

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЮРЧУК ВАСИЛЬ МИКОЛАЙОВИЧ



УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

**СЦЕНАРІЙ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ РІЗНИХ ПОЧАТКОВИХ ПРОФІЛІВ
В МАТЕРІАЛАХ, ЯКІ ДЕФОРМУЮТЬСЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНО**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

F1 – прикладна математика

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

науковий консультант:

РУЩИЦЬКИЙ ЯРЕМА ЯРОСЛАВОВИЧ

завідувач відділу реології

Інституту механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка
член-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор

АНОТАЦІЯ

Юрчук В.М. Сценарії поширення хвиль різних початкових профілів в матеріалах, які деформуються нелінійно пружно. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізики – математичних наук за спеціальністю 01.02.04. Механіка деформівного твердого тіла. - Інститут механіки НАН України ім. С.П.Тимошенка, Київ, 2024.

У дисертації досліджено поширення плоских і циліндричних хвиль в конструкційних матеріалах, що деформуються пружно нелінійно, і сейсмічних хвиль в ґрутових шарах, що деформуються вязкопружно, виявляючи нелінійність при деформуванні. Хвилі в матеріалах вважаються поодинокими різного початкового профіля за винятком крутільних хвиль, профіль яких описується гармонічною (періодичною) функцією. Хвилі в ґрунтах вважаються сейсмічними (в цих хвілях частоти є малими). Вивчаються лише нелінійні поздовжні плоскі хвилі. З нелінійних циліндричних хвиль вибрано два типи – циліндричні радіальні і крутільні.

Поодинокі пружні хвилі досліджуються як один із типів простих хвиль з профілями, спостережуваними в механічних експериментах з матеріалами. Сейсмічні хвилі в роботі вивчаються в рамках теорії сейсмічних хвиль в реологічних середовищах.

Аналіз нелінійних хвиль у сучасній науці перебуває в активній стадії. Про це свідчить приклад бібліографічного огляду щодо поодиноких хвиль, виконаного в базі даних Google у квітні 2024 року. В цьому огляді поміщено 18 публікацій в провідних світових журналах з механіки, виданих протягом останніх 10 років (далі вказані лише номер публікації у загальному списку використаних джерел, автори і рік публікації): [77] Çelik N., Seadawy Aly R., & Sağlam Özkan Y., Yaşar E. 2021, [84] Defaz I., Epstein M., Federico S. 2021, [85] Deliktas-Ozdemir E., Ahmetolan S., Tuna D. 2022, [89] Ekin D. 2021, [90] Erheng W., Mohith M., Amnaya P. A., Raj Kumar P., Philippe H. G., John L. 2014, [95] Gao T., Wang Z., Vanden-Broeck J.-M. 2016, [108] Liu, Z. Zhang, J.

2019, [116] Nanta Kumar, U., Choy Y. Y. 2021, [120] Požar, T., Laloš, J., Babník, A. 2018, [121] Rao, C., Zhang, Y. 2017, [139] Samsonov A. M., Dreiden G. V., Semenova, I. V., Shvartz A. G. 2015, [140] Selezov, I. T. 2019, [145] Stewart A. 2016, [148] Tranter M.R. 2019, [149] Trichtchenko O., Părău EI., Vanden-Broeck JM., Milewski P. 2018, [157] Zhan Wang, Emilian I Părău , Paul A Milewski , Jean-Marc Vanden-Broeck 2014, [158] Zhi-Guo Liu, Yue-Sheng Wang, and Guoliang Huang 2019, [159] Ziv R., Shmuel G. 2020.

Тому розвиток теоретичних і комп'ютерних (числових) підходів до вивчення поодиноких нелінійних хвиль можна вважати актуальним з точки зору розвитку як теорії хвиль, так і механіки матеріалів.

Знання закономірностей розповсюдження поодиноких хвиль і сценаріїв еволюції таких хвиль використовуються при інтерпретації експериментів з динаміки матеріалів і елементів конструкцій, при інженерних розрахунках конструкцій, на які діють імпульси різного типу. Знання параметрів сейсмічних хвиль в різних типах ґрунтів є важливим при оцінці сейсмічної небезпеки внаслідок дії землетрусів та вибухів різної природи.

В дисертації вивчаються хвилі з заданим початковим поодиноким профілем, який далі еволюціонує з часом поширення хвилі.

В даній дисертаційній роботі основну увагу приділено впливу нелінійності деформування на еволюцію параметрів хвиль (початкового профіля). При цьому розвинуто якісно інші та складніші підходи розв'язування нелінійних хвильових рівнянь для різних типів хвиль та різних середовищ.

В дисертаційній роботі порівняно еволюцію початкового профіля хвиль при різних рівнях наближень (першого, перших двох і трьох наближень) розв'язку нелінійного хвильового рівняння. Вивчено вплив нелінійності деформування матеріалу на поширення хвиль а також вплив параметрів, заданих при постановці задачі, на характер еволюції початкового профілю та інших характеристик хвиль.

При вивченні сейсмічних хвиль запропоновано опис деформування ґрутових шарів стандартною три-константною реологічною моделлю, тео-

ретично проаналізовано поширення хвиль в ґрутових шарах і вперше в теорії сейсмічних хвиль застосовано метод визначення параметрів (констант) реологічної моделі з експерименту на повзучість конкретного ґрутового шару. Визначені реологічні параметри використано для побудови сценаріїв еволюції швидкості двох варіантів зсуви гармонічної сейсмічної хвилі і її амплітуди для трьох досліджених типів ґрунтів при зміні частоти хвилі.

Усі хвилі, за винятком сейсмічної хвилі, вивчаються із застосуванням однієї з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності - п'яти-константної моделі Мернагана. Ця модель допускає різні варіанти нелінійного хвильового рівняння. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння включає лише квадратичну нелінійність. В даній дисертаційній роботі нелінійність моделей основана на врахуванні квадратичної та кубічної нелінійностей, що трактується як одиг з елементів новизни досліджень.

Взагалі кажучи, аналіз всіх розглянутих в роботі хвиль містить елементи новизни в різних його компонентах.

Для поздовжньої гармонічної хвилі розглянуті нелінійні хвильові рівняння, які аналізуються методом послідовних наближень та методом обмеження на градієнт зміщення. Розглянуті методи дали можливість порівняти різні підходи до побудови наближених розв'язків, у яких враховано перші три наближення.

При аналізі циліндричних радіальних поодиноких хвиль застосовано метод обмеження на градієнт зміщення та отримано рівняння для знаходження перших двох та трьох наближень з метою їх теоретичного і чисельного порівняння.

При вивченні крутальної хвилі запропоновано узагальнений метод обмеження на змінну швидкість для перших двох наближень. Оскільки у цьому випадку нелінійне хвильове рівняння є новим, то це демонструє застосовність методу для більш широкого класу хвильових задач.

При аналізі гармонічної сейсмічної хвилі, яка поширюється в ґрутових шарах вперше застосовано прямий метод при побудові наближеного роз-

в'язку хвилі.

Чисельний аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур алгоритмів комп'ютерної алгебри. Це дозволило проаналізувати чисельно вплив різних порядків нелінійностей для поздовжніх, циліндричних та крутільних хвиль, а також визначити реологічні параметри з метою побудови сценаріїв еволюції (поступової зміни).

Досліджені в роботі різні типи початкового профіля поодинокої хвилі спостерігаються в експериментах щодо профілів хвиль в матеріалах. У той же час, ці профілі описуються аналітично відомими з математичної фізики функціями - у вигляді косинусоїдальної функції (гармонічно симетричний профіль), функції Гаусса (дзвіноподібний симетричний профіль), Уіттекера, Макдональда та Фрідлян더라 (всі три профілі несиметричні).

Зокрема, профіль Фрідлянdera широко застосовується у фізичній теорії вибуху (перш за все, атомного вибуху), який досліжується вже майже сто років і ці дослідження продовжуються до нашого часу.

Показано, що вплив нелінійності в теоретичних представленнях другого та третього наближень на поширення поздовжніх поодиноких хвиль з початковим гармонічним профілем (у вигляді косинусоїдальної функції), дзвіноподібним профілем (у вигляді функції Гаусса) та профілем у вигляді функції Уіттекера є суттєвим.

Також показано, що вплив нелінійності при врахуванні перших трьох наближень суттєво відрізняється від впливу нелінійності при врахуванні перших двох наближень при різних підходах до розв'язання. У деяких випадках вибору початкових параметрів задачі, суттєвої різниці при використанні методу обмеження на градієнт зміщення, для перших двох та трьох наближень не спостерігається. (профілі у вигляді функцій Гаусса та Уіттекера).

Також спостережено, що симетричний профіль хвилі у вигляді функції Гаусса спотворюється симетрично, тоді як несиметричний профіль у вигляді функції Уіттекера деформується несиметрично.

Розглянуто поширення циліндричної радіальної хвилі з початковими

профілями у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндра, які мають схожі початкові профілі при певних параметрах, а також розглянуто аналогічну задачу для таких параметрів, де початкові профілі різні. Зроблено порівняльний аналіз, як для подібних профілів, так для профілів, які зовсім різні. Розглянуто поширення хвиль, для розв'язків з двома наближеннями та розв'язків з трьома наближеннями за методом обмеження на градієнт зміщення. Показано, що обидва несиметричні поодинокі профілі еволюціонують майже однаково і вплив третього наближення не є суттєвим.

Велику увагу приділено задачі про поширення крутільної хвилі. Тут детально описана нова постановка нелінійної задачі. Як уже зазначалося раніше, для наближеного аналізу найпростішого варіанту нелінійного хвильового рівняння запропоновано новий метод, який узагальнює метод обмеження на градієнт зміщення. При реалізації методу отримана достатньо проста формула для знаходження перших двох наближень, яка зручна при комп’ютерному аналізі еволюції хвилі. Показано існування змінного спотворення хвилі у радіальному напрямку і постійного у осьовому, що описує поширення крутільних хвиль всередині кругового циліндра та вздовж його осі симетрії. Досліджено, що існує суттєвий вплив зміни величини радіуса циліндра на розподіл амплітуд крутільної хвилі всередині циліндра. Спостережено зміну знаку амплітуди та збільшення кількості максимумів кривої розподілу амплітуд. Приведені в роботі сценарії розподілу амплітуд хвилі від центру до поверхні циліндра (всередині циліндра) при поширенні нелінійно пружної крутільної хвилі засвідчили, що в аналізі цих хвиль багато прогалин і такий аналіз є актуальним.

Докладно викладено новий підхід до задачі про поширення сейсмічної зсувної хвилі. При аналізі цієї задачі отримано сценарії трансформації гармонічної хвилі в експоненціально затухаючу гармонічну за доволі короткий час поширення при характерних для сейсмічних хвиль дуже низьких частотах. Побудовані сценарії еволюції швидкості хвилі та амплітуди затухання хвилі.

Отже, проведений теоретичний і числовий аналіз розглянутих у роботі нелінійних хвиль дозволив виявити ряд нових нелінійних хвильових ефектів. У суккупності, проведені дослідження є новими і заповнюють певний фрагмент теорії нелінійних хвиль в матеріалах.

Достовірність даної роботи забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль, класичного підходу до аналізу плоских поздовжніх, циліндричних радіальних і крутильних та сейсмічних хвиль, застосуванням апробованих методів наближеного аналізу розв'язків нелінійних хвильових рівнянь, використанням графічних алгоритмів комп'ютерної алгебри, узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль і відповідністю міркуванням фізичного характеру.

Одержані теоретичні і числові результати дали можливість побудувати сценарії поширення хвиль в матеріалах, що описуються нелінійними моделями пружного і вязкопружного деформування, кращого розуміння впливу кількості наблизень при розв'язуванні хвильової задачі на сценарії поширення різних типів хвиль.

Наукові результати дисертації отримані автором самостійно. Дисертацію належать постановки задач, проведення аналітичних викладок, чисрова і графічна реалізація в системі символічних обчислень алгоритмів комп'ютерної алгебри. Визначення загального напрямку досліджень, допомога при аналізі отриманих результатів належать науковому консультанту член.-кор. НАНУ Рушицькому Я.Я.

Ключові слова: еволюція початкового профіля хвилі, нелінійна модель пружного і вязкопружного деформування матеріалу, пятиконстантний потенціал Мернагана, триконстантна стандартна модель вязкопружності, пружна поодинока хвиля, плоска поздовжна хвиля, циліндрична радіальна хвиля, крутильна хвиля, квадратична і кубічна нелінійності, метод послідовних наблизень, метод обмеження на градієнт зміщення, нелінійні хвильові ефекти.

ANNOTATION

Yurchuk V.M. Scenarios of propagation of waves of different initial profiles in materials that deform nonlinearly elastically. – Qualification scientific work in the form of a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.02.04. Mechanics of a deformable solid. - S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation investigates the propagation of plane and cylindrical waves in structural materials that deform elastically nonlinearly, and seismic waves in soil layers that deform viscoelastically, exhibiting nonlinearity during deformation. Waves in materials are considered single with different initial profiles, with the exception of torsional waves, the profile of which is described by a harmonic (periodic) function. Waves in soils are considered seismic (the frequencies in these waves are small). Only nonlinear longitudinal plane waves are studied. Of the nonlinear cylindrical waves, two types are selected - cylindrical radial and torsional.

Single elastic waves are studied as one of the types of simple waves with profiles observed in mechanical experiments with materials. Seismic waves in the work are studied within the framework of the theory of seismic waves in rheological media.

The analysis of nonlinear waves in modern science is in an active stage. This is evidenced by the example of a bibliographic review of single waves performed in the Google database in April 2024. This review includes 18 publications in the world's leading journals in mechanics published over the past 10 years (hereinafter only the publication number in the general list of sources used, authors and year of publication are given): [77] Celik N., Seadawy Aly R., & Sağlam Özkan Y., Yaşar E. 2021, [84] Defaz I., Epstein M., Federico S. 2021, [85] Deliktas-Ozdemir E., Ahmetolan S., Tuna D. 2022, [89] Ekin D. 2021, [90] Erheng W., Mohith M., Amnaya P. A., Raj Kumar P., Philippe H. G., John L. 2014, [95] Gao T., Wang Z., Vanden-Broeck J.-M. 2016, [108] Liu, Z. Zhang, J. 2019, [116] Nanta Kumar, U.,

Choy Y. Y. 2021, [120] Požar, T., Laloš, J., Babník, A. 2018, [121] Rao, C., Zhang, Y. 2017, [139] Samsonov A. M., Dreiden G. V., Semenova, I. V., Shvartz A. G. 2015, [140] Selezov, I. T. 2019, [145] Stewart A. 2016, [148] Tranter M.R. 2019, [149] Trichtchenko O., Părău EI., Vanden-Broeck JM., Milewski P. 2018, [157] Zhan Wang, Emilian I Părău , Paul A Milewski , Jean-Marc Vanden-Broeck 2014, [158] Zhi-Guo Liu, Yue-Sheng Wang, and Guoliang Huang 2019, [159] Ziv R., Shmuel G. 2020.

Therefore, the development of theoretical and computational (numerical) approaches to the study of single nonlinear waves can be considered relevant from the point of view of the development of both wave theory and mechanics of materials.

Knowledge of the laws of propagation of single waves and scenarios of the evolution of such waves is used in the interpretation of experiments on the dynamics of materials and structural elements, in engineering calculations of structures subjected to impulses of various types. Knowledge of the parameters of seismic waves in different types of soils is important in assessing seismic danger due to earthquakes and explosions of various nature.

The dissertation studies waves with a given initial single profile, which further evolves with the time of wave propagation.

In this dissertation, the main attention is paid to the influence of nonlinear deformation on the evolution of wave parameters (initial profile). At the same time, qualitatively different and more complex approaches to solving nonlinear wave equations for different types of waves and different environments have been developed.

The dissertation compares the evolution of the initial wave profile at different levels of approximation (first, first two and three approximations) of the solution of the nonlinear wave equation. The influence of nonlinearity of material deformation on wave propagation was studied, as well as the influence of parameters specified in the problem formulation on the nature of the evolution of the initial profile and other wave characteristics.

When studying seismic waves, a description of the deformation of soil layers by a standard three-constant rheological model was proposed, the propagation of waves in soil layers was theoretically analyzed, and for the first time in the theory of seismic waves, a method of determining the parameters (constants) of the rheological model from an experiment on the creep of a specific soil layer was applied. The determined rheological parameters were used to construct scenarios of the evolution of the velocity of two variants of the shear harmonic seismic wave and its amplitude for the three studied types of soils when the wave frequency changed.

All waves, except for the seismic wave, are studied using one of the most developed models of nonlinear elasticity theory - the five-constant Murnaghan model. This model allows for various variants of the nonlinear wave equation. The simplest variant of the nonlinear wave equation includes only quadratic nonlinearity. In this dissertation work, the nonlinearity of the models is based on taking into account quadratic and cubic nonlinearities, which is interpreted as one of the elements of novelty of the research.

Generally speaking, the analysis of all waves considered in the work contains elements of novelty in its various components.

For a longitudinal harmonic wave, nonlinear wave equations are considered, which are analyzed by the method of successive approximations and the method of restriction to the displacement gradient. The considered methods made it possible to compare different approaches to constructing approximate solutions, in which the first three approximations are taken into account.

In the analysis of cylindrical radial solitary waves, the method of displacement gradient constraint was applied and equations were obtained for finding the first two and three approximations for the purpose of their theoretical and numerical comparison.

In the study of torsional waves, a generalized method of variable velocity constraint for the first two approximations was proposed. Since in this case the nonlinear wave equation is new, this demonstrates the applicability of the method to a wider class of wave problems.

In the analysis of a harmonic seismic wave propagating in soil layers, the direct method was first used to construct an approximate solution of the wave.

Numerical analysis of the evolution of the initial wave profile was performed using computer algebra algorithm procedures. This allowed us to numerically analyze the influence of different orders of nonlinearities for longitudinal, cylindrical and torsional waves, as well as to determine rheological parameters in order to construct evolution scenarios (gradual change).

The various types of initial profile of a solitary wave studied in the work are observed in experiments on wave profiles in materials. At the same time, these profiles are described analytically by functions known from mathematical physics - in the form of a cosine function (harmonically symmetric profile), Gaussian functions (bell-shaped symmetric profile), Whittaker, McDonald and Friedlander (all three profiles are asymmetric).

In particular, the Friedlander profile is widely used in the physical theory of explosions (primarily atomic explosions), which has been studied for almost a hundred years and these studies continue to this day.

It is shown that the influence of nonlinearity in the theoretical representations of the second and third approximations on the propagation of longitudinal solitary waves with an initial harmonic profile (in the form of a cosine function), a bell-shaped profile (in the form of a Gaussian function) and a profile in the form of a Whittaker function is significant.

It is also shown that the influence of nonlinearity when taking into account the first three approximations is significantly different from the influence of nonlinearity when taking into account the first two approximations with different approaches to the solution. In some cases of choosing the initial parameters of the problem, a significant difference when using the method of restriction on the displacement gradient is not observed for the first two and three approximations. (profiles in the form of Gaussian and Whittaker functions).

It is also observed that the symmetric wave profile in the form of a Gaussian function is deformed symmetrically, while the asymmetric profile in the form of a

Whittaker function is deformed asymmetrically.

The propagation of a cylindrical radial wave with initial profiles in the form of McDonald and Friedlander functions, which have similar initial profiles at certain parameters, is considered, and a similar problem is also considered for such parameters where the initial profiles are different. A comparative analysis is made, both for similar profiles and for profiles that are completely different. Wave propagation is considered for solutions with two approximations and solutions with three approximations using the displacement gradient constraint method. It is shown that both asymmetric single profiles evolve almost identically and the influence of the third approximation is not significant.

Much attention is paid to the problem of torsional wave propagation. A new formulation of the nonlinear problem is described in detail here. As already noted earlier, for the approximate analysis of the simplest version of the nonlinear wave equation, a new method is proposed that generalizes the method of restriction to the displacement gradient. When implementing the method, a fairly simple formula is obtained for finding the first two approximations, which is convenient for computer analysis of wave evolution. The existence of a variable wave distortion in the radial direction and a constant one in the axial direction is shown, which describes the propagation of torsional waves inside a circular cylinder and along its axis of symmetry. It is investigated that there is a significant effect of changing the cylinder radius on the distribution of torsional wave amplitudes inside the cylinder. A change in the sign of the amplitude and an increase in the number of maxima of the amplitude distribution curve are observed. The scenarios of the distribution of wave amplitudes from the center to the surface of the cylinder (inside the cylinder) during the propagation of a nonlinearly elastic torsional wave presented in the work have shown that there are many gaps in the analysis of these waves and such an analysis is relevant.

A new approach to the problem of seismic shear wave propagation is presented in detail. When analyzing this problem, scenarios of the transformation of a harmonic wave into an exponentially decaying harmonic wave in a fairly short

propagation time at very low frequencies characteristic of seismic waves were obtained. Scenarios of the evolution of the wave velocity and the amplitude of wave attenuation were constructed.

Thus, the theoretical and numerical analysis of the nonlinear waves considered in the work allowed us to identify a number of new nonlinear wave effects. Taken together, the studies conducted are new and fill a certain fragment of the theory of nonlinear waves in materials.

The reliability of this work is ensured by the correctness of the problem statement, the use of the classical nonlinear theory of wave propagation, the classical approach to the analysis of plane longitudinal, cylindrical radial and torsional and seismic waves, the use of proven methods of approximate analysis of solutions of nonlinear wave equations, the use of graphical algorithms of computer algebra, the agreement of the obtained results with the results of previously conducted theoretical and experimental studies of waves and compliance with considerations of a physical nature.

The obtained theoretical and numerical results made it possible to construct scenarios of wave propagation in materials described by nonlinear models of elastic and viscoelastic deformation, a better understanding of the influence of the number of approximations when solving the wave problem on the scenarios of propagation of various types of waves.

The scientific results of the dissertation were obtained by the author independently. The thesis includes problem formulation, analytical calculations, numerical and graphical implementation in the symbolic computation system of computer algebra algorithms. The definition of the general direction of research, assistance in the analysis of the obtained results belongs to the scientific consultant, corresponding member of NAS of Ukraine, Rushchytsky J.J.

Keywords: evolution of the initial wave profile, nonlinear model of elastic and viscoelastic deformation of the material, five-constant Murnaghan potential, three-constant standard model of viscoelasticity, elastic solitary wave, plane longitudinal wave, cylindrical radial wave, torsional wave, quadratic and cubic nonlinearities,

method of successive approximations, method of restriction to the displacement gradient, nonlinear wave effects.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ АВТОРА ДИСЕРТАЦІЇ, РЕЗУЛЬТАТИ ЯКИХ СКЛАДАЮТЬ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Рушицький Я.Я., Юрчук В.Н.* О впливі третього приближення при аналізі еволюції нелинейно упругої Р-волн. Часть 1//Прикл. механіка. – 2020. – 56, N5. – С. 65 – 77. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1// Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N5. – Р. 581 – 589. (квартиль Q3)
2. *Рушицький Я.Я., Юрчук В.Н.* О впливі третього приближення при аналізі еволюції нелинейно упругої Р-волн. Часть 2//Прикл. механіка. – 2020. – 56, N6. – С. 17 – 27. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-Wave. Part 2// Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N6. – Р. 666 – 673. (квартиль Q3)
3. *Рушицький Я.Я. Юрчук В.М.* Нетипова еволюція поодинокої хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі //Доповіді НАН України, 2020, N12. - С.28-37. (категорія “Б”)
4. *Рушицький Я.Я., Юрчук В.М.* До еволюції плоскої гармонічної хвилі в нелінійно пружному композитному матеріалі, що моделюється двофазною сумішшю// Прикл. механіка. – 2021. – 57, N2. – С. 58 – 69; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N* On the Evolution of a Plane Harmonic Wave in a Nonlinear Elastic Composite Material Modeled by a Two-Phase Mixture//Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N2. – Р. 172 – 183. (квартиль Q3)
5. *Рушицький Я.Я., Юрчук В.М.* Analogii між класичною задачею про коливання тіл і не класичною задачею про поширення плоских хвиль// Прикл. механіка. – 2021. 57, N4. – С. 11 – 22; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Analogies Between the Classical Problem on the Oscillation of Bodies and the Nonclassical Problem on the Propagation of Plane Waves //Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N4. – Р. 386 – 394. (квартиль Q3)
6. *Рушицький Я.Я., Юрчук В.М., О.М. Григорчук, Я.В. Симчук* Нехарактерна еволюція нелінійно пружної поодинокої циліндричної хвилі//

Прикл. механіка. – 2021. 57, N6. – С. 3 – 20; Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N., Hryhorchuk O. M., Symchuk Ya. V. Noncharacteristic Evolution of a Nonlinear Elastic Single Cylindrical Wave //Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N6. – P. 619 – 634. (квартиль Q3)

7. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Створення нелінійно пружної поодинокої плоскої хвилі з профілем Фрідляндер// Прикл. механіка. – 2022. 58, N4. – С. 21 – 31. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Distortion of a Nonlinear Elastic Solitary Plane Wave with Friedlander Profile//Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N4. – P. 389–397. (квартиль Q3)

8. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Порівняння еволюції пружної поодинокої циліндричної хвилі з профілями Фрідляндер та Макдональда // Прикл. механіка. – 2022. 58, N5. – С. 16 – 26. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Comparison of the Evolution of a Solitary Elastic Cylindrical Wave with Friedlander and Macdonald Profiles//Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N5. – P. 497–509. (квартиль Q3)

9. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Комп'ютерний аналіз повільних і швидких хвиль в композитному матеріалі // Прикл. механіка. – 2022. 58, N6. – С. 3 – 17. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Computer Analysis of Slow and Fast Waves in a Composite Material//Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N6. – P. 623–633. (квартиль Q3)

10. Rushchitsky, J., Yurchuk, V. Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (Harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, and Friedlander Initial Profiles). Chapter 25 in: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M.(eds) Advances in Mechanics//Springer, Cham – 2023. vol 191. – P.435-468.

11. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Новий варіант методу обмеження на градієнт зміщення, що виникає при аналізі еволюції крутильної хвилі // Прикл. механіка. – 2023. 59, N2. – С. 19 – 27. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. New Variant of the Method of Constraints for the Displacement Gradient that Arises When Analyzing the Evolution of a Torsional Wave //Int.Appl.Mech. – 2023. – 59, N2. – P. 145–152. (квартиль Q4)

12. Кенձера О.В., Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. До реологічної моделі ґрунтового шару: визначення параметрів моделі з досліду на повзучість шару // Прикл. механіка. – 2023. 59, N4. – С. 3 – 17. Kendzera O.V., Rushchitsky J. J., Yurchuk V. M. Rheological Model of Soil Layer: Determination of Its Parameters from Creep Study//Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N4. – P. 381–393. (квартиль Q4)
13. Руцицький Я.Я., Хотенко О.О., Юрчук В.М. Про особливості граничних умов в аналізі нелінійних хвиль наприкладі поверхневої і крутальної хвиль // Прикл. механіка. – 2023. 59, N5. – С. 44 – 60. Rushchitsky J.J., Khotenko O.O., Yurchuk V.M. Peculiarities of the Boundary Conditions in the Analysis of Nonlinear Waves for Surface and Torsional Waves as Examples //Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N5. – P. 540–554. (квартиль Q4)
14. Руцицький Я.Я., Сінчилло С.В., Юрчук В.М. Нові нелінійні хвильові рівняння для крутильних пружних хвиль, новий наближений метод аналізу рівнянь, числове моделювання еволюції хвиль // Прикл. механіка. – 2023. 59, N6. – С. 14 – 25. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Yurchuk V.M. New Nonlinear Wave Equations for Analysis of Torsional Elastic Waves and Modeling of Their Evolution //Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N6. – P. 641–651. (квартиль Q4)
15. Юрчук В.М., Сінчилло С.В. Крутальні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка – 2023. N2. – С. 172 – 175. (категорія “Б”)
16. Юрчук В.М., Комп’ютерне моделювання впливу величини радіуса циліндра на параметри крутальної нелінійної пружної хвилі // Прикл. механіка. – 2024. 60, N4. – С. 118 – 124. Yurchuk V.M. Computer Simulation of Effect of Cylinder Radius on Parameters of Torsional Nonlinear Elastic Wave //Int.Appl.Mech. –2024. – 60, N4. – P. 488–493. (квартиль Q3)
17. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Про одну особливість еволюції нелінійної пружної хвилі з різними початковими профілями // Прикл. механіка. – 2024. 60, N5. – С. 112 – 116. Rushchitsky J. J., Yurchuk V. M. Peculiarity of Evolution of Nonlinear Elastic Wave with Different Initial Profiles //Int.Appl.Mech. –2024. – 60, N5. – P. 608–612. (квартиль Q3)

18. Руцицький Я.Я. Юрчук В.М. Про один нелінійний хвильовий ефект, який виникає за генерації другої гармоніки//Доповіді НАН України, 2025, N1. - С.22-30. (категорія “Б”)

ЗМІСТ

ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.....	27
Актуальність теми.....	27
Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.....	29
Мета і задачі дослідження.....	29
Методи дослідження.....	31
Наукова новизна одержаних результатів.....	32
Обґрунтованість та достовірність.....	37
Практичне значення одержаних результатів.....	38
Особистий внесок здобувача.....	38
Апробація результатів дисертації.....	39
Публікації.....	40
Структура та обсяг дисертацій.....	40
Основний зміст дисертаційної роботи.....	41
РОЗДІЛ 1 (ДОПОМІЖНИЙ) НЕОБХІДНІ ФАКТИ З КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ (ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ) І НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ (ПЯТИКОНСТАНТНА МОДЕЛЬ МЕРНАГАНА).....	43
1.1. Класичні хвильові рівняння. Основні характеристики і термінологія	43
1.2. Класичні рівняння поширення плоских хвиль.....	45
1.3. Класичні лінійно пружні циліндричні радіальні хвилі.....	50
1.4. Класичні лінійно пружні циліндричні крутильні хвилі.....	52
1.5. Необхідна попередня інформація щодо нелінійного пружного деформування матеріалів.....	55
1.5.1. Про поділ теоретичних моделей пружних матеріалів та деформацій на три групи.....	55
1.5.2. Основні факти з побудови нелінійної теорії пружності.....	57

1.6.	Нелінійний потенціал Мернагана. Необхідні математичні і фізичні поняття	58
1.6.1.	Математичні представлення пятиконстантного потенціалу Мернагана. Пружні константи. Важлива інформація для інженерних розрахунків у яких виникає необхідність врахувати не лінійність деформування.....	58
1.6.2.	Тензори напружень, що застосовуються в моделі Мернагана....	62
1.7.	Хвильові рівняння в рамках моделі Мернагана. Плоскі, циліндричні радіальні, циліндричні крутільні хвилі.....	63
1.7.1.	Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мернагана.....	63
1.7.2.	Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення циліндричних радіальних хвиль в рамках моделі Мернагана.....	65
1.7.3.	Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення циліндричних крутільних хвиль в рамках моделі Мернагана.....	81
РОЗДІЛ 2 (ДОПОМІЖНИЙ) ХВИЛІ З РІЗНИМИ ПОЧАТКОВИМИ ПРОФІЛЯМИ.....		88
2.1.	Поодинокі хвилі.....	88
2.2.	Профілі гармонічної і поодиноких хвиль у вигляді функцій: Чебишова – Ерміта, Уіттекера Макдональда та Фрідляндера.....	89
2.2.1.	Профіль гармонічної хвилі.....	89
2.2.2.	Профіль у вигляді функції Чебишова-Ерміта.....	91
2.2.3.	Профіль у вигляді функції Уіттекера.....	93
2.2.4.	Профіль у вигляді функції Макдональда.....	95
2.2.5.	Профіль у вигляді функції Фрідляндера.....	97

**РОЗДІЛ 3 (ДОПОМІЖНО-ОСНОВНИЙ) ДВА НАБЛИЖЕНІ ПІДХОДИ
ДО АНАЛІЗУ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ХВИЛЬ (НА
ПРИКЛАДІ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ТА ЦИЛІНДРИЧНОЇ
РАДІАЛЬНОЇ ХВИЛЬ).....99**

3.1. Метод послідовних наближень в задачі знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі	99
3.1.1. Найпростіше квадратично нелінійне хвильове рівняння, яке описує еволюцію пружної плоскої поздовжної хвилі.....	99
3.1.2. Стислий опис методу послідовних наближень в задачі знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння з п. 3.1.1.....	100
3.1.3. Стислий опис методу послідовних наближень в задачі знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.1.1.....	101
3.1.4. Розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого і другого наближень.....	102
3.1.5. Розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого другого і третього наближень.....	104
3.2. Наблизений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення (стислий опис).....	105
3.2.1. Перетворення нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.1.1...105	
3.2.2. Розв'язок з урахуванням першого і другого наближень.....106	
3.2.3. Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень.108	
3.3. Наблизений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння для циліндричної радіальної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення...110	
3.3.1. Найпростіше квадратично нелінійне хвильове рівняння, яке описує еволюцію циліндричної радіальної хвилі.....110	
3.3.2. Перетворення нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.3.1...113	

3.3.3. Розв'язок з урахуванням першого і другого наближень.....	113
3.3.4. Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень...	
.....	115

**РОЗДІЛ 4 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ
НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ГАРМОНІЧНОЇ
ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОХ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ
РОЗВЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ.....117**

4.1. Аналіз нелінійної пружної поздовжної гармонічної хвилі методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення (перші два наближення).....	117
4.1.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем. Теоретичний аналіз на основі методів послідовних наближень і обмеження на градієнт зміщення. Основні формули для первих двох наближень	117
4.1.2. Числовий аналіз. Властивості матеріалів, які використані в цьому аналізі	118
4.1.3. Числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем (з застосуванням методів 1 і 2, і врахуванням первих двох наближень).....	119
4.2. Аналіз нелінійної пружної поздовжньої гармонічної хвилі методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення).....	128
4.2.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем. Аналіз на основі методів послідовних наближень і обмеження на градієнт зміщення. Основні формули для первих трьох наближень.....	128
4.2.2. Числовий аналіз. Властивості матеріалів, які використані в цьому аналізі	130
4.2.3. Числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем (з застосуванням методів 1 і 2 і врахуванням первих трьох наближень).....	130

4.3. Деформування другої гармоніки, як новий нелінійний ефект, який супроводжує класичний ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка.....	145
---	-----

РОЗДІЛ 5 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПООДИНОКОЇ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ОБМЕЖЕННЯ НА ГРАДІЕНТ ЗМІЩЕННЯ (ПЕРШІ ТРИ НАБЛИЖЕННЯ).....

5.1. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поздовжної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Гаусса (хвилі Гаусса) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення).....	155
---	-----

5.1.1. Нелінійна хвиля Гаусса. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули..	155
---	-----

5.1.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	156
--	-----

5.1.3. Числовий аналіз хвилі Гаусса (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення).....	157
---	-----

5.2. Теоретичний та числовий аналіз еволюції плоскої поздовжної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера (хвилі Уіттекера) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення).....	166
--	-----

5.2.1. Нелінійна хвиля Уіттекера. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули..	166
--	-----

5.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	168
--	-----

5.2.3. Числовий аналіз хвилі Уіттекера (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення).....	168
--	-----

5.2.3.1. Перший варіант початкового профіля для матеріалу M51	168
---	-----

5.2.3.2. Перший варіант початкового профіля для матеріалу M52.....	173
5.2.3.3. Другий варіант початкового профіля для матеріалу M51.....	177
5.2.3.4. Другий варіант початкового профіля для матеріалу M52.....	182

**РОЗДІЛ 6 ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ
НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПООДИНОКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ
РАДІАЛЬНОЇ ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ОБМЕЖЕННЯ НА
ГРАДІЄНТ ЗМІЩЕННЯ (ПЕРШІ ТРИ НАБЛИЖЕННЯ).....187**

6.1. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної радіальної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда (хвиля Макдональда) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення).....	187
6.1.1. Нелінійна хвиля Макдональда. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули.....	187
6.1.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	188
6.1.3. Числовий аналіз хвилі Макдональда (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення).....	189
6.2. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної радіальної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Фрідляндра (хвиля Фрідляндра) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення).....	198
6.2.1. Нелінійна хвиля Фрідляндра. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули.....	198
6.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	199
6.2.3. Числовий аналіз хвилі Фрідляндра (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення).....	200
6.2.3.1. Перший варіант початкового профіля для матеріалу M51.....	200
6.2.3.2. Перший варіант початкового профіля для матеріалу M52.....	205

6.2.3.3. Другий варіант початкового профіля для матеріалу М51.....	210
6.2.3.4. Другий варіант початкового профіля для матеріалу М52.....	214

РОЗДІЛ 7. ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ КРУТИЛЬНОЇ ХВИЛІ.....220

7.1. Аналіз нелінійної пружної цилідричної крутальної хвилі методом обмеження на градієнт зміщення.....	220
7.1.1. Нелінійне хвильове рівняння, яке описує поширення пружної цилідричної крутальної хвилі.....	220
7.1.2. Деякі факти з класичною задачі лінійної теорії пружності про поширення цилідричних крутильних хвиль.....	222
7.1.3. Новий наближений метод побудови розв'язку нелінійного хвильового рівняння.....	225
7.1.4. Границні умови в нелінійній задачі про цилідричні крутильні хвилі.....	231
7.2. Комп'ютерне моделювання спотворення початкового профіля цилідричної крутальної хвилі.....	233
7.2.1. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі..	233
7.2.2. Числовий аналіз цилідричної крутальної хвилі (застосовано метод обмеження на нелінійну швидкість хвилі).....	234
7.2.3. Числовий аналіз впливу величини радіуса циліндра на параметри цилідричної крутальної хвилі.....	244

РОЗДІЛ 8. СЕЙСМІЧНА ПЛОСКА ЗСУВНА В'ЯЗКОПРУЖНА ГАРМОНІЧНА ХВИЛЯ. ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ СЦЕНАРІЇВ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ ХВИЛІ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЧАСТОТИ255

8.1. Найпростіша задача сейсмофізики: сейсмічна гармонічна SH-хвіля в трикомпонентній системі «атмосфера – пружний ґрунтовий шар – пружний скельний масив».....	255
---	-----

8.2. Загальні факти з теорії в'язкопружності.....	258
8.3. Дво-елементна реологічна модель Максвелла.....	260
8.4. Дво-елементна реологічна модель Фойхта.....	263
8.5. Стандартна реологічна модель (три-елементні моделі Пойнтінга-Томсона та Кельвіна).....	267
8.6. Задача про гармонічну сейсмічну хвиллю в рамках стандартної реологічної моделі.....	269
8.7. Простий спосіб визначення трьох реологічних параметрів моделі..	273
8.8. Обчислення параметрів реологічної моделі для трьох типів ґрунтових шарів. Теоретичний та числовий аналіз сценаріїв зміни швидкості хвилі та затухання амплітуди хвилі з часом та відстанню поширення хвилі.....	277
Висновки.....	299
Список Використаних Джерел.....	306

ВСТУП. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність теми. Теорія нелінійних хвиль в матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії хвиль та нелінійної теорії пружності, в'язко-пружності та інших узагальнень теорії пружності. Ця теорія не є закінченою і розвивається шляхом ускладнення моделей деформування, розширення типів хвиль, розвитку математичних методів розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, збільшення можливостей комп'ютерних програм і т.п. Розвиток відбувається у багатьох наукових центрах світової механіки і досі. Сучасна промисловість виробляє величезну кількість машин, конструкцій, пристріїв, устаткувань, які або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення хвиль, або в яких спостерігаються хвильові процеси. Тому розвиток теорії хвиль в матеріалах перебуває під тиском промисловості і є для неї затребуваним продуктом.

Поодинокі хвилі з посеред різноманіття хвиль складають доволі великий клас хвиль. Знання про такі хвилі є необхідним, оскільки пряме або непряме застосування таких хвиль фактично спостерігається у всіх галузях практичної діяльності людини – від медицини до архітектури, від машино-зварства до історії. Підтвердження цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами *solitary waves in materials*. В дисертації для прикладу вказано наукові публікації щодо поодиноких хвиль в провідних світових журналах, який свідчить про актуальність вивчення поодиноких хвиль.

В дисертації вивчаються хвилі з заданим початковим поодиноким профілем, який далі еволюціонує з часом поширення хвилі.

Поодинокі хвилі в матеріалах (порівняно з рідинами) досліджені значно менше. З практичної точки зору, знання закономірностей розповсюдження поодиноких хвиль корисно при інженерних розрахунках різних конструкцій, на які діє ударний імпульс. Спеціалізовані наукові журнали з теорії хвиль належать до групи найбільш рейтингових в області механіки. Отже, розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах актуальний з точки зо-

ру фундаментальних аспектів теорії хвиль.

Однак, у дисертації досліджено додатково два типи хвиль з гармонічним профілем – крутильні та сейсмічні.

Крутильні хвилі вивчені значно менше інших типів хвиль, але постійно привертають увагу теоретиків і інженерів через практичну значимість в інженерних проблемах буріння і використання скважин. В розділі 7, присвяченому крутильним хвилям приведений результат бібліографічного пошуку в базі даних Google наукових публікацій щодо крутильних хвиль в провідних світових журналах, який свідчить про актуальність вивчення цих хвиль. Особливість крутильних хвиль є такою, що хвиля поширюється в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра. Приведені в роботі сценарії розподілу амплітуд хвилі від центру до поверхні циліндра (всередині циліндра) при поширенні нелінійно пружної крутильної хвилі засвідчили, що в аналізі цих хвиль багато прогалин і такий аналіз є актуальним.

Сейсмічні хвилі поширюються від осередків землетрусів, вибухів та інших джерел до поверхні Землі. В дисертації вивчаються плоскі поперечні сейсмічні хвилі (зсувні хвилі). Вони зміщують часточки ґрунтових порід у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі. Звичайно, ґрунти вважаються реологічними середовищами. Історично так склалося, що ту область механіки матеріалів, яка враховує властивості пружності та в'язкості має назву теорія в'язкопружності, теж відносять до реології. Відповідно, властивості в'язкопружних матеріалів традиційно називають реологічними властивостями і параметри моделей теж називають реологічними. При вивченні деформування ґрунтових шарів явище вязкопружності спостерігається постійно і в дисертації вибрана так звана стандартна модель. Сама постановка задачі, підхід до її розв'язування і отримані результати є новими в теорії сейсмічних хвиль. Актуальність розвитку теорії сейсмічних хвиль є незаперечною перш за все через існування практичних задач захисту від сейсмічної небезпеки. Після першої публікації автора в області

сейсмічних хвиль, його постійно запрошують на всі світові наукові конференції в області сейсмічних хвиль. Затребуваність та нові результати в області сейсмічного захисту є постійною і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у відповідності з основними напрямками наукових досліджень відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка; зокрема, з науково – дослідницькою темою № 1.3.1.418-20 «Побудова наближених розв'язків нелінійних задач поширення гармонічних і поодиноких хвиль в пружних матеріалах» (І. 2020 – IV. 2023, номер державної реєстрації 0119U103784). Отримані наукові результати увійшли до звіту науково-дослідницької роботи № 1.3.1.418-20. Продовження отриманих результатів даної роботи увійшли до наступної науково – дослідницькою теми № 1.3.1.461-24 «Еволюція поодиноких хвиль різних початкових профілів в пружних матеріалах» (І. 2024 – IV. 2027, номер державної реєстрації 0123U104924). Також продовження отриманих результатів увійшли до науково-дослідницької роботи “Дослідження критичного стану тріщин та траекторій їх поширення, а також розповсюдження хвиль в рамках нелінійних підходів сучасної комп'ютерної та аналітичної механіки” (шифр: 472-25) в рамках гранту для молодих вчених НАН України.

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є побудова сценаріїв еволюції поодиноких і гармонічних нелінійних хвиль, яка включає постановку нових задач, отримання аналітичних розв'язків нових нелінійних хвильових рівнянь, розвиток методів розв'язування цих рівнянь, адаптації програм комп'ютерного моделювання та аналіз отриманих сценаріїв з точки зору виявлення нових нелінійних хвильових ефектів. Більш конкретно вона включає:

- вибір поодиноких хвиль, як предмета досліджень (автор разом з консультантом сформували новий напрямок досліджень);
- постановку задач про поширення хвиль в матеріалах (середовищах), що деформуються пружно нелінійно згідно п'ятиконстантною моделлю Мернагана або стандартною реологічною моделлю;

- отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для поздовжніх, циліндричних радіальних, крутильних та сейсмічних хвиль та розв'язків цих рівнянь;
- розвитку наближеного методу обмеження на градієнт зміщення при розв'язуванні нелінійної хвильової задачі і отримання перших двох та трьох наближень та прямого методу розв'язування хвильового рівняння для стандартної реологічної моделі;
- вибір п'ятьох типів (гармонічна косинусоїдальна періодична функція, функції Гаусса, Уіттекера, Макдональда, Фрідляндера) початкового профіля хвилі, які є близькими до реально спостережуваних профілів хвиль в матеріалах;
- аналіз нелінійного хвильового рівняння для поздовжніх хвиль з початковим гармонічним профілем з метою порівняння ефективності двох методів (послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення) при розв'язуванні в рамках двох та трьох перших наближень;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення поздовжніх хвиль з початковим профілем у вигляді функції Гаусса (симетричний профіль з одним горбом);
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення поздовжніх хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера (несиметричний профіль з одним горбом);
- порівняння наблизених розв'язків для хвиль Гаусса та Уіттекера за різними параметрами порівняння;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення циліндричних радіальних хвиль з початковим профілем у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндера (несиметричний профіль без горба).
- порівняння розв'язків, отриманих для хвиль Макдональда та Фрідляндера, за різними параметрами порівняння;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення гармонічної крутильної хвилі всередині кругового циліндра та вздовж

його осі симетрії;

- проведення більш загального порівняльного аналізу нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих автором розв'язків, який включає вплив частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю;
- розробка методу визначення параметрів стандартної три-константної реологічної моделі;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції швидкості зсувної гармонічної сейсмічної хвилі та амплітуди хвилі для трьох дослід жених типів ґрунту при зміні частоти хвилі і зміні часу поширення хвилі).

Об'єктом дослідження є подинокі хвилі в матеріалах (плоска поздовжна, циліндрична радіальна та крутільна-гармонічна), що деформуються нелінійно пружно та гармонічна плоска зсувна сейсмічна хвиля в ґрутових шарах з реологічними властивостями.

Предметом дослідження є еволюція початкового профілю поодиноких хвиль в матеріалах, деформування яких описується пятиконстантною моделлю Мернагана); вплив нелінійності деформування матеріалу на характер поширення п'яти типів хвиль - плоска поздовжна, циліндрична радіальна, крутільна, гармонічна плоска зсувна сейсмічна хвиля в ґрутових шарах, деформування якої описується реологічною стандартною триконстантною моделлю. Додатково досліджуються та використовуються методи наближеного розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, програми комп'ютерного моделювання з використанням спеціальних функцій математичної фізики, методика знаходження параметрів реологічної моделі з використанням експериментальних кривих повзучості.

Методи дослідження. В роботі застосовувалися як аналітичні так і числові методи дослідження. Основою аналітичних досліджень були нелінійна теорія пружності та вязкопружності. Нелінійні хвильові рівняння отримувалися за строгими процедурами цих теорій і аналізувалися методом обмеження на градієнт зміщення з метою отримання перших двох та трьох

наближень. Числовий аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур алгоритмів комп’ютерної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в таких положеннях, що виносяться на захист:

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. Теоретичний і числовий опис нових нелінійних хвильових ефектів, який полягає в побудові сценаріїв еволюції чотирьох типів хвиль (плоска поздовжна, плоска поперечна – зсувна, циліндрична радіальна, крутильна) з різними початковими профілями - гармонічний косинусоїдальний, подинокий симетричний з одним горбом, поодинокий несиметричний з одним горбом, несиметричний без горба).
2. Проведення порівнянь різних сценаріїв за різними критеріями порівняння і формулювання нових коментарів до отриманих сценаріїв.
3. Отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для плоских поздовжніх хвиль (хвиль Гаусса та Уіттекера), плоских поперечних хвиль (сейсмічних гармонічних хвиль), циліндричних радіальних (хвиль Макдональда та Фрідляндра), крутильних гармонічних хвиль.
4. Побудова в рамках одного наближеного підходу обмеження на градієнт зміщення перших двох і трьох наближень при розв’язуванні хвильових задач.
5. Проведення числового моделювання для порівняння двох та трьох наближень розв’язку хвильової задачі при різних типах матеріалів, підошв і максимальних амплітуд для хвиль з метою виявлення впливу третього наближення на спотворення початкового профілю хвилі.
6. Побудова сценаріїв поширення в ґрутових шарах сейсмічної плоскої поперечної хвилі прямим методом розв’язання реологічного хвильового рівняння.

КОНКРЕТИЗОВАНІ ПОЛОЖЕННЯ СТОСОВНО РЕЗУЛЬТАТІВ, ВИКЛАДЕНИХ В ОКРЕМИХ РОЗДІЛАХ

7. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод зна-

ходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень.

8. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної циліндричної радіальної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень.
9. Розділ 4. Проведено числове моделювання для двох різних методів розв'язування нелінійної задачі поширення поздовжної хвилі з гармонічним профілем в рамках двох та трьох перших наближень.
10. Розділ 4. Виявлено новий хвильовий ефект, який супроводжує класичний ефект генерації другої гармоніки – профіль цієї гармоніки деформується і стає несиметричним.
11. Розділ 4. При аналізі отриманих графіків спостережено утворення двох горбів замість одного (для двох перших наближень за двома методами - послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення).
12. Розділ 4. Спостережено різну швидкість еволюції (швидкість зміни початкового профіля хвилі) при її описанні двома методами, включаючи збільшення максимальної амплітуди.
13. Розділ 4. Для трьох перших наближень в рамках двох методів, початковий профіль спотворюється по різному, внаслідок різного математичного представлення наближень. Для методу послідовних наближень третє наближення вводить поправку четвертого порядку, яка не змінює знак при зміні знаку амплітуди, тоді як для методу обмеження на градієнт зміщення поправка має третій порядок і змінює знак при зміні знаку амплітуди.
14. Розділ 4. Графіки отримані для двох перших наближень при застосу-

ванні обох методів показують подібні спотворення. У випадку обох методів еволюція відбувається асиметрично: додатна частина профілю перетворюється у два горби, тоді як від'ємна частина має тенденцію трансформуватися в профіль 2-ї гармоніки.

15. Розділ 4. Спостережено, що для гармонічної хвилі третьє наближення за обома методами змінює суттєво як початковий профіль так і профіль в рамках «перше +друге наближення». Вплив проявляється по різному. Для первого методу горби у верхній та нижніх частинах розпадається на два горби кожен, виявляючи при цьому тенденцію до утворення четвертої гармоніки. Для другого методу горб у верхній частині розпадається на два, а горб у нижній частині не розпадається, виявляючи при цьому тенденцію до значної деформації другої гармоніки.
16. Розділ 5. Для отриманих за методом обмеження на градієнт зміщення двох та трьох первих наближень проведено числове моделювання еволюції поширення поздовжної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функції Гаусса та Уіттекера.
17. Розділ 5. Спостережено, що для хвилі Гаусса графіки, отримані для двох та трьох первих наближень в рамках методу обмеження на градієнт зміщення, є різними. Для первих двох наближень спотворення відбувається практично симетрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два горби. Для первих трьох наближень спотворення відбувається асиметрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два різні горби – лівий горб опускається і правий піднімається.
18. Розділ 5. Отримані графіки для двох та трьох первих наближень в рамках методу обмеження на градієнт зміщення для несиметричної хвилі Уіттекера з двома варіантами початкового профіля. Для первого варіанту показано, що для обох наближень (1+2) і (1+2+3) спотворення відбувається несиметрично. Швидкість еволюції для різних варіантів і

наближень різна, значення максимальної амплітуди зростає та зменшується розмір підошви хвилі.

19. Розділ 5. Хвилі Уіттекера для другого варіанту початкового профіля та відповідного розв'язку другого і третього наближення еволюціонують аналогічно несиметрично з різною дисторсією – для третього наближення на схилі профіля утворюється горб. Швидкість спотворення та значення максимальної амплітуди для наближень 1+2+3 більша ніж для 1+2 а розмір підошви зменшується ще більше.
20. Розділ 5. Показано, що обидва несиметричні профілі хвилі Уіттекера еволюціонують по різному і вплив третього наближення є суттєвим по відношенню до другого.
21. Розділ 6. Проведено числове моделювання і побудовані сценарії еволюції за методом обмеження на градієнт зміщення для нелінійної задачі поширення циліндричної радіальної поодинокої хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда та Фрідляндра в рамках двох та трьох перших наближень.
22. Розділ 6. Отримані графіки показують, що несиметричність профілю Макдональда зберігається, а спотворений профіль стає все крутішим і крутішим. Швидкість спотворення для наближення 1+2+3 вища ніж для 1+2, а розмір підошви зменшується.
23. Розділ 6. Хвиля Фрідляндра проаналізована для двох варіантів початкового профіля. Спостережено, що для первого варіанту спотворення відбувається аналогічно хвилі Макдональда.
24. Розділ 6. Показано теоретично і чисельно, що сценарії еволюції хвиль Макдональда та Фрідляндра для первого варіанту початкового профіля дуже схожа. З цього факту випливає, що в рамках аналізу еволюції обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представлені по-різному.
25. Розділ 6. Для хвилі Фрідлендера з другим варіантом початкового профіля показано, що вона спотворюється несиметрично у випадку другого

го та третього наближень. Спотворення відбувається як для додатних значень амплітуд, так і від'ємних. Для додатних профіль стає крутішим, а для від'ємних стає близчим до горизонтальної осі.

26. Розділ 6. Спостережено, що хвилі Макдональда та Фрідляндра еволюціонують майже однаково і вплив третього наближення не є суттєвим по відношенню до другого.
27. Розділ 6. Зроблено висновок, що функція Макдональда може розглядатися як точний розв'язок нелінійного хвильового рівняння рівняння, а функцію Фрідлендера можна інтерпретувати як наближений розв'язок цього рівняння.
28. Розділ 7. Проаналізована циліндрична крутильна хвилія, яка поширюється в напрямку осі циліндра. Отримана достатньо проста формула для знаходження перших двох наближень і показано ефективність методу обмеження на градієнт зміщення у випадку наближеного аналізу простого варіанту хвильового рівняння крутильної хвилі. Метод обмежує зміну швидкості крутильної хвилі і узагальнює розвинений для інших хвильових рівнянь метод.
29. Розділ 7. Проведено числове моделювання спотворення початкового профіля радіальної циліндричної крутильної хвилі в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра до його центру для трьох типів матеріалів.
30. Розділ 7. Показано існування змінного спотворення крутильних хвиль хвилі у радіальному напрямку і постійного у осьовому, в всередині поширення кругового циліндра та вздовж його осі симетрії.
31. Розділ 7. Спостережено значний вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутильна хвилія, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра.
32. Розділ 7. При аналізі граничних умов зясовано, що існує велика відмінність в формолюванні цих умов для лінійної та нелінійної постановок.
33. Розділ 8. Запропоновано в реалізовано опис деформування ґрунтових

шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю.

34. Розділ 8. Розроблено і застосовано метод визначення параметрів реологічної моделі на основі однієї експериментальної кривої повзучості реального ґрунтового шару.
35. Розділ 8. Показано чисельно, що для гармонічної сейсмічної хвилі зміна амплітуди хвилі з часом чи зі зміною частоти супроводжується затуханням амплітуди хвилі. Значення амплітуди зі збільшенням часу поширення чи частоти асимптотично прямають до нуля за експоненціальним законом.
36. Розділ 8. Показано, що залежності швидкості хвилі і коефіцієнту затухання хвилі від частоти виявили неочікувану з практичної точки зору ситуацію, коли суттєва нелінійність цих залежностей спостерігається лише для дуже низьких частот від 1 до 4 герц і для більших значень частоти швидкість і затухання хвилі практично є постійними.

Обґрунтованість та достовірність забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль в матеріалах, узгодженістю нелінійного підходу до аналізу поздовжніх, циліндричних радіальних та крутільних хвиль з класичним лінійним підходом, коректністю аналізу стандартної реологічної моделі щодо сейсмічних хвиль, коректністю використання методів послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення, використання графічних алгоритмів комп’ютерної алгебри, узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль та з відповідністю результатів міркуванням фізичного характеру.

Теоретична і практична цінність отриманих результатів є багаторівневою. Перший рівень включає цінність для загальної теорії поширення нелінійних хвиль в матеріалах. Тут сформульовано і розвинуто новий напрямок теорії – аналіз еволюції поодиноких хвиль з заданим початковим профілем. Наступний рівень полягає в побудові наближених розвязків конкретних типів хвиль і виявлення нових нелінійних хвильових ефектів.

Оскільки робота планувалася і в процесі її виконання сформувалася як робота в області фундаментальних проблем механіки, то практичне значення отриманих результатів має в основному потенційний характер.

Кожен тип проаналізованих в роботі поодиноких хвиль може потенційно знайти практичне застосування в інженерній механіці.

Практичне значення одержаних результатів полягає в можливості кращого розуміння впливу хвилі, її параметрів і матеріалу (середовища поширення хвилі) на поширення п'яти типів досліджених в роботі хвиль. Оскільки поодинокі хвилі здебільшого генеруються вибухами, короткими імпульсами високої інтенсивності та інше, то ті сфери діяльності, де виникають динамічні процеси такого роду, потенційно зацікавлені в дослідженнях поодиноких хвиль. Дослідження сейсмічних хвиль є предметом постійного інтересу організацій, які відповідають за сейсмічну безпеку. Отримані результати щодо сейсмічних хвиль планується застосовувати в спільних роботах зі вченими Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавтості здобувач приймає участь у постановці задач реалізації та розробці підходів до їх розв'язання. Всі основні результати дисертації які виносяться на захист отримані автором самостійно, матеріали опубліковані у співавторстві, що використані в дисертації отримані здобувачем особисто включаючи постановку задач та безпосереднє виконання всіх етапів робіт. У спільних публікаціях з науковим консультантом член.-кор. НАНУ, Я.Я Рущицьким та чле.-кор. НАНУ О.В. Кендзерою, к.ф.-м.н. С.В. Сінчилом, к.ф.-м.н., О.О.Хотенко дисидентом виконано постановку нових задач, отримання аналітичних розв'язків нових нелінійних хвильових рівнянь, розвиток методів розв'язування цих рівнянь, адаптації програм комп'ютерного моделювання та аналіз отриманих сценаріїв з точки зору виявлення нових нелінійних хвильових ефектів, для сейсмічних хвиль запропоновано в реалізовано опис

деформування ґрунтових шарів стандартною три-константною реологічною моделлю.

Опубліковані роботи достатньо повно відображають зміст дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені в дисертацію, були представлені в наступних анотаціях доповідей на міжнародних наукових конференціях:

1. Юрчук В.М. Рушицький Я.Я. Моделювання еволюції поодиноких хвиль конструкційних матеріалах. Перші три наближення// Матеріали міжн. наук.-практ. конф. «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання», Івано-Франківськ–Яремча, 18 – 22 травня – 2020.– С. 212-216.
2. Рушицький Я.Я. Сінчило С.В. Юрчук В.М. Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу. Абстракти VII Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» 28–30 серпня 2023 р. Київ, Київський нац. унів. Ім. Тараса Шевченка. С.89.
3. Хотенко О.О. Юрчук В.М. Границні умови в аналізі нелінійних поверхневих і крутитильних хвиль. Абстракти VII Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» 28–30 серпня 2023 р. Київ, Київський нац. унів. Ім. Тараса Шевченка. С.122.
4. Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M. To comparison of evolution of different kinds of elastic solitary waves. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.
5. Хотенко О.О. Юрчук В.М. Про граничні умови в аналізі нелінійних поверхневої крутитильної хвиль. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.
6. Сінчило С.В. Юрчук В.М. Про новий наблизений метод аналізу рівнянь, для крутитильних пружних хвиль. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.
7. Юрчук В.М. Одна особливість еволюції початкового профі-

ля нелінійно пружних хвиль. Анотації доповідей. 11-та Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” 24-26 вересня 2024р. Львів, Інститут механіки прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ 8. Юрчук В.М. Опис застосування стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи» 7-11 жовтня 2024 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

В завершенному вигляді дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на семінарах відділу реології Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - член-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Рущицький Я.Я.), на науковому семінарі за напрямком “Механіка композитних і неоднорідних середовищ” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - д.ф.-м.н. Сторожук Є. А.) і на загальноінституційському семінарі Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - акад. НАНУ, д.т.н., Назаренко В.М.) і отримала позитивну оцінку.

Основні положення, результати дослідження та висновки кандидатської дисертації автора є допоміжними і не входять у блок нових результатів, які складають докторську дисертацію.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 18 наукових робіт, 14 із них у міжнародному науковому журналі «Прикладна механіка - International Applied Mechanics», зокрема 10 публікацій [1,2,4-9,16,17] квартиля Q3, 4 публікацій [11-14] квартиля Q4 одна публікація [10] – глава в колективній монографії видавництва Springer, а також три публікації категорії “Б”, зокрема дві публікації [3,18] в журналі “Доповіді НАНУ” та одна [15] в журналі “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка”.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 8 розділів, висновків, списку використаних джерел із 159 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 312 сторінок разом з 237 ри-

сунками та двома таблицями.

Основний зміст дисертаційної роботи.

Вступ містить загальну характеристику роботи; тут проаналізовано стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету роботи та задачі дослідження; відзначено наукову новизну і практичну цінність одержаних результатів; наведено дані про апробацію результатів дисертації та про публікації результатів роботи, а також короткий опис структури дисертації.

У першому розділі (допоміжному) розглянуто класичні хвильові рівняння для плоских, циліндричних та крутільних хвиль, основні характеристики і термінологію. Описано математичну схему нелінійного пружного деформування матеріалів. Розглянуто п'ятиконстантну модель Мернагана як одну з найбільш поширених моделей нелінійної теорії пружності. Отримані нелінійні хвильові рівняння в рамках моделі Мернагана стосовно плоских, циліндричних радіальних та крутільних хвиль.

Другий розділ (допоміжний) містить інформацію про поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Гаусса, Уіттекера, Макдональда та Фрідляндера, їх основні характеристики та властивості.

У третьому розділі (допоміжно-основному) розглянуто два підходи до розв'язання нелінійної хвильової задачі: метод послідовних наближень та метод обмеження на градієнт зміщення. Для плоскої гармонічної хвилі отримано нові розв'язки в рамках відповідних методів для перших трьох наближень. Для плоскої поздовжної хвилі та радіальної циліндричної хвилі розв'язки отримані тільки в рамках методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень.

Четвертий розділ містить теоретичний та числовий аналіз поширення поздовжної хвилі з початковим гармонічним профілем для перших двох і трьох наближень за методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення з метою їх порівняння за критерієм зручності використання.

У пятому розділі проведено теоретичний та числовий аналіз (побудо-

вано сценарії еволюції профіля хвилі) поширення повздовжної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функції Гаусса (симетричний профіль з одним горбом) та Уіттекера (несиметричний профіль з одним горбом), для перших двох та трьох наближень за методом обмеження на градієнт зміщення.

Шостий розділ містить теоретичний та числовий аналіз (сценарії еволюції початкового профіля хвилі) поширення радіальної циліндричної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функції Макдональда та Фрідлян더라 (несиметричний профіль без горба), для перших двох та трьох наближень за методом обмеження на градієнт зміщення.

Сьомий розділ присвячений теоретичному та числовому аналізу (побудові сценаріїв еволюції початкового профіля хвилі і розподілу амплітуд хвилі всередині циліндра) поширення нелінійно пружної крутильної хвилі. Тут хвиля поширюється в напрямку осі циліндра. Для аналізу зміни амплітуди у напрямку від поверхні циліндра до його центру застосовано узагалінений для цього випадку метод обмеження на градієнт зміщення.

У восьмому розділі проведено теоретичний та числовий аналіз і побудовано сценарії еволюції швидкості сейсмічної хвилі та амплітуди хвилі для трьох типів ґрунту при зміні частоти хвилі і зміні часу поширення хвилі. Промодельовано деформування ґрутових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Запропоновано новий в теорії сейсмічних хвиль метод визначення реологічних параметрів ґрутових шарів.

У висновках сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту – члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Яремі Ярославовичу Рушицькому за постійну увагу, цінні поради, пропозиції та всебічну підтримку під час виконання роботи.

Основний висновок. Зміст вступу регулюється Інструкцією МОН і відповідає цій Інструкції.

РОЗДІЛ 1. (ДОПОМІЖНИЙ)
**НЕОБХІДНІ ФАКТИ З КЛАСИЧНОЇ ЛІНІЙНОЇ (ПОШИРЕННЯ
ПРУЖНИХ ХВИЛЬ) І НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ**
(ПЯТИКОНСТАНТНА МОДЕЛЬ МЕРНАГАНА)

1.1. Класичні хвильові рівняння. Основні характеристики і термінологія

В даній роботі внесені в текст певні факти з лінійної теорії поширення пружних хвиль пов'язані з тим, що далі розглядатимуться нелінійні хвилі, які є розв'язками нелінійних хвильових рівнянь і відповідні їх порівняння.

Отримані хвильові рівняння розв'язуватимуться наближеними способами, в яких використовуються розв'язки відповідних лінійних рівнянь.

