

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

*Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису*

НЕФЬОДОВА ОЛЕКСАНДРА ОЛЕКСІЙОВИЧА

УДК 532.595

Дисертація
Теоретичний аналіз маятникового підвісу для
збільшення сейсмо- та вібростійкості
резервуарів з рідиною

01.02.01 – теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело
_____ О.О. Нефьодов

Науковий керівник:
Лимарченко Олег Степанович,
доктор технічних наук, професор

Ідентичність всіх примірників дисертації
ЗАСВІДЧУЮ:
Вчений секретар спеціалізованої вченої ради
/О.П. Жук/

КІЇВ – 2019

АНОТАЦІЯ

Неф'одов О.О. Теоретичний аналіз маятникового підвісу для збільшення сейсмо- та вібростійкості резервуарів з рідиною. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – «Теоретична механіка». – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2019.

Розглядається актуальна задача – підвищення сейсмо- та вібростійкості систем, до складу яких входять резервуари з рідиною, за рахунок надання додаткового ступеню вільності – можливість виконувати кутові рухи. Як показують літературні огляди, зокрема, виконані Р. Ібрагімом, О.С. Лимарченком та І.О. Луковським, дослідження задач кутових рухів систем резервуар – рідина з вільною поверхнею розвинені ще в недостатній мірі, про що свідчить мала кількість існуючих на цю тему публікацій, де слід відзначити роботи М. Ля Роки, Ж.-П. Шортіно, О.С. Лимарченка і П.С. Ковальчука.

Основною метою даної дисертаційної роботи являється виконання теоретичного дослідження особливостей поведінки систем, що включають в себе резервуари, частково заповненні рідиною з вільною поверхнею, які можуть виконувати кутові рухи, при сейсмічних та вібраційних навантаженнях.

Задача про сумісний рух резервуару з рідиною, яка містить вільну поверхню, розглядається як нестационарна, нелінійна крайова задача, яка має як геометричні, так й фізичні нелінійності.

В дисертаційній роботі розроблено нелінійну динамічну модель зв’язаного руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, на маятниковому підвісі, з рухомою точкою підвісу орієнтовану на нестационарне збурення руху. При цьому, стінки резервуару є абсолютно твердими, рідина – ідеальна, однорідна, нестислива, а рух рідини в

початковий момент часу безвихровий. Виходячи з вищезгаданих припущень, вводиться потенціал швидкостей рідини, члени якого характеризують хвильовий рух рідини та зв'язок хвильового руху з поступальним та обертальним рухом резервуару, відповідно.

Математичне формулювання задачі про рух системи розглядається як сукупність кінематичних обмежень, динамічних рівнянь та початкових умов. Використовується варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського. Динамічні граничні умови руху випливають з принципу Гамільтона – Остроградського як природні. До кінематичних умов, що накладаються на дану задачу, відповідно відносяться: вимога щодо нерозривності потоку рідини та умови неперетікання рідини через тверду поверхню резервуару та вільну поверхню рідини.

Представлення шуканих величин відбувається у вигляді, щоб наперед задовольнити всім кінематичним обмеженням.

Використання маятникового підвісу як засобу сейсмозахисту, з теоретичної точки зору, можливе за рахунок того, що при розгляді сумісного руху відбувається зміна значення резонансної частоти першої, антисиметричної, форми. При цьому, значення резонансних частот для яких не відбувається зміна положення центру мас (в тому числі для осесиметричної форми) залишаються такими ж як і відповідні парціальні частоти при розгляді заданого поступального руху. Це призводить до того, що частота першої антисиметричної форми зростає і відбувається зміна порядку частот при їх розміщенні за ступенем зростання, що в свою чергу призводить до зменшення інтенсивності прояву резонансу по антисиметричній формі (коловий номер $m = 1$).

Виконано аналіз поведінки резервуару на маятниковому підвісі при коливанні на резонансних частотах зв'язаних з рідиною та маятниковим підвісом, зокрема показано, що в широкому діапазоні довжин маятникового підвісу найбільш інтенсивно проявляється резонанс по формі $m = 2$, який в

рамках лінійної моделі та для випадку поступального руху взагалі відсутній. Виконано порівняння з теоретичними роботами та експериментами інших авторів.

Обґрунтовано метод визначення діапазону найбільш сприятливих довжин маятникового підвісу. Так, було розглянуто ряд тестових прикладів, в яких поступальних рух точки підвісу резервуару відбувався за певним, дещо «сейсмоподібним» законом. Показано, що певні діапазони довжин маятникового підвісу мають свої переваги над випадком, коли резервуар жорстко закріплений.

Апробація підходу відбувалась для випадку, коли рух точки підвісу було задано на основі реальних параметрів землетрусу. Досліджено ефективність використання маятникового підвісу. Виконано порівняння збурень вільної поверхні рідини, силової та моментної взаємодії для випадку маятникового та жорсткого закріплення резервуару. Додатково, проведено спектральний аналіз збурень вільної поверхні рідини на стінці. В підсумку, всі вищезгадані порівняння різних діапазонів довжин маятникового підвісу та жорсткого закріплення резервуару дають змогу стверджувати про доцільність використання маятникового підвісу середньої довжини для зменшення негативного впливу сейсмічних та вібраційних збурень, що можуть виникати під час експлуатації різного роду промислових систем.

Ключові слова: нелінійна динаміка рідини з вільною поверхнею, зв'язаний рух, прояв основних та вторинних резонансів, кутових рух конструкцій.

Список опублікованих праць за темою дисертації.

- [1] Лимарченко О.С. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічному збуренні руху / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов// Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2017, – т. 14, – №2, – С. 56–64.

- [2] Limarchenko O. Peculiarities of dynamics of the reservoir with a free surfaced liquid on pendulum suspension with the moving suspension point / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 1, – P. 41–47.
- [3] Limarchenko O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 2, – P. 178–183.
- [4] Константинов А.В. Динамические приемы гашения колебаний в системе «конструкция – жидкость со свободной поверхностью» / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, В.В. Лукьянчук, А.А. Нефедов // Прикладная механика, – 2018, – том. 55, – № 1, – С. 64–77.
- [5] Лимарченко О.С. Вплив частотних характеристик збурення руху конструкції з рідиною на розвиток динамічних процесів / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов // Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2018, – т.15, №2, – С. 47–55.
- [6] Лимарченко О.С. Коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному резервуарі на маятниковому підвісі у разі багато частотного руху точки підвісу / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов // Information systems. Mechanics and Control, – 2018, – № 19, – Р. 42–48.
- [7] Лимарченко О.С. Прийоми зменшення негативного впливу рухомості рідини в задачах динаміки сумісного руху конструкцій з рідиною / О.С. Лимарченко, В.В. Лук'янчук, О.О. Нефьодов // Проблеми інформатизації, – Тези доповідей дев'ятої міжнародної науково-технічної конференції Київ – Полтава – Катовице – Париж – Вільнюс – Харків – Мінськ – Орел, – 2017, – С. 20–21.

- [8] Limarchenko O.S. Suppression of liquid mobility effect in nonstationary problems of dynamics of structures with free-surfaced calculus / O.S. Limarchenko, V.V. Lukianchuk, A.A. Nefedov // Збірник матеріалів міжнародної конференції «Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation», Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, – 2017, – С. 106–107.
- [9] Нефедов А.А. Повышение сейсмоустойчивости охладительных резервуаров АЭС / А.А. Нефедов // Збірник матеріалів 2 міжнародної конференції «Проблеми зняття з експлуатації об'єктів ядерної енергетики та відновлення навколишнього середовища», – Чернігів: ЧНТУ, – 2017, – С. 260–262.
- [10] Нефьодов О.О. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічному збуренні руху / О.О. Нефьодов // Збірник матеріалів 3 міжнародної конференції «Проблеми зняття з експлуатації об'єктів ядерної енергетики та відновлення навколишнього середовища», – Чернігів: ЧНТУ, – 2018, – С. 202–204.

ANNOTATION

Nefedov O.O. Theoretical analysis of pendulum suspension for improvement of seismic and vibration stability of reservoir with liquid. – Manuscript.

Thesis for Candidate's Degree of Physical and Mathematical Sciences on specialty 01.02.01 – Theoretical mechanics. – S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The urgent problem of increase of seismic and vibration stability of the systems, consisting of reservoirs with liquid by means of provision of a

supplementary degree freedom, i.e., potential of angular motion. Surveys, done in this field, in particular by R. Ibrahim, O.S. Limarchenko and I.O. Lukovsky showed that research of the problems of angular motion of the systems reservoir – liquid with a free surface are developed insufficiently, which is confirmed by few publications in this subject, where it is necessary to mention publications of M. La Rocca, G.-P. Sciortino, O.S. Limarchenko, P.S. Kovalchuk.

The main objective of the present thesis is theoretical research of peculiarities of behavior of the systems consisting of reservoirs, partially filled with a free surfaced liquid, which can perform angular motions, under seismic and vibration loading.

The problem of combined motion of the reservoir with a free surfaced liquid is considered as a nonstationary, nonlinear boundary value problem, which has both geometrical and physical nonlinearities.

In the thesis we developed nonlinear dynamical model of combined motion of the system reservoir – liquid with a free surface on a pendulum suspension with moving suspension point aimed at nonstationary excitation of motion. Here walls of the reservoir are absolutely rigid, liquid is ideal, homogeneous, incompressible and initially liquid motion is supposed to be irrotational. Started from the above listed assumptions we introduce the velocity potential for liquid, which terms characterize wavy motion of liquid and connection of wavy motion of liquid with translational and rotational motion of the reservoir, correspondingly.

Mathematical formulation of the problem about the system motion is considered as an aggregate of kinematical restrictions, dynamical equations and initial conditions. The Hamilton–Ostrogradsky variational principle is used. Dynamical boundary conditions of motions follow from the Hamilton–Ostrogradsky variational principle as natural. Correspondingly the requirements of continuity of the liquid flow and non-flowing conditions for liquid through rigid surface of the reservoir and a free surface of liquid belong to kinematical conditions.

Representation of the desired values is done in the form to satisfy in advance all kinematical restrictions.

From the theoretical point of view application of pendulum suspension as a mean of seismic protection is possible due to the property that on considering the combined motion variation of a value of the resonant frequency of the first antisymmetric normal mode takes place. Here the values of resonant frequencies, for which variation of the position of the mass center does not occur (including the axisymmetric normal mode), remain to be the same as the corresponding partial frequencies for the given translational motion. This results in the increase of frequency of the first antisymmetric normal mode, and the change of order of frequencies for their arrangement in ascending order occurs, and this, in turn, results in lowering of intensity of manifestation of the resonance by the antisymmetric normal mode (circumferential number $m=1$).

The analysis of behavior of reservoir on pendulum suspension for oscillations on resonant frequencies associated with a liquid and the pendulum suspension showed, in particular, that in a wide range of pendulum suspension lengths the resonance with respect to the normal mode $m=2$ manifests the most intensively in spite of the absence of this resonance within the linear model and in the case of the given translational motion. Comparison with theoretical publications and experiments of other authors was done.

The method of determination of the most advantageous lengths of pendulum suspensions was substantiated. Thus, a number of testing examples where translational motion of the reservoir suspension point was performed according to “seismic like” laws was considered. It was shown that certain ranges of lengths of pendulum suspensions have their advantages in comparison with the vase when the reservoir is rigidly fixed.

The approach approbation was done in the case when motion of the suspension point was given based on real parameters of earthquake. Efficiency of application of the pendulum suspension was studied. The comparison of

perturbations of a liquid free surface, force and moment interaction of was done in the case of pendulum and rigid fixation of the reservoir. Supplementary we performed spectral analysis of excitations of a free surface of liquid on walls. Finally, all the above-mentioned comparisons of different lengths of the pendulum suspension and rigid fixation of the reservoir make it possible to state about the expedience of application of pendulum suspension for lowering negative effect of seismic and vibration excitations occurring on operation of different kinds of industrial systems.

Keywords: nonlinear dynamics of liquid with a free surface, combined motion, manifestation of main and secondary resonances, angular motion of structures.

**Scientific papers, in which the main scientific results
of the dissertation are published:**

- [1] Limarchenko O.S. Behavior of structures with liquid under seismic perturbation of motion / O.S. Limarchenko, O.O. Nefedov // Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine, – 2017, – v. 14, – №2, – P. 56–64.
- [2] Limarchenko O. Peculiarities of dynamics of the reservoir with a free surfaced liquid on pendulum suspension with the moving suspension point / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 1, – P. 41–47.
- [3] Limarchenko O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 2, – P. 178–183.
- [4] Konstantinov A.V. Dynamical technique of damping of oscillations in the system “structure – liquid with a free surface” / A.V. Konstantinov,

O.S. Limarchenko, V.V. Lukyanchuk, A.A. Nefedov // Applied Mechanics, – 2018, – vol. 55, – № 1, – P. 64–77.

[5] Limarchenko O.S. Effect of frequency characteristics of motion excitation of a structure with a liquid on development of dynamical processes / O.S. Limarchenko, O.O. Nefedov // Proceedings of Institute of Mathematics NAS of Ukraine, – 2018, – v.15, №2, – P. 47–55.

[6] Limarchenko O.S. Oscillations of a liquid with a free surface in cylindrical reservoirs on pendulum suspension in the case of multifrequency motion of the suspension point / O.S. Limarchenko, O.O. Nefedov // Information systems. Mechanics and Control, – 2018, –№ 19, – P. 42–48.

[7] Limarchenko O.S. Techniques of reduction of negative effect of liquid mobility in problems of dynamics of combined motion of structures with liquid / O.S. Limarchenko, V.V. Lukyanchuk, A.A. Nefedov // Problems of informatization. – Abstracts of reports of the ninth International scientific and engineering conference Kiev – Poltava – Katowice – Paris – Vilnius – Kharkiv – Minsk – Orel, – 2017, – P. 20–21.

[8] Limarchenko O.S. Suppression of liquid mobility effect in nonstationary problems of dynamics of structures with free-surfaced calculus / O.S. Limarchenko, V.V. Lukianchuk, A.A. Nefedov // Proceedings of the International conference «Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation», Bulletin of the Taras Shevchenko Kiev National University, – 2017, – P. 106–107.

[9] Nefedov A.A. Increase of seismic stability of cooling reservoirs of Nuclear Power Stations / A.A. Nefedov // Proceedings of the 2-nd International Conference «Problems of decommissioning of objects of nuclear energetics and environmental restoration», – Chernigov: ChNTU. – 2017, – P. 260–262.

[10] Nefedov A.A. Behavior of structures with liquid on pendulum suspension under seismic perturbation of motion / A.A. Nefedov // Proceedings of the 3-rd International Conference «Problems of decommissioning of objects of nuclear energetics and environmental restoration», – Chernigov: ChNTU. – 2018, – P. 202–204.

ЗМІСТ

ВСТУП	14
РОЗДІЛ 1. Сучасний стан досліджень динаміки конструкцій з рідиною при імпульсних та вібраційних навантаженнях	24
Висновки до розділу	30
РОЗДІЛ 2. Математична модель дослідження динаміки сумісного руху конструкцій з рідиною	33
2.1. Математична постановка задачі сумісного руху системи резервуар – рідина на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського	33
2.2. Побудова розкладів шуканих величин системи. Аналітичне виключення кінематичних граничних умов	40
2.3. Побудова дискретної моделі на основі методу модальної декомпозиції	44
Висновки до розділу	48
РОЗДІЛ 3. Чисельна реалізація алгоритму дослідження нелінійної задачі динаміки конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі	49
3.1. Аналіз кінематичних та динамічних характеристик системи резервуар – рідина	49
Короткі висновки	54
3.2. Дослідження поведінки системи в околі основних резонансів	55
Короткі висновки	71
3.3. Тестові приклади аналізу поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі при короткотривалому кінематичному збуренню руху	72
Короткі висновки	81
Висновки до розділу	82

РОЗДІЛ 4. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічних навантаженнях	84
4.1 Аналіз впливу довжини маятникового підвісу на поведінку конструкції з рідиною при тестовому сейсмічному навантаженні	84
Короткі висновки	93
4.2 Аналіз хвильового руху рідини при збудженні руху системи для реального сейсмічного навантаження	93
4.3 Аналіз руху конструкції і силової та моментної взаємодії рідини зі стінками резервуару при збудженні руху системи для реального сейсмічного навантаження	99
Висновки до розділу	104
ВИСНОВКИ.....	105
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	106

ВСТУП

На початку другої половини двадцятого століття перед вченими з'явилась необхідність розгляду задач коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарах різної форми при вібраційних, імпульсних і сейсмічних навантаженнях в транспортній та енергетичній галузях, в ракетній техніці, громадському будівництві.

Так, було розроблено ряд лінійних моделей за допомогою яких стало можливо дослідити задачі про частоти та форми коливань рідини. Важливі результати по застосуванню моделі були отримані такими вченими як Г. Абрамсон, Х. Бауер, Б.І. Рабинович, Д.Е. Охочимський. Лінійна поставка задач і зараз розглядається як початковий етап розв'язку задачі в нелінійній постановці.

Надалі, Г.С. Нарімановим, Л.В. Докучаєвим, І.О. Луковським, Дж. Майлзом, О.С. Лимарченком та іншими провідними вченими було розвинуто та впроваджено декілька варіантів асимптотичних і варіаційних методів розв'язку нелінійних задач динаміки тіл з рідиною, наприклад, використання варіаційного методу Бейтмена та Гамільтона – Остроградського. Причому, найбільш дослідженим розділом задач динаміки рідини з вільною поверхнею є поведінка таких систем в околі основного резонансу.

Випадок кутових рухів резервуару до теперішнього часу являється найменш дослідженим. Це, насамперед викликано рядом проблем чисельної реалізації такого роду задач, в тому числі необхідністю розгляду поряд із скалярним векторного потенціалу швидкостей.

Актуальність теми.

Протягом останнього часу зусиллями таких вчених як Г.С. Наріманов, М.М. Моісеєв, Л.В. Докучаєв, В.В. Румянцев, Б.І. Рабінович, І.О. Луковський,

В.Д. Кубенко, І.О. Луковський, В.П. Шмаков, Дж. Майлз, Х. Бауер та інші була сформована прикладна теорія руху рідини в резервуарах. Розглянуто широке коло питань поведінки системи при різних законах руху і особливості поведінки системи в околі резонансів. В останній час коло задач динаміки резервуарів з рідиною значно розширилося, зокрема, досліджуються задачі забезпечення сейсмостійкості резервуарів з рідиною в енергетиці, системах транспортування і збереження нафти та газу. Ускладнення способів закріплення резервуарів і законів руху конструкцій призвели до необхідності моделювання руху таких систем при кутових рухах конструкції, наприклад, на маятниковому підвісі. Надання системі додаткових ступенів вільності за рахунок ускладнення способу закріплення резервуарів призводить до зменшення зсувних зусиль, але, в той же час, змінює частотні і динамічні характеристики системи, в якій компоненти системи беруть участь в сумісному русі.

Як показують літературні огляди, зокрема, виконані Р. Ібрагімом, О.С. Лимарченком та І.О. Луковським, дослідження задач кутових рухів систем резервуар – рідина з вільною поверхнею розвинені ще в недостатній мірі, про що свідчить мала кількість існуючих публікацій, де слід відзначити роботи М. Ля Роки, Ж.-П. Шортіно, О.С. Лимарченка і П.С. Ковальчука.

Однією з важливих задач такого класу є задачі сейсмозахисту конструкцій з рідиною. Специфіка збурень руху в такій системі призводить до необхідності розглядати поступальний рух системи як наперед заданий, а коливання рідини та кутовий рух, що може виникати, необхідно розглядати в сумісній нелінійній постановці. Попередні теоретичні дослідження таких задач показують, що при цьому відбувається зміна значень резонансних частот, а для деяких довжин підвісу змінюється їх порядок розташування, що в підсумку змінює ступінь прояву резонансів, а також призводить до виникнення нових нелінійних резонансів, які при чисто поступальному заданому русі взагалі не проявляються.

Об'єктом дослідження даної роботи є перехідні режими і резонансні явища, які виникають при сумісному кутовому русі конструкції з рідиною з вільною поверхнею в лінійному та нелінійному діапазонах збурень

Предметом дослідження роботи є вивчення прояву основних та вторинних резонансів в розвиненні хвильового руху рідини і їх вплив на формування перехідних (сейсмічних) процесів в конструкціях з рідиною.

Методи дослідження.

В роботі використано варіаційні методи постановки та розв'язання задач механіки, а саме варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського, методи нелінійної механіки, метод модальної декомпозиції, чисельна реалізація, спектральний аналіз коливань.

Мета дисертаційної роботи:

- Теоретично дослідити особливості поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу при вібраційних і сейсмічних навантаженнях.
- Обґрунтувати практичну доцільність такого закріплення конструкцій з рідиною як засіб підвищення сейсмостійкості.

Основні завдання, які необхідно було вирішити для досягнення поставленої мети:

- Розробити нелінійну динамічну модель сумісного руху резервуарів з рідиною, орієнтовану на сейсмічні збурення руху.
- Дослідити поведінку системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з різними довжинами підвісу при вібраційних і найпростіших сейсмічно подібних збуреннях руху.

- Показати переваги використання маятникового підвісу резервуару з рідиною у порівнянні з випадком жорсткого закріплення на прикладах різних типів вібраційних та сейсмічно подібних збурень руху; розробити рекомендації щодо підбору довжин маятників підвісу для найбільш раціонального використання цих переваг.
- Показати ефективність використання маятникового підвісу конструкції з рідиною на прикладі реальних параметрів землетрусу, що відбувся в околі АЕС (Фукусіма, Японія).

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- Було розроблено нелінійну динамічну модель сумісного руху резервуарів з рідиною орієнтовану на нестационарне збурення руху, в якій по частині змінних (параметри поступального руху резервуара) рух вважається заданим, а кутовий рух системи і коливання рідини розглядаються в нелінійній сумісній постановці.
- Виконано дослідження поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з різними довжинами при різних частотах кінематичного збурення руху системи; визначено специфіку поведінки системи в до-, біля- і за共振ансних областях.
- Виявлено, що для певного діапазону довжин підвісу резонансні коливання рідини відбуваються також на частотах, що відповідають вторинним (нелінійним) резонансам, які в рамках лінійного моделювання взагалі відсутні.
- На прикладі реальних параметрів землетрусу, що відбувся в околі АЕС (Фукусіма, Японія) показано ефективність використання маятникового підвісу конструкції з рідиною і обґрунтовано метод вибору діапазонів найбільш сприятливих довжин маятникового підвісу.

Достовірність отриманих результатів забезпечується:

- використанням варіаційного формулювання та алгоритмів розв'язання задачі;
- контролем виконання законів симетрії та збереження енергії;
- якісним порівнянням результатів з експериментами, виконаними іншими авторами.

Практична цінність отриманих результатів. В дисертаційній роботі були отримані практичні рекомендації щодо можливості використання маятникового підвісу у промисловості, виконано аналіз вибору довжин підвісу для різних варіантів руху основи, а також:

- Розроблено нелінійну динамічну модель сумісного руху резервуару з рідиною, орієнтовану на сейсмічні навантаження.
- Проведено тестові розрахунки, досліджено поведінку системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з різними довжинами при різних частотах кінематичного збурення руху системи.
- Визначено специфіку поведінки системи в до-, біля- та зарезонансних областях для випадку різних довжин підвісу.
- Виявлено, що для коротких довжин закріплення резонансні коливання рідини відбуваються на частоті, що відповідає вторинному (нелінійному) резонансу.
- Виконано розрахунок ряду задач, де в якості руху точки підвісу використовуються реальні параметри землетрусу. Показано, що маятниковий підвіс можливо розглядати як засіб зменшення впливу та обґрунтовано метод вибору найбільш сприятливих довжин маятникового підвісу.

Основні результати дисертації увійшли до звітів держбюджетних науково-дослідних тем №16БП038-03 «Вирішення прикладних проблем

енергетичного комплексу і транспорту на основі сучасних теоретико-експериментальних підходів» (Реєстраційний номер 0116U004754) та №18БП038-01 «Моделі і засоби підвищення експлуатаційної надійності і ресурсу технічних систем енергетики і транспорту» (Реєстраційний номер 0118U001123) науково-дослідної лабораторії «Диференційних рівнянь та їх застосувань у механіці» механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 4 розділів, які містять 67 рисунків та 5 таблиць, висновків та списку використаних літературних джерел із 98 найменування на 14 сторінках. Загальний обсяг дисертації складає 119 сторінок.

Вступ включає в себе обґрунтування щодо актуальності даних досліджень та вибору теми дисертаційної роботи. Також, сформульовано основну мету, завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, приведено наукову новизну та практичну цінність роботи. У вступі приведено перелік публікацій, виступів на конференціях та семінарах за темою дисертаційних досліджень.

Розділ 1. Наведено огляд літературних джерел, присвячених дослідженням динаміки конструкцій з рідиною. Розглянуто основні підходи та методи розв'язання такого роду задач. Основну увагу приділено найменш вивченому колу задач, пов'язаних з кутовим рухом резервуарів з рідиною, нелінійним ефектам, сумісності руху складових системи, питанням можливого практичного використання маятникового підвісу для зменшення негативних ефектів що виникають при вібраційних та сейсмічних збуреннях.

Розділ 2 складається з опису побудованої математичної моделі руху циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, на маятниковому підвісі, з рухомою точкою підвісу. Представлено кінематичні обмеження, які накладаються на дану систему. Виконано побудову дискретної моделі, введено узагальненні координати, по частині яких (параметри поступального руху основи) рух є наперед заданим, а по іншим (амплітуди збудження форм коливань рідини та кути відхилення резервуару) – зв’язаний.

В **розділі 3** приведено числові результати, розглянуто поведінку системи у випадку найпростіших, тестових, рухів основи, імпульсних та гармонічних рухів, досліджено поведінку системи в околі основних резонансів як рідини, так і резонансу по куту, пов’язаного з закріпленим резервуару на маятниковому підвісі.

Розділ 4 присвячено дослідженню поведінки системи на елементарних «сейсмоподібних» збуреннях руху основи та для випадку, коли рух основи задається на основі реальних сейсмограм. Виконано порівняння випадків різної довжини підвісів з жорстким закріпленим резервуару, в тому числі й спектрального аналізу збурень вільної поверхні рідини на стінці.

Особистий внесок дисертанта. Представлені до захисту результати були отримані здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві з науковим керівником роботах дисертанту належить адаптація методу розв’язання задачі про нелінійні коливання рідини в резервуарі у випадку використання маятникового підвісу системи з рухомою точкою підвісу, аналіз специфіки поведінки системи резервуар – рідина на рухомому маятниковому підвісі.

В статті «Динамические приемы гашения колебаний в системе «конструкция – жидкость со свободной поверхностью» розділ 3 «Снижение подвижности жидкости при сейсмическом возмущении движения конструкций с жидкостью» належить дисертанту, а інші розділи належать співавторам О.В. Константінову, О.С. Лимарченку, В.В. Лук'янчуку.

Науковому керівнику О.С. Лимарченку належить постановка задачі, ідея методу та участь в обговоренні і систематизації одержаних результатів.

Апробація роботи. Наукові та практичні результати були розглянуті на семінарах та конференціях.

Основні результати по темі дисертації були представлені та обговорювались на наступних конференціях:

- Проблеми інформатизації: дев'ята міжнародна науково-технічна конференція Київ – Полтава – Катовище – Париж – Вільнюс – Харків – Мінськ – Орел, Київ, 12 – 13 грудня, 2017 р.;
- Международная конференция «Проблемы снятия из эксплуатации объектов ядерной энергетики и восстановления окружающей среды», INUDECO, Славутич, 25 – 27 апреля, 2017 р.;
- Международная конференция «Проблемы снятия из эксплуатации объектов ядерной энергетики и восстановления окружающей среды», INUDECO, Славутич, 25 – 27 апреля, 2018 р.;
- XVIII International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation”, Kiev, May 24-26, 2017 р.

Крім цього, дисертаційна робота в повному обсязі доповідалась та була підтримана на:

- семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету Київського національного університету

імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.С. Лимарченка (листопад, 2018 р.);

- семінарі кафедри теоретичної і прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом професора Я.О. Жука (квітень, 2019 р.);
- семінарі відділу теорії коливань Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора В.Д. Кубенка (травень, 2019 р.);
- семінарі секції за напрямком «Динаміка та стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора В.Д. Кубенка (травень, 2019 р.).

По темі дисертаційної роботи було опубліковано наступні **публікації**:

- [1] Лимарченко О.С. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічному збуренні руху / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов // Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2017, – т. 14, – №2, – С. 56–64.
- [2] Limarchenko O. Peculiarities of dynamics of the reservoir with a free surfaced liquid on pendulum suspension with the moving suspension point / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 1, – P. 41–47.
- [3] Limarchenko O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 2, – P. 178–183.

- [4] Константинов А.В. Динамические приемы гашения колебаний в системе «конструкция – жидкость со свободной поверхностью» / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, В.В. Лукьянчук, А.А. Нефедов // Прикладная механика, – 2018, – том. 55, – № 1, – С. 64–77.
- [5] Лимарченко О.С. Вплив частотних характеристик збурення руху конструкції з рідиною на розвиток динамічних процесів / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов // Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2018, – т.15, №2, – С. 47–55.
- [6] Лимарченко О.С. Коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному резервуарі на маятниковому підвісі у разі багато частотного руху точки підвісу / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов // Information systems. Mechanics and Control, – 2018, –№ 19, – Р. 42–48.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому керівнику Олегу Степановичу Лимарченку за постановку задачі та постійну увагу до роботи, а також батькам, друзям та Анастасії за підтримку.

РОЗДІЛ 1. Сучасний стан досліджень динаміки конструкцій з рідиною при імпульсних та вібраційних навантаженнях

В Розділі 1 наведено огляд літературних джерел за тематикою дисертації. Показано основні історичні етапи розвитку досліджень руху систем резервуар - рідина з вільною поверхнею, проаналізовано сучасний стан даного роду задач, в тому числі випадок кутових рухів в зв'язаній нелінійній постановці. Також, розглянуто основні підходи та методи розв'язання такого роду задач.

Насамперед, необхідно відмітити, що на даний момент існує масштабні літературні огляди, виконані такими авторами як Р. Ібрагім [64] та [65], І.О. Луковський [38],[39],[40] та О.С. Лимарченко [28] які дають можливість не тільки прослідкувати основні періоди розвитку задач даного роду та й зробити висновки, які з напрямків є пріоритетними та найменш розвинутими.

Необхідність розгляду задач пов'язаних з розглядом руху систем, до складу яких входять резервуари різної форми (в тому числі й циліндричні та прямокутні баки), частково заповнені рідиною з вільною поверхнею, виникла ще на початку другої половини ХХ сторіччя. Так, різного роду резервуари входять до складу космічних апаратів, літаків, судів та інших транспортних засобів. На наш час, більшість галузей промисловості потребують вирішення проблеми безпечної експлуатації резервуарів з різного роду рідинами. Так, інженерні конструкції з рідиною часто містять екологічно небезпечні речовини, або, навпаки, від надійної експлуатації резервуарів з теплоносієм залежить безпечна робота деяких установок (наприклад водо-водяних енергетичних реакторів, які в даний час працюють на усіх енергоблоках України) для усіх регламентних режимів експлуатації.

Умовно можливо виділити декілька історичних періодів та напрямків розвитку задач динаміки коливань рідини з вільною поверхнею в резервуарах

різної форми: лінійна теорія руху обмеженого об'єму рідини, поява та розвиток нелінійної теорії на основі теорії збурень, розгляд динаміки сумісного руху компонентів системи.

Розгляд лінійних моделей руху рідини дозволив дослідити та розв'язати задачу о частотах та формах коливань рідини в баках. Можливо виділити важливі результати отримані К.В. Лондоном [81] щодо багатокомпонентної моделі супутника NASA, Г.М. Мікішевим [45], [46], Г. Абрамсоном [59], Г. Бауером [61], В.В. Румянцевим [56], Б.І. Рабіновічем [55], Д.Є Охочимським [54].

