплення країв. В: Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024», Київ, 7-11 жовтня 2024р., 163-164 (2024).
 39. Григоренко О., Борисенко М., Бойчук О., Борецько Н. Вільні коливання шестикутних пластин з отвором. В: Збірник матеріалів міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми механіки у конструкціях спеціального призначення», Дніпро, 26-28 березня 2025р., 60-62 (2025).

АНОТАЦІЯ

Борисенко М.Ю. Чисельний та експериментальний аналіз вільних коливань багатокутних пластин і циліндричних оболонок з конструктивною неоднорідністю. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2025.

Дисертація присвячена розвиненню підходів до чисельного та експериментального аналізу вільних коливань пружних багатокутних пластин та циліндричних оболонок різного поперечного перерізу з конструктивною неоднорідністю.

Розвинено чисельний підхід на основі методу скінченних елементів для розрахунку частот та форм вільних коливань багатокутних пластин з отвором і без та замкнених і незамкнених циліндричних оболонок еліптичного та гофрованого поперечного перерізу. Розроблено комбінований підхід для розрахунку частот вільних коливань багатокутних пластин різної товщини на основі модифікованої формули для розрахунку частот вільних коливань прямокутної пластини. Розвинено експериментальний підхід на основі резонансного методу та створено віброкомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин. Розвинено експериментальний підхід на основі стробогологафічної інтерферометрії та створено стробокомплекс для визначення частот і форм вільних коливань багатокутних пластин та товстостінних циліндричних оболонок.

На основі отриманих результатів проведено аналіз впливу конструктивної неоднорідності, геометричних параметрів, фізико-механічних

характеристик матеріалу та граничних умов на спектр частот та форм вільних коливань пружних механічних об'єктів, що розглядалися.

Ключові слова: багатокутні пластини, циліндричні оболонки, частота вільних коливань, метод скінченних елементів, резонансний метод, метод стробогологафічної інтерферометрії.

SUMMARY

Borysenko M.Yu. Numerical and experimental analysis of free vibrations of polygonal plates and cylindrical shells with structural heterogeneity. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of technical sciences, speciality 01.02.04 – Mechanics of deformable solid. – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is devoted to the development of approaches to the numerical and experimental study of free vibrations of elastic polygonal plates and cylindrical shells of various cross-sections with structural heterogeneity and establishing the dependence of frequencies and forms of free vibrations of plates and shells on various structural parameters.

A numerical approach based on the finite element method has been developed to calculate the frequencies and forms of free vibrations of isotropic polygonal plates with and without holes, as well as closed and open cylindrical shells of different cross-sections, different thicknesses, and with different boundary conditions.

A new combined approach has been developed to determine the frequencies of free vibrations of isotropic polygonal plates of different thicknesses based on a modified formula for calculating the frequencies of free vibrations of an isotropic rectangular plate, and the coefficients of the vibration forms and boundary conditions have been established for the considered polygonal plates with various boundary conditions depending on the ratio of the thickness to the side of the plate.

An experimental approach based on the resonance method was developed, and a vibration complex was created to demonstrate real-time vibrations and determine with a sufficient degree of reliability the frequencies and forms of free vibrations of n -angle plates.

An experimental approach based on stroboscopic interferometry was developed, and a strobocomplex was created to determine the frequencies and forms of free vibrations of polygonal plates and thick-walled cylindrical shells, which demonstrates real time vibrations of the surface of an elastic body in the form of interference patterns, allows changing the vibration excitation mode and the amplitude of vibrations, and with a high degree of reliability to study the spectrum of frequencies and forms of free vibrations.

The free vibrations of a wide class of plates and shells with different

structural heterogeneity were investigated, and new results were obtained in the form of numerical values of frequencies and illustrations of the forms of free vibrations, and the results obtained using various developed approaches were compared.

Based on the results obtained by various numerical and experimental approaches, an analysis of the peculiarities of the dynamic characteristics of a wide class of heterogeneous plates and shells was carried out, the regularities of the influence of geometric parameters, physical and mechanical characteristics of the material and boundary conditions on the frequency spectrum and forms of free vibrations of each of the considered elastic bodies were revealed.

The obtained results and developed approaches can be used in solving a wide class of practical problems of determining the dynamic characteristics of free vibrations of plate and shell elements with different structural heterogeneity. The developed numerical approaches allow obtaining reliable information about the frequency spectrum and forms of free vibrations of structural elements in conditions as close as possible to real operating conditions without significant costs and time, changing various parameters to choose optimal geometric dimensions, economically advantageous materials and fastening methods to ensure the strength, stability and reliability of the structure. The developed experimental approaches make it possible to demonstrate real time free vibrations of elastic bodies, and to use the obtained results to assess the reliability of the results obtained by various theoretical and experimental methods.

The results obtained by the combined approach were transferred for implementation in the calculation practice of the state enterprise "Design Bureau "Pivdenne" named after M.K. Yangel".

The results of the dissertation research were used within the framework of the implementation of the target program on defence topics in the direction of applied research and development.

Key words: polygonal plates, cylindrical shells of corrugated cross-section, frequency of free vibrations, finite element method, resonance method, stroboholographic interferometry method.