Хвиля розуміється як поширення в просторі збурення певного стану фізичної чи іншої системи. Хвилі відрізняються своєю геометричною формою (профілем) яка може бути найрізноманітнішою. На даний час розрізняють такі типи хвиль: 1. Поодинокі хвилі або імпульси. 2. Періодичні хвилі. 3. Пакети хвиль. 4. Біжучі хвилі. Однак є деякі хвилі, які не входять у цю класифікацію.

Крім профіля, хвилю також характеризують швидкість поширення і фаза. Ці поняття пояснюються за допомогою розв'язку Д'Алямбера класично-го одновимірного хвильового рівняння[11,12,36,48]

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Коли деякі початкові дані дорівнюють нулеві, то цей розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = u_{01}(vt - x) + u_{02}(vt + x). \quad (1.2)$$

Кожен з двох доданків в (1.2) називають біжучою хвилею. Перший описує хвилю, що поширюється в додатному напрямку, другий - у зворотному напрямку. Функції u_{01} і u_{02} задають форму хвилі. Величину $\sigma = vt \pm x$ називають фазою і величину v - швидкістю хвилі (фазовою швидкістю хвилі).

Якщо біжуча хвиля є періодичною, то зручно її розв'язок (1.2) представити у вигляді

$$u(x,t) = u_{01} \left[\frac{v}{\omega} (\omega t - kx) \right] + u_{02} \left[\frac{v}{\omega} (\omega t + kx) \right], \quad (1.3)$$

де ω є частотою хвилі, $k = (\omega/v) = (2\pi f/v) = (2\pi/\lambda)$ - хвильовим числом, λ - довжиною хвилі і f - круговою частотою.

Найчастіше біжучі хвилі розглядаються для випадку гармонічних хвиль. Тоді формула (1.3) спрощується

$$u(x,t) = A \cos \omega [t - (x/v)] \text{ або } u(x,t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (1.4)$$

Якщо період $T = (1/f)$ і кругова частота $f = (\omega/2\pi)$ відомі, то швидкість хвилі записується так: $v = (\omega/k)$; $v = \lambda f$ $v = \lambda T$. Швидкість v визначає швидкість руху одного гребіння, чи однієї впадини, чи вузла на профілі хвилі.

Вираз $\varphi(x,t) = \omega t - kx$ називають функцією фази або фазою. Фаза лінійно залежить від просторової змінної x і часу t .

Існує просте пояснення, чому v називають фазовою швидкістю. Фіксуючи значення фази, тим самим фіксують певну точку на профілі хвилі. Якщо порахувати для фази повний диференціал $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \omega dt - kdx = 0$, то з отриманої формулі випливає, що для точок стаціонарної фази $(dx/dt) = (\omega/k)$. Тобто, ці точки рухаються зі швидкістю v . В результаті, спостерігач, який рухається зі швидкістю v , бачить (супроводжує) весь час одну й ту ж точку профіля хвилі. Отже, фазова швидкість – швидкість фіксованої точки на профілі хвилі, фаза якої є незмінною.

Розглянемо тепер таку характеристику хвиль як стан поляризації біжутої гармонічної хвилі. Нагадаємо, що така хвиля характеризується: 1. формою профіля – він завжди синусоїdalnyj; 2. амплітудою, яка є постійною і векторною величиною; 3. хвильовим вектором, який визначає напрямок поширення хвилі; 4. частотою. Кут, утворений вектором амплітуди і хвильовим

вектором, або трохи більш абстрактно, загальні співвідношення між амплітудою і фазою характеризують стан поляризації хвиль.

Розглянемо плоску хвилю зміщення. Коли коливання частинок при поширенні хвилі відбуваються вздовж напрямку поширення хвилі (тобто, згаданий вище кут дорівнює нулеві), то хвилю називають поздовжньо поляризованою. Коли коливання частинок при поширенні хвилі відбувається поперек напрямку поширення хвилі (тобто, згаданий вище кут є прямим), то хвилю називають поперечно поляризованою.

Розрізняють два види поперечно поляризованих хвиль - вертикально поляризовані (що відповідають вертикальним поперечним коливанням частинок) і поперечно поляризовані (що відповідають вертикальним поперечним коливанням ча стинок). Стан поляризації впливає суттєво на взаємодію хвилі (з іншими хвильами, самої з собою, з іншими фізичними полями і так далі).

Поняття поляризації переноситься на хвилі, які вже не є гармонічними. Це стосується хвиль з більш складним профілем, дисперсивних хвиль, а також неперіодичних і поодиноких хвиль.

1.2. Класичні рівняння поширення плоских хвиль

Серед усіх типів хвиль плоскі хвилі є найбільш вивченими. Виберемо певний напрямок, який визначається одиничним вектором \vec{n}^o і припустимо, що плоска хвиля є хвилею Д'Алямбера, що поширюється в напрямку \vec{n}^o з постійною швидкістю v і амплітудою \bar{u}^o [14,17,30]

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}^o f \left[t - (\xi/v) \right], \quad (1.5)$$

$$\xi = \vec{n}^o \cdot \vec{r} = n_1^o x_1 + n_2^o x_2 + n_3^o x_3, \quad \vec{n}^o = \{n_k^o \equiv \cos \alpha_k^0\}, \quad \vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Існує пояснення терміну “плоска хвиля” щодо виразу (1.5). У фікований момент часу функція $\bar{u}(x,t)$ є постійною на площині, яка задається рівнянням $\xi = \vec{n}^o \cdot \vec{r} = n_1^o x_1 + n_2^o x_2 + n_3^o x_3 = \text{const}$. Нехай хвиля рухається протягом деякого часу Δt , тоді вектор \vec{r} змінюється на величину $\Delta \vec{r}$. Якщо при цьому

аргумент функції $\vec{u}(x,t)$ є незмінним, то функція теж незмінна. Але це означає що напрямок \vec{k} є саме напрямком, в якому рухається хвиля. З іншого боку, між величинами Δt і $\Delta \vec{r}$ існує зв'язок

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta \vec{r}) - \omega(t + \Delta t) = \text{const} \quad \text{або} \quad \vec{k} \Delta \vec{r} = \omega \Delta t. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) може розглядатися як рівняння означеного вище площини, але конгруентно зміщеної в просторі на відстань $|\Delta \vec{r}|$. Тобто, ця площа рухається в напрямку хвильового вектора \vec{k} . В термінах теорії хвиль, написане вище формулюється так: гармонічна хвиля (1.5) має фронт у вигляді площини і цей фронт рухається в напрямку \vec{k} . Саме тому хвилю (1.5) називають плоскою хвилею.

Ще раз зафіксуємо, що для характеристики плоскої хвилі потрібні чотири параметри: I. Довільна форма профіля, що описується достатньо гладкою функцією f . II. Довільна амплітуда \vec{u}^o . III. Фіксована поляризація ампулітуди (напрямок вектора \vec{u}^o). IV. Фіксована фазова швидкість v .

Розглянемо рівняння руху лінійної теорії пружності, записане через зміщення для довільного випадку анізотропії пружних властивостей

$$C_{iklm} u_{m,lk} - \rho \ddot{u}_i = 0. \quad (1.7)$$

Підставимо тепер представлення плоскої хвилі (1.5) в (1.7) і введемо тензор Крістоффеля $\Gamma_{ik} = C_{ijlk} k_j k_l$. В результаті отримаємо рівняння Крістоффеля для плоских хвиль

$$\Gamma_{ik} u_k^o = \rho v^2 u_i^o. \quad (1.8)$$

З рівняння (1.8) випливає, що компоненти вектора \vec{u}^o , які визначають поляризовану хвилю, є власними векторами тензора Γ_{ik} і відповідними власними значеннями ρv^2 , які визначають фазову швидкість поляризованої хвилі. Таким чином процедура Крістоффеля зводить задачу визначення параметрів плоских хвиль до задачі на знаходження власних значень тензора Γ_{ik} .

Оскільки тензор гіперпружних властивостей C_{ijkl} симетричний, то тен-

зор Крістоффеля Γ_{ik} також симетричний. Отже, його власні значення є дійсні величини і власні вектори ортогональні. Густина ρ є додатною величиною, тому власні значення теж додатні величини. Це означає що фазова швидкість плоскої хвилі є дійсною величиною і хвиля дійсно поширюються.

Розглянемо випадок ізотропії і запишемо тензор Крістоффеля

$$\Gamma_{ik} = (\lambda + \mu) k_i^o k_k^o + \mu \delta_{ik} \quad (1.9)$$

і рівняння Крістоффеля

$$(\lambda + \mu) (\vec{k}^o \cdot \vec{u}^o) \vec{k}^o = (\rho v^2 - \mu) \vec{u}^o. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.10) допускає два варіанти поляризації. Перший варіант відповідає колінеарності хвилі, тут вектори зміщення описують поздовжню хвиллю з постійною швидкістю $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. Другий варіант визначає нескінченне число напрямків, що випливає з ортогональності хвилі і вектора зміщення, і відповідає по перечній хвилі з постійною фазовою швидкістю $v = \sqrt{\mu/\rho}$. Таким чином, вибір певного напрямку поширення плоскої хвилі не впливає на хвильові характеристики: число хвиль (тільки дві), фазову швидкість і взаємну поляризацію.

Розглянемо випадок поперечного трансверсально ізотропного середовища поширення хвиль. Коли хвилі поширюються вздовж осі симетрії, то можливі два варіанти поляризації і відповідно, два варіанти типів хвиль: поздовжня хвилля з фазовою швидкістю $v_{ph} = \sqrt{(C_{3333}/\rho)}$ і поперечна хвилля в площині ізотропії з поляризацією вздовж осі абсцис швидкістю $v_{ph} = \sqrt{(C_{1313}/\rho)}$.

Коли хвилі поширюються перпендикулярно до осі симетрії, то можливі три типи поляризації: поздовжня хвилля з поляризацією в напрямку осі абсцис і фазовою швидкістю $v_{ph} = \sqrt{(C_{1111}/\rho)}$; поперечна хвилля з поляризацією в напрямку осі симетрії і фазовою швидкістю $v_{ph} = \sqrt{(C_{4444}/\rho)}$; поперечна хвилля з поляризацією в напрямку осі ординат, і фазовою швидкістю, яка представляє-

стється у наступному вигляді $v_{ph} = \sqrt{((1/2)(C_{1111} - C_{2211})/\rho)}.$

В ортотропних матеріалах три поляризовані хвилі поширяються вздовж кожної з трьох осей симетрії - поздовжньої, поперечної горизонтальної поляризації і поперечно вертикальної поляризації. Деякі з них мають однакові фазові швидкості, як у випадку трансверсально-ізотропних матеріалів [25,28].

Наступний крок при вивченні плоских хвиль в ізотропних матеріалах оснований на припущення, що напрямок поширення збігається з віссю абсцис таким чином, що

$$\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}. \quad (1.11)$$

Підстановка представлення (1.11) в рівняння руху дає три лінійні хвильові рівняння

$$\rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_2 - \mu u_{2,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_3 - \mu u_{3,11} = 0. \quad (1.12)$$

Рівняння (1.12) описують одну поздовжну плоску хвиллю (P -хвиллю), дві по перечні плоскі хвилі - горизонтально поляризовану хвиллю (SH -хвиллю) і вертикально поляризовану хвиллю (SV -хвиллю). Відповідні розв'язки рівнянь (1.12) у вигляді гармонічних хвиль є такими

$$u_1(x_1, t) = u_1^o e^{i(k_L x_1 - \omega t)}, \quad k_L = (\omega/v_L), \quad v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1.13)$$

$$u_2(x_1, t) = u_2^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad u_3(x_1, t) = u_3^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad k_T = (\omega/v_T), \quad v_T = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (1.14)$$

Таким чином, плоскі гармонічні хвилі поширяються в лінійно пружному ізотропному середовищі з постійною швидкістю і є найпростішими хвильами, що не є дисперсійними хвильами.

Покажемо чотири стандартні зображення для пружних плоских гармонічних хвиль: один тривимірний хвильовий графік "амплітуда хвилі – просторова координата - час" і три двовимірні графіки "амплітуда - просторова координатта" (з фіксованим моментом часу), "фазова швидкість - частота" і "хвильове число - частота" (два останніх є так званими дисперсійними кривими в загальному випадку, в цьому найпростішому випадку вони є прямыми лініями).

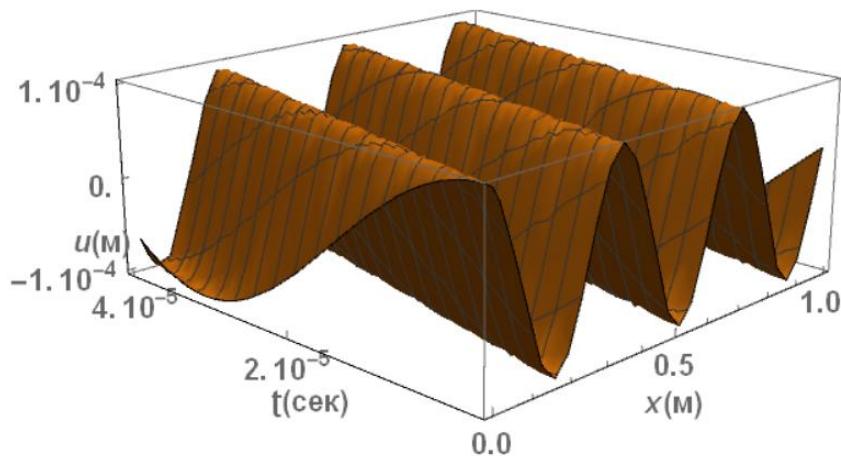


Рис. 1.1. Залежність амплітуди плоскої хвилі від просторової координати і часу

Всі графіки відповідають пружній поздовжній плоскій хвилі, що поширюється з частотою $\omega = 100$ КГц, з наступними значеннями: $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ Кг/м³, $\lambda = 94$ МПа, $\mu = 79$ МПа. Хвильове число і швидкість дорівнюють $k_L = \left(\frac{\omega}{v_L} \right) = 17,6$ (1/м); $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 5,68$ км/с. Фаза хвилі: $x_1 - 1 \cdot 10^5 t$, $z = kx_1 - \omega t = 17,6$, коли відстань вимірюється в метрах, а час в секундах.

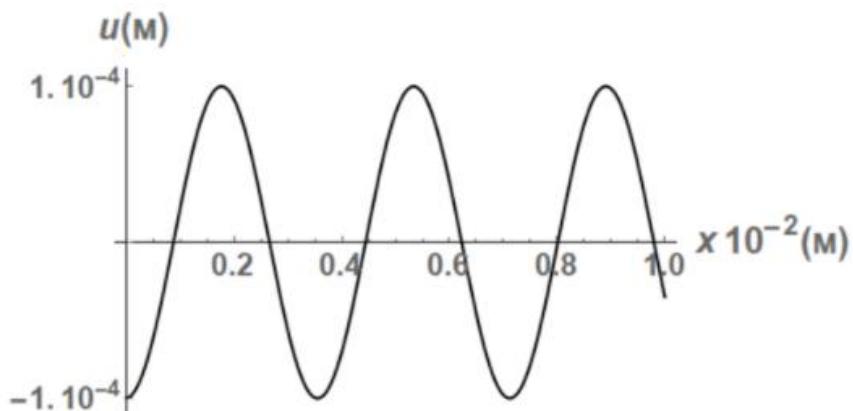


Рис. 1.2. Залежність амплітуди хвилі від просторової координати

На рисунках 1.1 і 1.2 показано графіки хвиль відповідно до формули $u(x_1, t) = u^o \cos(17,6x_1 - 1 \cdot 10^5 t)$, де початкова амплітуда хвилі u^o вважається малою $u^o = 1 \cdot 10^{-4}$ м і відповідає на графіку одиниці.

Рисунки 1.3 і 1.4 відповідають довільній частоті і показують дві прямі лінії $v_{ph} = v_{ph}(\omega) = 5,68, k = 0,176\omega$.

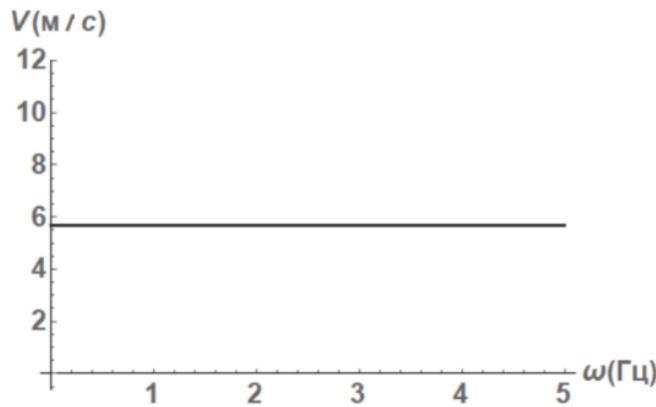


Рис. 1.3. Залежність фазової швидкості від частоти

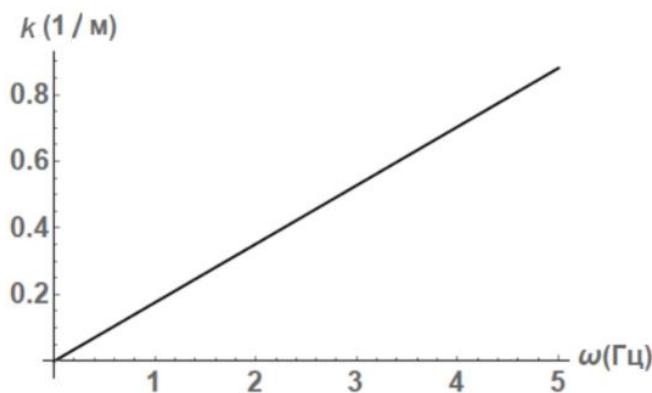


Рис.1.4. Залежність хвильового числа від частоти

Таким чином, плоскі пружні гармонічні хвилі відображають найпростішу поведінку хвилі: синусоїdalний профіль не спотворюється з поширенням, хвиля не є дисперсійною - фазова швидкість постійна і не залежить від частоти, натомість хвильове число лінійно залежить від частоти [48]. Тобто такі хвилі є найпростішими і мають простий синусоїdalний або косинусоїdalний профіль.

1.3. Класичні лінійно пружні циліндричні радіальні хвилі

Класична радіальна циліндрична хвиля є хвилею, яка виникає в нескінченному лінійно пружному тілі з циліндричною порожниною, до поверхні $r = r_o$ якої прикладено однорідний у просторі і гармонічний у часі тиск

$$p(t) = p_o e^{i\omega t} \quad (p_o = \text{const}).$$

Якщо вибрати циліндричну систему координат $O\varphi z$ у такий спосіб, що вісь Oz співпадає з віссю порожнини, то задача про рух хвилі стає осеси-

метричною і всі функції, які описують рух, залежатимуть від однієї просторової координати – радіуса r і часу t .

У цьому випадку лише одне з трьох зміщень – радіальне зміщення – не є нульовим $u_r(r,t) \neq 0$, $u_\varphi(r,t) = u_z(r,t) = 0$ і лише три напруження відрізняються від нуля – $\sigma_{rr}(r,t)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r,t)$, $\sigma_{zz}(r,t)$.

Компоненти тензорів деформації і напружень виражаються формулами

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r r, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{rz} = 0,$$

$$\sigma_{rr} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r^2} + 2\mu \frac{u_r}{r^3}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right).$$

Ці компоненти можна виразити через потенціал $\Phi(r,t)$ формулами

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \sigma_{rr} = 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (1.15)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2\mu}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \Delta_r \Phi,$$

у яких введений оператор Лапласа $\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$.

Потенціал $\Phi(r,t)$ задовольняє рівняння

$$v_L^2 \Delta_r \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (1.16)$$

Це рівняння має відомий розв'язок через функцію Ханкеля (циліндричну функцію) у вигляді так званої циліндричної хвилі [30,34].

Циліндрична хвиля поширюється вздовж радіальної координати перпендикулярно до осі симетрії від поверхні порожнини до нескіченності. Вона задовольняє на нескінченності умови Зоммерфельда (умови скінченності і випромінювання). Розв'язок записується через функцію Ханкеля першого роду і нульового індекса

$$\Phi(r,t) = \Phi_o H_o^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t} \quad (\Phi_o = \text{const}). \quad (1.17)$$

Як можна бачити з формул (1.16), (1.17), цей розв'язок включає швидкість хвилі (хвильове число), яка співпадає з швидкістю плоскої поздовжної хвилі. Але функція Ханкеля з розв'язку (1.17) суттєво відрізняється від експоненціальної функції з розв'язку для плоскої поздовжної хвилі. Циліндрична хвиля (1.17) вже не є гармонічною (можна лише сказати, що вона є асимптоматично гармонічною) і її амплітуда (а отже і інтенсивність) спадає зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи від часу поширення хвилі. Невідома початкова амплітуда Φ_o визначається з граничної умови на поверхні порожнини, де задане гармонічне коливання $\sigma_{rr}(r_o, t) = -p_o e^{i\omega t}$, і дорівнює

$$\Phi_o = \frac{p_o}{k_L(2\mu + \lambda k_L)H_o^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)}.$$

Тоді поширення циліндричної хвилі радіального зміщення описується вже двома функціями Ханкеля першого і другого порядку і задається формулою

$$u_r(r, t) = \frac{p_o k_L}{k_L(2\mu + \lambda k_L)H_o^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}. \quad (1.18)$$

Таким чином, для кожного фіксованого моменту часу профіль циліндричної хвилі (1.18) повторює графік функції Ханкеля $H_1^{(1)}(k_L r)$ (цей графік починається з поверхні порожнини $r = r_o$ і закінчується в нескінченості).

Амплітуда циліндричної хвилі (1.18) зменшується зі збільшенням відстані, що пройшла хвиля. Для великих відстаней поширення цієї циліндричної хвилі її параметри будуть дуже близькими до параметрів відповідної плоскої поздовжної хвилі (крім амплітуди).

1.4. Класичні лінійно пружні циліндричні крутильні хвилі

Класична пружна крутильна хвиля є хвилею, яка виникає в нескінченному лінійно пружному циліндрі заданого радіуса. Звичайно використовуєть

ся циліндрична система координат $Or\varphi z$ у такий спосіб, що вісь Oz вибирають за вісь циліндра [29,30,34].

Головним припущенням є те, що на боковій поверхні циліндра відсутні напруження $\sigma_{rr}(r_0, \varphi, z, t) = \sigma_{r\varphi}(r_0, \varphi, z, t) = \sigma_{rz}(r_0, \varphi, z, t) = 0$

Далі обмежимось розглядом двома частинними випадками. Спільним у них є припущення, що зміщення не залежать від кута φ , тобто, що напруженодеформований стан, є осесиметричним. Відрізняються випадки обмеженнями щодо виду зміщень.

Перший випадок допускає існування в циліндрі лише зміщення $u_\varphi(r, z, t)$ і інші вважаються відсутніми $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$

Другий випадок допускає існування зміщень $u_r(r, z, t), u_z(r, z, t)$, а третє зміщення вважається відсутнім $u_\varphi(r, z, t) = 0$.

Розглянемо докладно перший випадок. Для цього запишемо рівняння руху (1.7) в наступному вигляді (для ізотропного середовища)

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \vec{\Delta} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (1.19)$$

при відсутніх масових силах в циліндричній системі координат

$$\begin{aligned} \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial l}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= 0 \\ \mu \left(\Delta u_\varphi - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial l}{\partial r} - \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} &= 0 \\ \mu \Delta u_r + (\lambda + \mu) \frac{\partial l}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Тут через Δ позначено оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

а через l позначена дилатація

$$l = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Компоненти тензора деформації виражаються за формулами

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right).\end{aligned}$$

Компоненти тензора напружень вираховуються за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda I, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda I, \quad \sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda I, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\varphi z} = 2\mu\varepsilon_{\varphi z}.\end{aligned}$$

Якщо у рівняннях руху (1.20) врахувати умови першого випадку, то рівняння спрощуються і залишається лише одне рівняння щодо зміщення u_φ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\varphi = 0, \quad \left(c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \right). \quad (1.21)$$

Розв'язок цього рівняння шукають у вигляді гармонічної хвилі з залежністю від радіуса амплітудою

$$u_\varphi(r, z, t) = u_\varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.22)$$

Розв'язок дійсно існує, якщо амплітуду знаходити як розв'язок такого звичайного диференціального рівняння

$$u_{\varphi,rr}'' + \frac{1}{r} u_{\varphi,r}' + \left(k_2^2 - k^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_\varphi = 0. \quad (1.23)$$

Розв'язок, який не має особливості при підході до осі циліндра, буде таким: розв'язок, що виражається через функцію Бесселя першого роду і першого порядку $u_\varphi(r) = u_\varphi^0 \cdot J_1(\beta r)$, $(\beta = \sqrt{k_2^2 - k^2})$.

Отже, розв'язок у вигляді циліндричної хвилі має вигляд

$$u_\varphi(r, z, t) = u_\varphi^0 \cdot J_1(\beta r) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.24)$$

В ньому залишається невизначене хвильове число k , а отже і фазова швидкість. Його знаходить з граничних умов. Легко бачити, що дві з цих умов задовольняються тотожно. Це видно з того, що для першого випадку відмінним від нуля буде лише напруження $\sigma_{r\varphi}$.

Підстановка розв'язку (1.24) в граничні умови дає трансцендентне рівняння для знаходження величини βr_0

$$\beta r_0 J_0(\beta r_0) = 2J_1(\beta r_0) \quad (1.25)$$

Таким чином, крутільна хвиля є гармонічною і поширюється зі сталою фазовою швидкістю, але таких швидкостей буде певна зліченна (дискретна) множина. Другою особливістю крутільної хвилі зміщення u_φ є змінність амплітуди в залежності від радіуса.

Всі відзначенні особливості зберігаються і для циліндричної хвилі напруження $\sigma_{r\varphi}$

$$\sigma_{r\varphi}(r, z, t) = u_\varphi^0 (2J_1(\beta r) - \beta r J_0(\beta r)) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.26)$$

Оскільки напруження $\sigma_{r\varphi}$ характеризує кручення, то в механіці про хвилю (1.26) говорять як про крутільну хвилю.

1.5. Необхідна попередня інформація щодо нелінійного пружного деформування матеріалів

1.5.1. Про поділ теоретичних моделей пружних матеріалів та деформацій на три групи

В класична механіка матеріалів теоретичні моделі пружного деформування розділяють на три групи. Відповідно і створені для них наступні назви: гіперпружні, пружні і гіпопружні матеріали. Приставка *гіпер* - означає сильне збільшення чого-небудь проти норми і приставка *гіпо* - означає сильне зменшення чого-небудь проти норми. Тому вважається, що гіперпружні матеріали мають властивість пружності в більшій степені, ніж пружні, тоді як гіпопружні мають властивість пружності в меншій степені, ніж пружні [76].

Гіперпружність матеріалу визначають за ознакою, згідно якою питома внутрішня енергія (енергія пружного деформування, потенціал) W є аналітичною функцією компонентів тензора деформацій, віднесених до природ-

ного стану. З точки зору математичного формалізму, аналітичність енергії $W(\varepsilon_{nm})$ дозволяє представити внутрішню енергію, залежну від шести незалежних змінних ε_{IK} , у вигляді розклад у ряд Тейлора в околі "точки" з нульовими координатами $\varepsilon_{IK} = 0$ (при цьому покладається, що два перших члени ряду дорівнюють нулю) [1-4]

$$W(\varepsilon_{IK}) = (1/2!) \left[\left(\partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijkl} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ + (1/3!) \left[\left(\partial^3 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijklmn} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \quad (1.27)$$

Великі труднощі в побудові нелінійних моделей виникають при переході від лінійного закону Гука до більш складних нелінійних залежностей як для ізотропних, так і для анізотропних матеріалів. Простіше працювати з ізотопними матеріалами.

Для ізотропних матеріалів пружні сталі є такими

$$C_{ijkl} \equiv \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ C_{ijklmn} = 2C \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 2B (\delta_{ij} I_{klmn} + \delta_{kl} I_{mijn} + \delta_{mn} I_{ijkl}) + \\ + (1/2) A (\delta_{ik} I_{jlmn} + \delta_{il} I_{jkmn} + \delta_{jk} I_{ilmn} + \delta_{jl} I_{ikmn}).$$

В позначеннях Фойхта $C_{ijkl} \equiv C_{IJ}$, $C_{ijklmn} \equiv C_{IJK}$ і для випадку властивостей ізотропії внутрішня енергія (1.27) має вигляд

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2) C_{12} (\varepsilon_{mm})^2 + (1/2) (C_{11} - C_{12}) (\varepsilon_{ik})^2 + \\ + (4/3) C_{456} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{km} + C_{144} (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{mm} + (1/6) C_{123} (\varepsilon_{mm})^3 + \dots \quad (1.28)$$

Найбільш застосовними є потенціали Мернагана, Рівліна-Саундерса, Муні, Йона, Блетца-Ко, Хазановича, Трелоара, Огдена-Саундерса, Сіньйоріні. Всі ці моделі запропоновані на основі умоглядних міркувань (за виразом Лур'є [2,39]), відносяться до теоретичних побудов феноменологічного характеру і припускають в кінцевому рахунку, визначення присутніх в потенціалах

фізичних постійних, методами які не пов'язані з феноменологічними міркуваннями (головним чином, експериментальними способами).

1.5.2. Основні факти з побудови нелінійної теорії пружності

В теорії деформування тіла як зміни його початкової форми використовують поняття, пов'язані с геометрією тіла (кінематичні) і пов'язані з діючими на тіло і всередині тіла силами (кінетичні) [1,2,3,63,65,76]. Тіло в механіці задають як область тривимірного простору R^3 , в кожній точці якого задана густина маси ρ . В R^3 може бути задана лагранжева $\{x_k\}$ чи ейлерова системи координат $\{X_k\}$.

До понять кінематики відносять конфігурацію χ , вектор зміщення $\vec{u} = \{u_k\}$ тензор деформацій ε_{ik} і тензор поворотів ω_{ik} . До понять кінетики відносять зовнішні і внутрішні сили, включаючи тензори внутрішніх напружень.

Конфігурацію тіла в момент часу t називають актуальною, тоді як конфігурацію тіла в довільно обраний початковий момент часу t^0 називають відліковою.

Величина деформації визначається за величиною градієнтів деформації $u_{i,k}$. Якщо вони малі в порівнянні з одиницею $|u_{i,k}| \ll 1$, то відповідні деформації називають малими. При цьому деформації можуть залишатися нелінійними [21], що, зокрема, справедливо в разі моделі Мернагана. У разі малих деформацій компоненти тензорів деформації і обертань настільки малі, що форми недеформованого і деформованого тіла можуть наближено вважатися однаковими.

Помірні деформації задаються різними обмеженнями на їх величину. Наприклад, в роботі [6] розглядаються помірно великі деформації, в даній роботі вважають помірно малими такі деформації, які в разі простого зсуву перевищують значення кута зсуву, прийняті при заміні тангенса кута зсуву самим кутом або в разі об'ємного стиснення призводять до слабкої зміни по-

чаткового одиничного об'єму.

Великі деформації розуміють як такі, коли компоненти тензорів деформації і обертань настільки великі, що форма недеформованого і деформованого тіла істотно відрізняються.

Модель Мернагана застосовна до всіх трьох типів деформацій.

При описі моделі Мернагана зазвичай використовується тензор деформації Коші-Гріна, який задається за відомим вектором переміщень $\vec{u}(x_k, t)$ в лагранжевій системі координат $\{x_k\}$ і в відліковій конфігурації

$$\varepsilon_{nm}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i}u_{i,m}). \quad (1.29)$$

1.6. Нелінійний потенціал Мернагана. Необхідні математичні і фізичні поняття

1.6.1. Математичні представлення п'ятиконстантного потенціалу

Мернагана. Пружні константи. Важлива інформація для інженерних розрахунків у яких виникає необхідність врахувати не лінійність деформування.

Дана модель основана на пружному потенціалі, запропонованому Френсісом Домініком Мернаганом [73]. Пружний потенціал Мернагана є кубічним щодо тензора деформацій. Найчастіше він записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Гріна $\varepsilon_{ik} = (1/2)(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{m,i}u_{m,k})$

$$W(\varepsilon_{ik}) = (1/2)\lambda(\varepsilon_{mm})^2 + \mu(\varepsilon_{ik})^2 + (1/3)A\varepsilon_{ik}\varepsilon_{im}\varepsilon_{km} + B(\varepsilon_{ik})^2\varepsilon_{mm} + (1/3)C(\varepsilon_{mm})^3 \quad (1.30)$$

або через перші алгебраїчні інваріанти I_k цього тензора

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}CI_1^3. \quad (1.31)$$

Тут $I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ik})$, $I_2 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^2]$, $I_3 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^3]$; λ , μ є пружними постійними

Ляме (постійними другого порядку), A, B, C є пружними постійними Мернагана (постійними третього порядку).

Необхідно звернути увагу на те, що вираз (1.30) відповідає точному представленні внутрішньої енергії у вигляді ряду Тейлора. Також існує зв'язок між постійними C_{IJK} і A, B, C

$$\begin{aligned} C_{111} &= 2(A + 3B + C), \quad C_{112} = 2(B + C), \quad C_{123} = 2C, \\ C_{144} &= B, \quad C_{166} = (1/2)A + B, \quad C_{456} = (1/4)A. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Модель Мурнагана можна вважати класичною в нелінійній теорії гіперпружних матеріалів, вона враховує всі квадратичні і кубічні складові з формулами (1.30) і описує деформування великого класу конструкційних та інших матеріалів. Якщо об'єднати дані про постійні моделі Мурнагана, що приведені в книгах [1, 2, 26], то отримаємо досить повну інформацію для десятків матеріалів. Як випливає з [1, 2, 10, 26], в наведених там таблицях, постійних моделей Мурнагана, дві постійні Ляме відповідають значенням, визначенням для досліджуваних матеріалів в рамках моделі лінійної теорії пружності, тоді як три постійні Мурнагана визначалися з дослідів з розповсюдження хвиль.

Як випливає з формул (1.30) і (1.31), вони являють собою найбільш повні представлення пружного потенціалу для гіперпружних матеріалів в рамках нехтування доданками від четвертого і далі порядків у записі внутрішньої енергії через ряд Тейлора.

Тому п'ятиконстантна модель Мурнагана є найбільш повною моделлю нелінійного деформування з кубічною нелінійністю. Вона враховує всі три перші інваріанти тензора деформацій.

Часом зустрічаються інші представлення:

$$\begin{aligned} W(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3) &= \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\hat{I}_1^2 - 2\mu\hat{I}_2 + n\hat{I}_3 - 2m\hat{I}_1\hat{I}_2 + \frac{l+2m}{3}\hat{I}_1^3, \\ W(I_1, I_2, I_3) &= \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{4}{3}\nu_3 I_3 + \nu_2 I_1 I_2 + \frac{1}{6}\nu_1 I_1^3, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{c}{3} I_3 + b I_1 I_2 + \frac{a}{3} I_1^3.$$

В (1.33) використані головні інваріантні \hat{I}_k тензора деформацій Гріна.

Пружні постійні третього порядку, які використовуються в представленнях (1.30), є зручними в певних задачах механіки і при певних експериментах щодо нелінійного деформування.

В основних наукових монографіях з нелінійної теорії пружності у яких детально описана модель Мернагана (далі такими вважатимемо монографії Лур'є [39], Гузя [19, 23] та Гаука [24]) дається таблиця переходу від однієї з цих систем до іншої. Ця таблиця показана нижче, вона скопійована з книги Гузя [19,23] (див. теж [13]).

Константи	l, m, n	A, B, C	ν_1, ν_2, ν_3	a, b, c
l		B+C	$\frac{1}{2}\nu_1 + \nu_2$	$a+b$
m		$\frac{1}{2}A + B$	$\nu_2 + 2\nu_3$	$b + \frac{1}{2}c$
n		A	$4\nu_3$	c
A	n		$4\nu_3$	c
B	$m - \frac{1}{2}n$		$4\nu_3$	b
C	$l - m + \frac{1}{2}n$		$\frac{1}{2}\nu_1$	a

ν_1	$2l - 2m + n$	$2C$		$2a$
ν_2	$m - \frac{1}{2}n$	B		b
ν_3	$\frac{1}{4}n$	$\frac{1}{4}A$		$\frac{1}{4}c$
a	$l - m + \frac{1}{2}n$	C	$\frac{1}{2}\nu_1$	
b	$m - \frac{1}{2}n$	B	ν_2	
c	n	A	$4\nu_3$	

Таб.1.1. Таблиця переходу від однієї із систем до іншої.

Доречно звернути увагу, що модель пружного потенціалу Мернагана, є корисною при інженерних розрахунках, у яких виникає необхідність враховувати нелінійність деформування. Основні властивості наступні:

1. Він є основою для моделі Мернагана нелінійного пружного деформування матеріалів.
2. На даний час цей потенціал є найчастіше застосовним в задачах про нелінійне пружне деформування, коли деформації вважаються малими (зокрема, коли задача про деформування є геометрично лінійною).
3. Він достатньо повно враховує особливості нелінійного пружного деформування (враховує всю інформацію, закладену в тензор деформації, який характеризується шістьма незалежними компонентами чи трьома незалежними інваріантами).

1.6.2. Тензори напружень, що застосовуються в моделі Мернагана

В нелінійних, балансових, а також визначальних рівняннях для моделі Мернагана можна використовувати два тензора напружень [1,2,23,27]: несиметричний тензор напруження Піоли-Кірхгоффа $t_{ik}(x_k, t)$, який утворює впорядковану пару з $u_{i,k}$ і включає напруження в момент часу t на площину елементарного об'єму в деформованому стані, які вимірюються на одиницю площині в деформованому стані; симетричний тензор напружень Лягранжа $\sigma_{ik}(x_n, t)$, який утворює впорядковану пару з ε_{ik} і включає напруження в момент часу t на площину елементарного об'єму в деформованому стані, які вимірюються на одиницю площині в недеформованому стані.

Далі використано певне спрощення потенціалу Мернагана, яке запропоноване у свій час в нелінійній акустиці. Тут у представленні потенціалу через зміщення зберігаються лише нелінійності порядку 2 і 3

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4} A \right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} + \\ + \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} + \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3. \quad (1.34)$$

Потенціал є нелінійним, тому що ця нелінійність з нелінійності щодо тензора деформацій перетворилася в нелінійність щодо градієнтів зміщень.

Загальна схема переходу від потенціалу до хвильових рівнянь фактично складається з двох кроків: спочатку слід записати конститутивні рівняння і далі використати рівняння руху. В результаті отримується якийсь нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме. Зокрема, в рамках підходу (1.34) він є таким

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mn} = F_m. \quad (1.35)$$

Справа в рівнянні (1.35) зібрані всі нелінійні члени

$$F_i = [\mu + (1/4)A] (u_{l,kk} u_{l,i} + u_{l,kk} u_{i,l} + 2u_{i,lk} u_{l,k}) + \\ + [\lambda + \mu + (1/4)A + B] (u_{l,ik} u_{l,k} + u_{k,lk} u_{i,l}) + (\lambda + B) u_{i,kk} u_{i,l} +$$

$$+(B+2C)u_{k,ik}u_{l,l}+\left[(1/4)A+B\right]\left(u_{k,lk}u_{l,i}+u_{l,ik}u_{k,l}\right). \quad (1.36)$$

Важливий факт щодо рівнянь (1.35): ці рівняння складаються з двох частин – лінійної (вона записана зліва) і нелінійної (вона записана справа). Вказано особливість дає змогу застосувати наближені методи, у яких наявність лінійного розв'язку звичайно є необхідною.

1.7. Хвильові рівняння в рамках моделі Мурнагана. Плоскі, циліндричні радіальні, циліндричні крутільні хвилі

1.7.1. Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мернагана

Використаємо далі потенціал (1.34) і запишемо в наступному вигляді

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2}\lambda(u_{m,m})^2 + \frac{1}{4}\mu(u_{i,k}+u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4}A\right)u_{i,k}u_{m,i}u_{m,k} + \\ & + \frac{1}{2}(\lambda+B)u_{m,m}(u_{i,k})^2 + \frac{1}{12}Au_{i,k}u_{k,m}u_{m,i} + \frac{1}{2}Bu_{i,k}u_{k,i}u_{m,m} + \frac{1}{3}C(u_{m,m})^3. \end{aligned}$$

Для того, щоб перейти до нелінійного хвильового рівняння потрібно виконати два кроки. На першому кроці використовується формула для напруження Кірхгофа t_{ik} , що представляється через градієнти зміщення (несиметричний тензор напруження Кірхгофа утворює пару з градієнтами зміщення, тоді як симетричний тензор напружень Лягранжа утворює пару з тензора деформації Коші-Гріна) який оцінюється відповідно до співвідношення $t_{ik} = (\partial W / \partial u_{k,i})$

$$\begin{aligned} t_{ik} = & \mu(u_{i,k}+u_{k,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ik} + \left[\mu + (1/4)A\right](u_{l,i}u_{l,k} + u_{i,l}u_{k,l} + 2u_{l,k}u_{i,l}) + \\ & + (1/2)(B - \lambda) \left[(u_{m,l})^2 \delta_{ik} + 2u_{i,k}u_{l,l} \right] + (1/4)Au_{k,l}u_{l,i} + \\ & + B(u_{l,m}u_{m,l}\delta_{ik} + 2u_{k,i}u_{l,l}) + C(u_{l,l})^2 \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Другий крок полягає у підстановці виразу (1.37) у рівняння руху
 $t_{ik,i} + X_k = \rho \ddot{u}_k$ і отриманні деякого нелінійного аналогу класичних рівнянь
Ляме

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mn} = F_m. \quad (1.38)$$

В правій частині (1.38) записуються всі нелінійні члени

$$\begin{aligned} F_i = & \left[\mu + (1/4)A \right] (u_{l,kk} u_{l,i} + u_{l,kk} u_{i,l} + 2u_{i,lk} u_{l,k}) + \\ & + \left[\lambda + \mu + (1/4)A + B \right] (u_{l,ik} u_{l,k} + u_{k,ik} u_{i,l}) + (\lambda + B) u_{i,kk} u_{l,l} + \\ & + (B + 2C) u_{k,ik} u_{l,l} + \left[(1/4)A + B \right] (u_{k,lk} u_{l,i} + u_{l,ik} u_{k,l}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Як випливає з (1.39), нелінійність має другий порядок, а відповідне пружне середовище і плоскі хвилі можна назвати квадратично нелінійними.

Розглянемо плоскі поляризовані хвилі і припустимо, що хвилі поширяються вздовж осі абсцис, тобто, $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$. Тоді потенціал (1.34) спрощується до вигляду

$$\begin{aligned} W = & (1/2) \left[(\lambda + 2\mu) (u_{1,1})^2 + \mu \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \\ & \left[\mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B) u_{1,1} \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Відповідні компоненти тензора напружень Кіргофа є наступними

$$\begin{aligned} t_{11} = & (\lambda + 2\mu) u_{1,1} + (3/2) \left[\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C) \right] (u_{1,1})^2 + \\ & + (1/2) \left[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right], \\ t_{12} = & \mu u_{2,1} + (1/2) \left[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1} u_{2,1}, \\ t_{13} = & \mu u_{3,1} + (1/2) \left[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B \right] u_{1,1} u_{3,1}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Підстановка (1.41) в рівнянні руху дає квадратичне нелінійне хвильове рівняння для трьох поляризованих плоских пружних P, SH, SV хвиль

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}), \quad (1.42)$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{2,1}), \quad (1.43)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}), \quad (1.44)$$

$$N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (1.45)$$

Особливістю нелінійних хвильових рівнянь (1.42) - (1.45) є те, що ліві частини є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві включають тільки квадратично нелінійні доданки. Ця структура виявилася дуже зручною в майбутніх дослідженнях. Друга особливість полягає в тому, що, на відміну від лінійних хвильових рівнянь, нелінійні рівняння є зв'язаними і цей зв'язок не є симетричним.

Для аналізу рівнянь (1.42) - (1.45) звичайно використовувалися два методи - метод послідовних наближень і метод повільно змінних амплітуд. Для цього необхідне припущення про слабку нелінійність в пружному середовищі, що означає деяке обмеження на модель пружного деформування і хвильові характеристики (амплітуда, довжина хвилі).

1.7.2. Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення циліндричних радіальних хвиль в рамках моделі Мернагана

Вважаємо, що деформування гіперпружного середовища описується пружним потенціалом Мернагана

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3}C I_1^3,$$

де три перших алгебраїчних інваріанті мають вигляд

$$I_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{ik} g^{ik} = \varepsilon_{11} \cdot 1 + \varepsilon_{22} \cdot \frac{1}{r^2} + \varepsilon_{33} \cdot 1, \quad (1.46)$$

$$I_2(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{im} \varepsilon_{nk} g^{ik} g^{nm} = \quad (1.47)$$

$$I_3(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{pm} \varepsilon_{in} \varepsilon_{kq} g^{im} g^{pq} g^{kn} =$$

$$= (\varepsilon_{11})^3 + 3\varepsilon_{11}(\varepsilon_{12})^2 \frac{1}{r^2} + 3\varepsilon_{11}(\varepsilon_{13})^2 + 3(\varepsilon_{12})^2 \varepsilon_{22} \frac{1}{r^4} + 6\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} \frac{1}{r^2} +$$

$$+3(\varepsilon_{13})^2\varepsilon_{33}+(\varepsilon_{22})^3\frac{1}{r^6}+3\varepsilon_{22}(\varepsilon_{23})^2\frac{1}{r^4}+3(\varepsilon_{23})^2\varepsilon_{33}\frac{1}{r^2}+(\varepsilon_{33})^3 \quad (1.48)$$

де через λ, μ позначені пружні сталі Ляме (сталі другого порядку), через A, B, C – пружні сталі Мернагана (сталі третього порядку).

Покажемо схему виводу нелінійних рівнянь руху. Спочатку записуються рівняння руху [42,80]

$$\nabla_k \left[\sigma^{ki} (\delta_i^n + \nabla_i u^n) \right] = \rho \ddot{u}^i \quad (1.49)$$

Система має вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left[\sigma^{11} (1 + \nabla_1 u^1 + \nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3) \right] + \nabla_2 \left[\sigma^{21} (1 + \nabla_1 u^1 + \nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3) \right] + \\ + \nabla_3 \left[\sigma^{31} (1 + \nabla_1 u^1 + \nabla_1 u^2 + \nabla_1 u^3) \right] = \rho \ddot{u}^1 \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left[\sigma^{12} (1 + \nabla_2 u^1 + \nabla_2 u^2 + \nabla_2 u^3) \right] + \nabla_2 \left[\sigma^{22} (1 + \nabla_2 u^1 + \nabla_2 u^2 + \nabla_2 u^3) \right] + \\ + \nabla_3 \left[\sigma^{32} (1 + \nabla_2 u^1 + \nabla_2 u^2 + \nabla_2 u^3) \right] = \rho \ddot{u}^2, \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \left[\sigma^{13} (1 + \nabla_3 u^1 + \nabla_3 u^2 + \nabla_3 u^3) \right] + \nabla_2 \left[\sigma^{23} (1 + \nabla_3 u^1 + \nabla_3 u^2 + \nabla_3 u^3) \right] + \\ + \nabla_3 \left[\sigma^{33} (1 + \nabla_3 u^1 + \nabla_3 u^2 + \nabla_3 u^3) \right] = \rho \ddot{u}^3. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Більш зручна форма запису рівнянь може бути отримана за допомогою формул [35]

$$\nabla_n t^{nm} = \frac{\partial t^{nm}}{\partial \theta^n} + t^{km} \Gamma_{kn}^n + t^{nk} \Gamma_{kn}^m, \quad \nabla_i u^m = \frac{\partial u^m}{\partial \theta^i} + u^n \Gamma_{ni}^m, \quad \nabla_k g_n^m = 0 \quad (1.53)$$

і з врахуванням формул зв'язку між коваріантними, контрваріантними і фізичними ($u_{(i)}$) координатами [35,75]:

$$u_{(i)} = |\vec{e}_i| u^i = \frac{1}{|\vec{e}_i|} u_i, \quad \sigma_{(i)(j)} = |\vec{e}_i| |\vec{e}_j| \sigma^{ij} = \frac{1}{|\vec{e}_i| |\vec{e}_j|} \sigma_{ij}. \quad (1.54)$$

Враховуючи (1.34), циліндричні координати напруження зв'язані між собою таким чином:

$$\sigma_{rr} = \sigma^{11} = \sigma_{11}, \quad \sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma^{22} = \frac{1}{r^2} \sigma_{22}, \quad \sigma_{zz} = \sigma^{33} = \sigma_{33},$$

$$\sigma_{r\theta} = r \sigma^{12} = \frac{1}{r} \sigma_{12}, \quad \sigma_{\theta z} = r \sigma^{23} = \frac{1}{r} \sigma_{23}, \quad \sigma_{rz} = \sigma^{13} = \sigma_{13}. \quad (1.55)$$

Для числового аналізу зручно записати нелінійні хвильові рівняння через компонети вектора переміщень. Тому знаходимо представлення компонент тензора напружень у вигляді нелінійних функцій компонент деформації за формулою (визначальні спiввiдношення)

$$\sigma_{ik} = (\partial W / \partial \varepsilon_{ik}). \quad (1.56)$$

При цьому додатково приймемо припущення щодо збереження квадратичної нелінійності цих функцій і нехтування більш високими нелінійностями. Таке припущення приймалося раніше в нелінійній акустиці при аналізі нелінійних пружних хвиль в декартових координатах [37,48, 80, 82].

$$\begin{aligned} \sigma^{11} &= \lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{11}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{11}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{11}} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} \right) + C I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} = \\ &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{11} + A \left[(\varepsilon_{11})^2 + \frac{1}{3r^2} (\varepsilon_{12})^2 + \frac{1}{3} (\varepsilon_{13})^2 \right] + B (2\varepsilon_{11} I_1 + I_2) + C I_1^2, \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{22} &= \frac{1}{r^2} \left[\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{22}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{22}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{22}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{22}} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{22}} \right) + \frac{1}{3} C I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{22}} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{22} + A \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{r^2} (\varepsilon_{22})^2 + \frac{1}{3} (\varepsilon_{12})^2 + \frac{1}{3r^2} (\varepsilon_{23})^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + B \left(\frac{2}{r^2} \varepsilon_{22} I_1 + I_2 \right) + C I_1^2 \right], \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{33} &= \lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{33}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{33}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{33}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{33}} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{33}} \right) + C I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{33}} = \\ &= \lambda I_1 + 2\mu \varepsilon_{33} + A \left[(\varepsilon_{33})^2 + \frac{1}{3r^2} (\varepsilon_{23})^2 + \frac{1}{3} (\varepsilon_{13})^2 \right] (\varepsilon_{33})^2 + \end{aligned}$$

$$+B(2\varepsilon_{33}I_1 + I_2) + CI_1^2, \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{12}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{12}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{12}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{12}} + \cancel{I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{12}}} \right) + \cancel{CI_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{12}}} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[2\mu\varepsilon_{12} + \left(\frac{2}{3}A + 2B \right) \varepsilon_{12}I_1 + \frac{2}{3r^2} A\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} \right], \end{aligned} \quad (1.60)$$

(перекреслені доданки є нульовими, оскільки перший інваріант не залежить від зсувних компонент тензора деформацій)

$$\begin{aligned} \sigma^{13} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{13}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{13}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{13}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{13}} + \cancel{I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{13}}} \right) + \cancel{CI_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{13}}} = \\ &= \left[2\mu\varepsilon_{13} + \left(\frac{2}{3}A + 2B \right) \varepsilon_{13}I_1 + \frac{2}{3r^2} A\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} \right], \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{23}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{23}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{23}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{23}} + \cancel{I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{23}}} \right) + \cancel{CI_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{23}}} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left[2\mu\varepsilon_{23} + \left(\frac{2}{3}A + 2B \right) \varepsilon_{23}I_1 + \frac{2}{3r^2} A\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

При обчисленні компонент тензора напружень використовуються вирази для похідних від алгебраїчних інваріантів

$$\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{11}} = 1, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{33}} = 1, \quad \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{13}} = \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{23}} = 0,$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{11}} = 2\varepsilon_{11}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{22}} = \frac{2}{r^4} \varepsilon_{22}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{33}} = 2\varepsilon_{33},$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{4}{r^2} \varepsilon_{12}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{23}} = \frac{4}{r^2} \varepsilon_{23}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon_{13}} = 4\varepsilon_{13},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{11}} = 3(\varepsilon_{11})^2 + 3(\varepsilon_{12})^2 \frac{1}{r^2} + 3(\varepsilon_{13})^2,$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{22}} = 3(\varepsilon_{12})^2 \frac{1}{r^4} + 3(\varepsilon_{22})^2 \frac{1}{r^6} + 3(\varepsilon_{23})^2 \frac{1}{r^4},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{33}} = 3(\varepsilon_{13})^2 + 3(\varepsilon_{23})^2 \frac{1}{r^2} + 3(\varepsilon_{33})^2,$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{12}} = 6\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} \frac{1}{r^2} + 6\varepsilon_{12}\varepsilon_{22} \frac{1}{r^4} + 6\varepsilon_{13}\varepsilon_{32} \frac{1}{r^2},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{13}} = 6\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + 6\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} \frac{1}{r^2} + 6\varepsilon_{13}\varepsilon_{33},$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{23}} = 6\varepsilon_{12}\varepsilon_{13} \frac{1}{r^2} + 6\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} \frac{1}{r^4} + 6\varepsilon_{23}\varepsilon_{33} \frac{1}{r^2}. \quad (1.63)$$

Для розглянутих раніше конфігурацій пружного середовища можна записати нелінійні рівняння руху з різним врахуванням фізичної і геометричної нелінійностей.

Варіант 1. Використання в нелінійних визначальних співвідношеннях лінійного тензора деформацій Коші-Гріна і нехтування нелінійними правими частинами (внаслідок чого нелінійність буде чисто фізичною).

Варіант 2. Використання в нелінійних визначальних співвідношеннях нелінійного тензора деформацій Коші-Гріна і нехтування нелінійними правими частинами (внаслідок чого нелінійність буде не чисто фізичною).

Варіант 3. Використання в нелінійних визначальних співвідношеннях нелінійного тензора деформацій Коші-Гріна і врахування нелінійних правих частин (внаслідок чого всі нелінійності будуть враховані).

Варіант 4. Використання лінійних визначальних співвідношень, нелінійного тензора деформацій Коші-Гріна і врахування нелінійних правих частин (внаслідок чого нелінійність буде чисто геометричною).

Запишемо рівняння руху (1.49) для конфігурації 1

$$\vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \vec{u}(r, \vartheta, z) = \left\{ u_r(r, \vartheta) = u_1 = u^1, u_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{1}{r} u_2 = r u^2, u_z = u_3 = u^3 = 0 \right\} [42, 48].$$

В цьому випадку третє рівняння вироджується в тотожність, а перші два

набувають вигляду

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\vartheta,\vartheta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) - \rho\ddot{u}_r = -\frac{1}{r}(\dot{u}_{r,r} + r\dot{u}_{rr})\sigma_{rr} - \quad (1.64)$$

$$-u_{r,r}\sigma_{rr,r} - \frac{1}{r}(u_{r,\vartheta} - u_\vartheta)\sigma_{r\vartheta,r} - \frac{1}{r}u_{r,r}\sigma_{r\vartheta,\vartheta} - \frac{1}{r^2}(u_{r,\vartheta} - u_\vartheta)\sigma_{\vartheta\vartheta,\vartheta},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r}(\sigma_{r\vartheta,r} + \sigma_{\vartheta\vartheta,\vartheta} + 2\sigma_{r\vartheta}) - \rho\ddot{u}_\vartheta = \\ & = -\frac{1}{r}(u_{\vartheta,r} + ru_{\vartheta,rr})\sigma_{rr} - \frac{2}{r}(u_{\vartheta,\vartheta r} + u_{r,r})\sigma_{r\vartheta} - \frac{1}{r^2}(u_{\vartheta,\vartheta\vartheta} - 2u_{r,\vartheta} + u_\vartheta)\sigma_{\vartheta\vartheta} - \\ & - u_{\vartheta,r}\sigma_{rr,r} - \frac{1}{r}(u_{\vartheta,\vartheta} - u_r)\sigma_{r\vartheta,r} - \frac{1}{r}u_{\vartheta,r}\sigma_{r\vartheta,\vartheta} - \frac{1}{r^2}(u_{\vartheta,\vartheta} - u_r)\sigma_{\vartheta\vartheta,\vartheta}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Особливість отриманих рівнянь полягає в тому, що в обох зліва виділені лінійні частини, які відповідають класичній лінійній теорії

$$\begin{aligned} & \sigma_{r\vartheta,r} + \sigma_{\vartheta\vartheta,z} + \frac{2}{r}\sigma_{r\vartheta} - \rho\ddot{u}_\vartheta = 2\mu\left(u_{\vartheta,rr} - \frac{1}{r}u_{\vartheta,r} + \frac{1}{r^2}u_\vartheta\right) + \frac{2}{r}2\mu\left(u_{\vartheta,r} - \frac{1}{r}u_\vartheta\right) + \\ & + 2\mu u_{\vartheta,zz} - \rho\ddot{u}_\vartheta \rightarrow u_{\vartheta,rr} + \frac{1}{r}u_{\vartheta,r} - \frac{1}{r^2}u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} - \frac{\rho}{2\mu}\ddot{u}_\vartheta = 0; \end{aligned} \quad (1.66)$$

справа зібрани нелінійні доданки двох типів – ті, що включають компоненти тензора напружень і ті, що включають перші похідні компонентів тензора напружень.

З вигляду цих доданків випливає, що рівняння руху будуть нелінійними навіть у випадку лінійних співвідношень між напруженнями і деформаціями (варіант запису 1), що відповідає фізично лінійній теорії. Тим не менше, геометрична нелінійність залишається і породжує нелінійні рівняння. Позитивна сторона отриманих представлень полягає в тому, що такого роду рівняння отримують при використанні декартових координат, вони детально вивчалися і до них зручно застосовувати метод послідовних наближень [15, 66, 80].