Також лінійна теорія використовується для врахування інтегрального впливу конструктивних елементів. В роботах [1] та [31] визначено частоти та форми коливань рідини, коефіцієнти рівнянь збуреного руху. В роботі [27] визначається, що задачі коливань рідини в резервуарах з конструктивними елементами досліджено лише в лінійній постановці.

На початку 50-х років ХХ сторіччя усі експерименти були повністю орієнтовані на дослідження поведінки конструкцій в лінійному діапазоні збурюючих факторів. Згідно з [28], разом з добрим узгодженням отриманих результатів з теорією для частот, приєднаних мас та моментів, мало місця деякі суттєві розбіжності в коефіцієнтах демпфування. Експерименти [91], [95], [96], які було проведено пізніше, виявили ряд нелінійних ефектів, серед яких можливо виділити залежність частоти коливань вільної поверхні від амплітуд, наявність нелінійних зв'язків між формами коливань.

На етапі лінійної теорії також розглянуто та отримано ряд важливих теоретичних результатів для тіл, які містять порожнини [27].

В цілому, лінійну постановку задачі можна розглядати як початковий етап вирішення задачі в нелінійній постановці. Так в [28] приведено основні фактори, що обмежують розвиток та застосування лінійної теорії, а саме:

- вихід на режими, пов'язані з порушенням меж застосування лінійної теорії;

- розгляд резервуарів з рівнем заповнення, при яких нахил стінок баку відбувається до осі симетрії (до центру).

Виникнення нелінійних моделей напряму зв'язано з запропонованим Г.С. Нарімановим методом [50], [51] основаним на теорії збурень, де параметр збурення вільної поверхні ξ приймається як малий параметр. В подальшому, результати Г.С. Наріманова були розвинуті в роботах Л.В. Докучаєва [6], [52], І.О. Луковського [36], [37], [41], [80], Р.Ф. Ганієва [3] – [5]. Найбільша кількість робіт тих років була присвячена дослідженю поведінки системи в околі основного резонансу. Так, наприклад, в монографії [39] досліджено поведінку рідини з вільною поверхнею в резервуарах при навантаженнях вібраційного характеру з широким діапазоном вихідних частот, розглянуто можливість стабілізації вільної поверхні.

М.М. Моїсєєв, в свою чергу, активно застосовував теорію збурень, так в роботах [47] - [49] було розроблено метод, який дозволяє отримати періодичний розв'язок нелінійної задачі руху рідини в резервуарі, як у випадку заданого закону горизонтального руху, так і у випадку кутового руху з малою амплітудою з частотою зовнішнього навантаження, близькою до головної резонансної частоти системи. Опис математичних методів, які використовуються для розв'язання даного роду задач приведено в роботах [2], [8], [9].

Так, використовуючи варіаційний принцип Бейтмена та метод теорії збурень Дж. Майлзом [84] – [88], І.О. Луковським [40], О.М. Фалтінсеном [62], [63], О.М. Тимохою було отримано та розвинуто новий алгоритм, який мав ряд переваг, в тому числі в прикладному плані: на основі варіаційного формування Бейтмена вдалось отримати модель, яка враховує до 5 форм коливань рідини [27].

О.С. Лимарченком в роботі [16] було запропоновано використовувати варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського, який мав ряд своїх переваг: було побудовано метод попереднього задовільнення кінематичних

обмежень задачі в загальному вигляді, що дозволило виключити залежні змінні і таким чином перейти до математичної моделі мінімальної розмірності. Даний підхід було розвинуто в роботах [17] – [26], [66], [67].

Значний внесок в розвиток нелінійної теорії руху конструкцій було виконано під керівництвом В.Д. Кубенка [13], [14], [68] – [70]. Так, в роботах [13], [14] було досліджено взаємодію елементів конструкції з середовищем, виконано аналіз стійкості циліндричних оболонок з рідинами.

Нелінійні задачі руху рідини в системах, що здійснюють наперед задані кутові коливання розглянуто в роботах італійських вчених М. Ля Роки та Ж.- П. Шортіно [73] – [75]. Також, розв'язок задачі вимушених кутових коливань системи циліндричний резервуар – рідина було розглянуто в роботі П.С. Ковальчука [10].

Чисельна реалізація згаданих вище методів у випадку нелінійного кутового руху має ряд складнощів, пов'язаних з необхідністю побудови та введення додаткового векторного потенціалу швидкостей, що призводить до значного зростання кількості рівнянь та необхідних обчислень. Так, для розгляду кутових рухів системи, в даній дисертаційній роботі використовується векторний потенціал Стокса – Жуковського.

Необхідно відмітити, що в переважній більшості публікацій розглядаються випадки заданого руху основи. Тоді як задачі в сумісній, зв'язаній постановці, мають ряд проблем технічної реалізації – виникає необхідність розгляду великої кількості форм коливань, так в роботі [57] показано, що навіть для найпростіших випадків збурення вищих форм коливань за короткий час є значними.

Роботи останніх років, в тому числі й вітчизняних вчених [12], [29], [30] наголошують на необхідності розгляду задач руху систем резервуар – рідина з вільною поверхнею виключно у сумісній постановці.

На даний момент усі існуючі методи досліджень задач динаміки систем резервуар – рідина з вільною поверхнею можна поділити на 3 групи:

аналітичні методи, чисельні методи та комбіновані (чисельно – аналітичні методи), які використовують в тому числі модальну декомпозицію.

Так, аналітичні методи дозволяють отримати точний розв'язок, поданий у вигляді аналітичного виразу лише для лінійних моделей, нажаль, основним недоліком даного методу є його не універсальність, аналітичний метод дає змогу розв'язати лише дуже вузьку групу задач. У випадку будь-якої складної геометрії доводиться застосовувати методи інших груп.

До другої групи відносять так звані чисельні методи, що дозволяють звести розв'язування задачі до виконання скінченного числа арифметичних і логічних дій з числами. На основі отриманих результатів можливо побудувати деякі рекомендації щодо вдосконалення розглянутих систем резервуар – рідина. В свою чергу, чисельні методи для задач динаміки конструкцій з рідиною представлені рядом сіткових методів, так як метод скінченних різниць, метод скінченних об'ємів, метод граничних елементів та метод скінченних елементів. Окрім сіткових методів, також є деякі безсіткові методи, наприклад метод дифузних елементів. Останні розробки методів скінченних елементів та граничних елементів сприяли вивчення руху рідини з вільною поверхнею в резервуарах канонічної форми та у випадку складної геометрії баків [88]. Саме чисельні методи на даний момент активно використовуються для аналізу сейсмостійкості резервуарів з рідиною, в тому числі роботи [60], [82], [83], [89] та [92].

Ця група методів також має свої недоліки – точність методу залежить від побудови сітки, що для систем зі складною геометрією є нетривіальною задачею, що потребує великих комп'ютерних або часових ресурсів.

Остання група методів є симбіозом двох попередніх груп. Частіше за все, задачі динаміки резервуар – рідина зводять до розв'язання системи диференціальних рівнянь за допомогою низки розроблених чисельних методів. Саме такий підхід показав високу ефективність для задач резервуар-

– рідина зі складною геометрією. В даній дисертаційній роботі також використовується один з методів даної групи.

Поведінка конструкцій з рідиною при сейсмічній активності є вкрай важливим питанням для багатьох галузей промисловості, в тому числі й для атомної енергетики. Так, для ядерної промисловості існує серія документів, які регламентують проектування конструкцій та норми безпеки щодо сейсмічних навантажень. Важливим є визначення поведінки обладнання та трубопроводів реакторної установки у випадку коливань в резонансній області [71], [72]. Так, радянські норми [53] регламентують можливість використання для проведення необхідних розрахунків на сейсмічну міцність як лінійно-спектрального методу, так й акселерограм. В роботі розроблено модель, яка дозволяє задавати сейсмічну активність у вигляді параметрів заданого поступального руху основи, до якої закріплено маятниковий підвіс, або безпосередньо сам резервуар. Причому, в якості вихідних параметрів використовуються значення прискорень, швидкостей та переміщень у часі.

Виконаний аналіз літературних джерел дає можливість виділити декілька основних підходів щодо зменшення збурень рідини в такого роду конструкціях:

- Зміна геометрії резервуарів, введення додаткових внутрішніх елементів.
- Зміна опорних конструкцій систем, перехід від класичного – жорсткого закріплення до різного роду рухомих опорних елементів, в тому числі еквівалентних маятниковому підвісу.

Дані підходи спрямовані на недопущення руйнування елементів системи, зменшення прояву резонансних процесів під час усіх можливих експлуатаційних режимів та можливості виконання усіх необхідних функцій.

Апробація цього підходу виконана для землетрусу, який відбувся 11 березня 2011 року у регіоні Тохоку, у Північно-Східній Японії. Епіцентром

землетрусу була точка в морі Санріку на глибині 24,4 км, складовій Тихого океану на відстані 130 км від півострова Ошикава, регіон Тохоку [98]. На території Японського архіпелагу зафіксовано поштовхи силою 8,4 балів, які були однією з причин виникнення радіаційної аварії на Першій Фукусімській АЕС, що мала 7, найбільший рівень за міжнародною шкалою ядерних подій INES.

Висновки до розділу

Проведений аналіз літературних джерел дає можливість стверджувати про актуальність задач сумісного руху резервуарів з рідиною на маятниковому підвісі в нелінійній сумісній постановці. На даний момент, такого роду задачі мають практичний аспект та дають можливість проведення найбільш цілісного аналізу впливу рідини на резервуар, з наданням подальших рекомендацій щодо інженерного вдосконалення конструкцій. Причому, даний тип задач є малодослідженим.

Основною складністю такого роду задач є те, що рух резервуару не є заданим, а визначається в процесі розв'язання задачі і залежить як від взаємозв'язку резервуару з рідиною, так й від особливостей (амплітуди, швидкості та прискорення) руху точки підвісу. Аналіз руху резервуару на маятниковому підвісі та жорсткого закріплення резервуару несе за собою можливість надання інженерних рекомендацій, щодо підвищення сейсмостійкості конструкцій з рідиною, та комплексного підвищення безпеки різного роду установок в цілому.

Розгляд резервуару з рідиною на маятниковому підвісі у постановці, коли рух точки підвісу є заданим практично зовсім не зустрічається у літературних джерелах, але, саме така постановка задачі є найбільш цікавою з прикладної точки зору, так як дає можливість обґрунтування сейсмічної безпеки конструкцій.

Динаміка системи в сумісному русі має суттєві відмінності порівняно з випадком заданого руху резервуару, оскільки відбувається зміна значень

власних частот, також змінюється їх черговість, в результаті зміщаються ділянки прояву резонансних ефектів та виникають нові внутрішні резонанси, відслідкувати які без врахування сумісності руху не є можливим.

Зокрема, на основі огляду можна виділити наступні характерні особливості моделювання та складності поведінки такої механічної системи:

- наявність вільної поверхні рідини обумовлює вагомий прояв нелінійностей фізичного і геометричного типів;
- математичний об'єкт являє собою систему неоднорідної математичної структури: динаміка рідини описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, динаміка конструкції – диференціальними рівняннями в звичайних похідних, які зв'язані між собою, що призводить до потреби проведення гомогенізації розв'язувальної системи;
- дослідження вказують на важливість врахування сумісного характеру руху складових компонент системи, особливо через те, що для більшості практичних задач маса рідини перевищує масу конструкції;
- потреба в розгляді одночасно поступального та кутового руху конструкції, і як варіант, заданого поступального і сумісного кутового руху конструкції з рідиною, що особливо важливе при сейсмічних збуреннях руху;
- сумісність руху складових компонент обумовлює зміну черговості розташування резонансних частот у порівнянні з випадком незв'язаного руху компонент, що обумовлює нові резонансні і динамічні властивості поведінки систем, змінює характер прояву основних резонансів і виникнення вторинних резонансів;
- при розгляді перехідних процесів суттєвим є включення великої кількості форм коливань;
- дослідження останніх років, виконані чисельними методами, що основані на ідеях поточкової дискретизації (в яких не приймаються

гіпотези про якісну поведінку системи), та на основі експериментальних методів, дали додаткову інформацію про поведінку системи і дозволили переглянути ряд теоретичних гіпотез щодо форм пошуку розв'язку, зокрема, не підтвердилася гіпотеза про можливість нехтувати коливаннями на власних нерезонансних частотах, що в підсумку обумовлює наявність вторинних резонансів і складний характер модуляції коливань.

РОЗДІЛ 2. Математична модель дослідження динаміки сумісного руху конструкцій з рідиною

В розділі 2 дисертаційної роботи приведено математичну постановку задачі про сумісний рух системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі за допомогою варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, приведено побудову розкладів шуканих величин та аналітичне виключення кінематичних граничних умов, виконано перехід до дискретної моделі за допомогою метода модальної декомпозиції. В процесі розгляду такої системи найбільшу складність викликає наявність кінематичної умови на вільній поверхні, вибір кількості форм коливань рідини та безпосередньо чисельний розв'язок отриманої системи рівнянь.

Предметом вивчення даної дисертаційної роботи є прояви основних та вторинних резонансів в розвинені хвильового руху рідини та їх вплив на формування перехідних процесів в конструкціях з рідиною.

Сумісний рух резервуару з рідиною, яка містить вільну поверхню, розглядається як нестационарна, нелінійна крайова задача, яка має як геометричні (обумовлені наявністю граничної умови на наперед невідомій, збурений, вільній поверхні рідини), так і фізичні (граничні умови задаються за допомогою нелінійних рівнянь) нелінійності.

2.1. Математична постановка задачі сумісного руху системи резервуар – рідина на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського

Розглядається механічна система, яка складається з циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, які закріплено на маятниковому підвісі з рухомою основою. При цьому, стінки резервуару є абсолютно твердими, рідина – ідеальна, однорідна, нестислива, а рух рідини в початковий момент часу безвихровий. Математичне формулювання задачі

про рух системи резервуар – рідина розглядається як сукупність кінематичних обмежень, динамічних рівнянь та початкових умов.

В даній роботі, будемо використовувати традиційні для даної галузі позначення: τ – область, яку займає рідина, S – вільна поверхня рідини, Σ – змочувана поверхня резервуару, L – контур контакту трьох середовищ газ–рідина–тіло. Позначення з індексом "0" відповідають незбуреному стану рідини.

Також, введемо декілька систем координат, які необхідні для опису динаміки системи резервуар (циліндричний) – рідина, тим самим чином, як це зроблено у роботі [28]:

- $O_1x_1x_2x_3$ – умовно нерухома система координат з центром в точці підвісу O_1 ;
- $Oxyz$ – жорстко зв'язана з резервуаром система координат з початком в точці O в центрі незбуреної вільної поверхні рідини, вісь Oz перпендикулярна до незбуреної вільної поверхні;
- $Oy_1y_2y_3$ – система координат, вісі якої відповідно паралельні осям нерухомої системи координат $O_1x_1x_2x_3$.

Рух точки O в системі $O_1x_1x_2x_3$ задається радіус-вектором $\vec{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Обертальний рух системи $Oxyz$ відносно системи $O_1x_1x_2x_3$ задається трьома кутами повороту $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Кут α_1 визначається як кут обертання системи $Oxyz$ відносно осі Oy_1 , кут α_2 – кут обертання відносно осі Oy_2 , кут α_3 – кут обертання відносно осі Oy_3 . Набір параметрів $\alpha_i, \varepsilon_i, i = \overline{1,3}$ повністю описує рух резервуару в нерухомій системі координат $O_1x_1x_2x_3$.

Досліджувану механічну систему схематично представлено на рис. 2.1. Поступальний рух точки підвісу в даній дисертаційній роботі є наперед заданим, хвильовий рух рідини та кутовий рух резервуару розглядається в зв'язаній постановці.

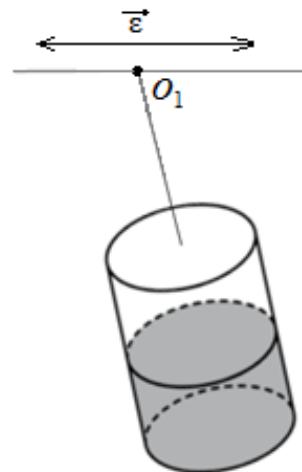


Рис. 2.1. Схематичний вигляд механічної системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, який закріплено на рухомій точці підвісу.

Основні позначення, які використовуються в даній дисертаційній роботі, приведено на рис.2.2.

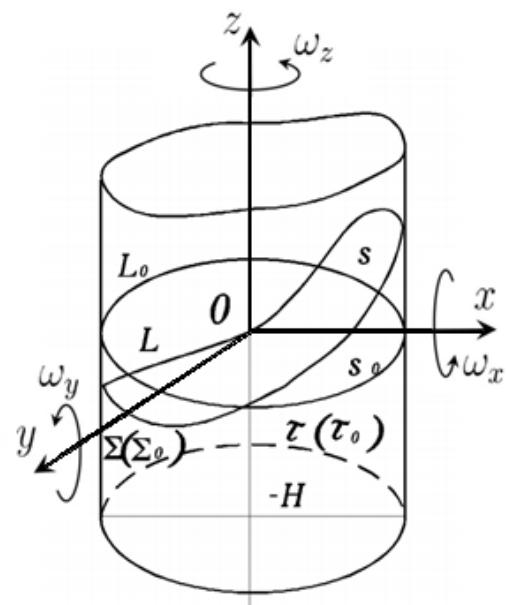


Рис. 2.2. Основні позначення, що використовуються в дисертаційній роботі.

Дана система включає в себе циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною, необхідно ввести рівняння вільної поверхні рідини, яке найбільш доцільно подати у розв'язаному відносно змінної z вигляді:

$$z = \xi(x, y, t) \quad (2.1)$$

або

$$z = \xi(r, \theta, t). \quad (2.2)$$

Оскільки в початковий момент часу рух рідини є безвихровим, згідно з прийнятим припущенням, то, використовуючи теорему Лагранжа про рух ідеальної однорідної нестисливої рідини випливає, що рух рідини в будь-який момент часу є безвихровим. В такому випадку, згідно роботи [28], найбільш оптимальним рішенням є введення функції потенціалу швидкостей рідини $\Phi(\vec{r}, t)$, який вводиться у нерухомій системі координат і представляється в наступному вигляді:

$$\Phi = \varphi_0 + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}, \quad (2.3)$$

де \vec{r} – радіус-вектор довільної точки простору в жорстко зв'язаній з резервуаром системі координат, φ – скалярний потенціал швидкостей рідини, $\vec{\Omega}$ – потенціал Стокса – Жуковського.

При цьому, значення абсолютної \vec{V}_a , переносної \vec{V}_e та відносної \vec{V}_r швидкостей руху частинок рідини будуть:

$$\vec{V}_a = \vec{\nabla} \Phi; \quad (2.4)$$

$$\vec{V}_e = \dot{\vec{\varepsilon}} + \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad (2.5)$$

$$\vec{V}_r = \vec{\nabla} \Phi - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.6)$$

В цілому, математична постановка задачі про рух системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею може бути розглянуто як сукупність вимог кінематичного характеру, рівнянь

динаміки та початкових умов. Згідно з загальних властивостей опису механічних систем, які випливають з принципу Гамільтона – Остроградського, кінематичні вимоги необхідно розглядати як механічні в'язі, що накладають деякі обмеження на варіації змінних. При цьому, динамічні умови виникають з вище згаданого принципу автоматично.

Так, в даній групі задач розглядаються наступні кінематичні умови:

- Умова нерозривності потоку;
- Умова неперетікання через тверду поверхню резервуару;
- Умова неперетікання через вільну поверхню рідини.

Так, умова нерозривності потоку для ідеальної нестисливої рідини має наступний вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{V}_a = 0. \quad (2.7)$$

Або, з урахування (2.4):

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.8)$$

Остаточно отримуємо умову нерозривності у вигляді сукупності рівнянь (2.9):

$$\Delta\varphi = 0; \Delta\vec{\Omega} = 0 \text{ в } \tau. \quad (2.9)$$

Наступною умовою є умова неперетікання на границі контакту тіло – рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі \vec{n} , яку можливо подати у наступній формі:

$$\vec{V}_n \Big|_{\Sigma} = \vec{n} \vec{V}_r \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (2.10)$$

Або, з урахуванням (2.3) попередня формула набуває вигляду:

$$\vec{n} \vec{V}_r \Big|_{\Sigma} = 0 = (\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{n}. \quad (2.11)$$

Тоді, за допомогою ряду перетворень, умову неперетікання через тверду поверхню резервуару можна подати у вигляді двох наступних співвідношень:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (2.12)$$

$$\vec{\omega} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{\omega} (\vec{r} \times \vec{n}) \text{ або } \vec{\omega} \left(\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} - \vec{r} \times \vec{n} \right) = 0 \text{ на } \Sigma.$$

Оскільки, згідно означення кінематичної умови, вона повинна не залежати від законів руху, тому (2.10) повинно виконуватись за будь-яких значень $\vec{\omega}$, тобто, остаточно умову непротікання можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma. \quad (2.13)$$

Тепер розглянемо умову неперетікання через вільну поверхню рідини:

$$\vec{n} \vec{V}_{\substack{\text{вільної} \\ \text{поверхні}}} = \vec{n} \vec{V}_{\substack{\text{рідини} \\ \text{на поверхні}}}. \quad (2.14)$$

Рівняння нормалі до вільної поверхні, враховуючи що рівняння вільної поверхні $z - \xi(x, y, t) = 0$, записуємо у вигляді:

$$\vec{n} = \frac{\left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right\}}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}}. \quad (2.15)$$

Нормальна швидкість \vec{V}_n на вільній поверхні:

$$\vec{V}_n = \vec{V}_r \vec{n} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}}. \quad (2.16)$$

Тоді умова неперетікання на вільній поверхні може бути подана у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot [\vec{\nabla} \varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] = \\
& = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\vec{\varepsilon}}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z, \quad \xi = z, \\
& \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Розглянемо функцію Лагранжа для системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} [\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega})]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \\
& + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_T + M_F) g \varepsilon_r + \\
& + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\
& - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \\
& - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_T h_T + M_F h_F) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
& - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де ρ – густина рідини, g – гравітаційне прискорення, H – рівень заповнення рідини в резервуарі, M_F , M_T – маси рідини та резервуару, h_F , h_T – зміщення центрів мас рідини та резервуару відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0 , σ – коефіцієнт поверхневого натягу на вільній поверхні рідини, θ_1 – контактний кут (визначається зі співвідношення між коефіцієнтами поверхневого натягу $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma \cos \theta_1$, де σ_1 – коефіцієнт поверхневого натягу на границі рідина – тверде тіло, σ_2 – коефіцієнт поверхневого натягу на границі газ – тверде тіло), J_{res}^{ij} –

тензор інерції резервуару, визначений відносно точки O ; \vec{F}, \vec{M} – головний вектор та головний момент зовнішніх сил, що діють на резервуар, визначені відносно точки O ; $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – представлення кутів повороту резервуару відносно нерухомої системи координат.

Згідно з принципом Гамільтона – Остроградського, рівняння (2.9), (2.13), (2.17), згадані вище, являють собою систему кінематичних обмежень відносно варіаційного принципу (2.19). Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно задоволінити цим в'язям до початку розв'язання варіаційної задачі.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (2.19)$$

При цьому, динамічні умови та рівняння руху отримуються з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського при використанні функції Лагранжа у вигляді (2.18) згідно [28].

2.2. Побудова розкладів шуканих величин системи. Аналітичне виключення кінематичних граничних умов

Як було відзначено, для ефективного застосування варіаційних методів необхідно задоволінити цим в'язям до початку розв'язання варіаційної задачі.

Пошук невідомих величин будемо виконувати, згідно [15], [16] та [28] у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta); \\ \varphi &= \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \operatorname{sh} \kappa_n H}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \operatorname{sh} \kappa_n H}.$$

При цьому, коефіцієнти a_n, b_n, q_n в рівняннях (2.20) є невідомими, а функції ψ_n та $\vec{\Omega}_0$ є наперед визначеними. Варто відмітити, що дані коефіцієнти не є незалежними, так в роботі [28] було показано, що залежність параметрів може бути за допомогою асимптотичних методів в методу Галеркіна представлена для довільної кількості форм коливань наступними співвідношеннями:

$$b_i = b_i(a_i, \dot{a}_j), \quad \vec{q}_i = \vec{q}_i(a_i). \quad (2.21)$$

$\psi_n(r, \theta)$ – набір, який включає в себе повну ортогональну систему функцій в області S_0 , яку отримано в якості розв'язку крайової задачі Неймана з параметром κ_n :

$$\begin{aligned} \Delta \psi_n + \kappa_n^2 \psi_n &= 0 \text{ на } S_0. \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial n} &= 0 \text{ на } L_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В якості функції $\vec{\Omega}_0$ прийнято використовувати потенціал Стокса – Жуковського, який є розв'язком крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\Omega}_0 &= 0 \text{ в } \tau; \\ \frac{\partial \vec{\Omega}_0}{\partial \vec{n}} &= \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma + S_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Так в роботі [28] показано алгоритм побудови потенціалу Стокса – Жуковського для резервуарів різних форм, в тому числі у випадку

циліндричного резервуару.

Саме такий вибір представлення невідомих (2.20) дозволяє тоді ж задовільнити як умову нерозривності потоку, так і неперетікання через тверду поверхню циліндричного резервуару. Даний метод дозволяє отримувати розв'язок нелінійної задачі сумісного руху резервуару з рідиною у вигляді розкладу по власним функціям лінійної задачі, розклади змінних ξ , φ , $\vec{\Omega}$ за формулою збігаються з розв'язком задачі про рух обмеженого об'єму рідини в рухомому циліндричному резервуарі в лінійній постановці.

Насамперед, при побудові розкладів змінних необхідно задовільнити кінематичній граничній умові на вільній поверхні, що рухається. Так, для даного класу задач виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні є типовою та вирішується за допомогою методу Гальоркіна. Виходячи з теореми, що безвихровий рух ідеальної нестисливої однорідної рідини визначається рухом її границь число ступенів вільності усього об'єму рідини є рівним числу ступенів вільності вільної поверхні.

Виходячи з вище написаного, за базовий параметр системи приймається збурення вільної поверхні ξ , а φ , $\vec{\Omega}$ вважаються залежними, що відповідає залежності b_i , \vec{q}_i від a_k згідно з [16].

Загальний вигляд цієї залежності визначається з граничної умови на вільній поверхні (яка повинна виконуватись для довільного закону руху резервуару). Для $z = \xi$ перша умова (2.17) переписується у вигляді:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \varphi_0 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0; \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \vec{i}_k \cdot (\vec{i}_3 \times \vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

Де Ω_k , $k = 1, 2, 3$ – компоненти векторного потенціалу швидкості $\vec{\Omega}$.

Визначення вигляду залежності параметрів b_i , \vec{q}_i від амплітудних параметрів a_k проводиться на основі методу Гальоркіна та методів нелінійної механіки. Розклади шуканих змінних (2.20) підставляємо до умов (2.24, 2.25), отримані вирази множимо на ψ_p та виконуємо інтегрування по незбуреній вільній поверхні рідини S_0 . При цьому використано розклад гіперболічних функцій в ряди по змінній ξ в околі $\xi = 0$.

Виходячи з загальних законів нелінійної механіки, залежність b_i , \vec{q}_i від a_k будемо шукати у формі [76]:

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)}; \quad (2.26)$$

$$\vec{q}_i = \vec{q}_i^{(1)} + \vec{q}_i^{(2)} + \vec{q}_i^{(3)}, \quad (2.27)$$

де індекси в круглих дужках відповідають порядку малості відповідних величин. Залежності b_i , \vec{q}_i від a_k являють собою неголономні в'язі і визначаються за допомогою методу Гальоркіна.

Після підставлення розкладів (2.26), (2.27) до виразів, отриманих в зазначеній процедурі з (2.24), (2.25), отримуємо вирази для b_i , \vec{q}_i , використовуючи порівняння величин за порядками малості згідно з [28]:

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^\omega + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nmli}^\omega + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^\omega; \quad (2.28)$$

$$\vec{q}_p = \sum_j a_j \vec{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{\gamma}_{jkp}^u + \sum_{j,k,l} a_j a_k a_l \vec{\delta}_{jklp}^u. \quad (2.29)$$

При цьому, коефіцієнти, які входять до співвідношень (2.28) та (2.29), є квадратурами від функцій ψ_i , $\bar{\Omega}_0$, що обчислюються по області S_0 , або певними виразами від цих квадратур.

Так, на основі використання розкладів шуканих змінних по розв'язках відповідної лінійної задачі на власні значення та попереднього виконання кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, за викладеною у [76] методикою, побудовані розклади шуканих змінних, які totожно задовольняють наступним кінематичним умовам: умові нерозривності потоку в області τ , кінематичній граничній умові неперетікання через тверду границю Σ та з точністю до величин третього порядку малості кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини.

При виконанні інтегрування (2.18) за просторовими координатами з точністю до величин четвертого порядку малості отримуємо функцію Лагранжа, що відповідає дискретній моделі.

2.3. Побудова дискретної моделі на основі методу модальної декомпозиції

При побудові нелінійної дискретної моделі було прийнято ряд припущень, аналогічних [27]:

- Рідина ідеальна, однорідна, нестислива. В початковий момент часу вихровий рух рідини відсутній.
- Область, яку займає рідина, має циліндричну форму та основний рух відбувається в околі вертикального розташування циліндра.
- Кутові переміщення резервуару та кутові швидкості малі.
- Амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини вважаються малими.

Однією з основних особливостей, яка виникає при розгляді механічної системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, є неоднорідна механічна природа об'єкту. Так, рідина являє собою континуальну систему, в той час як сама конструкція представляє собою дискретну систему. Гомогенізація

розв'язувальної системи є вкрай важливим етапом і базується на основі методу модальної декомпозиції, який широко застосовується в даній області задач.

При цьому, важливою особливістю використаного методу є те, що він дозволяє отримати нелінійну дискретну модель механічної системи мінімальної розмірності, яка для рідини дорівнює сумарній кількості ступенів вільності механічної системи, тобто кількості форм коливань рідини.

Так, даний метод умовно складається з трьох етапів [76]:

1. Визначення форм розкладів змінних;
2. Інтегрування вихідних виразів на основі виведених в п.1 розкладів, які входять до складу функціоналу;
3. Отримання рівнянь для визначення кінцевої форми розв'язку.

Також, для задач, пов'язаних з коливаннями рідини з вільною поверхнею в резервуарах різної форми, необхідно додатково виключити кінематичну граничну умову на вільній поверхні рідини.

Для розгляду задачі руху резервуару з рідиною будемо використовувати обмежену кількість форм коливань рідини, оскільки лише перші форми коливань рідини будуть істотно збуджуватись, в той час як амплітуди вищих гармонік будуть суттєво меншими (в тому числі за рахунок поверхневого натягу та дисипації).

Виділимо основні групи форм коливань, згідно з [28], які використовуються для опису руху вільної поверхні рідини:

- Форми коливань, які безпосередньо впливають на формування механічних процесів у системі. Для даних форм коливань амплітуди враховуються до величин третього порядку малості;

- Форми коливань, які визначають якісні зміни у системі. Це, у більшості, осесиметричні форми. Саме ця категорія форм коливань рідини впливає на несиметричність профілю хвилі на вільній поверхні, прояв внутрішніх нелінійних зв'язків, перерозподіл енергії. Для даних форм коливань амплітуди враховуються до величин другого порядку малості;
- Вищі форми, що забезпечують крутину хвилі на вільній поверхні. Дані форми важливі для дослідження саме перехідних процесів. Використовуються лише перші порядки малості амплітуд.

Так, в загальному випадку, вводяться наступні узагальнені координати:

a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини;

α_i – кути відхилення резервуару від положення рівноваги.

Характерною особливістю задач сейсмічного збурення руху є той факт, що параметри поступального руху ε_i є заданими, а тому рівняння руху можливо подати у наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r - \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N}, \quad r = \overline{1, N+3} \quad (2.30)$$

де p_{rn} та q_r – квадратна матриця та вектор розміру $N+6$, N – кількість форм коливань рідини.

Диференціальні рівняння сумісного руху, в загальному випадку, набувають такого вигляду (коєфіцієнти цих рівнянь визначаються в формі квадратур від форм коливань рідини і потенціалу Стокса-Жуковського [28]):

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \\
& = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijkr}^4 - \ddot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{prij}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{pri}^{3*}) \right] + \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\
& + \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \left[\sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijkr}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) \right] + \\
& + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{prij}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{pri}^4) + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) + \\
& + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3). \quad (2.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right) - \\
& - 2 \ddot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2 \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2 \dot{\tilde{\varepsilon}} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right. \\
& \left. + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \right] \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Дана система рівнянь описує сумісний рух системи резервуар – рідини для якої по частині змінних (параметри поступального руху) рух заданий, а по іншим змінним (форми коливань рідини та кутові рухи резервуару)

зв'язаний. Отримана модель дозволяє аналізувати сейсмічні та вібраційні процеси для яких поступальний рух основи (точки підвісу) є наперед заданим.

Висновки до розділу

Розроблено математичну модель задачі зв'язаного руху системи, що складається з циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, заповненого ідеальною, однорідною, нестисливою рідиною з вільною поверхнею. В основі методи лежить варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського. Приведено побудову розкладів шуканих величин та аналітичне виключення граничних умов, виконано перехід до дискретної моделі за допомоги метода модальної декомпозиції. Отримано розв'язуючу систему рівнянь мінімальної розмірності.

В процесі розгляду такої системи найбільшу складність викликає наявність кінематичної умови на вільній поверхні, вибір кількості форм коливань рідини та безпосередньо чисельний розв'язок отриманої системи рівнянь.

РОЗДІЛ 3. Чисельна реалізація алгоритму дослідження нелінійної задачі динаміки конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі

В даному розділі дисертації приведено чисельну реалізацію алгоритму дослідження нелінійної задачі динаміки конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу, визначено кінематичні та динамічні характеристики системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею. Виконано ряд тестових прикладів, досліджено поведінку системи в дорезонансних, резонансних, та зарезонансних областях.

Моделювання здійснювалось на основі динамічної моделі, яка включала 12 форм коливань рідини, маятникові коливання системи розглядалися як плоскі й характеризувалися одним кутом $\alpha_2 = \varphi$, в чисельних прикладах співвідношення мас взято $M_T = 0.1M_F$, рівень заповнення резервуару $H = R$, радіус резервуару $R = 1$ м.

3.1. Аналіз кінематичних та динамічних характеристик системи резервуар – рідина

Так, для визначення працездатності реалізації алгоритму сумісного руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу, було виконано ряд тестових розрахунків, а саме: аналіз поведінки системи для випадку найпростішого, імпульсного збурення руху основи, в яких розглядаються різні імпульси однакової площині та випадок різного значення коефіцієнту підсилення ефектів в'язкості.

Вважаємо, що в початковий момент часу система знаходиться в спокої. Рух системи збуджується одиничним імпульсом переміщення

основи у вигляді півперіоду синусоїди з амплітудою A_i та тривалістю τ_i . При цьому, для чисельних прикладів обрано $A_1 = 0.0025$ з $\tau_1 = 0.25$, $A_2 = 0.0125$ з $\tau_2 = 0.5$. Параметри обрані таким чином, щоб в першому випадку рух системи відповідав нелінійному діапазону збурень, а другий лінійному. В динамічній моделі вважається, що прояв в'язкості рідини зводиться до узагальненої дисипації на основі методу Г.М. Мікішева [45].

На рис. 3.1 приведено закон зміни кута резервуара в часі (штрихована лінія для первого випадку, суцільна – для другого). Помітно, що кут коливання характеризується практично незмінною амплітудою для закону 2, для первого випадку присутня певна модуляція в максимальних значеннях кута.

Аналогічні явища спостерігаються й при аналізі зміни збурень рідини на стінці резервуара (рис. 3.2), при цьому, для обох випадків спостерігаються частотна і фазова модуляція, що свідчить про складний характер взаємодії рідини та резервуара. Прояв амплітудної модуляції ξ в значній мірі перевищує вплив зміни кута.

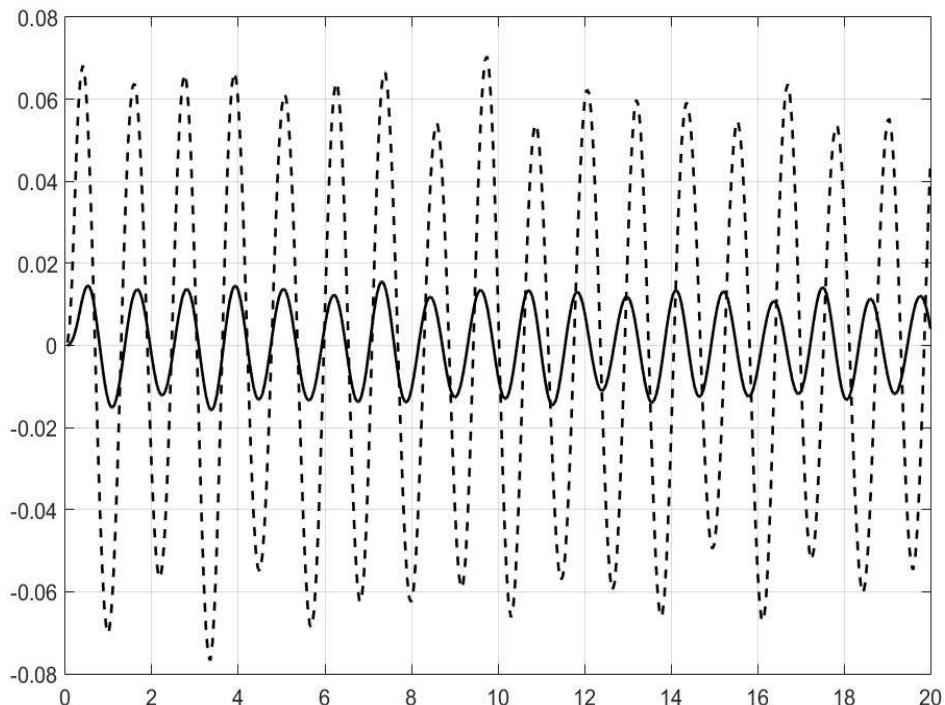


Рис. 3.1. Зміна в часі кута φ .

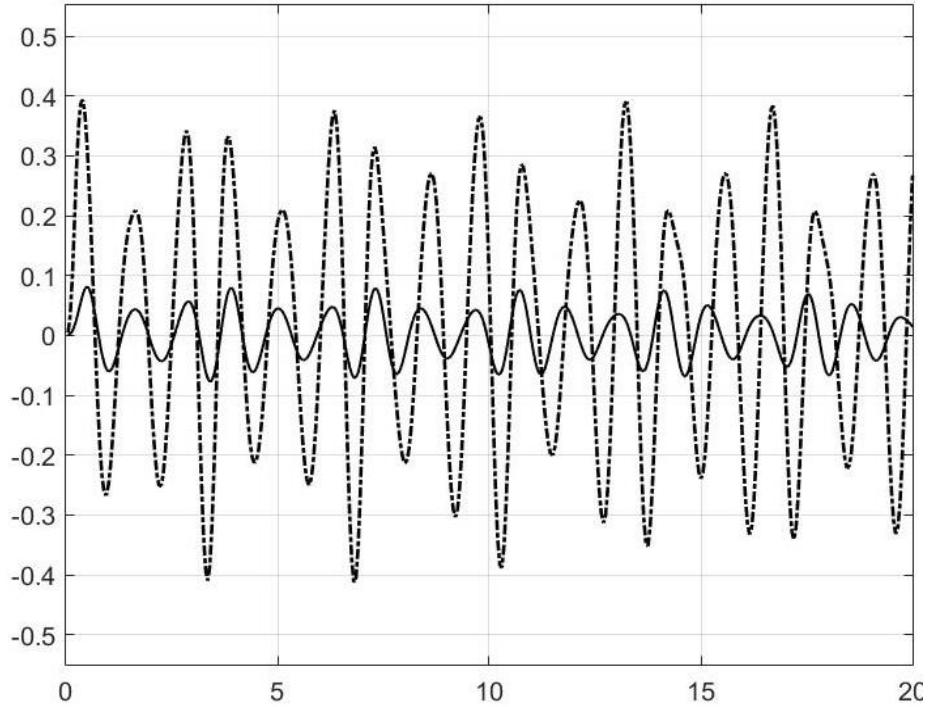


Рис. 3.2. Зміна в часі ξ .

Зміна максимальних збурень системи спостерігається не тільки у початковий момент, але й через деякий проміжок часу також можлива раптова сильна зміна параметрів збурень.

Розглянемо моделювання варіантів поведінки рідини для випадку коли демпфування приймається лише на основі в'язкості води (штрихова лінія) й варіант коли в'язкість збільшена, наприклад за рахунок внеску конструкційних елементів (ребра, перегородки). Передбачається, що в'язкість збільшується у 10 разів. Ці результати представлено суцільною лінією.

На рис. 3.3 та 3.4 показано зміну кута нахилу резервуару та збурення рідини на стінці резервуару, при цьому помітно, що збільшення в'язкості призводить до того, що максимуми коливання резервуару та рідини в початковій фазі практично однакові, а згодом ці максимуми суттєво відрізняються. Тому, для аналізу максимальних збурень доцільно розглядати поведінку системи лише на початкових етапах її руху, коли

амплітуда збудження параметрів має максимальні значення. Як бачимо з рисунків, це відповідає першим 5-7 періодам.

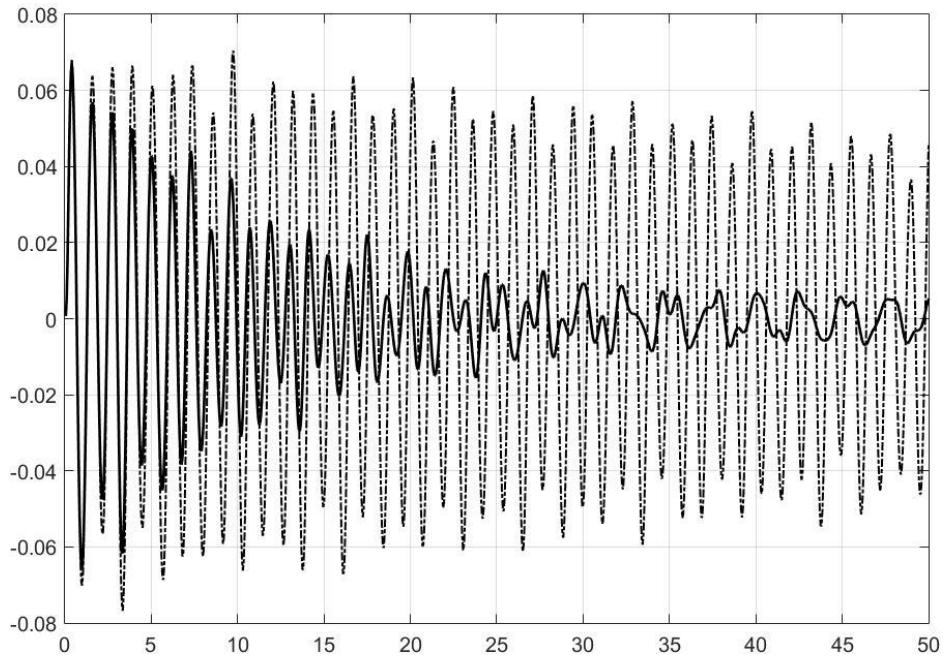


Рис. 3.3. Зміна в часі кута φ .

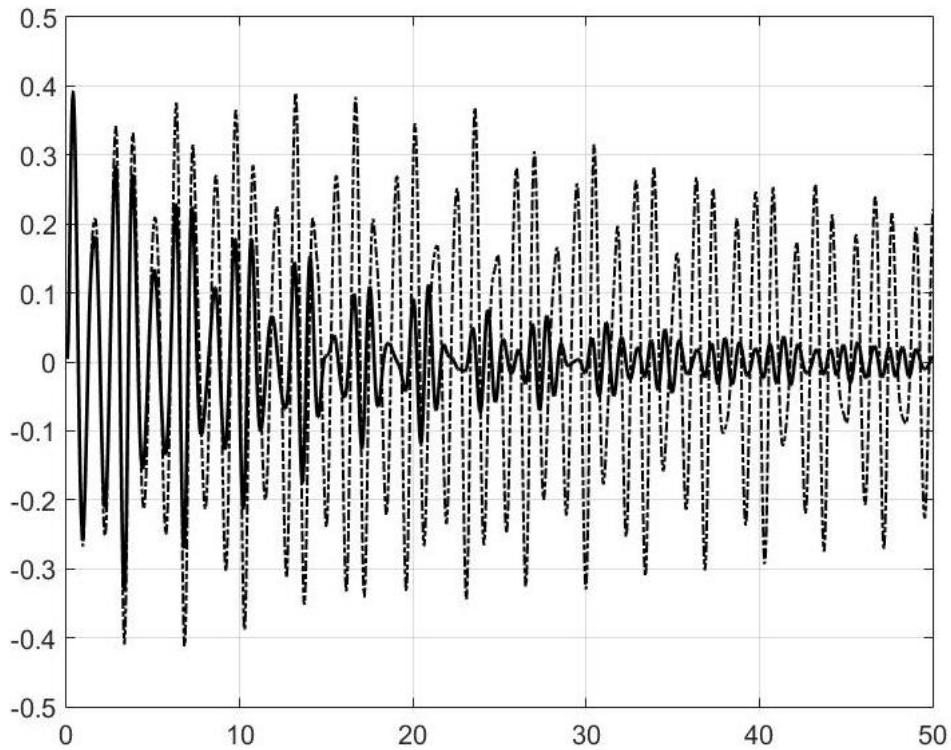


Рис. 3.4. Зміна в часі збурення вільної поверхні ξ .

Для аналізу взаємодії рідини зі стінками резервуару розглядається також зміна у часі силового (рис. 3.5) та моментного (рис. 3.6) відгуку

рідини на стінки резервуару. При цьому, як і у попередніх випадках, після 5-7 періодів коливань амплітуда зміни силових параметрів суттєво зменшуються.

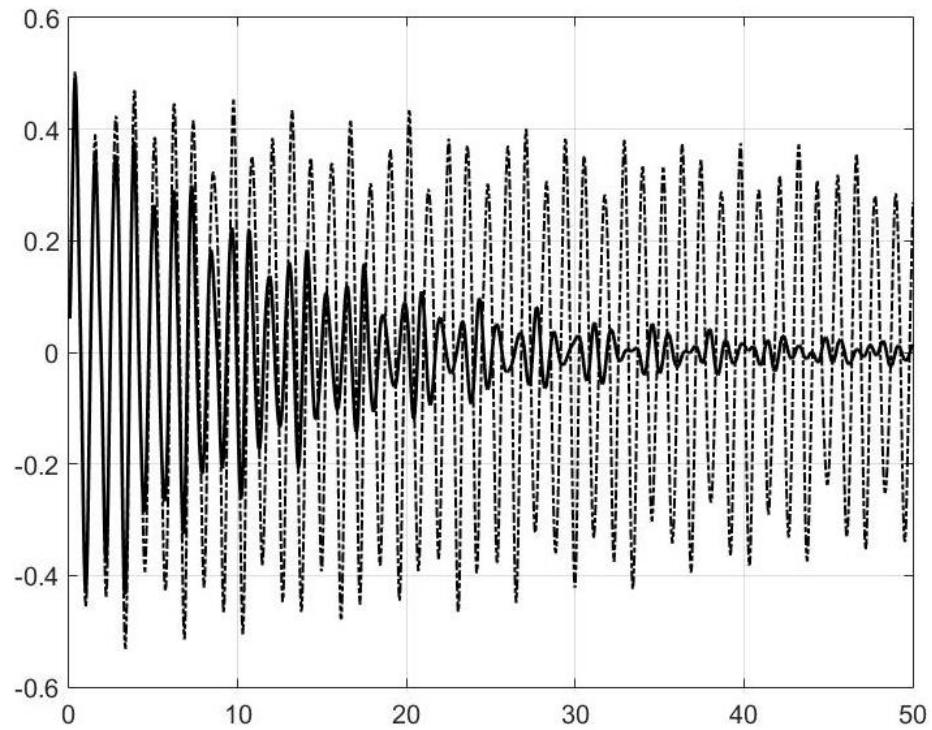


Рис. 3.5. Зміна в часі F_x .

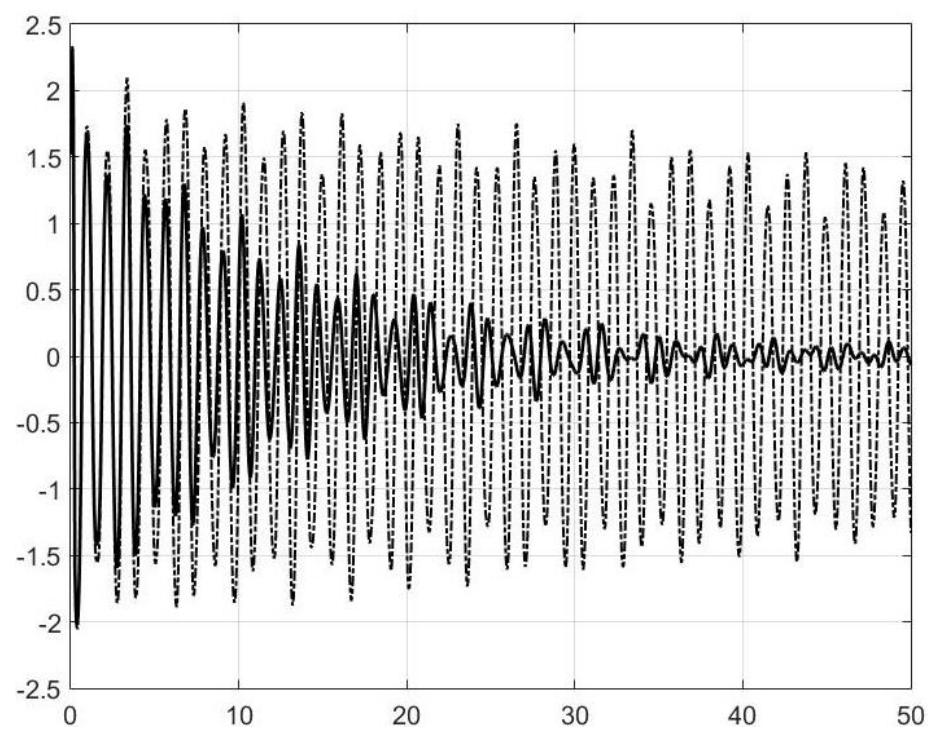


Рис. 3.6. Зміна в часі M_y .

Для якісного аналізу розвитку хвильових процесів у рідині розглянемо таблицю максимумів та мінімумів амплітуд збурення окремих форм на проміжку до 20 с. Як бачимо з табл. 3.1, коливання в цілому відбуваються без істотного прояву нелінійних властивостей, про що свідчать незначні збурення a_3, a_5, a_6 .

Таблиця 4.1. Амплітуди збурення форм коливань та кута відхилення резервуару.

Параметр	Випадок 1: $A_1 = 0.025 \quad \tau_1 = 0.25$		Випадок 2 $A_2 = 0.0125 \quad \tau_2 = 0.5$	
	мінімум	максимум	мінімум	максимум
a_2	-0.3257	0.3329	-0.0696	0.0719
a_3	-0.0104	0.0192	-0.0004	-0.0008
a_5	-0.0280	0.0522	-0.001	0.0026
a_6	-0.0356	0.0212	-0.0019	0.0012
a_{10}	-0.1118	0.1081	-0.0239	0.0245
a_{12}	-0.0377	0.0375	-0.0070	0.0072
φ	-0.0764	0.0701	-0.0156	0.0155
ξ	-0.4125	0.3937	-0.0775	0.0817

Збудження вищих антисиметричних гармонік (a_{10} та a_{12}) є суттєвим. При цьому, після завершення переходного процесу, для значення збурення вільної поверхні рідини на стінці стає більш характерним прояв ефектів нелінійності.

Короткі висновки

Досліджені кінематичні та динамічні характеристики для випадку збурення руху системи по деякому одиничному півперіоду синусоїди,

заданого на короткому інтервалі часу. Розглянуто два випадки, які призводять до руху системи в лінійному та нелійному діапазонах.

Розглянуто вплив в'язкості на розвиток переходних процесів і ступінь прояву нелінійних властивостей системи. Показано, що на початку руху прояв нелінійних властивостей незначний. Проте, надалі прояв нелінійностей збільшується та спостерігаються ефекти амплітудної фазової та частотної модуляції. Відзначається також важливість використання багатомодової моделі, яка включає в себе вищі антисиметричні форми коливань. Визначено максимальні значення силової й моментної взаємодії резервуара з рідинкою.

3.2. Дослідження поведінки системи в околі основних резонансів

Частотні параметри систем, що складається з резервуару з рідинкою, можна визначити на основі рівнянь руху системи для лінійної моделі, враховуючи тільки першу антисиметричну форму коливань вільної поверхні рідини, рух якої характеризується амплітудою a_1 . Поступальний рух системи уздовж осі Ox характеризується амплітудою відхилення від початкового положення ε_x , а кутовий рух навколо вісі Oy характеризується кутом α_1 . Система рівнянь сумісного руху в рамках даних припущень має вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \frac{1}{\alpha_1^\nu} \ddot{\varepsilon}_x B_{1x}^1 + \frac{1}{2\alpha_1^\nu} \ddot{\alpha}_1 E_{11}^{1*} + \omega_1^2 a_1 &= 0, \\ \frac{\rho}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 B_{1x}^1 + \ddot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{M_T + M_F} \ddot{\alpha}_1 F_2^1 &= 0, \\ \ddot{\alpha}_1 E_{11}^{1*} + 2\ddot{\varepsilon}_x F_2^1 + 2\ddot{\alpha}_1 \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + E_{11}^2 \right) + \alpha_1 \frac{2g}{\rho} [M_T(R_x + H/4) + M_F(R_x + H/2)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Якщо припустити, що в системі рух відбувається без урахування сумісного характеру руху складових компонент, то можливо отримати наступні значення парціальних частот:

$$\omega_a^p = \sqrt{\frac{\mu_1 g}{R} \tanh \frac{\mu_1 g}{R}} \text{ -- для рідини,}$$

$$\omega_a^p = \sqrt{\frac{M_T h_T + M_F h_F}{J_{res}^{11}}} \text{ -- для кутового руху резервуару.}$$

де, μ_1 – хвильове число для першої антисиметричної форми коливань вільної поверхні рідини. Для визначення власних частот коливань системи в сумісній постановці необхідно скористатись таким характеристичним рівнянням для λ , яке отримується з системи

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega_1^2 & \frac{1}{\alpha_1^v} B_{1x}^1 \lambda^2 & \frac{1}{2\alpha_1^v} E_{11}^{1*} \lambda^2 \\ \frac{\rho}{M_T + M_F} B_{1x}^1 \lambda^2 & \lambda^2 & \frac{\rho}{M_T + M_F} F_2^1 \lambda^2 \\ E_{11}^{1*} \lambda^2 & 2F_2^1 \lambda^2 & 2\left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + E_{11}^2\right) \lambda^2 + \frac{2g}{\rho} [M_T(R_x + H/4) + M_F(R_x + H/2)] \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Так, в таблиці 3.2 приведено деякі значення чисельних результатів частот сумісних коливань для випадку співвідношення мас $M_T = 0.1M_F$ для різних довжин маятникового підвісу та радіусу $R = 1$ м. Так в таблиці, в першій колонці, приведено значення довжин підвісу резервуару, в другій колонці наведено частоти парціальних коливань по першій, антисиметричній формі, в третій – парціальна частота маятниковых коливань резервуару для випадку нерухомої точки підвісу, в четвертій – частоти власних коливань резервуару та рідини для випадку, коли точка підвісу рухається по наперед заданому закону (перше значення відповідає руху, близькому до маятниковых коливань, друге – до коливань вільної поверхні рідини), в п'ятій колонці приведено результати для повністю зв'язаної системи з рухомою точкою підвісу, рух якої наперед невідомий.

З теоретичної точки зору можливість використання маятникового підвісу як засобу збільшення сейсмостійкості обумовлюється саме через те, що при розгляді сумісного руху, відбувається суттєва зміна значення резонансної частоти, першої, антисиметричної, форми. При цьому, значення резонансних частот для яких не відбувається зміна положення центру мас (осесиметричні форми) залишаються такими як і парціальні частоти при розгляді заданого поступального руху.

Таблиця 3.2. Значення резонансних частот для різних довжин маятникового підвісу та при розгляді зв'язаного руху.

Довжина підвісу	Коливання рідини 1-ша форма	Коливання маятника (нерухомий підвіс)	Коливання маятника (рухомий за заданим законом підвіс)	Коливання маятника (рухомий підвіс, зв'язана задача)
$l = 1R$	4.144	2.478	2.243	2.267
			6.699	16.630
$l = 2R$	4.144	1.961	1.853	1.861
			6.108	12.451
$l = 8R$	4.144	1.074	1.058	1.059
			5.527	9.751
$l = 14R$	4.144	0.822	0.816	0.816
			5.438	9.402
$l = 20R$	4.144	0.692	0.688	0.688
			5.402	9.266

Значення резонансних частот по формам $m=2, m=0$ дорівнюють 5.45 та 6.12 відповідно.

Як бачимо з результатів, приведених в табл. 3.2, частоти сумісних коливань системи для маятниковых коливань мають тенденцію до

зменшення, а частоти коливань рідини – до збільшення (причому, якщо у випадку кутових коливань зменшення не є значним, то для частот рідини зростання є вагомим від 23% до 400%), що повністю співпадає з теоремою про зміну частот в механічній системі при переході до зв’язаних коливань.

Тобто, для довжини підвісу $l = R$ ми маємо, що резонанс по антисиметричній формі стає третім, менш інтенсивним (у порівнянні з $m=2, m=0$). Така зміна порядку частот дає можливість значно зменшувати прояви резонансних властивостей для практичних систем.

Значення частоти резонансу по куту, в сумісній постановці, теж змінюється. Загальну зміну частот приведено на рис.3.7, де «*» позначено парціальні частоти, стрілками показано їх нові значення.

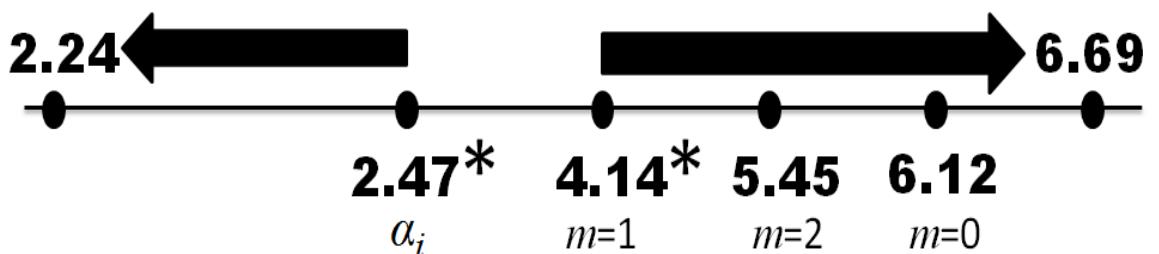


Рис. 3.7. Зміна порядку частот.

При цьому, дане явище дає можливість ввести деяку класифікацію щодо довжин підвісу:

- якщо відбувається зміна порядку резонансних частот, і частота по антисиметричній формі є більшою ніж для форм $m=2, m=0$ – підвіс короткий;
- якщо відбувається зміна порядку резонансних частот, і частота по антисиметричній формі знаходиться між частотами для форм $m=2, m=0$ – підвіс середній;
- якщо зміна порядку резонансних частот не відбувається – підвіс довгий.

Тобто, розміщення конструкції на маятниковому підвісі (або на рухомій опорі в певному ложементі) дає можливість змінити порядок розташування частот та ступінь прояву резонансних властивостей системи по першій антисиметричній формі за рахунок зміни довжини маятникового підвісу (кривизни ложементу).

Розглянемо поведінку системи резервуар з рідиною в околі резонансу, пов'язаного з кутовими рухами конструкції $\omega = \omega_{pendulum}$. Для порівняння та оцінки якісних характеристик розвитку процесів також виконано розрахунок до- та зарезонансних областей. При чому, амплітуди руху точки підвісу є рівними для усіх випадків, а для дорезонансної області виконано додатковий розрахунок з більшою амплітудою, яка визначається з умови, щоб максимум збурень вільної поверхні рідини на стінці був не більшим, ніж третина радіусу.

Для оцінки руху системи приведемо графіки збурень вільної поверхні та кута відхилення резервуару.

Так, рух в дорезонансній області характеризується проявом вищих форм коливань та дрейфом середнього значення.

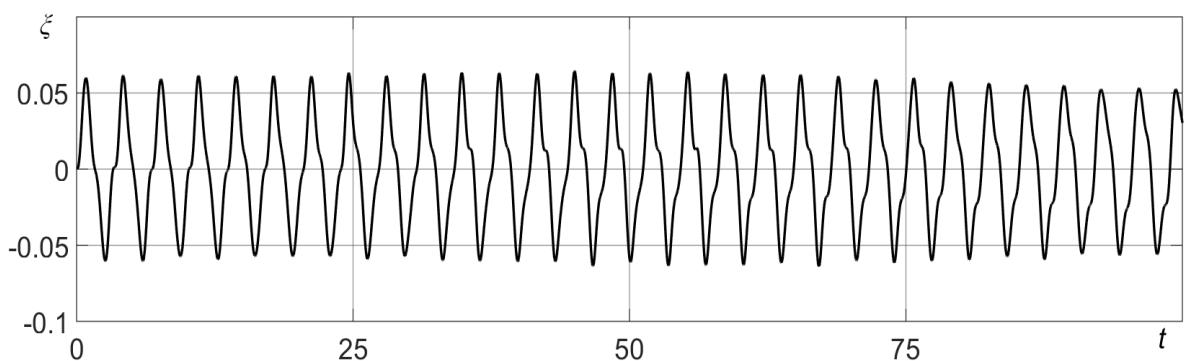


Рис. 3.8. Особливості руху рідини в дорезонансній області. Збурення вільної поверхні рідини на стінці.

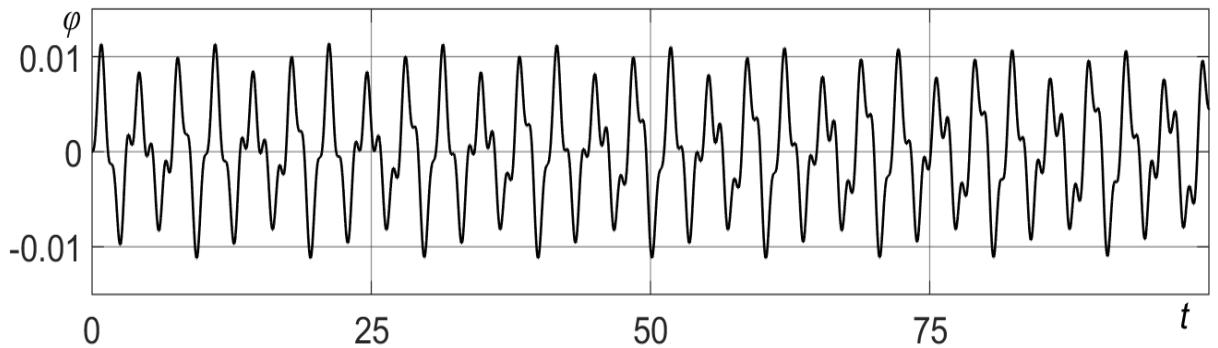


Рис. 3.9. Особливості руху рідини в дорезонансній області. Кут відхилення резервуару.

Поведінка системи в дорезонансній області за умови більшої амплітуди є подібною.