Для розглянутого стану плоскої деформації записуємо необхідні ком-

поненти тензора напружень як функції переміщень. Для такого стану вирази для інваріантів спрощуються

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \frac{\varepsilon_{22}}{r^2}, \quad I_2 = (\varepsilon_{11})^2 + \left(\frac{\varepsilon_{22}}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{12}}{r}\right)^2.$$

Отримуємо необхідні представлення через градієнт деформації

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon_{ik}) &= u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 + \frac{1}{2}(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}(u_{g,g} + u_r) + \frac{1}{2}(u_{r,g} - u_g)^2 + \frac{1}{2}(u_{g,g} + u_r)^2 = \\ &= u_{r,r} + \frac{1}{r}(u_{g,g} + u_r) + \frac{1}{2} \left[(u_{r,r})^2 + (u_{g,r})^2 + (u_{r,g} - u_g)^2 + (u_{g,g} + u_r)^2 \right]. \end{aligned}$$

В наступних виразах збережені лише квадратично нелінійні складові компонентів деформацій

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon_{ik}) &= \left[u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 + \frac{1}{2}(u_{g,r})^2 \right]^2 + \left[\frac{1}{r}(u_{g,g} + u_r) + \frac{1}{2r^2}(u_{r,g} - u_g)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2r^2}(u_{g,g} + u_r)^2 \right]^2 + \left(\frac{1}{2r} \left[ru_{g,r} - u_g + u_{r,g} + u_{r,r}(u_{r,g} - u_g) + u_{g,r}(u_{g,g} + u_r) \right] \right)^2 \\ I_2(\varepsilon_{ik}) &= (u_{r,r})^2 + \frac{1}{r^2}(u_{g,g} + u_r)^2 + \frac{1}{4r^2}(ru_{g,r} - u_g + u_{r,g})^2, \\ (I_1)^2 &= (u_{r,r})^2 + \frac{1}{r^2}(u_{g,g} + u_r)^2 + \frac{2}{r}u_{r,r}(u_{g,g} + u_r), \\ (\varepsilon_{11})^2 &= (u_{r,r})^2, \quad (\varepsilon_{22})^2 = r^2(u_{g,g} + u_r)^2, \end{aligned}$$

$$2\varepsilon_{11}I_1 = 2 \left[(u_{r,r})^2 + \frac{1}{r}u_{r,r}(u_{g,g} + u_r) \right], \quad 2\varepsilon_{22}I_1 = 2 \left[(u_{g,g} + u_r)^2 + ru_{r,r}(u_{g,g} + u_r) \right]$$

і вирази для компонентів тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda(u_{g,g} + u_r)\frac{1}{r} + \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + A + 3B + C \right](u_{r,r})^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda + B + C \right)(u_{g,g} + u_r)^2 + \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{r}(B+C)u_{r,r}(u_{g,g}+u_r)+\frac{B}{4r^2}(ru_{g,r}+u_{r,g}-u_g)^2+$$

$$+\frac{(\lambda+2\mu)}{2}(u_{g,r})^2+\frac{\lambda}{2}(u_{r,g}-u_g)^2,$$

$$\sigma_{22}=\frac{1}{r^2}\sigma_{gg}=(\lambda+2\mu)(u_{g,g}+u_r)\frac{1}{r}+\lambda u_{r,r}+$$

$$+\left[\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)+A+3B+C\right]\frac{1}{r^2}(u_{g,g}+u_r)^2+\left(\frac{1}{2}\lambda+B+C\right)(u_{r,r})^2+$$

$$+\frac{2}{r}(B+C)u_{r,r}(u_{g,g}+u_r)+\frac{B}{4r^2}(ru_{g,r}+u_{r,g}-u_g)^2+$$

$$+\frac{(\lambda+2\mu)}{2}(u_{r,g}-u_g)^2+\frac{\lambda}{2}(u_{g,r})^2,$$

$$\begin{aligned}\sigma^{12}=\frac{1}{r^2}\sigma^{rg}=\frac{1}{r^2}&\left(2\mu r\left(u_{g,r}+\frac{1}{r}u_{r,g}-\frac{1}{r}u_g\right)+\right.\\&+\left(2\mu+\frac{2}{3}A+2B\right)u_{r,r}(u_{g,g}+u_r)+\left(\frac{2}{3}A+2B\right)[ru_{r,r}u_{g,r}+\\&+\left.\frac{1}{r}(u_{r,g}-u_g)(u_{g,g}+u_r)\right]+\left(2\mu+\frac{2}{3}A+2B\right)u_{g,r}(u_{g,g}+u_r)\Big).\end{aligned}$$

Нелінійні хвильові рівняння для варіанту запису 2 (врахована фізична і частково геометрична нелінійність), записані через компоненти вектора переміщень, мають вигляд

$$\mu\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r^2}u_{r,gg}+\frac{1}{r}u_{r,r}-\frac{2}{r^2}u_{g,r}-\frac{1}{r^2}u_r\right)+$$

$$+(\lambda+\mu)\left(u_{r,rr}+\frac{1}{r}u_{g,gr}+\frac{1}{r}u_{r,r}-\frac{1}{r^2}u_r\right)-\rho\ddot{u}_r\equiv$$

$$\equiv\mu\left(\Delta u_r-\frac{2}{r^2}u_{g,r}-\frac{2}{r^2}u_r\right)+(\lambda+\mu)I_{1,r}-\rho\ddot{u}_r=$$

$$\begin{aligned}
&= -[\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C)]u_{r,r}u_{r,rr} - [\lambda + 2\mu + 2(B + C)](u_{g,g} + \\
&\quad + u_{r,r}(u_{g,g} + u_r)) - \frac{B}{2r^2}(ru_{g,rr} + u_{r,g}) (ru_{g,r} + u_{r,g} - u_g) - \\
&\quad - \frac{B}{2r^3}(ru_{g,r} + u_{r,g} - u_g)^2 - (\lambda + 2\mu)u_{g,rr}u_{g,r} - \lambda(u_{r,g} - u_{g,g})(u_{r,g} - u_g) - \\
&\quad - \frac{2}{r}(B + C)\left[u_{r,rr}(u_{g,g} + u_r) + u_{r,r}(u_{g,g} + u_{r,r}) - \frac{1}{r}u_{r,r}(u_{g,g} + u_r)\right] - \\
&\quad - \frac{1}{3r}[3\mu + 2(A + 3B)][(u_{r,r} + u_{g,r})(u_{g,g} + u_r) + \\
&\quad + (u_{g,g} + u_{r,g})(u_{r,r} + u_{g,r})] - \frac{2}{3}(A + 3B)\{u_{r,r}u_{g,r} + u_{g,r}u_{r,r} + \\
&\quad + \frac{1}{r^2}[(u_{r,g} - u_{g,g})(u_{g,g} + u_r) + (u_{g,g} + u_{r,g})(u_{r,g} - u_g)]\} - \\
&\quad - \frac{1}{r}(\lambda + \mu + A + 4B + 2C)[(u_{r,r})^2 - (u_{g,g} + u_r)^2], \tag{1.67} \\
&\mu\left(u_{g,rr} + \frac{1}{r^2}u_{g,g} + \frac{1}{r}u_{g,r} + \frac{2}{r^2}u_{r,g} - \frac{1}{r^2}u_g\right) + \\
&\quad + (\lambda + \mu)\left(u_{r,r} + \frac{1}{r}u_{g,g} + \frac{1}{r}u_{r,g}\right) - \rho\ddot{u}_g \equiv \\
&\equiv \mu\left(\Delta u_g + \frac{2}{r^2}u_{r,g} - \frac{1}{r^2}u_g\right) + (\lambda + \mu)I_{1,g} - \rho\ddot{u}_g = \\
&-[\lambda + 2\mu + 2(B + C)]u_{r,r}u_{r,r} - [\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C)](u_{g,g} + u_{r,g}) \times \\
&\quad \times (u_{g,g} + u_r) - \lambda(u_{r,g} - u_{g,g})(u_{r,g} - u_g) - \frac{B}{2r^2}(ru_{g,r} + u_{r,g}) \times \\
&\quad \times (ru_{g,r} + u_{r,g} - u_g) - (\lambda + 2\mu)u_{g,r}u_{g,r} - \frac{1}{3r}[3\mu + 2(A + 3B)] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[u_{g,r,g} (u_{g,g} - u_r) + u_{r,r} (u_{g,g,g} - u_{r,g}) \right] - \\
& - \frac{1}{3r} \left[3\mu + 2(A + 3B) \right] \left[(u_{r,rr} + u_{g,rr}) (u_{g,g} + u_r) + \right. \\
& \left. + (u_{g,g,r} + u_{g,rr}) (u_{r,r} + u_{g,r}) \right] - \frac{2}{3} (A + 3B) \left\{ \frac{1}{r} u_{r,r} u_{g,r} + (u_{r,rr} u_{g,r} + u_{g,rr} u_{r,r}) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{r^2} \left[(u_{r,g,g} - u_{g,g}) (u_{g,g} + u_r) + (u_{g,g,g} + u_{r,g}) (u_{r,g} - u_g) \right] \right\}. \quad (1.68)
\end{aligned}$$

Для конфігурації 2 $\vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \vec{u}(r, g, z) = \{u_1 = u_r(r, z), u_2 = r \cdot u_g = 0, u_3 = u_z(r, z)\}$

друге рівняння вироджується в тотожність, а перше і третє мають вигляд

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rr,r} + \sigma_{rz,z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{gg}) - \rho \ddot{u}_r = \\
& = -\frac{1}{r} (u_{r,r} + r u_{r,rr}) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} (2 u_{r,zr} + u_{r,z}) \sigma_{rz} - u_{r,zz} \sigma_{zz} - \frac{u_r}{r^2} \sigma_{gg} - \\
& - u_{r,r} \sigma_{rr,r} - u_{r,z} \sigma_{rz,r} - u_{r,r} \sigma_{rz,z} - u_{r,z} \sigma_{zz,z}, \quad (1.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{rz,r} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} - \rho \ddot{u}_z = \\
& = -\frac{1}{r} (u_{z,r} + r u_{z,rr}) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} (2 u_{z,zr} + u_{z,z}) \sigma_{rz} - u_{z,zz} \sigma_{zz} - \\
& - u_{z,r} \sigma_{rr,r} - u_{z,z} \sigma_{rz,r} - u_{z,r} \sigma_{rz,z} - u_{z,z} \sigma_{zz,z}. \quad (1.70)
\end{aligned}$$

Записуємо представлення алгебраїчних інваріантів для даного випадку, а також деякі необхідні вирази

$$\begin{aligned}
I_1 &= \varepsilon_{11} + \frac{\varepsilon_{22}}{r^2} + \varepsilon_{33} = u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + u_{z,z} + \frac{1}{2} (u_{r,r})^2 + \\
& + \frac{1}{2r^2} (u_r)^2 + \frac{1}{2} (u_{z,z})^2 + \frac{1}{2} (u_{r,z})^2 + \frac{1}{2} (u_{z,r})^2.
\end{aligned}$$

Тут перші три члени представляють частину інваріанта, що відповідає

лінійній теорії. Решта членів представляють п'ять типів квадратично нелінійних складових. Оскільки тензор деформацій квадратично нелінійний, то і перший інваріант не включає більш високих нелінійностей

$$I_2 = (\varepsilon_{11})^2 + (\varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{13})^2 = (u_{r,r})^2 + \frac{1}{r^2}(u_r)^2 + (u_{z,z})^2 + \frac{1}{4}(u_{r,z} + u_{z,r})^2,$$

$$(I_1)^2 = (u_{r,r})^2 + (u_{z,z})^2 + 2u_{z,z}u_{r,r}, \quad (\varepsilon_{11})^2 = (u_{r,r})^2, \quad (\varepsilon_{33})^2 = (u_{z,z})^2,$$

$$(\varepsilon_{13})^2 = \frac{1}{4}(u_{r,z} + u_{z,r})^2, \quad 2\varepsilon_{11}I_1 = 2u_{r,r}(u_{r,r} + u_{z,z}), \quad 2\varepsilon_{22}I_1 = 2u_{z,z}(u_{r,r} + u_{z,z}),$$

$$2\varepsilon_{13}I_1 = (u_{r,z} + u_{z,r})(u_{r,r} + u_{z,z}).$$

Вирази для компонентів тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + u_{z,z}\right) + \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + A + 3B + C\right](u_{r,r})^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda + B + C\right)\left[\frac{(u_r)^2}{r^2} + (u_{z,z})^2\right] + \\ &+ \frac{1}{6}(A + 3B)u_{r,z}u_{z,r} + \frac{1}{12}[6(\lambda + 2\mu) + A + 3B](u_{r,z})^2 + \\ &+ \frac{1}{12}[6\lambda + A + 3B](u_{z,r})^2 + 2C\left(u_{r,r}u_{z,z} + \frac{1}{r}u_r u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r u_{z,z}\right), \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \sigma_{gg} &= (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda(u_{r,r} + u_{z,z}) + \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + A + 3B + C\right]\frac{1}{r^2}(u_r)^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda + B + C\right)\left[(u_{r,r})^2 + (u_{z,z})^2\right] + \\ &+ \frac{1}{2}Bu_{r,z}u_{z,r} + \frac{1}{4}(2\lambda + B)\left[(u_{r,z})^2 + (u_{z,r})^2\right] + 2Cu_{r,r}u_{z,z}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \sigma_{zz} &= (\lambda + 2\mu)u_{z,z} + \lambda\left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}\right) + \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + A + 3B + C\right](u_{z,z})^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda + B + C\right)\left[(u_{r,r})^2 + \frac{1}{r^2}(u_r)^2\right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6}(A+3B)u_{r,z}u_{z,r} + \frac{1}{12}[6(\lambda+2\mu)+A+3B](u_{z,r})^2 + \\
& + \frac{1}{12}[6\lambda+A+3B](u_{r,z})^2 + 2C\left(u_{r,r}u_{z,z} + \frac{1}{r}u_r u_{r,r} + \frac{1}{r}u_r u_{z,z}\right), \quad (1.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{13} = \sigma_{rz} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r}) + \\
& + \left(\mu + \frac{1}{3}A + B\right)(u_{r,r}u_{r,z} + u_{z,r}u_{z,z}) + \left(\frac{1}{3}A + B\right)(u_{r,r}u_{z,r} + u_{r,z}u_{z,z}). \quad (1.74)
\end{aligned}$$

Варіант запису 4 (врахована геометрична нелінійність)

$$\begin{aligned}
& \mu\left(u_{r,rr} + u_{r,zz} + \frac{1}{r}u_{r,r} - \frac{1}{r^2}u_r\right) + \\
& + (\lambda + \mu)\left(u_{r,rr} + u_{z,zr} + \frac{1}{r}u_{r,r} - \frac{1}{r^2}u_r\right) - \rho\ddot{u}_r \equiv \\
& \equiv \mu\Delta u_r + (\lambda + \mu)I_{1,r} - \rho\ddot{u}_r = -2(\lambda + 2\mu)u_{r,r}u_{r,rr} - \\
& - 2(\lambda + 2\mu)\frac{1}{r}(u_{r,r})^2 - (\lambda + 2\mu)\frac{1}{r^3}(u_r)^2 - (\lambda + 2\mu)u_{r,z}u_{z,zz} - \\
& - (\lambda + 2\mu)u_{z,z}u_{r,zz} - (\lambda + \mu)u_{r,r}u_{z,rz} - (\lambda + 2\mu)u_{r,r}u_{r,zr} - \\
& - (\lambda + \mu)\frac{1}{r}(u_{r,z})^2 - (\lambda + \mu)u_{r,r}u_{r,zz} - 3\mu u_{r,r}u_{r,zr} - 2\mu u_{z,r}u_{r,zr} - \\
& - \mu u_{r,z}u_{z,rr} - \mu\frac{1}{r}u_{r,z}u_{z,r} - \lambda u_{r,r}u_{z,z} - \lambda\frac{1}{r}u_r u_{r,zz} - \\
& - \lambda\frac{1}{r}u_r u_{r,rr} - \lambda\frac{1}{r^2}u_r u_{r,r} - \lambda\frac{1}{r^2}u_r u_{z,z} - \lambda u_{z,z}u_{r,rr} - \lambda u_{r,z}u_{r,rz}, \quad (1.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu\left(u_{z,rr} + u_{z,zz} + \frac{1}{r}u_{z,r}\right) + (\lambda + \mu)\left(u_{r,rz} + u_{z,zz} + \frac{1}{r}u_{r,z}\right) - \rho\ddot{u}_z \equiv \\
& \equiv \mu\Delta u_z + (\lambda + \mu)I_{1,z} - \rho\ddot{u}_z = -2(\lambda + 2\mu)u_{z,z}u_{z,zz} - (\lambda + 2\mu)\frac{1}{r}u_{r,r}u_{z,r} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda + 2\mu)u_{r,r}u_{z,rr} - (\lambda + 2\mu)u_{z,r}u_{r,rr} - 3\mu u_{z,r}u_{z,zr} - 2\mu u_{r,z}u_{z,zr} - \\
& - (\lambda + \mu)u_{z,z}u_{r,rz} - (\lambda + \mu)\frac{1}{r}u_{z,z}u_{z,r} - (\lambda + \mu)\frac{1}{r}u_{z,r}u_{z,z} - \\
& - \mu u_{z,r}u_{r,zz} - \mu\frac{1}{r}u_{z,z}u_{r,z} - \lambda u_{r,r}u_{z,zz} - \lambda\frac{1}{r}u_r u_{z,rr} - \\
& - \lambda\frac{1}{r}u_{z,r}u_{r,r} - \lambda\frac{1}{r}u_{z,z}u_{r,z} - \lambda\frac{1}{r}u_r u_{z,zz} - \lambda u_{r,r}u_{z,zz} - \lambda u_{z,r}u_{z,zr}. \quad (1.76)
\end{aligned}$$

Для конфігурації 3 $\vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \vec{u}(r, \vartheta, z) = \left\{ u_1 = u^1 = u_r = 0, \frac{1}{r}u_2 = ru^2 = \right.$
 $= u_\vartheta(r, z), u_3 = u^3 = u_z = 0 \right\}$, третє рівняння вироджується в тотожність, а перше і друге мають вигляд

$$-(u_\vartheta\sigma_{r\vartheta})_{,r} + u_{\vartheta,r}\sigma_{r\vartheta} - (u_\vartheta\sigma_{\vartheta z})_{,z} + u_{\vartheta,z}\sigma_{\vartheta z} = -u_\vartheta \left(\cancel{\sigma_{r\vartheta,r}} + \cancel{\sigma_{\vartheta z,z}} \right) = 0, \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned}
& \cancel{\sigma_{r\vartheta,r}} + \cancel{\sigma_{\vartheta z,z}} + \frac{2}{r}\sigma_{r\vartheta} - \rho\ddot{u}_\vartheta = \\
& = - \left(u_{\vartheta,rr} + \frac{1}{r}u_{\vartheta,r} \right) \sigma_{rr} - u_{\vartheta,rz}\sigma_{rz} - u_{\vartheta,zz}\sigma_{zz} - \frac{1}{r^2}u_\vartheta\sigma_{\vartheta\vartheta} - \\
& - u_{\vartheta,r}\sigma_{rr,r} - u_{\vartheta,r}\sigma_{rz,z} - u_{\vartheta,z}\sigma_{zz,z}. \quad (1.78)
\end{aligned}$$

Записуємо представлення алгебраїчних інваріантів

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[(u_{\vartheta,r})^2 + \frac{1}{r^2} (u_\vartheta)^2 + (u_{\vartheta,z})^2 \right], I_2 = \left(u_{\vartheta,r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right)^2 + (u_{\vartheta,z})^2,$$

а також деякі необхідні вирази

$$(I_1)^2 = 0, \quad \varepsilon_{kk}I_1 = 0, \quad \varepsilon_{11} = (1/2)(u_{\vartheta,r})^2 \rightarrow (\varepsilon_{11})^2 = 0,$$

$$\varepsilon_{22} = (1/2)(u_\vartheta)^2 \rightarrow (\varepsilon_{22})^2 = 0, \quad \varepsilon_{33} = (1/2)(u_{\vartheta,z})^2 \rightarrow (\varepsilon_{33})^2 = 0,$$

$$\varepsilon_{12} = (ru_{\vartheta,r} - u_\vartheta) \rightarrow (\varepsilon_{12})^2 = (ru_{\vartheta,r} - u_\vartheta)^2,$$

$$\varepsilon_{23} = ru_{\vartheta,z} \rightarrow (\varepsilon_{23})^2 = r^2(u_{\vartheta,z})^2, \quad \varepsilon_{13} = (1/2)u_{\vartheta,r}u_{\vartheta,z} \rightarrow (\varepsilon_{13})^2 = 0.$$

Компоненти тензора напружень обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{rr} = & \frac{1}{6} [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B)] (u_{g,r})^2 + \\ & + \frac{1}{6} [3\lambda + 2(A + 3B)] \frac{1}{r^2} (u_g)^2 + \frac{2}{3} (A + 3B) \frac{1}{r} u_g u_{g,r} + \left(\frac{\lambda}{2} + B \right) (u_{g,z})^2, \quad (1.79)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} = \frac{1}{r^2} \sigma_{gg} = & \frac{1}{6} [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B)] \frac{1}{r^2} (u_g)^2 + \frac{1}{6} [3\lambda + 2(A + 3B)] \times \\ & \times (u_{g,r})^2 + \frac{1}{6} [3\lambda + 2(A + 3B)] (u_{g,r})^2 + \frac{2}{3} (A + 3B) \frac{1}{r} u_g u_{g,r}, \quad (1.80)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} = \sigma_{zz} = & \frac{1}{6} [3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B)] (u_{g,z})^2 + \\ & + \left(\frac{\lambda}{2} + B \right) \left[(u_{g,r}) + \frac{1}{r^2} (u_g)^2 \right] + 2B \frac{1}{r} u_g u_{g,r}, \quad (1.81)\end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{r} \sigma_{rg} = \frac{1}{r^2} \left[2\mu (ru_{g,r} - u_g) + \frac{2}{3} A \left(u_{g,r} u_{g,z} - \frac{1}{r} u_{g,z} u_g \right) \right], \quad (1.82)$$

$$\sigma_{23} = \frac{1}{r} \sigma_{gz} = \frac{2}{r^2} \mu u_{g,z}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{rz} = \left(\mu + \frac{2}{3} A \right) u_{g,r} u_{g,z} - \frac{2}{3} A \frac{1}{r} u_{g,z} u_g. \quad (1.83)$$

Оскільки всі присутні в хвильовому рівнянні (1.77) справа компоненти тензора напружень не мають лінійних складових (а тільки квадратично нелінійні), то реалізація варіанту 4 дає нуль в правій частині (1.77). Тому квадратично нелінійне рівняння відсутнє. Але рівняння буде кубічно нелінійне. Отже, в квадратичній апроксимації варіант 2 співпадає з варіантом 3.

Варіант 2 (врахована фізична і частково геометрична нелінійності)

$$\begin{aligned}2\mu \left(u_{g,rr} + \frac{1}{r} u_{g,r} - \frac{1}{r^2} u_g + u_{g,zz} \right) - \rho \ddot{u}_g = \\ = 2\mu u_{g,rr} u_g + 2\mu (u_{g,r})^2 + 2\mu \frac{1}{r} u_{g,r} u_g - 2\mu \frac{1}{r^2} (u_g)^2 + 2\mu u_{\theta,zz} u_g + 2\mu (u_{\theta,z})^2. \quad (1.84)\end{aligned}$$

Класичний лінійний розв'язок для циліндричної хвилі (коли права

частина в (1.84) дорівнює нулю) має вигляд [10,13,19]

$$u_g(r, z, t) = u_g^o \cdot J_1(\beta r) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (u_g^o = \text{const}),$$

тому з врахуванням вигляду правої нелінійної частини розв'язок нелінійного хвильового рівняння (1.84) принципово нескладно отримати методом послідовних наближень і передбачити появу другої гармоніки і деяке ускладнення вигляду амплітуди.

$$\text{Для конфігурації 4 } \vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \vec{u}(r, \vartheta, z) = \{u^1 = u_r(r), u^2 = r \cdot u_\vartheta = 0, u^3 = u_z = 0\}$$

два останніх з трьох рівнянь рівноваги перетворюються на тотожності, а перше має вигляд

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) - \rho \ddot{u}_r = -\left(u_{r,rr} + \frac{1}{r}u_{r,r}\right)\sigma_{rr} - \frac{1}{r^2}u_r\sigma_{\vartheta\vartheta} - u_{r,r}\sigma_{rr,r}. \quad (1.85)$$

Обчислюємо компоненти тензора напружень. Для цього спочатку записуємо представлення алгебраїчних інваріантів

$$I_1 = u_{r,r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 + \frac{1}{2}(u_r)^2, \quad I_2 = (u_{r,r})^2 + \frac{(u_r)^2}{r^2},$$

а також деякі необхідні вирази

$$(I_1)^2 = (u_{r,r})^2 + \frac{u_r^2}{r^2} + 2\frac{u_r u_{r,r}}{r},$$

$$(\varepsilon_{11})^2 = (u_{r,r})^2, \quad 2\varepsilon_{11}I_1 = 2\left[(u_{r,r})^2 + \frac{1}{r}u_{r,r}u_r\right], \quad 2\varepsilon_{22}I_1 = 2\left[(u_r)^2 + ru_{r,r}u_r\right].$$

Внаслідок чого отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma^{11} = \sigma^{rr} &= \lambda\left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}\right) + 2\mu u_{r,r} + \left[\frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) + A + 3B + C\right](u_{r,r})^2 + \\ &+ \left(\frac{1}{2}\lambda + B + C\right)\frac{(u_r)^2}{r^2} + \frac{2}{r}(B + C)u_{r,r}u_r, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\sigma^{22}r^2 = \sigma^{\vartheta\vartheta} = \lambda\left(u_{r,r} + \frac{u_r}{r}\right) + 2\mu\frac{u_r}{r} + \left(\frac{1}{2}\lambda + 3B + C\right)(u_{r,r})^2 +$$

$$+\left[\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)+A+B+C\right]\frac{(u_r)^2}{r^2}+\frac{2}{r}(B+C)u_{r,r}u_r. \quad (1.87)$$

Варіант 1 (врахована лише фізична нелінійність).

$$\begin{aligned} & (\lambda+2\mu)\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}-\rho\ddot{u}_r= \\ & =-2(A+3B+C)u_{r,rr}u_{r,r}-2(B+C)\frac{1}{r}u_{r,rr}u_r- \\ & -\frac{\lambda}{r^2}u_{r,r}u_r-(A+2B+2C)\frac{1}{r}(u_{r,r})^2-(A+2B+C)\frac{1}{r^3}(u_r)^2. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Варіант 2 (врахована фізична і частково геометрична нелінійності)

$$\begin{aligned} & (\lambda+2\mu)\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}-\rho\ddot{u}_r= \\ & =-\left[\lambda+2\mu+2(A+3B+C)\right]u_{r,rr}u_{r,r}-2(B+C)\frac{1}{r}u_{r,rr}u_r- \\ & -\frac{\lambda}{r^2}u_{r,r}u_r-\left[\mu+A+2B+2C\right]\frac{1}{r}(u_{r,r})^2-\left[\lambda+\mu+A+2B+C\right]\frac{1}{r^3}(u_r)^2. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Варіант 3 (врахована фізична і геометрична нелінійності)

$$\begin{aligned} & (\lambda+2\mu)\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}-\rho\ddot{u}_r= \\ & =-\left[3(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)\right]u_{r,rr}u_{r,r}-(\lambda+2B+2C)\frac{1}{r}u_{r,rr}u_r- \\ & -\frac{\lambda}{r^2}u_{r,r}u_r-\left[2\lambda+3\mu+A+2B+2C\right]\frac{1}{r}(u_{r,r})^2- \\ & -\left[2\lambda+3\mu+A+2B+C\right]\frac{1}{r^3}(u_r)^2. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Перший рядок в (1.90) може бути виражений з (1.84) наступним чином

$$\begin{aligned} & \lambda\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}+2\mu\left(u_{r,r}\right)_{,r}+\frac{1}{r}\left[\lambda\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu u_{r,r}-\right. \\ & \left.-\lambda\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)-2\frac{u_r}{r}\right]-\rho\ddot{u}_r=\lambda\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}+ \end{aligned}$$

$$+2\mu\left(u_{r,rr}+\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)-\rho\ddot{u}_r=\left(\lambda+2\mu\right)\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}-\rho\ddot{u}_r.$$

Варіант 4 (врахована геометрична нелінійність)

$$\begin{aligned} & \left(\lambda+2\mu\right)\left(u_{r,r}+\frac{u_r}{r}\right)_{,r}-\rho\ddot{u}_r= \\ & =-2\left(\lambda+2\mu\right)u_{r,rr}u_{r,r}-\lambda\frac{1}{r}u_{r,rr}u_r-\frac{\lambda}{r^2}u_{r,r}u_r- \\ & -2\left(\lambda+\mu\right)\frac{1}{r}\left(u_{r,r}\right)^2-\left(\lambda+2\mu\right)\frac{1}{r^3}\left(u_r\right)^2. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Отже, описана процедура побудови нелінійних хвильових рівнянь, що описують поширення та взаємодію циліндричних гіперпружних хвиль. Нелінійність вводиться відповідає квадратичній нелінійності всіх основних співвідношень. Розглянуто чотири варіанти врахування фізичної та геометричної нелінійностей в хвильових рівняннях. Для різних варіантів врахування фізичної та геометричної нелінійностей і для всіх чотирьох конфігурацій пружного середовища побудовано нелінійні хвильові рівняння через компоненти вектора переміщень, що дає можливість будувати розв'язки цих рівнянь.

1.7.3. Нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення

циліндричних крутильних хвиль в рамках моделі Мурнагана

Зазначимо, що сучасна теорія хвиль [5, 19, 67, 68, 81, 97, 100, 115, 117, 123, 124, 130, 154] характерна постійним розвитком нових моделей, які у свою чергу містять нові нелінійні хвильові рівняння. Так що запропонована в даній дисертаційній роботі модель крутильних хвиль, яка включає нове нелінійне хвильове рівняння, лише підтверджує загальну тенденцію у загальній теорії хвиль.

Для побудови хвильових рівнянь потрібно використати циліндричну ортогональну систему координат $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \vartheta$, $\theta^3 = z$. У цій системі довжина вектора обчислюється за формулою [83]

$$(ds)^2 = g_{ik} d\theta^i d\theta^k = (dr)^2 + r^2 (d\vartheta)^2 + (dz)^2, \quad (1.92)$$

метричні тензори мають компоненти

$$\|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \|g^{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (1.93)$$

базисні вектори $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$ $\delta_n^k = \vec{e}^k \cdot \vec{e}_n$ мають довжини

$$|\vec{e}_1| = 1, |\vec{e}_2| = r, |\vec{e}_3| = 1, |\vec{e}^1| = 1, |\vec{e}^2| = (1/r), |\vec{e}^3| = 1, \quad (1.94)$$

лише три символи Кристоффеля першого роду Γ_{ki}^m нерівні нулеві

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = (1/r). \quad (1.95)$$

Далі виберемо конфігурацію (стан) нелінійно пружного середовища. Таких станів при описі деформування циліндричними координатами може бути чотири [91]. Для опису крутильних хвиль слід вибирати конфігурацію з віссю симетрії Oz , яка залежить від координат r, z і не залежить від координати ϑ . Для такої конфігурації компоненти вектора зміщень є такими

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) &= \left\{ u_1 = 0, u_2 = u_2(\theta^1, \theta^3, t), u_3 = 0 \right\} = \\ &= \left\{ u^1 = 0, u^2 = u^2(\theta^1, \theta^3, t), u^3 = 0 \right\} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Компоненти нелінійного тензора деформацій Коші-Гріна обчислюються за допомогою похідних ко- і контраваріантних компонентів вектора зміщень

загальна формула: $\nabla_i u^k = \frac{\partial u^k}{\partial \theta^i} + u^j \Gamma_{ji}^k, \quad \nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \theta^i} - u_k \Gamma_{ji}^k,$

$$\nabla_1 u^1 = \cancel{u^1}_{,1} + u^1 \cancel{\Gamma_{11}^1} + u^2 \cancel{\Gamma_{21}^1} + u^3 \cancel{\Gamma_{31}^1} = 0,$$

$$\nabla_i u_1 = \cancel{u_1}_{,1} - \cancel{u_1} \cancel{\Gamma_{11}^1} - \cancel{u_2} \cancel{\Gamma_{11}^2} - \cancel{u_3} \cancel{\Gamma_{11}^3} = 0,$$

$$\nabla_1 u_2 = u_{2,1} - \cancel{u_1 \Gamma_{21}^1} - u_2 \Gamma_{21}^2 - \cancel{u_3 \Gamma_{21}^3} = u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2,$$

$$\nabla_1 u^2 = u_{,1}^2 + \cancel{u^1 \Gamma_{11}^2} + u^2 \Gamma_{21}^2 + \cancel{u^3 \Gamma_{31}^2} = u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2,$$

$$\nabla_1 u^3 = \cancel{\frac{\partial u^3}{\partial \theta^1}} + \cancel{u^j \Gamma_{j1}^3} = 0, \quad \nabla_1 u_3 = \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial \theta^1}} - \cancel{u_k \Gamma_{31}^k} = 0,$$

$$\nabla_2 u^1 = \cancel{\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2}} + \cancel{u^1 \Gamma_{12}^1} + u^2 \Gamma_{22}^1 + \cancel{u^3 \Gamma_{32}^1} = -r u^2,$$

$$\nabla_2 u_1 = \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial \theta^2}} - \cancel{u_1 \Gamma_{12}^1} - u_2 \Gamma_{12}^2 - \cancel{u_3 \Gamma_{12}^3} = -\frac{1}{r} u_2,$$

$$\nabla_2 u^2 = \cancel{\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2}} + \cancel{u^1 \Gamma_{12}^2} + \cancel{u^2 \Gamma_{22}^2} + \cancel{u^3 \Gamma_{32}^2} = 0,$$

$$\nabla_2 u_2 = \cancel{\frac{\partial u_2}{\partial \theta^2}} - \cancel{u_1 \Gamma_{22}^1} - \cancel{u_2 \Gamma_{22}^2} - \cancel{u_3 \Gamma_{22}^3} = 0,$$

$$\nabla_2 u^3 = \cancel{\frac{\partial u^3}{\partial \theta^2}} + \cancel{u^j \Gamma_{j2}^3} = 0, \quad \nabla_2 u_3 = \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial \theta^2}} - \cancel{u_k \Gamma_{32}^k} = 0,$$

$$\nabla_3 u^1 = \cancel{\frac{\partial u^1}{\partial \theta^3}} + \cancel{u^j \Gamma_{j3}^1} = 0, \quad \nabla_3 u_1 = \cancel{\frac{\partial u_1}{\partial \theta^3}} - \cancel{u_k \Gamma_{13}^k} = 0,$$

$$\nabla_3 u^2 = \frac{\partial u^2}{\partial \theta^3} + \cancel{u^j \Gamma_{j3}^2} = u_{,3}^2, \quad \nabla_3 u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \theta^3} - \cancel{u_k \Gamma_{23}^k} = u_{2,3},$$

$$\nabla_3 u^3 = \cancel{\frac{\partial u^3}{\partial \theta^3}} + \cancel{u^j \Gamma_{j3}^3} = 0, \quad \nabla_3 u_3 = \cancel{\frac{\partial u_3}{\partial \theta^3}} - \cancel{u_k \Gamma_{33}^k} = 0,$$

і за умови (1.96) мають вигляд

$$\text{загальна формула: } \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u^j + \nabla_j u^i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k),$$

$$\varepsilon^{11} = \cancel{\nabla_1 u^1} + \frac{1}{2} (\cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_1 u^1}) + \frac{1}{2} (\nabla_1 u_2 \nabla_1 u^2) + \cancel{\frac{1}{2} (\nabla_1 u_3 \nabla_1 u^3)} = \frac{1}{2} \left(u_{2,1} - \frac{1}{r} u_2 \right) \left(u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u^2 \right)^2,$$

$$\varepsilon^{22} = \cancel{\nabla_2 u^2} + \frac{1}{2} (\nabla_2 u_1 \nabla_2 u^1) + \cancel{\frac{1}{2} (\nabla_2 u_2 \nabla_2 u^2)} + \cancel{\frac{1}{2} (\nabla_2 u_3 \nabla_2 u^3)} = \frac{1}{2} u^2 u_2. \quad (1.97)$$

$$\varepsilon^{33} = \cancel{\nabla_3 u^3} + \frac{1}{2} \left(\cancel{\nabla_3 u_1 \nabla_3 u^1} + \nabla_3 u_2 \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_3 u_3 \nabla_3 u^3} \right) = \frac{1}{2} u_{,3}^2 u_{2,3},$$

$$\varepsilon^{12} = \frac{1}{2} \left(\nabla_1 u^2 + \cancel{\nabla_2 u^1} + \cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_2 u^1} + \cancel{\nabla_1 u_2 \nabla_2 u^2} + \cancel{\nabla_1 u_3 \nabla_2 u^3} \right) = \frac{1}{2} \left(u_{,1}^2 + \frac{1}{r} u_{,2}^2 \right),$$

$$\varepsilon^{23} = \frac{1}{2} \left(\cancel{\nabla_2 u_3} + \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_2 u_1 \nabla_3 u^1} + \cancel{\nabla_2 u_2 \nabla_3 u^2} + \cancel{\nabla_2 u_3 \nabla_3 u^3} \right) = \frac{1}{2} u_{,3}^2,$$

$$\varepsilon^{13} = \frac{1}{2} \left(\cancel{\nabla_1 u_3} + \cancel{\nabla_3 u_1} + \cancel{\nabla_1 u_1 \nabla_3 u^1} + \nabla_1 u_2 \nabla_3 u^2 + \cancel{\nabla_1 u_3 \nabla_3 u^3} \right) = \left(u_{2,1} - \frac{1}{r} u_{,2} \right) u_{,3}^2$$

або у випадку крутильних хвиль в слабко нелінійному пружному матеріалі

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{2} \left[\left(u_{g,r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(u_g \right)^2 \right], \quad \varepsilon_{gg} = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(u_g \right)^2, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} \left(u_{g,z} \right)^2 \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(u_{g,r} + \frac{1}{r} u_g \right),$$

$$\varepsilon_{gz} = \frac{1}{2} u_{g,z}, \quad \varepsilon_{rz} = \left(u_{g,r} - \frac{1}{r} u_g \right) u_{g,z}.$$

Компоненти $\varepsilon^{12}, \varepsilon^{23}$ тензора деформації є лінійними, а решта компонентів не має лінійних доданків і є лише квадратично нелінійними.

Рівняння руху в записі через тензор напружень Лягранжа σ^{kl} є таким

$$\nabla_k \left[\sigma^{ki} \left(\delta_i^n + \nabla_i u^n \right) \right] = \rho \ddot{u}^i. \quad (1.98)$$

Якщо аналізувати рівняння руху лише як рівняння щодо зміщень. Тоді компоненти тензора напружень треба спочатку обчислювати за формулою $\sigma^{ik} = (\partial W / \partial \varepsilon^{ik})$, де слід знати внутрішню енергію W як нелінійну функцію компонентів тензора деформації [43, 56, 71, 92].

Далі виберем тип пружного матеріалу (середовища). У проведенню дослідження вибрано п'ятиконстантну модель Мернагана, яка задається кубічно нелінійним пружним потенціалом [64]

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3}AI_3 + BI_1I_2 + \frac{1}{3}CI_1^3 \quad (1.99)$$

зі стандартними представленнями перших трьох інваріантів тензора деформації

$$I_1(\varepsilon^{ik}) = \varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}$$

$$\begin{aligned} I_2(\varepsilon^{ik}) &= \varepsilon^{ik}\varepsilon^{ik} = (\varepsilon^{11})^2 + (\varepsilon^{22})^2 + (\varepsilon^{33})^2 + \\ &+ (\varepsilon^{12})^2 + (\varepsilon^{13})^2 + (\varepsilon^{23})^2 + (\varepsilon^{21})^2 + (\varepsilon^{31})^2 + (\varepsilon^{32})^2, \end{aligned} \quad (1.100)$$

$$I_3(\varepsilon^{ik}) = \det \varepsilon^{ik} = \varepsilon^{11}\varepsilon^{22}\varepsilon^{33} + \varepsilon^{13}\varepsilon^{21}\varepsilon^{32} + \varepsilon^{31}\varepsilon^{12}\varepsilon^{23} - \varepsilon^{13}\varepsilon^{22}\varepsilon^{31} - \varepsilon^{11}\varepsilon^{23}\varepsilon^{32} - \varepsilon^{12}\varepsilon^{21}\varepsilon^{33}$$

Особливістю конфігурації (1.98) є те, що з трьох рівнянь руху неттоожнім є лише друге рівняння – рівняння щодо зміщення u^2

$$\begin{aligned} \nabla_k [\sigma^{k2} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] &= \rho \ddot{u}^2 \\ \rightarrow \nabla_1 [\sigma^{12} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] + \cancel{\nabla_2 [\sigma^{22} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)]} + \nabla_3 [\sigma^{32} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n)] &= \rho \ddot{u}^2 \\ \rightarrow \nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_3 \sigma^{32} &= \rho \ddot{u}^2. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Таким чином, потрібен тільки запис дотичних напружень σ^{12}, σ^{23}

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{12}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{12}} + \cancel{I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} \right) + \cancel{C I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{12}}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{12} + \frac{1}{3} A (\varepsilon^{13}\varepsilon^{23} - \varepsilon^{12}\varepsilon^{33}) + 2B\varepsilon^{12} (\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}), \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{23} &= \cancel{\lambda I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} + \mu \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + \frac{1}{3} A \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon^{23}} + B \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial \varepsilon^{23}} + \cancel{I_2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} \right) + \cancel{C I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon^{23}}} = \\ &= 2\mu \varepsilon^{23} + \frac{1}{3} A [2\varepsilon^{13}\varepsilon^{12} - 2\varepsilon^{11}\varepsilon^{23}] + 2B\varepsilon^{23} [\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}] \end{aligned} \quad (1.103)$$

Рівняння руху (1.101) з врахуванням представлень (1.102), (1.103) має вигляд

$$2\mu(\varepsilon_{,1}^{12} + \varepsilon_{,3}^{23}) + \frac{1}{3}A[\varepsilon_{,1}^{13}\varepsilon^{23} + \varepsilon^{13}\varepsilon_{,1}^{23} - \varepsilon_{,1}^{12}\varepsilon^{33} + \varepsilon_{,3}^{12}(\varepsilon^{13} - \varepsilon^{11}) + \\ + \varepsilon_{,3}^{12}(\varepsilon^{13} - \varepsilon^{33} - \varepsilon_{,1}^{11})] + 2B[(\varepsilon_{,1}^{12} + \varepsilon_{,3}^{23})(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33}) + \\ + \varepsilon_{,1}^{12}(\varepsilon_{,1}^{11} + \varepsilon_{,1}^{22} + \varepsilon_{,1}^{33}) + \varepsilon^{23}(\varepsilon_{,3}^{11} + \varepsilon_{,3}^{22} + \varepsilon_{,3}^{33})] = \rho\ddot{u}^2 \quad (1.104)$$

Тепер можна врахувати формули (1.97) і записати рівняння (1.104) через зміщення

$$\mu \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r)u_{g,lr} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = \quad (1.105) \\ = \boxed{Lu_g (1/2)B \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,r}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]} \\ - (1/6)(A - 9B) \left[u_{g,r}(u_{g,z})^2 + \frac{2}{r}u_g(u_{g,z})^2 \right] + \\ + (1/3)A \left[ru_{g,r}u_{g,z}u_{g,rz} - (1/2)r(u_{g,z})^2u_{g,rr} + (1/2)r(u_{g,r})^2u_{g,zz} + \right. \\ \left. + (3/2)u_gu_{g,r}u_{g,zz} + 2u_gu_{g,z}u_{g,rz} + (1/2r^2)(u_g)^2u_{g,z} + (1/2r)(u_g)^2u_{g,zz} \right] + \\ + B \left\{ r(u_{g,z})^2u_{g,zz} + 2r(u_{g,r})^2u_{g,rr} + r^2(u_{g,r})^2u_{g,rz} + (1/2)r(u_{g,r})^2u_{g,rr} + 4(1/r^2)u_g(u_{g,r})^2 + \right. \\ \left. + (3/2)(u_{g,r})^3 + (5/2)r^2(u_g)^2u_{g,r} + (5/2)u_gu_{g,z}u_{g,rz} + 2u_gu_{g,r}u_{g,rr} + (1/2r)u_g^2u_{g,rr} \right\}$$

Рівняння (1.105) являє собою нове нелінійне хвильове рівняння, яке у лівій частині повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням, класичної задачі лінійної теорії пружності поширення крутильних хвиль а у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення. Отже, квадратична нелінійність, яка характерна, наприклад, для деяких циліндричних хвиль, не присутня в рівнянні (1.105) і крутильні хвилі є виключно кубічно нелінійними в рамках реалізованого підходу.

Окрім вказаної вище особливості нового нелінійного хвильового рівняння, слід ще вказати на декілька інших особливостей. Права нелінійна

частина рівняння (1.105) містить багато нелінійних доданків. При застосуванні трьох різних підходів до знаходження наближених розв'язків такого роду нелінійного хвильового рівняння, можна знектувати деякі нелінійні доданки, враховуючи лише доданки, які подібні до лінійної частини хвильового рівняння. Отже, присутність в рівнянні багатьох нелінійних доданків у ряді випадків не створює великих проблем в знаходженні наближеного розв'язку.

З хвильового рівняння (1.105), в рамках прийнятої постановки задачі про крутильні хвилі випливає що присутні лише нелінійні доданки з множниками у вигляді пружних постійних Мернагана A, B , що свідчить про врахування у рівнянні (1.105) лише фізичної нелінійності. Отже, ця ситуація не є наслідком нехтування геометричної нелінійності, а є наслідком специфіки загальної для теорії пружності постановки задачі про крутильні хвилі.

Основний висновок. Наведені факти з механіки матеріалів є достатніми для розуміння результатів, викладених в наступних розділах.

РОЗДІЛ 2 (ДОПОМІЖНИЙ)

ХВИЛІ З РІЗНИМИ ПОЧАТКОВИМИ ПРОФІЛЯМИ

2.1 Поодинокі хвилі.

Явище поступової зміни чи спотворення початкового профіля хвилі при її поширенні) є предметом аналізу сучасної теорії хвиль [7, 9, 20, 44]. В теорії хвиль терміни «еволюція - evolution» (поступова зміна початкового профіля хвилі при її поширенні) і «дисторсія - distortion» (спотворення початкового профіля хвилі при її поширенні) практично вважаються синонімами.

Хвиля поширюється одночасно в просторі і в часі. Оскільки вона характеризується фазою $\sigma = x - vt$, то при відомій швидкості хвилі v фіксована точка простору відповідає фіксованому часу. Тому поширення хвилі можна вивчати як процес, що розвивається в просторі або у часі. У випадку хвиль зміщення в матеріалах вираз $u(x - vt)$, отриманий звичайно як розв'язок нелінійного хвильового рівняння, можна вважати таким, що описує зміну початкового профіля хвилі.

Поодинокі хвилі (solitary waves) вивчаються в теорії хвиль досить давно. Вважається, що профіль поодинокої хвилі описується скінченою функцією (відмінною від нуля лише на скінченному відрізку) або функцією скінченної ваги (величина на площі під графіком функції є скінченою на скінченному відрізку і такою що, площею поза цим відрізком можна знехтувати, тобто площа зосереджена на скінченному відрізку). У механіці матеріалів поодинокі хвилі спостерігаються в експериментальних імпульсів, які формуються різними способами і діють на виготовлені з певних матеріалів зразки чи конструкції. Теоретично такі хвилі в матеріалах вивчені фрагментарно. Хвиля з профілем у вигляді функції Гаусса (дзвінкоподібна чи горбоподібна хвиля, яка є якраз функцією скінченної ваги) вважається типовим прикладом поодинокої хвилі.

Найпростіша поодинока хвиля може бути описана класичним розв'яз-

ком Д'Алямбера $u(x,t) = f(x - ct)$ лінійного хвильового рівняння (у даному випадку, лінійною частиною рівняння $u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0$) для одновимірної хвилі зміщення. Хвиля Д'Алямбера відповідає лінійній теорії пружності, в рамках якої зміну початкового профіля описати не можна. Тому дисторсія чи еволюція хвиль в матеріалах (хвиль як гармонічних, так і поодиноких) вивчається в рамках моделей нелінійної теорії пружності.

Далі поодинока хвиля вивчається із застосуванням однієї з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності - п'ятиконстантної моделі Мурнагана [5, 6, 74]. Ця модель допускає різні варіанти нелінійного хвильового рівняння. Найпростіший варіант нелінійного хвильового рівняння включає лише квадратичну або кубічну нелінійність.

2.2. Профілі гармонічної і поодиноких хвиль у вигляді функцій: Чебишова – Ерміта, Уіттекера Макдональда та Фрідляндера.

2.2.1. Профіль гармонічної хвилі

Гармонічна хвиля поділяється на дисперсійні та недисперсійні хвилі. Недисперсивна гармонічна хвиля – це, хвиля швидкість якої v лінійно залежить від частоти. Дисперсивна гармонічна хвиля означається як хвиля, швидкість якої v нелінійно залежить від частоти. Це означає, що для кожного фіксованого значення частоти фаза хвилі $\sigma = kx - \omega t$ або $\sigma = k(x - vt)$ лінійно залежить від пройденого хвилею шляху x і часу поширення хвилі t .

Для гармонічних хвиль задається дисперсійне співвідношення $\omega = W(k)$.

У цьому випадку фазова швидкість визначається як

$$v_{ph}(k) = W(k)/k. \quad (2.1)$$

Якщо хвиля утворена декількома дисперсійними хвилями з близько розташованими частотами, то кожна з цих хвиль буде поширюватися зі своєю швидкістю. Такі хвилі розходяться в просторі (розсіюються), тому початковий профіль хвилі (що складається з таких хвиль) буде змінюватися з часом.

Розглянемо основні властивості одновимірних гармонічних хвиль [49].

Перш за все, така хвиля представляється математично за допомогою простої формули

$$u(x,t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_{ph}} \right). \quad (2.2)$$

Більш звичне представлення біжучої гармонічної хвилі

$$u(x,t) = A \cos(\omega t - kx), \quad (2.3)$$

де $k = (\omega/v_{ph})$ хвильове число, яке пов'язане з довжиною хвилі $\lambda = (2\pi/k)$.

Якщо період $T = (1/f)$ і кругова частота $f = (\omega/2\pi)$ визначені, то фазову швидкість можна записати як

$$v_{ph} = (\omega/k); \quad v_{ph} = \lambda f; \quad v_{ph} = (\lambda/T). \quad (2.4)$$

Вираз $\varphi(x,t) = \omega t - kx$ називається фазовою функцією або фазою. Він лінійно залежить від незалежних змінних x і t . Коли значення фази фіксоване, це означає, що зафікована певна точка на профілю хвилі. Насправді із

загального диференціалу для фіксованої фази $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \omega dt - kdx = 0$

випливає, що $(dx/dt) = (\omega/k)$ для точок фіксованої фази. Ці точки рухаються зі швидкістю v_{ph} , або, як часто пишуть, спостерігач, який рухається зі швидкістю v_{ph} , бачить весь час одну й ту саму точку профілю хвилі. Це пояснює чому v_{ph} називається фазовою швидкістю.

На рис. 2.1 зображено вигляд гармонічної хвилі для дійсної форми з наступними значеннями параметрів: $\omega = 1.0 \cdot 10^5$; $A = 1.0 \cdot 10^{-4}$; і хвильовим числом $k = (\omega/c) = 1,2 \cdot 10^1$.

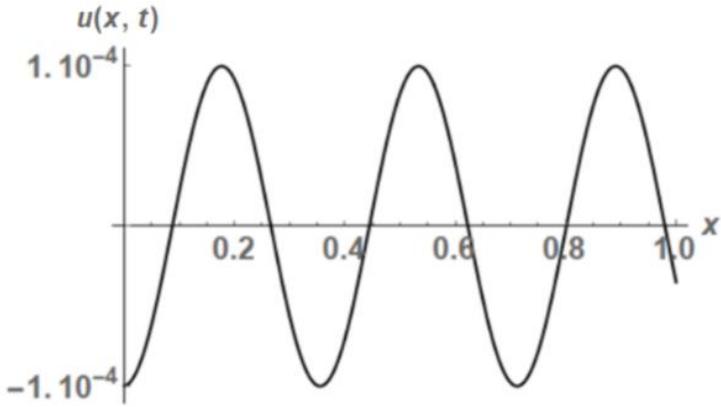


Рис. 2.1. Профіль гармонічної хвилі

Також гармонічну хвилю, задають у вигляді комплекснозначної функції

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)} \text{ або } u(x, t) = A e^{ik(x - vt)}. \quad (2.5)$$

Представлення (2.5) часто застосовується в математичних викладках для представлення, або розв'язку хвильових рівнянь, що є зручно.

2.2.2. Профіль у вигляді функції Чебишова-Ерміта

Функції Чебишова-Ерміта – це функція, яка має наступний аналітичний вигляд [31, 60, 101]:

$$\psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n^*(z), \quad (2.6)$$

де $H_n^*(z)$ є поліномами Чебишова-Ерміта

$$H_n^*(z) = 2^{n/2} H_n(\sqrt{2}z); H_n(z) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right).$$

Ці поліноми визначаються твірною функцією $e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$ і їх загальний вигляд задається формулою

$$H_n(x) = x^n - \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{1}{2^2} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} - \dots = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^j}{2^j} \frac{(-n, 2j)}{(1, j)} x^{n-2j}$$

і рекурентними спiввiдношеннями

$$\begin{aligned} H_{n+1}(z) &= 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z); \quad \frac{dH_n(z)}{dz} = 2nH_{n-1}(z); \\ H_{2n}(-x) &= H_{2n}(x); H_{2n+1}(-x) = -H_{2n+1}(x); \\ H_0^*(z) &= 1; H_1^*(z) = z; H_2^*(z) = z^2 - 1; H_3^*(z) = z^3 - 3z; \\ H_4^*(z) &= z^4 - 6z^2 + 3; H_5^*(z) = z^5 - 10z^3 + 15z. \end{aligned}$$

Функції $\psi_n(x)$ є дійсними для дійсних значень аргумента і вони ортого-

нальні з вагою 1 на дійсній осі $(-\infty, \infty)$: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n; \\ 1 & m = n. \end{cases}$

Також вони є розв'язками диференціального рівняння Вебера

$$\psi_n^{(2)}(z) + (1 + 2n - z^2)\psi_n(z) = 0,$$

а поліноми $H_n^*(z)$ є розв'язками диференціального рівняння Чебишова-Ерміта

$$w'' - 2zw' + 2nw = 0.$$

Далі будуть розглядатися хвилі з початковим профілем у вигляді функції Чебишова-Ерміта нульового індекса і множником σ , що задає рух хвилі

$$\psi_0(x) = e^{-x^2/2\sigma}. \quad (2.7)$$

Ця функція добре відома в теорії сигналів і загальній теорії хвиль і має там назву “дзвіноподібна функція”.

Графіки дзвіноподібної функції для різних $\sigma = 2, \sigma = 20, \sigma = 40$. зображені на рис. 2.2.

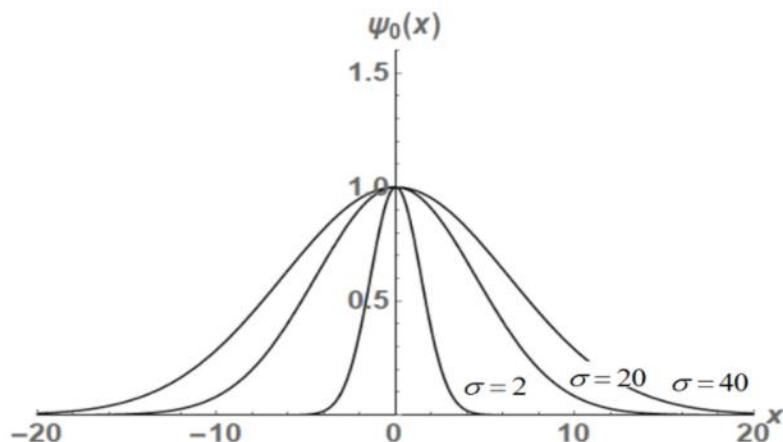


Рис. 2.2. Графіки дзвіноподібної функції для різних $\sigma = 2, \sigma = 20, \sigma = 40$.

2.2.3. Профіль у вигляді функції Уіттекера

Функції Уіттекера – це функція $M_{k,m}(z)$ і $W_{k,m}(z)$, яка є розв'язком наступного диференціального рівнянням [6, 18, 58, 59]

$$w'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{z^2} \right) w = 0.$$

Нескінченно–значна аналітична функція $W_{k,m}(z)$ означена для всіх значень k, m і для всіх невід'ємних дійсних z . Вона може бути представлена через вироджені гіпергеометричні функції $\Psi(a, c, z)$ та $\Phi(a, c, z)$

$$\begin{aligned} M_{k,m}(z) &= e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Psi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right), \\ W_{k,m}(z) &= e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} \Phi\left(m-k+\frac{1}{2}, 2m+1, z\right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{де } \Phi(a, c, z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m - k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m - k\right)} M_{k,-m}(z).$$

Також функція Уіттекера має представлення

$$M_{p+m+\frac{1}{2}, m}(z) = \frac{z^{-m+\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}}}{(2m+1) \cdots (2m+p)} \frac{d^p}{dz^p} (z^{p+2m} e^{-z}).$$

Існують важливі зв'язки функції Уіттекера з певними значеннями індексів і інших відомих у математичній фізиці функціями:

1. Функції параболічного циліндра

$$D_n(z) = 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

Простий зв'язок між функціями Чебишова-Ерміта $\psi_n(z)$ і функціями параболічного циліндра є таким $D_n(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} \psi_n(z)$.

2. Функція помилок

$$Erfc(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \text{ або } Erfc(z) = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}n}(z^2).$$

3. Функції Бесселя уявного аргумента $K_m(z)$ або $I_m(z)$

$$K_m\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} W_{0,m}(z), M_{0,m}(z) = 2^{2m} \Gamma(m+1) \sqrt{z} I_m\left(\frac{z}{2}\right).$$

Як відомо, функції Бесселя уявного аргумента не мають осциляторного характеру, перша монотонно зростає, тоді як друга монотонно спадає.

В наступному аналізі поодиноких хвиль вибрані такі функції Уіттекера, які мають графік з одним горбом:

A. $W_{0,0}(z)$, яка є розв'язком рівняння $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4} + 4\frac{1}{z^2}\right\}W = 0$.

Б. $W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(z)$, яка є розв'язком рівняння $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4z} + \frac{3}{16z^2}\right\}W = 0$.

В. $W_{-\frac{1}{8}, \frac{1}{20}}(z)$, яка є розв'язком рівняння $\frac{d^2W}{dz^2} + \left\{-\frac{1}{4} - \frac{1}{8z} + \frac{99}{400z^2}\right\}W = 0$.

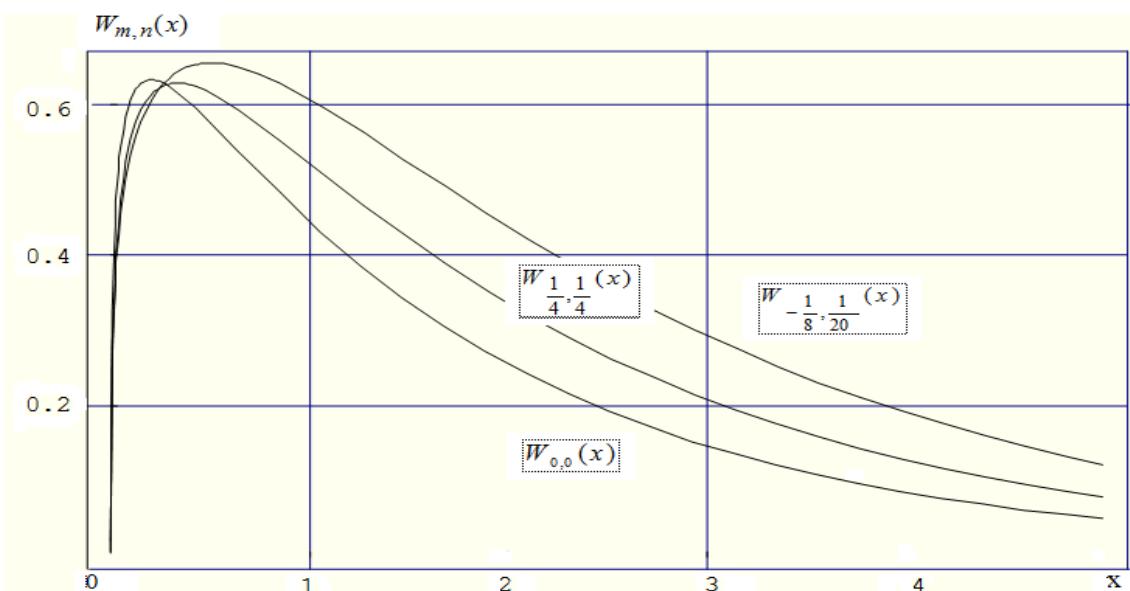


Рис. 2.3. Графіки функцій Уіттекера.

2.2.4. Профіль у вигляді функції Макдональда

Функція Макдональда – це модифікована функція Бесселя другого роду, що має вигляд [31]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu \pi}, \quad (2.9)$$

де ν є не ціле дійсне число і

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)},$$

є циліндричною функцією з чисто уявним аргументом [101,119].

Функції $I_{-\nu}(z)$ та $I_\nu(z)$ називають модифікованими функціями Бесселя першого роду.

Якщо ν – ціле число то розглядають $K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z)$.

Функція Макдональда є розв'язком диференціального рівняння Бесселя:

$$z^2 \frac{d^2 z}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0, \quad (2.10)$$

що прямує експоненціально до нуля коли $z \rightarrow \infty$, приймаючи додатні значення. Функції $I_\nu(z)$ та $K_\nu(z)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.13).

Якщо $-\pi < |\arg(z)| < \pi / 2$ то $K_\nu(z)$ може бути представлена через функцію Ханкеля першого роду

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{a+1} H_\nu^{(1)}(iz).$$

Якщо $\pi / 2 < |\arg(z)| < \pi$ то $K_\nu(z)$ може бути представлена через функцію Ханкеля другого роду

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} (-i)^{a+1} H_\nu^{(2)}(-iz).$$

Загальний вигляд представлення функції Макдональда через ряди:

$$K_{n+1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)(2z)^r}, \text{ n – ціле невід'ємне};$$

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} \psi(m+1), \quad (2.11)$$

$\psi(1) = -C$, $\psi(m+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - C$, де $C = 0,5772157\dots$ - стала Ейлера;

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (m-n-1)!}{m! (z/2)^{n-2m}} + \\ + (-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2m}}{m! (n+m)!} \times \left\{ \ln(z/2) - \frac{1}{2} \psi(m+1) - \frac{1}{2} \psi(n+m+1) \right\} \quad (2.12)$$

де $n \geq 1$ - ціле;

Асимптотичні представлення:

$$K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \times \left[1 + \frac{4\nu^2 - 1^2}{1!8z} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!(8z)^2} + \dots \right].$$

z - велике і $|\arg(z)| < \pi/2$.

Рекурентні формули:

$$K'_0(z) = -K_1(z), \quad (2.13)$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \quad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2 \frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

Графік функції Макдональда для різних значень індексів $\nu = 0, 1, 2, 3$ зображене на рис 2.4. K_0, K_1, K_2, K_3

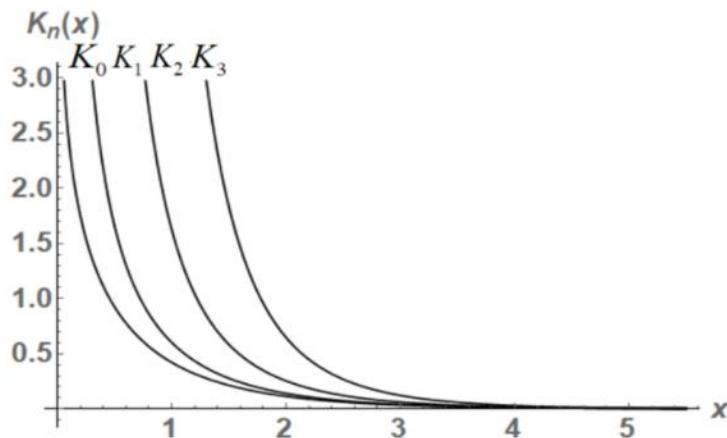


Рис. 2.4. Графіки функції Макдональда для $\nu = 0, 1, 2, 3$

2.2.5. Профіль у вигляді функції Фрідляндра

Розглянемо відомий у фізичній теорії вибуху (початково, атомного вибуху) початковий профіль, який досліджується вже майже сто років і ці дослідження продовжуються до нашого часу. В основному, це дослідження експериментальні, які стосуються сучасних проблем науки, не пов'язаних з атомними вибухами, а, зокрема, інших військових і медичних проблем [46, 79, 104].

Отже, виберемо профіль Фрідландера [79-94] і запишемо його у вигляді

$$F(x_1) = A^o e^{-bx_1/x_{att}} (1 - x_1/x_{att}), \quad (2.14)$$

де A^o є амплітудним множником, постійна b визначає підошву профіля і постійна x_{att} характеризує затухання профіля (крутизну).

Профіль (2.14) вважається одним з найпростіших і часто використовується в інтерпретації експериментів.

На Рис. 2.5a зображена форма початкового імпульсу Фрідляндра. Також на рис. 2.5б показана експериментально досліджена еволюція початкового імпульсу, генерованого вибухом. Тому можна вважати, що профіль Фрідляндра цілком сприйнятним для комп'ютерного моделювання, як поодинокої хвилі [74, 94].

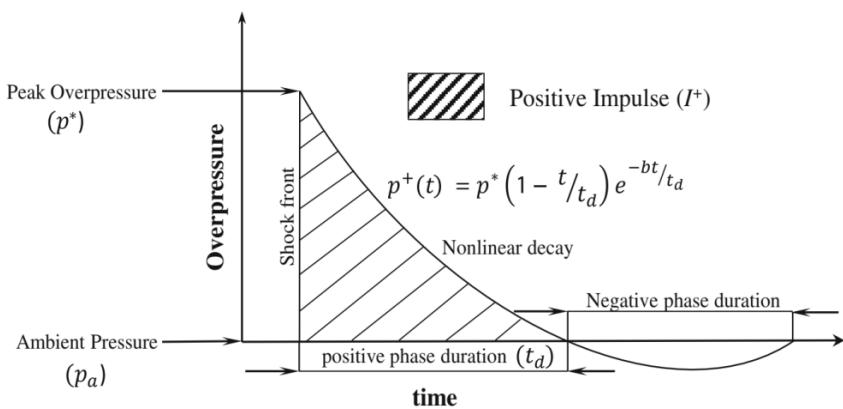
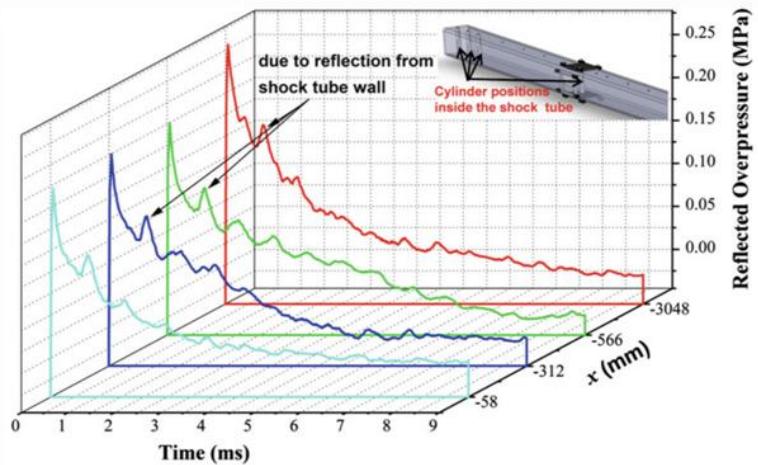


Рис. 2.5а



Ruc. 2.5б

Основна особливість полягає в тому, що профіль Фрідляндра раніше не вивчався в рамках нелінійної теорії пружності і даний профіль є нехарактерним (профіль без звичного горба).

Хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Гаусса, Уіттекера, Макдональда, Фрідляндра – далі розуміються, як хвиля Гаусса, хвиля Уіттекера, хвиля Макдональда та хвиля Фрідляндра (скорочений запис).

Основний висновок. Викладені факти з загальної теорії хвиль є достатніми для розуміння результатів, отриманих в наступних розділах.

РОЗДІЛ 3

(ДОПОМОЖНО-ОСНОВНИЙ) ДВА НАБЛИЖЕНИ ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ХВИЛЬ (НА ПРИКЛАДІ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ТА ЦИЛІНДРИЧНОЇ РАДІАЛЬНОЇ ХВИЛЬ)

3.1. Метод послідовних наближень в задачі знаходженні розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі

3.1.1. Найпростіше квадратично нелінійне хвильове рівняння, яке описує еволюцію пружної плоскої поздовжної хвилі

Розглянемо потенціал, який використовувався в публікаціях про плоскі нелінійні пружні хвилі, як дослідження нелінійної акустики. Цей потенціал було показано раніше в параграфі 1.7. Тут його зручно ще раз переписати у вигляді де збережено другий та третій порядок нелінійності:

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4} A \right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} + \\ + \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} + \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3.$$

Цей потенціал все ще нелінійний і зберігає нелінійність третього порядку. Але тепер нелінійність визначається відносно градієнта зміщення а не відносно тензора деформацій Коші–Гріна.

Отже, розглянемо плоскі поляризовані хвилі і припустимо, що хвилі поширяються вздовж осі абсцис, тобто, $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$. Тоді потенціал (1.8) спрощується до вигляду

$$W = (1/2) \left[(\lambda + 2\mu) (u_{1,1})^2 + \mu \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \\ \left[\mu + (1/2) \lambda + (1/3) A + B + (1/3) C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2) (\lambda + B) u_{1,1} \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \quad (3.1)$$

Відповідні компоненти тензора напружень Кіргофа є наступними

$$\begin{aligned} t_{11} &= (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + (3/2)[\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C)](u_{1,1})^2 + \\ &\quad + (1/2)[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B]\left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2\right], \\ t_{12} &= \mu u_{2,1} + (1/2)[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B]u_{1,1}u_{2,1}, \\ t_{13} &= \mu u_{3,1} + (1/2)[\lambda + 2\mu + (1/2)A + B]u_{1,1}u_{3,1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Підстановка (3.2) в рівнянні руху дає квадратичне нелінійне хвильове рівняння для трьох поляризованих плоских пружних P, SH, SV хвиль

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} + N_2(u_{2,11}u_{2,1} + u_{3,11}u_{3,1}), \quad (3.3)$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2(u_{2,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{2,1}), \quad (3.4)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2(u_{3,11}u_{1,1} + u_{1,11}u_{3,1}), \quad (3.5)$$

$$N_1 = 3[\lambda + 2\mu + 2(A + 3B + C)], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (3.6)$$

Особливістю нелінійних хвильових рівнянь (3.3) - (3.5) є те, що ліві - є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві включають тільки квадратично нелінійні доданки. Ця структура виявилася дуже зручною в майбутніх дослідженнях.

Найбільш просте нелінійне рівняння для поздовжньої хвилі утворюється із рівняння (3.3) у рамках так званої першої стандартної дадачі, коли спочатку збуджується лише поздовжня хвиль

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_1 u_{1,11}u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (c_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho)u_{1,11}u_{1,1}, \quad (3.7)$$

де швидкість лінійної плоскої поздовжньої хвилі позначена як $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

3.1.2. Стислий опис методу послідовних наближень в задачі знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння з п. 3.1.1

Цей метод називають методом збурень або методом малого параметра. Він оснований на введенні малого параметра ε . Застосовувати метод зручно, коли відомий розв'язок задачі, близької до тої, яку треба розв'язати. У

випадку нелінійних хвиль близькою задачею вважають лінійну задачу і використовують її класичний розв'язок.

Опишемо метод для теорії пружності [3, 125, 131] і розглянемо невідому функцію $\vec{u}(x, t)$, в припущеннях, що вона достатньо гладка. Застосуємо цей метод до нелінійного рівняння

$$L\vec{u} + N\vec{u} = 0, \quad (3.8)$$

де L є лінійним оператором, а N є нелінійним оператором.

Згідно з методом, розв'язок $\vec{u}(x, t, \varepsilon)$ рівняння (3.8) шукають у вигляді збіжного ряду

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}(x, t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \vec{u}^n(x, t) = \vec{u}^{(1)}(x, t) + \varepsilon \vec{u}^{(2)}(x, t) + \varepsilon^2 \vec{u}^{(3)}(x, t) + \dots \quad (3.9)$$

де перше наближення $\vec{u}^{(1)}(x, t)$ є розв'язком лінійного рівняння

$$L\vec{u} = 0 \quad (3.10)$$

Зазначимо, що існування розв'язку лінійної частини нелінійного рівняння є необхідною умовою методу.