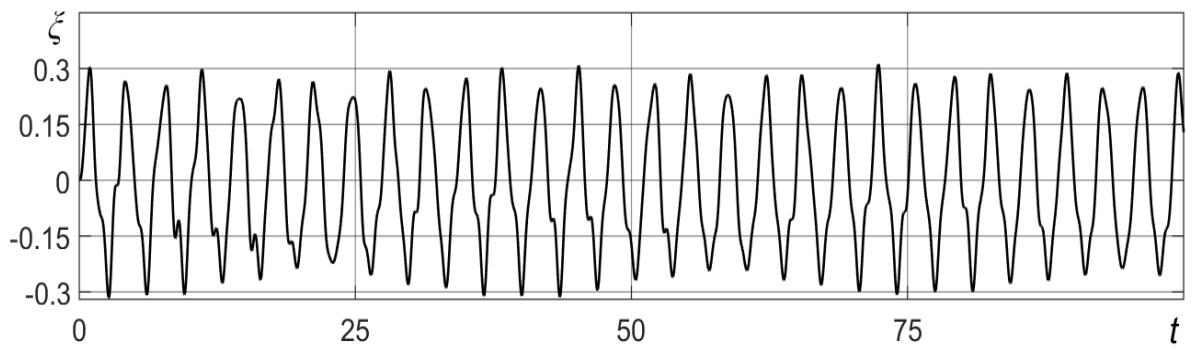


Рис. 3.10. Особливості руху рідини в дорезонансній області у випадку більшої амплітуди руху точки підвісу. Збурення вільної поверхні рідини на стінці.

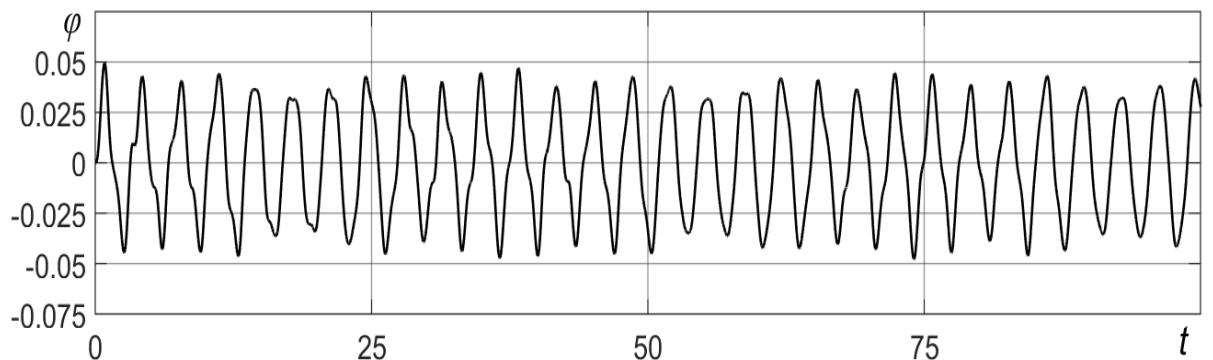


Рис. 3.11. Особливості руху рідини в дорезонансній області у випадку більшої амплітуди руху точки підвісу. Кут відхилення резервуару.

Характерною особливістю резонансної області є значна амплітудна модуляція кута відхилення резервуару.

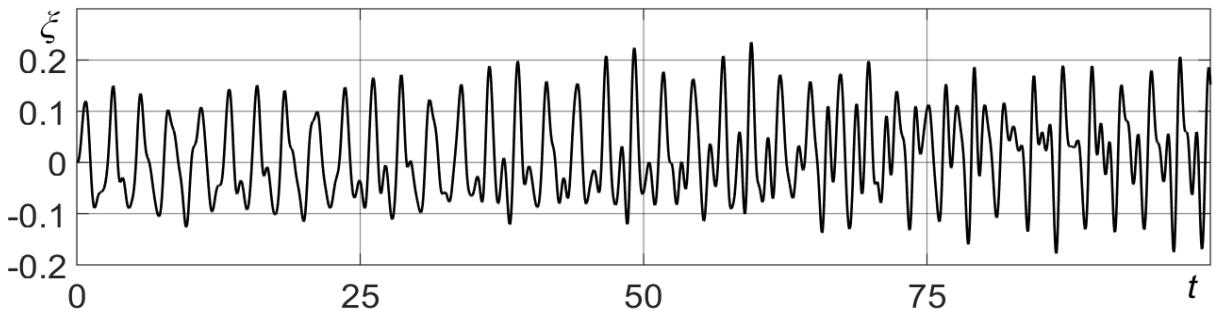


Рис. 3.12. Особливості руху рідини в резонансній області. Збурення вільної поверхні рідини на стінці.

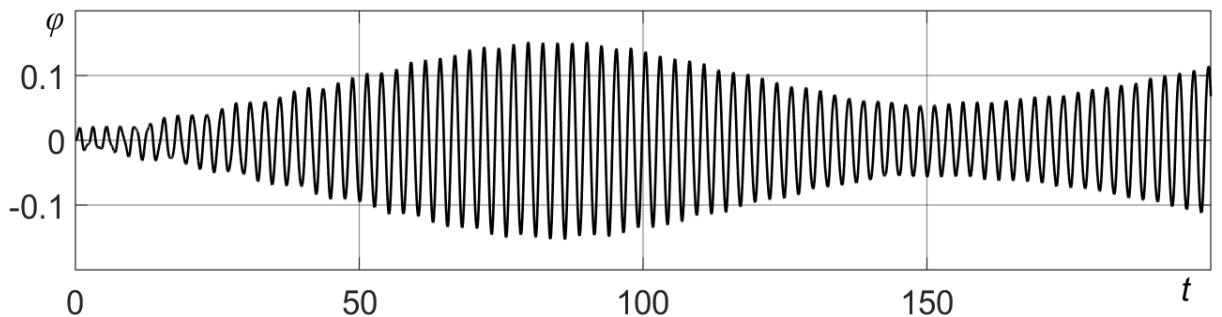


Рис. 3.13. Особливості руху рідини в резонансній області. Кут відхилення резервуару.

Зарезонансна область характерна наступним: значна частотна модуляція, дрейф середнього значення. Характерна поведінка вільної поверхні на стінці та кута відхилення резервуару представлена на рис. 3.14 – 3.15.

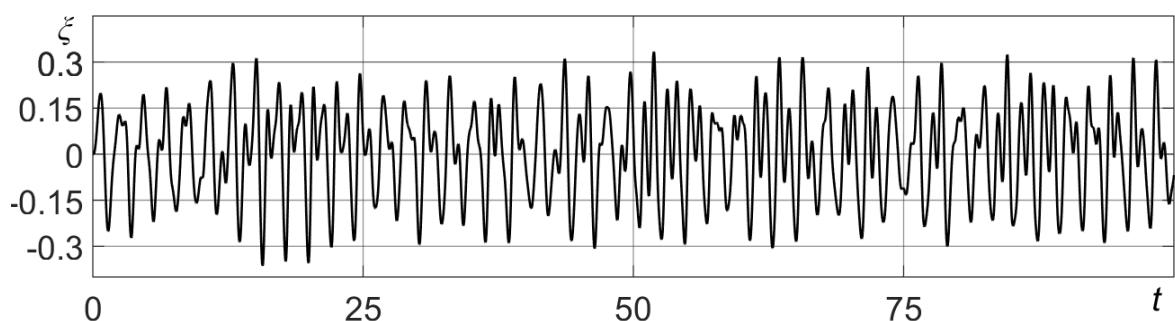


Рис. 3.14. Особливості руху рідини в зарезонансній області. Збурення вільної поверхні рідини на стінці.

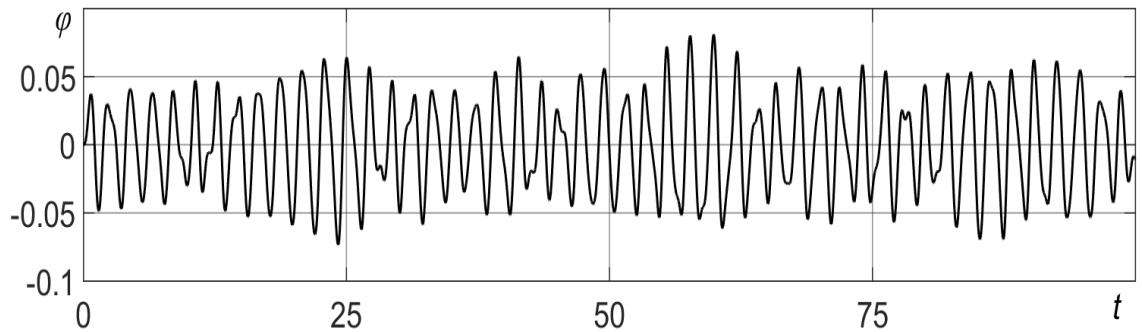


Рис. 3.15. Особливості руху рідини в зарезонансній області. Кут відхилення резервуару.

Перейдемо до розгляду резонансних особливостей системи в околі резонансів по формам коливань рідини. Виконано аналіз поведінки резервуару на маятниковому підвісі при коливанні на резонансних частотах, а саме:

- Форма $m=2$, для певного діапазону довжин підвісу (коротких та середніх) прояв даного резонансу є найбільш інтенсивним, в лінійній теорії не проявляється.
- Форма $m=0$ (осесиметрична), основні особливості прояви даного резонансу описано в роботах [57], [58] при специфічному виборі довжини маятникового підвісу, а саме для випадку коли резонансна частота осесиметричної та антисиметричної форми мають однакове значення частоти. Даний резонанс також є нелінійним, тобто в лінійній теорії не проявляється.
- Форма $m=1$ (антисиметрична), значення резонансної частоти пов'язано з сумісним рухом, так для довжини маятникового підвісу $l=R$ значення частоти буде рівним $\omega=6.14$. При цьому, за лінійної теорією, саме на частоті даної форми прояв резонансних властивостей буде найінтенсивнішим. Для більшості довжин

маятникового підвісу в рамках нелінійної моделі практично не проявляється.

На рис. 3.16 приведено збурення вільної поверхні рідини та кута відхилення резервуару для випадку, коли рух точки підвісу відбувався на частоті, що відповідає резонансній частоті форми $m=2$. Необхідно відмітити наявність суттєвих амплітуд коливань вільної поверхні рідини та кута відхилення резервуару, при чому, значення збурень не набувають певних граничних значень, тобто не виходять на постійний рівень. Аналіз змін внутрішніх параметрів системи показує, що зростання амплітуди коливання рідини відбувається за рахунок наростання значень коливань антисиметричної форми $m=1$, хоча коливання відбуваються безпосередньо на частоті форми $m=2$. Фактично, за рахунок нелінійного перерозподілу енергії, коливання форми $m=2$ стимулюють зростання амплітуд антисиметричної форми.

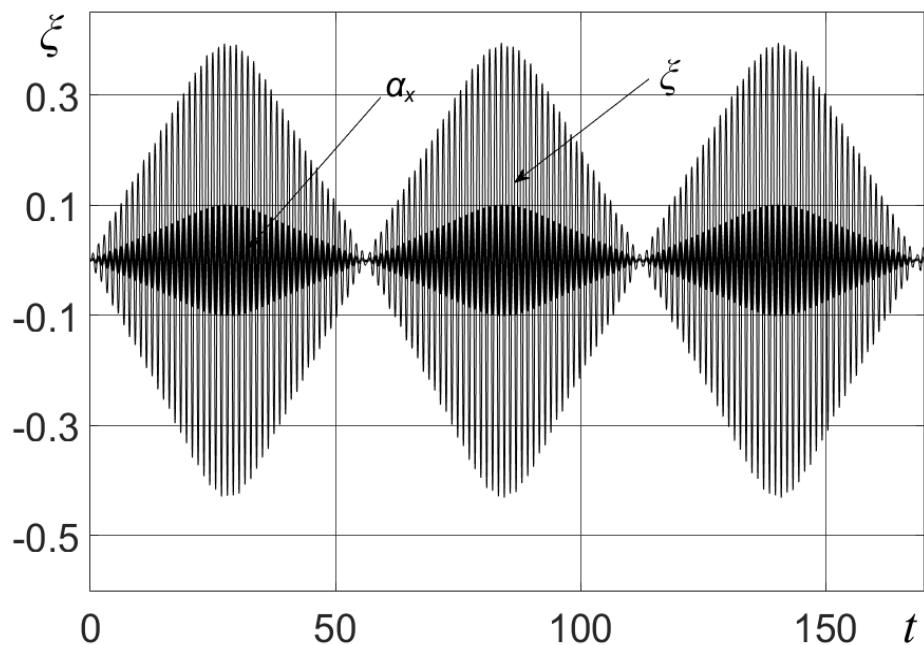
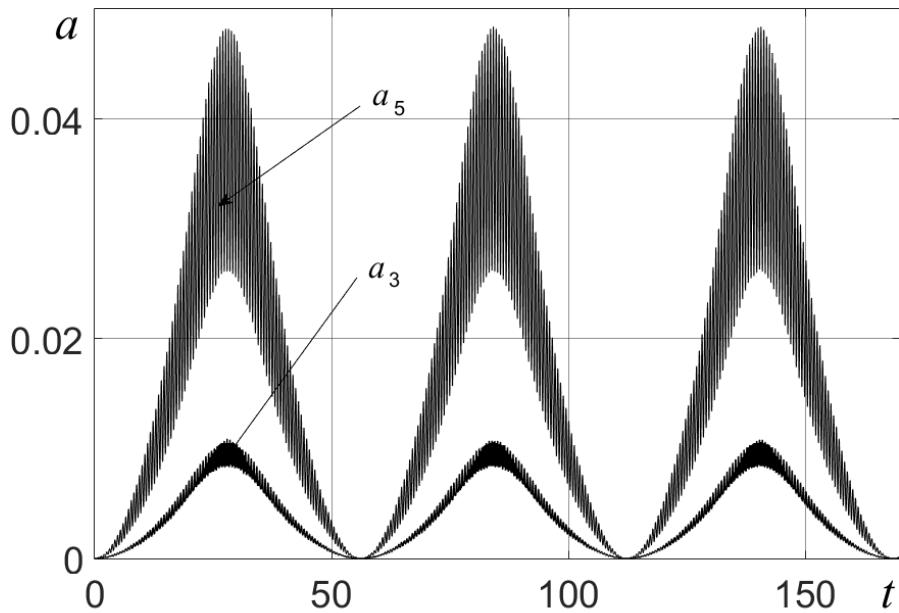
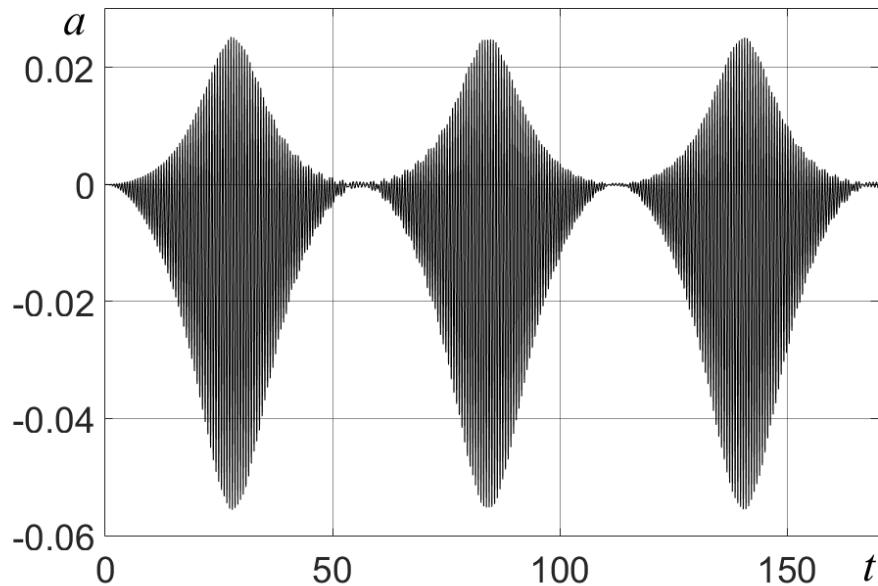


Рис. 3.16. Збурення вільної поверхні та кута відхилення резервуару.

Резонансна частота форми $m=2$.



a)



б)

Рис. 3.17. Прояв вищих форм коливань рідини для випадку, коли рух основи відбувається на частоті форми $m = 2$.

Для більш детального аналізу на рисунках рис. 3.17 *a*) та *б*) приведено прояв амплітуд вищих форм коливань: форми a_3 та a_5 представлено на рисунку *a*), поведінку форми a_6 , відповідно, на рисунку *б*).

Як ми бачимо, ці форми є суттєво несиметричними, а їх результуючий внесок в збурення вільної поверхні рідини є значним.

Аналіз розвитку прояву вторинного резонансу на частоті форми коливань $m=2$ показав, що зі збільшенням довжини маятникового підвісу його прояв послаблюється, а для випадку поступального руху резервуару не проявляється зовсім. Дослідження показали, що енергообмін, який спостерігається для даного резонансу, повністю визначається коефіцієнтами рівнянь руху $E_{pi}^{1*}, E_{pij}^{2*}, E_{pijk}^{3*}$, які відповідають за зв'язок хвильового руху рідини та кутового руху резервуару. Також, необхідно відмітити, що саме цими коефіцієнтами визначається дія сил Коріоліса на частинки рідини. Звісно, внесок даних членів при розгляді поступального руху нульовий, чим можливо пояснити відсутність даного резонансу для даного варіанту руху резервуару.

Тепер, розглянемо випадок, коли значення резонансних частот по формам $m=1$ та $m=2$ є рівним, для нашого співвідношення мас це відбувається на довжині маятникового підвісу $l=12R$.

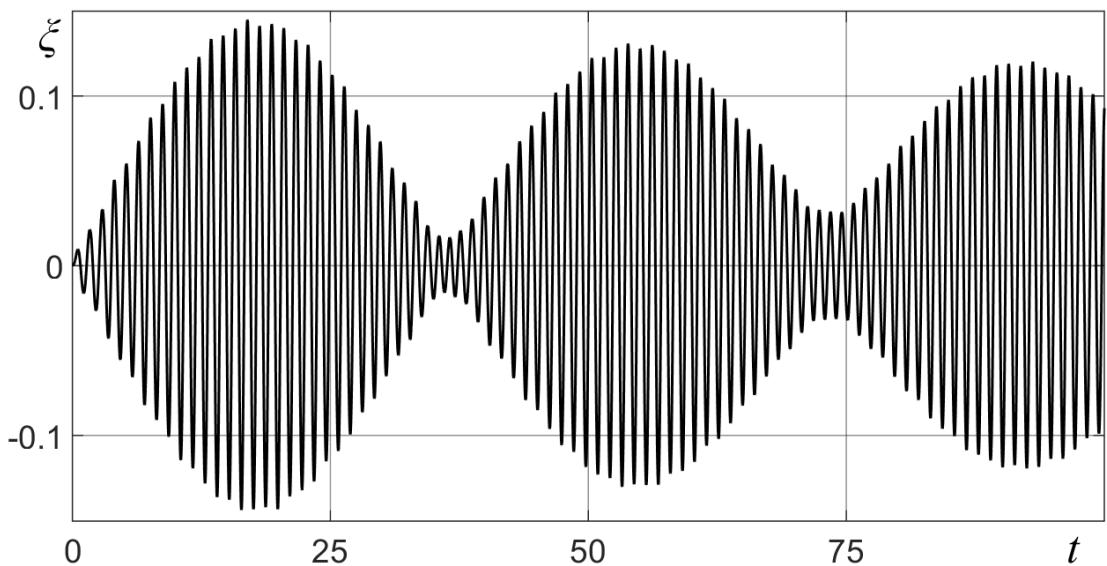


Рис. 3.18. Загальний характер вільної поверхні рідини на стінці.

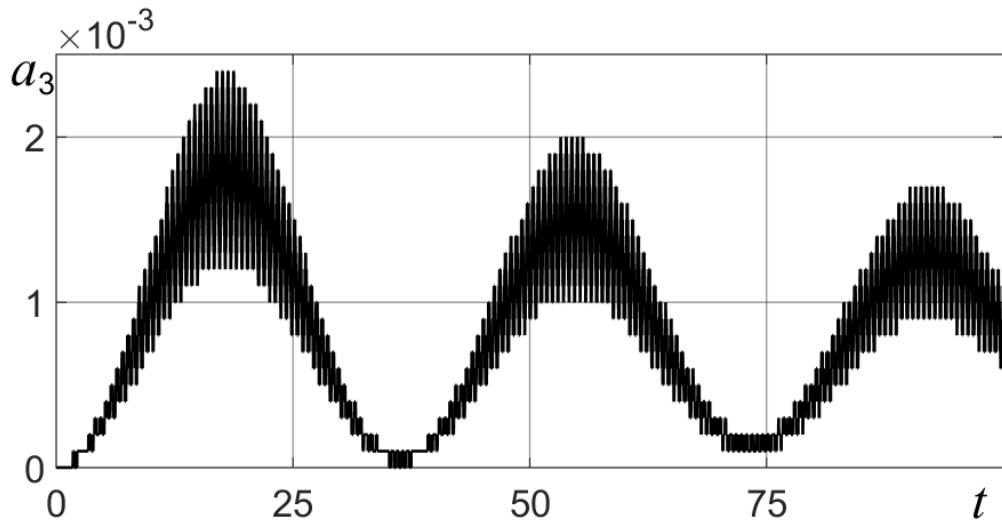


Рис. 3.19. Поведінка форми a_3 .

Аналіз зміни амплітуд окремих форм коливань рідини демонструє, що основний внесок в збурення вільної поверхні рідини на стінці визначається саме формою $m=1$, а збурення інших форм коливань на порядку менші. Необхідно відмітити, що коливання осесиметричної форми $a=3$ ($m=0$) розвиваються таким чином, що амплітуда коливань цієї форми завжди більше нуля (графік представлено на Рис. 3.19), що забезпечує несиметричність профілю хвилі, коли висота гребня хвилі більша ніж глибина впадини, що підтверджується експериментально [91].

В цілому, налаштування системи на умови збігу значень частот внутрішнього резонансу не вносить суттєвих змін в розвиток процесів у порівнянні з випадком $l=R$.

Також, було виконано розрахунок випадку, детально описаного в роботах [31], [32] але з відповідним співвідношенням маси резервуару та маси рідини $M_T = 0.1M_F$.

Розглянемо наступний випадок внутрішнього резонансу системи: згідно з роботами О.С. Лимарченка та К.О. Семенович [31], [32] будемо використовувати таку довжину маятникового підвісу, щоб значення резонансних частот форм коливань антисиметричної $m=1$ та осесиметричної $m=0$ було однаковим. Для даного співвідношення мас та

рівня заповнення це відбувається при довжині $l = 1.95R$. Так, графік зміни збурень вільної поверхні рідини на стінці циліндричного резервуару представлено на Рис. 3.20.

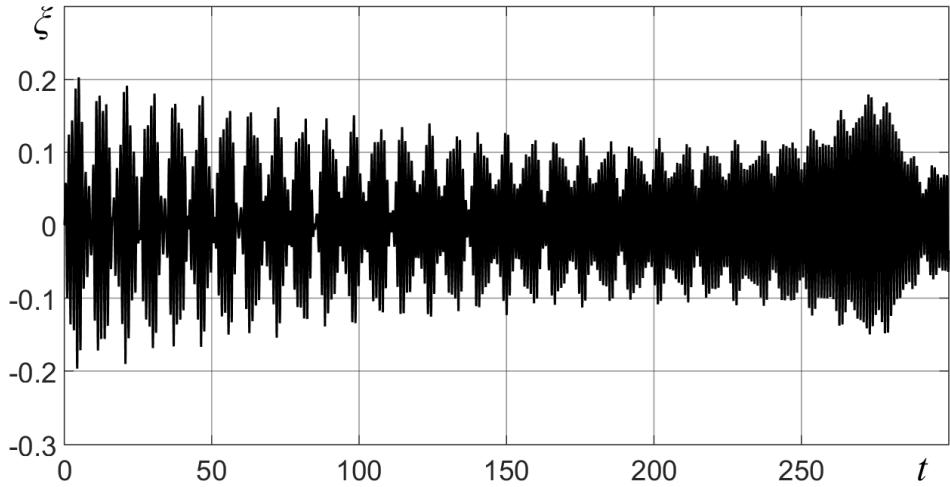


Рис. 3.20. Збурення вільної поверхні рідини. Випадок збігу резонансних частот осесиметричної та антисиметричної форми.

Необхідно відмітити, що аналіз внеску амплітуд кожної форми коливань в формування збурень вільної поверхні рідини на стінці демонструє, що лише після 200 с осесиметрична форма $m=0$ починає вносити значний внесок у результатуюче значення, що повністю співпадає з зазначеним у роботах [58] ефектом.

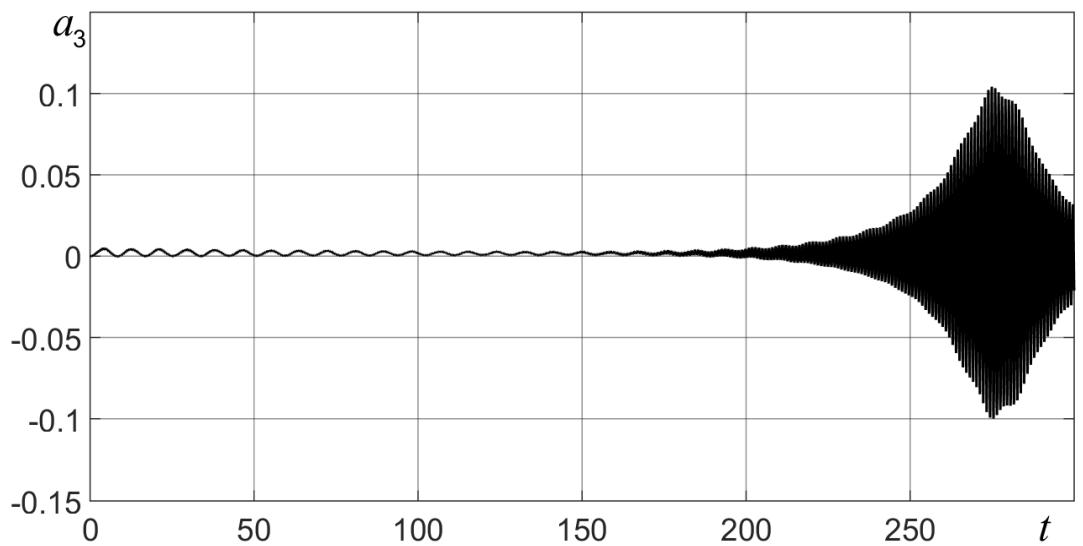


Рис. 3.21. Прояв збурення осісиметричної форми.

Наявність такого резонансу підтверджується також спектральною характеристикою системи, що побудовано для випадку, коли коливання відбувались 100 та 300 секунд. З Рис. 3.22 та Рис. 3.23 бачимо, що має місце наявність двох виражених піків для частот 5.45 (форма коливань $m=2$) та 6.12 (спільна частота, що відповідає формам $m=0$ та $m=1$). Для часу 300 с резонанс на частоті 6.12 вже проявляється більш сильніше.

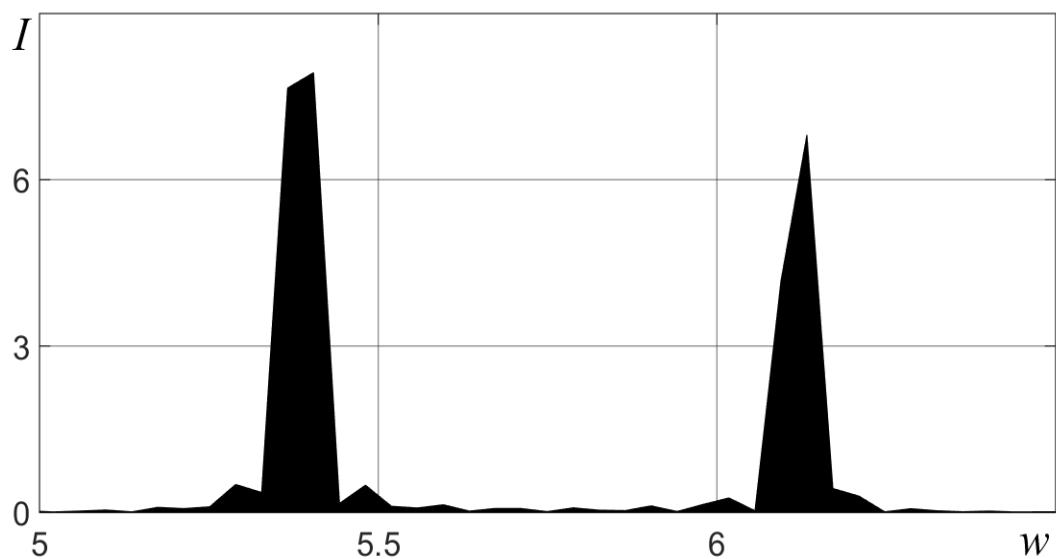


Рис. 3.22. Спектральна характеристика системи, час $t = 100\text{c}$.

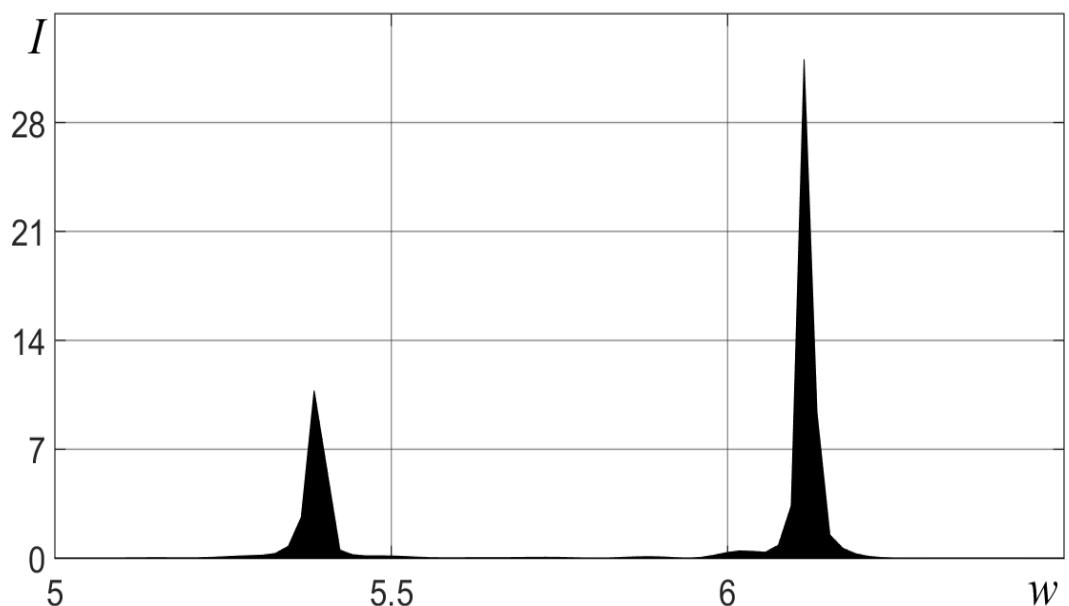


Рис. 3.23. Спектральна характеристика системи, час $t = 300\text{c}$.

Таким чином, резонансні властивості третьої, по порядку, форми коливань (осесиметрична форма), яка в рамках лінійного моделювання також не проявляється взагалі, виражені менш яскраво, ніж маятникові коливання системи та коливання в околі резонансу за формою $m=2$.

Додатково, виконано оцінку поведінки системи с точки зору значень максимумів амплітуд збурень вільної поверхні рідини та кута відхилення резервуару в залежності від частоти з якою рухається точка підвісу.

Так, залежність максимумів від частоти руху точки підвісу в околі резонансу по куту представлено на Рис. 3.24, в околі резонансу по рідини для форми $m=2$ на Рис. 3.25. При цьому, для обох зон характерною є несиметричність піків з певним нахилом вліво, що свідчить про наявність м'якої нелінійності в механічній системі.

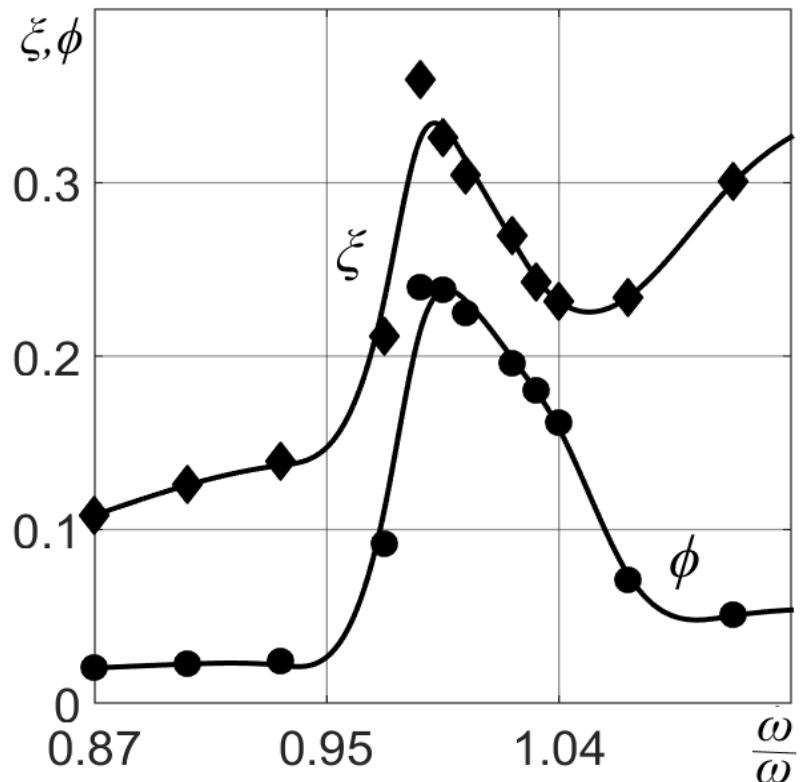


Рис. 3.24. Особливості поведінки вільної поверхні рідини та кута відхилення резервуару в околі резонансу по куту.

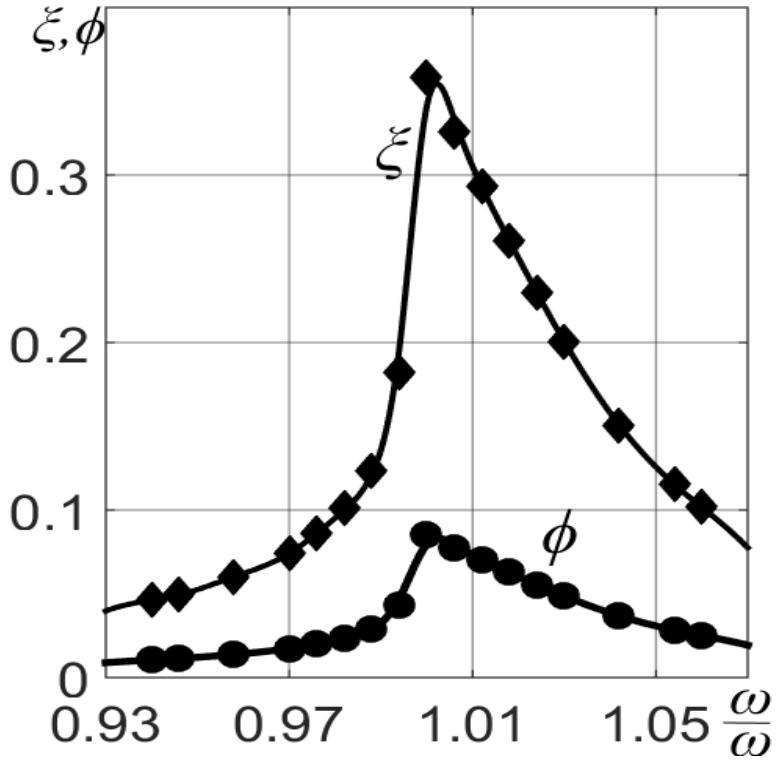


Рис. 3.25. Особливості поведінки вільної поверхні рідини та кута відхилення резервуару в околі резонансу форми $m=2$.

В околі резонансу по рідині (рис. 3.25) поведінка є схожою, перш за все, відбувається збільшення кута відхилення резервуару.

Виконано розрахунок задачі поступального руху циліндричного резервуару з рідиною з аналогічним співвідношенням мас, радіусів резервуару та глибини заповнення, у випадку коли частота є рівною резонансній (відповідні парціальні частоти для форм з коловими номерами $m=1, m=2$).

Для аналізу інтенсивності прояву вторинних резонансів у випадку поступального руху резервуару було виконано розрахунок основного резонансу (по антисиметричній формі), амплітуда руху A_0 .

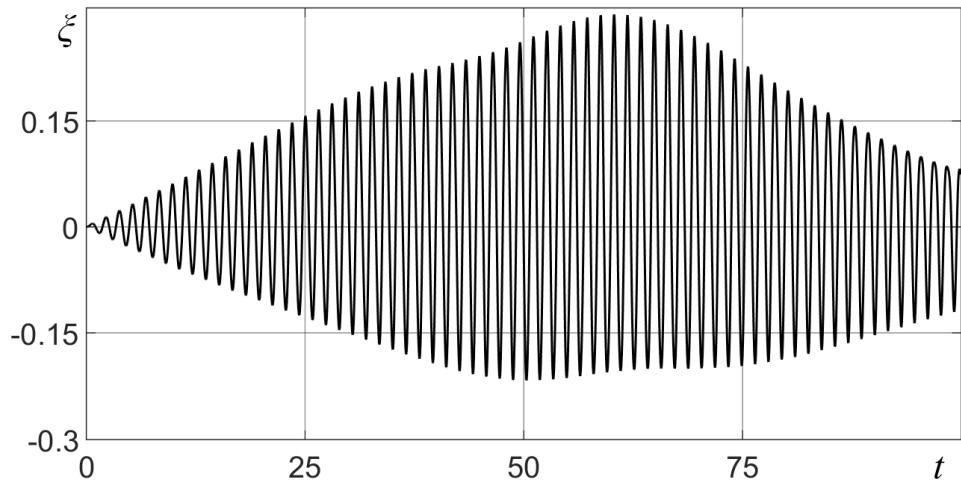


Рис. 3.26. Прояв резонансних властивостей, антисиметрична форма,
частота $\omega = 4.14$

Також, виконано розрахунок на частоті, що відповідає резонансній частоті форми $m=2$. Рух на частоті форми $m=2$ виконано з амплітудою рівною $10A_0$.

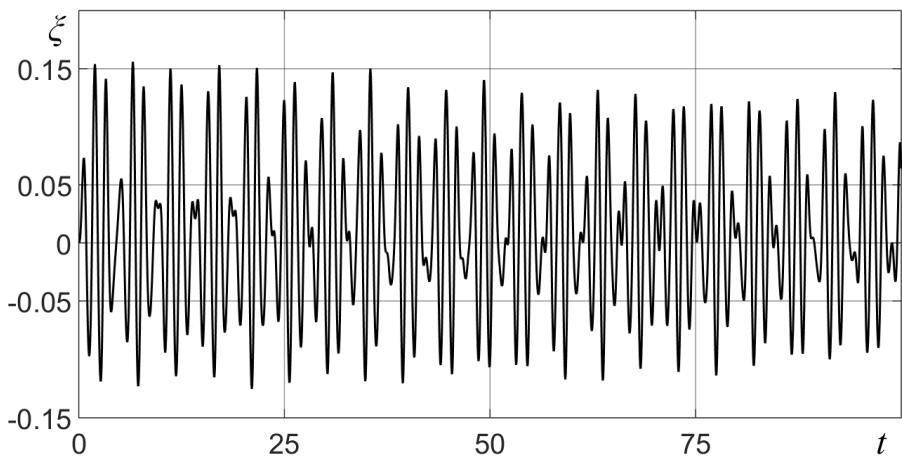


Рис. 3.27. Збурення вільної поверхні на частоті, що відповідає резонансу форми $m=2$.

Короткі висновки

Розглянуто поведінку складної зв'язаної механічної системи для випадку, коли конструкції надано додатковий ступінь вільності –

можливість здійснювати кутовий рух. В цьому випадку, для певного діапазону довжин маятникового підвісу, резонансні коливання рідини відбуваються на частотах, що відповідають вторинним (нелінійним) резонансам. Прояв основного резонансу за першою, антисиметричною, формою коливань вільної поверхні рідини практично не помітний.

Показано, що в системі резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі в широкому діапазоні довжин підвісу спостерігається резонанс по формі $m = 2$, який в рамках лінійної теорії чи моделі, яка не враховує сумісність руху компонент системи, не проявляється зовсім. Також, необхідно відмітити, що для випадку поступального руху резонанс по формі $m = 2$ також не проявляється.

3.3. Тестові приклади аналізу поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі при короткотривалому кінематичному збуренню руху

В даному підрозділі досліджено поведінку системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі з рухомою точкою підвісу при короткотривалому, кінематичному збуренні руху. Також, для порівняння, було виконано розрахунок системи резервуар – рідина з вільною поверхнею, яку закріплено на основі, тобто, кутовий рух відсутній.

В попередніх підрозділах за основні величини, для яких виконувався аналіз поведінки системи було обрано кінематичні характеристики, такі як кут відхилення резервуару та збурення вільної поверхні рідини на стінці.

Але, для більш детального аналізу, також, необхідно аналізувати параметри силової та моментної взаємодії рідини з резервуаром, які

можливо отримати з рівнянь руху, приведених в розділі 2 даної дисертаційної роботи згідно з [4] та [28]:

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= \rho \left[\left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \right]; \\
M_R^r &= -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \\
&\quad - \rho \sum_{n=1}^3 \ddot{a}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\
&\quad + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
&\quad + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Отримані параметри дають можливість проведення додаткового аналізу поведінки системи резервуар – рідина з вільною поверхнею та будуть використовуватися у наступних розділах даної роботи.

Оскільки розроблена модель, перш за все, орієнтована на сейсмічне збурення руху, необхідно бути впевненим, що для достатньо широкого інтервалу частот розрахунок ведеться вірно. Тому, було обрано деякий ряд тестових частот для яких виконано розрахунок. Так, проведено аналіз декількох випадків: рух основи відбувається постійно та короткий проміжок часу: півперіоду та період. Порівняння з випадком заданого поступального руху виконано для різних довжин маятникового підвісу. Так, з кінематичних параметрів, обрано значення збурення вільної поверхні рідини на стінці, а з динамічних – силова та моментна взаємодія.

На Рис. 3.28 – Рис. 3.30 приведено результати, які характеризують загальну тенденцію розвитку короткотривалих процесів при частоті рівній

1 Гц для випадку довжини маятникового підвісу, що рівна $l=R$ у порівнянні з жорстким закріпленням резервуару.

Так, збурення вільної поверхні для довжини маятникового підвісу $l=R$, в якості прикладу, представлено на Рис. 3.28.

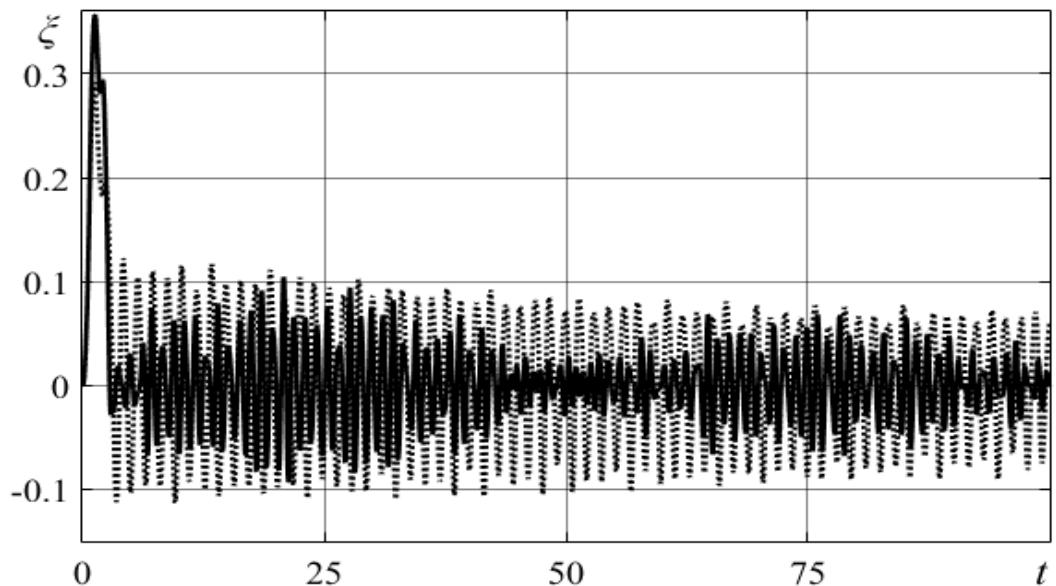


Рис. 3.28. Збурення вільної поверхні, $l=R$.

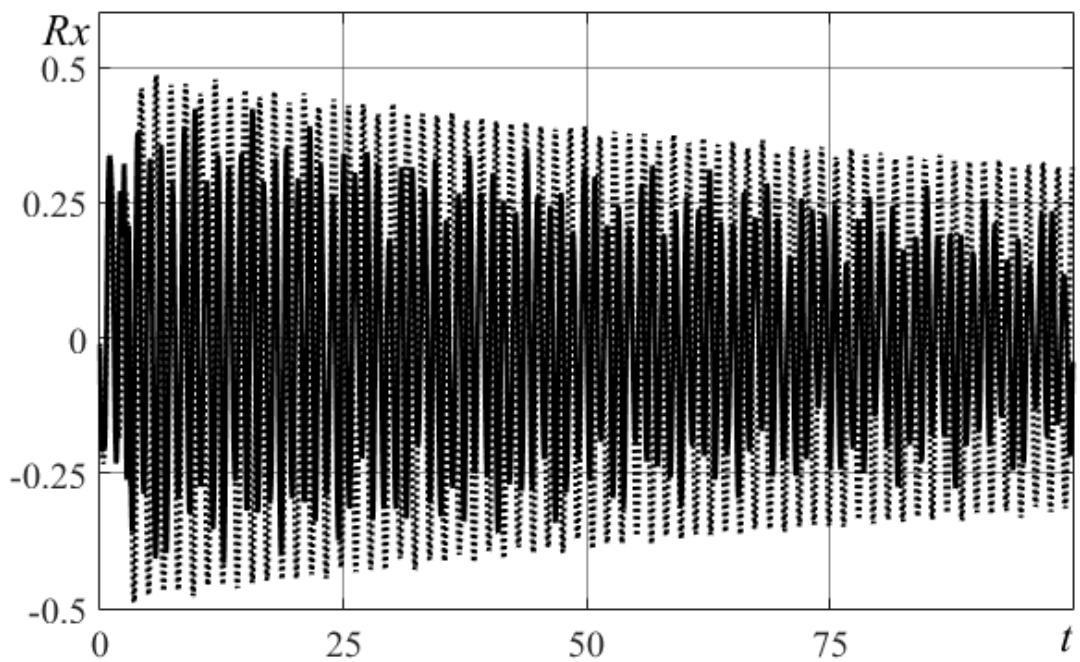


Рис. 3.29. Силова взаємодія рідини зі стінками резервуару.

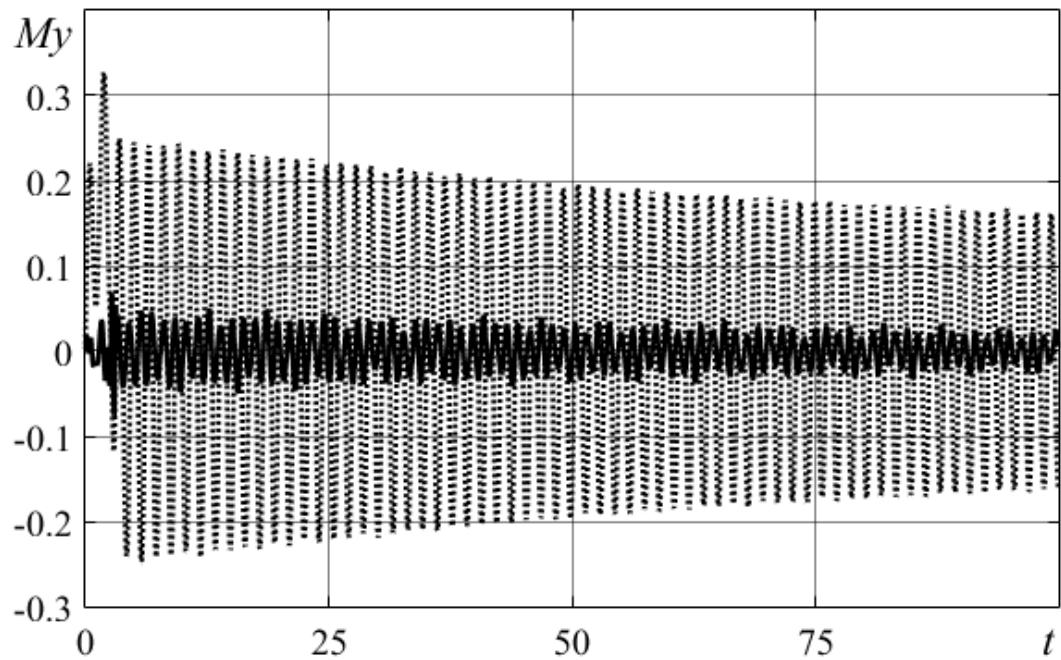


Рис. 3.30. Моментная взаємодія.

Випадок більшої частоти приведено на Рис. 3.31 та Рис. 3.32.

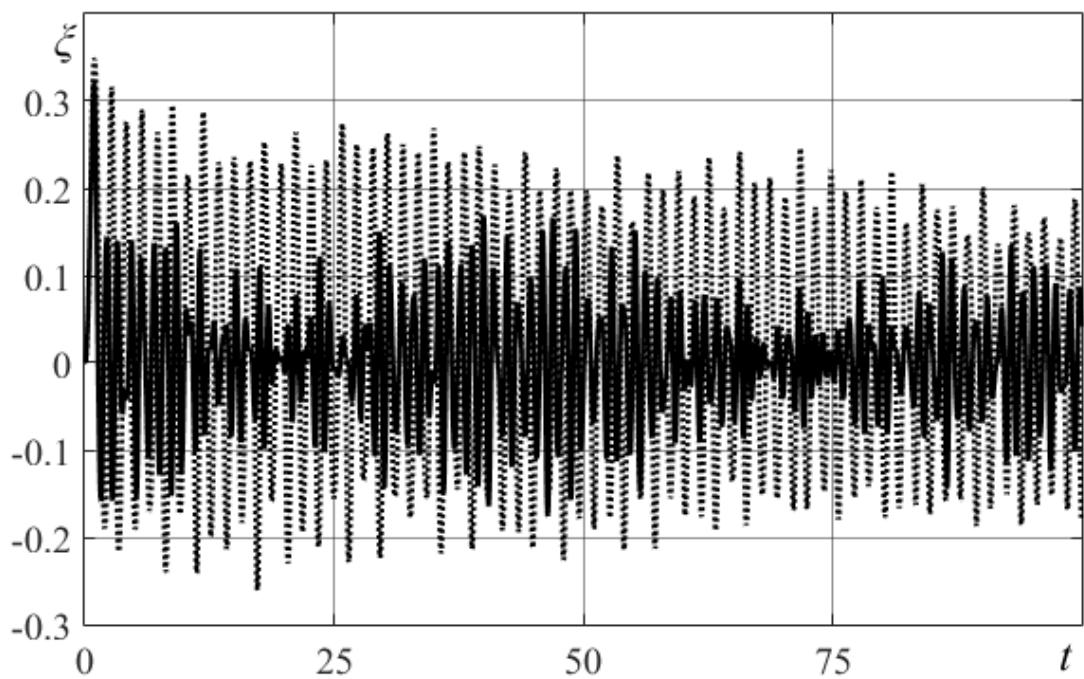


Рис. 3.31. Збурення вільної поверхні.

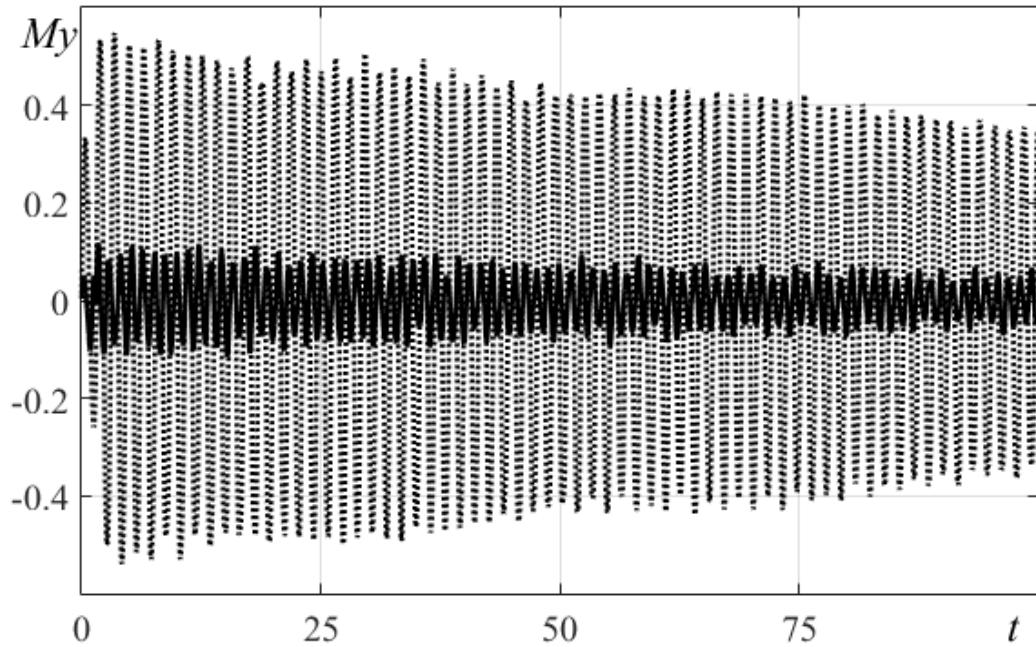


Рис. 3.32. Моментна взаємодія.

Починаючи з певного діапазону частот (не включаючи резонансні частоти) збурення вільної поверхні рідини для маятникового підвісу та жорсткого закріплення приблизно рівні, при цьому моментна взаємодія для маятникового підвісу має значно менші значення ніж для жорсткого закріплення (Рис. 3.33 та Рис. 3.34).

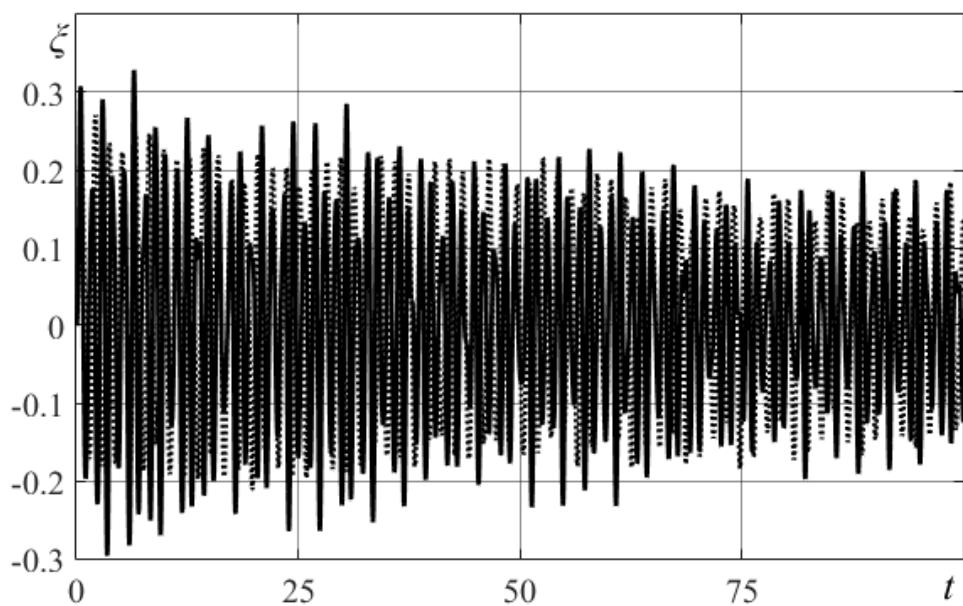


Рис. 3.33. Збурення вільної поверхні.

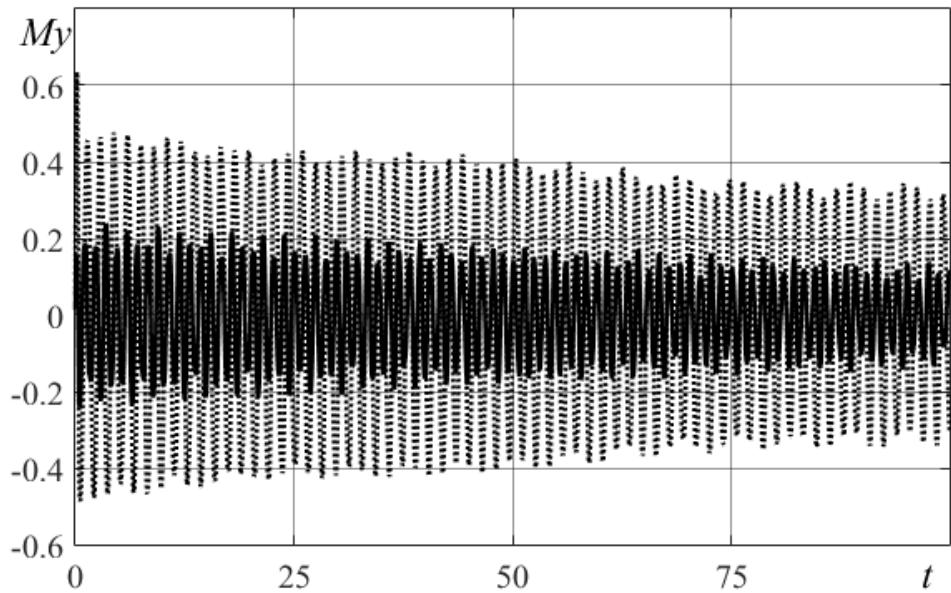


Рис. 3.34. Моментна взаємодія.

Виконаний розрахунок свідчить про те, що розроблена модель дає можливість проводити моделювання для широкого діапазону частот, що вкрай важливо для задач, де вихідний сигнал будується на основі сейсмічного навантаження.

Аналіз поведінки системи на рівні моделі сумісного руху дозволив встановити такі частоти $\omega_1 = 2.46$, $\omega_2 = 5.45$, $\omega_3 = 6.69$, які відповідають резонансам при сумісному русі системи. Перша частота відповідає резонансу маятникового типу руху системи, друга частота – коливанням вільної поверхні по формі, що відповідає коловому номеру $m=2$, а третя частота відповідає резонансу за першою антисиметричною формою $m=1$, яка для такого способу закріплення резервуару мала найбільшу зміну значення – від парціальної частоти 4.14 до 6.69, що переміщує (при розгляді частот в порядку зростання) цю частоту з другого місця при розташуванні частот за ступенем зростання на останнє місце, не розглядається вплив частоти по осі симетричній формі. А це означає, що за ступенем прояву цей резонанс буде значно послаблений. Моделювання руху системи в широкому діапазоні зміни частот збурення руху точки

підвісу підтверджив достовірність цього результату. Для аналізу динамічних властивостей системи приймемо рух точки підвісу в наступному вигляді, як і у роботі [35]:

$$\varepsilon_x(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot \left(\frac{1}{\omega_1^2} \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_2^2} \sin(\omega_2 t) + \frac{1}{\omega_3^2} \sin(\omega_3 t) \right). \quad (3.4)$$

Для числових розрахунків приймалося співвідношення мас складових системи $M_T = 0.1M_F$, довжина підвісу приймалася $l = R$, де R – радіус резервуару, глибина заповнення резервуару $H = R$. Чисельні значення приведені для $R = 1$ м. При цьому, амплітуда руху точки підвісу обиралась з міркувань, щоб максимальне значення збурення вільної поверхні на стінці ξ не перевищувало межі використання даної моделі, тобто $\max(\xi) \approx 0.3$. Для порівняння впливуожної з частот було виконано серію додаткових розрахунків, при яких рух точки підвісу відбувався лише на одній з трьох вище приведених частот. На рис. 3.35 та 3.36 представлено зміну амплітуди хвиль на стінці бака ξ та кутовий рух резервуару φ . Виконаний Фур'є аналіз ξ та кутового руху резервуару φ підтверджив, що гострота прояву резонансів суттєво відмінна. Домінуючим є резонанс на частоті ω_2 , на частоті ω_3 резонанс багатократно слабкіший, а на частоті ω_1 резонанс практично не проявляється.

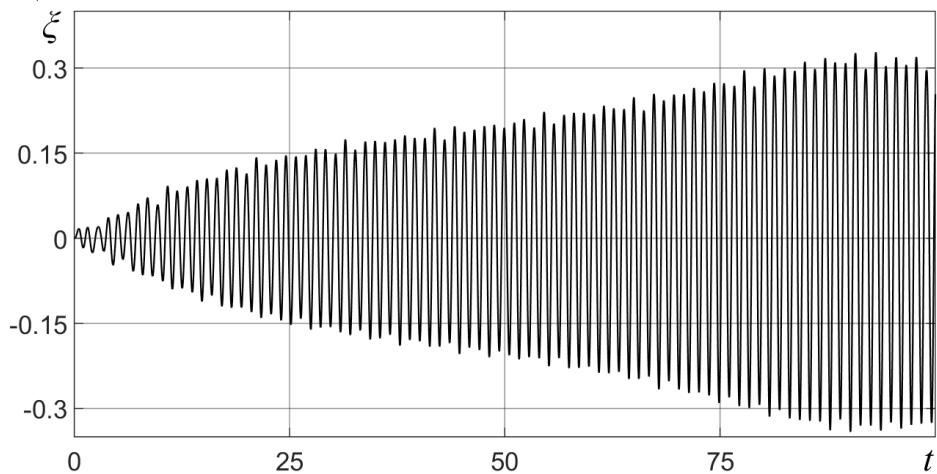


Рис. 3.35. Збурення вільної поверхні, випадок: всі 3 частоти.

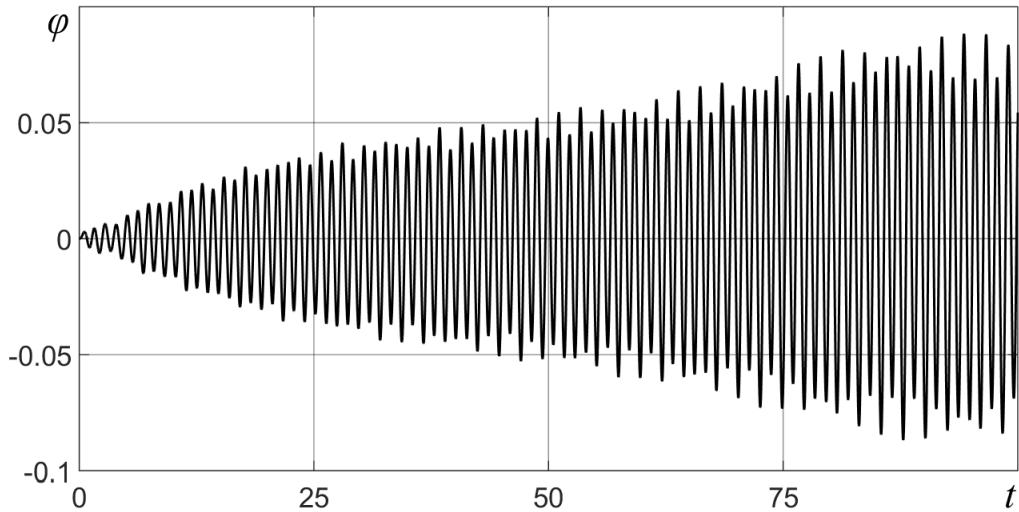


Рис. 3.36. Кут відхилення резервуару, випадок: всі 3 частоти.

Для аналізу розвинення динамічних процесів додатково було розглянуто три варіанта збудження коливань, коли закон руху точки підвісу задавався кожним доданком в співвідношенні окремо. Мінімальні і максимальні значення збурення вільної поверхні рідини на стінці бака ξ та кутового руху резервуара φ представлені в табл. 3.3.