Розв'язок нелінійного рівняння (3.8) шукаємо у вигляді послідовних наближень

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}(x_1, t, \varepsilon = 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{u}^n(x_1, t) = \vec{u}^{(1)}(x_1, t) + \vec{u}^{(2)}(x_1, t) + \vec{u}^{(3)}(x_1, t) + \dots \quad (3.11)$$

Особливістю та характерною перевагою цього методу є те, що довільне наближення $\vec{u}^{(n)}(x_1, t)$ знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного рівняння

$$L\vec{u}^{(n)} + N\vec{u}^{(n-1)} = 0, \quad (3.12)$$

тобто для знаходження n -го наближення необхідно знати тільки $(n-1)$ -наближення і розв'язувати тільки неоднорідне лінійне рівняння.

3.1.3. Стислий опис методу послідовних наближень в задачі знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.1.1

Нехай це буде задача про плоску поздовжню хвиллю, яка описується квад-

ратично нелінійним рівнянням (3.7), де збережені тільки ті доданки , які відповідають повздовжньому руху хвилі [12, 26]. Тоді лінійна задача описується хвильовим рівнянням

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = 0 \quad (3.13)$$

Далі треба ввести в нелінійне рівняння (3.7)

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}$$

параметр збурення (малий параметр) ε таким чином: при $\varepsilon=1$ рівняння повинно співпадати з рівнянням (3.7) і при $\varepsilon=0$ – з лінійним варіантом (3.13), тобто, мати вигляд

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = \varepsilon (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}. \quad (3.14)$$

Якщо підставити представлення (3.9) у рівняння (3.14), то отримується рекурентне співвідношення

$$u_{1,tt}^{(n)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}. \quad (3.15)$$

Слід зазначити, що рекурентна формула (3.15) спрощує обчислення наближень.

3.1.4. Розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого і другого наближень

Далі розглянемо застосування методу з урахуванням першого і другого наближень для гармонічних плоских хвиль [45, 50].

Для рівняння (3.13) розв'язок у першій апроксимації є лінійним і в класі гармонічних плоских хвиль для заданих початкової амплітуди u_{1o} і частоти має вигляд

$$u_1^{(1)}(x,t) = u_{1o} \cos(kx - \omega t) \quad ((\omega/k) = v_L). \quad (3.16)$$

Тут слід зазначити, що основний хвильовий ефект полягає в тому, що хвиля є лінійною гармонічною у вигляді першої гармоніки, яка поширюється без зміни профілю (не спотворюється) і не взаємодіє сама з собою.

Для отримання другого наближення, застосовуємо рекурентне співвідношення (3.15), з якого необхідно розв'язати наступне рівняння

$$\rho \ddot{u}_1^{(2)} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11}^{(2)} = (1/2) N_1 (u_{1o})^2 k^3 \sin 2(kx - \omega t).$$

Тут права частина включає другу гармоніку, яка є розв'язком однорідного рівняння. Тому розв'язок слід шукати подібно випадку параметричного резонанса. Відповідний розв'язок цього рівняння є таким

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = [N_1/8(\lambda + 2\mu)] (u_{1(0)})^2 k_L^2 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \quad (3.17)$$

Розв'язок у вигляді перших двох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Якщо ввести позначення

$$M_L = \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{v_L^4},$$

то розв'язок можна представити у вигляді

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + u_{1o} M_L x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t) \quad (3.19)$$

Розв'язок (3.19) підтверджує теоретично генерацію другої гармоніки. Цей головний хвильовий ефект формується у три етапи. Спочатку хвиля слабко відрізняється від лінійної гармонічної хвилі. Далі зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, чи часу її поширення перша гармоніка сумується з другою гармонікою, амплітуда якої повільно зростає, і вони утворюють модульовану хвиллю. Крок за кроком вплив другої гармоніки зростає і вона стає домінантною.

3.1.5. Розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого другого і третього наближень

Далі, продовжимо розвивати метод послідовних наближень для гармонічної хвилі до третього наближення [50, 131]. Згідно з методом, для визначення будьякого наближення використовується раніше отримане рекурентне співвідношення $u_{1,tt}^{(n)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}$ і розв'язок буде мати наступний вигляд

$$u_1(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_1^{(n)}(x_1, t) = u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) + \dots .$$

Розв'язок у першій апроксимації є лінійним і в класі гармонічних плоских хвиль для заданих початкової амплітуди u_{1o} і частоти має вигляд $u_1^{(1)}(x, t) = u_{1o} \cos(kx - \omega t)$ $((\omega/k) = v_L)$.

Відповідний розв'язок для другого наближення, згідно методу є таким

$$u_1^{(2)}(x_1, t) = \left[N_1 / 8(\lambda + 2\mu) \right] (u_{1(0)})^2 k_L^2 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t).$$

Далі зручно подати розв'язок в рамках двох перших наближень у вигляді $u_1^{(1+2)}(x, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma$, де

$$M = \frac{N_1}{8(\lambda+2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{v_L^4}.$$

Третє наближення, як слідує з [132, 133] має наступний вигляд:

$$u_1^{(3)} = u_{1(0)} (M_L)^3 (x_1)^3 \left\{ -\frac{8}{3} + \frac{13}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left[-\frac{4}{3} + \frac{29}{8(k_L)^2 (x_1)^2} \right] \cos 4\sigma \right\}. \quad (3.20)$$

Отже, третє наближення вводить у загальний розв'язок четверту гармоніку. Відповідно, четверте наближення вводитиме восьму гармоніку (на кожному кроці гармоніки подвоюються).

Розв'язок у межах перших трьох наближень має вигляд

$$u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ + u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \quad (3.21)$$

Отже, характер еволюції у межах трьох наближень визначається параметром M_L , початкової амплітудою і хвильовим числом.

Таким чином, головною характеристикою методу послідовних наближень є те, що для знаходження будь-якого наближення треба розв'язувати неоднорідне лінійне рівняння.

В нелінійній теорії хвиль вважається, що метод послідовних наближень працює добре, коли амплітуда першого наближення зростає не дуже швидко (звичайно, зростає не більше, ніж на половину значення початкової амплітуди). Це обмеження не дозволяє вивчати ряд нелінійних хвильових ефектів, які можуть бути вивчені методом повільно змінних амплітуд, де обмеження є іншим – повільність зміни амплітуди.

3.2. Наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення (стислий опис)

3.2.1. Перетворення нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.1.1

Розглянемо цей метод (оснований на перетворенні нелінійного рівняння і обмеженні на градієнт зміщення) [86, 134] для нелінійного рівняння для поздовжної хвилі, яке отримується в рамках так званої першої стандартної задачі, коли початково збуджується лише поздовжна хвиля з пункту 3.1.1.

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \text{ або } u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}. \quad (3.22)$$

Перша особливість даного методу полягає у тому, що нелінійне хвильове рівняння, до якого він застосовується, повинно мати особливу структуру.

Якраз рівняння (3.22) таку структуру має: права нелінійна частина може бути перенесена у лінійну ліву частину з метою формального запису лінійного хвильового рівняння зі змінною швидкістю хвилі

$$u_{1,tt} - \left\{ \left(v_L \right)^2 + \left(N_1 / \rho \right) u_{1,1} \right\} u_{1,11} = 0 \rightarrow u_{1,tt} - \left\{ 1 + \alpha u_{1,1} \right\} \left(v_L \right)^2 u_{1,11} = 0, \quad (3.23)$$

де $\alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$.

Далі припустимо, що початковий профіль хвилі задається функцією, яка описується поодинокою хвилею

$$u(x_1, t=0) = F(ax_1),$$

де зразу введено довільний параметр a , який дозволятиме змінювати підошву поодинокої хвилі. Зазначимо тут, що підошва поодинокої хвилі є параметром, який відповідає у гармонічній хвилі довжині хвилі.

Наступне припущення є таким: поодинока хвilia з початковим профілем у вигляді $F(ax_1)$ поширюється у такому ж вигляді, але функція вже залежить від фазової змінної $\sigma = a(x_1 - vt)$,

$$u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)], \quad (3.24)$$

куди входить змінна швидкість хвилі

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L. \quad (3.25)$$

Зазначимо, що швидкість v можна трактувати як локальну швидкість хвилі в точці x і в момент часу t .

3.2.2. Розв'язок з урахуванням першого і другого наближень

Представимо розв'язок (3.23) за допомогою методу, першими двома наближеннями, для цього спочатку приймемо обмеження в представленні швидкості хвилі (3.25)

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1, \quad (3.26)$$

з метою записати корінь у формулі (3.25) у вигляді ряду

$$\sqrt{1+\alpha u_{1,1}} = (1+\alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots \quad (3.27)$$

Тоді умова (3.26) дає право наблизено представити швидкість (3.25) першими двома членами ряду, що відповідає розв'язку задачі

$$u_1(x_1, t) \approx F \left[a \left(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t \right) \right]. \quad (3.28)$$

Обмеження (3.26) бажано прив'язати до класу конструктивних матеріалів, для яких модель Мурнагана достатньо прийнятна. Тоді для параметра α може бути вказаній певний діапазон зміни $-2 < \alpha < -19$ [135].

Далі достатньо прийняти класичне в теорії пружного деформування матеріалів обмеження малості деформації, яке звичайно записують як

$$|u_{1,1}| \ll 1$$

(тобто, вважається, що градієнт зміщення є малим). Як відомо потенціал Мурнагана описує нелінійне деформування теж і в рамках малих деформацій. Тому це обмеження зберігає можливість нелінійного деформування, але нелінійність має бути слабкою [131, 132].

Розглянемо тепер фазу хвилі $\sigma = a(x_1 - vt) = a \left[x_1 - \sqrt{1+\alpha u_{1,1}} v_L t \right]$ і врахуємо наблизене представлення (3.28). Тоді фазу можна наблизено представити так:

$$\sigma \approx \left[a \left(x_1 - v_L t \right) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t \right]. \quad (3.29)$$

Як випливає з формули (3.29), фаза складена з двох частин – класичної фази з постійною фазовою швидкістю $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ і можливо малого додаткового параметра $\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t$. При достатньо малих проміжків часу і малих підошвах параметр дійсно малий. Тоді розв'язок (3.28) можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром δ в околі класичного постійного значення фази σ

$$u_1(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots \quad (3.30)$$

У цьому розкладі збережемо перші два доданки, враховуючи малість па-

раметра δ , тобто умову

$$|\delta| = |-(1/2)\alpha av_L u_{1,1}t| \ll 1. \quad (3.31)$$

Оскільки малість $|\alpha u_{1,1}|$ вже припущенна в (3.30), то це фактично умова на $av_L t$.

Вирахуємо наближено похідну через введену раніше функцію F

$$u_{1,1}(x_1, t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_{x_1} = aF'_\sigma(\sigma) + F''_{\sigma\sigma}(\sigma)(-(1/2)\alpha a^2 v_L u_{1,1}t) \approx aF'_\sigma(\sigma).$$

Тоді наближеному розв'язку (3.30) можна надати вигляд

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)a[\delta = -(1/2)\alpha av_L u_{1,1}t] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2 \quad (3.32)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (3.32) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних до неї нових доданків і збільшення амплітуди другого доданка з часом поширення хвилі.

3.2.3. Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень

Знову розглянемо $\sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} = (1 + \alpha u_{1,1})^{1/2} = 1 + (1/2)\alpha u_{1,1} - (1/8)(\alpha u_{1,1})^2 + \dots$ і при обмеженні $|u_{1,1}| \ll 1$ розв'язок (3.24) може бути представлений наближено у вигляді перших трьох апроксимацій [131, 132, 133], що ускладнює попередній випадок розв'язку з урахуванням перших двох наближень:

$$u_1(x_1, t) \cong F \left\{ a(x_1 - v_L t) - (1/2)a\alpha v_L u_{1,1}t \left[1 + (1/4)\alpha u_{1,1} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Оскільки раніше наблизений розв'язок записувався у вигляді перших двох апроксимацій, то наближення (3.33) вносить елемент новизни.

Слід зазначити, що адекватність наближення (3.33) залежить від точності виконання умови $|u_{1,1}| \ll 1$, яке включає обмеження на два параметри: параметри, що залежать від властивостей матеріалу $\alpha = 3 + 2(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)$ і градієнту зміщення $u_{1,1}$.

Якщо позначити фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю через $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ та ввести додатковий малий параметр

$$|\delta| = \left| -\left(1/2\right) a \alpha v_L u_{1,1} t \left[1 + \left(1/4\right) \alpha u_{1,1} \right] \right| \ll 1. \quad (3.34)$$

то розв'язок (3.33) можна представити у вигляді ряду Тейлора

$$u(x_1, t) \approx F(\sigma + \delta) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)\delta + (1/2)F''(\sigma)\delta^2 + \dots \quad (3.35)$$

Далі, по причині малості, аналіз обмежується першими двома членами (3.35). Оскільки малість $|u_{1,1}| \ll 1$ вже припущена, в (3.33) то це умова на $a v_L$

Далі з (3.35) отримаємо вираз для градієнту зміщення

$$u_{1,1}(x_1, t) = F'_x(\sigma + \delta) \approx F'_\sigma(\sigma) \sigma'_x + F''_\sigma(\sigma) \sigma'_x \delta \approx a F'_\sigma(\sigma)$$

яке дозволяє записати розв'язок (3.35) у вигляді

$$\begin{aligned} u_1(x_1, t) &= F(\sigma) + F'(\sigma)\delta = F(\sigma) + F'(\sigma)a \left[-\frac{1}{2} \alpha a v_L t a F'(\sigma) \left[1 + \frac{1}{4} \alpha a F'(\sigma) \right] \right] = \\ &= F(\sigma) + F'(\sigma) \left[-\frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 F'(\sigma) - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 [F'(\sigma)]^2 \right] = \\ &= F(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2 - \frac{1}{8} \alpha^2 a^3 v_L t [F'(\sigma)]^3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Отже остаточний результат такий

$$u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = F(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2 - \frac{1}{8} \alpha^2 a^3 v_L t [F'(\sigma)]^3 \quad (3.37)$$

Наближене представлення розв'язку (3.37) описує нелінійні хвильові ефекти, які у першу чергу зумовлюють виникнення другої та третьої гармонік у разі поодинокої хвилі і збільшення амплітуди з часом поширення хвилі.

3.3. Наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння для циліндричної радіальної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення

3.3.1. Найпростіше квадратично нелінійне хвильове рівняння, яке описує еволюцію циліндричної радіальної хвилі

Циліндричною радіальною хвилею зміщення називають хвилю, яка розповсюджується в нескінченому просторі з циліндричною круговою поверхнею, до граничної поверхні якої прикладається імпульс, що збуджує рух в радіальному напрямку. У найпростішому випадку імпульс гармонічний в часі. Циліндрична система координат $Or\vartheta z$ вибирається таким чином, щоб вісь Oz збігалася з віссю порожнини і рух хвилі стає осесиметричним і залежним лише від радіуса r і часу t . Ненульовими є тільки радіальний зсув u_r і три компонента тензора напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}$. Рівняння руху має вигляд [19, 114, 138]

$$\mu \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right]_r - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (3.38)$$

Відповідне нелінійне рівняння в рамках моделі Мурнагана є таким [114]

$$\begin{aligned} & \left(c_L \right)^{-2} u_{r,tt} - \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \\ & = -\alpha_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \alpha_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \alpha_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \alpha_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \alpha_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2, \\ & \alpha_1 = 3 + \frac{2(A+3B+C)}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_3 = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}, \\ & \alpha_4 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+2C}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_5 = \frac{2\lambda+3\mu+A+2B+C}{\lambda+2\mu} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (3.39) застосуємо метод послідовних наближень, коли початковий профіль хвилі описується функцією Ханкеля. Для цього вводять потенціал $\Phi(r, t)$ за формулою $u_r = \Phi_{,r}$ і тоді рівняння (3.38) стає більш простим.

$$\Phi_{,tt} - (c_L)^2 [\Phi_{,rr} + (1/r)\Phi_{,r}] = 0$$

Саме це рівняння має розв'язок у вигляді функції Ханкеля першого роду і першого порядку $u_r^{(1)}(r, t) = u_r^o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i\omega t}$, де u_r^o є заданим в умові на поверхні порожнини амплітудним множником

$$u_r^o = -\frac{p_o k_L}{k_L (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)}, \text{та } k_L = (\omega/v_L), v_L = \sqrt{[(\lambda + 2\mu)/\rho]} \epsilon$$

хвильовим числом і фазовою швидкістю.

Математична довідка. Класичне рівняння Бесселя записують у вигляді

$$X'' + (1/x) X' + [1 - (\lambda^2/x^2)] X = 0.$$

Один з розв'язків цього рівняння записується через циліндричну функцію дійсного аргументу - функцію Ханкеля $H_0^{(1)}(x)$ першого роду і порядку λ .

Якщо розв'язувати нелінійне рівняння (3.39) наближено методом послідовних наближень, то розв'язок в рамках перших двох наближень представляється у вигляді [26, 57]

$$u_r(r, t) = u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t). \quad (3.40)$$

Друге наближення визначається двома способами. Перший спосіб осно-ваний на припущення, що чотири з п'яти нелінійних складових в (3.39) включають множники r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} і тому зі збільшенням відстані від порожнини мало впливають на остаточний результат. Іншими словами, рівняння (3.39) аналізується за умови

$$S(u_r, u_{r,r}, u_{r,rr}) = -\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r}. \quad (3.41)$$

Далі використовується наближене представлення функцій Ханкеля [7]

$$H_p^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i \left[z - \frac{\pi}{2} \left(p + \frac{1}{2} \right) \right]} \left\{ 1 + i \frac{4p^2 - 1}{8z} - \frac{(4p^2 - 1)(4p^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \dots \right\} \quad (3.42)$$

У підсумку, нелінійний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} u_r(r,t) &= u_r^{(1)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_r^o e^{i \left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{4} \right)} \frac{1}{\sqrt{k_L r}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{i}{k_L r} - \frac{9}{128(k_L r)^2} \right) + \\ &+ \frac{r(u_r^o)^2}{\pi k_L} (k_L)^2 N_1 e^{i 2 \left(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{2} \right)} \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{k_L r} + \frac{5}{18} \frac{i}{(k_L r)^2} + \frac{151}{288} \frac{1}{(k_L r)^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Другий спосіб враховує всі нелінійні складові в рівнянні (3.39) і використовує рекурентні формули для похідних функцій Ханкеля і факт, що добутки $(H_0^{(1)}(k_L r))^2$, $(H_1^{(1)}(k_L r))^2$, $H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r)$ не являються розв'язком лінійного аналога рівняння (3.39). Відповідно за другим підходом розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} u_r(r,t) &= u_r^{(1)}(r,t) + u_r^{(2)}(r,t) = u_{ro} H_1^{(1)}(k_L r) e^{i \omega t} + \\ &+ \left\{ B_{00} \left[H_0^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{11} \left[H_1^{(1)}(k_L r) \right]^2 + B_{01} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) \right\} e^{2i \omega t}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Розв'язок (3.44) можна спростити за умови, що відстань $r - r_0$ пройдена хвилею відповідає довжині хвилі c_l . У цьому випадку два доданки з коефіцієнтами B_{00}, B_{11} та частина доданків з коефіцієнтом B_{01} можна нехтувати.

Тоді розв'язок (3.44) спроститься до наступного вигляду:

$$u_r(r,t) = u_o H_1^{(1)}(k_L r) e^{i \omega t} + (u_o)^2 k_L \frac{N_1}{\lambda + 2\mu} H_0^{(1)}(k_L r) H_1^{(1)}(k_L r) e^{2i \omega t} \quad (3.45)$$

На основі формул (3.43), (3.45) було побудовано багато графіків, що описують еволюцію циліндричних хвиль для різних значень трьох основних параметрів – початкової максимальної амплітуди, частоти хвилі та супкупності механічних характеристик конкретного матеріалу [86,133, 134, 135].

3.3.2. Перетворення нелінійного хвильового рівняння з пункту 3.3.1

Починаючи з досить близької до порожнини відстані розв'язки (3.44), (3.45) практично ідентичні, тому це дає підстави для наступної зміни початкового нелінійного рівняння (3.39): проігноруємо тільки дві з п'яти нелінійних складових і збережемо справа в (3.39) вираз

$$-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2; \quad (3.46)$$

Тоді рівняння (3.39) представиться у наступному вигляді

$$u_{r,rr} \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right) + \frac{1}{r} u_{r,r} \left(1 - \tilde{N}_4 u_{r,r}\right) - \frac{u_r}{r^2} \left(1 - \tilde{N}_3 u_{r,r}\right) - \frac{1}{(c_L)^2} u_{r,tt} = 0;$$

приймемо наближено, що $\tilde{N}_1 \approx \tilde{N}_3 \approx \tilde{N}_4$ (в дійсності, $\tilde{N}_1 > \tilde{N}_4 \gg \tilde{N}_3$), і отримаємо кінцевий вираз для нелінійного хвильового рівняння

$$(c_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - u_{r,tt} = 0. \quad (3.47)$$

Тут слід підкреслити, що рівняння для циліндричної радіальної хвилі (3.47) має таку ж структуру, як рівняння для плоскої поздовжньої хвилі.

3.3.3. Розв'язок з урахуванням першого і другого наближень

Нехай початковий профіль хвилі описується функцією $u_r(r, t=0) = F(r)$ і поодинока хвиля поширюється у вигляді

$$u_r(r, t) = F(a(r - vt)), \quad (3.48)$$

де швидкість хвилі визначається виразом

$$v = \sqrt{1 + \tilde{N}_1 u_{r,r}} c_L. \quad (3.49)$$

Примітка 1. Параметр a введений в представленні (3.48) з метою вибору довжини підошви поодинокої хвилі - в залежності від значення цього параметра підошва хвилі звужується або розширюється. У гармонічній хвилі такий параметр називають довжиною хвилі $\lambda = (2\pi/k)$.

Приймемо обмеження в представленні (3.49)

$$\tilde{N}_1 u_{r,r} \ll 1, \quad (3.50)$$

і представимо наблизено розв'язок рівняння (3.47) у вигляді

$$u_r(r,t) \approx F \left[a(r - c_L t) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right]. \quad (3.51)$$

Точність наближення (3.51) залежить від точності виконання умови (3.50), яке включає обмеження на два параметри: параметр \tilde{N}_1 і градієнт зміщення $u_{r,r}$.

Позначимо фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю наступним чином $\sigma = a(r - c_L t)$ і додатковий малий параметр через $\delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t$, представимо розв'язок (3.51) (поодиноку хвилю) у вигляді ряду Тейлора і обмежимо розгляд першими двома членами ряду через малість δ . Тоді беручи до уваги рівність

$$u_{r,r}(r,t) \approx F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \sigma'_r = F'_\sigma(\sigma + \delta) \cdot \left(1 - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,rr} t \right) \approx F'_\sigma$$

розв'язок (3.51) буде наступний

$$u_r^{(1+2)}(r,t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) \left[\delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a c_L u_{r,r} t \right] = F(\sigma) - (1/2) \tilde{N}_1 a c_L t \left[F'(\sigma) \right]^2. \quad (3.52)$$

Наблизене представлення розв'язку (3.52) для поодинокої циліндричної радіальної хвилі має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій F буде описувати виникнення (крім «першої гармоніки») «другої гармоніки» або подібних їй нових складових і збільшення амплітуди «другої гармоніки» з часом поширення хвилі.

Але в даному випадку функція $F(r)$ повинна бути розв'язком лінійного аналога нелінійного хвильового рівняння (3.47). Оскільки рух поодинокої

хвилі не буде гармонічним в часі, то циліндрична функція дійсного аргументу - функція Ханкеля $H_\lambda(r)$ [136, 137] – вже не є розв'язком рівняння

$$(c_L)^2 \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0.$$

3.3.4. Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень

Розглянемо корінь (3.49) у наближеному вигляді для перших трьох доданків

$$\sqrt{1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}} \approx 1 - (1/2) \tilde{N}_1 u_{r,r} + (1/8) (\tilde{N}_1)^2 (u_{r,r})^2. \quad (3.53)$$

Це означає, що будуть розглянуті перші три наближення [19,20].

З урахуванням умови (3.50) та представлення (3.53) випливає, що розв'язок (3.47) можна записати наближено так

$$u_r(r,t) \equiv u_r^o F \left[a(r - c_L t) - (1/2) a c_L \tilde{N}_1 u_{r,r} t + (1/8) a c_L (\tilde{N}_1)^2 (u_{r,r})^2 t \right]. \quad (3.54)$$

Позначимо фазу хвилі з постійною фазової швидкістю через $\sigma = a(r - c_L t)$ і параметр через $\delta^* = -(1/2) a c_L \tilde{N}_1 u_{r,r} \left[1 + (1/4) \tilde{N}_1 u_{r,r} \right] t$.

Наступний крок полягає в представленні формули (3.54) у вигляді

$$u_r(r,t) = u_r^o F \left[a(r - vt) \right] = u_r^o F \left[a(r - c_L t) + \delta^* \right] = u_r^o F(\sigma + \delta^*), \quad (3.55)$$

Відповідно до методу, введемо обмеження на параметр δ^* наступним чином

$$\left| \delta^* = -(1/2) a c_L \tilde{N}_1 u_{r,r} \left[1 + (1/4) \tilde{N}_1 u_{r,r} \right] t \right| \ll 1. \quad (3.56)$$

Представимо (3.55) у вигляді ряду Тейлора

$$u_r(r,t) = u_r^o a F(\sigma + \delta^*) = u_r^o F(\sigma) + u_r^o F'(\sigma) \delta^* + (1/2) u_r^o F''(\sigma) \delta^{*2} + \dots \quad (3.57)$$

Через малість δ^* і малість $\delta^*_{,r}$ отримаємо наступне представлення

$$\begin{aligned} u_{r,r}(r,t) &= u_r^o \left(a + \delta_{,r}^* \right) F'(\sigma + \delta^*) \approx \\ &u_r^o a \left[F'(\sigma) + F''(\sigma) \delta^* \right] + u_r^o \delta_{,r}^* \left[F'(\sigma) + F''(\sigma) \delta^* \right] \approx u_r^o a F'(\sigma) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Підставляючи в (3.57) для перших двох доданків ряду представлення δ^* та застосовуючи (3.58) отримаємо наступний розв'язок

$$u_r^{(1+2+3)}(r,t) \approx u_r^o F(\sigma) - (1/2) \left(u_r^o \right)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[F'(\sigma) \right]^2 \left[1 + (1/4) u_r^o \tilde{N}_1 a F'(\sigma) \right] \quad (3.59)$$

Останнім кроком буде перетворення (3.59) в наступному вигляді

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r,t) &\approx u_r^o F(\sigma) - (1/2) \left(u_r^o \right)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[F'(\sigma) \right]^2 - \\ &- (1/8) \left(u_r^o \right)^3 a^3 c_L \left(\tilde{N}_1 \right)^2 \left[F'(\sigma) \right]^3 t \end{aligned} \quad (3.60)$$

Розв'язок (3.60) містить три доданки. Перший доданок є лінійним, другий вводить квадратичну нелінійну добавку, а третій доданок вводить кубічну нелінійну добавку.

Основний висновок. У цьому розділі отримані зручні для подальшого використання формули для знаходження наближених розв'язків нелінійних хвильових рівнянь, які аналізуються в наступних розділах.

РОЗДІЛ 4

ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ГАРМОНІЧНОЇ ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОХ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

4.1. Аналіз нелінійної пружної поздовжної гармонічної хвилі методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення (перші два наближення)

4.1.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем. Теоретичний аналіз на основі методів послідовних наближень і обмеження на градієнт зміщення. Основні формули для перших двох наближень

Основним нелінійним хвильовим рівнянням у цій задачі є рівняння [126]

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \text{ або } u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}.$$

Далі введемо наступні позначення: метод послідовних наближень – метод 1, метод обмеження на градієнт зміщення – метод 2.

Як вказано в п. 3.1.4 для методу 1 розв'язок у першій апроксимації має вигляд

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t), \text{ або } u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} e^{i(k_L x_1 - \omega t)}. \quad (4.1)$$

u_{1o} - початкова амплітуда.

Отриманий методом 1 розв'язок в рамках перших двох наближень [131, 132] показаний в п.3.1.4 як формула (3.18)

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для методу 2 початковий профіль хвилі має вигляд $F(k_L x_1 - \omega t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t)$. Тоді формула (3.37) для перших двох наближень в рамках

методу 2 приймає наступний вигляд

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_{1o} e^{-ik_L(x_1 - v_L t)} + (1/2) v_L t \alpha (k_L)^2 (u_{1o})^2 e^{-2ik_L(x_1 - v_L t)}; \quad (4.3)$$

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L(x_1 - v_L t)) - (1/2) \alpha v_L t (k_L)^2 (u_{1o})^2 [\sin(k_L(x_1 - v_L t))]^2 \quad (4.4)$$

Порівняння розв'язків (4.2) і (4.4) показує, що вони не ідентичні, і це змінює якісну картину еволюції хвилі.

Другий доданок у формулі для методу 1 має знак плюс а в методі 2 має знак мінус. З цього випливає, що всі графіки які описують перше плюс друге наближення за методом 1 характеризуються більшими амплітудами ніж амплітуди початкового профіля, тоді як за методом 2 – меншими.

4.1.2. Числовий аналіз. Властивості матеріалів, які використані в цьому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система СІ) [1, 9, 22, 23, 38, 40]:

Матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^4; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{11}; \quad v_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{11}; \quad v_L = 3,769 \cdot 10^3; \quad \alpha = -34,08.$$

Параметри гармонічної хвилі вибиралися наступним чином: додатково до вибраної швидкості хвилі $v_L = (\omega/k_L)$ вибиралась початкова частота ω з ультразвукового діапазону хвиль і вже за відомого хвильового числа $k_L = (\omega/v_L)$ перерахувалася довжина хвилі за формулою $L = (2\pi/k_L)$ (для кожного матеріалу своя довжина хвилі) $\omega = 1,5 \cdot 10^6$; $L = 0,018$ (матеріал 51),

$\omega = 1,5 \cdot 10^6$; $L = 0,015$ (матеріал 52). Параметр $\alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$, вираховується за формулою (3.23).

4.1.3. Числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем (з застосуванням методів 1 і 2, і врахуванням перших двох наближень)

За формулами (4.1) та (4.2) побудовані двовимірні графіки «зміщення u_1 – пройдена хвилею відстань x_1 ». Всього розглянуто 4 набори (2 розв'язки, 2 матеріали), для одного варіанту довжини хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями, для порівняння першого і другого наближень. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані багато десятків повторень довжини хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення гармонічного профілю спостерігається.

На рис. 4.1а,б,в,г наведено графіки, які отримані за методом 1 для варіанту матеріалу М51, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ):
 $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

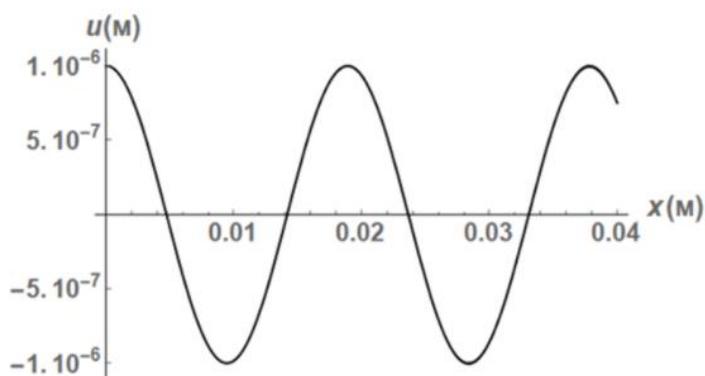


Рис. 4.1а. Початковий профіль гармонічної хвилі (перший доданок роз'язку (4.2), довжина хвилі $L = 0,018$)

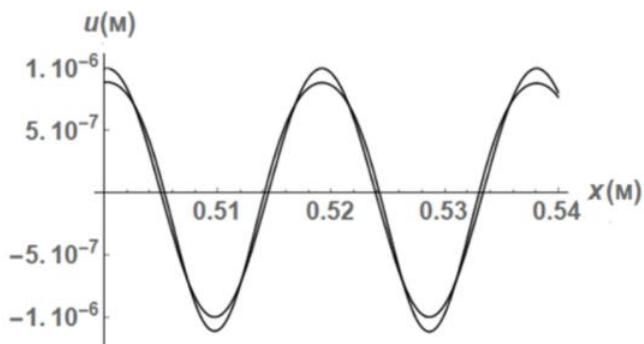


Рис. 4.1б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

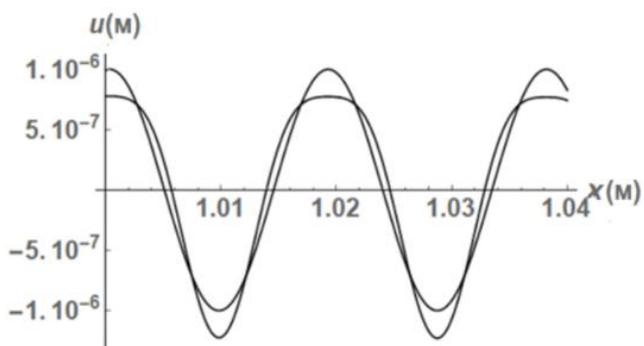


Рис. 4.1в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

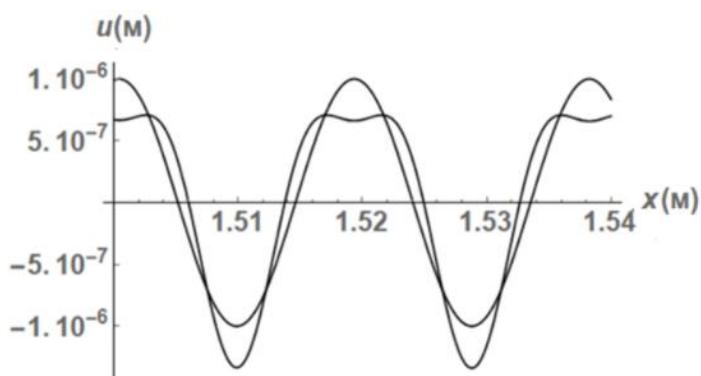


Рис. 4.1г. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

З графіків 4.1а,б,в,г випливає, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається практично симетрично щодо вершин кривих. Рис. 4.1а відповідає початковому профілю хвилі. На рис. 4.1б показано, що при русі хвилі

на відстані в п'ять повторень довжини хвилі еволюція хвилі є незначною. Проте рис. 4.1б показує лише початковий етап розвитку еволюції, і основна тенденція еволюції ще не спостерігається. Починаючи з рис. 4.1в та рис. 4.1г спостерігається більша пологість відносно вершин гармонічного профіля. Вплив другого доданка розв'язку (4.2) вже цілком спостерігається але тенденція на спотворення профіля, що призводить до утворення двох горбів, ще не спостерігається. Тому варіант, коли така тенденція вже цілком очевидна, показаний для іншого матеріалу на рис. 4.2.

На рис. 4.2а,б,в,г наведено графіки, які отримані за методом 1 для варіанту матеріалу М52, що відповідає таким значенням параметрів (система CI): $L = 0,015$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

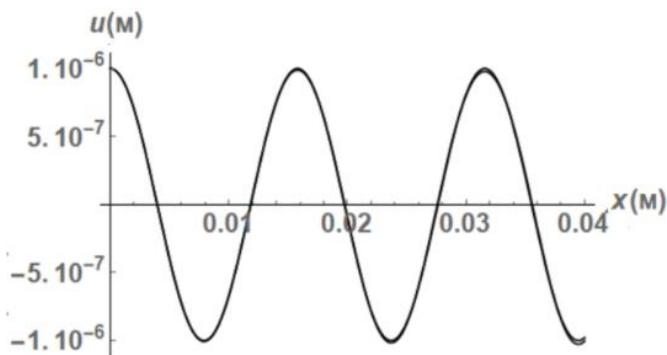


Рис. 4.2а. Початковий профіль гармонічної хвилі (перший доданок розв'язку (4.2), довжина хвилі $L = 0,015$)

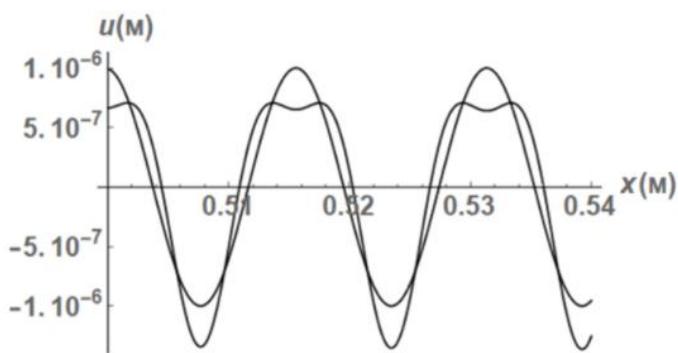


Рис. 4.2б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

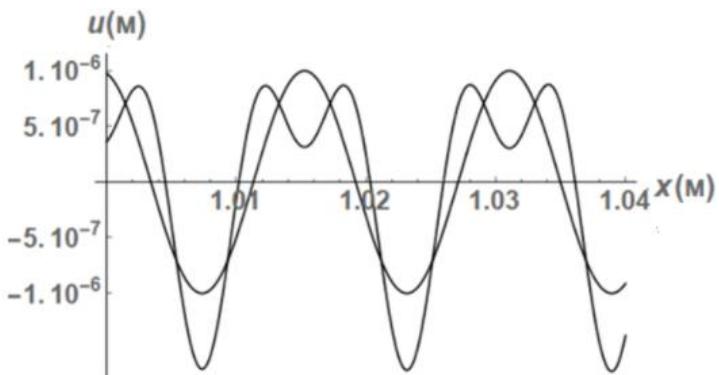


Рис.4.2в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

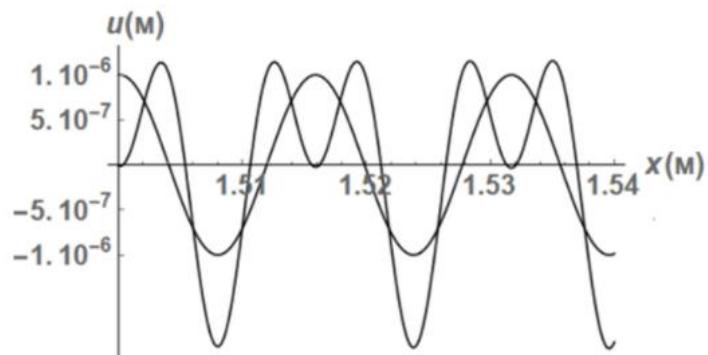


Рис. 4.2г. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

З рис. 4.2а,б,в,г випливає, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається майже симетрично щодо вершин кривих, аналогічно до попереднього випадку. Рис. 4.2а відповідає початковому профілю. На рис. 4.2б показано, що при русі хвилі на відстані в 30 повторень довжини хвилі нелінійність вже проявляється. Рис. 4.2в показує лише початковий етап розвитку еволюції, і основна тенденція еволюції ще не спостерігається. Починаючи з рис. 4.2в а особливо з рис. 4.2г спостерігається значна деформація що до початкового профіля розв'язку 4.1. Саме розв'язок 4.2 (1-ше + 2-ге наближення) показує на рис. 4.2в тенденцію до утворення двох горбів, а вже на рис. 4.2г помітно спостерігається утворення двох горбів у верхній частині графіка, та підняття впадини в нижній частині.

При еволюції гармонічної хвилі при врахуванні другого наближення спостерігається тенденція до перетворення початкового профіля на профіль подібний до другої гармоніки (зменшення довжини хвилі вдвічі та деякому зменшенні початкової максимальної амплітуди).

Далі на рис. 4.3 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння методом 1, що відповідає матеріалу М52 та значенням параметрів (система СІ): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік гарно демонструє зміну початкового профіля.

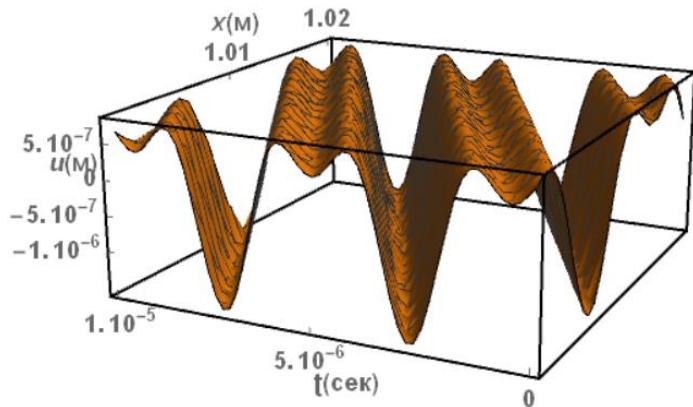


Рис.4.3. Тривимірний профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення))

З показаних вище графіків випливає, що спотворення в обох випадках відбувається з різною швидкістю через відмінність у вихідних параметрах задачі. Обом випадкам відповідають графіки, несиметричні щодо горизонтальної осі і з різною швидкістю еволюції для додатніх і від'ємних значень амплітуд (це видно з графіків, риска 4.2в). Загальне спостереження щодо перших двох наближень – профілі стискаються до осі (зростає значення амплітуди), спостерігається утворення двох горбів, що відповідає розв'язку (4.2).

Далі розглянемо наступну групу графіків, які побудовані за допомогою розв'язків (4.1) (1-ше наближення) та (4.4) (1-ше + 2-ге наближення), що отримані за методом 2.

На рис. 4.4а,б,в,г наведено графіки, які отримані за методом 2 для варі-

анту матеріалу М51, що відповідає таким значенням параметрів (система CI): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

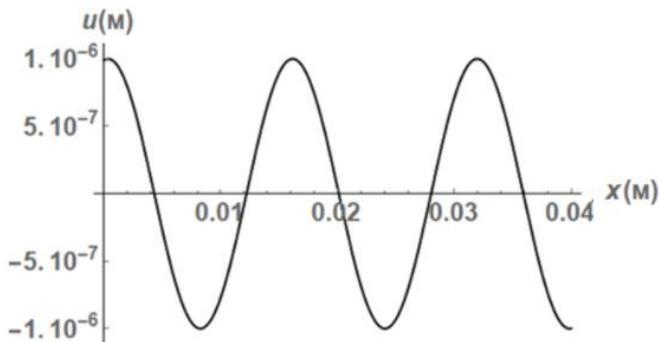


Рис. 4.4а. Початковий профіль гармонічної хвилі (перший доданок роз'язку (4.4), довжина хвилі $L = 0,018$)

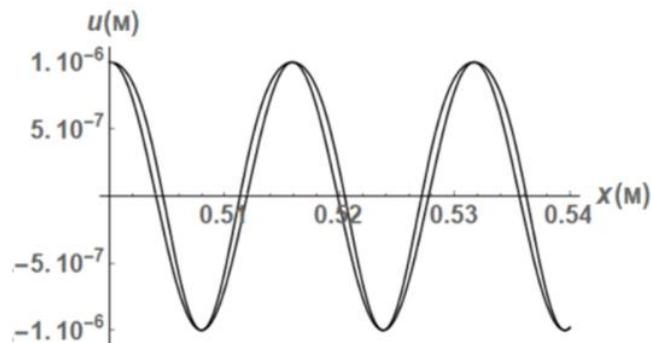


Рис. 4.4б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

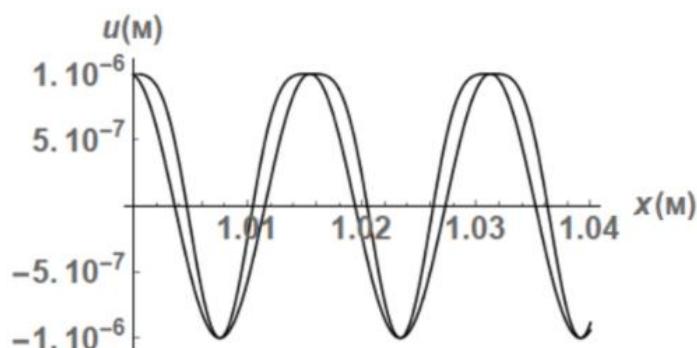


Рис. 4.4в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

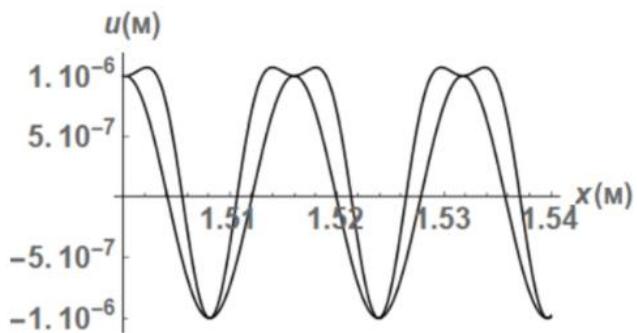


Рис. 4.4г. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

З рис. 4.4а,б,в,г випливає, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається майже симетрично щодо вершин кривих і аналогічно, відносно графіків, які були побудовані за методом 1. Рис. 4.4а відповідає початковому профілю хвилі. На рис. 4.4б показано, що при русі хвилі на відстані в 30 повторень довжини хвилі спотворення початкового профіля незначне, тому на малих відстанях, яку пройшла хвиля, нелінійність матеріалу можна не враховувати. Проте рис. 4.4б показує лише початковий етап розвитку еволюції, і основна тенденція еволюції ще не спостерігається. Починаючи з рис. 4.4в та рис. 4.4г спостерігається більша пологість відносно вершин початкового гармонічного профіля. Вплив другого доданка розв'язку (4.4) вже цілком помітно: спостерігається тенденція до утворення двох горбів і збільшення максимальної амплітуди. Більш значний вплив нелінійності на профіль розв'язку (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) показано нижче для іншого типу матеріалу.

На рис. 4.5а,б,в,г наведено графіки, які отримані за методом 2 для варіанту матеріалу М52, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,015$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{lo} = 1 \cdot 10^{-6}$.

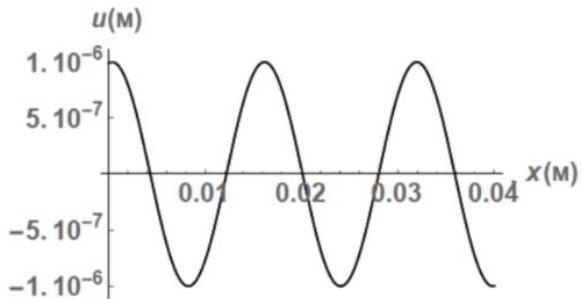


Рис. 4.5а. Початковий профіль гармонічної хвилі (перший доданок роз'язку (4.4), довжина хвилі $L = 0,015$)

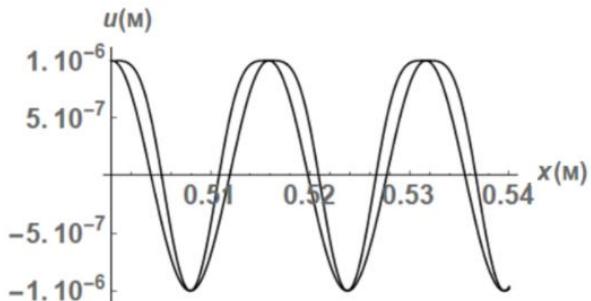


Рис. 4.5б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

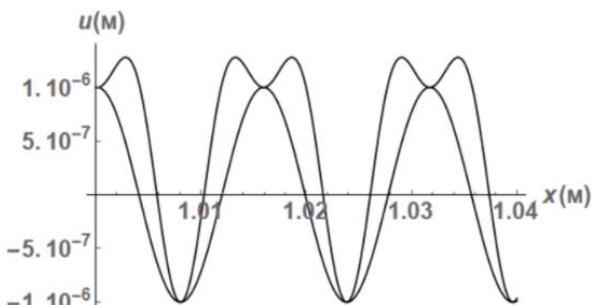


Рис. 4.5в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

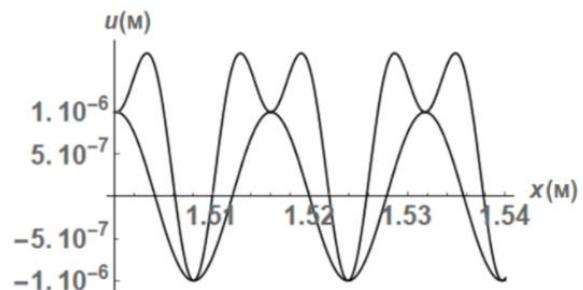


Рис. 4.5г. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

Далі на рис. 4.6 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння методом 2, що відповідає матеріалу M52 та значенням параметрів (система CI): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік гарно демонструє зміну початкового профіля

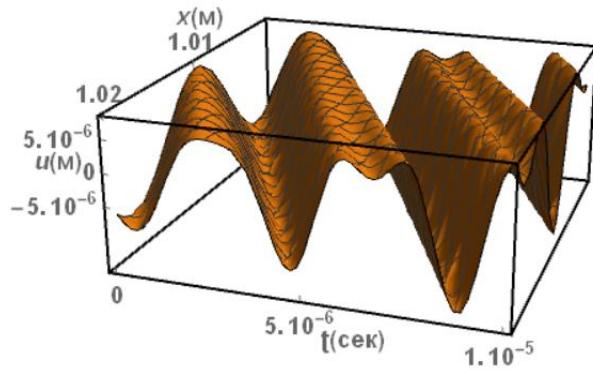


Рис.4.6. Тривимірний профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (графік відповідає формулі (4.4) (1-ше + 2-ге наближення))

З графіків 4.5а,б,в,г випливає, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається практично симетрично щодо вершин кривих, аналогічно до попереднього випадку. Рис. 4.5а відповідає початковому профілю хвилі. Рис. 4.5б показує лише початковий етап розвитку еволюції і при русі хвилі на відстані в тридцять повторень довжини хвилі нелінійність вже проявляється. Починаючи з рис. 4.5в а особливо з рис. 4.5г спостерігається значна деформація початкового профіля. Саме розв'язок (4.4) (1-ше + 2-ге наближення) показує, тенденцію до утворення двох горбів рис. 4.5в, а вже на рис. 4.5г помітне утворення двох горбів для додатних значень амплітуди.

Еволюція гармонічної хвилі при врахуванні другого наближення показує тенденцію до перетворення початкового профіля на профіль другої гармоніки для додатних значень амплітуди, при цьому збільшується максимальне значення амплітуди.

Можна спостерегти характерні особливості для гармонічної хвилі при аналізі методами 1 та 2. Обом випадкам відповідають графіки, несиметричні щодо горизонтальної осі і різна швидкість еволюції для додатніх і від'ємних

значень амплітуд. Зміщення графіків відповідає явищу опускання або підвищення середнього значення амплітуди, щодо якого відбуваються коливання.

Таким чином порівняння графіків еволюції гармонічної хвилі в рамках перших двох наближень показує, що зміна початкового профіля хвилі відбувається досить наглядно: утворюються два горби з проходженням хвилею деякої відстанні та змінюється значення максимальної амплітуди.

Відмінність та подібність описаної еволюції методами 1 та 2 полягає в наступному:

1. Подібне для обох методів є те, що утворюється два горби замість одного, тобто друге наближення, яке присутнє у розв'язку за методом 1 та методом 2 (що є подібне для цих методів) вносить суттєві корективи.
2. Відмінність для обох методів полягає в різному математичному представленні (друге наближення для обох методів є суттєво математично відмінними) розв'язків гармонічного нелінійного рівняння.

Отже, дослідження для двох методів і перших двох наближень показує, що дисторсія початкового профіля хвилі досить наглядно спостерігається і на відміну від відмінності математичного представлення обох розв'язків еволюція хвилі – подібна. Також виявляється новий нелінійний хвильовий ефект, що полягає в перетворенні одного горба на два горби, сторони яких є несиметричними.

4.2. Аналіз нелінійної пружної поздовжної гармонічної хвилі методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення)

4.2.1. Квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем.

Теоретичний аналіз на основі методів послідовних наближень і обмеження на градієнт зміщення. Основні формули для перших трьох наближень

Основним нелінійним хвильовим рівнянням у цій задачі є рівняння

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \text{ або } u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}.$$

Розв'язок у першій апроксимації має вигляд

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t), \text{ або } u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} e^{i(k_L x_1 - \omega t)}, \text{ де}$$

u_{1o} - початкова амплітуда хвилі.

Розв'язок, який отриманий в п. 3.1.4 для методу 1 для перших двох наближень такий:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отриманий методом 1 розв'язок в рамках перших трьох наближень [131, 132, 133], що показаний в п.3.1.5 має вигляд, такий:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ &+ u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\text{де } M_L = \frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} (k_L)^2.$$

Початковий профіль хвилі має вигляд $F(k_L x_1 - \omega t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t)$.

Розв'язок, який отриманий в п. 3.2.2 для методу 2 для перших двох наближень такий:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L(x_1 - v_L t)) - (1/2) \alpha v_L t (k_L)^2 (u_{1o})^2 \left[\sin(k_L(x_1 - v_L t)) \right]^2 \quad (4.7)$$

Отриманий методом 2 розв'язок в рамках перших трьох наближень, що показаний в п. 3.2.3 має вигляд, такий:

$$\begin{aligned} u_2^{(1+2+3)}(x_1, t) &= u_{1o} \cos(k_L(x_1 - v_L t)) - (1/2) \alpha v_L t (k_L)^2 (u_{1o})^2 \left[\sin(k_L(x_1 - v_L t)) \right]^2 + \\ &+ (1/8) \alpha^2 v_L t (k_L)^3 (u_{1o})^3 \left[\sin(k_L(x_1 - v_L t)) \right]^3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Порівняння розв'язків (4.6) і (4.8) показує, що вони не є ідентичні осі кільки за методом 1 додатково утворюється четверта гармоніка, а за методом

2 – третя гармоніка.

4.2.2. Числовий аналіз. Властивості матеріалів, які використані в цьому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система CI) [1, 9, 22, 23, 38, 40]:

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \mu = 0,721 \cdot 10^{10}; \\ A = -1,33 \cdot 10^{11}; B = -4,45 \cdot 10^{11}; C = -9,5 \cdot 10^{11}; v_L = 3.769 \cdot 10^3; \alpha = -34,08.$$

Матеріал 53 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,4) –

$$\rho = 1,24 \cdot 10^4; \lambda = 18,1 \cdot 10^{10}; \mu = 1,2 \cdot 10^{10}; \\ A = -2,03 \cdot 10^{11}; B = -6,72 \cdot 10^{11}; C = -15,7 \cdot 10^{11}; v_L = 4.066 \cdot 10^3; \alpha = -33,96.$$

Параметри гармонічної хвилі вибиралися наступним чином: додатково до обраної швидкості хвилі $v_L = (\omega/k_L)$ вибиралась початкова частота ω з ультразвукового діапазону хвиль і вже за відомого хвильового числа $k_L = (\omega/v_L)$ перераховувалася довжина хвилі за формулою $L = (2\pi/k_L)$ (для кожного матеріалу своя довжина хвилі) $\omega = 1,5 \cdot 10^6; L = 0,015$ (матеріал 52), $\omega = 1,5 \cdot 10^6; L = 0,017$ (матеріал 53). Параметр $\alpha = [N_1/(\lambda + 2\mu)]$, вираховується за формулою (4.23).

4.2.3. Числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем (з застосуванням методів 1 і 2 і врахуванням перших трьох наближень)

За формулами (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) та (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки «зміщення u_1 – пройдена хвилею відстань x_1 ». Всього розглянуто 4 основні набори (2 розв'язки, 2 матеріали), для одного варіанту довжини хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає чотири графіки

одного профілю для трьох початкових наближень, додатково є чотири графіки для кожного набору, які показують, окрім третє наближення, а також один графік на якому зображене порівняння двох профілів відповідно для двох та трьох початкових наближень на достатній відстані, коли можна спостерігати спотворення початкового профіля. Analogічно до попередніх випадків, присутній графік, який відповідає тривимірному випадку, для нагляднішого розуміння процесу спотворення хвилі. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані багато десятків повторень довжини хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення гармонічного профілю цілком спостерігається візуально.

На рис. 4.7а,б,в,г наведено графіки для варіанта розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) на рис. 4.8а,б,в показано відповідні графіки тільки третього доданку розв'язку (4.6), що відповідає наближенню $u_1^{(3)}(x_1, t)$. На рис. 4.9 показано відповідний графік на якому зображене два профілі для відповідно розв'язків (4.5) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення) і (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Рис 4.10 відповідає тривимірному зображеню розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Всі графіки (4.7-4.10) побудовані за методом 1 для варіанту матеріалу M52, що відповідає таким значенням параметрів (система CI):

$$L = 0,018, \omega = 1,5 \cdot 10^6, u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}.$$

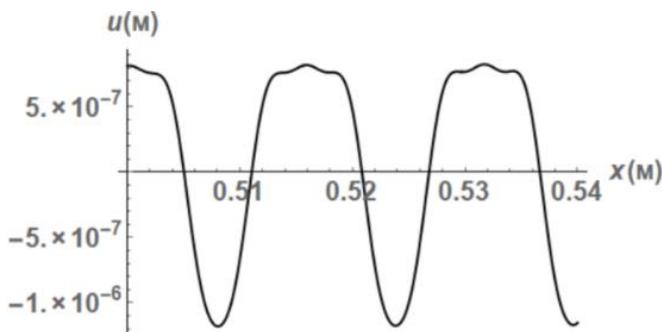


Рис. 4.7а. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

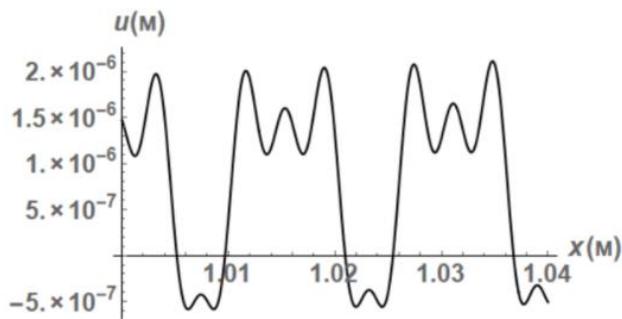


Рис. 4.7б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

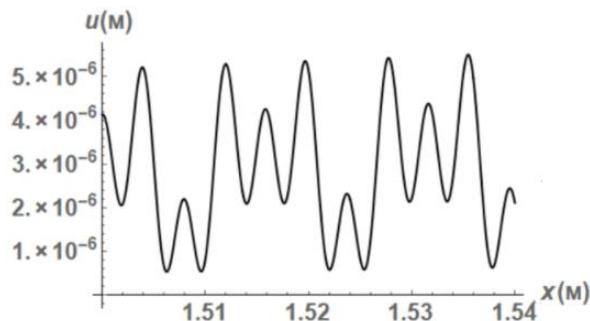


Рис. 4.7в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

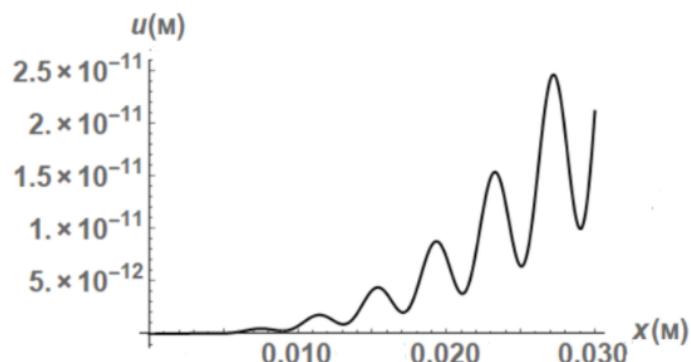


Рис. 4.8а. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає початковому етапу руху тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

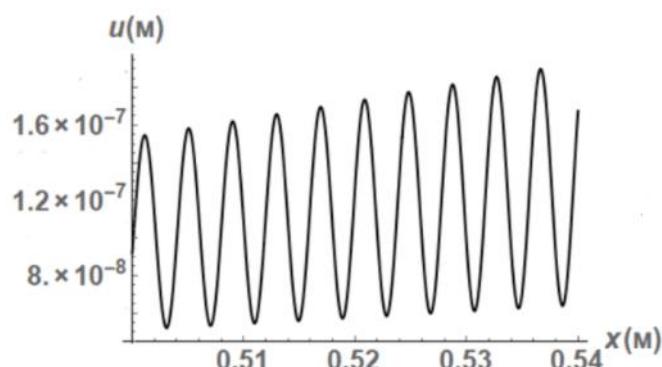


Рис. 4.8б. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 30 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

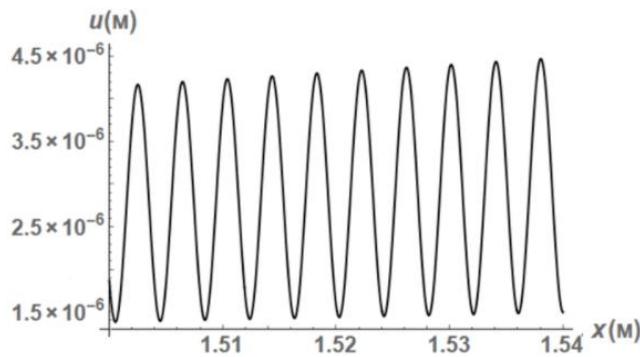


Рис. 4.8e. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 90 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

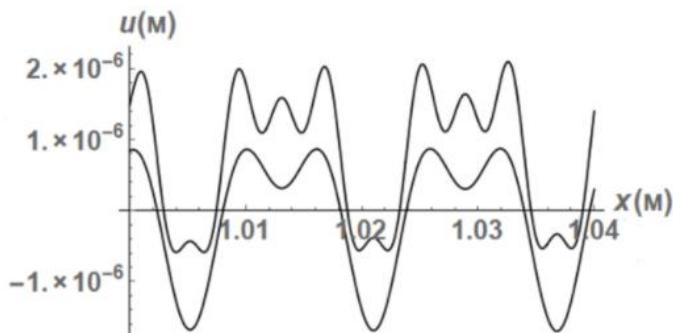


Рис. 4.9. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.5) (1-ше + 2-ге наближення)).

Далі на рис. 4.10 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння перших трьох наближень отриманий методом 1, що відповідає матеріалу М52 і таким значенням параметрів (система СІ): $L=0,018$, $\omega=1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o}=1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік краще демонструє зміну початкового профіля.

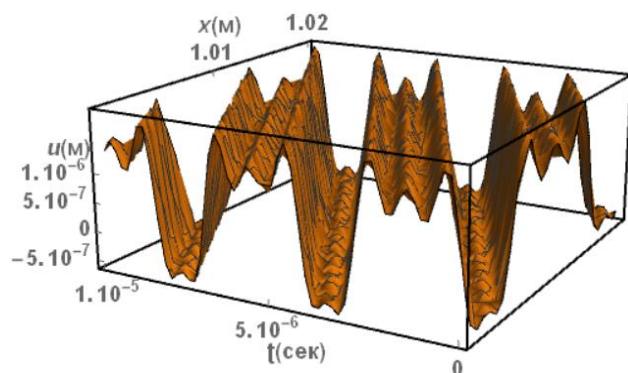


Рис.4.10. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає тривимірному варіанту для розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

З групи рис. 4.7а,б,в слідує, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається практично симетрично щодо вершин кривих. На кожному із етапів руху хвилі спостерігається утворення трьох горбів для додатних значень амплітуди, і двох впадин для від'ємних значень амплітуди. На рис. 4.8а,б,в, видно еволюцію третього наближення зі шляхом пройденої хвилі. Рис. 4.8 демонструє вигляд та швидку зміну нелінійної добавки розв'язку 4.6 і вказує на суттєвий вплив еволюції хвилі в цілому, при проходженні певної дистанції. На рис. 4.9 наглядно видно що спостерігається вплив третьої добавки в порівнянні двом першими, тобто утворюється три горби (на верхній лінії) і два, що спостерігаються на нижній лінії, та збільшення максимальної амплітуди для трьох перших наближень. Для даного типу матеріалу та відповідних параметрів хвилі спостерігається значна різниця впливу на початковий профіль для розв'язків (4.5) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення) та (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) тобто вплив трьох наближень спричиняє утворення трьох горбів а вплив двох наближень відповідно утворень двох горбів, що в свою чергу відповідає математичному представленню кожного із розв'язків.