Дана таблиця дає змогу зробити наступні висновки: поодинокі складові збурень руху системи вносять різний внесок в сумарні коливання рідини і резервуару. Фактично табл. 3.3. є свідченням різної чутливості резонансних частот по відношенню до амплітуд початкових збурень. Найбільш чутливою до збурень є система на частоті ω_2 , яка відповідає резонансу по формі з коловим номером $m=2$, який в рамках лінійної моделі взагалі відсутній. Найменш чутливий резонанс на частоті ω_1 , який відповідає квазітвердому кутовому руху системи (маятникові коливання). Проміжне положення займає резонанс на частоті ω_3 , по першій антисиметричній формі, який згідно з лінійною моделлю є основним.

Таблиця 3.3. Порівняння мінімальних та максимальних значень збурень вільної поверхні рідини на стінці та кутів відхилення резервуару для різних частотних випадків.

№	Частота	$\min \xi$	$\max \xi$	$\min \varphi$	$\max \varphi$
1.	всі разом	-0.3411	0.3276	-0.0868	0.0884
2.	$\omega_1 = 2.46$	-0.0068	0.0069	-0.0070	0.0071
3.	$\omega_2 = 5.45$	-0.3401	0.3197	-0.0802	0.0803
4.	$\omega_3 = 6.69$	-0.0139	0.0141	-0.0034	0.0034

Оскільки одним з завдань даної дисертаційної роботи є аналіз поведінки системи при вібраційних та сейсмічних навантаженнях, необхідно було також оцінити поведінку системи резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі, у випадку короткотривалого руху основи на резонансній та нерезонансній частоті.

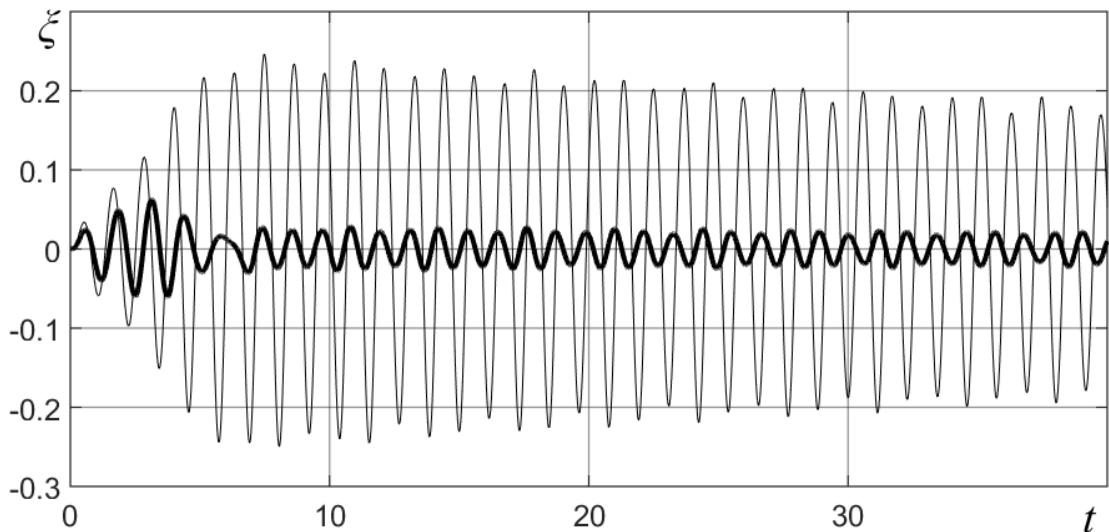


Рис. 3.37. Короткотривалий рух основи на резонансній та нерезонансній частотах. Збурення вільної поверхні.

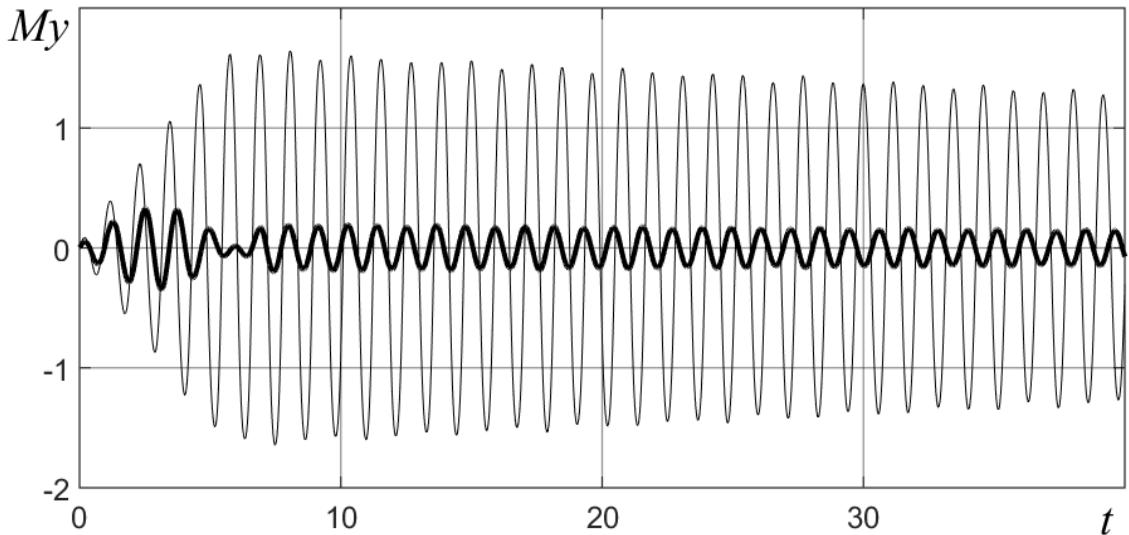


Рис. 3.38. Короткотривалий рух основи на резонансній та нерезонансній частотах. Моментна взаємодія.

Як ми можемо побачити, навіть рух основи на резонансній частоті впродовж декількох періодів викликає значні збурення рідини в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі.

Схожа ситуація спостерігається й для моментного відгуку, на Рис. 3.38 можемо побачити наскільки сильно відрізняється характерні значення моментної взаємодії для випадку, коли рух основи відбувається на резонансній та нерезонансній частотах.

Короткі висновки

Досліджено поведінку системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі, при заданому поступальному русі точки підвісу у широкому діапазоні частот. Показано, що навіть декілька періодів руху основи на резонансній частоті викликають значні збурення вільної поверхні рідини.

Висновки до розділу

На основі теоретичного моделювання резонансних процесів досліджено закономірності розвитку кутових коливань резервуару, який частково заповнено рідиною з вільною поверхнею, в рамках нелінійної зв'язаної моделі. Показано, що врахування сумісності руху компонент системи призводить до суттєвої зміни значень частот та порядку розташування форм коливань системи при їх розташуванні в порядку зростання частот. Встановлено, що для коротких та середніх довжин маятникового підвісу перша антисиметрична форма, яка зазвичай є головною в розвитку резонансних процесів, тепер збуджується не на своїй резонансній частоті, а на частотах, що відповідають маятниковим коливанням системи та частотах вторинних, нелінійних, резонансів завдяки нелінійним перерозподілам енергії. Також, наведено відповідність розвитку динамічних процесів в системі резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі основним закономірностям нелінійного хвилеутворення, яке було установлено в теоретичних та експериментальних роботах.

Важливо відмітити загальні властивості всіх видів резонансів, які було проаналізовано в даному розділі. Для усіх представлених режимів не відбувається асимптотичний вихід на постійне значення амплітуди коливань вільної поверхні рідини. При цьому, в усіх резонансних зонах спостерігається значний прояв амплітудної модуляції. Дане явище в даний час має експериментальне підтвердження роботами [91], [95] та [96], при цьому на якісному рівні відповідає парадоксу Фермі-Паста-Улама [7]. Так, з використанням до багато частотних хвильових процесів на поверхні нестисливової рідини [90], вказується, що для багатомодових хвильових процесів з трансцендентним співвідношенням частот хвильовий процес ніколи не вийде на чисто періодичний режим коливань. Що в свою чергу, вказує на необхідність розгляду задач коливань рідини з вільною

поверхнею в резервуарах різної форми саме в нелінійній постановці, оскільки це може призводити до значної зміни частотних характеристик системи.

РОЗДІЛ 4. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічних навантаженнях

В цьому розділі роботи проведено дослідження динаміки системи резервуар – рідина при сейсмічних навантаженнях. Попередньо, було виконано розрахунок та аналіз особливостей руху системи для випадку коли рух основи відбувався за гармонічним законом із спадаючою амплітудою, тобто задається у вигляді $\varepsilon(t) = \exp(A \cdot t) \times \sin(w \cdot t)$.

Апробація підходу виконувалась для випадку, коли рух основи відбувався на основі землетрусу, який стався біля берегів Японії у березні 2011 року. Виконано порівняльний аналіз поведінки резервуару з рідиною при жорсткому закріпленні та для випадку маятникового підвісу.

Додатково, було виконано Фур'є аналіз збурень вільної поверхні рідини на стінці для випадку маятникового закріплення та заданого поступального руху резервуару.

4.1 Аналіз впливу довжини маятникового підвісу на поведінку конструкції з рідиною при тестовому сейсмічному навантаженні

Важливим прикладним етапом дослідження є визначення оптимального діапазону довжин маятникового підвісу та порівняння з жорстким закріпленням резервуару. Так, в Розділі 3 даної дисертаційної роботи приведено, що порядок розміщення резонансних частот системи змінюється при значеннях довжини маятникового підвісу рівних $l = 1.95R$, $l = 12R$ відповідно. Також, важливим є поведінка системи резервуар з рідиною в околі основних резонансів, що було окремо розглянуто у попередніх розділах. Було показано, що короткостроковий рух основи на резонансній частоті сприяє виникненню додаткових збурень вільної поверхні рідини.

Даний аналіз вказує лише на важливість присутності у факторах збурення руху частот, на яких можливі резонанси, навіть на коротких інтервалах часу. Тому аналітичний вигляд закону (функції) збурення руху є важливою складовою і потребує детального аналізу з точки зору частотних властивостей. Сейсмічна активність, взагалі, представляє собою суміш короткотривалого імпульсного та гармонічного руху основи. Тому рух основи подається у вигляді добутку тригонометричної функції зі спадаючою амплітудою:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t), \quad (4.1)$$

де A – амплітуда, ω та B – характеристики періодичності та швидкості згасання коливань. В рівняння руху також входить перша та друга похідні, які для даного вигляду функції будуть рівні:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t) + A \cdot B \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t) \\ f''(t) &= -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t) + 2 \cdot A \cdot B \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t) \\ &\quad + A \cdot B^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \exp(B \cdot t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Значення параметру було B прийнято $B = -0.25$, а амплітуда визначалась з умови, що максимальне значення збурення вільної поверхні на стінці ξ було рівне $\xi = 0.3$. Після розрахунку усіх величин, та порівняння кінематичних та динамічних характеристик, було розглянуто додатковий випадок, коли значення амплітуди для маятникового та класичного закріплення були рівні між собою. Значення частот було обрано $\omega = 0.8$, $\omega = 2.0 \text{ rad/s}$.

Рух точки підвісу (або основи резервуару, для випадку жорсткого закріплення) представлено на рис. 4.1.

Значення амплітуди A та максимальних збурень вільної поверхні рідини ξ для різних довжин підвісу $l = \{0.5R, 1R, 3R, 3.16R, 5R, 5.5R, 8R, 12R\}$ представлено у табл. 4.1. Також, для порівняння, в таблиці приведено

значення для випадку коли амплітуда руху точки підвісу є рівною амплітуді при $l=8R$.

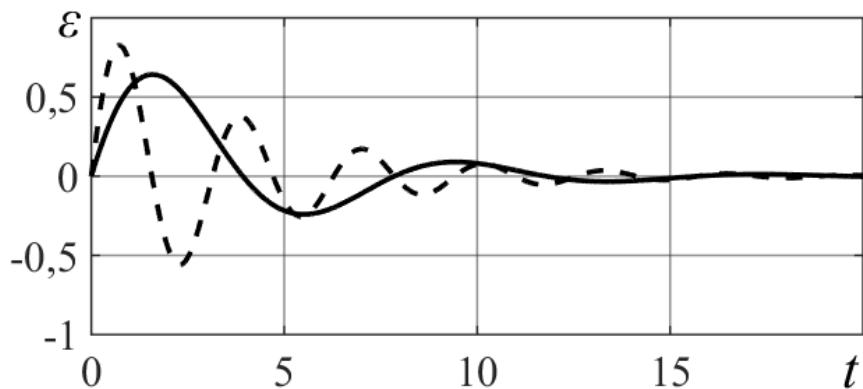


Рис. 4.1. Закон руху основи.

Таблиця 4.1. Залежність амплітуди коливань основи та максимальних збурень вільної поверхні в залежності від параметрів маятникового підвісу та випадку заданого поступального руху.

Довжина підвісу R / поступальний рух	Частота $\omega = 0.8$		Частота $\omega = 2.0$	
	Амплітуда руху	ξ_{\max}	Амплітуда руху	ξ_{\max}
$0.5R$	2.8	0.3014	0.45	0.2965
$1.0R$	3.0	0.2982	0.5	0.2942
$1.0R^*$	3.5	0.3300	0.565	0.3384
$3.0R$	3.3	0.2918	0.55	0.2989
$3.0R^*$	3.5	0.3025	0.565	0.3086
$3.16R$	3.32	0.2929	0.55	0.2981
$5.0R$	3.5	0.3010	0.56	0.2995
$5.5R$	3.5	0.3015	0.56	0.2987
$8R$	3.5	0.3033	0.565	0.2994
$12R^*$	3.5	0.3050	0.565	0.2976
Поступальний рух	3.2	0.2960	0.515	0.3012
Поступальний рух*	3.5	0.3239	0.565	0.3316

* Виконано розрахунок з однаковою амплітудою, для порівняння з маятниковим підвісом середньої довжини.

Так, для діапазону довжин підвісу $l > 3R$, тобто середніх довжин підвісу, спостерігається значний вигравш у значеннях моменту M_y .

Мінімальні та максимальні значення моменту представлено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2. Значення моментної реакції в залежності від параметрів маятникового підвісу та випадку поступального руху.

Довжина підвісу R / поступальний рух	Частота $\omega = 0.8$		Частота $\omega = 2.0$	
	M_y (min)	M_y (max)	M_y (min)	M_y (max)
$0.5R$	-1.2235	1.3678	-1.0591	1.0156
$1.0R$	-0.7242	0.8114	-0.6836	0.6588
$3.0R$	-0.3002	0.3167	-0.2827	0.2503
$3.16R$	-0.3050	0.3019	-0.2680	0.2396
$5.0R$	-0.1945	0.1991	-0.1680	0.1543
$5.5R$	-0.1773	0.1807	-0.1517	0.1441
$8R$	-0.1195	0.1234	-0.1052	0.0964
$12R$	-0.0804	0.0818	-0.0706	0.0657
Поступальний рух	-0.2847	0.4153	-0.4859	0.4907
Поступальний рух *	-0.3050	0.4542	-0.5279	0.5340

Параметри резервуару повністю співпадають з усіма іншими задачами, що розглядалися в даній дисертаційній роботі, при цьому на рисунках випадок закріплення конструкції резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі відповідає більш товстій кривій, а для випадку жорсткого закріплення резервуару, що відповідає лише поступальному руху резервуару, використовується більш тонша лінія.

На рис. 4.2 – 4.3 представлено результати порівняння моменту тиску рідини на стінки резервуару відносно точки, що співпадає з центром

незбуреної вільної поверхні рідини, M_y , для частот збурення $\omega = 0.8 \text{ } 1/c$ (рис. 4.2) та $\omega = 2.0 \text{ } 1/c$ (рис. 4.3). При цьому, для порівняння було обрано маятниковий підвіс середнього діапазону довжин $l = 8R$. Як ми бачимо з рисунків для випадку маятникового підвісу перекидаючий момент значно знижується, особливо для випадку більш високої частоти збурення.

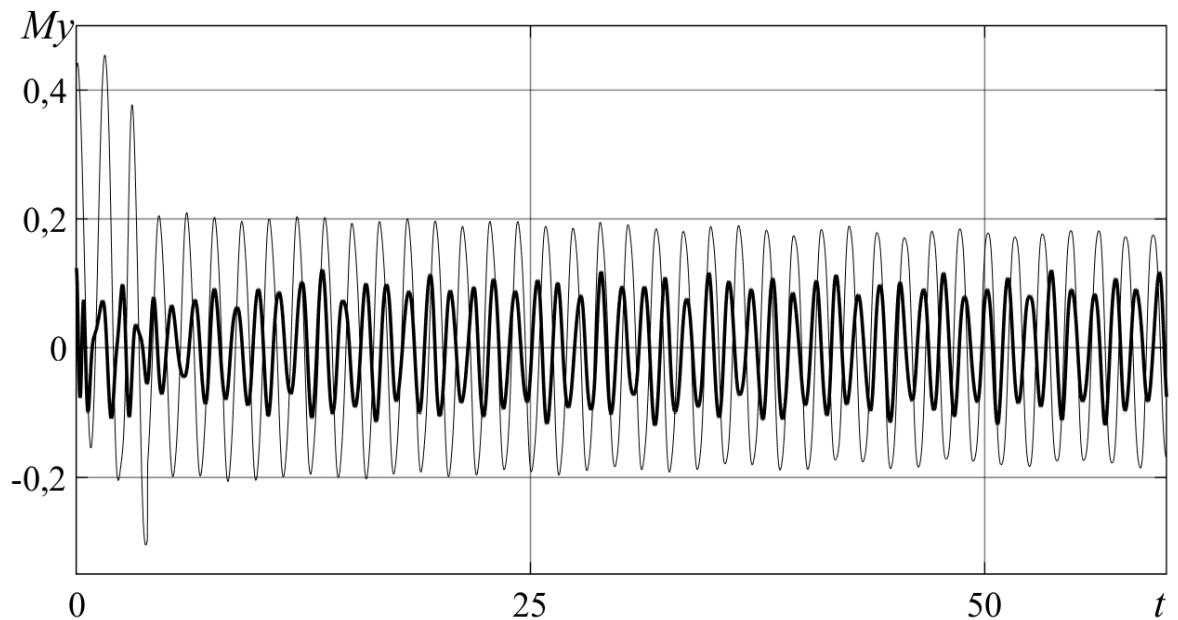


Рис. 4.2. Моментна взаємодія, $\omega = 0.8$.

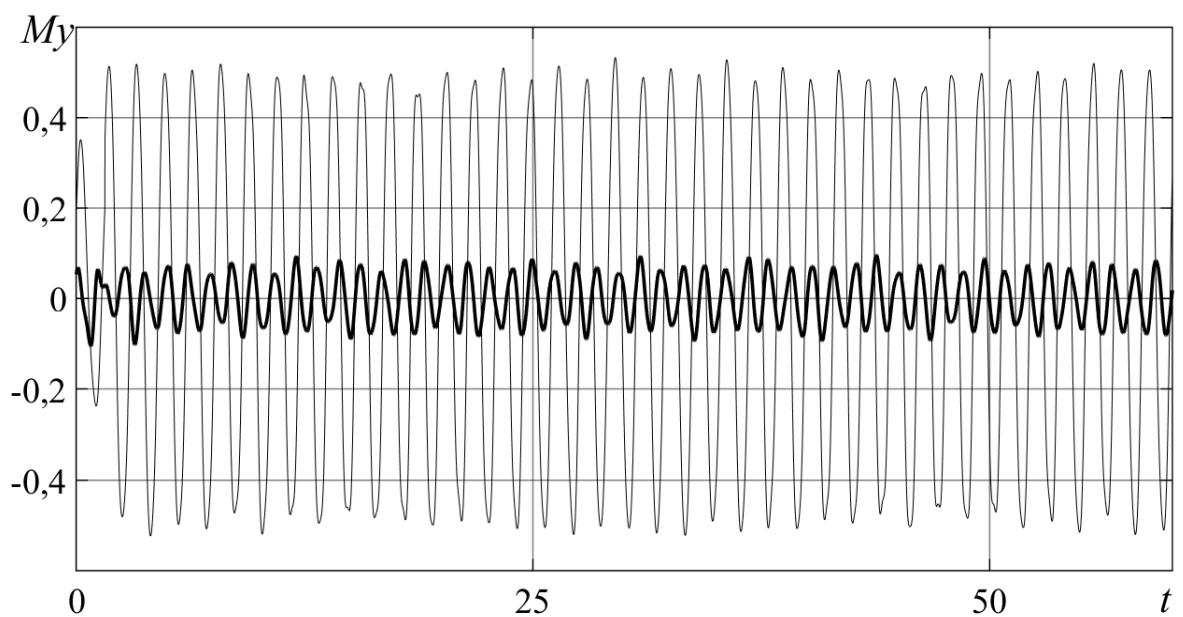


Рис. 4.3. Моментна взаємодія, $\omega = 2.0$.

Як вже було сказано, використання маятникового підвісу призводить до суттєвої зміни резонансної частоти антисиметричної форми коливань рідини (кововий номер $m=1$), що для певних діапазонів довжин маятникового підвісу призводить до зміни порядку розташування резонансних частот та зменшення інтенсивності прояву резонансних властивостей системи на резонансі по головній формі коливань. Саме використання сумісної постановки задачі дає можливість повністю коректно розглядати поведінку такого роду конструкцій. Зміна порядку розташування частот в залежності від довжини маятникового підвісу призводить, також, й до різного прояву нелінійних властивостей системи, так як найменша частота в системах є різною. Оскільки, для різних довжин маятникового підвісу особливості поведінки вільної поверхні рідини можуть бути різними, для більш якісного аналізу необхідно привести параметри хвилеутворення для випадків довжин підвісу з різних діапазонів, тобто розглянемо короткі ($l=R$), середні ($l=3R$ та $l=8R$) та великі ($l=12R$) довжини підвісу.

На наступних рисунках побудовано порівняння збурень вільної поверхні рідини на стінці для трьох діапазонів довжин маятникового підвісу. Так, для випадку заданого поступального руху рідини використовується тонка суцільна лінія, а параметри руху конструкції резервуар – рідина на маятниковому підвісі для всіх випадків ілюструється більш товстою суцільною лінією. При цьому, на рис. 4.4 представлено порівняння з маятниковим підвісу великої довжини, рис. 4.5 та рис. 4.6 середніх довжин ($l=8R$ та $l=3R$ відповідно), рис. 4.7 – коротких довжин. На кожному рисунку варіант *a*) відповідає частоті $\omega=0.8 \text{ } 1/c$, варіант *b*) відповідає частоті $\omega=2 \text{ } 1/c$.

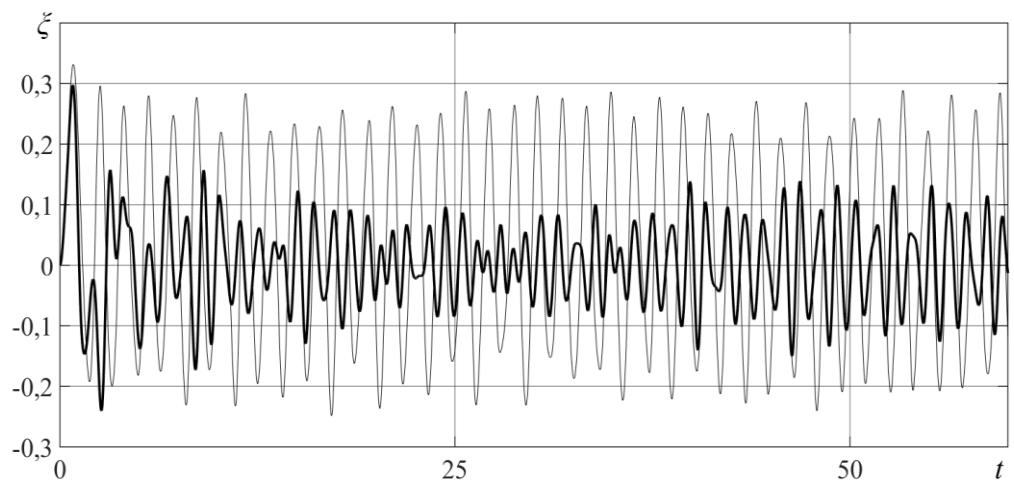
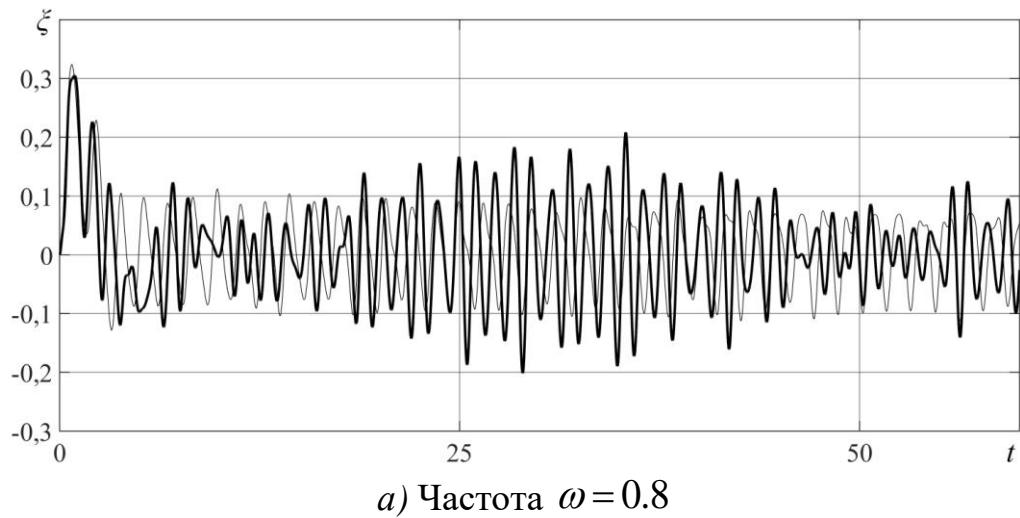
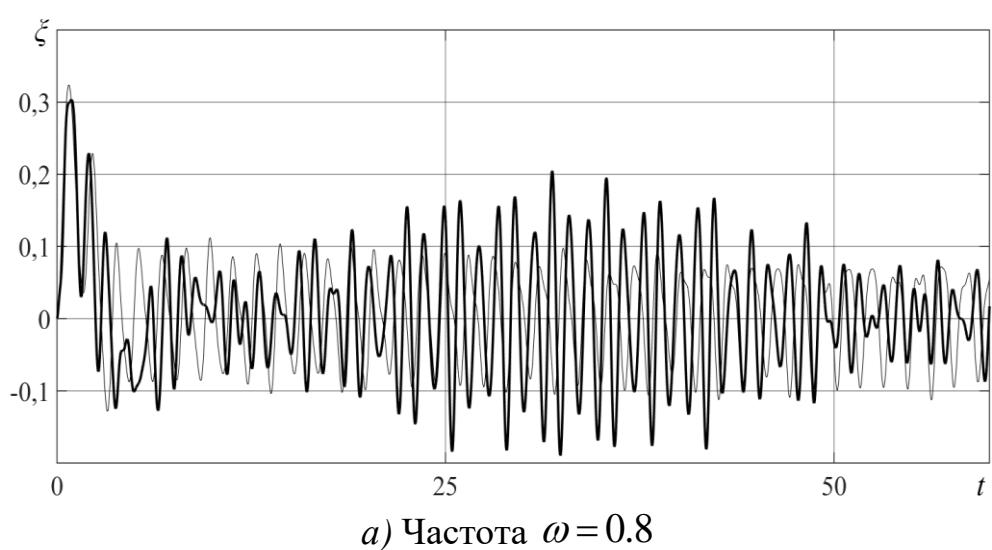
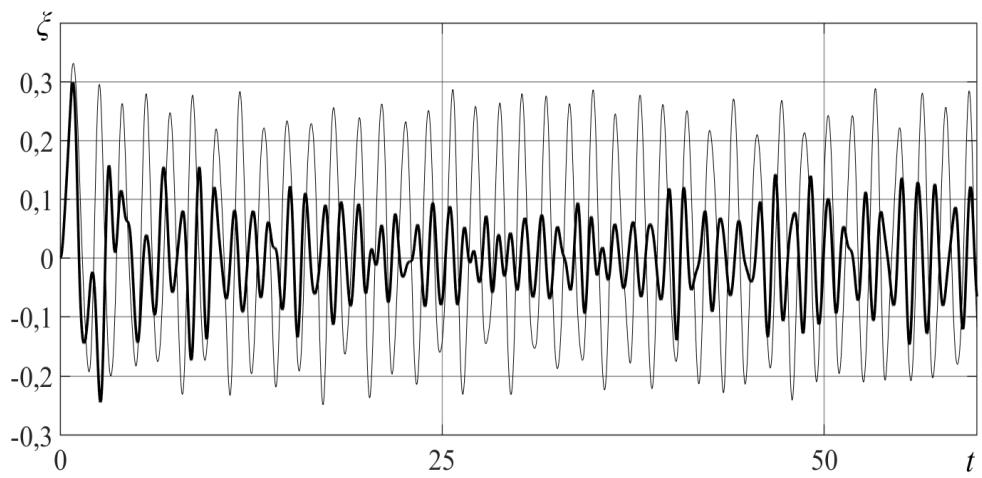


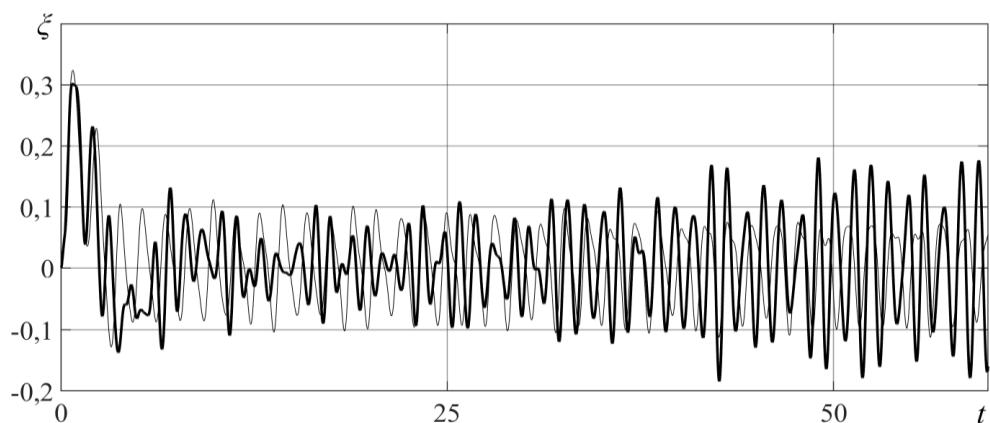
Рис. 4.4. Порівняння маятникового підвісу $l=12R$ та поступального руху резервуару.



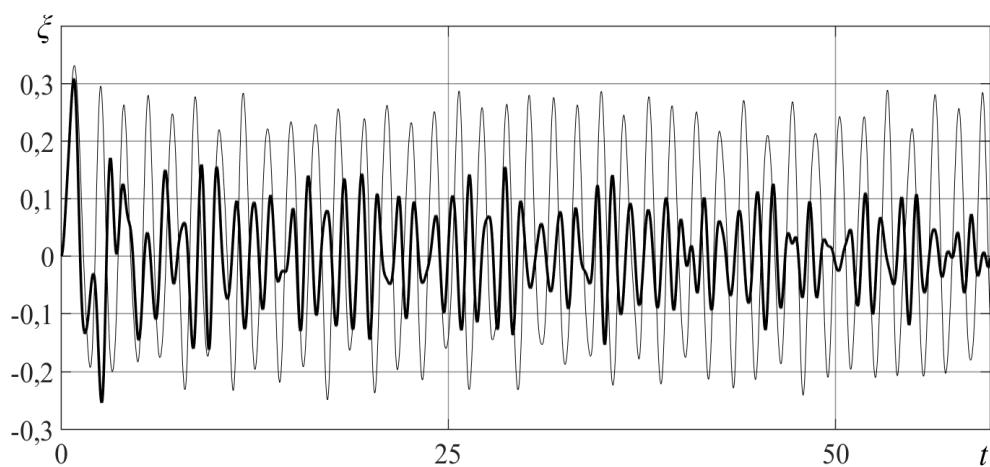


б) Частота $\omega = 2$

Рис. 4.5. Порівняння маятникового підвісу $l = 8R$ та поступального руху резервуару.

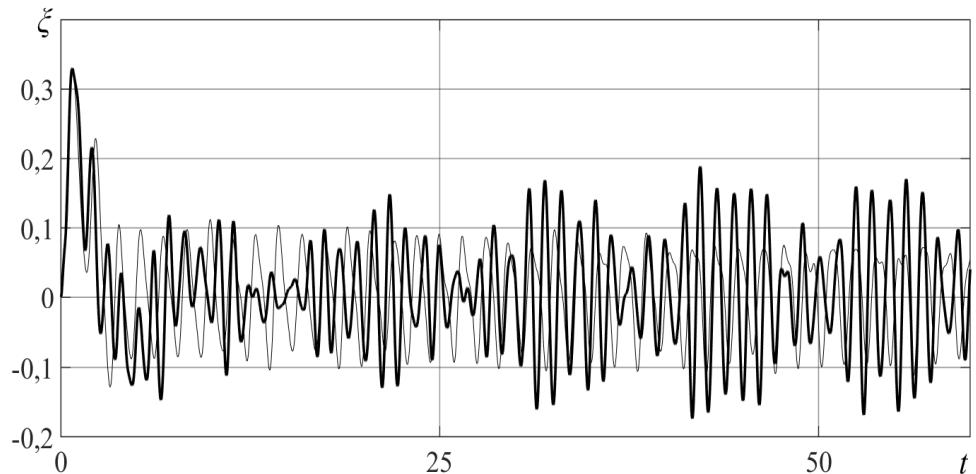


а) Частота $\omega = 0.8$

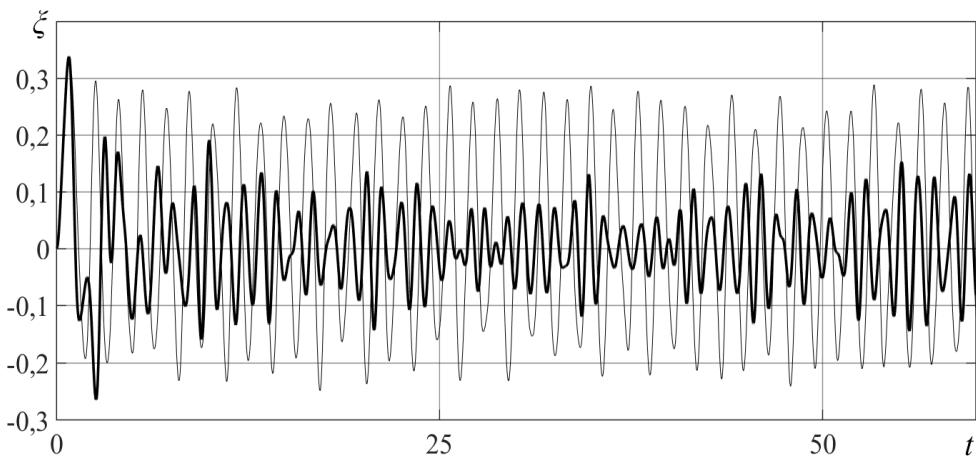


б) Частота $\omega = 2$

Рис. 4.6. Порівняння маятникового підвісу $l = 3R$ та поступального руху резервуару.



a) Частота $\omega = 0.8$



б) Частота $\omega = 2$

Рис. 4.7. Порівняння маятникового підвісу $l = 1R$ та поступального руху резервуару.

Згідно з рисунками, ефективність маятникового підвісу з точки зору зниження хвиль на вільній поверхні практично не проявляється для низьких частот сейсмічного збурення руху. Для більших частот ефективність маятникового підвісу у порівнянні з жорстким закріпленням є більш значною. При цьому, для коротких довжин підвісу зменшення амплітуд хвиль є більш істотніше. Необхідно відмітити, що зміна амплітуд хвиль призводить до прояву ефектів модуляції коливань, де частота модуляції збільшується зі зменшенням довжини маятникового підвісу.

Тестові приклад демонструють, що в загальному випадку, використання маятникового підвісу (чи розташування конструкцій на рухомих опорах в ложементах певної кривизни) в якості засобу зниження рівня негативних наслідків сейсмічної активності є, перш за все, ефективними з точки зору зменшення силової та моментної взаємодії конструкцій з рідинами та зменшення збурень на вільній поверхні рідини, що особливо сильно проявляється для коротких довжин підвісу, коли розподіл частот в системі найбільш сильно змінюється відносно випадку поступального руху конструкції, тобто, частота першої, антисиметричної, форми змінює своє значення з другої (після маятникової) на четверту.

Короткі висновки

Розглянуто рух системи резервуар – рідина з вільною поверхнею для випадку коли рух основи відбувається за сейсмоподібним законом. Проаналізовано різні діапазони довжин підвісу, в якості порівняльних характеристик обрано збурення вільної поверхні та момент тиску рідини на стінки резервуару. Показано, що для зменшення збурень рідини можливо використовувати таке закріплення конструкцій. При цьому, для параметрів хвилеутворення, для певних частот руху основи, виграш маятникового підвісу є незначним, але для усіх проаналізованих частот момента взаємодія є значно меншою у порівнянні з випадком жорсткого закріплення резервуару.

4.2 Аналіз хвильового руху рідини при збудженні руху системи для реального сейсмічного навантаження

Апробацію методу було виконано для випадку, коли рух основи підвісу задавався за сейсмічним законом, отриманим на основі реальних сейсмограм. Так, існують архіви даних, в яких зберігаються реальні сейсмограми, наприклад таким є ресурс [97]. Дані сейсмограми збережено

у спеціальних форматах, в яких присутні основні параметри землетрусу, в тому числі прискорення, швидкості та переміщення земної кори в двох горизонтальних та вертикальному напрямах. В даному розділі виконано розрахунок на основі даних землетрусу, який стався 11 березня 2011 року у регіоні Тохоку, у Північно-Східній частині Японії, опис даного землетрусу представлено у [98]. Типовий вигляд акселерограми представлена на рис. 4.8.



Рис. 4.8. Типовий вигляд акселерограми.

Так, згідно з висновками попередніх розділів, теоретичною можливістю використання маятникового підвісу є те, що при розгляді системи резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі в зв'язаній постановці відбувається зміна значення резонансної частоти антисиметричної форми, що призводить до зміни порядку розташування резонансних частот. Так, було розглянуто довжини підвісу з різних умовних інтервалів: короткі, середні та великі довжини маятникового підвісу.

Для виконання порівняльного аналізу додатково було виконано розрахунок випадку, коли резервуар жорстко закріплено на основі. Значення параметрів поступального руху основи є тими самими що й для випадку маятникового закріплення конструкції.

В якості порівняльних характеристик було обрано збурення вільної поверхні рідини на стінці та значення моментної взаємодії для

маятникового підвісу та жорсткого закріплення резервуару. Маятниковий підвіс на рисунках збурень вільної поверхні рідини на стінці позначено суцільною лінією, жорстке закріплення – штриховою.

Так, випадок коротких довжин маятникового підвісу, який приведено на рис. 4.9 – 4.10 характеризується порівняних значеннях як для кінематичних, так й для силових параметрів.

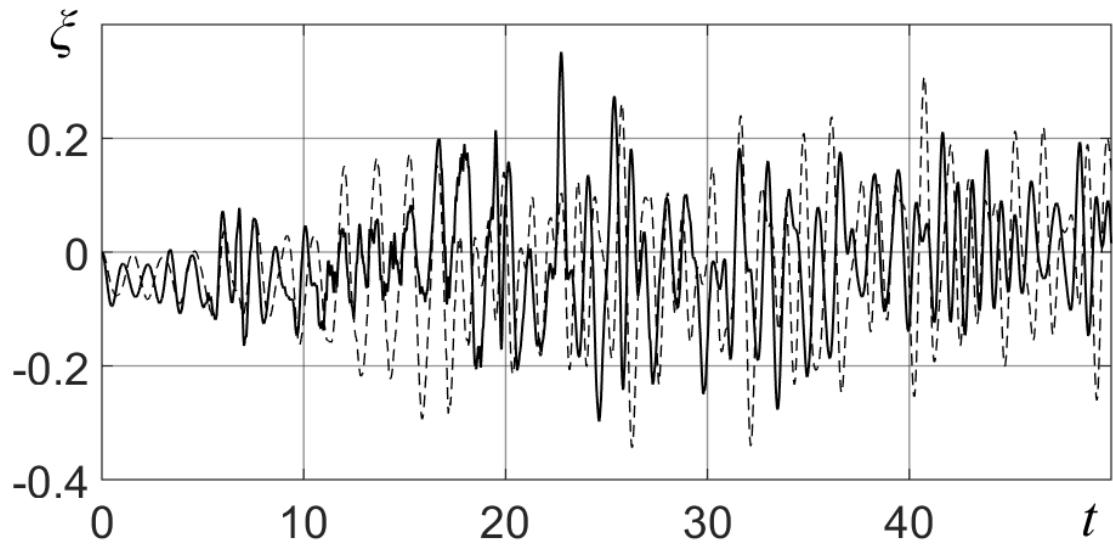


Рис. 4.9. Порівняння ξ для жорсткого закріплення та $l = 1R$.

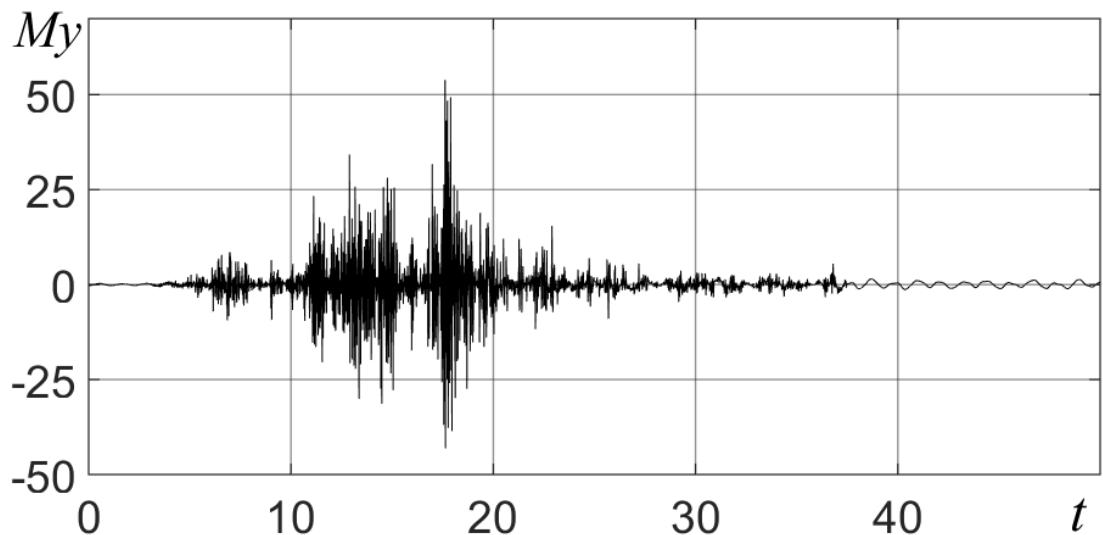


Рис. 4.10. Моментна реакція, маятниковий підвіс $l = 1R$.

Випадок жорсткого закріплення резервуару було розглянуто окремо, значення моментної взаємодії для заданого поступального руху приведено на рис. 4.11.

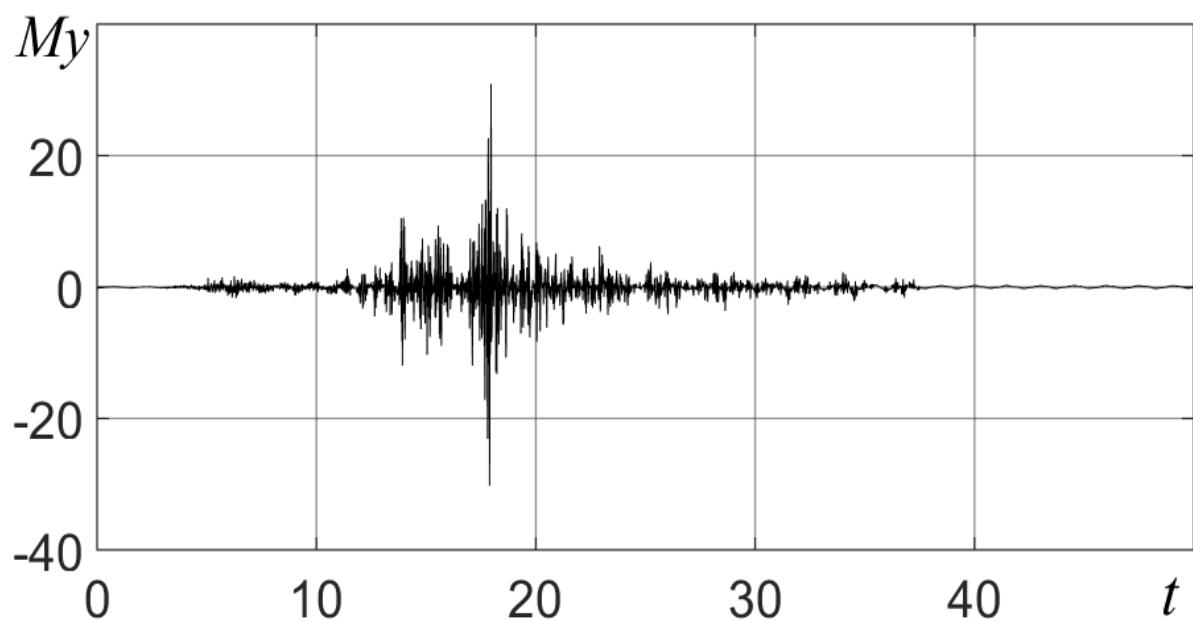


Рис. 4.11. Моментна реакція, жорстке закріплення.

Випадок порівняння жорсткого закріплення резервуару та середніх довжин маятникового підвісу приведено на рис. 4.12, рис. 4.13.

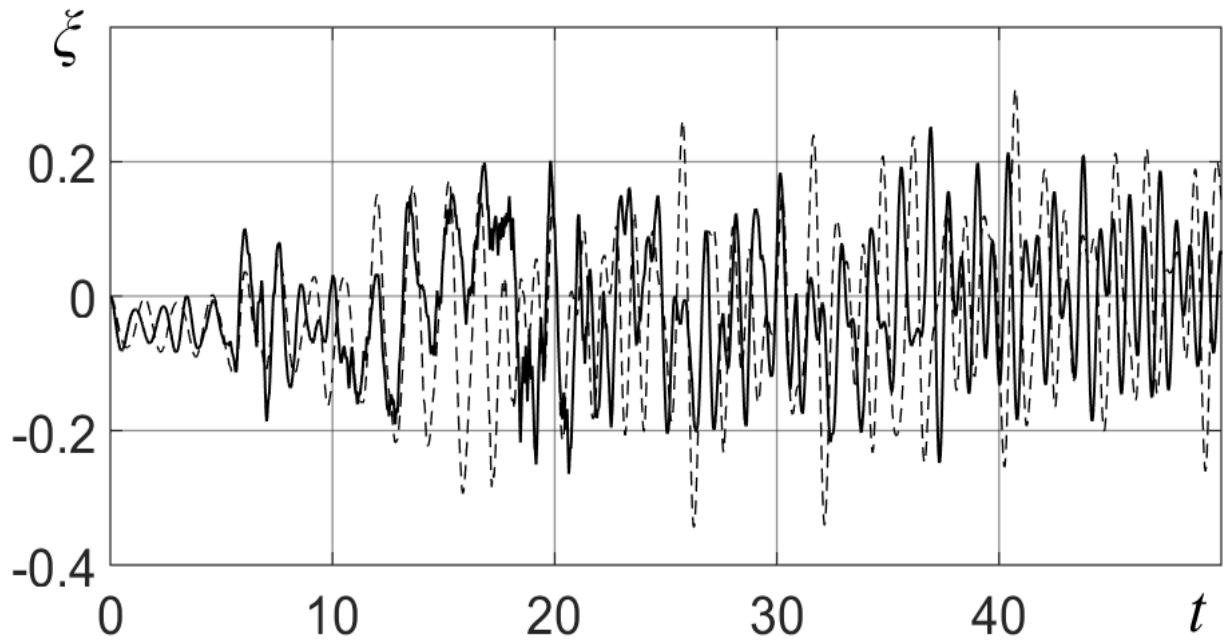


Рис. 4.12. Порівняння ξ для жорсткого закріплення та $l = 8R$.

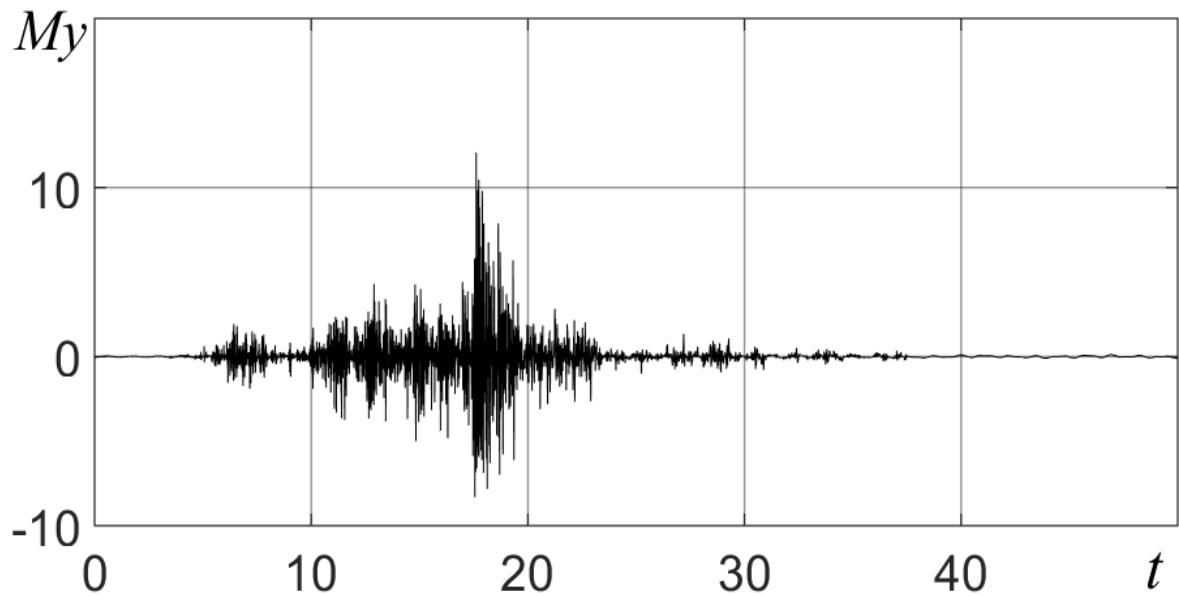


Рис. 4.13. Моментна реакція, маятниковий підвіс $l=8R$.

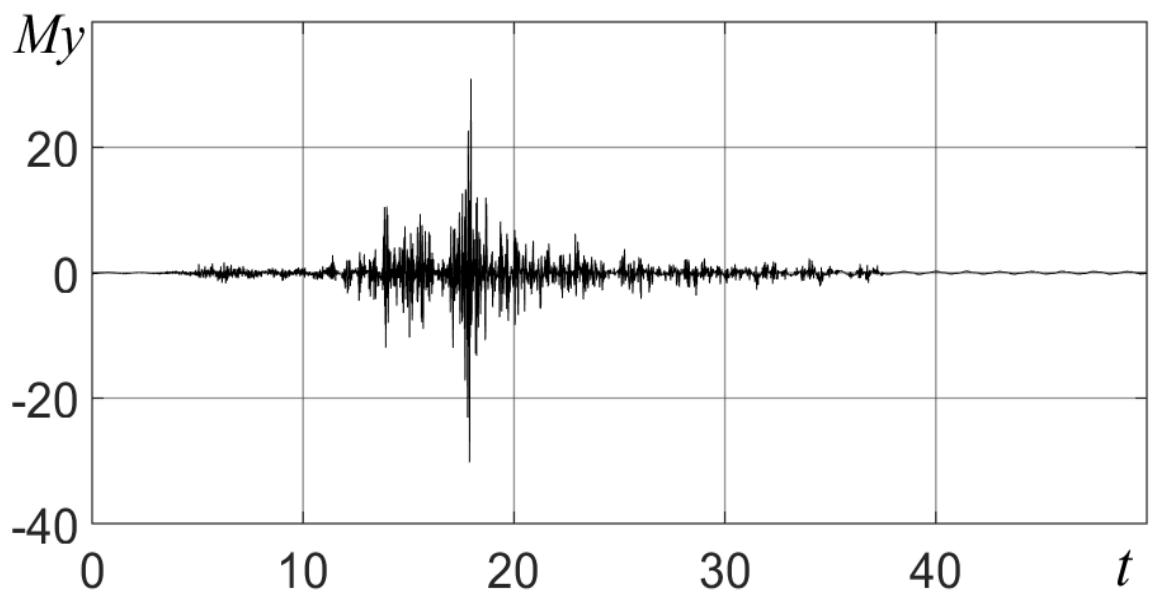


Рис. 4.14. Моментна реакція, жорстке закріплення.

З рисунків видно, що в загальному випадку, діапазон середніх довжин маятникового підвісу спричиняє значно менші напруження на систему відносно жорсткого закріплення резервуару.

При цьому, на рис. 4.15 приведено часовий інтервал, який відповідає області найбільших значень напружень.

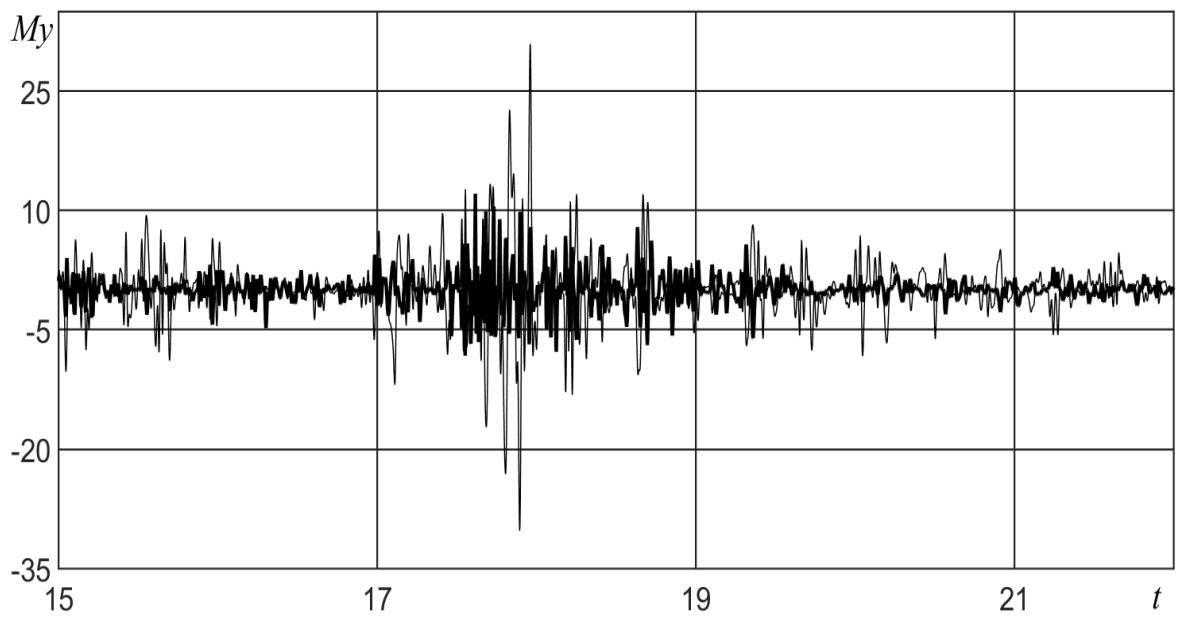


Рис. 4.15. Моментна реакція, маятниковий підвіс $l = 8R$ у порівнянні з жорстким закріпленням.

Також, було розглянуто випадок, коли довжина маятникового підвісу відповідала діапазону великих довжин, так, результати представлено на наступних рисунках.

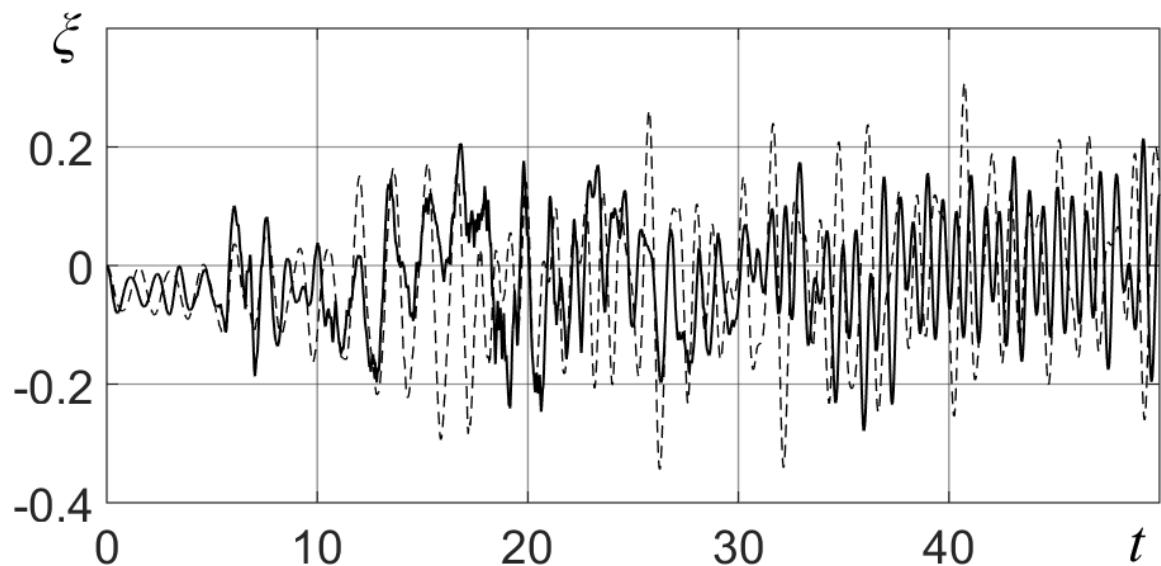


Рис. 4.16. Порівняння ξ для жорсткого закріплення та $l = 14R$.

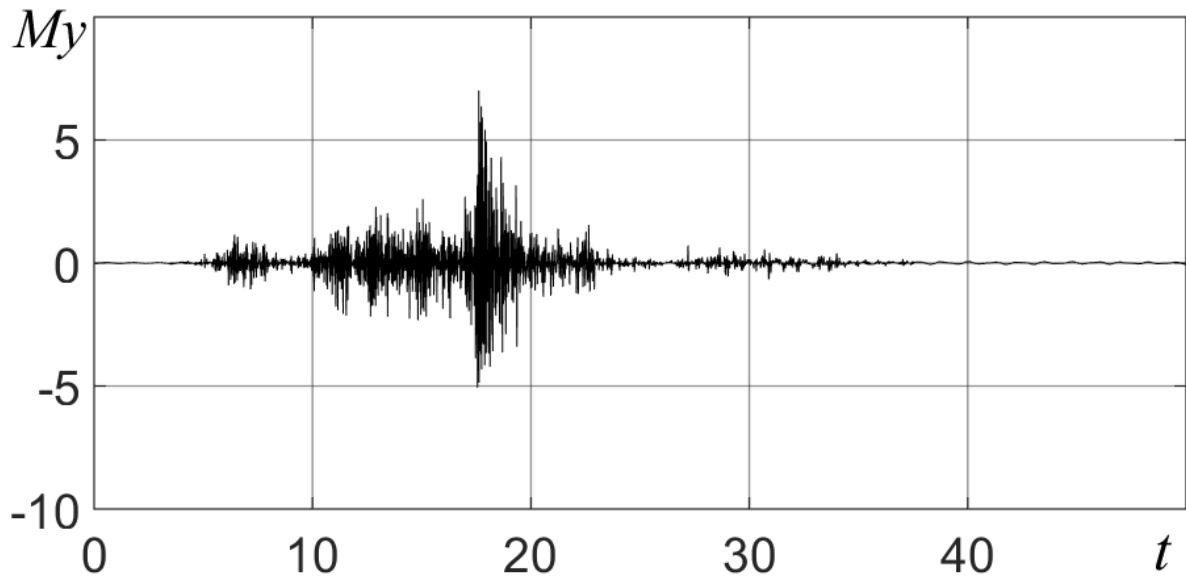


Рис. 4.17. Моментна реакція, маятниковий підвіс $l = 14R$.

В загальному випадку, аналіз кінематичних та силових параметрів показав, що найбільш сприятливим є маятникові підвіси середніх та великих довжин.

4.3 Аналіз руху конструкції і силової та моментної взаємодії рідини зі стінками резервуару при збудженні руху системи для реального сейсмічного навантаження

За результатами попередніх розділів, довжину підвісу обрано по одній з кожної категорії довжин маятникового підвісу $l = R, 8R, 14R$, також виконано розрахунок поступального руху резервуару. При цьому, попередній підрозділ показав, що середні та великі довжини є найбільш сприятливими.

Для додаткового аналізу розвитку хвильових процесів у системі резервуар – рідина було виконано спектральний аналіз збурень хвиль на стінках баку. Необхідно відмітити, що наявність піків з нульовою частотою свідчить про некомпенсоване переміщення основи.

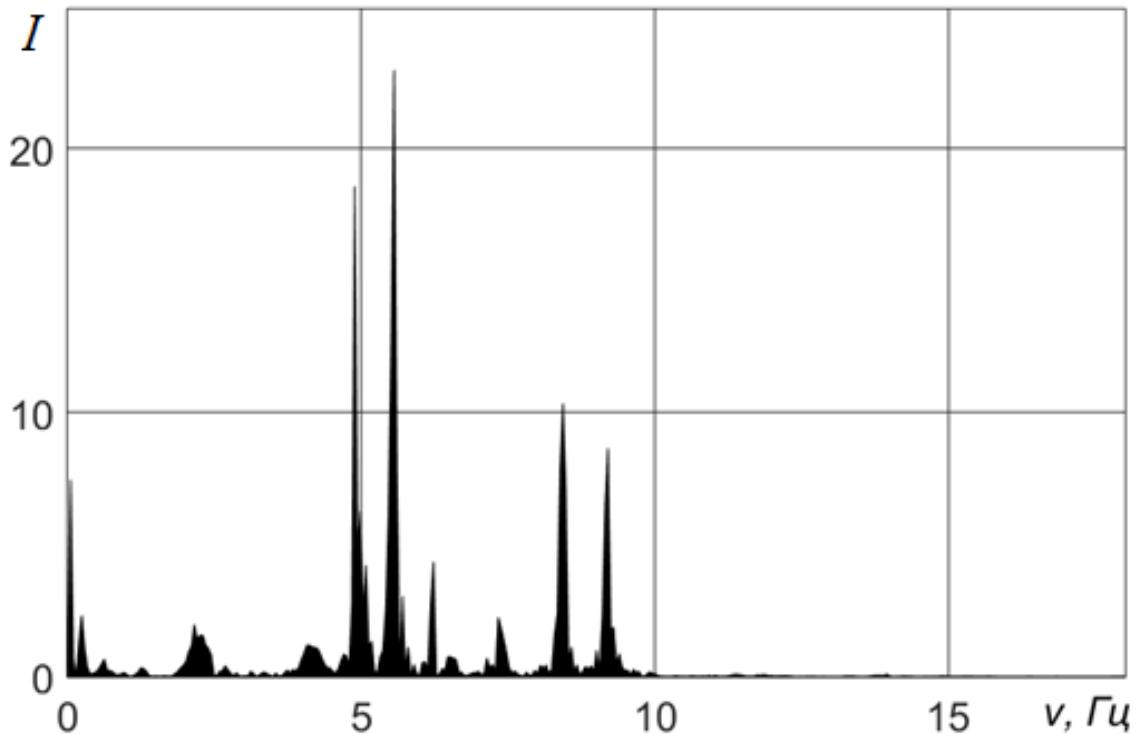


Рис. 4.18. Спектральний аналіз. Випадок маятникового підвісу $l = 1R$

Спектральний аналіз, приведений на Рис. 4.18 є сумішшю частот вихідного сигналу та резонансних частот системи резервуар – рідина, частина піків відповідає зовнішньому навантаженню та характерна для усіх спектральних аналізів, для деяких довжин маятникового підвісу їх прояв є більшим. Відмітимо, що на Рис. 4.18 для маятникового підвісу з діапазону коротких довжин підвісу, характерними піками є резонансні частоти, описані у розділі 3 даної дисертаційної роботи.