На рис. 4.11а,б,в наведено графіки для варіанта розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) на рис. 4.12а,б,в показано відповідні графіки тільки третього доданку розв'язку (4.6), що відповідає наближенню $u_1^{(3)}(x_1, t)$. На рис. 4.13 показано відповідний графік на якому зображені два профілі для відповідно розв'язків (4.5) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення) і (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Рис. 4.14 відповідає тривимірному зображеню розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Всі графіки (4.11-4.14) побудовані за методом 1 для варіанту матеріалу М53, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,017$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

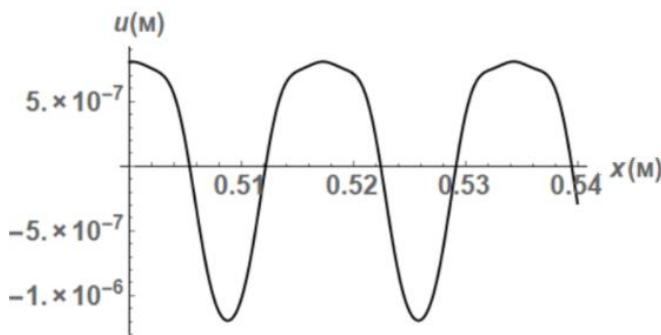


Рис. 4.11а. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

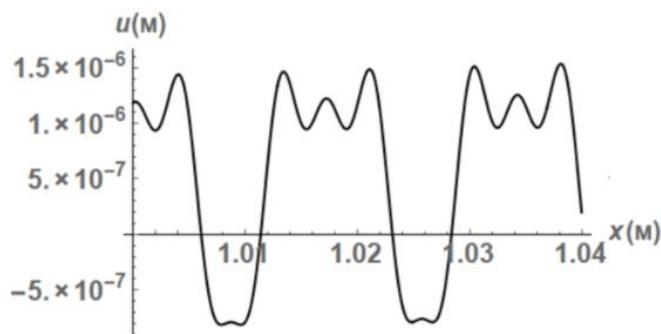


Рис. 4.11б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

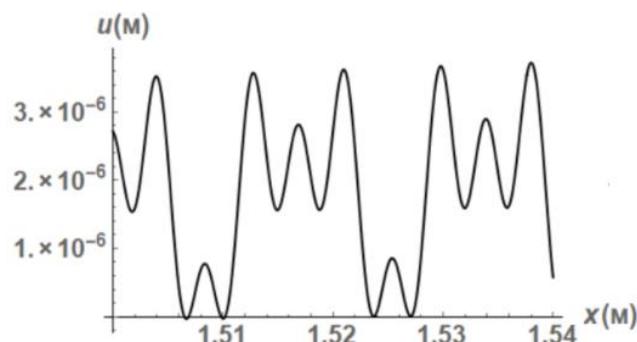


Рис. 4.11в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

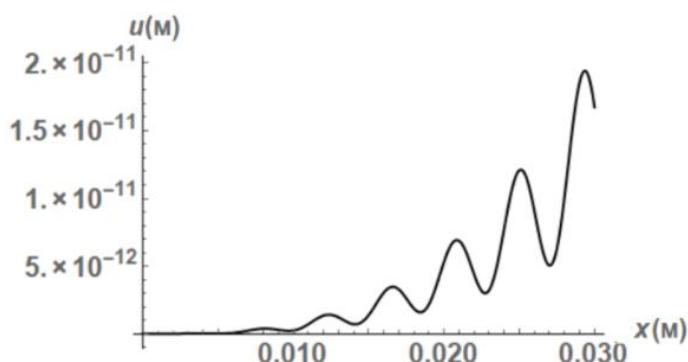


Рис. 4.12а. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає початковому етапу руху тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

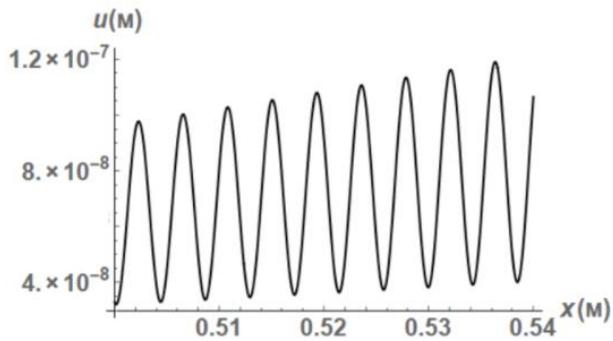


Рис. 4.12б. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 30 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

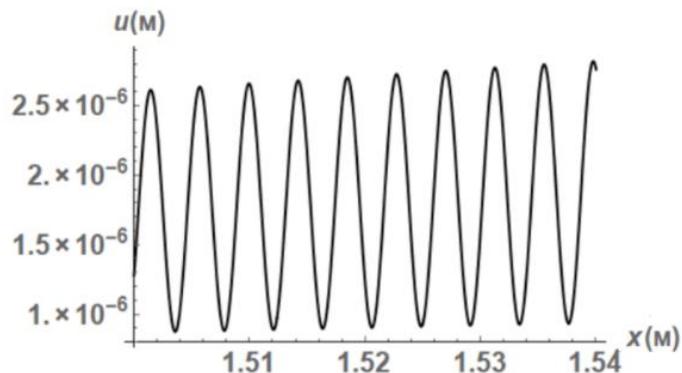


Рис. 4.12в. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 90 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.6) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

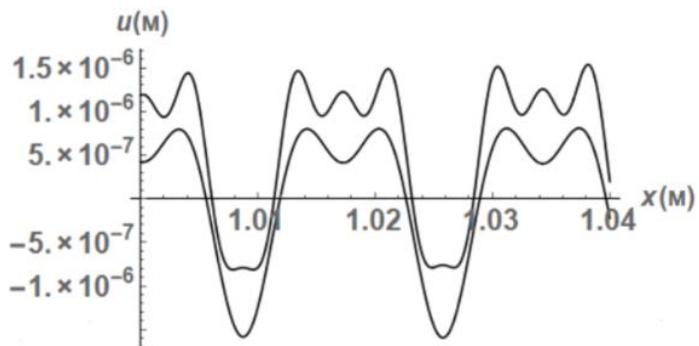


Рис. 4.13. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.5) (1-ше + 2-ге наближення)).

Далі на рис. 4.14 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння перших трьох наближень отриманий методом 1, що відповідає матеріалу М53 і таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,017$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

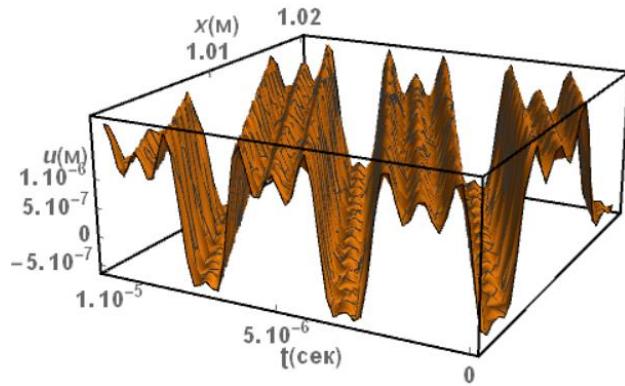


Рис.4.14. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає тривимірному варіанту для розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

З групи рис. 4.11а,б,в можна спостерегти, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається майже симетрично щодо вершин. На кожному із етапів руху хвилі спостерігається спотворення початкового профіля хвилі аналогічно з попереднім випадком. При поширенні хвилі спостерігається утворення трьох горбів у верхній частині графіка і двох впадин для нижньої частини. На рис. 4.12а,б,в спостерігається еволюція третього наближення зі шляхом пройденої хвилі, що демонструє швидку зміну профіля, отримані графіки відповідають третій нелінійній добавці розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення). На рис. 4.13 наглядно видно що вплив нелінійної третьої добавки в порівнянні з другою суттєво різний, тобто для розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) відповідає три горби для додатних значень амплітуди, і дві впадини для від'ємних значень амплітуди, тоді як для розв'язку (4.5) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення) відповідає два горби для додатних значень амплітуди, і одна впадина для від'ємних значень. Також спостерігається більше зростання максимальної амплітуди для розв'язку (4.6) (метод 1, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) чим для розв'язку (4.5) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення).

З вище отриманих графіків слідує, що дисторсія в обох випадках відбувається з різною швидкістю через відмінність у вихідних параметрах задачі. Обом випадкам відповідають графіки, слабко несиметричні щодо вершин кривих і різною швидкістю еволюції для додатних і від'ємних значень

амплітуд. Ефект впливу третього наближення, для обох матеріалів значний, так як досить наглядно видимі зміни для двох доданків та трьох доданків відповідних розв'язків.

Далі проведено аналогічний числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем для одних і тих же самих параметрів матеріалу (що у попередньому випадку), але вже для методу 2 але вже для розв'язку, що має вигляд – (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

На рис. 4.15а,б,в, 4.19а,б,в наведено графіки для варіанта розв'язку (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) на рис. 4.16а,б,в, 4.20а,б,в показано відповідні графіки тільки третього доданку розв'язку (4.8), що відповідає наближенню $u_2^{(3)}(x_1, t)$. На рис. 4.17, 4.21 показано відповідні графіки на якому зображені два профілі для відповідно розв'язків (4.7) (метод 2, 1-ше + 2-ге наближення) і (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення), що відповідають амплітуді $a_0 = 5 \cdot 10^{-5}$. Рис 4.18, 4.22 відповідають тривимірному зображеню розв'язку (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Всі графіки (4.15-4.18) побудовані за методом 2 для варіанту матеріалу М52, що відповідають таким значенням параметрів (система CI): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

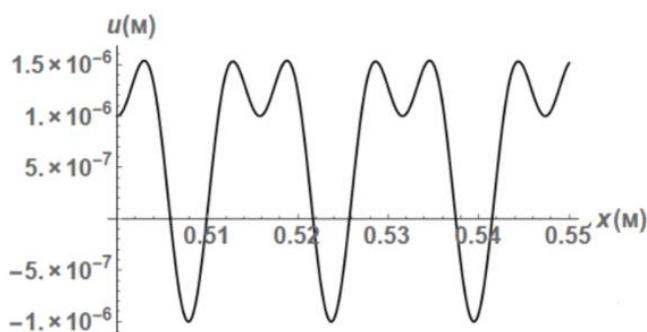


Рис. 4.15а. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

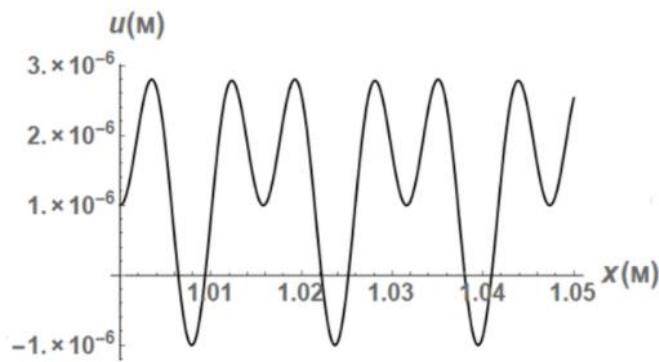


Рис. 4.15б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

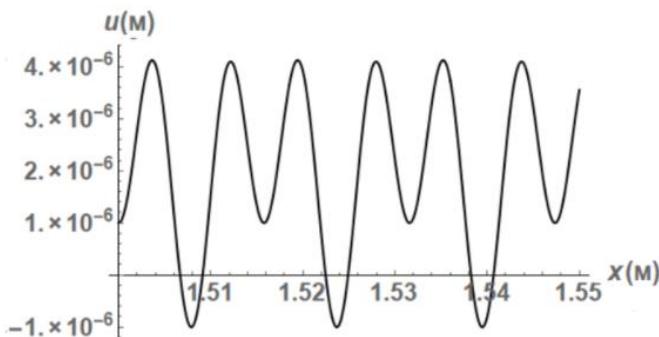


Рис. 4.15в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення))

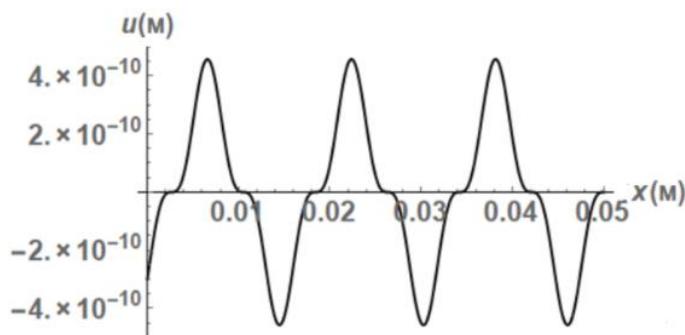


Рис. 4.16а. Початковий профіль гармонічної хвилі, для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

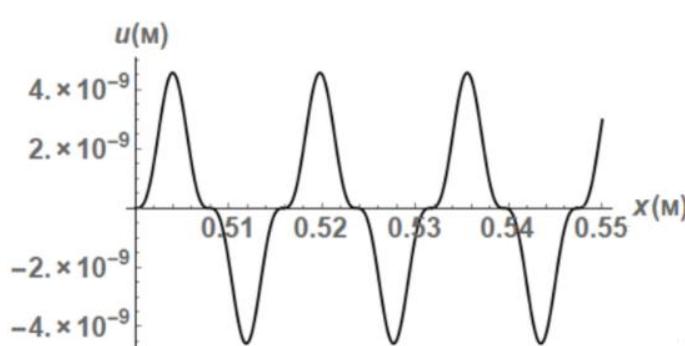


Рис. 4.16б. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 60 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

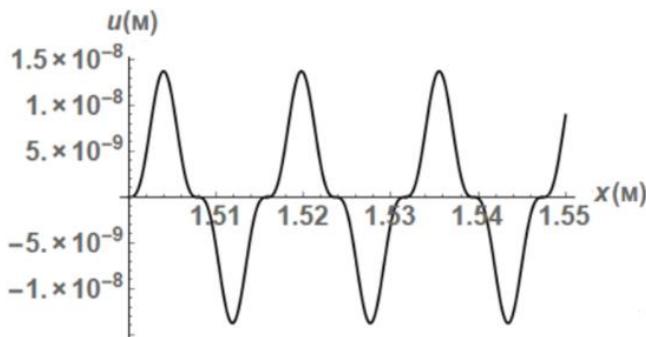


Рис. 4.16c. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 90 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

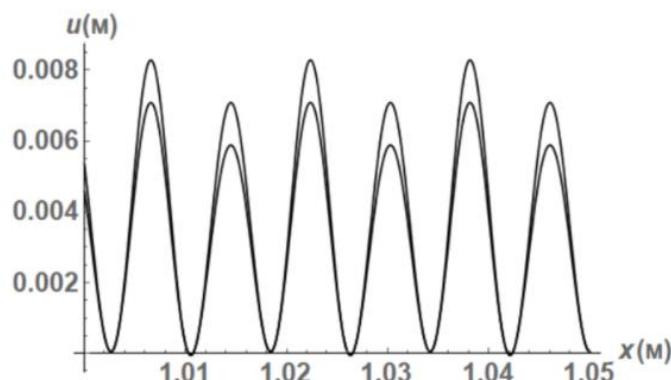


Рис. 4.17. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.7) (1-ше + 2-ге наближення)).

Далі на рис. 4.18 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння перших трьох наближень отриманий методом 2, що відповідає матеріалу М52 і таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік краще демонструє зміну початкового профіля.

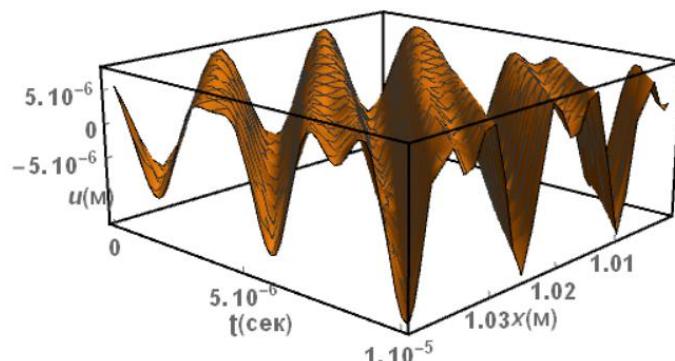


Рис. 4.18. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає тривимірному варіанту для розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

З рис. 4.15а,б,в слідує, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається практично симетрично щодо осі. На кожному із етапів руху хвилі спостерігається дисторсія хвилі, яка проявляється в тому, що верхня частина кожного горба западається і замість одного горба утворюється два. Створення відбувається несиметрично, щодо точок перетину профіля з віссю Ох. Також спостерігається на кожному кроці збільшення значення максимальної амплітуди. На рис. 4.16а,б,в, видно несиметричну еволюцію третього наближення з пройденим шляхом хвилі. Візуально зміна профіля не відбувається з часом проходження, тут тільки збільшується значення максимальної амплітуди. На рис. 4.17 наглядно видно що вплив нелінійної третьої добавки в порівнянні з другою суттєво не відрізняється. Третій нелінійний доданок, значення амплітуди якого мале, майже не впливає на початковий профіль, на достатньо малих відстанях, тому для наглядної демонстрації еволюції початкового профіля гармонічної хвилі було взято більше значення амплітуди.

Всі графіки (4.19-4.22) побудовані за методом 2 для варіанту матеріалу М53, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ):
 $L = 0,017$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

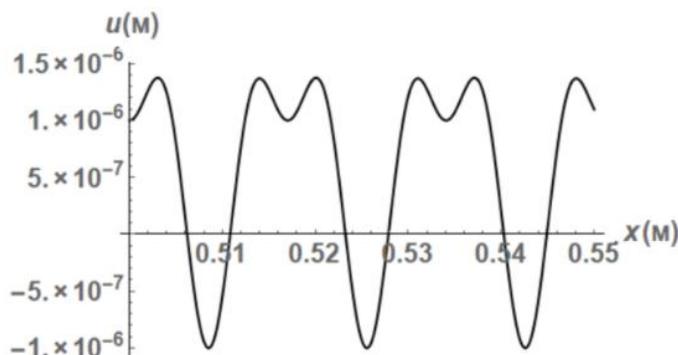


Рис. 4.19а. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

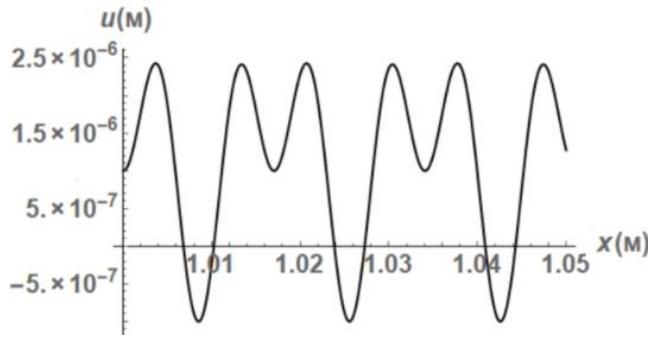


Рис. 4.19б. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

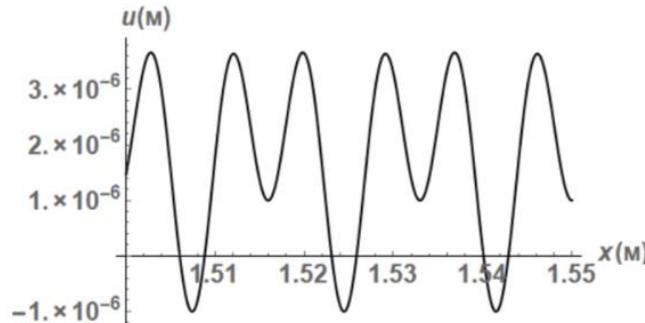


Рис. 4.19в. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

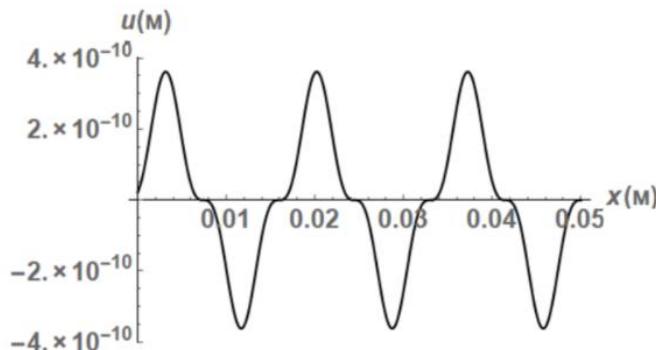


Рис. 4.20а. Початковий профіль гармонічної хвилі, для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

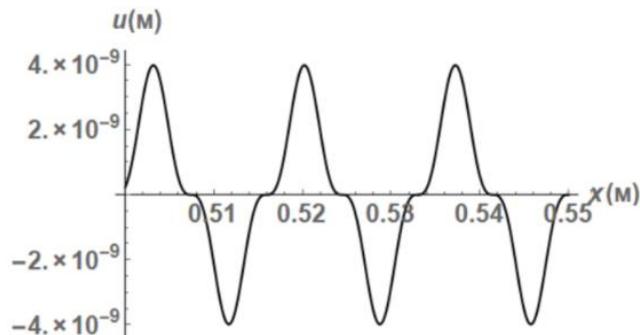


Рис. 4.20б. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 60 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

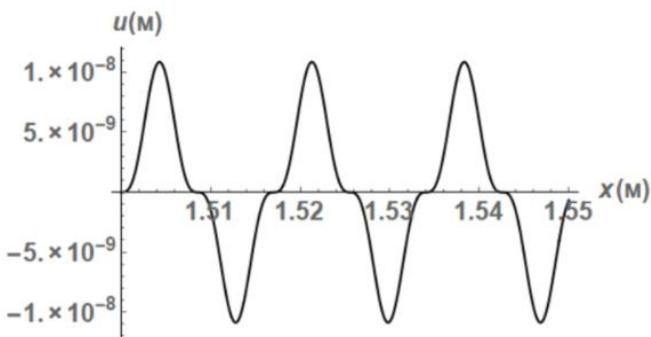


Рис. 4.20в. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає відстані в 90 довжин хвилі тільки для третього наближення розв'язку (4.8) ($u_1^{(3)}(x_1, t)$)

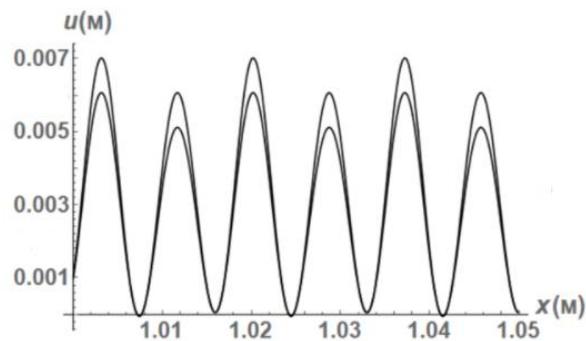


Рис. 4.21. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.7) (1-ше + 2-ге наближення)).

На рис. 4.22 наведено тривимірний графік гармонічної хвилі для розв'язку хвильового рівняння перших трьох наближень отриманий методом 2, що відповідає матеріалу М53 і таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,017$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік, краще демонструє зміну профіля.

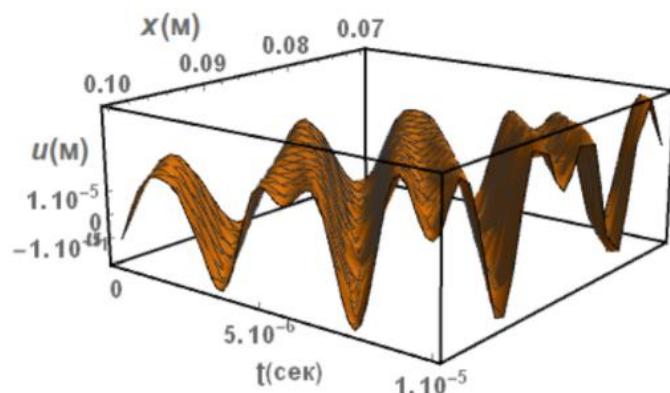


Рис.4.22. Профіль гармонічної хвилі, що відповідає тривимірному варіанту для розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

Отже, еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається практично симетрично, аналогічно з попереднім сценарієм. На кожному із етапів руху хвилі спостерігається вплив третьої гармоніки. З всіх рис. 4.19а,б,в,г слідує, що еволюція гармонічного профілю хвилі відбувається несиметрично щодо осі Ox . На кожному із етапів руху хвилі спостерігається аналогічний процес дисторсії хвилі, який полягає в тому, що над віссю Ox утворюється два горби замість одного, а також збільшується значення максимальної амплітуди. На рис. 4.20а,б,в,г, видно несиметричну еволюцію третього наближення з прой-деним шляхом хвилі, тобто аналогічна картина з попереднім випадком. На рис. 4.21 наглядно видно, що вплив третьої добавки в порівнянні з другою є не значним. Для розв'язку (4.8) (метод 2, 1-ше + 2-ге + 3-те наближення) та для розв'язку (4.7) (метод 1, 1-ше + 2-ге наближення) спотворення несиметричне, щодо вершини профіля у верхній частині графіка, де посту-пово утворюється два горби.

Рисунки 4.19а,б,в,г, 4.20а,б,в,г, 4.21 та 4.22 аналогічні до попереднього випадку, відмінність полягає у швидкості зміни початкового профіля, що залежить від вихідних параметрів задачі.

Оримані за методами 1 та 2 графіки несиметричні відносно вершин кривих. Загальний вигляд актуального профіля для перших трьох наближення візуально суттєво змінні для обох методів.

Отже, із загального дослідження розв'язку нелінійного рівняння гармонічної хвилі за двома методами випливає наступне:

1. Обидва методи основані на різних підходах до побудови розв'язку нелінійного рівняння, а отже різне математичне представлення, тому розв'язки також різні: метод 1 включає першу, другу та четверту гармоніку, а метод 2 першу, другу та третю.
2. Нелінійність для обох методів проявляється по різному.
3. Основний нелінійний хвильовий ефект при аналізі за методом 1 полягає в утворенні трьох горбів для додатних значень амплітуди, і

дві впадини для від'ємних значень амплітуди, та збільшення максимальної амплітуди.

4. Основний нелінійний хвильовий ефект при аналізі за методом 2 полягає в утворенні двох горбів замість одного, та суттєвого збільшення максимальної амплітуди.

Тому основною новизною у данному дослідженні є те, що розв'язки при двох наближеннях і розв'язки при трьох наближеннях відповідно методів 1 та 2 дають різну картину зміни початкового профіля.Хоча влив третього нелінійного доданка по відношенню до другого, для двох випадків, значний тільки на достатньо великих відстанях пройденою хвилею.

4.3. Деформування другої гармоніки, як новий нелінійний ефект, який супроводжує класичний ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка.

Теоретичну задачу про утворення другої гармоніки часто використовують як приклад у нелінійній оптиці як таку, що адекватно описує експерименти з генерації другої гармоніки. Класичний тест з оптичною хвилею полягає в наступному: червоне світло (частота 400 герц) рубінового лазера перетворюється на фіолетове світло (частота 800 герц), коли світло лазера пропускають крізь кристал дигідрофосфату аміаку. Один з простих варіантів теоретичної задачі про утворення другої гармоніки в рамках нелінійної теорії пружності і теорії нелінійних пружних хвиль формулюється наступним чином.

Для опису нелінійності деформування застосовується п'ятиконстантна модель Мернагана і з можливих нелінійних хвильових рівнянь вибирається квадратично нелінійне рівняння, що відповідає схемі поширення плоскої

поздовжної хвилі зміщення $u_1(x, t)$ вздовж осі абсцис при виборі декартової прямокутної системи координат $Ox_1x_2x_3$

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]. \quad (4.9)$$

Тут ρ є густину, u_k - зміщеннями; λ, μ, A, B, C - пружними константами моделі Мернагана.

Квадратично нелінійне хвильове рівняння аналізувалося, головним чином, за допомогою трьох методів – методу повільно змінних амплітуд (методу ван дер Поля), методу послідовних наближень (методу збурень, методу малого параметра), методу обмеження на градієнт зміщення.

Метод повільно змінних амплітуд широко відомий як метод ван дер Поля завдяки його фундаментальним роботам при застосуванні цього методу в області нелінійної теорії коливань.

Основне припущення методу – нелінійність є слабкою. Рівняння (4.9) відповідає цьому припущення, оскільки модель Мернагана описує слабку нелінійність, починаючи з малих значень деформації. З основного припущення випливає наступне – розв'язок нелінійного рівняння у вигляді гармонічної хвилі є близьким до лінійного розв'язку. Термін «повільно змінна амплітуда» означає, що амплітуда хвилі повинна змінюватися дуже повільно на відстані однієї довжини хвилі. Аналізується лінійний розв'язок у вигляді гармонічної хвилі і нелінійна хвиля характеризується невідомою змінною амплітудою та приймається у вигляді

$$u_1(x, t) = A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad \text{або}$$

$$u_1(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ A_1(x)e^{i(k_1 x - \omega t)} \right\} = a_1(x) \cos(k_1 x - \omega t). \quad (4.10)$$

Стандартно вивчається взаємодія трьох хвиль-учасниць і розв'язок шукається як сума

$$u_1(x_1, t) = \sum_{m=1}^3 A_{1m}(x_1) e^{i\sigma_m}, \quad \sigma_m = k_{1m} x_1 - \omega_m t. \quad (4.11)$$

Процедура методу передбачає далі побудову трьох так званих вкорочених рівнянь, у якій вводяться обмеження: відсутність енергії ззовні і збереження в рівняннях лише добутків амплітуд (враховуються тільки пряма взаємодія хвиль і їх самогенерація). Далі задається умова синхронізації частот хвиль-учасниць

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3 \quad (4.12)$$

і будуються три еволюційні рівняння, в яких необхідно прийняти умову синхронізації хвильових чисел

$$k_{11} \pm k_{12} = k_{13}. \quad (4.13)$$

Найпростішою задачею про взаємодію трьох хвиль є задача про самогенерацію першої гармоніки. Перша і друга хвилі генеруються ззовні і вважаються такими, що мають вигляд гармонічної хвилі (4.9) з заданими постійними параметрами і ці параметри ідентичні $A_1 = A_2, k_1 = k_2, \omega_1 = \omega_2$. Третя хвилі не збуджується ззовні $A_3(0) = 0$, а її параметри визначаються умовами синхронізації (4.12), (4.13) і тому це друга гармоніка з невідомою амплітудою $A_{1m}(x_1)e^{2i(k_1x_1 - \omega_1 t)}$. Амплітуда визначається з третього еволюційного рівняння

$$A_3(x_1) = -\frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A+3B+C)}{(\lambda+2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1. \quad (4.16)$$

Розвязок (4.16) приймає вигляд

$$u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x_1 - \omega_1 t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A+3B+C)}{(\lambda+2\mu)} \right] (k_{L1})^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x_1 - \omega_1 t)} \quad (4.17)$$

Таким чином, з початку руху хвилі у вигляді першої гармоніки, друга гармоніка яка виникає внаслідок механізму самогенерації хвилі, принаднується до першої з амплітудою, яка зростає з часом поширення хвилі. Друга

гармоніка поступово накладається на першу і через деякий час стає домінуючою. Вважається, що у такий спосіб теоретично описується генерація 2-ої гармоніки.

Метод послідовних наближень розглянутий в 3.1.4. Згідно даного методу, наблизений розв'язок (4.9), в рамках перших двох наближень, має вигляд:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Розв'язок (4.18) включає 1^ш гармоніку з постійною амплітудою і 2^{га} гармоніку зі змінним множником x_1 . Вважається, що саме завдяки цьому множнику зі збільшенням відстані, яку пройшла хвиля, амплітуда 2^{ої} гармоніки зростає і вклад 2^{ої} гармоніки у загальний рух хвилі (4.18) стає домінуючим. Хвиля починає рух як 1^ш гармоніка і згодом продовжує рух як 2^{га} гармоніка. Так відбувається генерація 2^{ої} гармоніки і це класичний нелінійний хвильовий ефект.

Метод обмеження на градієнт зміщення полягає у введенні в нелінійне хвильове рівняння змінної фазової швидкості хвилі, який викладений в піонерських публікаціях Фу і Скотта. Цей метод застосовується при аналізі нелінійних хвильових рівнянь стосовно хвиль з поодинокими профілями, але він успішно працює і для випадку гармонічної хвилі (хвилі з періодичним профілем). Даний метод, докладно розглянутий в 3.2.2.

Згідно методу для випадку гармонічного профіля $F(\sigma) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t)$ розв'язок (4.9) має вигляд

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} e^{-ik_L(x_1 - v_L t)} - (1/2) v_L t \alpha (k_L)^2 (u_{1o})^2 e^{-2ik_L(x_1 - v_L t)}. \quad (4.19)$$

Отримане наблизене представлення (4.19) розв'язку рівняння (4.9) описує нелінійний ефект – початково 1^ш гармоніка доповнюється породженою

нелінійністю матеріалу 2^{ою} гармонікою. З точки зору хвильової механіки, наявність 2^{ої} гармоніки означає спотворення початкового профіля хвилі. Так еволюціонує хвиля і згодом домінує 2^{га} гармоніка.

Далі розглянемо сутності нового нелінійного хвильового ефекту для гармонічної хвилі [54]. Зберемо разом формули (4.17), (4.18), (4.19), які, як вважається, описують генерацію 2^{ої} гармоніки трьома різними методами:

M1 (повільно змінних амплітуд)

$$u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_L)^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x_1 - \omega t)},$$

M2 (послідовних наближень)

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t),$$

M3 (обмеження на градієнт амплітуди)

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} e^{-ik_L(x_1 - v_L t)} - (1/2) v_L t \alpha (k_L)^2 (u_{1o})^2 e^{-2ik_L(x_1 - v_L t)}$$

і порівняємо перші та другі доданки.

Перші доданки є ідентичними і описують першу гармоніку. Другі доданки дуже подібні, але не ідентичні і їх доцільно записати в більш уніфікованому вигляді. Оминемо при цьому ідентичні множники у вигляді другої гармоніки і квадратів початкової амплітуди хвилі та хвильового числа:

$$\text{M1: } -\frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{2(\lambda + 2\mu)} x_1, \quad \text{M2: } \frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{8(\lambda + 2\mu)} x_1,$$

$$\text{M3: } -\frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{4(\lambda + 2\mu)} x_1.$$

Таким чином, уніфіковані множники є постійними для вибраного матеріалу, мають різні знаки і відрізняються між собою множником.

$$\text{Оцінимо порядок множника } -\frac{3[(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)]}{4(\lambda+2\mu)}. \text{ Цей множ-}$$

ник для переважної більшості реальних матеріалів (металів, сплавів, полімерів) є додатним, оскільки вираз $(A+3B+C)$ є відємним. Він теж перевищує постійні Ляме на порядок і тому є числом з інтервалу [10, 30]. Хвильове число для вказаних матеріалів і при виборі частоти з ультразвукового діапазону $\omega \sim 10^4 - 10^6$ має порядок $k_L = (\omega/v_L) \sim 10^1 - 10^3$. Відповідно, довжина хвилі має порядок $L \sim 10^{-1} - 10^{-3}$. Початкова амплітуда хвилі звичайно вибирається в діапазоні $u^o \sim 10^{-4} - 10^{-6}$.

Представимо розв'язок (4.17) у вигляді, зручному для порівняння величин амплітуд першої та другої гармонік

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \left[\cos \sigma + \frac{3[(\lambda+2\mu)+2(A+3B+C)]}{8(\lambda+2\mu)} u_{1o} k_L^2 x_1 \cos 2\sigma \right], \quad (4.20)$$

де $\sigma = k_L x_1 - \omega t$.

Формула (4.20) дає змогу порівняти одиничну (1м) амплітуду 1^{ої} гармоніки з амплітудою 2^{ої} гармоніки, для якої використаємо запис через середній порядок її величини 10^{-1} . Отже, щоб другій амплітуді досягнути величини амплітуди першої гармоніки, хвіля повинна пройти відстань 10 м, що складає тисячу довжин хвилі. Для домінування другої гармоніки потрібний ще такий же шлях. Цей приклад засвідчує суттєвий вплив вибору параметрів матеріалу і хвилі на виявлення домінування виразу з другою гармонікою.

Записані вище міркування складають підставу для загальноприйнятого твердження, що при поширенні 1^{ої} гармоніки з часом вона перетворюється у 2^{гу}. При цьому акцентується увага на факті збільшення амплітудного множника перед 2^{ою} гармонікою.

Це виглядає дивно, але ніхто не акцентував увагу на тому, що другий доданок у (4.20) містить функцію $x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t)$. І вона вже є деформованою 2^{ою} гармонікою.

Виберемо для прикладу формулу (4.20) з осередненим значенням множника перед $2^{\text{oї}}$ гармонікою

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \left[\cos(k_L x_1 - \omega t) + 0,1 x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t) \right]. \quad (4.21)$$

Спочатку розглянемо простий приклад, де покажемо графічно деформацію $2^{\text{oї}}$ гармоніки.

На рис. 4.23а зображені графіки прямої лінії $y = 0,02x_1$, $1^{\text{oї}}$ $\cos x_1$ і $2^{\text{oї}}$ $0,2\cos 2x_1$ гармонік на проміжку $x = [0; 2\pi \cdot 10^{-2}]$ (одному періоді $1^{\text{oї}}$ гармоніки).

Рис. 4.23б відповідає першому періоду $2^{\text{oї}}$ гармоніки і містить два графіки – недеформованої $0,2\cos 2x_1$ і деформованої $0,2x_1 \cos 2x_1$ гармонік. Де виявляється відмінність між графіками - як якісна, так і кількісна.

Графік 4.23в відповідає формулі (4.21) і теж стосується лише першого періоду $1^{\text{oї}}$ гармоніки. Нижній графік показує початковий профіль верхній – деформований. Тут більш наглядно спостерігається несиметричне деформування початкового профіля для розв'язку (4.21).

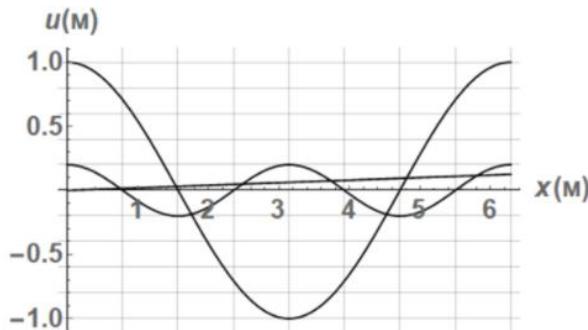


Рис. 4.23а. Профілі після проходження одного періоду першої гармоніки (верхній графік) другої гармоніки (нижній графік) та прямої лінії.

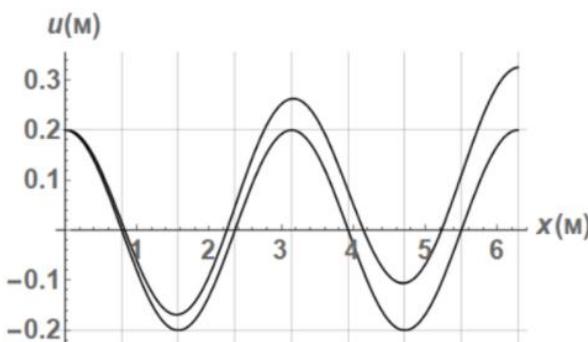


Рис. 4.23б. Профілі після проходження одного періоду другої гармоніки (верхній графік відповідає деформованій гармоніці а нижній – не деформованій).

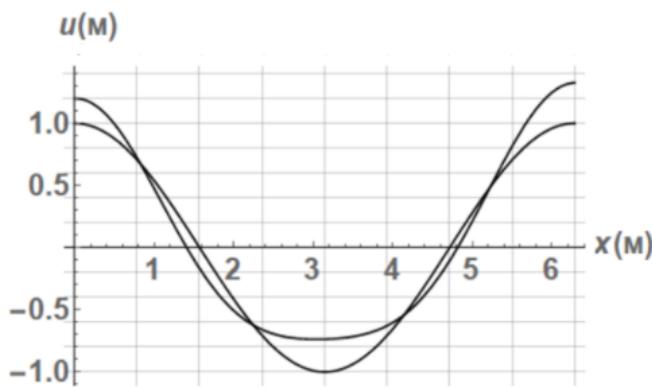


Рис. 4.23в. Профіль хвилі після проходження одного періоду першої гармоніки (верхній графік відповідає деформованому профілю а нижній – початковому профілю) (розв'язок 4.21)

На рис. 4.24(а,б) зображені графіки, які відповідають формулі (4.20) і вже реальному випадку композитного матеріалу і довжині хвилі 0,018. На графіку рис. 4.24а зображений початковий профіль хвилі (профіль 1^{ої} гармоніки) з заданою амплітудою і довжиною хвилі. На графіках рис. 4.24б показані початковий профіль і профіль хвилі, де враховані перше і друге наближення при проходженні хвилею 25 довжин хвилі.

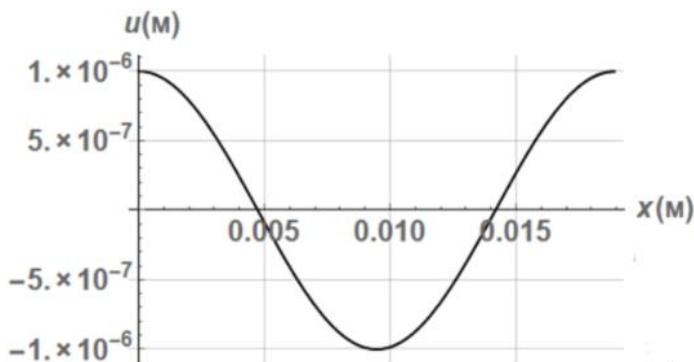


Рис. 4.24а. Початковий гармонічний профіль після проходження хвилею одного періоду першої гармоніки

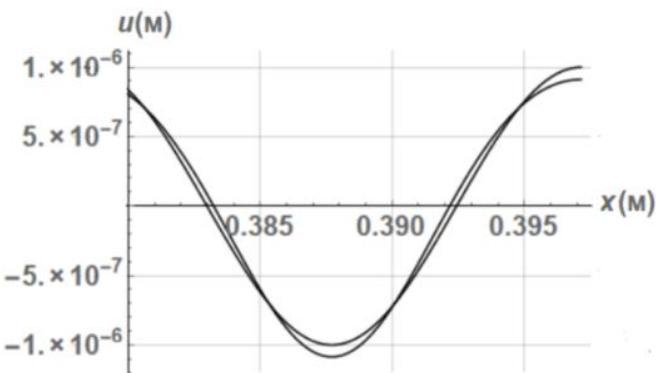


Рис. 4.24б. Профіль гармонічної хвилі після проходження 25 довжин хвилі (розвязок 4.20) (верхній графік відповідає деформованому профілю а нижній – початковому профілю)

При аналізі кількісної відмінності слід прийняти до уваги, що задані масштаби на осіх координат відрізняються на порядки.

Основне спостереження полягає у тому, що насправді другий доданок в (4.20) вносить зміну в профіль $1^{\text{oї}}$ гармоніки. Ця зміна вводить несиметрію стосовно горизонтальної і вертикальної осей і викликана такою ж несиметрією деформованої $2^{\text{oї}}$ гармоніки. Вертикальна несиметрія може бути спостережена вже на першому періоді, коли амплітуда крайнього лівого горба залишається незмінною, а амплітуда крайнього правого зростає на певну величину (горб піdnімається вверх). Горизонтальна виявляється у тому, що ліві і праві схили горбів деформуються по-різному – праві стають більш похилими. Крім того, нулі зміщуються вліво.

Отже, розв'язки, які відповідають трьом методам наближеного аналізу нелінійного хвильового рівняння, що описує еволюцію гармонічної плоскої поздовжної хвилі при її поширенні в квадратично нелінійно пружному матеріалі, виявляють новий не описаний і не коментований раніше нелінійний хвильовий ефект – несиметричне деформування профіля $2^{\text{oї}}$ гармоніки як відносно горизонтальної, так і вертикальної осей. Відповідно, цей ефект спостерігається і в еволюції $1^{\text{oї}}$ гармоніки – її початковий симетричний профіль трансформується в несиметричний профіль, який виявляє тенденцію до утворення несиметрично деформованого профіля $2^{\text{oї}}$ гармоніки.

Основний висновок. Отримані результати як теоретичного, так і числового підходу до побудови сценаріїв еволюції гармонічної хвилі засвідчують ефективність застосування обох методів в рамках перших трьох наближень, а також демонструють ряд нелінійних хвильових ефектів: утворення двох горбів замість одного, та суттєвого збільшення максимальної амплітуди.

РОЗДІЛ 5

ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПООДИНОКОЇ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНОЇ ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ОБМЕЖЕННЯ НА ГРАДІЄНТ ЗМІЩЕННЯ (ПЕРШІ ТРИ НАБЛИЖЕННЯ)

5.1. Теоретичний та числовий аналіз плоскої поздовжної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Гаусса (хвилі Гаусса) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення)

5.1.1. Нелінійна хвиля Гаусса. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули

Основним нелінійним хвильовим рівнянням [126] у цій задачі є рівняння

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \text{ або } u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1},$$

де $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

Далі метод обмеження на градієнт зміщення називатимемо методом 2.

Як вказано в п. 3.2.2 розв'язок вказаного вище нелінійного хвильового рівняння для випадку довільного поодинокого профіля з врахуванням першого і другого наближень за допомогою методу 2 є таким:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = F(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t [F'(\sigma)]^2 \quad (5.1)$$

З врахуванням першого, другого і третього наближень [131-133] розв'язок матиме наступний вигляд:

$$u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = F(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t [F'(\sigma)]^2 - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t [F'(\sigma)]^3 \quad (5.2)$$

Далі за методом 2 розглядається задача про хвилю Гаусса (хвилю з дзвіноподібним чи горбоподібним профілем) $u_1(\sigma) = u_1^0 e^{-\sigma^2/2}$, де u_1^0 -початкова амплітуда хвилі і $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ -фаза хвилі.

Отже, початковий профіль Гаусса має вигляд

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_1^0 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]}. \quad (5.3)$$

Тоді формула (5.1), для першого і другого наближень з урахуванням (5.3) приймає вигляд

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]} - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 (x_1 - v_L t)^2 (u_1^0)^2 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]} \quad (5.4)$$

Формула (5.2) для першого, другого і третього наближень з урахуванням (5.3) приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]} - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 (x_1 - v_L t)^2 (u_1^0)^2 e^{-\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]} + \\ & + \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 (x_1 - v_L t)^3 (u_1^0)^3 e^{-3\left[\frac{a^2(x_1 - v_L t)^2}{2}\right]} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Порівняння розв'язків (5.4) і (5.5) показує, що наявність третього доданка змінює якісну картину еволюції хвилі. Перш за все, третій доданок добавляє до існуючих 1-ої та 2-ої “гармонік” третю і тим самим змінює симетричний профіль хвилі на несиметричний.

Зауважимо, що функції $e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2/2}$, $e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2}$, $e^{-3a^2(x_1 - v_L t)^2/2}$ можна вважати першою, другою та третьою гармоніками досить умовно, проте структура наближеного розв'язку (5.5) досить схожа на структуру наближеного розв'язку (4.8) щодо гармонічної хвилі в рамках перших трьох наближень.

5.1.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система CI) [1, 9, 20, 23, 39, 40]:

Матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^4; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{11}; \quad v_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \mu = 0,721 \cdot 10^{10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{11}; B = -4,45 \cdot 10^{11}; C = -9,5 \cdot 10^{11}; v_L = 3,769 \cdot 10^3; \alpha = -34,08.$$

де ρ - густина матеріалу, λ, μ - пружні постійні Ляме (постійні другого порядку), A, B, C - пружні постійні Мурнагана (постійні третього порядку), v_L - швидкість хвилі і $\alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$.

На відміну від гармонічної хвилі, яка характеризується початковою частотою та хвильовим числом, поодинока двіноподібна хвилля характеризується параметром a , який визначає довжину підошви хвилі за формулою $\sigma = (1/a)$ за правилом « 3σ » для функції Гаусса (довжина підошви профілю дорівнює 6σ). Для даних двох матеріалів початкові підошви вибрані одинаковими $L = 0,037$.

5.1.3. Числовий аналіз хвилі Гаусса (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення)

За формулами (5.3) (1-ше наближення), (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) та (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки “зміщення u_1 – пройдена хвилею відстань x_1 ”. Всього розглянуто 2 набори (2 матеріали), для одного варіанту довжини підошви хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями. У кожному наборі перший графік показує вигляд початкового профіля, а інші графіки, об'єднані у три групи. Кожна група складається з двох графіків: перший графік порівнює перше наближення з другим, а другий графік порівнює розв'язки, що відповідають першому та другому наближення та розв'язки, що включають перше, друге і третє наближення. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані багато десятків повторень довжини підошви хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спот-

воррення поодинокого профілю цілком спостерігається візуально.

Далі чисельно аналізуються формули (5.3), (5.4) та (5.5) для хвилі в довільний момент часу, отримані методом 2, що основується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнта зміщення. Графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно і спостерігалась відмінність впливу двох розв'язків на початковий профіль хвилі. На останньому графіку зображені тривимірний варіант для розв'язку (5.5) з найбільш розвиненою еволюцією.

Зазначимо, що на рис. 5.1-5.4 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = 16,072$, $u_1^0 = 5 \cdot 10^{-3}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

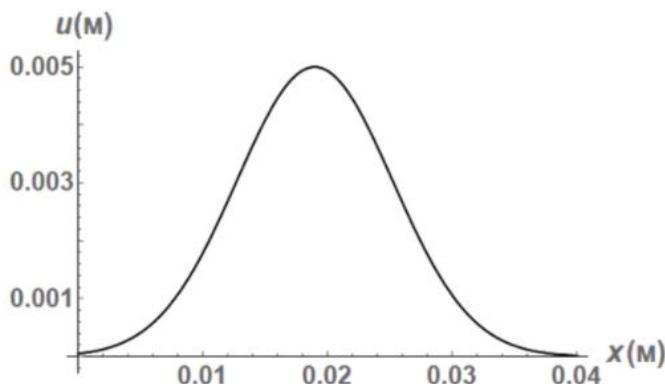


Рис. 5.1. Початковий профіль хвилі Гаусса

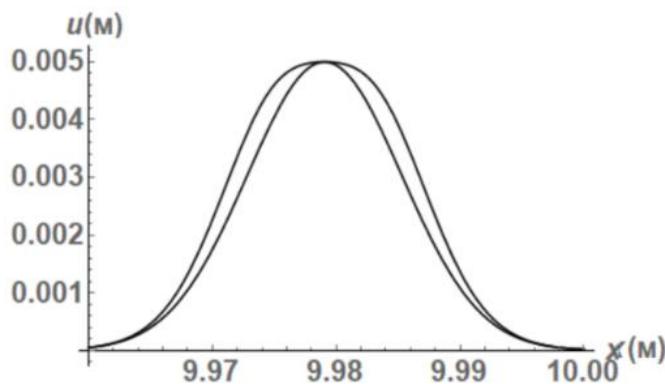


Рис. 5.2a. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

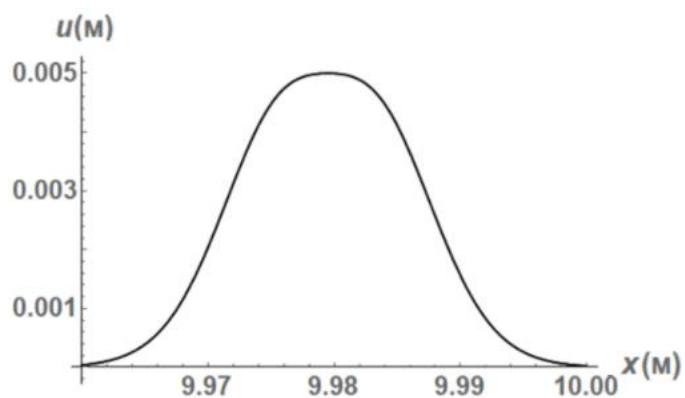


Рис. 5.2б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

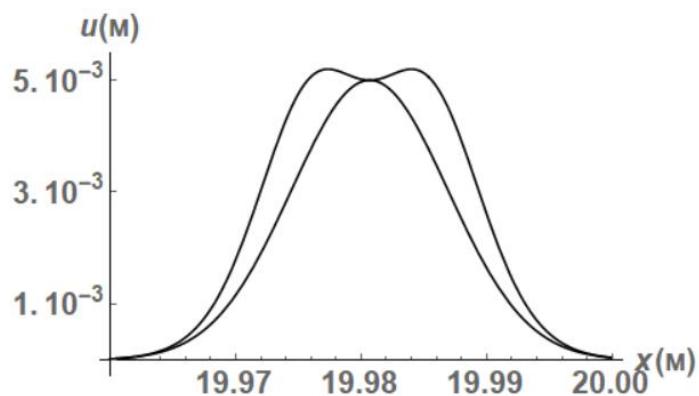


Рис. 5.3а. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

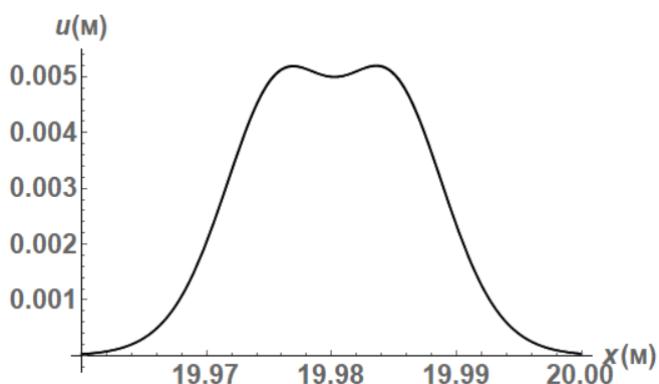


Рис. 5.3б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

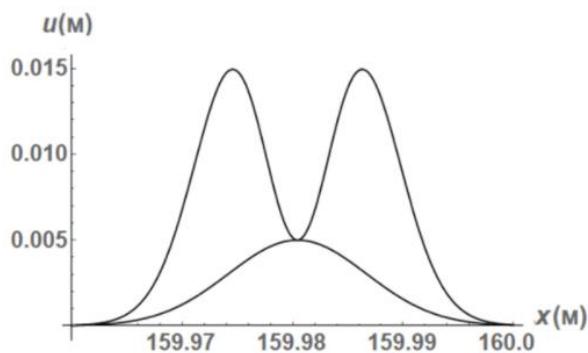


Рис. 5.4а. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

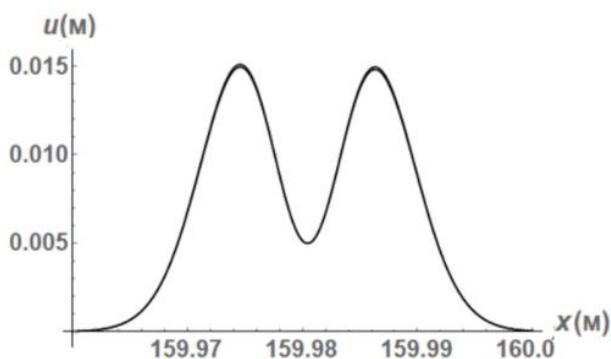


Рис. 5.4б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 5.5 наведено тривимірний графік для розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріалу M51 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_1^0 = 5 \cdot 10^{-3}$. Отриманий графік добре демонструє спотоворення профіля.

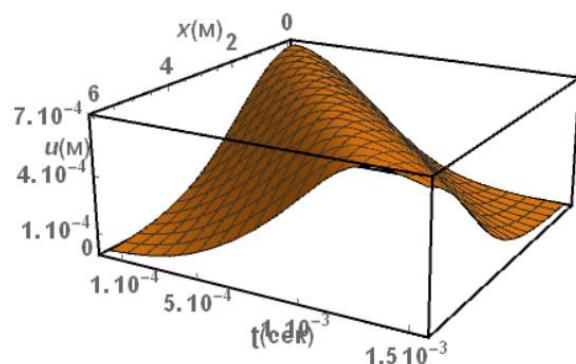


Рис. 5.5. Тривимірний варіант хвилі Гаусса, що відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

Рис 5.1 демонструє початковий профіль хвилі Гаусса. З представлених перших 5.2а, 5.2б графіків випливає, що еволюція початкового симетричного профілю хвилі для двох розв'язків (5.3) (1-ше наближення), (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) та (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення) відбувається зі збереженням симетрії при русі в нелінійно пружному середовищі. На даному етапі, різниці між різними сценаріями поведінки хвиль для розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення) не спостерігається, але для розв'язків (5.3) (1-ше наближення) та (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) вже є суттєва різниця, про що свідчить рис. 5.2а та 5.3а Хвиля не змінює довжину підошви і лише демонструє тенденцію до утворення двох горбів замість одного. При цьому максимальне значення амплітуди повільно збільшується. Починаючи з рис. 5.3б, а особливо з рис. 5.4б, спостерігаються два горби і збільшення максимальної амплітуди дляожної хвилі відповідних розв'язків (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення), але суттєвої різниці так і немає. Для розв'язків (5.3) (1-ше наближення) та (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) існує велика різниця при поширенні хвилі на суттєву відстань (рис. 5.4а) - обидва розв'язки дають різні результати, тобто горби, що відповідають розв'язку для двох наближень стають крутішими і значення максимальної амплітуди для хвилі, що відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) більше ніж для хвилі, що відповідає розв'язку (5.3) (1-ше наближення). При поширенні хвилі на суттєву відстань (рис. 5.4б) обидва розв'язки дають різні результати, тобто горби, що відповідають розв'язку для трьох наближень, стають крутішими і спостерігається западання лівого і піднесення правого горба.

Тобто, вплив врахування третього наближення при поширенні хвилі Гаусса вносить деякі корективи. Отриманий ефект спостерігається на великих відстанях поширення хвилі, тому вплив третього наближення на деформацію початкового профіля хвилі при початкових етапах поширення є незначний в порівнянні із впливом другого наближення щодо першого.

Отже можна зробити припущення, що четверте, п'яте і далі наближення будуть впливати на дисторсію початкового профіля менше.

Далі розглянемо наступний тип матеріалу і проведемо комп'ютерний аналіз еволюції хвилі Гаусса. На рис. 5.6 - 5.9 наведено графіки, що відповідають матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система СІ): $a = -34.08$ $u_1^0 = 5 \cdot 10^{-3}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

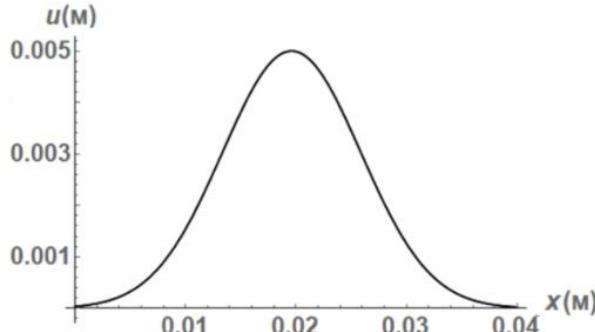


Рис. 5.6. Початковий профіль хвилі Гаусса

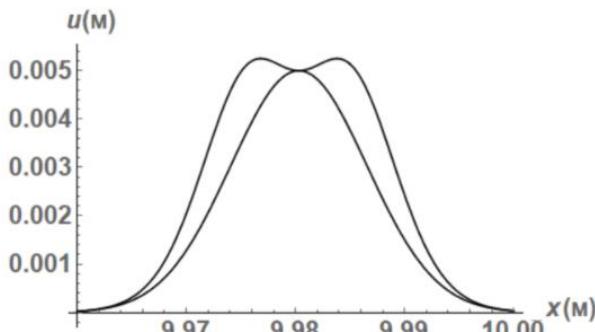


Рис. 5.7а. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

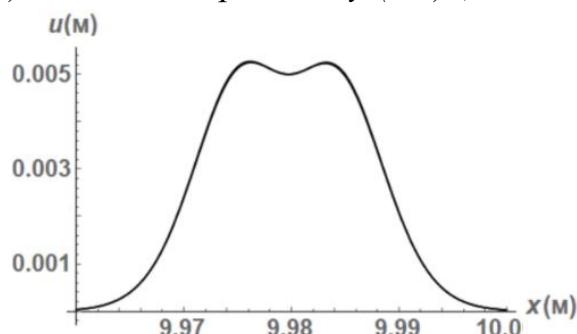


Рис. 5.7б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-тє наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

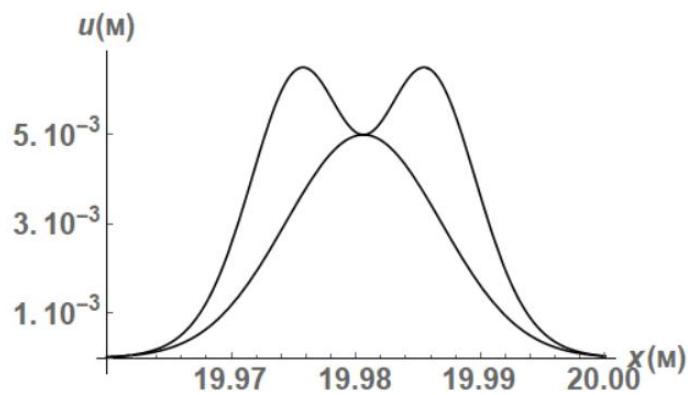


Рис. 5.8а. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

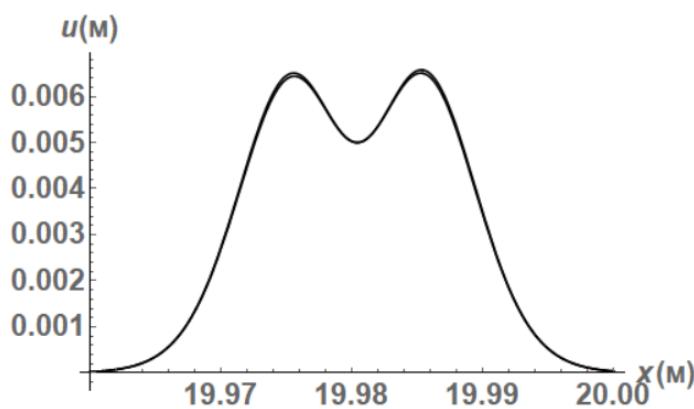


Рис. 5.8б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

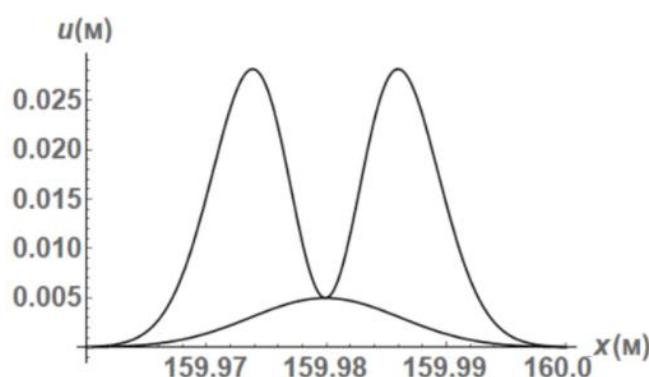


Рис. 5.9а. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.3) (1-ше наближення)

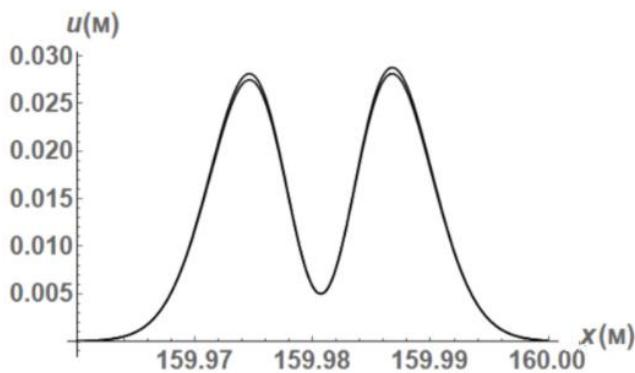


Рис. 5.9б. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 5.10 наведено тривимірний графік для матеріалу М52 і значень параметрів (система СІ): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$, який добре демонструє зміну початкового профіля для розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

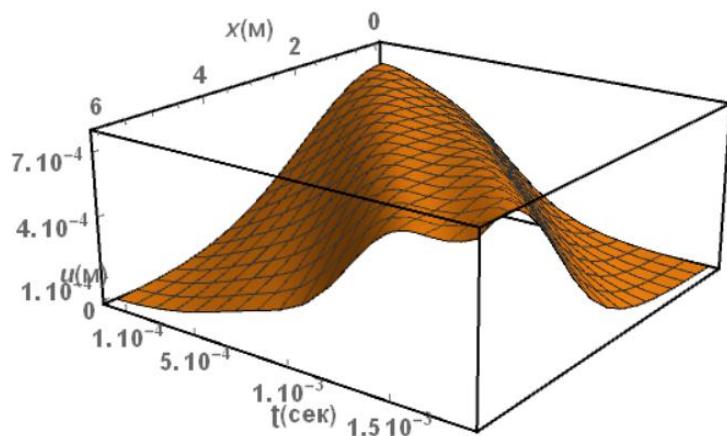


Рис. 5.10. Тривимірний варіант хвилі Гаусса, що відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

Рис 5.6 демонструє початковий профіль хвилі Гаусса, але вже з отриманих перших двох графіків 5.7а,б випливає, що еволюція початкового симетричного профілю хвилі для відповідних розв'язків зберігає поведінку аналогічно до попереднього випадку. На даному етапі, різниці між сценаріями поведінки хвиль для розв'язку (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) не спостерігається, але для розв'язків (5.3) (1-ше наближення) та (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) вже є

значна відмінність. Довжина підошви хвилі для всіх випадків не змінюється і спостерігається тенденція до утворення двох горбів замість одного, тобто вплив третього наближення аналогічний другому щодо спотворення початкового профіля (першого наближення). При цьому максимальне значення амплітуди повільно збільшується (що можна спостерігати на рис. 5.8а,б. Починаючи з рис. 5.8б, а особливо з рис. 5.9б, спостерігається два горби і збільшення максимальної амплітуди для кожної хвилі відповідних розв'язків (5.4) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Але в порівнянні з рис. 5.4б, в даному випадку вже наглядно спостерігається вплив третього наближення. При поширенні хвилі на суттєву відстань (рис. 5.9б) обидва розв'язки дають різні результати, тобто горби, що відповідають розв'язку для трьох наближень, стають крутішими і спостерігається западання лівого і піднесення правого горба. Розв'язки (5.3) (1-ше наближення) та (5.4) (1-ше + 2-ге наближення), дають суттєву відмінність, при поширенні хвилі на велику відстань, що випливає з рис. 5.8а та рис. 5.9а і аналогічно до попередньому випадку.