Діапазон коротких довжин маятникового підвісу характеризується наявністю достатньо великого числа піків (у порівнянні з іншими діапазонами довжин та поступальним рухом), невеликої інтенсивності. На практиці, конструкції з такою довжиною маятникового підвісу будуть мати тенденцію до виникнення більших значень збурень рідини.

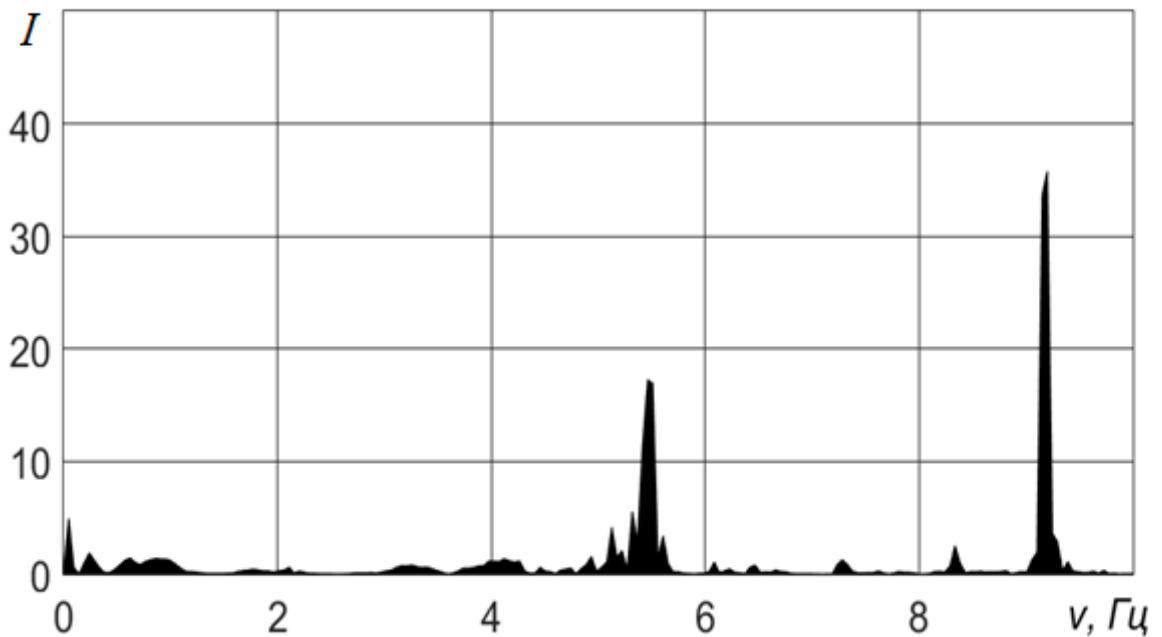


Рис. 4.19. Спектральний аналіз. Випадок маятникового підвісу $l = 8R$.

Маятникові підвіси середньої довжини мають меншу кількість ярко виражених піків, інтенсивність яких є дещо більшою. Так, піки що відповідають частотам форм $m=2$, $m=0$ є одними з найбільш інтенсивних, при цьому прояв резонансу на частоті форми $m=1$ практично відсутній.

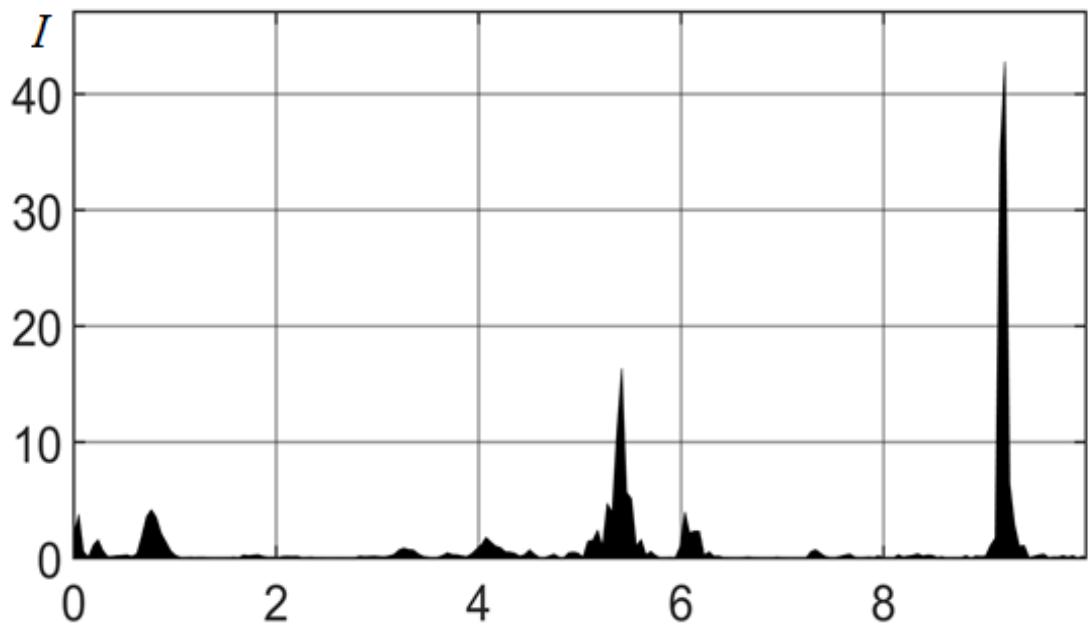


Рис. 4.20. Спектральний аналіз. Випадок маятникового підвісу $l = 14R$.

Подібна картина спостерігається і для довжини підвісу, що відповідає діапазону великих довжин підвісу: кількість піків невелика, їх інтенсивність – середня у порівнянні з іншими випадками.

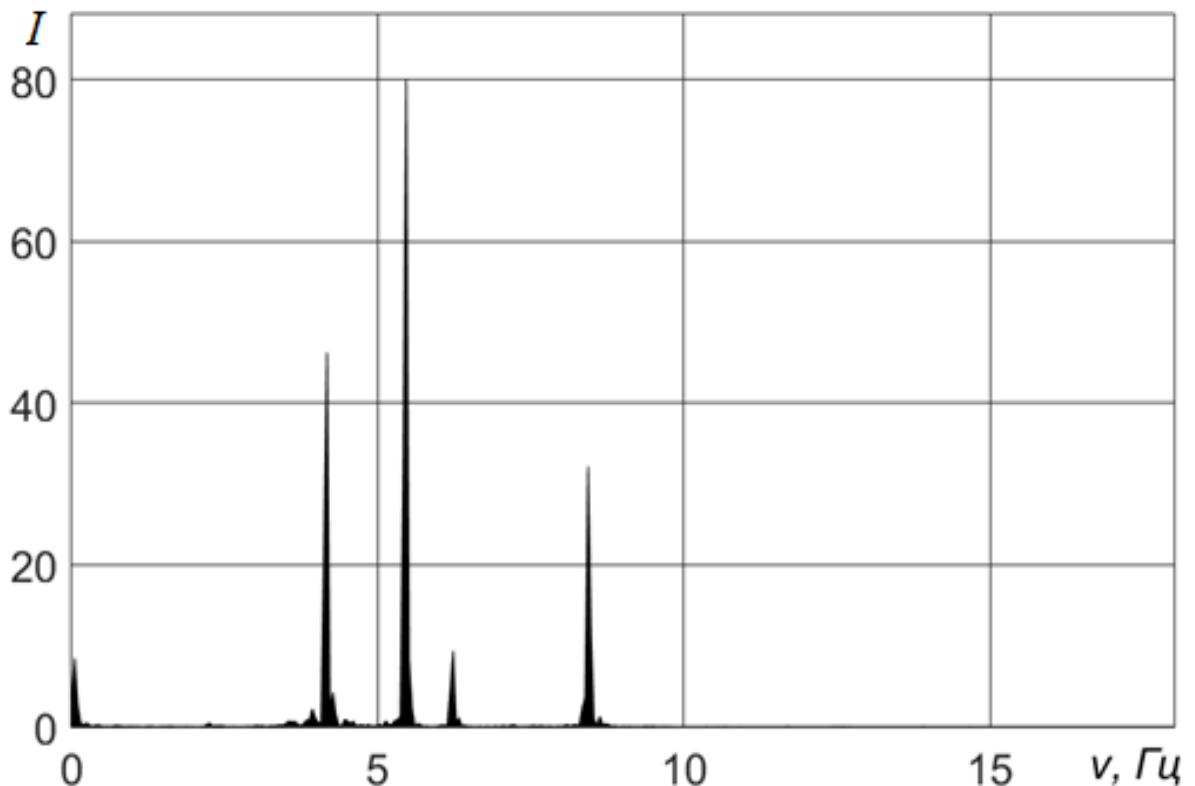


Рис. 4.21. Спектральний аналіз. Випадок жорсткого закріплення резервуару.

Випадок поступального руху характеризується найбільш інтенсивними піками, тобто саме така система є найбільш схильною до виникнення великих збурень при землетрусі, що призводить до виникнення більших навантажень в конструкції.

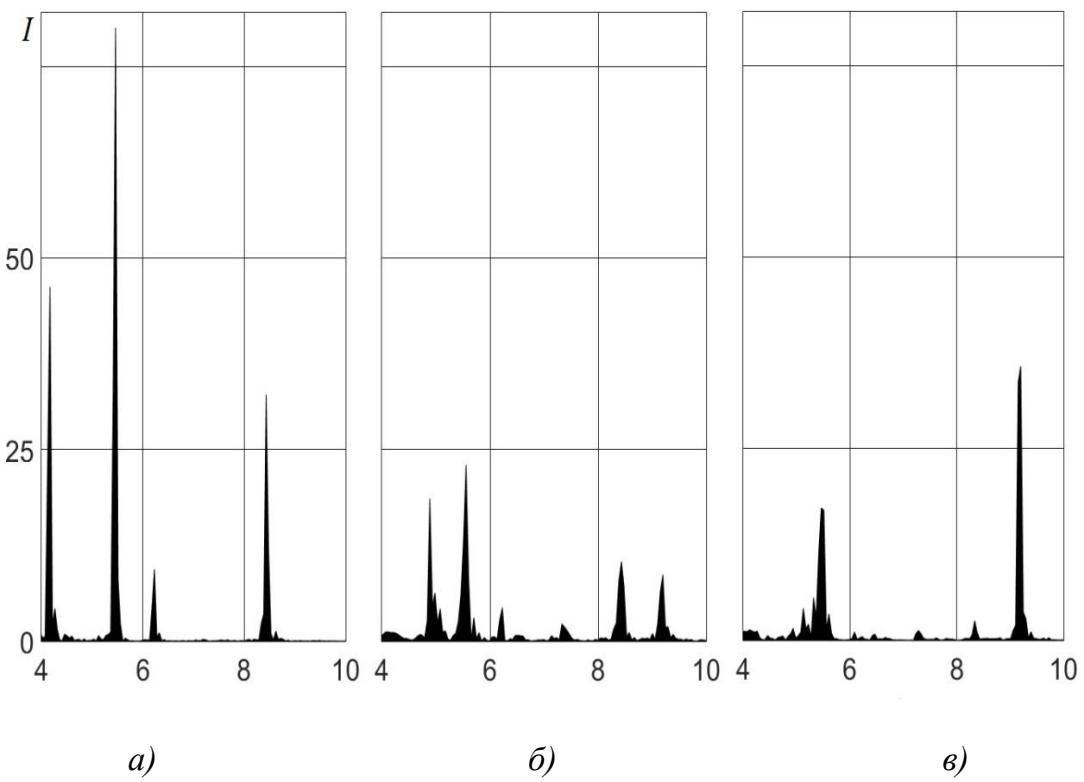


Рис. 4.22. Порівняння спектральних характеристик різних систем: *a)* жорстке закріплення резервуару, *б)* коротких довжин підвісу, *в)* середніх довжин

Для більш наочного порівняння на Рис. 4.22 представлено найбільш важливі зони для *а)* поступального руху, *б)* короткої довжини маятникового підвісу, *в)* середньої довжини. Як бачимо, піки найбільшої інтенсивності відповідають поступальному руху резервуару.

Якщо порівнювати усі діапазони маятникового підвісу та випадок поступального руху, найбільш ефективним з точки зору сейсмо- та віброзахисту є довжини з діапазону середніх маятниковых підвісів. В них рівень збурень, що виникають при землетрусі є найменшим. Використання таких маятниковых підвісів, або закріплення конструкцій на рухомих опорах в ложементах відповідної кривизни, може дозволити зменшити навантаження на важливі з точки зору безпеки системи в енергетичній області, конструкціях збереження в нафто- та газопромисловості.

Висновки до розділу

Таким чином, виконано дослідження ефективності використання маятникового підвісу для систем, до складу яких входять циліндричні резервуари з рідиною. Так, в якості прикладу, було виконано розрахунок як для сейсмоподібних сигналів, так і для випадку, коли рух точки підвісу було задано на основі реальної сейсмограмми.

Виходячи з введеної, в попередніх розділах, умовної класифікації довжин маятникового підвісу, значення довжин яких визначаються зміною розташування (в порядку зростання) частот форм коливань рідини, виконано порівняльний аналіз маятниковых підвісів різної довжини з жорстким закріплением резервуару.

ВИСНОВКИ

- Розроблено нелінійну динамічну модель сумісного руху резервуару з рідиною, орієнтовану на нестационарне збурення руху.
- Проведено тестові розрахунки, досліджено поведінку системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі з різними довжинами при різних частотах кінематичного збурення руху системи.
- Визначено специфіку поведінки системи в до-, біля- та зарезонансних областях для випадку різних довжин підвісу.
- Виявлено, що для коротких довжин закріплення резонансні коливання рідини відбуваються на частоті, що відповідає вторинному (нелінійному) резонансу.
- Виконано розрахунок ряду задач, де в якості руху точки підвісу використовуються реальні параметри землетрусу. Показано, що маятниковий підвіс можна розглядати як засіб зменшення впливу та обґрунтовано метод вибору найбільш сприятливих довжин маятникового підвісу.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Абгарян К.А. Динамика ракет / К.А. Абгарян, И.М. Раппопорт – М.: Машиностроение, 1969. – 379 с.
- [2] Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков – М.: Наука, 1968. – 560 с.
- [3] Ганиев Р.Ф. О колебательных формах движения свободной поверхности жидкости в движущихся полостях / Р.Ф. Ганиев, В.В. Холопова // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1975. – №10. – С.883– 886.
- [4] Ганиев Р.Ф. Нелинейные колебания тела с жидкостью, совершающего движение в пространстве / Р.Ф. Ганиев, В.В. Холопова // Прикл. механика. – 1975. – 11. – №11. – С. 115 – 126.
- [5] Ганиев Р.Ф. О нелинейных резонансных колебаниях тел с жидкостью / Р.Ф. Ганиев // Прикл. механика. – 1977. – 13. - №10. С. 23 – 29.
- [6] Докучаев Л.В. О некоторых решениях уравнений Лапласа и Навье-Стокса, связанных с вращением тела с жидкостью / Л.В. Докучаев // Мат. физика. – 1972. – 11. – С. 20 – 26.
- [7] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. – М.: Наука, – 1988. – 368 с.
- [8] Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа./ Л.В. Канторович, В.И. Крылов – М. –Л.: Физматлит, – 1962. – 708 с.

- [9] Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. Т. 2. / Н.А. Кильчевский—М.:Наука, – 1977. – 543 с.
- [10] Ковальчук Б.П. Нелінійна динаміка рідини з вільною поверхнею в резервуарі, який виконує кутові рухи: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.02.01 / Б.П. Ковальчук – Київ, – 2011. – С. 122.
- [11] Константинов А.В. Динамические приемы гашения колебаний в системе «конструкция – жидкость со свободной поверхностью» / А.В. Константинов, О.С. Лимарченко, В.В. Лукьянчук, А.А. Нефедов // Прикладная механика, – 2018, – том. 55, – № 1, – С. 64–77.
- [12] Крамаренко Ю. Роль фактора сумісності руху рідини з вільною поверхнею при різних способах закріплення резервуару / Ю.А. Крамаренко, О.С. Лимарченко, К.О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки, – 2015, №5, С. 50–53.
- [13] Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д. Кубенко // Киев: Наукова Думка. – 1979. – 183 с.
- [14] Кубенко В.Д. Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, М.П. Подчасов // Доповіді НАН України, серія фіз.-мат. наук. – 2010. – №5. – С. 50–56.
- [15] Лимарченко О.С. Вариационный принцип для нестационарных многокомпонентных континуальных систем / О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1971. – 14, № 10. – С. 28–34.

- [16] Лимарченко О.С. Прямой метод решения нелинейных задач динамики резервуара, несущего жидкость / О.С. Лимарченко // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1978. -№ 11. – С. 999-1002.
- [17] Лимарченко О.С. Исследование задач нелинейной динамики резервуара с жидкостью вариационным методом / О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 1. – С. 99–105.
- [18] Лимарченко О.С. Применение вариационного метода решения нелинейных задач динамики совместных движений резервуара с жидкостью / О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1983. – 19, № 11. – С. 100–104.
- [19] Лимарченко О.С. Исследование пространственного волнообразования жидкости при импульсном возбуждении резервуара с жидкостью / О.С. Лимарченко // Кавитационные колебания и динамика двухфазных систем. – Киев: Наук. думка, – 1985. – С. 118–124.
- [20] Лимарченко О.С. Исследование влияния движения жидкости со свободной поверхностью на угловые движения несущего тела / О.С. Лимарченко // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Институт математики АН УССР, – 1986. – С. 19–26.
- [21] Лимарченко О.С. Исследование переходных режимов вращательного движения резервуара с жидкостью со свободной поверхностью / О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1987. – 23, № 11. – С. 98–105.
- [22] Лимарченко О.С. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения / О.С. Лимарченко // Математическое моделирование динамических процессов в

системах тел с жидкостью. – Киев: Институт математики АН УССР, – 1988. – С. 44–54.

- [23] Лимарченко О.С. Численное исследование переходного режима вращения вязкой жидкости со свободной поверхностью в цилиндрическом баке / О.С. Лимарченко, И.И. Пахомов // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. Киев. Ин-т математики АН УССР. – 1992. – С. 34-42.
- [24] Лимарченко О.С. Нелинейные модели в прикладных задачах динамики тел с жидкостью со свободной поверхностью / О.С. Лимарченко, И.А. Луковский, А.Н. Тимоха // Прикладная механика. – 1992. – 28, № 11. – С. 108–109.
- [25] Лимарченко О.С. Моделирование нестационарного движения осесимметричного бака с жидкостью / О.С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1994. – 30, № 5. – С. 63–68.
- [26] Лимарченко О.С. Нестационарное вращение цилиндрического резервуара, частично заполненного вязкой жидкостью / О.С. Лимарченко // Прикл. механика. – 1995. – 31. - №5. – С. 88-95.
- [27] Лимарченко О.С. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью / О.С. Лимарченко, В.В. Ясинский //– Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», – 1997, 338с.
- [28] Лимарченко О.С. Динамика вращающихся конструкций с жидкостью / О.С. Лимарченко, Дж. Матараццо, В.В. Ясинский // Киев: «Гнозис», – 2002. – 304 с.

- [29] Лимарченко О.С. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / О.С. Лимарченко, К.О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки, Випуск №2, – 2013, – С. 67–70.
- [30] Лимарченко О.С. Динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром при угловых колебаниях / О.С. Лимарченко, К.А. Семенович // «Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування», збірник праць Інституту математики НАН України, – 2013, т. 10, № 4–5, – С. 520–525.
- [31] Лимарченко О.С. Перерозподіл енергії між резервуаром і рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи / О.С. Лимарченко, К.О. Семенович // Нелінійні коливання, Інститут математики НАН України. – 2016. – Т. 19, №1. – С. 85 – 92.
- [32] Лимарченко О.С. Особливості руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішньої гармонічної сили / О.С. Лимарченко, К.О. Семенович// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Випуск 20, – 2014, С. 140–146.
- [33] Лимарченко О.С. Поведінка конструкцій з рідиною на маятниковому підвісі при сейсмічному збуренні руху / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов// Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2017, – т. 14, – №2, – С. 56–64.
- [34] Лимарченко О.С. Вплив частотних характеристик збурення руху конструкцій з рідиною на розвиток динамічних процесів / О.С. Лимарченко, О.О. Нефьодов //

Збірник праць Інституту математики НАН України, – 2018, – т.15, №2, – С. 47–55.

- [35] Лимарченко О.С. Коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному резервуарі на маятниковому підвісі у разі багаточастотного руху точки підвісу / О.С. Лимарченко, О.О. Неф'ядов // Information systems. Mechanics and Control, – 2018, – № 19, – Р. 42–48.
- [36] Луковский И.А. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики ограниченного объема жидкости, совершающего заданное движение в пространстве / И.А. Луковский // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 2. – С. 102–108.
- [37] Луковский И.А. Приближенный метод решения нелинейных задач динамики жидкости в сосуде, совершающего заданное движение / И.А. Луковский // Прикладная механика. – 1981. – 17, № 2. – С. 89–90.
- [38] Луковский И.А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И.А. Луковский, М.Я.Барняк, А.Н. Комаренко – Киев: Наукова думка, – 1984. – 232 с.
- [39] Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И.А. Луковский – Киев: Наук. думка, – 1990. – 295 с.
- [40] Луковский И.А. Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости/ И.А. Луковский, А.Н. Тимоха – Киев: Институт математики НАН Украины, – 1995. – 400 с.

- [41] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел. с жидкостью // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 10. – С. 37–77.
- [42] Луковський І.О. Вимушені коливання в'язкої рідини в циліндричній порожнині яка здійснює кутові переміщення / Луковський І.О., Пилькевич А.М. // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. Зб. статей. – Київ: Ін-т математики НАН України, – 2009. – С. 102 – 117. – (Збірник праць Інституту математики НАН України. Т. 6, №3).
- [43] Луковський І.О. Тензорне формулювання нелінійної крайової задачі про коливання ідеальної рідини в нахилених циліндричних резервуарах. // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. статей. – Київ: Ін-т математики НАН України, – 2013. – С. 71–87. (Збірник праць Інституту математики НАН України. Т. 10, №3).
- [44] Луковський І.О. Тензорне формулювання крайових задач нелінійної теорії коливань рідини в нахилених циліндричних резервуарах // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: Зб. статей. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, – 2014. – С. 71 – 87.
- [45] Мишиев Г.Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г.Н. Мишиев, Б.И. Рабинович – М: Машиностроение, 1968. – 532 с.
- [46] Мишиев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. / Г.Н. Мишиев – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.

- [47] Моисеев Н.Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью / Н.Н. Моисеев // Доклады АН СССР. – 1952. – 85. №4. – С. 719 – 722.
- [48] Моисеев Н.Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев – М.: Наука, 1965. – 440с.
- [49] Моисеев Н.Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости / Н.Н. Моисеев // Прикладная математика и механика. – 1958. – 22, № 5. – С. 612–621.
- [50] Нариманов Г.С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью / Г.С. Нариманов // Прикл. мат. и мех. – 1956. – 20. -№1. – С. 21-38.
- [51] Нариманов Г.С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях / Г.С. Нариманов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 10. – С. 71–74.
- [52] Нариманов Г.С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г.С. Нариманов, Л.В. Докучаев, И.А. Луковский – М.: Машиностроени, 1977. – 208с.
- [53] Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86) // Госатомэнергонадзор СССР. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525с. – (Правила и нормы в атомной энергетике).
- [54] Охочимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Д.Е. Охочимский // Прикл. мат. и мех. – 1956. – 20. - №1. – С.3–20.

- [55] Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет–носителей космических аппаратов/ Б.И. Рабинович – М: Машиностроение, 1975. – 416 с.
- [56] Румянцев В.В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред / В.В. Румянцев // Прикл. мат. и мех. – 1973. – 37. -№6. – С. 963 – 973.
- [57] Семенович К. О. Внутрішній резонанс в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі / К.О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки, 2015, №5, С. 50–53.
- [58] Семенович К.О. Нелінійні механізми перерозподілу енергії в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі / К.О. Семенович //Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, дисертація (на правах рукопису), 2016, С. 119.
- [59] Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers / Abramson H.N. // NASA SP-106, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, 1966.
- [60] Akinori Hashima, Okaya. Coseismic deformation due to the 2011 Tohoku-oki earthquake: influence of 3-D elastic structure around Japan / Hashima Akinori, Thorsten W. Becker, Andrew M. Freed, Hiroshi Sato, David A. // Earth, Planets and Space, 2016, – P.68-159.
- [61] Bauer H.F. Oscillations of non-viscous liquid in various container geometries / H.F. Bauer // Forschungbericht LRT-WE-9-FB-1. – 1999.

- [62] Faltinsen O.M. A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow / O.M. Faltinsen // Journal of Ship Research, 22 (03), – 1978. – P. 193–202.
- [63] Faltinsen O.M Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth / O.M. Faltinsen, O.F. Rognebakke, I.A. Lukovsky, A.N. Timokha // Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. 2000, Vol. 407, P. 201–234.
- [64] Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications / Ibrahim R.A. – Cambridge University Press. – 2005, P. 948.
- [65] Ibrahim R.A. Recent advances in liquid sloshing dynamics / R.A. Ibrahim, V.N. Pilipchuk, T.Ikeda // Applied Mechanics Reviews – 2001. – Vol. 54. – №2, P. 133–199.
- [66] Konstantinov A.V. Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko, V.N. Mel`nik, I.Yu. Semenova // International applied mechanics. – 2017. – 53, N 1. – P. 59–66.
- [67] Konstantinov A.V. Effect of the Viscosity and Capillarity of Fluid on the Nonlinear Dynamics of a Tank Partially Filled with a Fluid / A.V. Konstantinov, O.S. Limarchenko // International applied mechanics. – 2017. – 53, N 2. – P. 130–138.
- [68] Kubenko V.D. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances / V.D. Kubenko, P.S. Koval`chuk // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 353 – 364.

- [69] Kubenko V.D. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) / V.D. Kubenko, P.S. Koval`chuk // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 12 – 63.
- [70] Kubenko V.D. Nonlinear Vibrations of Fluid-Filled Cylindrical Shells with Initial Imperfections / V.D. Kubenko, P.S. Koval`chuk // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 121–129.
- [71] IAEA Safety Standards. Seismic hazard in Site evaluation for nuclear installations // Vienna, IAEA, 2003. – 60 p.
- [72] IAEA Safety guide. Seismic Design and Qualification for Nuclear Power Plants // Vienna, IAEA, 2008. – 67 p.
- [73] La Rocca, M. On the analysis of sloshing of water in rectangular containers: numerical study and experimental validation / M. La Rocca, V. Armenio // Ocean Eng. Vol. 23, No. 8. – 1996. P. 705–739.
- [74] La Rocca M. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container / M. La Rocca, G. Sciortino, M. Boniforti // Fluid Dynamics Research, –2000, – P. 23–52.
- [75] La Rocca, M. Variational approach to the problem of sloshing / M. La Rocca, P. Mele, V. Armenio // Journal of Theoretical and Applied Fluid Mechanics, Vol. 1. – 1997. – no. 4. – P. 280–310.
- [76] Limarchenko, O. Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid / O. Limarchenko, G. Matarazzo , V. Yasinsky. – Kyiv. – 2003, –P. 286.

- [77] Limarchenko O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 2, – P. 178–183.
- [78] Limarchenko O. Peculiarities of dynamics of the reservoir with a free surfaced liquid on pendulum suspension with the moving suspension point / O. Limarchenko, A. Nefedov // Mathematical modeling and computing, – 2018, – Vol. 5, – No. 1, – P. 41–47.
- [79] Lukovsky I.A. Multimodal method in sloshing / Lukovsky I.A., Tymokha A.N // Nonlinear Oscillations, Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine – 2015. – Vol. 18. – №3 – P. 295–312.
- [80] Lukovsky I., Combining Narimanov-Moiseev' and Lukovsky-Miles' schemes for nonlinear liquid sloshing / Lukovsky I., Timokha A. – J. Numer. Appl. Math., 2011. – 105. № 2. – P. 69–82.
- [81] London K., A fully coupled multi-rigid-body fuel slosh dynamics model applied to the Triana stack / K. London // Flight Mechanics Symposium, Nasa Goddard Space Flight Center, June 19-21, 2001. – P. 334–346.
- [82] Malhotra P.K. Simple procedure for seismic analysis of liquid Storage tanks. / P.K. Malhotra, T. Wenk, M. Wieland // Structural Engineering International, 2000, 3, – P. 197–201.
- [83] Malhotra P.K. Seismic Sloshing in a Horizontal Liquid Storage Tank / P.K. Malhotra, P. Nimse, M. Meeking, Structural Engineering International, 2014, 4, – P. 466–473.

- [84] Miles, J.W., Free Surface Oscillations in a Rotating Liquid / J.W. Miles // Physics of Fluids, 1959, 2, – P. 297–305.
- [85] Miles, J.W. 1961, Surface Oscillations of a Rotating Liquid / J.W. Miles, B. Troesch // ASME J. Applied Mechanics, 28, – P. 491–496.
- [86] Miles, J.W., Surface waves damping in closed basins / J.W. Miles // Proc. Royal Soc. (London) A. Math. Phys. 297, 1967, – P. 459–475.
- [87] Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins/ J.W. Miles // Journal of Fluid Mechanics – 1976, 75, P. 419–448.
- [88] Miles J.W. A note on interior vs boundary layer damping of surface waves in a circular cylinder / J.W. Miles, D.M. Henderson // J. Fluid Mech. – 1998, 364, P. 319–323.
- [89] Suyash Nerkar. Seismic behavior of elevated storage reservoir by finite element method / Suyash Nerkar, Chittaranjan Nayak // international Journal of Advanced Technology in Engineering and Science. – Vol. №4, Special Issue. – March 2016. – P. 311–320.
- [90] Onorato M. Route to thermalization in the α -Fermi–Pasta–Ulam system / M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, V. Lvov// PNAS. – 2015. – 112, N 14. – P. 4208–4213
- [91] Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal// Int. J. of Recent Trends in Engineering. – 2009. – 1, N 6. – P. 1 – 5

- [92] Syed Shafahaduddin Quadri Seismic Behavior of RC elevated Water Tank under the Impact of Liquid Sloshing / Syed Shafahaduddin Quadri, R.M. Sawant, // Recent Trends in Civil Engineering&Technology, Volume 7, Issue 3. – 2017. – P.21–30
- [93] Raynovskyy I. Resonant steady-state sloshing in upright tanks performing a three-dimensional periodic motion / I. Raynovskyy, A. Timokha // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics & Mathematics, 2017, P. 10.
- [94] Raynovskyy I. Steady-State Resonant Sloshing in an Upright Cylindrical Container Performing a Circular Orbital Motion. / I. Raynovskyy, A. Timokha // Mathematical problems in engineering, vol. 2018, - 2018. – P. 1–8.
- [95] Shaoa W. Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions /W. Shaoa, J. Yang, Z. Hu, L. Tao // Applied Ocean Research. – 2015. – 47. – P. 85–97
- [96] Zhang C. Fully nonlinear analysis of second-order sloshing resonance in a three-dimensional tank / C. Zhang, Y. Li, Q. Meng // Computers & Fluids. – 2015. – 116. – P. 88 – 104.
- [97] www.strongmotioncenter.org
- [98] <https://ds.iris.edu/ds/nodes/dmc/specialevents/2011/03/11/tohoku-japan-earthquake/>