Отже вплив третього наближення суттєвий відносно початкового профілю, але менш суттєвий відносно другого наближення. Вплив третього наближення при поширенні хвилі Гаусса для даної конфігурації початкових параметрів матеріалу є більшим в порівнянні до попереднього типу матеріалу. Отриманий ефект спостерігається на великих відстанях поширенні хвилі, тому вплив третього наближення на деформацію початкового профіля хвилі при початкових етапах поширення є незначний в порівнянні з наступними.

Таким чином, можна зробити висновки, що для першого та другого варіанту параметрів матеріалу, третє наближення впливає з різною швидкістю (тобто дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації). Вплив третього, і скоріш за все четвертого, п'ятого і більших наближень буде незначний на початкових етапах поширення хвилі. Кожна наступна нелінійна добавка буде впливати на дисторсію початкового профіля все менше і менше.

Основний висновок. Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу хвилі Гаусса (як приклад хвилі з симеїчним профілем) засвідчують, що з гідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі початковий профіль деформується суттєво і майже зберігає симетричність профіля, яка супроводжується розпадом одного горба на два горби виявляючи два нелінійні хвильові ефекти - не однакові схили горбів зліва і справа і несиметричні зміщення вершин горбів відносно умової вертикальної осі.

5.2. Теоретичний та числовий аналіз еволюції плоскої поздовжної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Уіттекера (хвилі Уіттекера) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення)

5.2.1. Нелінійна хвиля Уіттекера. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули

Основним нелінійним хвильовим рівнянням у даній задачі є рівняння

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad \text{або} \quad u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1},$$

де $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

Як вказано в п.3.2.2, розв'язок нелінійного хвильового рівняння з урахуванням першого і другого наближень за методом 2 має вигляд (5.1), а з урахуванням першого, другого і третього наближень має вигляд (5.2).

Далі за методом 2 розглядається задача про хвилю Уіттекера $W_{k;m}(z)$ з параметрами $\left(k = \frac{1}{4}, m = \frac{1}{4}\right)$. Тоді початковий профіль приймає вигляд

$$u_1^{(1)}(\sigma) = u_1^0 W_{1/4;1/4}(\sigma), \quad (5.6)$$

де u_1^0 - амплітуда хвилі і $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ - фаза хвилі.

Тоді формула (5.1), для першого і другого наближень з урахуванням (5.6) приймає вигляд

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{1/4,1/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^2 \quad (5.7)$$

А формула (5.2) для першого, другого і третього наближень з урахуванням (5.6) приймає такий вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 W_{1/4,1/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^2 - \\ & - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 \left(u_1^0\right)^3 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Тепер слід обчислити похідну функції $W_{k,m}(z)$ за формулою [39]

$$\frac{d}{dz} W_{k,m}(z) = \left(\frac{k}{z} - \frac{1}{2} \right) W_{k,m}(z) - \frac{1}{z} \left[m^2 - \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] W_{k-1,m}(z),$$

згідно з якою справедлива наступна формула

$$(W_{1/4,1/4}(\sigma))' = \left(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) W_{1/4,1/4}(\sigma). \quad (5.9)$$

Отже, розв'язок (5.7) з урахуванням (5.9) для перших двох наближень наступний:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{1/4,1/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right)^2 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^2 \quad (5.10)$$

а у випадку (5.8), для перших трьох наближень

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 W_{1/4,1/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right)^2 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^2 - \\ & - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 \left(u_1^0\right)^3 \left(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right)^3 \left[W'_{1/4,1/4}(\sigma)\right]^3 \end{aligned} \quad (5.11)$$

З вигляду розв'язків (5.10) і (5.11) випливають дві особливості: вони описують спотворення початкового профілю хвилі через пряму залежність нелінійної складової від часу та поширення початкового профілю через наявність нелінійних доданків.

5.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система CI) [1, 9, 20, 23, 39, 40]:

Матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^4; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{10}; \\ A = -0,658 \cdot 10^{11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{11}; \quad v_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{10}; \\ A = -1,33 \cdot 10^{11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{11}; \quad v_L = 3,769 \cdot 10^3; \quad \alpha = -34,08.$$

де ρ - густина матеріалу, λ , μ - пружні постійні Ляме (постійні другого порядку), A , B , C - пружні постійні Мурнагана (постійні третього порядку), v_L - швидкість хвилі і $\alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$.

На відміну від гармонічної хвилі, яка характеризується початковою частотою та хвильовим числом поодинока хвиля Уіттекера характеризується параметром a , який визначає довжину підошви за формулою $\sigma = (1/a)$. Для даних двох матеріалів початкові підошви вибрані одинаковими $L = 0,037$ ($a = 160$).

5.2.3. Числовий аналіз хвилі Уіттекера (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення)

5.2.3.1 Перший варіант початкового профіля для матеріалу M51.

За формулами (5.6) (1-ше наближення), (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) та (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки “zmіщення u_1 – пройдена хвилею відстань x_1 ”. Всього розглянуто 2 набори (два матеріали), для одного варіанту довжини підошви хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями. У

кожному наборі перший графік показує вигляд початкового профіля, а інші графіки, об'єднані у три групи. Кожна група складається з двох графіків: перший графік порівнює перше наближення з другим, а другий графік порівнює розв'язки, що відповідають першому та другому наближенню та розв'язки, що включають перше, друге і третє наближення. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані багатьох десятків повторень довжини підошви хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення профілю спостерігається візуально.

Далі чисельно аналізуються формули (5.6), (5.10) та (5.11) для хвилі в довільний момент часу, за методом 2. Графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно і спостерігалась відмінність впливу двох розв'язків на початковий профіль хвилі. На останньому графіку зображеного тривимірний варіант для розв'язку (5.11).

Зазначимо, що на рис. 5.11-5.14 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

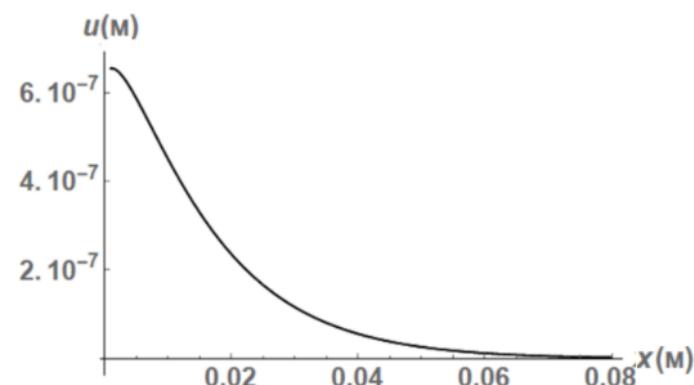


Рис. 5.11. Початковий профіль хвилі Уїттекера що відповідає параметрам

$$(k = 1/4, m = 1/4)$$

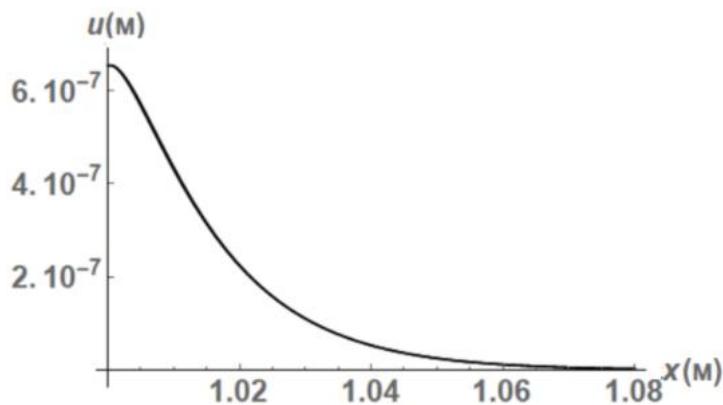


Рис. 5.12а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

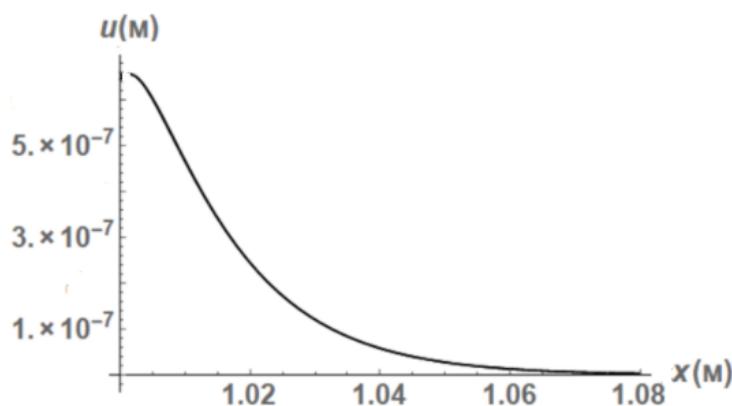


Рис. 5.12б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

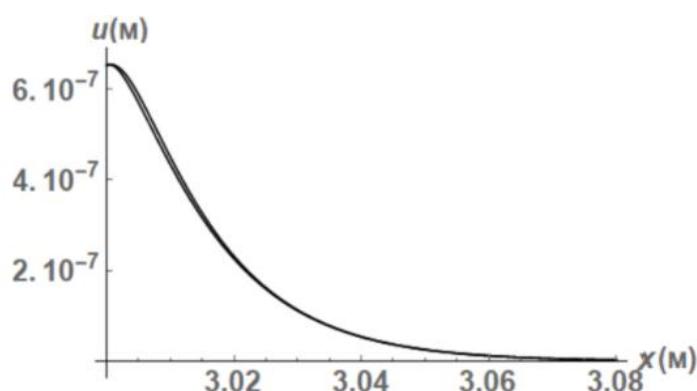


Рис. 5.13а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

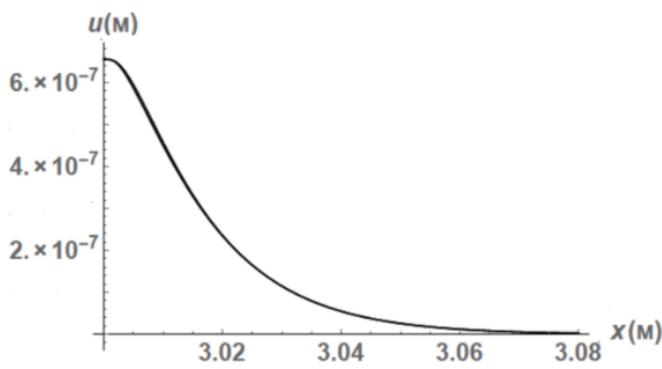


Рис. 5.13б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

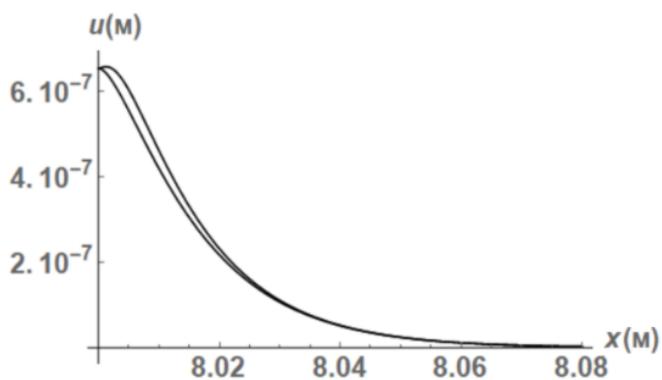


Рис. 5.14а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

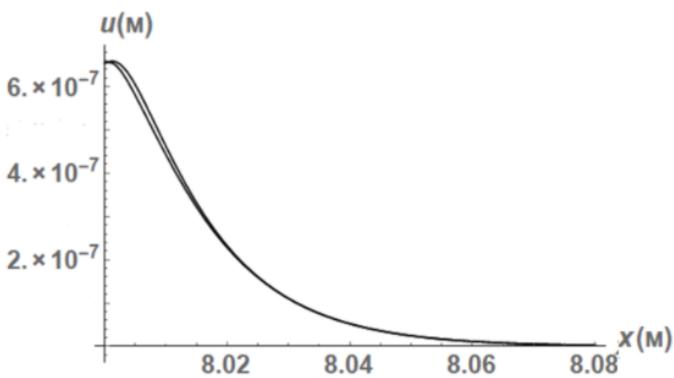


Рис. 5.14б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній – розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 5.15 наведено тривимірний графік для розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманий за методом 2, що відповідає матеріалу М51

і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля.

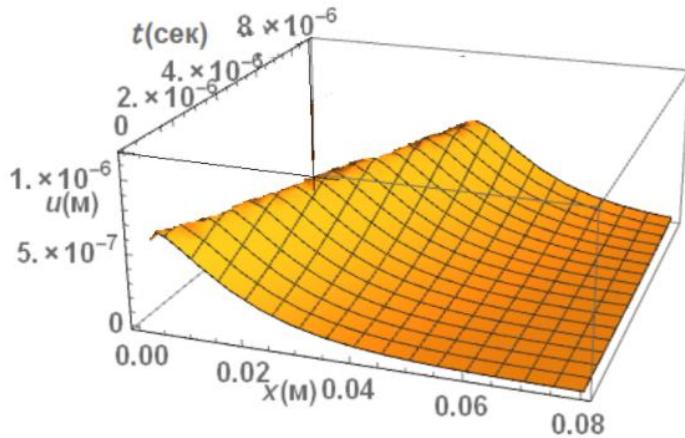


Рис. 5.15. Тривимірний варіант хвилі Уіттекера, що відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

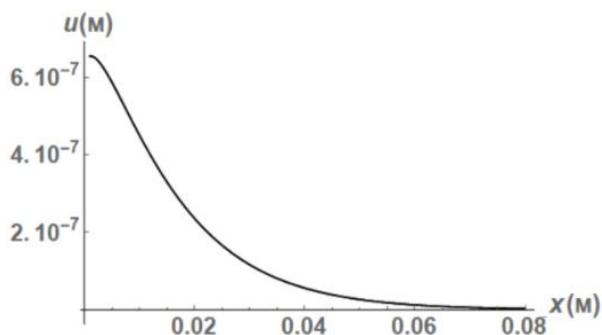
Перший графік рис. 5.11 відповідає початковому профілю хвилі Уіттекера, що відповідає параметрам $\left(k = \frac{1}{4}, m = \frac{1}{4} \right)$. З представлених перших двох груп графіків рис. 5.12а,б слідує, що на початковому етапі, різниці між різними сценаріями поведінки хвиль для розв'язків (5.6) (1-ше наближення) і (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язків з (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) не спостерігається. Хвилі, що відповідають першим двом та першим трьом наближенням не змінюють довжину підошви і не демонструють відхилення від початкового профілю. Починаючи з рис. 5.13а,б особливо з рис. 5.14а,б спостерігається незначне відхилення і збільшення максимальної амплітуди для хвилі яка відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) відносно розв'язку (5.6) (1-ше наближення). При поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 5.14а,б обидва розв'язки дають незначні але різні результати. Хвilia, що відповідає першим трьом наближенням стає крутішою та збільшується значення амплітуди в порівнянні для хвилі для перших двох наближеннь. Якісна відмінність між першими двома та першими трьома наближеннями є суттєвою, і незначною кількісно.

Отже, зафіксовано вплив третього наближення при поширенні поодинокої хвилі Уіттекера. Отриманий ефект спостерігається на великих відстанях поширенні хвилі, тому вплив третього наближення на деформацію початкового профіля хвилі при початкових етапах поширення є незначний в порівнянні з наступними етапами.

5.2.3.2 Перший варіант початкового профіля для матеріалу M52.

Для дослідження розглянемо матеріал M52 та почакові параметри хвилі, що були застосовані в попередньому випадку.

На всіх рис. 5.16-5.19 наведено графіки для варіанта що відповідає матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підеш-ви хвилі $a = 160$.



*Рис. 5.16. Початковий профіль хвилі Уіттекера що відповідає параметрам
 $(k = 1/4, m = 1/4)$*

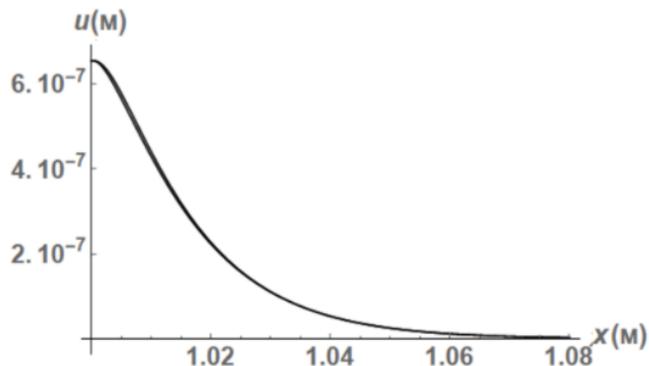


Рис. 5.17а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

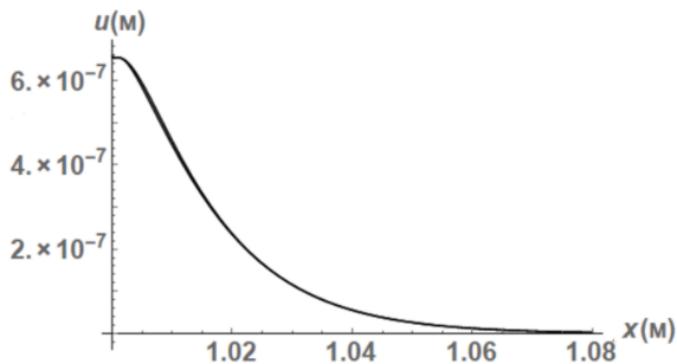


Рис. 5.17б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

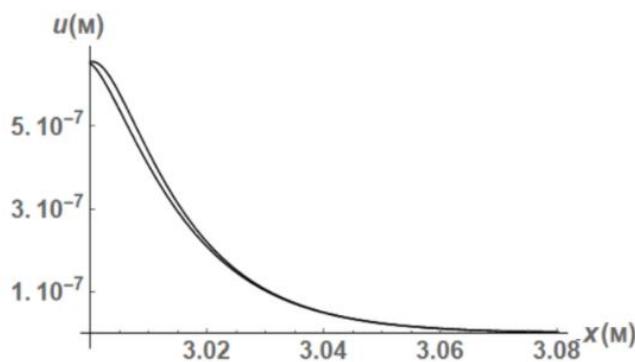


Рис. 5.18а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

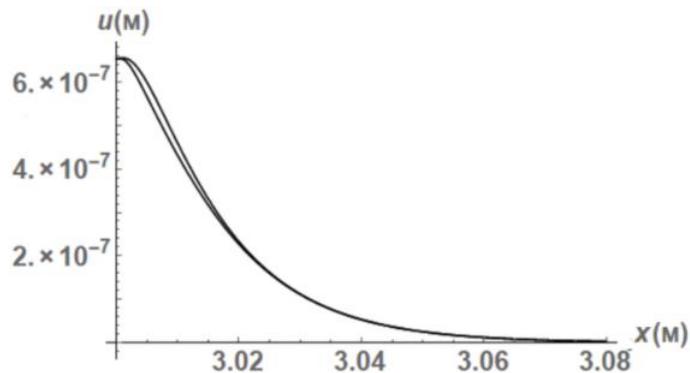


Рис. 5.18б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

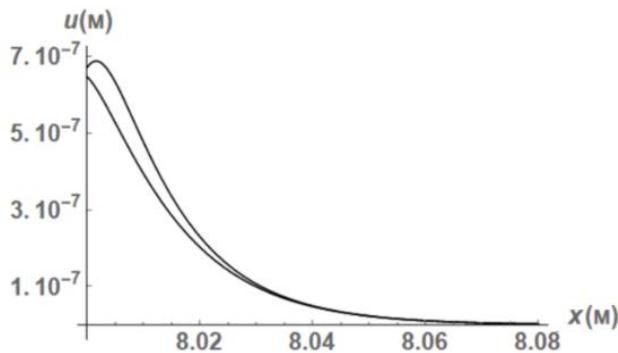


Рис. 5.19а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.6) (1-ше наближення)

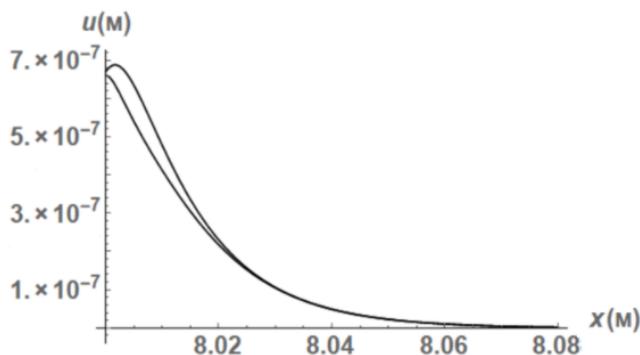


Рис. 5.19б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення)

Далі на рис. 5.20 наведено тривимірний графік для розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля.

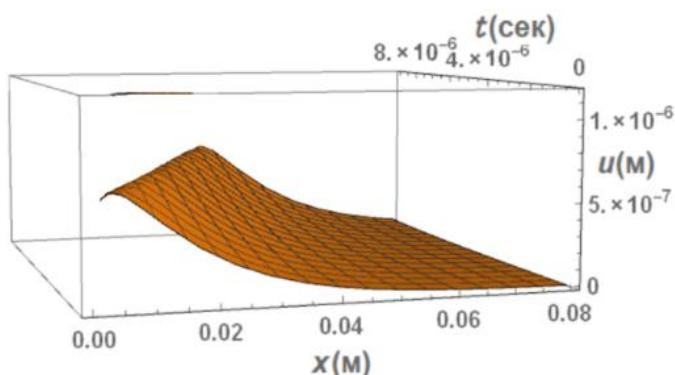


Рис. 5.20. Тривимірний варіант хвилі Уіттекера, що відповідає розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 5.16 аналогічний попередньому випадку. З представлених перших двох груп графіків рис. 5.17(а,б) випливає, що на початковому етапі, різниці між різними сценаріями поведінки хвиль для розв'язків (5.6) (1-ше наближення) і (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язків з (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) майже не спостерігається. Хвилі для двох та трьох наближень не змінюють довжину підошви і демонструють лише незначне відхилення від початкового профілю рис. 5.17а,б. Починаючи з рис. 5.18а,б і особливо з рис. 5.18а,б спостерігається відхилення і збільшення максимальної амплітуди для хвилі яка відповідає розв'язку (5.10) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (5.11) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) відносно початкового профілю розв'язку (5.6) (1-ше наближення). При поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 5.19а,б обидва розв'язки дають значні і відмінні результати в порівнянні з результатом, який отриманий в попередньому випадку рис. 5.14а,б. Хвилі, що відповідає першим трьом наближенням стає крутішою відносно хвилі що відповідає першим двом наближенням, при цьому значення максимальної амплітуди у випадку трьох наближень зростає.

Вплив третього наближення на початковий профіль при поширенні хвилі Уіттекера для даної конфігурації параметрів матеріалу є більшим в порівнянні з попереднім випадком. Третє наближення для такої конфігурації більше впливає на початковий профіль в порівнянні з першими двома наближеннями. Отриманий ефект спостерігається на достатньо великих відстанях поширенні хвилі, тому вплив третього наближення на деформацію початкового профіля хвилі при початкових етапах поширення є незначний.

Отже, можна зробити висновки, що для першого та другого варіантів параметрів матеріалу, друге та третє наближення впливають на зміну початкового профіля з різною швидкістю (дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації). Вплив третього, четвертого, п'ятого і більше наближень буде незначний, щодо другого наближення при початкових етапах поширення хвилі. Кожна нелінійна добавка буде впливати

на дисторсію початкового профіля все менше і менше.

Для поздовжніх хвиль Гаусса, та Уіттекера вплив третьої нелінійної добавки відмінний: в першому випадку профіль хвилі є умовно симетричним, а в другому - суттєво несиметричним це в свою чергу впливає на швидкість та вигляд спотворення профіля. Спільним є те, що для обох початкових профілів вплив третьої гармоніки є незначний і спостерігається тільки для достатньо великих відстанях, але збільшення початкової амплітуди властиве для обох випадків.

5.2.3.3 Другий варіант початкового профіля для матеріалу М51.

Розглядається задача про хвилю Уіттекера $W_{k,m}(z)$ з параметрами $\left(k = \frac{5}{4}, m = \frac{5}{4}\right)$, що дає можливість проаналізувати вплив другого та третього наближення для іншого початкового профіля хвилі в порівнянні із попереднім випадком вигляду цього профіля.

Рівняння для першого наближення хвилі Уіттекера відповідних параметрів приймає вигляд

$$u_1^{(1)}(\sigma) = u_1^0 W_{5/4;5/4}(\sigma), \quad (5.12)$$

де u_1^0 - амплітуда хвилі і $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ -фаза хвилі.

Розв'язок для першого і другого наближень з урахуванням (5.12) приймає вигляд

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left[W'_{5/4,5/4}(\sigma)\right]^2; \quad (5.13)$$

А розв'язок для першого, другого і третього наближень з урахуванням (5.12) матиме такий вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 \left(u_1^0\right)^2 \left[W'_{5/4,5/4}(\sigma)\right]^2 - \\ & - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 \left(u_1^0\right)^3 \left[W'_{5/4,5/4}(\sigma)\right]^3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Похідна функції $W_{5/4;5/4}(\sigma)$ наступна:

$$\frac{d}{d\sigma} W_{5/4,5/4}(\sigma) = \left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{z} W_{1/4,5/4}(\sigma), \quad (5.15)$$

Отже розв'язок (5.13) з урахуванням (5.15) для перших двох наближень наступний

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 (u_1^0)^2 \left[\left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{\sigma} W_{1/4,5/4}(\sigma) \right]^2 \quad (5.16)$$

а у випадку (5.14), для перших трьох наближень

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{2} \alpha v_L t a^2 (u_1^0)^2 \left[\left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{\sigma} W_{1/4,5/4}(\sigma) \right]^2 - \\ & - \frac{1}{8} \alpha^2 v_L t a^3 (u_1^0)^3 \left[\left(\frac{5}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right) W_{5/4,5/4}(\sigma) - \frac{1}{\sigma} W_{1/4,5/4}(\sigma) \right]^3 \end{aligned} \quad (5.17)$$

З вигляду розв'язків (5.16) і (5.17) випливає що вони схожі з розв'язками (5.10) та (5.11) за винятком множника, що відповідає похідній.

Виберемо аналогічні два металеві композитні матеріали які застосовувались для дослідження хвилі Уіттекера $W_{k;m}(z)$ з параметрами $\left(k = \frac{5}{4}, m = \frac{5}{4} \right)$ (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) (система СІ): матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) і матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6). Для даних двох матеріалів початкові підошви вибрані одинаковими $L = 0,037$ $a = 160$.

Далі за формулами (5.12) (1-ше наближення), (5.16) (1-ше+2-ге наближення) та (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки “зміщення u_1 – пройдена хвилею відстань x_1 ”. Всього розглянуто 2 набори (два матеріали), для одного варіанту довжини підошви хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями. У кожному наборі перший графік показує вигляд початкового профіля, а інші графіки, об'єднані у три групи. Кожна група складається з

двох графіків: перший графік порівнює перше наближення з другим, а другий графік порівнює розв'язки, що відповідають першому та другому наближенню та розв'язки, що включають перше, друге і третє наближення. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані багато десятків повторень довжини підошви хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення профілю цілком спостерігається візуально.

Графіки побудовані за аналогічним сценарієм до попереднього випадку і відрізняються так, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно.

На всіх рис. 5.21-5.24 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

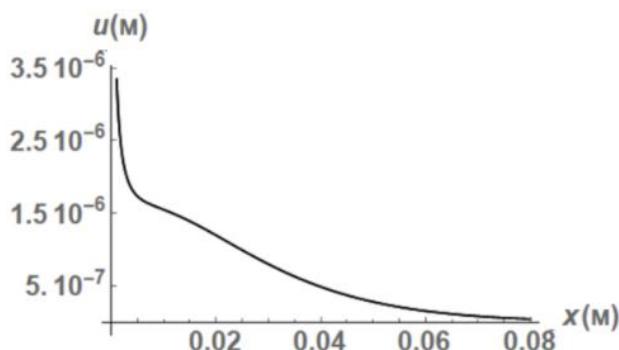


Рис. 5.21. Початковий профіль хвилі Уіттекера що відповідає параметрам
 $(k = 5 / 4, m = 5 / 4)$

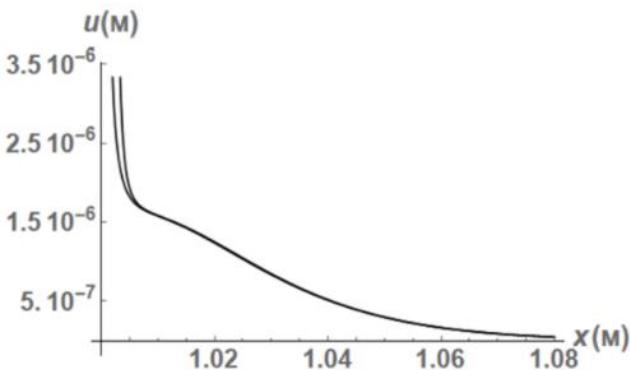


Рис. 5.22a. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12) (1-ше наближення)

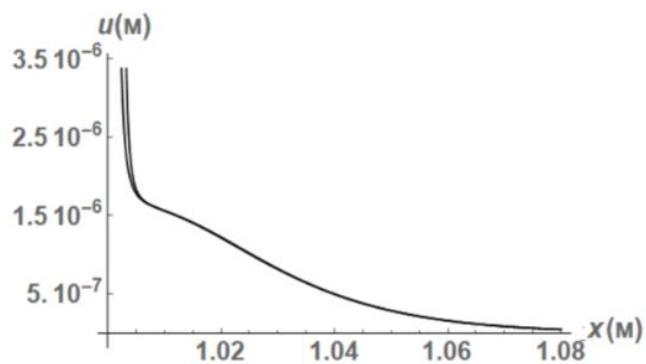


Рис. 5.22б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

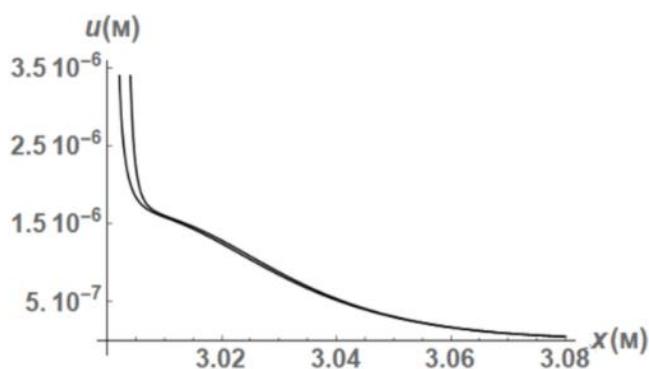


Рис. 5.23а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12) (1-ше наближення)

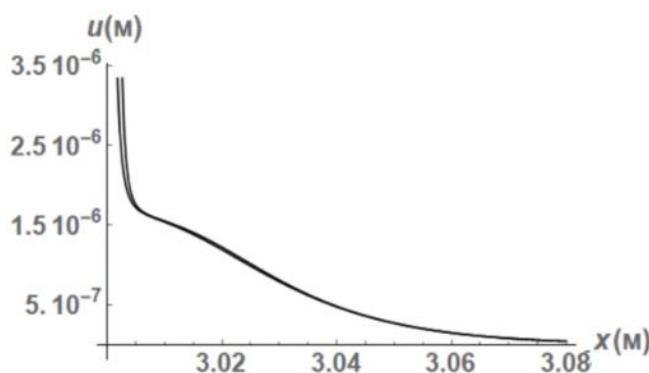


Рис. 5.23б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

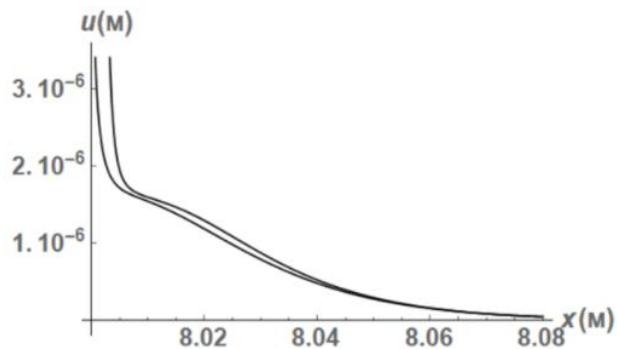


Рис. 5.24а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12) (1-ше наближення)

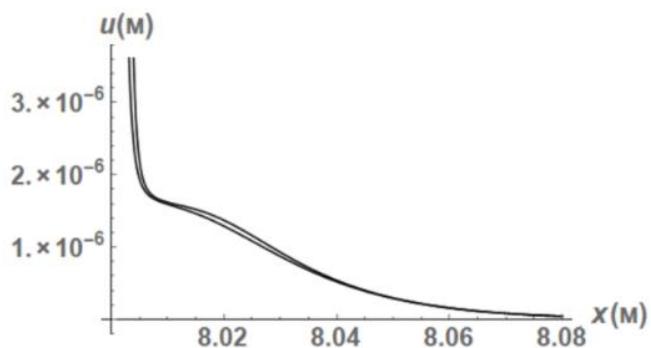


Рис. 5.24б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 5.25 наведено тривимірний графік для розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманий за методом 2, що відповідає матеріалу М51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

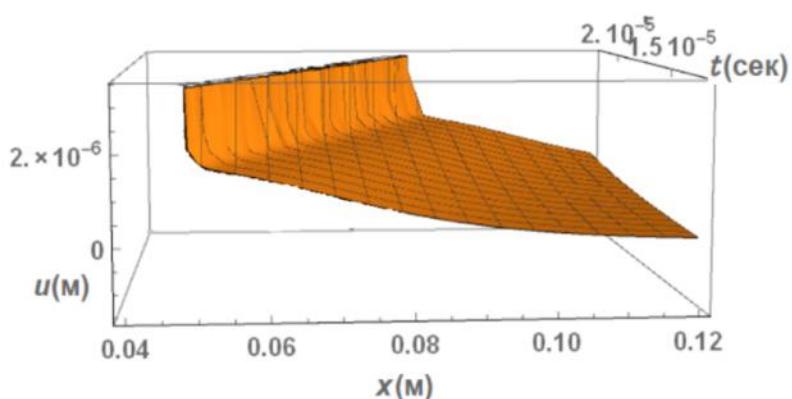


Рис. 5.25. Тривимірний варіант хвилі Уіттекера, що відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 5.21 відповідає початковому профілю хвилі Уіттекера, з параметрами $\left(k = \frac{5}{4}, m = \frac{5}{4} \right)$. Починаючи з рис. 5.22а,б спостерігається вплив другого наближення на початковий профіль та відмінність між, першим і другим та першим, другим і третім наближеннями. Починаючи з рис. 5.23а,б і особливо з рис. 5.24а,б спостерігається відхилення хвилі яка відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) відносно розв'язку (5.12) (1-ше наближення). На суттєвій відстані 5.24а,б обидва розв'язки демонструють якісно відмінні, але кількісно близькі результати. Хвиля для трьох наближень (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) дає більший ефект в порівнянні для хвилі з двома наближеннями (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), але спотворення відбувається з різною швидкістю, та є не значним.

5.2.3.4 Другий варіант початкового профіля для матеріалу M52.

Розглянемо наступну групу графіків (рис. 5.26-5.29) для варіанта, що відповідає матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

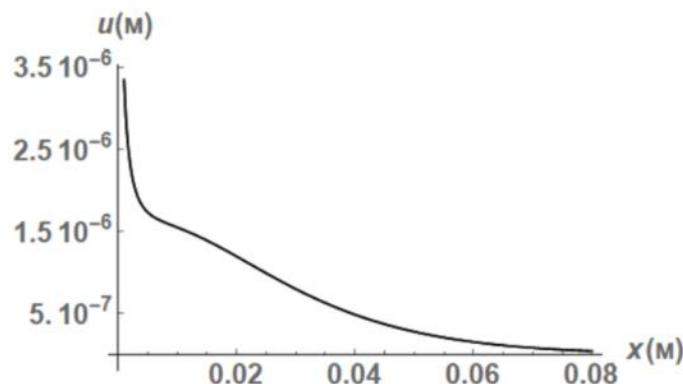


Рис. 5.26. Початковий профіль хвилі Уіттекера що відповідає параметрам $(k = 5 / 4, m = 5 / 4)$

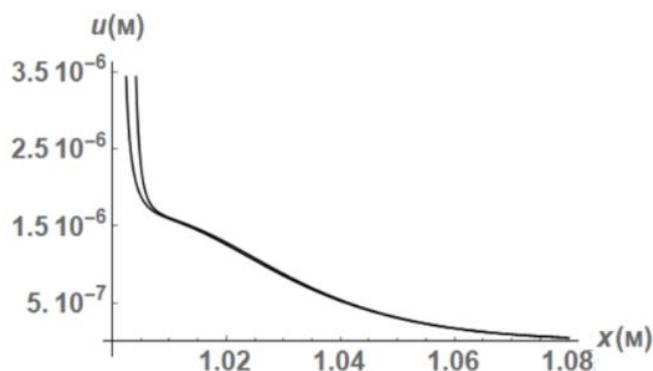


Рис. 5.27а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12) (1-ше наближення)

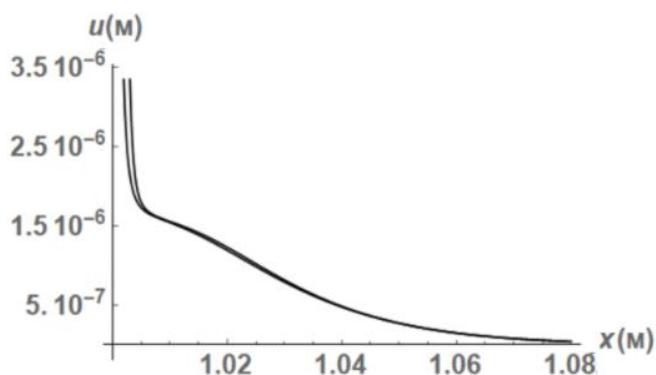


Рис. 5.27б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 27 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

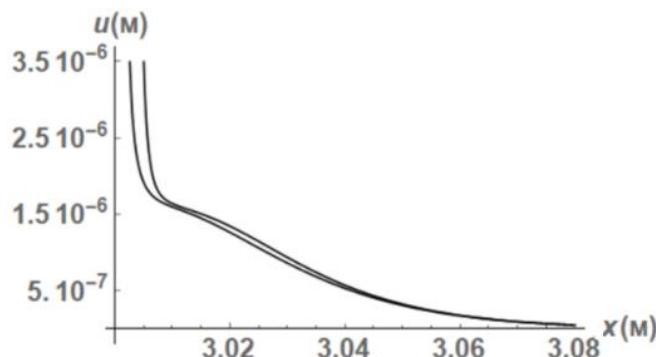


Рис. 5.28а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12)(1-ше наближення)

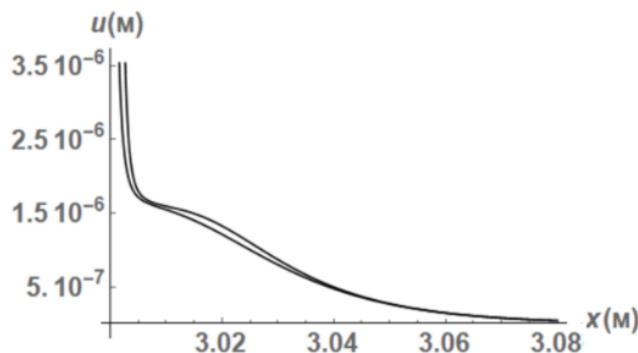


Рис. 5.28б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 83 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

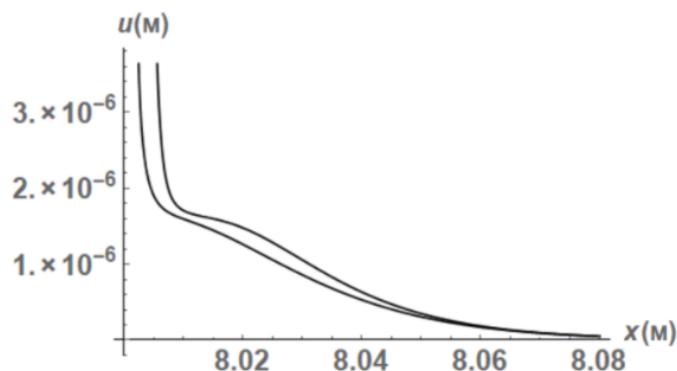


Рис. 5.29а. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.12) (1-ше наближення)

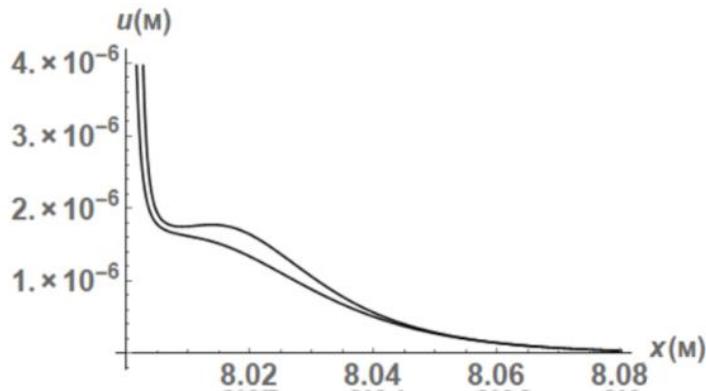


Рис. 5.29б. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.16) (1-ше + 2-ге наближення)

Далі на рис. 5.30 наведено тривимірний графік для розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріал

M52 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$.
Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля першими трьома нелінійними доданками.

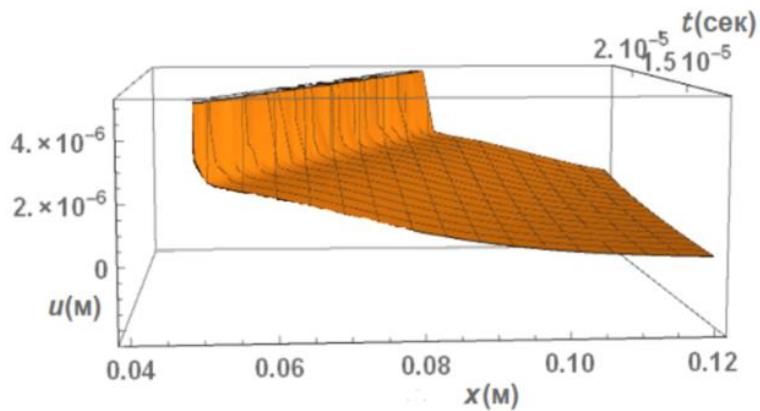


Рис. 5.30. Тривимірний варіант хвилі Уіттекера, що відповідає розв'язку (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 5.26 аналогічний попередньому випадку. Починаючи з рис. 5.27а,б спостерігається незначний вплив другого наближення на початковий профіль та різниці між першим, другим та першим, другим і третім наближеннями. Тільки з рис. 5.28а,б і особливо з рис. 5.29а,б спостерігається еволюція профіля. На суттєвій відстані рис. 5.29а,б обидва розв'язки (5.16) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.17) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) дають незначні але різні результати. Хвиля для перших трьох наближень дає більший ефект в порівнянні для хвилі з першими двома наближеннями. Хвиля, що відповідає першим трьом наближенням утворює горб, і відхиляється від хвилі, що відповідає першим двом наближенням.

Отже, можна зробити висновки, що для першого та другого варіантів параметрів матеріалу, перші два та перші три наближення впливають на зміну початкового профіля з різною швидкістю (дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації параметрів матеріалу).

Вплив перших трьох наближень на початковий профіль при поширенні поодинокої хвилі Уіттекера для конфігурації параметрів $\left(k = \frac{5}{4}, m = \frac{5}{4} \right)$, що відповідає якісно іншому початковому профілю в порівнянні для хвилі з

параметрам $\left(k = \frac{1}{4}, m = \frac{1}{4}\right)$, є подібним. Отриманий ефект спостерігається на

достатньо великих відстанях поширенні хвилі, для обох хвиль, що відповідають різним параметрам.

Вплив другого наближення менший ніж вплив другого та третього на зміну початкового профілю хвилі, хоча великої різниці між спотвореннями не спостерігається. Цей ефект спостерігається на великих відстанях поширенні хвилі. З аналізу двох різних початкових профілів хвилі Уіттекера випливає, що вибір порічкових параметрів хвилі єсуттєвим фактором побудові сценаріїв.

Основний висновок. Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу хвилі Уіттекера (як приклад хвилі з несимеїричним профілем) засвідчують, що з гідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі початковий профіль деформується суттєво і зберігає несимеїричність профіля, що супроводжується зменшенням підошви хвилі. При цьому при певному виборі параметрів початкового профіля на профілі утворюється горб.

РОЗДІЛ 6

ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНОЇ ПООДИНОКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ РАДІАЛЬНОЇ ХВИЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ ОБМЕЖЕННЯ НА ГРАДІЄНТ ЗМІЩЕННЯ (ПЕРШІ ТРИ НАБЛИЖЕННЯ)

6.1. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної радіальної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда (хвиля Макдональда) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення)

6.1.1. Нелінійна хвиля Макдональда. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули

Основне нелінійне хвильове рівняння, для циліндричної радіальної хвилі [126] :

$$(c_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - u_{r,tt} = 0 \quad (6.1)$$

З нелінійного хвильового рівняння (6.1) з використанням методу обмеження на градієнт зміщення (метод 2), як вказано в п. 3.3.3 та в п. 3.3.4, були отримані розв'язки з урахуванням перших двох та перших трьох наближень.

Розв'язок з урахуванням першого і другого наближення [42, 132, 133] такий:

$$u_r(r,t) \approx F(\sigma) - (1/2) a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[F'(\sigma) \right]^2, \quad \sigma = a(r - c_L t) \quad (6.2)$$

Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень такий:

$$u_r(r,t) \approx F(\sigma) - (1/2) a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[F'(\sigma) \right]^2 - (1/8) a^3 c_L \left(\tilde{N}_1 \right)^2 t \left[F'(\sigma) \right]^3 \quad (6.3)$$

Далі розглянемо задачу про циліндричну радіальну хвилю Макдональда

нульового індексу $u_0 K_0(\sigma)$, де u_0 - початкова амплітуда хвилі, $\sigma = a(r - c_L t)$ - фаза хвилі з постійною фазовою швидкістю.

Лінійний розв'язок рівняння (6.1) з початковим профілем у вигляді хвилі Мақдональда має вигляд

$$u_r^{(1)}(r, t) = u_0 K_0(\sigma) \quad (6.4)$$

Тоді формула (6.2), для першого і другого наближень наступна

$$u_r^{(1+2)}(r, t) \approx u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_0'(\sigma)]^2. \quad (6.5)$$

Формула (6.3), для першого, другого і третього наближень

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)} \approx & u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_0'(\sigma)]^2 - \\ & -(1/8)(u_0)^3 a^3 c_L (\tilde{N}_1)^2 t [K_0'(\sigma)]^3. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Використавши відому формулу для похідної $K_0'(\sigma) = -K_1(\sigma)$, розв'язок (6.5) для перших двох наближень отримаємо у вигляді:

$$u_r^{(1+2)}(r, t) \approx u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_1(\sigma)]^2; \quad (6.7)$$

а у випадку (6.6), розв'язок для перших трьох наближень такий:

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r, t) \approx & u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_1(\sigma)]^2 - \\ & -(1/8)(u_0)^3 a^3 c_L (\tilde{N}_1)^2 t [-K_1(\sigma)]^3. \end{aligned} \quad (6.8)$$

З розв'язків (6.7) і (6.8) випливає особливість: вони описують спотворення початкового профілю циліндричної радіальної хвилі через пряму залежність нелінійної складової від часу.

При побудові графіка хвилі, яка поширюється від циліндричної порожнини радіуса r_o в радіальному напрямку врахований факт, що повинна виконуватися умова $r \geq r_o$.

6.1.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система СІ) [1, 20, 39,

40]:

Матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^4; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{11}; \quad c_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \quad \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 0,721 \cdot 10^{10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{11}; \quad B = -4,45 \cdot 10^{11}; \quad C = -9,5 \cdot 10^{11}; \quad c_L = 3,769 \cdot 10^3; \quad \alpha = -34,08.$$

де ρ - густина матеріалу, λ, μ - пружні постійні Ляме (постійні другого порядку), A, B, C - пружні постійні Мурнагана (постійні третього порядку), c_L - швидкість хвилі і $\tilde{N}_1 = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]$.

Для поодинокої хвилі Макдональда (яка є функцією скінченної ваги) приймемо, за означенням, припущення, що довжиною підошви хвилі є інтервал, для якого площа під графіком поза цим інтервалом є малою.

При представленні профілю функції Макдональда у вигляді $u_r(r, t=0) = K_0(ra)$ параметр a визначає довжину підошви хвилі. Для двох матеріалів початкова підошва вибрана однаковою $L = 0,037$ ($a = 160$).

Початкова амплітуда вибиралася для кожного матеріалу і для початкової довжини (підошви) хвилі в одному варіанті $u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$.

6.1.3. Числовий аналіз хвилі Макдональда (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення)

При побудові графіка хвилі повинна виконуватися умова $r \geq r_o$, де $r = 0,001$.

Дане значення вибиралось як найбільше відповідне для теоретичного обчислення.

За формулами (6.4) (1-ше наближення), (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки

«зміщення u_r – пройдена хвилею відстань r ». Всього розглянуто 2 набори (2 матеріали), для одного варіанту довжини підошви хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями. У кожному наборі перший графік показує вигляд початкового профіля, а інші графіки, об'єднані у три групи. Кожна група складається з двох графіків: перший графік порівнює перше наближення з другим, а другий графік порівнює розв'язки, що відповідають першому та другому наближення та розв'язки, що включають перше, друге і третє наближення. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані десяти повторень довжини підошви хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення поодинокого профілю цілком спостерігається візуально.

Далі чисельно аналізуються формули (6.4), (6.7) та (6.8) для хвилі в довільний момент часу, отримані методом 2. Графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно і спостерігалась відмінність впливу розвязків, що відповідають першим двом та першим трьом наближенням на початковий профіль хвилі. На останньому графіку зображено тривимірний варіант для розв'язку (6.8) з найбільш розвиненою еволюцією.

На всіх рис. 6.1-6.4 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-5}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

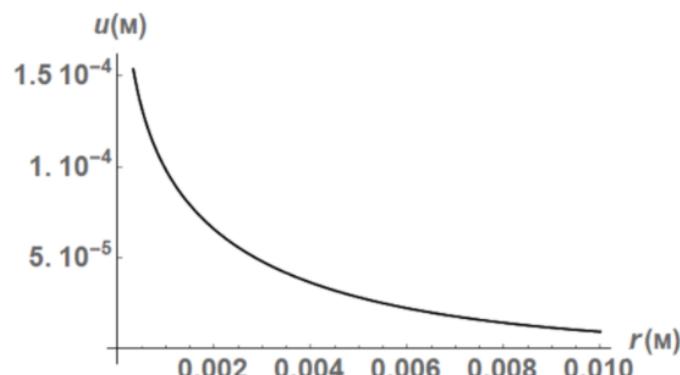


Рис. 6.1. Початковий профіль хвилі Макдональда

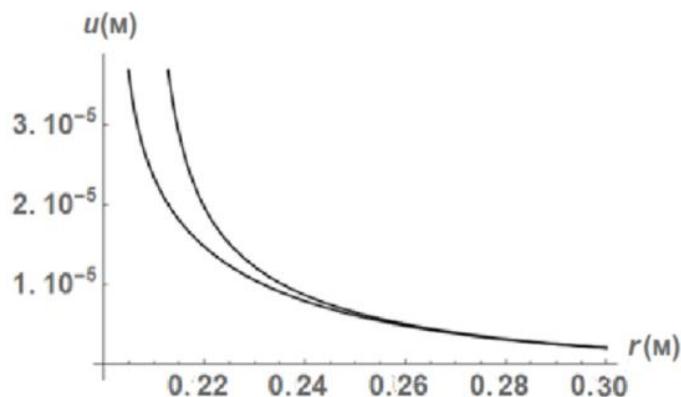


Рис. 6.2а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

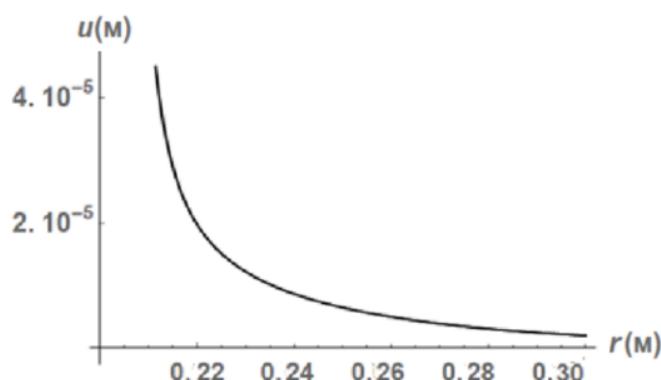


Рис. 6.2б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

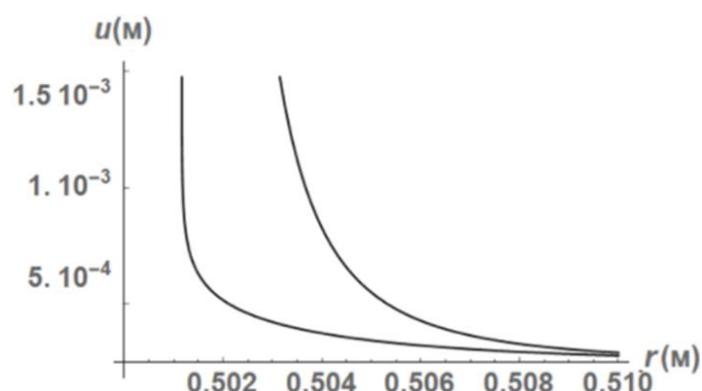


Рис. 6.3а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 17 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

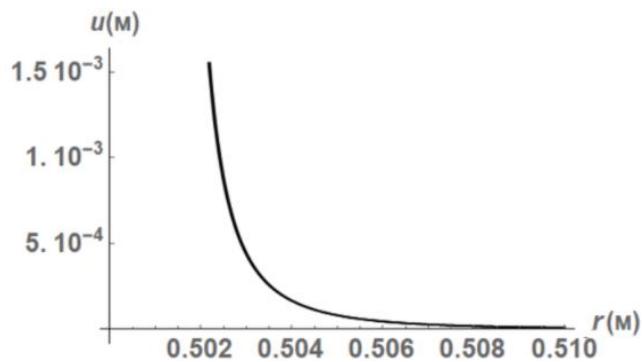


Рис. 6.3б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 17 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

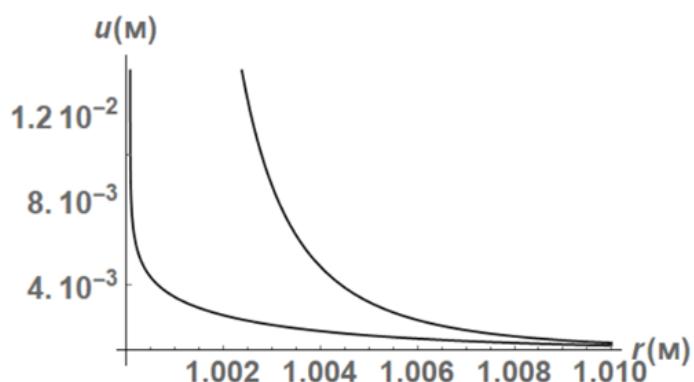


Рис. 6.4а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

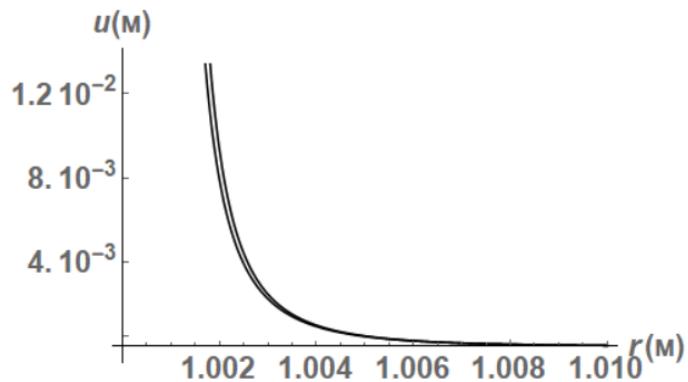


Рис. 6.4б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.5 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріалу М51 і та-

ким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

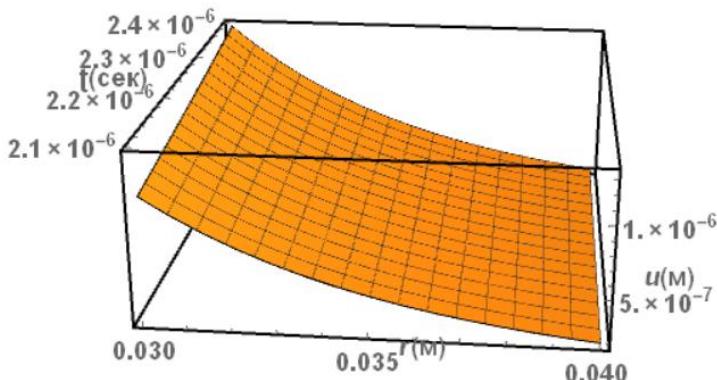


Рис. 6.5. Тривимірний варіант хвилі Макдональда, що відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення)

Отже, перший рис. 6.1 відповідає початковому профілю хвилі Макдональда. З отриманого графіка рис. 6.2а випливає, що вплив другого наближення по відношенню до початкового профіля значний, однак спостерігається відсутність відмінності первого, другого та первого, другого і третього наближень, що видно з рис. 6.2б. На даному етапі, спостерігається велика відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.4) (1-ше наближення) та хвилею що відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), але відмінності між сценаріями поведінки хвиль для розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) практично немає. Хвilia, що відповідає первім двом наближенням змінює довжину підошви і демонструє значне відхилення вгору від початкового профілю, при цьому максимальне значення амплітуди збільшується для обох профілів.

Починаючи з рис. 6.3а,б та рис. 6.4а,б спостерігається значна зміна початкового профілю розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) відносно первого наближення розв'язку (6.4), але майже не спостерігається зміни відхилення одне від одного профілів, що відповідають розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Тобто, при поширенні хвилі на суттєву відстань (рис. 6.3б та рис. 6.4б) обидва роз-

в'язки дають майже однакові результати. Отже вплив третього наближення при поширенні хвилі Макдональда на достатньо великі відстані малий по відношенню до випадку хвилі, що відповідає першим двом наближенням.

Далі розглянемо наступну групу графіків, де всі рис. 6.6-6.9 відповідають матеріалу М52 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -34,08$, $u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ та значення підошви хвилі $a = 160$.

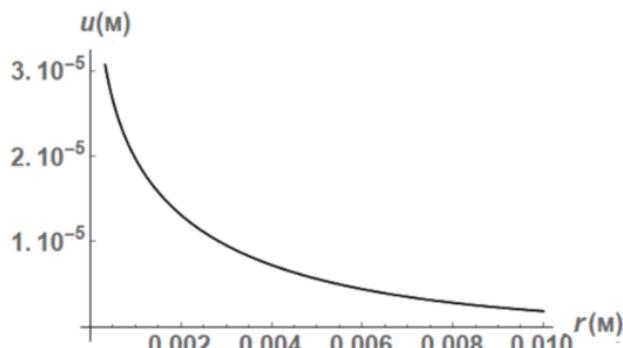


Рис. 6.6. Початковий профіль хвилі Макдональда

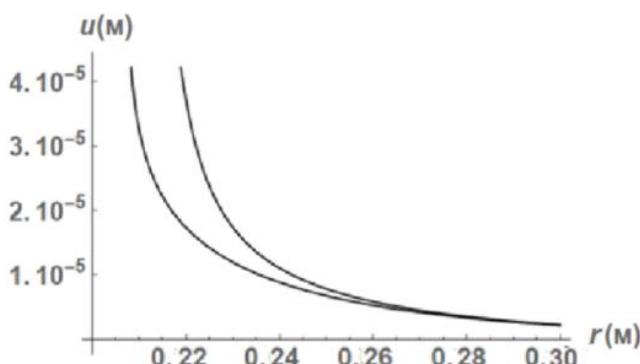


Рис. 6.7а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

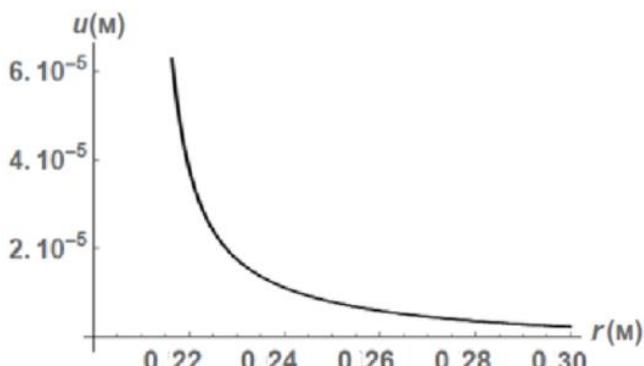


Рис. 6.7б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

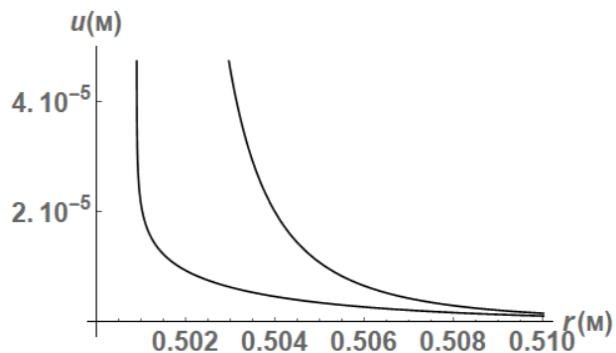


Рис. 6.8а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 17 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

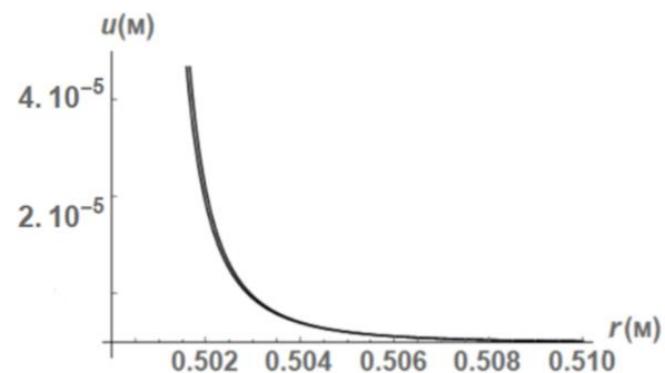


Рис. 6.8б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 17 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

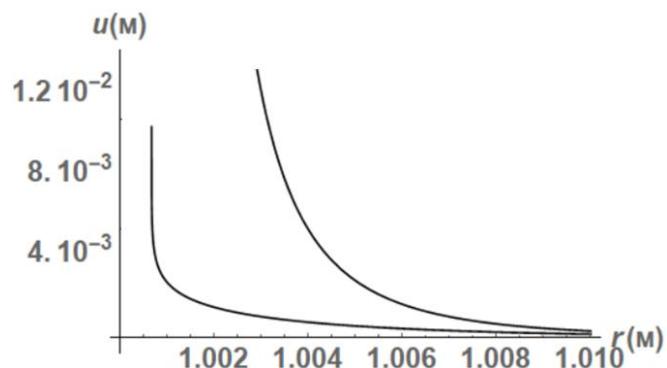


Рис. 6.9а. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

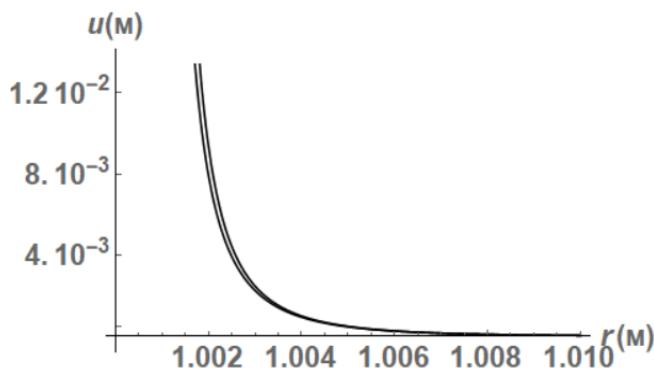


Рис. 6.9б. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.10 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому за методом 2, що відповідає матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34.08$, $u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля.

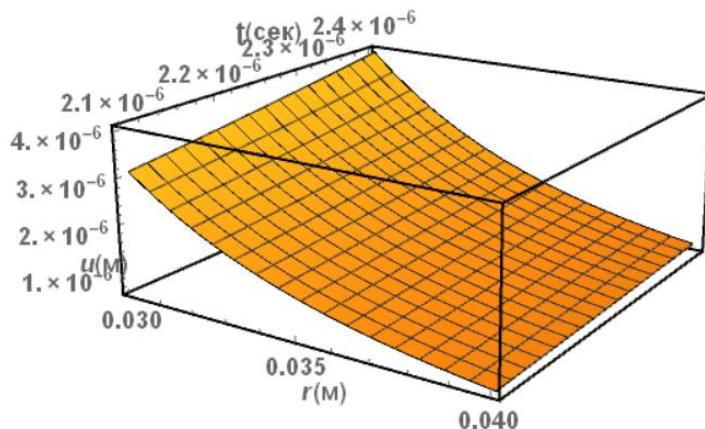


Рис. 6.10. Тривимірний варіант хвилі Макдональда, що відповідає розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Отже, перший рис. 6.6 відповідає початковому профілю хвилі Макдональда. З отриманого рис. 6.7а випливає, що вплив 2-го наближення значений, але відсутність відмінності між розв'язками (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), що видно з рис. 6.7б. На даному етапі спостерігається відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.4) (1-ше наближення) та хвилею що відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення). Хвіля, що відповідає першим двом наближенням змінює дов-

жину підошви і демонструє значне відхилення вгору від початкового профілю, при цьому максимальне значення амплітуди збільшується. Основний нелінійний хвильовий ефект полягає у зміні зміщення графіка вправо, а також зміни кривизни графіка (він стає менш опуклим).

З графіків рис. 6.8а та рис. 6.9а видно, що відбувається значна зміна початкового профілю. Хвиля, що відповідає розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) спотворюється за аналогічним сценарієм попереднього випадку. Також присутні незначні відхилення одне від одного профілів, що відповідають розв'язку (6.7) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) рис. 6.8б та рис. 6.9б. В даному випадку профіль, що відповідає першим трьом наближенням відхиляється від профілю, що відповідає першим двом наближенням, при цьому значення максимальної амплітуди незмінне. Тобто при поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 6.8б та рис. 6.9б обидва розв'язки для даного матеріалу є якісно відмінними але кількісно відмінними мало.

Отже, з отриманих результатів слідує, що для першого та другого варіанту параметрів матеріалу, третє наближення впливає з різною швидкістю (тобто дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації). Вплив четвертого, п'ятого і більше наближень буде незначний в порівнянні для перших трьох наближень. Кожна нелінійна добавка буде впливати на спотворення початкового профіля все менше і менше.

Для цилідричної радіальної хвилі Макдональда, спотворення несиметричного початкового профіля відбувається несиметричним шляхом, аналогічно як і для поздовжніх плоских хвиль [61].

Основний висновок. Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу хвилі цилідричної радіальної хвилі Макдональда (як приклад хвилі з несиметричним профілем) засвідчують, що з гідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі, нелінійний хвильовий ефект полягає у зміні зміщення графіка вправо, а також зміни кривизни графіка (він стає менш опуклим).

6.2. Теоретичний та числовий аналіз циліндричної радіальної поодинокої хвилі з профілем у вигляді функції Фрідляндра (хвиля Фрідляндра) за допомогою методу обмеження на градієнт зміщення (перші три наближення)

6.2.1. Нелінійна хвиля Фрідляндра. Аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень. Основні формули

Знову розглянемо основне нелінійне хвильове рівняння [126], для циліндричної радіальної хвилі:

$$(c_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r} \right) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - u_{r,tt} = 0 \quad (6.9)$$

З хвильового рівняння при застосуванні методу обмеження на градієнт зміщення (метод 2), як вказано в п. 3.3.3 та в п. 3.3.4, були отримані розв'язки з урахуванням перших двох та перших трьох наближень [47, 51].

Розв'язок з урахуванням першого і другого наближення такий:

$$u_r^{(1+2)}(r,t) \approx u(\sigma) - (1/2) a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[u'(\sigma) \right]^2, \sigma = a(r - c_L t) \quad (6.10)$$

Розв'язок з урахуванням першого, другого і третього наближень такий:

$$u_r^{(1+2+3)}(r,t) \approx u(\sigma) - (1/2) a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[u'(\sigma) \right]^2 - (1/8) a^3 c_L \left(\tilde{N}_1 \right)^2 t \left[u'(\sigma) \right]^3 \quad (6.11)$$

Хвиля Фрідляндра має вигляд

$$F(\sigma) = u_0 e^{-\sigma/x_{att}} \left(1 - \sigma/x_{att} \right) \quad (6.12)$$

де u_0 - початкова амплітуда хвилі, $\sigma = a(r - c_L t)$ - фаза хвилі і постійна x_{att} - характеризує затухання профіля (крутизну).

Похідна для функції Фрідляндра має вигляд:

$$\begin{aligned} F' \left(a(r - c_L t) \right) &= u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(\frac{-a}{x_{att}} \right) \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att} \right) + u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(\frac{-a}{x_{att}} \right) = \\ &= u_0 \frac{-a}{x_{att}} e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Лінійний розв'язок рівняння (6.9), як вказано в п. 3.3.3, з початковим профілем хвилі Фрідляндра набуває вигляду

$$u_r^{(1)}(r,t) = u_0 e^{-a(r-c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right) \quad (6.14)$$

Розв'язок (6.10) з урахуванням формули для похідної для перших двох наближень наступний:

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2)}(r,t) \approx & u_0 e^{-a(r-c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right) - \\ & - (1/2) c_L \tilde{N}_1 t a^2 \frac{(u_0)^2}{x_{att}^2} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^2 \left[e^{-2a(r-c_L t)/x_{att}} \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

а у випадку (6.11), для перших трьох наближень

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r,t) \approx & u_0 e^{-a(r-c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right) - \\ & - (1/2) c_L \tilde{N}_1 t a^2 \frac{(u_0)^2}{x_{att}^2} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^2 \left[e^{-2a(r-c_L t)/x_{att}} \right] + \\ & + (1/8) c_L (\tilde{N}_1)^2 t a^3 \frac{(u_0)^3}{x_{att}^3} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^3 \left[e^{-3a(r-c_L t)/x_{att}} \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

З вигляду розв'язків (6.15) і (6.16) випливає дві особливості: вони описують спотворення початкового профілю циліндричної радіальної хвилі через пряму залежність нелінійної складової від часу та поширення початкового профілю через наявність в розвязках двох або трьох нелінійних складових.

При побудові графіка хвилі, яка поширюється від циліндричної порожнини радіуса r_o , врахований той факт, що повинна виконуватися умова $r > r_o$.

6.2.2. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо два металеві композитні матеріали (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам) з механічними параметрами (система CI) [1,20,39,40]:
Матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) –

$$\rho = 0,594 \cdot 10^4; \quad \lambda = 5,59 \cdot 10^{10}; \quad \mu = 3,26 \cdot 10^{10};$$

$$A = -0,658 \cdot 10^{11}; \quad B = -2,18 \cdot 10^{11}; \quad C = -4,35 \cdot 10^{11}; \quad c_L = 4,515 \cdot 10^3; \quad \alpha = -16,072.$$

Матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6) –

$$\rho = 0,918 \cdot 10^4; \lambda = 11,6 \cdot 10^{10}; \mu = 0,721 \cdot 10^{10};$$

$$A = -1,33 \cdot 10^{11}; B = -4,45 \cdot 10^{11}; C = -9,5 \cdot 10^{11}; c_L = 3,769 \cdot 10^3; \alpha = -34,08.$$

де ρ -густина матеріалу, λ, μ - пружні постійні Ляме (постійні другого порядку), A, B, C - пружні постійні Мурнагана (постійні третього порядку), c_L - швидкість хвилі і $\tilde{N}_1 = \left\lceil N_1 / (\lambda + 2\mu) \right\rceil$.

Для поодинокої хвилі Фрідляндера (яка є функцією скінченної ваги) приймемо, за означенням, припущення, що довжиною підошви хвилі є інтервал, для якого площа під графіком поза цим інтервалом є малою.

Функція Фрідляндера $F(a(r - c_L t)) = u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} (1 - a(r - c_L t)/x_{att})$ визначається наступними параметрами: параметр a визначає довжину підошви хвилі, для даних матеріалів початкова підошва вибрана однаковою $L = 0,016$ ($a = 70$), постійний параметр x_{att} - характеризує затухання профіля (крутизну) і однаково вибраний для всіх матеріалів ($x_{att} = 3,52$).

Початкова амплітуда вибиралася для кожного матеріалу і для початкової довжини (підошви) хвилі в одному варіанті $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$.

Слід зазначити, що профіль Макдональда, який досліджувався в передньому розділі є природнім для пружної циліндричної хвилі і вивчався раніше в роботах [42, 47, 51] тоді як профіль Фрідляндера характерний для хвиль, що виникають при вибуках, і застосовувався до аналізу плоскої пружної хвилі в роботі [79]. Профіль Фрідляндера вважається одним з найпростіших і часто використовується в інтерпретації експериментів [93, 105].

6.2.3. Числовий аналіз хвилі Фрідляндера (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення)

6.2.3.1 Перший варіант початкового профіля для матеріалу M51.

При побудові графіка хвилі, виконується умова $r \geq r_o$, де $r = 0,001$ м. Дане значення радіуса вибиралось як найбільш відповідне для теоретичного обчис-

лення.

За формулами (6.14) (1-ше наближення), (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) побудовані двовимірні графіки «зміщення u , – пройдена хвилею відстань r ». Всього розглянуто 2 набори (2 матеріали), для одного варіанту довжини підошви хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з двома профілями. У кожному наборі перший графік показує вигляд початкового профіля, а інші графіки, об'єднані у три групи. Кожна група складається з двох графіків: перший графік порівнює перше наближення з другим, а другий графік порівнює розв'язки, що відповідають першому та другому наближенню та розв'язки, що включають перше, друге і третє наближення. Графіки відрізняються формою профілю хвилі для різних відстаней – від початкового положення хвилі до положення на відстані десяти повторень довжини підошви хвилі, де вплив нелінійності вже проявляється суттєво і спотворення поодинокого профілю цілком спостерігається візуально.

Далі чисельно аналізуються формули (6.14), (6.15) та (6.16) для хвилі в довільний момент часу, отримані методом 2, що основується на перетворенні рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Графіки відрізняються таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно і спостерігалася відмінність впливу двох розв'язків на початковий профіль хвилі. На останньому графіку зображено тривимірний варіант для розв'язку (6.16) з найбільш розвиненою еволюцією.

На рис. 6.11-6.14 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу М51 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 3,52$ та значення підошви хвилі $a = 70$.

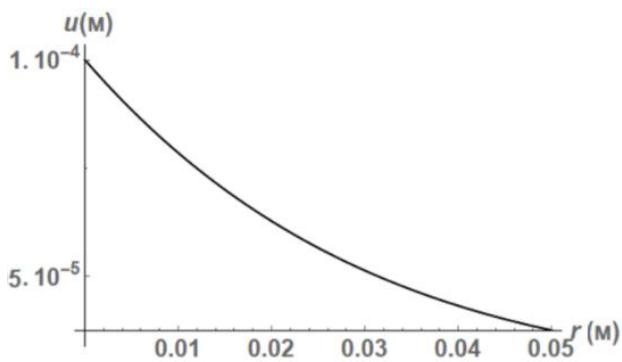


Рис. 6.11. Початковий профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає параметрам
 $(x_{att} = 3.52)$.

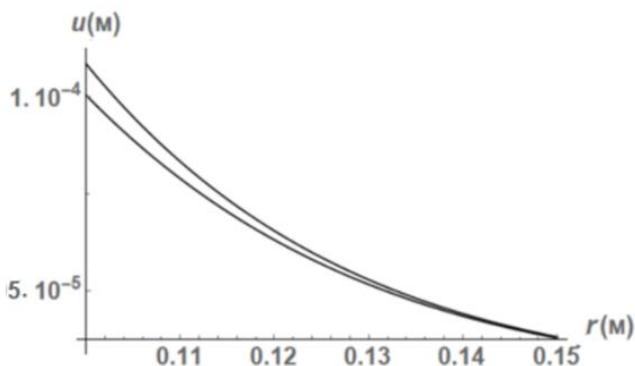


Рис. 6.12а. Профіль хвилі Фрідлянdera, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

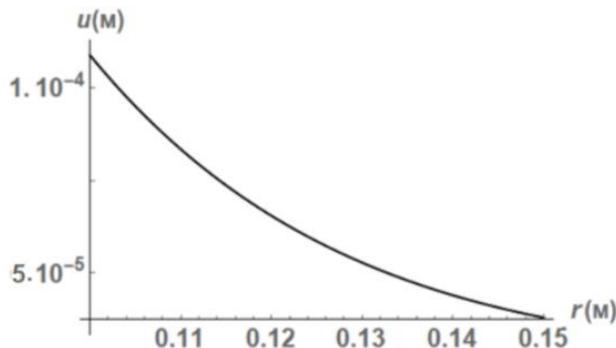


Рис. 6.12б. Профіль хвилі Фрідлянdera, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

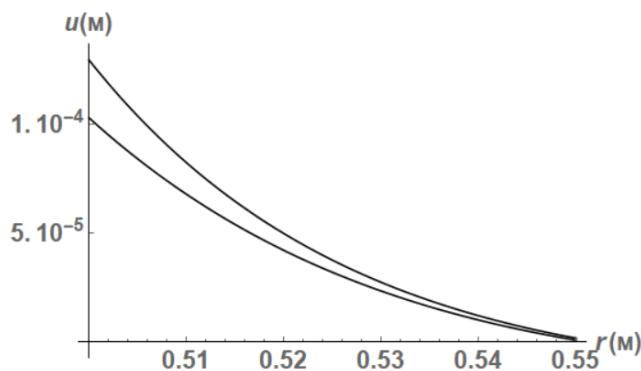


Рис. 6.13а. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

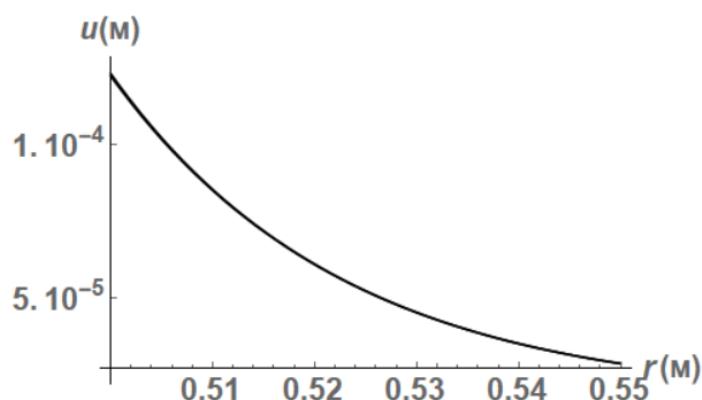


Рис. 6.13б. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

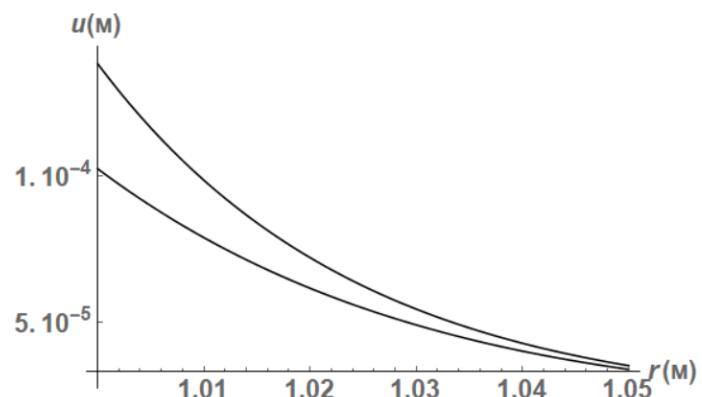


Рис. 6.14а. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15)(1-ше + 2-ге наближення) а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

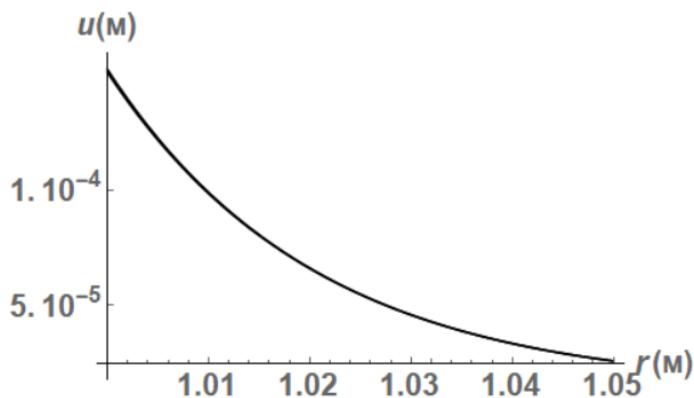


Рис. 6.14б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.15 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 3,52$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

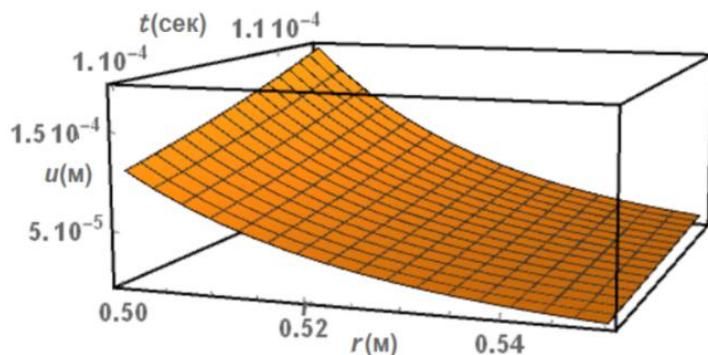


Рис. 6.15. Тривимірний варіант хвилі Фрідляндерса, що відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 6.11 демонструє початковий профіль хвилі Макдональда, що відповідає параметру ($x_{att} = 3.52$). Вже з отриманого рис. 6.12а випливає, що вплив нелінійності другого наближення по відношенню до початкового профіля значний, що не спостерігається про відмінність першого, другого та першого, другого та третього відповідних наближень рис. 6.12б. На даному етапі, спостерігається якісна відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.14) (1-ше наближення) та хвилею що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) і незначна кількісна відмінність

між сценаріями поведінки хвиль для розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Хвиля, що відповідає першим двом наближенням змінює довжину підошви і демонструє значне відхилення вгору від початкового профілю, при цьому максимальне значення амплітуди збільшується для обох розв'язків, а також зміни кривизни графіка (він стає менш опуклим).

Починаючи з рис. 6.13(а,б) та рис. 6.14(а,б) відбувається значна зміна початкового профілю розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) відносно початкового профілю, і незначне відхилення одне від одного профілів, що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення). Тобто, при поширенні хвилі на суттєву відстань (рис. 6.13б та рис. 6.14б) обидва розв'язки дають майже одинакові результати. Отже вплив третього наближення при поширенні хвилі Фрідляндра на достатньо великі відстанні є менш суттєвим ніж вплив другого наближення по відношенню до хвилі з двома наближеннями.

6.2.3.2 Перший варіант початкового профіля для матеріалу M52.

Далі розглянемо наступну групу графіків, де на рис. 6.16-6.19 наведено варіант, що відповідає матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -34,08$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 3,52$ та значення підошви хвилі $a = 70$.

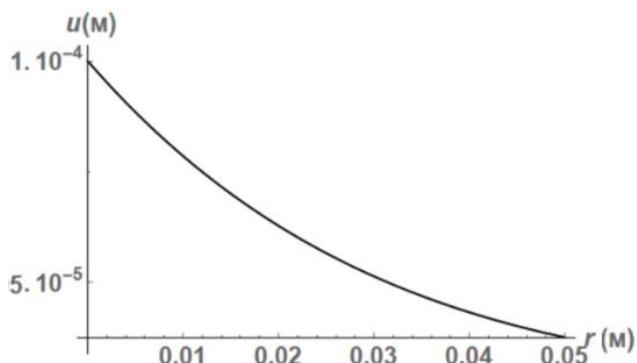


Рис. 6.16. Початковий профіль хвилі Фрідляндра, що відповідає параметрам ($x_{att} = 3,52$).

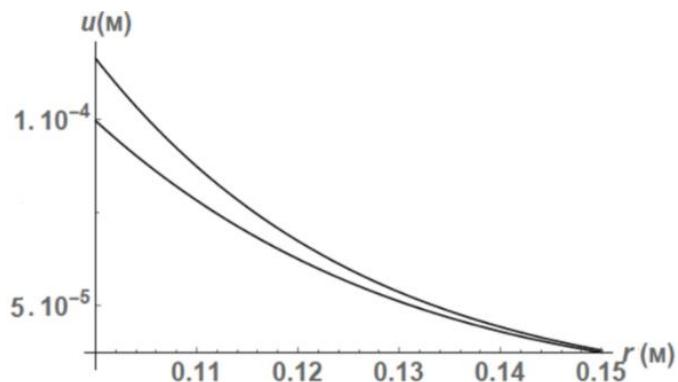


Рис. 6.17а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

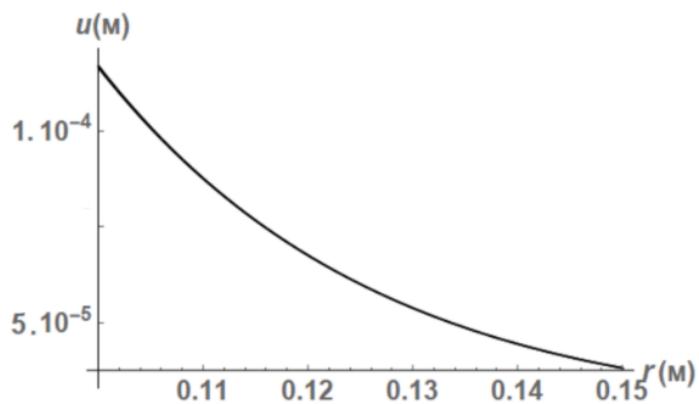


Рис. 6.17б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

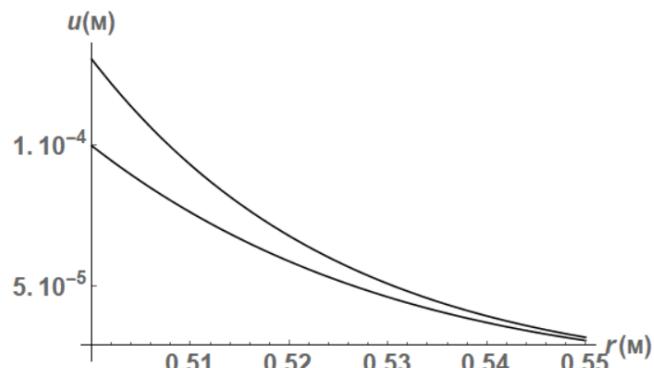


Рис. 6.18а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

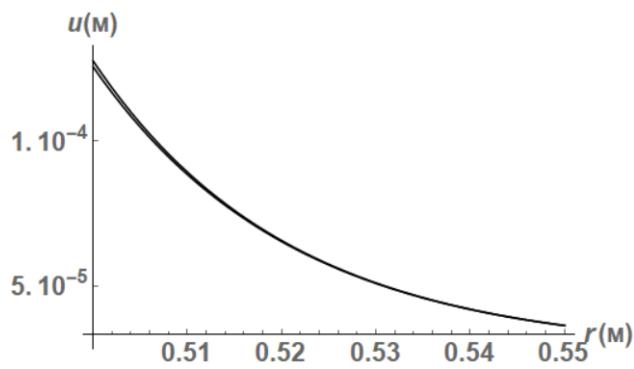


Рис. 6.18б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

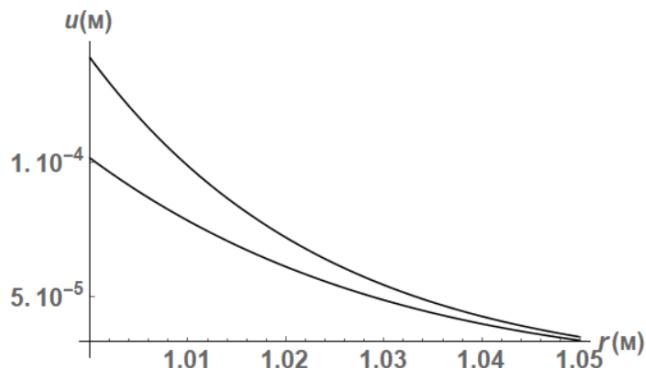


Рис. 6.19а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

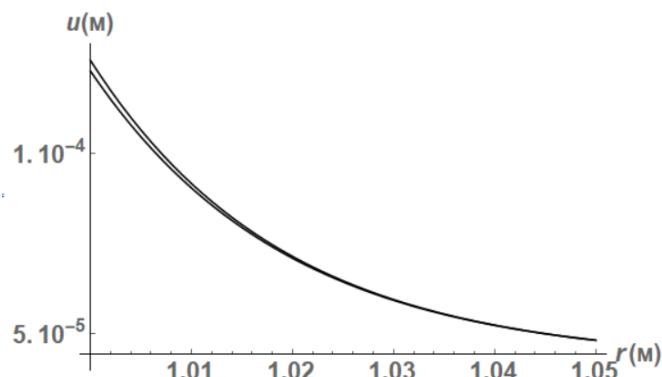


Рис. 6.19б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.20 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманому методом 2, що відповідає матеріалу М51 і

таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 3,52$.

Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

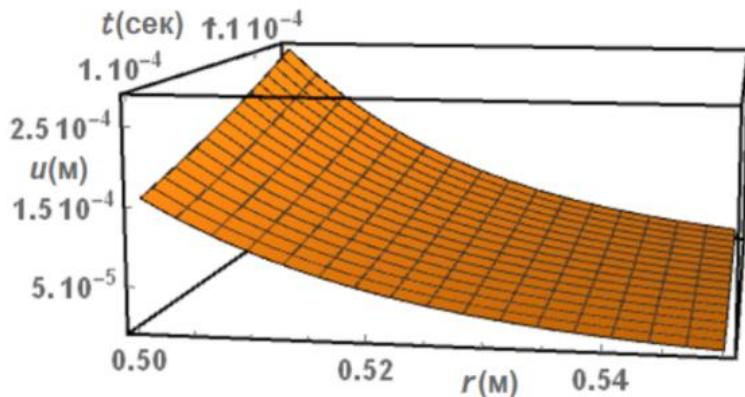


Рис. 6.20 Тривимірний варіант хвилі Фрідляндера, що відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 6.7.1 аналогічний попередньому випадку. З отриманого рис. 6.17а випливає, що вплив другого наближення відносно початкового профіля значний, але відсутні відмінності між розв'язками (6.14) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), що слідує з рис. 6.17б спостерігається. На даному етапі, присутня тільки відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.14) (1-ше наближення) та хвилею що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення). Хвilia з двома наближеннями не змінює довжину підошви і лише демонструє значне відхилення вгору від початкового профілю, при цьому максимальне значення амплітуди для розв'язку (6.15) збільшується.

Починаючи з графіків рис. 6.18а та рис. 6.19а спостерігається значна зміна початкового профілю розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) відносно першого наближення розв'язку (6.14) за аналогічним сценарієм попереднього випадку. Також вже присутні незначні зміни відхилення одне від одного профілів, що відповідають розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) рис. 6.18б та рис. 6.19б. В даному випадку профіль, що відповідає першим трьом наближенням відхиляється вгору від профілю, що відповідає першим двом

наближенням, і значення максимальної амплітуди збільшується. Тобто при поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 6.18б та рис. 6.19б обидва розв'язки для даного матеріалу дають якісно відмінні, але кількісно незначні зміни.

Отже, вплив третього наближення при поширенні поодинокої циліндричної радіальної хвилі з початковим профілем у вигляді функції Фрідляндра на достатньо великі відстанні аналогічний випадку для циліндричної радіальної хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда.

Також, з отриманих результатів слідує, що для першого та другого варіанту параметрів матеріалу, третє наближення впливає з різною швидкістю (тобто дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації).

Для цилідричних радіальних хвиль з початковим профілем у вигляді функції Макдональда, і Фрідляндра спотворення несиметричного початкового профіля відбувається несиметричним шляхом, аналогічно як і для поздожних плоских поодиноких хвиль. Спільним є те, що вплив третьої гармоніки є кількісно незначний і спостерігається тільки для достатньо великих відстанях, а збільшення амплітуди властиве для обох випадків.

В роботах автора [42, 47, 51] було показано, що схожі за початковим профілем, хвилі Макдональда і Фрідляндра демонструють схожу поведінку при спотворенні цих профілів. Тому для даного випадку вибиралась відповідна конфігурація параметрів хвилі Фрідляндра, яка б показувала схожість з хвилею Макдональда.

Далі у цьому розділі були взяті такі початкові параметри хвилі, які вирізняють профіль хвилі Фрідляндра від попереднього випадку і отримана хвilia не є вже схожою до хвилі Макдональда. Це зроблено для того, щоб показати, що при різних конфігураціях параметрів початкового профіля хвилі змінюється сам початковий профіль, але еволюція яка викликана нелінійністю має одинаковий характер.

6.2.3.3 Другий варіант початкового профіля для матеріалу M51.

Далі за методом 2 розглядається задача про хвилю Фрідляндера $F(a(r - c_L t)) = u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} (1 - a(r - c_L t)/x_{att})$, що має інший профіль в порівнянні до попереднього випадку і визначається наступними параметрами (система CI): параметр a визначає довжину підошви, $L = 0,016$ ($a = 70$), x_{att} характеризує затухання профіля (крутизну) $x_{att} = 1,02$ та початкова амплітуда $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, всі ці параметри вибиралися однаковими для обох типів матеріалу.

Розв'язок для першого наближення хвилі Фрідляндеріа відповідних параметрів приймає аналогічний вигляд до попереднього випадку (6.14). Розв'язок для першого і другого наближень має вигляд (6.15), і розв'язок для першого, другого та третього наближення має вигляд (6.16).

Виберемо аналогічні два металеві композитні матеріали які застосовувались для дослідження хвилі Фрідляндеріа з параметрами ($x_{att} = 3,52$) (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам): матеріал 51 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,8) і матеріал 52 (об'ємний вміст матриці дорівнює 0,6).

На всіх рис. 6.21-6.24 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 1,02$ та значення параметру $a = 70$, який визначає розмір підошви хвилі.

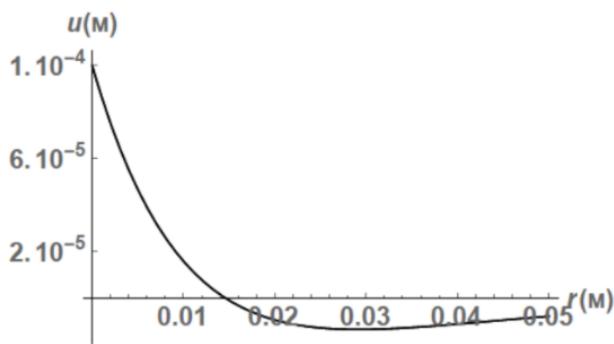


Рис. 6.21. Початковий профіль хвилі Фрідляндеріа, що відповідає параметрам ($x_{att} = 1.02$).

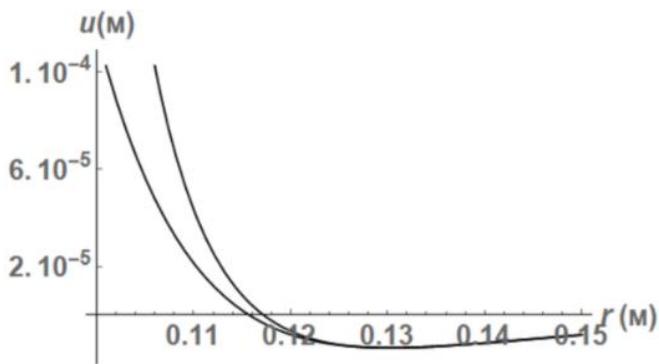


Рис. 6.22а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

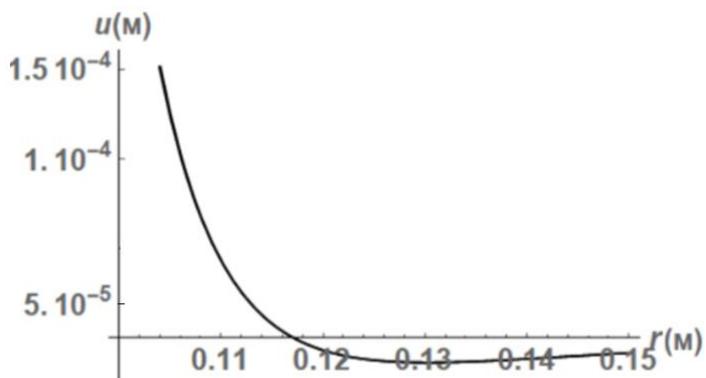


Рис. 6.22б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

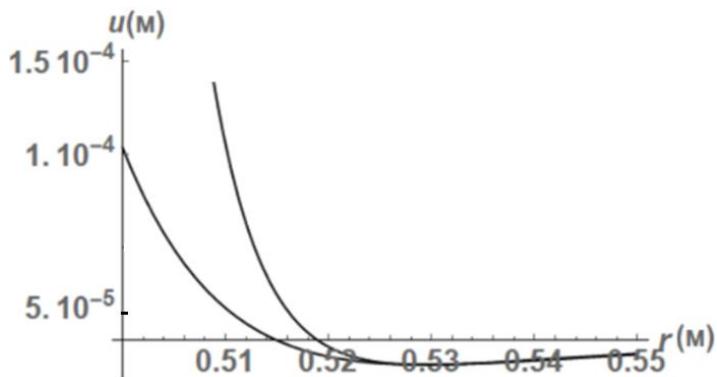


Рис. 6.23а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

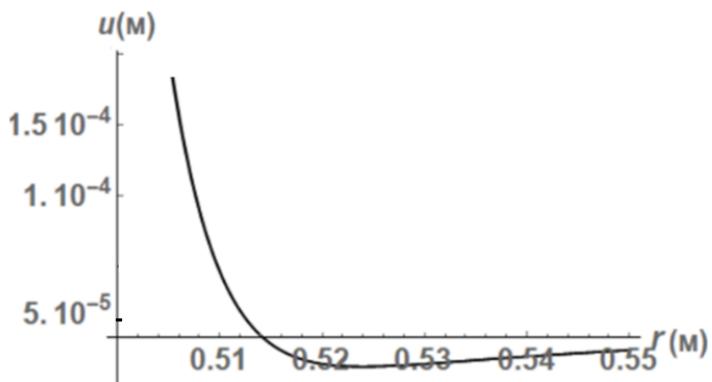


Рис. 6.23б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

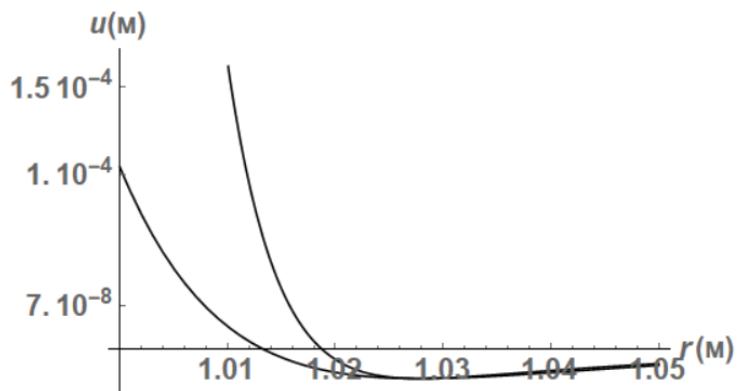


Рис. 6.24а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

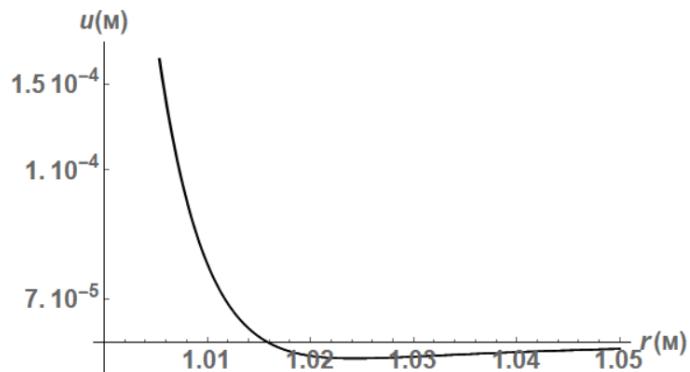


Рис. 6.24б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.25 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), який отриманий за методом 2, що відповідає мате-

ріалу M51 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 1,02$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

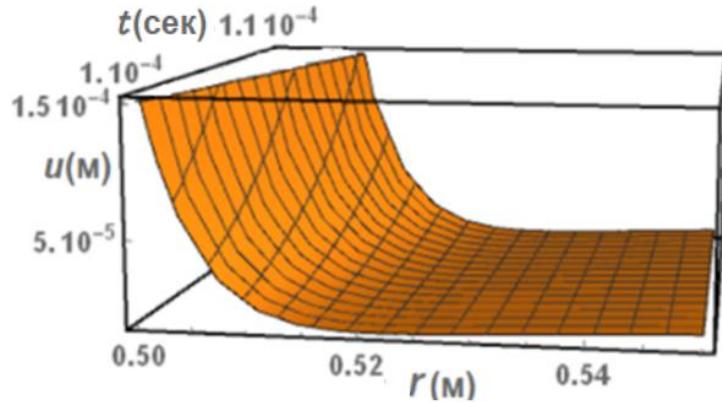


Рис.6.25. Тривимірний варіант хвилі Фрідляндер, що відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Відмінність в отриманих графіках, від отриманих у попередньому попередньому випадку полягає в тому, що хвиля існує у відємній частині амплітуди (відбувається стиск, а не розтяг). В частині хвилі, яка існує для від'ємної амплітуди, амплітуда асимптотично прямує в нескінченість в додатньому напрямку відємної частини графіка. Аналогічно, як для попередніх випадків, перший графік рис. 6.21 демонструє початковий профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає параметру ($x_{att} = 1.02$). Далі для вибраної відстані, рис. 6.22а демонструє, що вплив другого наближення по відношенню до початкового профіля значний, а рис. 6.22б демонструє відсутність відмінностей між першим, другим та першим, другим і третім наближеннями. На даному етапі спостерігається велика відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.14) (1-ше наближення) та хвилею, що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), але відмінності між сценаріями поведінки хвиль для розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) кількісно незначна. Хвиля, що відповідає двом першим наближенням змінює довжину підошви і демонструє

значне відхилення верхньої частини графіка вгору. Також графік у від'ємній частині амплітуди асимптомотично зближується з горизонтальною віссю.

Починаючи з рис. 6.23(а,б) та рис. 6.24(а,б) спостерігається значна зміна початкового профілю розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) відносно першого наближення розв'язку (6.14). Відхилення одне від одного профілів, що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) є незначним. Тобто при поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 6.23(а,б) та рис. 6.24(а,б) обидва розв'язки дають майже близькі результати. Таким чином, вплив третього наближення при поширенні хвилі Фрідляндра на достатньо великі відстанні якісно суттєвий але кількісно незначний щодо хвилі з двома наближеннями. Тобто, вплив нелінійності для хвилі відповідних параметрів аналогічний до попереднього випадку.

6.2.3.4 Другий варіант початкового профіля для матеріалу M52.

Далі розглянемо наступну групу графіків, де на всіх рис. 6.26-6.29 наведено варіант, що відповідає матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -34,08$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 1,02$ та значення підошви хвилі $a = 70$.

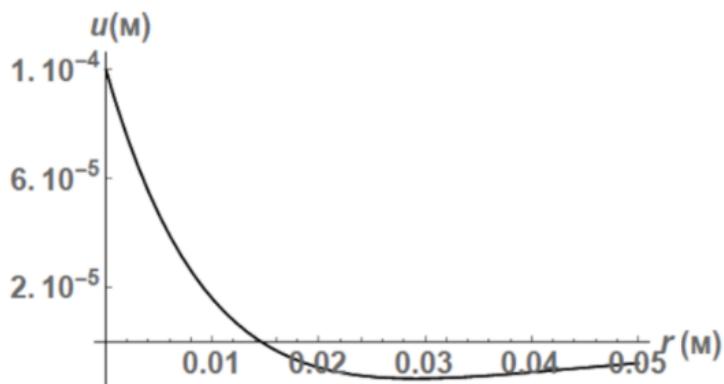


Рис. 6.26. Початковий профіль хвилі Фрідляндра, що відповідає параметрам ($x_{att} = 1.02$).

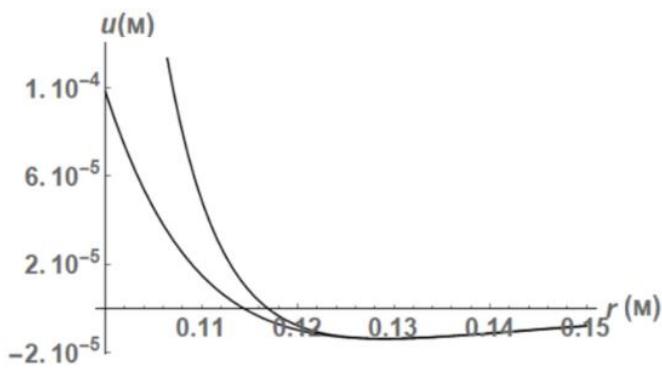


Рис. 6.27а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

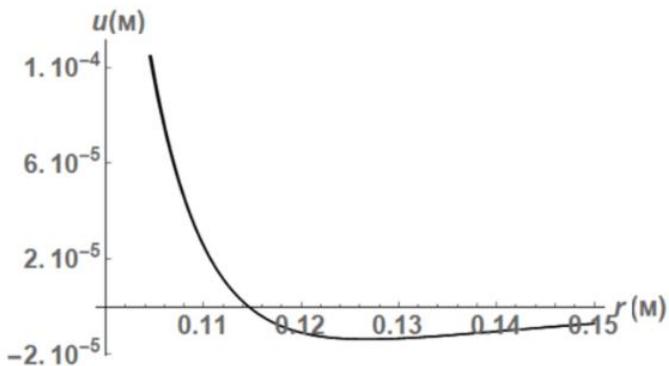


Рис. 6.27б. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 10 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15)(1-ше + 2-ге наближення)

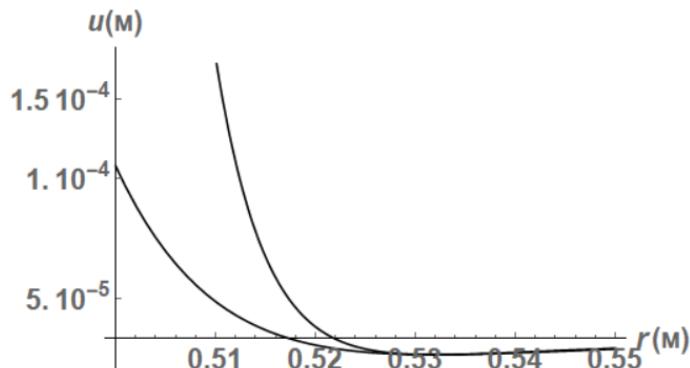


Рис. 6.28а. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

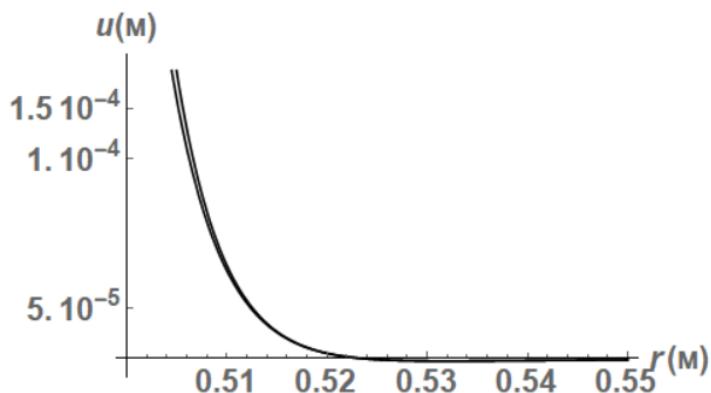


Рис. 6.28б. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

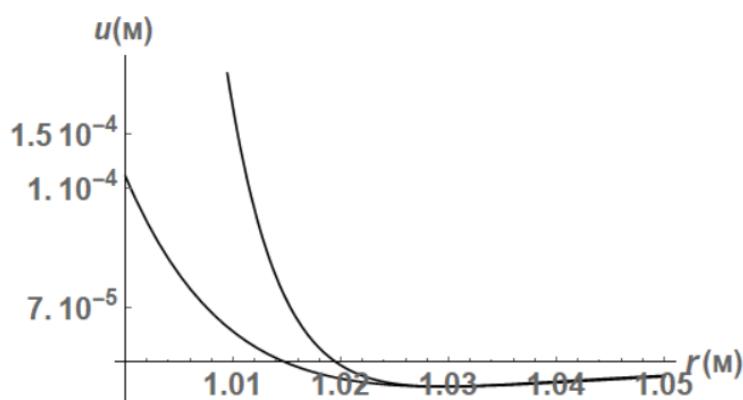


Рис. 6.29а. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.14) (1-ше наближення)

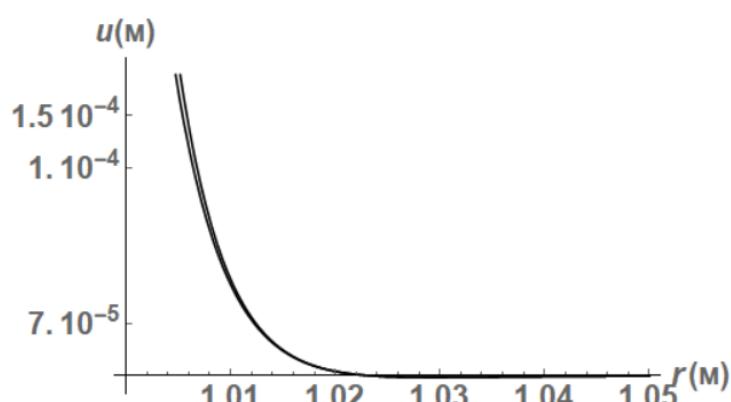


Рис. 6.29б. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 65 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.30 наведено тривимірний графік для розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) отриманий за методом 2, що відповідає матеріалу M51 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -16,072$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 1,02$. Отриманий графік добре демонструє зміну початкового профіля

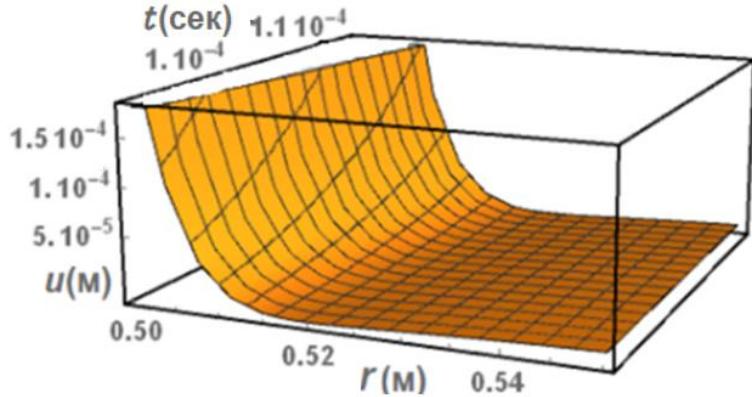


Рис. 6.30. Тривимірний варіант хвилі Фрідляндер, що відповідає розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення).

Перший графік рис. 6.26 аналогічний графіку попереднього випадку. З отриманого рис. 6.27а випливає, що вплив другого наближення значний, але для даної відстані спостерігається кількісно незначна відмінність між розв'язками (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), що слідує з рис. 6.27б. На даному етапі, спостерігається відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.14) (1-ше наближення) та хвилею що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення). Хвиля, що вілповідає першим двом наближенням змінює довжину підошви і демонструє значне відхилення вгору відносно початкового профіля для додатніх значень амплітуди. Для відємних значень амплітуди суттєвої зміни не відбувається. Максимальне значення амплітуди для розв'язку (6.15) збільшується.

Починаючи з графіків рис. 6.28а та рис. 6.29а спостерігається значна зміна початкового профілю (розв'язок (6.15) (1-ше + 2-ге наближення)) відносно першого наближення (розв'язок (6.14)) де графік відхиляється для додатних значень амплітуди відносно початкового профіля, а для відємних

значень обидва профіля наближаються асимптотично до горизонтальної осі. Також присутні незначні зміни відхилення одне від одного профілів, що відповідає розв'язку (6.15) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.16) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) рис. 6.28б та рис. 6.29б. В даному випадку профіль, що відповідає першим трьом наближенням відхиляється вгору від профілю, що відповідає першим двом наближенням для додатніх значень амплітуди і обидва профілі для від'ємних значень амплітуди аналогічним чином прижимаються до осі в асимптотичному напрямку, також значення максимальної амплітуди збільшується. Тобто при поширенні хвилі на суттєву відстань рис. 6.28б та рис. 6.29б обидва розв'язки для даного матеріалу та для даних параметрів дають якісно відмінні але кількісно близькі значення.

Вплив третього наближення при поширенні хвилі Фрідляндра для параметру $x_{att} = 1,02$ на достатньо великі відстанні аналогічний до випалку хвилі Фрідляндра для параметру $x_{att} = 3,52$, для додатніх значень амплітуди. Відмінність між вибраними типами хвиль полягає в тому, що хвиля Фрідляндра для параметру $x_{att} = 1,02$ враховує наявність значень як і для від'ємних так і для додатніх амплітуд тоді як хвиля для параметру $x_{att} = 3,52$ враховує наявність лише додатніх значень амплітуди.

Також, з отриманих результатів слідує, що для першого та другого варіантів параметрів матеріалу, третє наближення впливає по різному (тобто, дисторсія початкового профіля хвилі суттєвіша для другої конфігурації).

Основний висновок. Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу цилідричної радіальної хвилі Фрідляндра (як приклад хвилі з несиметричним профілем) засвідчують, що з гідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі, нелінійний хвильовий ефект полягає у зміщенні графіка вгору відносно початкового профіля для додатніх значень амплітуд і зміні підошви профіля.

Основний висновок з результатів розділу. З отриманих сценаріїв еволюції цилідричних хвиль з початковим профілем у вигляді функцій Макдональда, і Фрідляндра випливає, що спотворення несиметричного

початкового профіля відбувається несиметричним шляхом, аналогічно як і для поздовжніх плоских поодиноких хвиль [61]. Спільним є те, що вплив третього наближення є кількісно незначним і спостерігається тільки для достатньо великих відстанях, а збільшення амплітуди та зміна підошви в процесі еволюції характерне для обох випадків.

РОЗДІЛ 7

ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЕВОЛЮЦІЇ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ КРУТИЛЬНОЇ ХВИЛІ

7.1 Аналіз нелінійної пружної циліндричної крутитльної хвилі методом обмеження на градієнт зміщення

7.1.1 Нелінійне хвильове рівняння, яке описує поширення пружної циліндричної крутитльної хвилі

В цьому розділі, на відміну від попередніх розділів, де аналізуються повздовжні та циліндричні хвилі, розглядається крутитльна хвилля. Задача про поширення крутитльних хвиль вздовж осі симетрії кругового циліндра в лінійній постановці є класичною в теорії пружності і вона описана в розділі 1.

Розглянемо ще раз нелінійне рівняння (1.105), яке було отримане у пункті 1.7.3.

$$\begin{aligned}
 \mu \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r)u_{g,1r} - (1/r^2)u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = & \quad (7.1) \\
 = \boxed{Lu_g (1/2)B \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r}u_{g,r}u_g + \frac{2}{r^2}u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]} \\
 - (1/6)(A - 9B) \left[u_{g,r}(u_{g,z})^2 + \frac{2}{r}u_g(u_{g,z})^2 \right] + \\
 + (1/3)A \left[\begin{aligned} & ru_{g,r}u_{g,z}u_{g,rz} - (1/2)r(u_{g,z})^2u_{g,rr} + (1/2)r(u_{g,r})^2u_{g,zz} + \\ & + (3/2)u_gu_{g,r}u_{g,zz} + 2u_gu_{g,z}u_{g,rz} + (1/2r^2)(u_g)^2u_{g,z} + (1/2r)(u_g)^2u_{g,zz} \end{aligned} \right] + \\
 + B \left\{ \begin{aligned} & r(u_{g,z})^2u_{g,zz} + 2r(u_{g,r})^2u_{g,rr} + r^2(u_{g,r})^2u_{g,rz} + (1/2)r(u_{g,r})^2u_{g,rr} + 4(1/r^2)u_g(u_{g,r})^2 + \\ & + (3/2)(u_{g,r})^3 + (5/2)r^2(u_g)^2u_{g,r} + (5/2)u_gu_{g,z}u_{g,rz} + 2u_gu_{g,r}u_{g,rr} + (1/2r)u_g^2u_{g,rr} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Права нелінійна частина рівняння (7.1) містить багато нелінійних доданків. Можна застосувати до аналізу наближених розв'язків рівняння (7.1) методи повільно змінних амплітуд, послідовних наближень, обмеження на градієнт зміщення [88, 96, 98, 99]. Подібна ситуація виникала і раніше при

вивчені плоских і циліндричних радіальних хвиль [43, 72, 88, 92, 96, 98, 99]. Там при застосуванні двох різних підходів до знаходження наближених розв'язків нелінійного хвильового рівняння було виявлено, що багатьма нелінійними доданками можна знехтувати і враховувати лише доданок, подібний до лінійної частини хвильового рівняння. Тому присутність в рівнянні багатьох нелінійних доданків у ряді випадків не створює великих проблем в знаходженні наближеного розв'язку.

У рівнянні (7.1) є вираз у правій частині, який поміщений у рамку. Він містить лінійний оператор L . Якщо знехтувати всіма іншими нелінійними доданками і врахувати лише вказаний вище вираз, то у цьому випадку рівняння (7.1) спрощується до вигляду лінійного хвильового рівняння з нелінійно змінною швидкістю гармонічної за часом хвилі.

$$\left\{ \left[\mu - (1/2)B \right] \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - \left(1/r^2 \right) u_g + u_{g,zz} \right) - \rho u_{g,tt} = 0 \quad (7.2)$$

або

$$\left\{ (v_T)^2 \left[1 - (1/2)B/\mu \right] \left[(\tilde{u}_{g,r})^2 + \frac{1}{r} \tilde{u}_{g,r} \tilde{u} + \frac{2}{r^2} \tilde{u}_g^2 + (\tilde{u}_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times \left(\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} \left(-\left(1/r^2 \right) + \omega^2 \right) \tilde{u}_g + \tilde{u}_{g,zz} \right) = 0. \quad (7.3)$$

Зважаючи на попередній досвід наближеного дослідження нелінійних хвильових рівнянь, які виникають при аналізі плоских та циліндричних хвиль, можна стверджувати, що ефективними в аналізі є два наближені методи. Перший метод далі (метод 1) є методом послідовних наближень і другий метод (метод 2) є методом обмеження на градієнт зміщення.

Метод 1 стосовно плоских і циліндричних хвиль зміщення в нелінійно пружних матеріалах описаний докладно в книзі [96] та ряді статей, з яких вкажемо деякі [43, 124, 128, 129, 132]. Метод 2 теж описаний в публікаціях [21, 141, 146, 152-155] та ряді статей [52, 54, 55, 62].

Обидва методи, докладно описані в розділі 3 і можуть бути застосовані в аналізі нового нелінійного хвильового рівняння, яке описує поширення крутальної хвилі.

7.1.2 Деякі факти з класичної задачі лінійної теорії пружності про поширення цилідричних крутильних хвиль

В задачі про поширення пружних гармонічних хвиль приймається, що такі хвилі збуджуються гармонічним у часі імпульсом. Можна вважати, що гармонічна крутильна хвilia в напрямку осі симетрії циліндра Oz збуджується імпульсом $u_g(t) = u_g^o e^{i\omega t}$, прикладеним до поперечного перерізу циліндра (круга) $z=0$. Тоді в циліндрі виникає крутильна хвilia, яка поширюється вздовж його осі.

Для опису крутальної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу використовуються цилідричні координати (r, ϑ, z) і додаткові умови щодо осьової симетрії деформівного стану та відсутності радіального і осьового зміщень [63, 69]

$$u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0. \quad (7.4)$$

Тоді система з трьох рівнянь руху $\sigma_{ki,k} = \rho u_{i,tt}$ спрощується за умови (7.4) у випадку крутильних хвиль у циліндрі до одного рівняння щодо зміщення $u_\vartheta(r, z, t)$

$$\sigma_{r\vartheta,r} + \sigma_{z\vartheta,z} = \rho u_{\vartheta,tt} \rightarrow u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} - (1/r^2)u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} - (1/v_T^2)u_{\vartheta,tt} = 0, \quad (7.5)$$

де $v_T = \sqrt{\mu/\rho}$ є фазовою швидкістю зсувної чи плоскої поперечної хвилі в лінійно пружному матеріалі, μ - модулем зсуву і ρ - густину цього матеріалу.

Якщо припустити, що колове зміщення u_ϑ є гармонічним у часі і просторі (тобто, є хвилею) тоді

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.6)$$

Такий розв'язок вважають гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі, а за координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z . При цьому циліндр піддається деформації крученння і тому хвилю називають крутильною.

Як випливає з представлення хвилі (7.6), амплітуда хвилі змінюється зі зміною радіуса. Ця амплітуда визначається з рівняння, отриманого підстановкою представлення (7.6) в рівняння (7.5)

$$u_{g,rr}^o + \left(1/r\right) u_{g,r}^o + \left[k_z^2 - k_T^2 - \left(1/r^2\right) \right] u_g^o = 0. \quad (7.7)$$

Розв'язок рівняння (7.7) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого порядку)

$$\tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^o J_1(\beta r) \quad \beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}. \quad (7.8)$$

Отже, розв'язок у вигляді крутильної хвилі є таким

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.9)$$

Амплітуда хвилі описується функцією Бесселя $J_1(\beta r)$, яка має такі особливості: вона є спадною і $J_1(0) = 0$. Тому зміщення у центрі циліндра є нульовими, що відповідає фізичному сенсу задачі.

Хвильове число k_z і відповідна фазова швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = 0, \sigma_{rg}(r^o, z, t) = 0, \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (7.10)$$

Якщо врахувати в умові (7.10) спрощення в формулах для лінійних тензорів деформацій і напружень

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e, \sigma_{rg} = 2\mu\varepsilon_{rg}, \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz},$$

$$\varepsilon_{rr} = 0, \varepsilon_{r\vartheta} = (1/2) [u_{\vartheta,r} - (1/r) u_\vartheta], \varepsilon_{rz} = 0, e = 0, \quad (7.11)$$

то тоді перша та третя умови з (7.10) задовольняються тотожно і лише друга умова дає рівняння

$$\varepsilon_{r\vartheta} = (1/2) [u_{\vartheta,r} - (1/r) u_\vartheta]_{r=r^o} = 0 \rightarrow \beta r^o J_0(\beta r^o) = 2 J_1(\beta r^o), \quad (7.12)$$

з якого знаходять хвильове число k_z .

Примітка 1. Відсутність радіальних і вертикальних дотичних напружень у довільній точці циліндра створило сприятливу ситуацію для граничних умов відсутності напружень на бічній поверхні циліндра.

Рівняння (7.12) має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o$ ($k = 1, 2, \dots$).

Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}. \quad (7.13)$$

Примітка 2. Розв'язок рівняння (7.12) залежить від вибору радіуса циліндра і хвильового числа класичної зсувної хвилі (від вибору матеріалу циліндра). Зважаючи на графік функції $J_1(\beta r)$, яка має майже періодичну систему нулів, завжди можна вибрати радіус і матеріал циліндра таким чином, що на проміжку $[0, r^o]$ (тобто, всередині циліндра) функція матиме нулі. З цього випливають можливі особливості амплітуди крутильної хвилі. По-перше, в околі кожного нуля $r = r^*$ хвиля не спостерігається, оскільки має дуже малу амплітуду. Тобто, всередині циліндра можуть існувати тонкі циліндричні шари $-\delta \leq r^* \leq \delta$, в яких хвиля не збуджується. При цьому можливий варіант $r^o = r^*$, коли хвиля відсутня на поверхні циліндра. По-друге, оскільки графік функції $J_1(\beta r)$ спадний, то максимальна амплітуда хвилі може спостерігатися близько осі циліндра на проміжку від осі циліндра до першого нуля $[r = 0, r = r^*]$. На поверхні циліндра амплітуда у цьому випадку не є максима-

льною.

Примітка 3. Крутильним хвилям зміщення $u_g(r, z, t)$ (7.9) відповідають крутильні хвилі напруження

$$\sigma_{r,g}(r, z, t) = \tilde{u}^o [2J_1(\beta r) - \beta r J_0(\beta r)] e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.14)$$

7.1.3. Новий наближений метод побудови розв'язку нелінійного хвильового рівняння.

Подібному методу присвячено ряд публікацій [52, 54, 55, 57], де було вибрано найпростіший варіант рівняння (7.1)

$$\begin{aligned} \mu \left[Lu_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} = \\ = \boxed{Lu_g(1/2)B \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]} \text{ або} \\ (c_T)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times \quad (7.15) \\ \times \left[u_{g,rr} + (1/r) u_{g,r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right] - u_{g,tt} = 0 \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (7.15) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)} \text{ або } u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1 \left(r \sqrt{k_K^2 - k_z^2} \right) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.16)$$

Підставимо $u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}$ у другий множник першого доданку (7.15) тоді нелінійне хвильове рівняння (7.15) перетворюється на якби лінійне рівняння зі змінною швидкістю хвилі v_K

$$v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}$$

$$(c_T)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times \left[\tilde{u}_{g,rr} e^{i(k_z z - \omega t)} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} e^{i(k_z z - \omega t)} - (1/r^2) \tilde{u}_g e^{i(k_z z - \omega t)} - (k_z)^2 \tilde{u}_g e^{i(k_z z - \omega t)} \right] - \omega^2 \tilde{u}_g e^{i(k_z z - \omega t)} = 0.$$

Спростимо та отримаємо

$$(c_T)^2 \left\{ 1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times \left[\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} - (1/r^2) \tilde{u}_g - (k_z)^2 \tilde{u}_g \right] - \omega^2 \tilde{u}_g = 0.$$

Зробимо заміну

$$v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]} \quad (7.17)$$

$$(v_K)^2 \times \left[\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} - (1/r^2) \tilde{u}_g - (k_z)^2 \tilde{u}_g \right] - \omega^2 \tilde{u}_g = 0.$$

Якщо врахувати, що $k_K = (\omega/v_K)$ тоді

$$\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} - (1/r^2) \tilde{u}_g - (k_z)^2 \tilde{u}_g - (k_K)^2 \tilde{u}_g = 0 \text{ або}$$

$$\tilde{u}_{g,rr} + (1/r) \tilde{u}_{g,r} - \tilde{u}_g \left(1/r^2 - (k_z)^2 - (k_K)^2 \right) = 0. \quad (7.18)$$

Слід зазначити, що $k_K = \omega / \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]}$.

За новим методом, введемо обмеження на змінну швидкість (7.17), аналогічно тому, що було застосовано в методі обмеження на градієнт зміщення

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \quad (7.19)$$

Примітка 1. Зважаючи на порядок множника перед $M(u_g)$, обмеження (7.19) включає обмеження на пройдений хвилею шлях від поверхні циліндра

до центру циліндра, зміщення і два компоненти градієнта зміщення. Тому новий метод можна б назвати методом обмеження на змінну швидкості хвилі – зміна повинна бути малою порівняно з одиницею [70]. Наприклад, умова на квадрат градієнта є значно слабшою умови на сам градієнт (величина градієнта 10^{-2} і величина його квадрату 10^{-4}). Звичайно, величина зміщення в конструкційних пружних матеріалах 10^{-4} і, відповідно, його квадрату 10^{-8} . Отже, в реальних числових розрахунках кожен з чотирьох доданків в $M(u_g)$ повинен оцінюватися окремо.

Далі розкладемо корінь у виразі для швидкості в ряд зі збереженням перших двох членів

$$\sqrt{1 - (B/2\mu)M(u_g)} \approx 1 - (B/4\mu)M(u_g).$$

Тоді

$$v_K = c_T [1 - (B/4\mu)M(u_g)]. \quad (7.20)$$

Повернемось до рівняння і запишемо формально його розв'язок через функцію Бесселя, що випливає з (7.16)

$$\tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^o J_1\left(r\sqrt{k_K^2 - k_z^2}\right), \quad \tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r) \quad \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (7.21)$$

Зазначимо, що особливістю наближеного представлення хвилі (7.21) є те, що воно вже включає постійну швидкість хвилі $c_T = \frac{\omega}{k_T}, k_T = \frac{\omega}{c_T}$, яка відповідає лінійному наближенню, але швидкість хвилі залежить від невідомого зміщення, його похідних і пройденої хвилею відстані в перетині циліндра.

Представимо функцію Бесселя $J_1\left(\sqrt{k_K^2 - k_z^2}r\right)$ наближено формулою

$$J_1\left(r\sqrt{k_T^2 \left\{1 - \frac{B}{2\mu}M(u_g)\right\}^{-1} - k_z^2}\right) = J_1\left(r\sqrt{k_T^2 \frac{1}{(1 - (B/2\mu)M(u_g))} - k_z^2}\right) \approx$$

Розкладемо в ряд $\frac{1}{(1 - (B/2\mu)M(u_g))} \approx 1 + (B/2\mu)M(u_g)$

$$\begin{aligned}
&\approx J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 \left(1 + \left(\frac{B}{2\mu} \right) M(u_g) \right) - k_z^2} \right) = J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \sqrt{1 + \left(\frac{B}{2\mu} \frac{k_T^2}{k_T^2 - k_z^2} M(u_g) \right)} \right) \approx \\
&\approx J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \left[1 + \frac{B}{4\mu} \frac{k_T^2}{k_T^2 - k_z^2} M(u_g) \right] \right) = \\
&= J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} + r \frac{B k_T^2}{4\mu \sqrt{k_T^2 - k_z^2}} M(u_g) \right). \tag{7.22}
\end{aligned}$$

Далі метод використовує ще одне обмеження

$$\delta = r \frac{B k_T^2}{4\mu \sqrt{k_T^2 - k_z^2}} M(u_g) \ll 1. \tag{7.23}$$

Якщо до функції (7.22) застосувати перше наближення $J_1(\sigma + \delta) \approx \approx J(\sigma) + J'(\sigma)\delta$ за формулою Тейлора в околі точки $r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}$, вважаючи (7.23) малою величиною, то формулу (7.22) можна представити наближено

$$\begin{aligned}
J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} + r \frac{B k_T^2}{4\mu \sqrt{k_T^2 - k_z^2}} M(u_g) \right) &\approx J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + r \frac{B k_T^2}{4\mu \sqrt{k_T^2 - k_z^2}} M(u_g) \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]' = \\
&= J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + r \frac{B k_T^2}{4\mu} M(u_g) J'_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right). \tag{7.24}
\end{aligned}$$

Зважаючи на рекурентну формулу $J'_1(r) = (1/2)[J_0(r) - J_2(r)]i$ формулу (7.24), наближений розв'язок (7.21) можна записати в такому вигляді

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_g(r) &= \tilde{u}^o \left\{ J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + r \frac{B k_T^2}{8\mu} M(u_g) \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] \right\}. \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Тепер слід перетворити вираз $M(u_g)$. Тут доцільно у першому наближенні використати лінійне представлення розв'язку (7.16) і зразу розглянути остаточний розв'язок у вигляді двох наближень

$$\begin{aligned}
u_g(r, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} \left\{ J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + \right. \\
& + r \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] \times \\
& \left. \times \left[\left(u_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + \left(u_{g,z} \right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Розпишемо окремо $\left[\left(u_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + \left(u_{g,z} \right)^2 \right]$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(u_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + \left(u_{g,z} \right)^2 \right] = \\
& = \left(\tilde{u}^o \right)^2 e^{2i(k_z z - \omega t)} \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2 \right)}{4} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \left[\left(J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right) J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] + \\
& \left. + \frac{2}{r^2} \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 - \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \left(k_z \right)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Остаточний розв'язок (7.26) у вигляді двох наближень – лінійного (першого) і другого (певної нелінійної добавки) із застосуванням (7.27) – має вигляд

$$\begin{aligned}
u_g(r, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} \left\{ J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + \right. \\
& + r \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] \times \\
& \times \left(\tilde{u}^o \right)^2 e^{2i(k_z z - \omega t)} \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2 \right)}{4} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \left[\left(J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right) J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] + \\
& \left. \left. + \frac{2}{r^2} \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 - \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \left(k_z \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
u_g(r, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) + \\
& + \left(\tilde{u}^o\right)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \\
& \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2\right)}{4} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \left[\left(J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right) J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] + \\
& \left. + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

З точки зору механіки хвиль, наявність другого наближення означає спотворення початкового профілю хвилі, тому що вплив нелінійної добавки збільшується з відстанню поширення хвилі (добавка містить радіус як множник).

В наближенному аналізі плоских та циліндричних хвиль друге наближення вносить спотворення в початковий профіль хвилі, тому що вплив нелінійної добавки збільшується зі збільшенням відстані, яку проходить хвиля. Для проведеного аналізу крутальної хвилі це не так. Тут відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (добавка містить r як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвилля (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвилля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, але ця добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку. Можна вважати, що реалізований наближений підхід не описує еволюцію хвилі, а лише одномоментно переводить гармонічну хвилю у модульовану хвилю. Поступового переходу першої гармоніки у третю цей підхід не описує.

Однак достовірність наближеного представлення (7.28) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення

хвилі; крім того, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп'ютерного аналізу еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

7.1.4. Граничні умови в нелінійній задачі про цилідричні крутильні хвилі.

Хвильове число k_z і швидкість хвилі $v_z = (\omega/k_z)$ в нелінійній задачі про крутильні хвилі логічно визначити, як і для лінійної задачі, з додаткової умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (7.29)$$

Далі слід вирахувати напруження з (7.29) через деформації і зміщення. Формула для нормального напруження σ_{rr} через зміщення не показана нижче з тих міркувань, що в ній немає доданків першого порядку (лінійних доданків) але є доданки другого і четвертого порядків [70, 81, 87, 147, 150]. Формули для дотичних напружень є такими

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \left(u_{g,1} + \frac{u_g}{r} \right) + \left(\frac{1}{12} A + \frac{1}{2} B \right) \left(u_{g,r} \right)^3 - \\ &- \left(\frac{1}{4} A - B \right) \frac{u_g}{r} \left(u_{g,z} \right)^2 + \frac{1}{2} B \left[u_{g,r} \left(u_{g,z} \right)^2 + \frac{u_g}{r} \left(u_{g,r} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} &= \left(2\mu + \frac{1}{12} A \right) u_{g,r} u_{g,z} + \left(2\mu - \frac{1}{12} A \right) \frac{1}{r} u_g u_{g,z} - \frac{1}{6} A \left(\frac{1}{r^2} \left(u_g \right)^2 u_{g,r} u_{g,z} - \frac{1}{r^3} \left(u_g \right)^3 u_{g,z} \right) \\ &+ \frac{1}{2} B \left[\left(u_{g,r} \right)^3 u_{g,z} - \frac{1}{r} u_g u_{g,z} \left(u_{g,r} \right)^2 \right] + \left(u_{g,r} \left(u_{g,z} \right)^3 - \frac{1}{r} u_g \left(u_{g,z} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Формула (7.30) включає лінійну частину, яка відповідає лінійному класичному підходу, і чотири доданки, які є кубічно нелінійними. Формула (7.31) включає два доданки другого порядку нелінійності та шість доданків четвер-

того порядку.

Тому всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можна одночасно прирівняти до нуля, оскільки у такому випадку для знаходження однієї невідомої величини – хвильового числа – задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеню. Тоді виникає питання як перейти від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. У лінійній постановці вийшло правильно, бо два напруження з граничних умов є нульовими завжди і всюди (не лише на граничній поверхні циліндра). Характерне для багатьох задач збереження граничних умов при переході від лінійної постановки до нелінійної у задачі про нелінійні крутільні хвилі не виглядає коректним.

Тому потрібно зберегти в граничних умовах нелінійної задачі одну граничну умову, щодо дотичного напруження $\sigma_{r\theta}$, характерного для крутільної хвилі. Саме ця умова у лінійній постановці трансформується в трансцендентне рівняння для знаходження хвильового числа. Щодо нормального σ_{rr} та дотичного σ_{rz} напружень на поверхні циліндра в нелінійній постановці треба вважати, що вони не будуть нульовими і можуть бути завжди знайдені при відомому хвильовому числі.

Нагадаємо відомий у нелінійній теорії пружності факт, що в задачі статики про кручення кругового пружного циліндра нелінійна постановка задачі описує появу нормального напруження σ_{rr} , яке лише нелінійно залежить від кута закручування як основного кінематичного параметру задачі.

Таким чином, поява в задачі про крутільну хвиллю (задачі динаміки) нормального напруження σ_{rr} , яке лише нелінійно залежить від зміщення u_θ як основного кінематичного параметру задачі, узгоджується з результатами відповідної задачі статики.

Аналіз трьох нелінійноїх граничноїх умови раціонально проводити у два кроки. Спочатку нелінійними доданками в умовах можна знехтувати, а далі розглядати повні умови з нелінійними доданками і оцінювати вплив не-

нелінійності на значення хвильових чисел.

Доступним способом такої оцінки є числове моделювання для матеріалів, які моделюються потенціалом Мернагана [107, 113, 118, 123, 127]. Більшість таких матеріалів проявляють слабку нелінійність. Тому слід очікувати в такому випадку і слабкий вплив нелінійності.

Зважаючи на теоретичну складність врахування нелінійної граничної умови для напруження σ_{rg} , у першому наближенні для спрощення задачі зупинимось на першому кроці і приймемо надалі цю граничну умову лінійною.

Отже далі розглядаємо граничну умову (7.12) у вигляді

$$r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) = 2 J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right). \quad (7.32)$$

Ускладнень з комп'ютерним аналізом еволюції крутильної хвилі не передбачається, оскільки функції Бесселя вбудовані в більшість комоютерних пакетів (Mathematika). Однак достовірність наближеного представлення (7.32) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини) та на відстань поширення хвилі. Комп'ютерний аналіз еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

7.2. Комп'ютерне моделювання спотворення початкового профіля цилідричної крутальної хвилі

7.2.1. Властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі

Виберемо три матеріали, для яких відомі всі необхідні пружні константи моделі Мернагана і які добре описуються цією моделлю як при малих, так і помірних деформаціях з наступними механічними параметрами (система СІ) [8, 16, 21, 67, 68]:

$$\text{Сталь } 11-\rho = 0,156 \cdot 10^4; \mu = 0,043 \cdot 10^{10}; B = -15,24 \cdot 10^{10};$$

Сталь 22 – $\rho = 0,357 \cdot 10^4$; $\mu = 0,114 \cdot 10^{10}$; $B = -3,84 \cdot 10^{10}$;

Сталь 23 – $\rho = 0,535 \cdot 10^4$; $\mu = 0,263 \cdot 10^{10}$; $B = -1,435 \cdot 10^{10}$;

На першому кроці аналізу знайдемо значення першого кореня трансцендентного рівняння (7.32). Для цього потрібно знайти хвильове число для поперечної хвилі для кожного із значень параметрів матеріалів:

$$k_T = 190,47 \text{ 1/m (сталь 11),}$$

$$k_T = 176,96 \text{ 1/m (сталь 22),}$$

$$k_T = 142,02 \text{ 1/m (сталь 23).}$$

Далі потрібно задати частоту поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ Гц}$ та радіус циліндра $r^o = 0,01 \text{ м}$.

7.2.2. Числовий аналіз цилідричної крутальної хвилі (застосовано метод обмеження на нелінійну швидкість хвилі)

Якщо задати початкову амплітуду хвилі, $\tilde{u}^o = 5 \times 10^{-3} \text{ м}$. то далі можна будувати графіки залежності амплітуди хвилі як в середині циліндра так і на поверхні циліндра. При цьому матеріал, частота хвилі і радіус циліндра вже вибрані.

Отримані варіанти нових нелінійних хвильових рівнянь, містять крім лінійних квадратичні і кубічно нелінійні доданки. Відмінність між варіантами полягає у різному врахуванні нелінійних доданків в хвильовому рівнянні.

Залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра (1-ше наближення)

$$u_{g(lin)}^{in}(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \quad (7.33)$$

Залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндричного тіла (2-ге наближення)

$$u_{g(Nonlin)}^{in}(r, z, t) = (\tilde{u}^o)^3 r \frac{B k_T^2}{8 \mu} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2 \right)}{4} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \right. \\ & + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \left[\left(J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right) J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] + \\ & \left. + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра (1-ше+2-ге наближення)

$$\begin{aligned} u_{g(lin+Nonlin)}^{in}(r, z, t) = & \tilde{u}^o J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) + \left(\tilde{u}^o \right)^3 r \frac{B k_T^2}{8\mu} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2 \right)}{4} \left[J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \right. \\ & + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \left[\left(J_0 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right) J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] + \\ & \left. + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1 \left(r \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Залежність амплітуди хвилі від координати та радіуса циліндра при русі хвилі вздовж поверхні циліндра (1-ше наближення)

$$u_{g(lin)}^{ext}(r^o, z, t) = \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right). \quad (7.36)$$

Залежність амплітуди хвилі від координати та радіуса циліндра другий неелінійний доданок (2-ге наближення)

$$\begin{aligned} u_{g(Nonlin)}^{ext}(r^o, z, t) = & \left(\tilde{u}^o \right)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r^o \frac{B k_T^2}{8\mu} \left[J_0 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2 \right)}{4} \left[J_0 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 + \right. \\ & + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r^o} \left[\left(J_0 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) - J_2 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right) J_1 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right] + \\ & \left. + \left(\frac{2}{(r^o)^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1 \left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Залежність амплітуди хвилі від фазової змінної при русі хвилі вздовж осі

циліндра (на поверхні циліндра) знаходиться за формулою (7.28)

$$\begin{aligned}
u_{g(lin+Nonlin)}^{ext}(r^o, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) + \\
& + \left(\tilde{u}^o\right)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r^o \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \\
& \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2\right)}{4} \left[J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r^o} \left[\left(J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right) J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] + \\
& \left. + \left(\frac{2}{\left(r^o\right)^2} - \left(k_z\right)^2 \right) \left[J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

З вище зазначеної формули слідує, що перший доданок відповідає першому наближенню (першій гармоніці), другий доданок відповідає другому наближенню але третій гармоніці.

За формулами (7.33) (1-ше наближення *in*), (7.34) (2-ге наближення *in*) (7.35) (1-ше+2-ге наближення *in*) (7.36) (1-ше наближення *ext*), (7.37) (2-ге наближення *ext*) (7.28) (1-ше+2-ге наближення *ext*) побудовані двовимірні графіки. Всього розглянуто 3 набори (3 матеріали), для одного варіанту частоти поширення хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з одним профілем. У кожному наборі перші три графіка відповідають зміні амплітуди хвилі в залежності від радіуса при русі хвилі всередині циліндра. Перший графік для окремо взятого першого наближення другий для окремо взятого другого нелінійного наближення, а третій графік відповідає для лінійного та нелінійного наближення разом. Четвертий, п'ятий та шостий графік відповідають зміні амплітуди хвилі в залежності від координати зміщення при поширенні хвилі вздовж осі поверхні циліндра. Четвертий та п'ятий відповідають першому та відповідно нелінійному другому наближення, а шостий графік відповідає першому та другому (нелінійному) наближення разом.

Далі чисельно аналізуються формули (7.33), (7.34), (7.35), (7.36), (7.37) та (7.28) для хвилі в довільний момент часу, що отримані за методом 2. Графіки побудовані таким чином, щоб еволюція хвилі була спостережувана досить наглядно і спостерігався вплив кожного наближення окремо та вплив двох наближень разом на початковий профіль хвилі.

На всіх рис. 7.1.1-7.1.6 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 11 і таким значенням параметрів: амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$ м. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

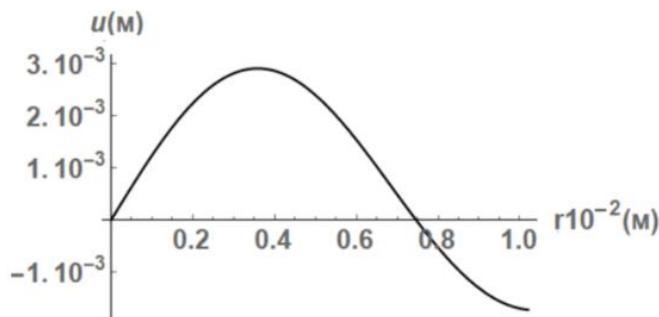


Рис. 7.1. Амплітуда хвилі всередині циліндра, формула (7.33) (1-ше наближення)

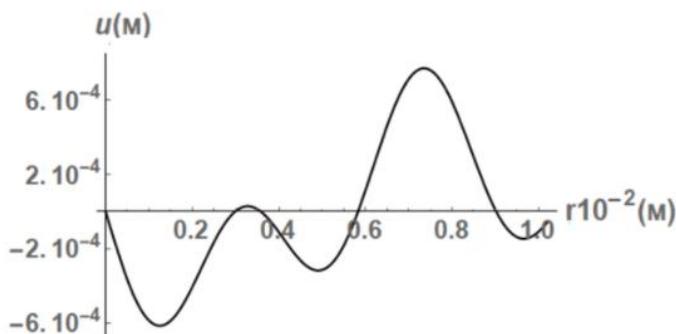


Рис. 7.2. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.34) (2-ге наближення)

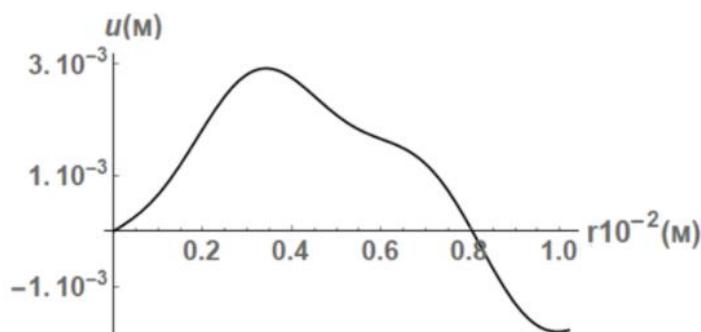


Рис. 7.3. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.35) (1-ше+2-ге наближення)

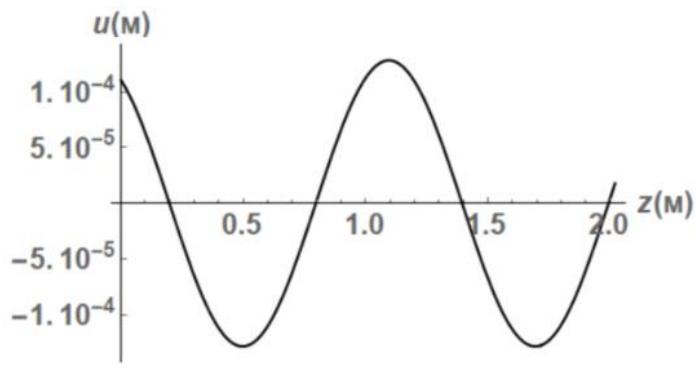


Рис. 7.4. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.36) (1-ше наближення)

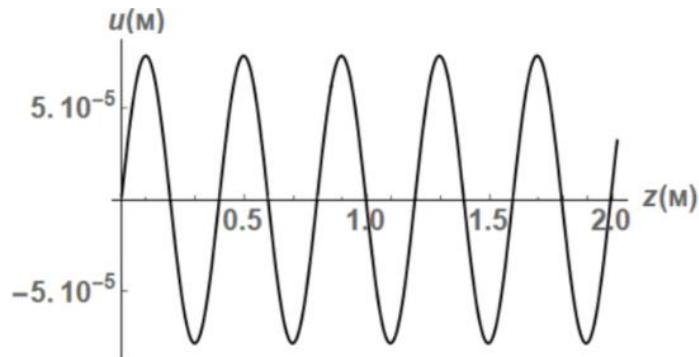


Рис. 7.5. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.37) (2-ге наближення)

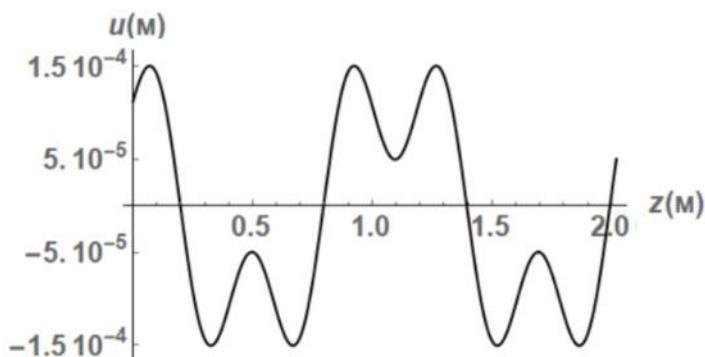


Рис. 7.6. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.28) (1-ше+2-ге наближення)

Рис. 7.7-7.12 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 22 і таким значенням параметрів: амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$ м. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

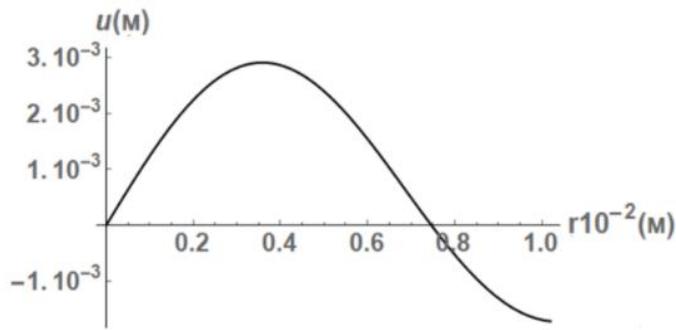


Рис. 7.7. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.33) (1-ше наближення)

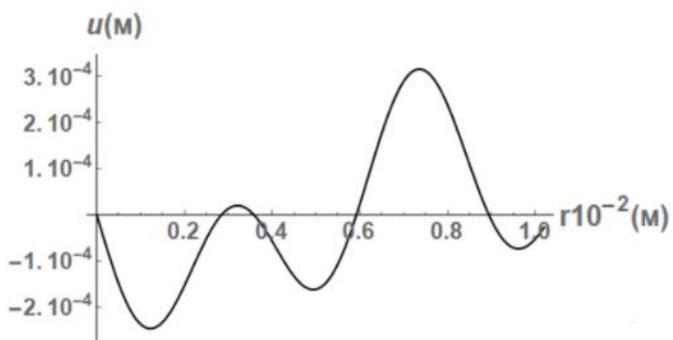


Рис. 7.8. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.34) (2-ге наближення)

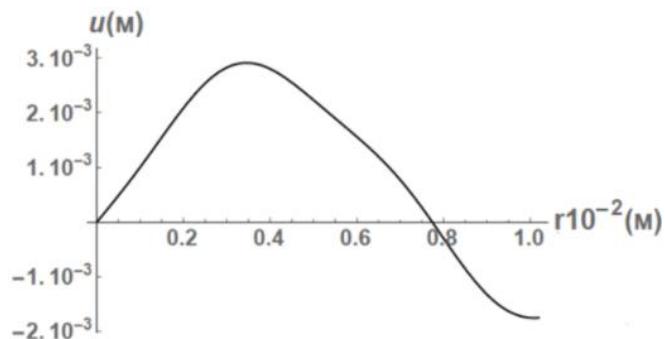


Рис. 7.9. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.35) (1-ше+2-ге наближення)

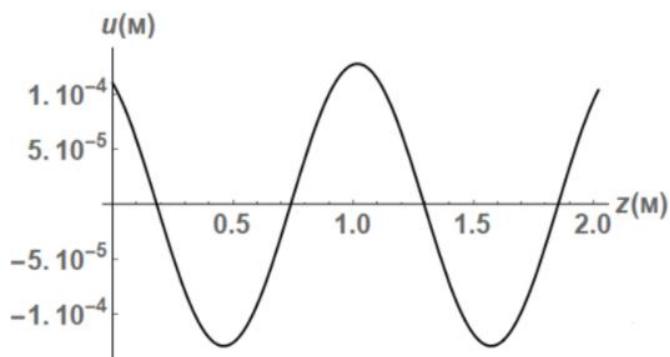


Рис. 7.10. Хвilia на поверхні циліндра відповідає формулі (7.36) (1-ше наближення)

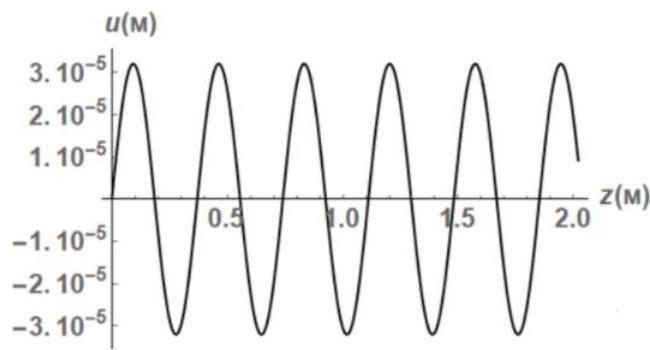


Рис. 7.11. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.37) (2-ге наближення)

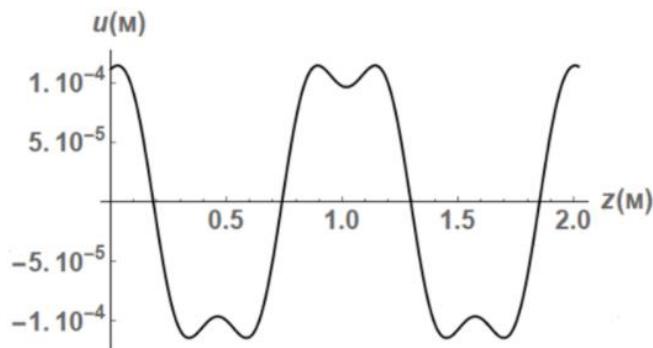


Рис. 7.12. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.28) (1-ше+2-ге наближення)

Рис. 7.13-7.18 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 23 і таким значенням параметрів: амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$ м. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

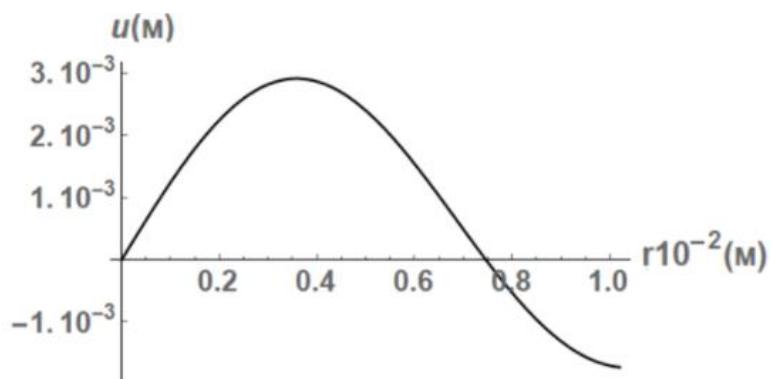


Рис. 7.13. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.33) (1-ше наближення)

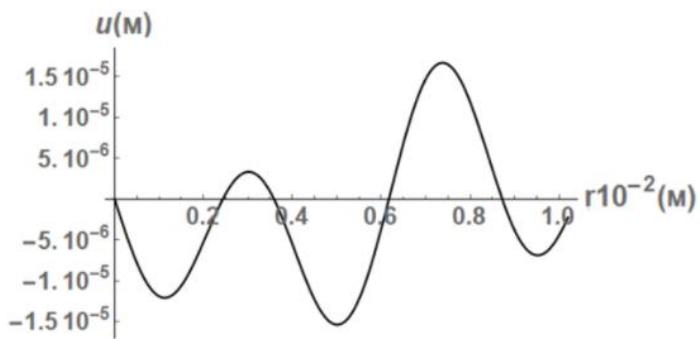


Рис. 7.14. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.34) (2-ге наближення)

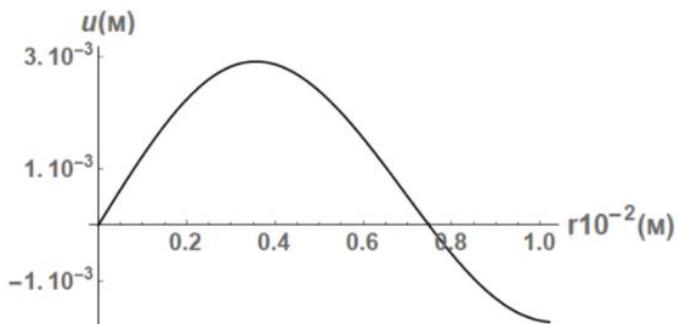


Рис. 7.15. Амплітуда хвилі всередині циліндра формула (7.35) (1-ше+2-ге наближення)

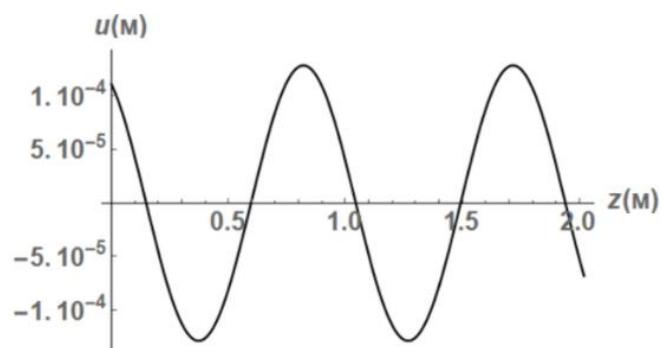


Рис. 7.16. Хвilia на поверхні циліндра відповідає формулі (7.36) (1-ше наближення)

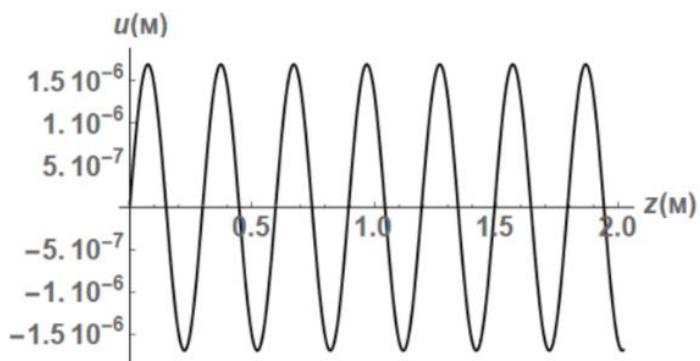


Рис. 7.17. Хвilia на поверхні циліндра відповідає формулі (7.37) (2-ге наближення)

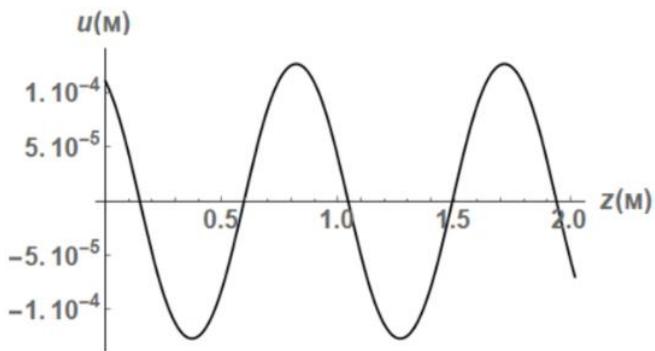


Рис. 7.18. Хвиля на поверхні циліндра відповідає формулі (7.28) (1-ше+2-ге наближення)

З (рис. 7.1, 7.7, 7.13) випливає, що хвиля (перша мода) є гармонічною з частотою першої гармоніки, однак максимальна амплітуда хвилі суттєво залежить від вибору параметрів задачі – частоти хвилі, параметрів матеріалу та радіуса циліндра. Залежність амплітуди від функції Бесселя призводить, при певному виборі параметрів, до парадоксального результату, коли на поверхні циліндра хвилі немає, але вона є всередині циліндра.

Друге нелінійне наближення показує як спотворюється хвиля при русі в середині циліндра. Тут можна зазначити, що наявність нуля при певному значенні радіуса означає, що відповідна поверхня є нерухомою – крутальної хвилі немає. У нелінійному наближенні (рис. 7.2, 7.8, 7.14) піків вже п'ять і нулів чотири. Аномальних нерухомих поверхонь вже чотири. Аналогічна ситуація, що для лінійного наближення, для кожного матеріалу результати майже однакові відмінність полягає лише у значенні максимальної амплітуди. Дані графіки дають можливість оцінити вплив нелінійної частини (третьої гармоніки) на лінійну частину (першої гармоніки).

На рис. 7.3, 7.9, 7.15 об'єднано вже лінійну (перша гармоніка) та нелінійну хвилі (третя гармоніка), на яких зображене залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра. Графіки свідчать, що відбувається спотворення гармонічної хвилі та спостерігається тенденція, до утворення двох піків та двох нулів. Тобто вплив третьої гармоніки, для хвилі в середині циліндра присутній. Інтенсивність спотворення хвилі для даних типів параметрів залежить від вибору матеріалу, як видно з рис. 7.3, 7.9, 7.15 інтенсивність

спотворення спадає починаючи із рис. 7.3. Друге наближення вносить у загальний наближений розв'язок третю гармоніку. Таким чином, в рамках наближеного підходу (метод 2) до нелінійної задачі, загальний розв'язок описує модульовану хвилю.

Далі на рисунках 7.4, 7.10, 7.16 та 7.5, 7.11, 7.17 зображені графіки залежності амплітуди хвилі від координати зміщення для лінійного випадку та нелінійної добавки. Рисунки 7.4, 7.10, 7.16 відповідають класичній гармонічній хвилі (перша гармоніка), яка поширюється вздовж осі та на поверхні циліндра. Рисунки 7.5, 7.11, 7.17 дають можливість оцінити вплив нелінійної частини (третої гармоніки) на лінійну частину (першої гармоніки). Відмінність між першою групою графіків рис. 7.4, 7.10, 7.16 та другою рис. 7.5, 7.11, 7.17 полягає в тому, що для першої групи побудована класична гармонічна хвиля, а для другої групи гармонічна хвиля але для третьої гармоніки, де вплив функції Бесселя впливає тільки на зміну амплітуди та частоту. Як випливає з рис. 7.4, 7.10, 7.16 і рис. 7.5, 7.11, 7.17 початкові параметри задачі впливають, як і при лінійному підході, на максимальну амплітуду хвилі і, отже, на енергію хвилі, так і для нелінійного випадку. Однак відмінність між двома підходами є значною.

Далі на рисунках 7.6, 7.12, 7.18 зображені графіки залежності ампулітуди хвилі від від фазової змінної при русі хвилі вздовж осі циліндра (на поверхні циліндра) за формулою (7.28), для лінійного та нелінійної добавки (третої гармоніки). На рис. 7.6, 7.12, 7.18 спостерігається значна деформація що до початкового профіля гармонічної хвилі. Саме розв'язок (7.28) (1-ше + 2-ге наближення) показує (особливо рис. 7.6, 7.12), тенденцію до утворення двох горбів для додатних значень амплітуди і двох впадин для від'ємних значень амплітуди.

Друге наближення вносить у загальний наближений розв'язок третю гармоніку і є постійною добавкою до першого лінійного розв'язку. Таким чином, в рамках наближеного підходу (метод 2) до нелінійної задачі, загальний розв'язок описує модульовану хвилю. З рис. 7.6, 7.12, 7.18 видно, що не-

сучою гармонікою є третя, а перша виявляється в огинаючій лінії.

7.2.3. Числовий аналіз впливу величини радіуса циліндра на параметри крутальної хвилі

Для знаходження амплітуди \tilde{u}_θ запропоновано певне узагальнення наближеного методу обмеження на градієнт зміщення, застосування якого до рівняння (7.2) з врахуванням представлення хвилі за формулою (7.9) дає розв'язок у вигляді перших двох наближень (наближене представлення крутальної хвилі) – залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра (1-ше+2-ге наближення):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_g^{\text{int}(1+2)}(r, z, t) = & \tilde{u}^o J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) + \left(\tilde{u}^o\right)^3 r \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2\right)}{4} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \right. \\ & \left. \left[\left(J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right) J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.38)$$

Перше наближення розв'язку відповідає перший доданок в (7.38), друге наближення відповідає другий доданок в (7.38).

Однак достовірність наближеного представлення (7.38) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі. Також, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп'ютерного аналізу еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

Формула (7.38) описує явище впливу величини радіуса циліндра на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Щоб оцінити кількісно цей вплив у даній дисертаційній роботі проведено комп'ютерне моделювання розподілу амплітуд хвилі всередині циліндра [61].

Розглянута перша мода хвилі, 3 матеріали, 3 варіантів радіуса циліндра, 1 варіант частоти поширення хвилі та початкової максимальної амплітуди. Всього побудовано 9 наборів або 27 графіків. Кожна і трьох груп складається із трьох наборів, яка відповідає одному матеріалу, а кожен із трьох наборів побудований для відповідних радіусів циліндра: $r = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м, $r = 1,3 \cdot 10^{-2}$ м, $r = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м. Кожен набір включає графіки з одним профілем. У кожному наборі відповідають зміні амплітуди хвилі в залежності від радіуса при русі хвилі всередині циліндра. Перший графік (а) відповідає першому наближенню другий (б) - другому наближення, а третій (в) - 1-му та 2-му наближенням разом. Графіки побудовані таким чином, щоб зміна розподілу амплітуд хвилі була спостережувана досить наглядно.

Для числового моделювання вибрано три матеріали, для яких відомі всі необхідні пружні константи моделі Мернагана і які добре описуються цією моделлю як при малих, так і помірних деформаціях з наступними механічними параметрами (система СІ) [8, 16, 21, 67, 68]:

$$\text{Сталь 11} - \rho = 0,156 \cdot 10^4; \mu = 0,043 \cdot 10^{10}; B = -15,24 \cdot 10^{10};$$

$$\text{Сталь 22} - \rho = 0,357 \cdot 10^4; \mu = 0,114 \cdot 10^{10}; B = -3,84 \cdot 10^{10};$$

$$\text{Сталь 23} - \rho = 0,535 \cdot 10^4; \mu = 0,263 \cdot 10^{10}; B = -1,435 \cdot 10^{10};$$

Далі було знайдено значення першого кореня трансцендентного рівняння (7.9) $k_T = 190,47$ 1/м (сталь 11), $k_T = 176,96$ 1/м (сталь 22), $k_T = 142,02$ 1/м (сталь 22) і хвильове число k_z , яке для кожного варіанта буде своє: $k_z = 5,25$ (сталь 11), $k_z = 5,65$ (сталь 22), $k_z = 7,01$ (сталь 23).

Рис. 7.19 (а,б,в)-7.21(а,б,в) наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 11 і таким значенням параметрів: амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$ м. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

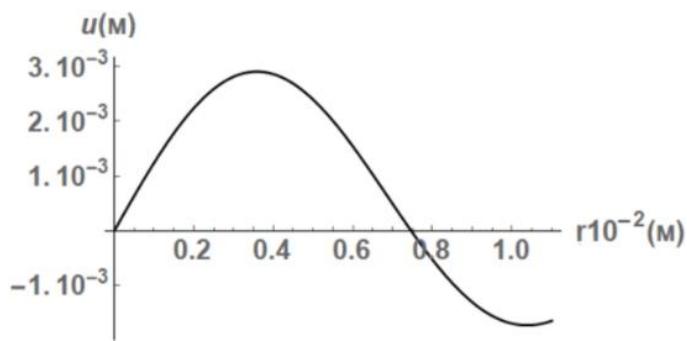


Рис. 7.19а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ M}$$

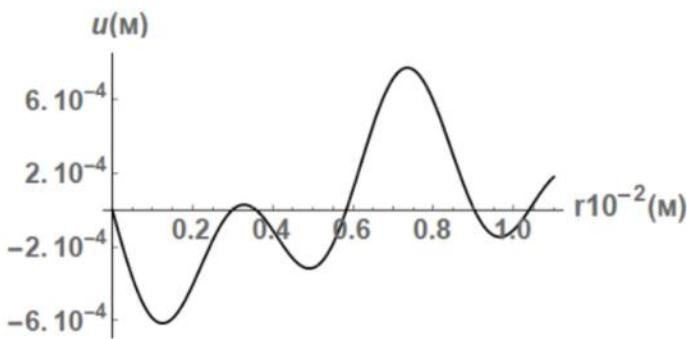


Рис. 7.19б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ M}$$

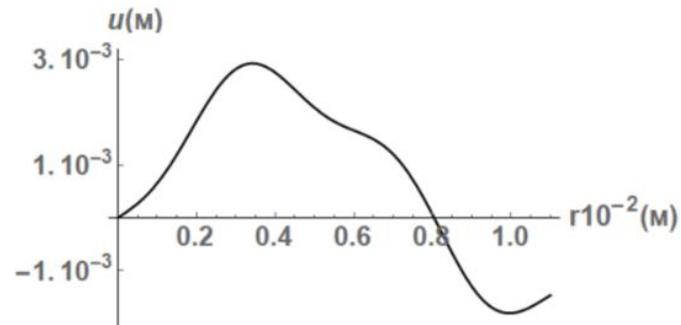


Рис. 7.19в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ M}$$

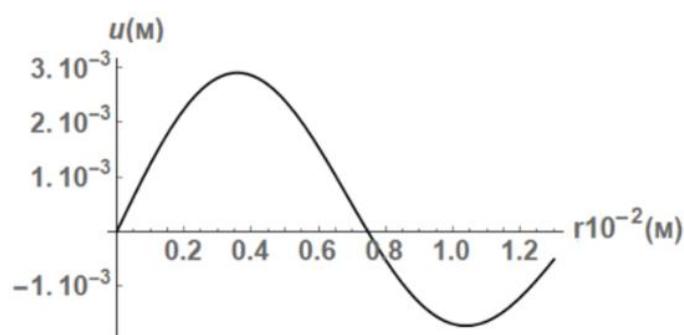


Рис. 7.20а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M}$$

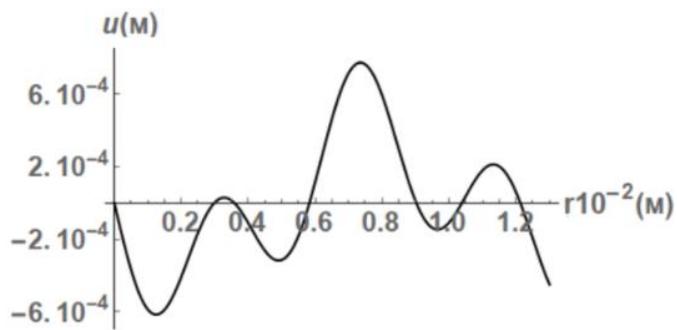


Рис. 7.20б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

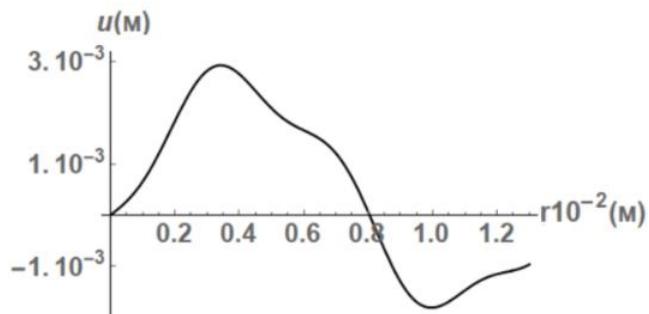


Рис. 7.20в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

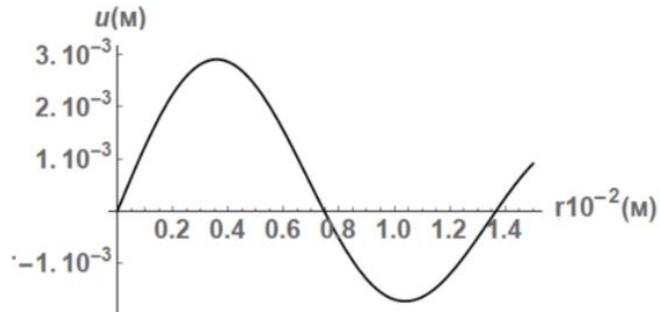


Рис. 7.21а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

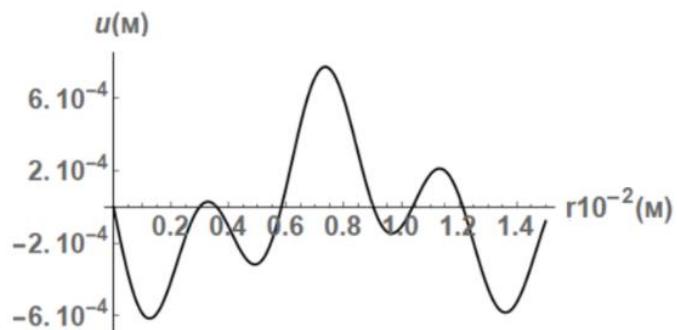


Рис. 7.21б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

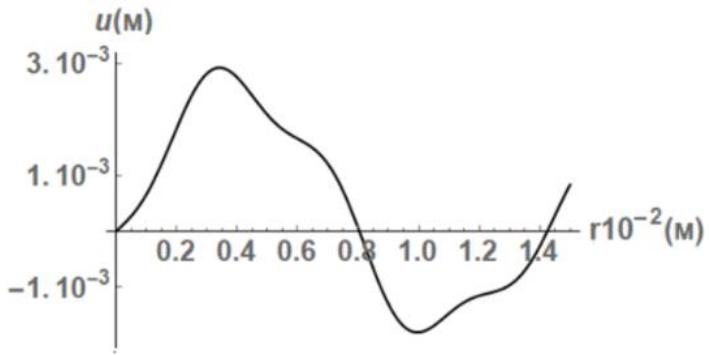


Рис. 7.21в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення, $r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

Рис. 7.22(а,б,в) – 7.24(а,б,в) наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 22 і таким значенням параметрів: амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3} \text{ м}$. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ Гц}$.

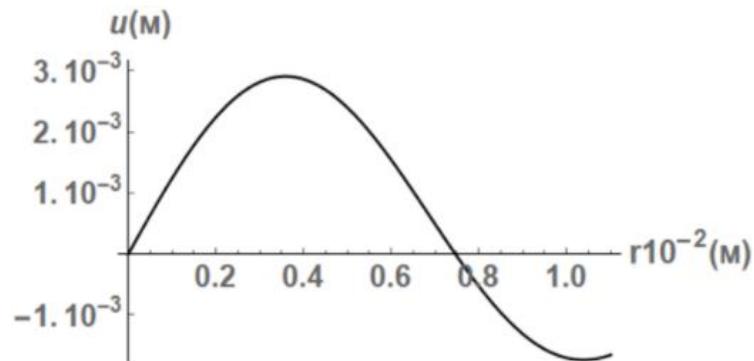


Рис. 7.22а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення, $r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

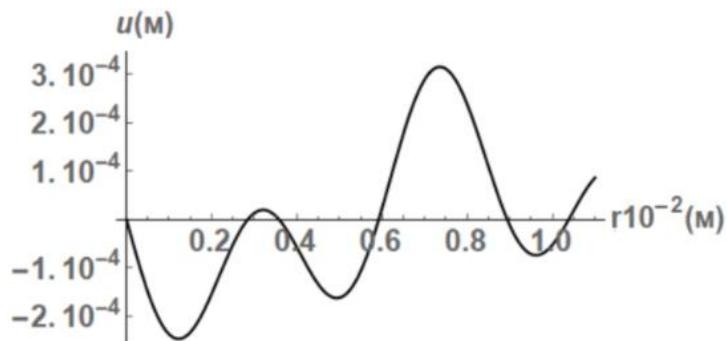


Рис. 7.22б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення, $r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

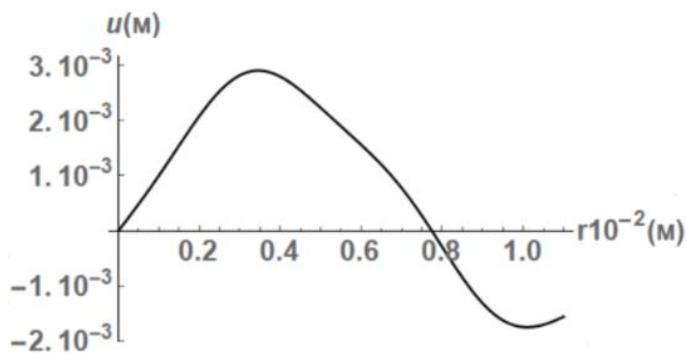


Рис. 7.22в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

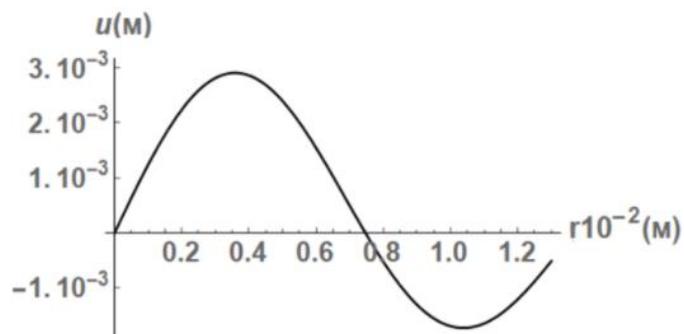


Рис. 7.23а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

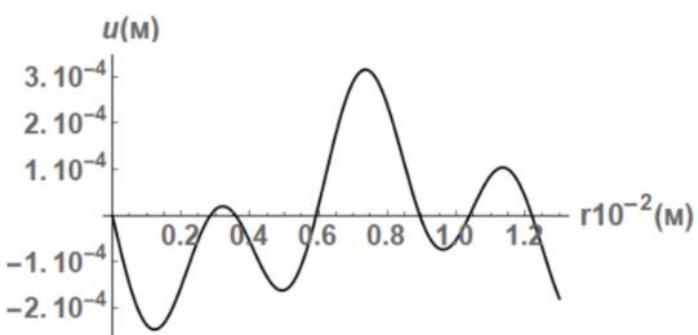


Рис. 7.23б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

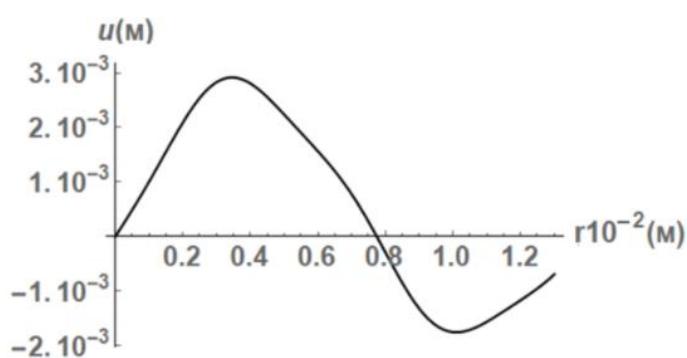


Рис. 7.23в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

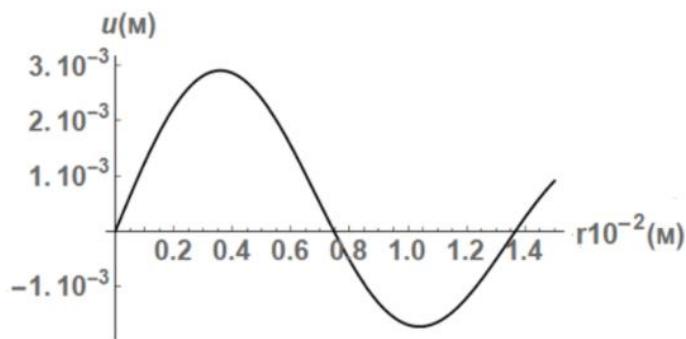


Рис. 7.24а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

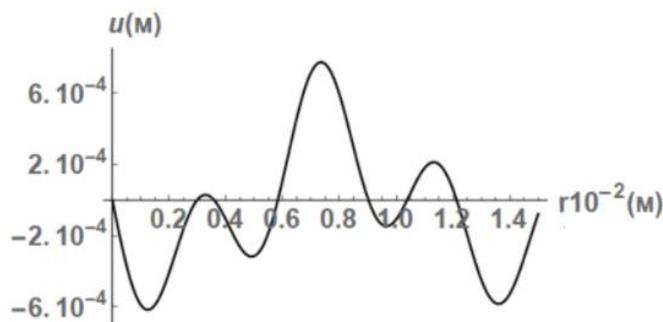


Рис. 7.24б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

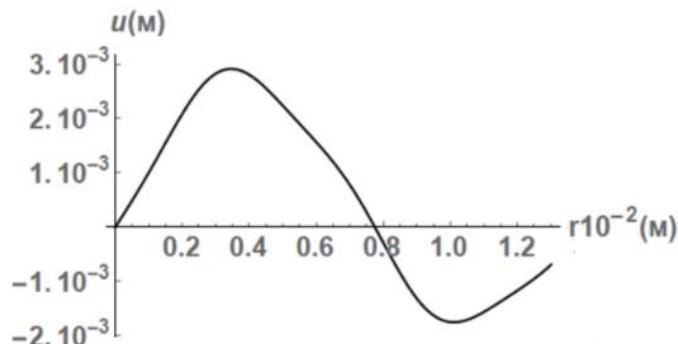


Рис. 7.24в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ M})$$

Рис. 7.25(а,б,в) – 7.27(а,б,в) наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу – сталь 23 і таким значенням параметрів: амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3} \text{ м}$. та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2 \text{ Гц}$.

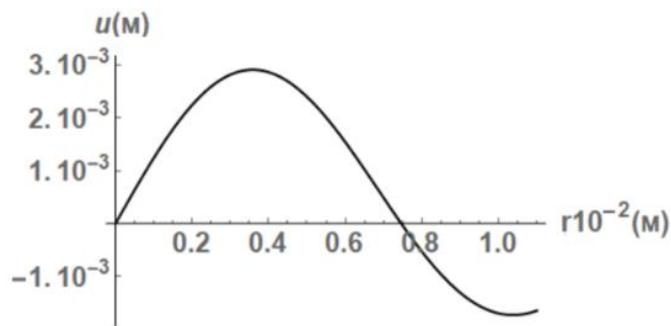


Рис. 7.25а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

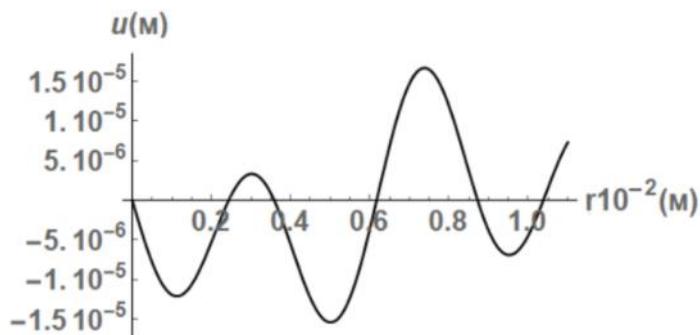


Рис. 7.25б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

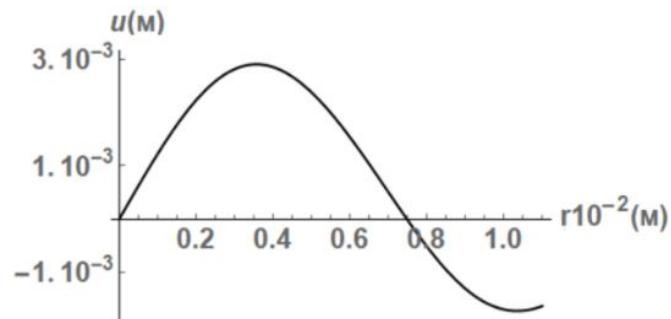


Рис. 7.25в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

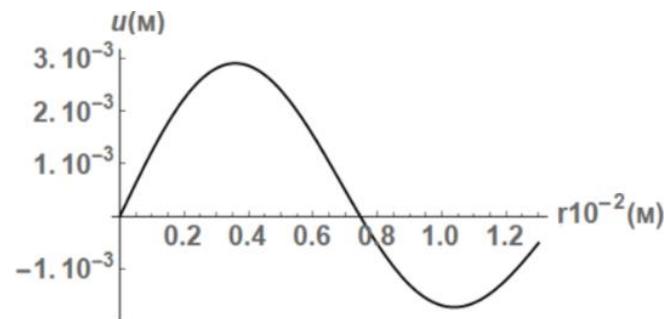


Рис. 7.26а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

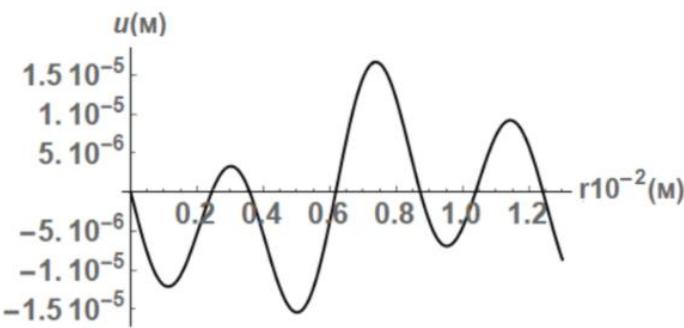


Рис. 7.26б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

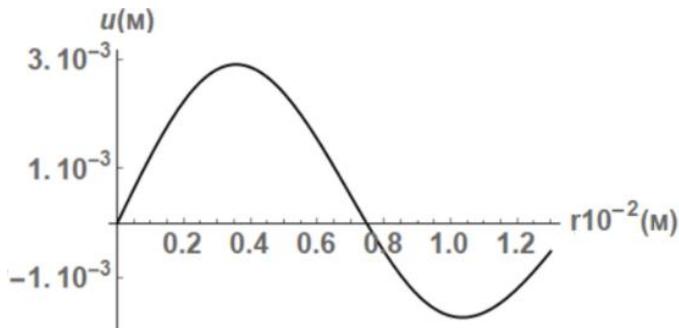


Рис. 7.26в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

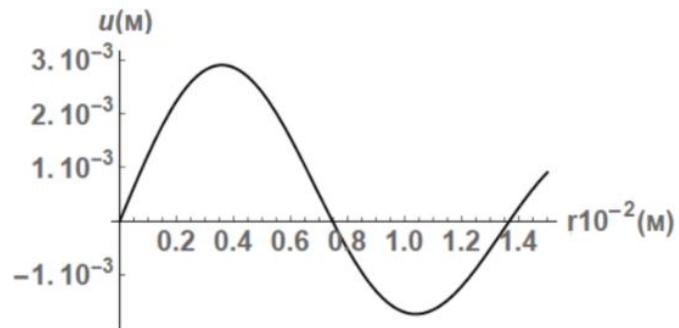


Рис. 7.27а. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$



Рис. 7.27б. Амплітуда хвилі, що відповідає (2-ге наближення,

$$r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

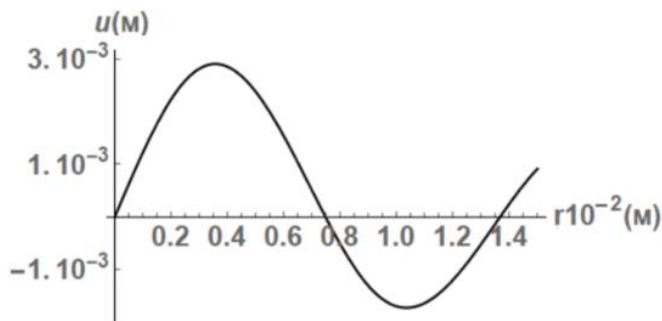


Рис. 7.27в. Амплітуда хвилі, що відповідає (1-ше+2-ге наближення,

$$r=1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

З графіків випливає, що вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутильна хвиля, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра присутній. У цьому розподілі є важливими знак амплітуди, кількість максимумів кривої розподілу, кількість нульових значень амплітуди, суттєвість зміни кривої розподілу при зміні радіуса циліндра і зміни кривої розподілу при врахуванні другого (нелінійного) наближення.

Отже проведене комп’ютерне моделювання виявило суттєвий вплив зміни величини радіуса крутильної хвилі на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Спостережено зміну знаку амплітуди та збільшення кількості максимумів кривої розподілу амплітуд (зокрема, перший максимум завжди є найбільшим, меншим від початкового значення амплітуди і близьким до центру циліндра). Крива розподілу амплітуд завжди має нулі (амплітуда змінює знак), і потенціально можливий варіант, коли на поверхні циліндра хвилі немає (амплітуда є нульовою чи дуже малою). Математичний факт нульового значення амплітуди означає фізично наявність всередині циліндра тонкого циліндричного шару з неспостережуваною амплітудою через її малість.

Виявлено значний вплив нелінійності матеріалу на криву розподілу амплітуд – друге (нелінійне) наближення вносить суттєві зміни в розподіл. Швидкість зміни розподілу амплітуд суттєво залежить від вибору матеріалу.

Для прикладу на рисунках 7.19-7.21, що відповідають матеріалу – сталь11 спостерігається більш швидша та наглядніша зміна амплітуди ніж на рисунках 7.25-7.27, що відповідає матеріалу – сталь 23.

Отже, за допомогою інструментів нелінійної теорії пружності виведені два варіанти нелінійного хвильового рівняння, що описує поширення крутільних хвиль всередині кругового циліндра та вздовж його осі симетрії. Отримані рівняння мають класичну лінійну частину і є кубічно нелінійними та мають ряд особливостей.

Також описано і прокоментовано метод для наближеного аналізу найпростішого варіанту нового рівняння, який узагальнює метод обмеження на градієнт зміщення. Основна відмінність методу для даного типу хвиль і для поздовжніх хвиль полягає в тому, що метод фактично обмежує зміну швидкості крутільної хвилі при її поширенні в нелінійно пружному матеріалі. При реалізації методу отримана достатньо проста формула для знаходження перших двох наближень, яка зручна в комп’ютерному аналізі еволюції хвилі. Отримано наблизений розв’язок задачі, який показує перетворення гармонічної крутільної хвилі (першої гармоніки) у модульовану (перша гармоніка плюс третя) [53].

При аналізі граничних умов виявлено і прокоментовано нову особливість переходу від граничних умов у лінійній постановці до таких умов у нелінійній постановці. Показано певну тяглість в переході від задачі про кручення суцільного кругового пружного циліндра (задачі статики) до задачі про крутільні хвилі у такому ж циліндрі (задачі динаміки). Пов’язано нелінійний статичний ефект Кельвіна з появою нормальніх напружень при поширенні крутільних хвиль в нелінійно пружному матеріалі.

Основний висновок. Проведене комп’ютерне моделювання сцеаріїв еволюції спотворення початкового профіля хвилі в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра до його центру, для трьох типів сталі, в рамках прийнятого підходу показало, що для всіх випадків матеріалів існує два типи спотворення - зміна профіля хвилі у радіальному напрямку і сталість профіля хвилі у осьовому напрямку.

РОЗДІЛ 8

СЕЙСМІЧНА ПЛОСКА ЗСУВНА В'ЯЗКОПРУЖНА ГАРМОНІЧНА ХВИЛЯ. ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ СЦЕНАРІЇВ ЗМІНИ ПАРАМЕТРІВ ХВИЛІ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЧАСТОТИ

В цьому розділі, на відміну від попередніх розділів, де аналізуються пружні хвилі, розглядається в'язкопружна хвиля. Сценарії поширення пружних хвиль основані на нелінійній залежності основних параметрів цих хвиль (початкових амплітуди та форми профіля) від пройденої хвилею відстані чи часу поширення хвилі. Сценарії, які вивчаються для вязкопружних хвиль, основані на нелінійній залежності основних параметрів хвилі (zmіни швидкості та амплітуди хвилі) від частоти хвилі. Для цього, спочатку викладено певні необхідні факти з лінійної теорії в'язкопружності [41, 56]. Далі будуть аналізуватися поширення сейсмічної плоскої зсувної в'язко-пружної гармонічної хвилі в рамках опису деформування середовища поширення хвилі стандартною реологічною моделлю.

Наука про хвилі в матеріалах виділяє сейсмічні хвилі в окремий розділ. Це пов'язується з трьома основними особливостями цих хвиль:

- 1) середовище, у якому поширяються сейсмічні хвилі, є товщою Землі (грунтові шари);
- 2) сейсмічні хвилі є хвилями з малими значеннями частоти;
- 3) джерелом виникнення сейсмічних хвиль є землетруси, виверження вулканів, рух магми в Землі, великі природні зсуви ґрунту чи великі антропогенні (спричинені людською діяльністю) вибухи.

8.1. Найпростіша задача сейсмофізики: сейсмічна гармонічна SH-хвиля в трикомпонентній системі «атмосфера – пружний грунтовий шар – пружний скельний масив»

Саме через розгляд сейсмічної хвилі в цій задачі враховується відмінність від аналогічної задачі механіки як у частині термінології, так і самої

постановки задачі. Зокрема, верхньою компонентою трикомпонентної системи є атмосфера, що є характерним для сейсмічних хвиль у товщі ґрунтових порід, які виявляються на поверхні Землі при сейсмічній активності (землетруси і т.п.). Вважається, що атмосфера відбиває хвилю назад у ґрунтовий шар (частина енергії хвилі переходить у коливання покрівлі шару). Також, верхню частину ґрунтового шару називають покрівлею і нижню – підошвою, нижній півпростір називають підстеляючим скельним масивом.

Опишемо коротко постановку задачі. В площині всі параметри, що відносяться до ґрунтового шару $0 \leq z \leq h$, позначаються індексом 1, і параметри, що відносяться до нижньої півплощини (підстеляючого скельного масиву) $-\infty \leq z \leq 0$, позначаються індексом 2. Припускається, що скельний масив і грунтovий шар мають фізичні властивості лінійно пружного ізотопного матеріалу (в даному випадку, характеризуються густиною ρ_α ($\alpha = 1; 2$) і модулем зсуву μ_α), тоді як атмосфера є середовищем, яке на границі з Землею, як покрівлю ґрунтового шару допускає довільні зміщення і нульові напруження. Тому у цій задачі потрібне лише додатково знання коефіцієнту відбиття від границі з атмосферою.

Падаюча зі скельного масиву на підошву ґрунтового шару $z = 0$ хвиля (у напрямку знизу вверх і зліва направо) може бути представлена формулою

$$u_{2(inc)}(x, z, \theta_2, t) = A_2 e^{i[(k_2 \sin \theta_2)x + (k_2 \cos \theta_2)z - \omega t]}, \quad (8.1)$$

де всі параметри вважаються відомими. При переході через підошву ця хвиля розділяється на дві – одна відбивається під відомим кутом ($-\theta_2$) симетрично від підошви і поширюється з невідомою амплітудою і інша продовжує поширення у ґрунтовому шарі як заломлена хвиля.

Границі умови на границі між скельним масивом і ґрунтовим шаром виявляють існування закону Снелля

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1 \quad (8.2)$$

і залежності між коефіцієнтами відбиття V та прозорості W

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1, \quad 1 + V_1 = (1 + V_0)W_1,$$

$$(\mu_2 k_2 \cos \theta_2)(1 - V_1) = (\mu_1 k_1 \cos \theta_1)(1 - V_0)W_1. \quad (8.3)$$

Кут падіння хвилі при досягненні хвилею покрівлі шару вираховується за формулою (8.3)

$$\theta_1 = \arcsin[(k_2/k_1)\sin \theta_2] \text{ або } \theta_1 = \arcsin[(c_{T1}/c_{T2})\sin \theta_2].$$

Далі розглядаються граничні умови на границі між шаром і атмосферою. Хвиля, яка падає з шару на границю з атмосферою, є відомою і такою, що співпадає з заломленою при переході з масиву в шар хвилею

$$u_{l(inc)}(x, z, \theta_1, t) = W_1 A_2 e^{i[(k_1 \sin \theta_1)x + (k_1 \cos \theta_1)z - \omega t]}. \quad (8.4)$$

При переході через покрівлю ґрунтового шару (лінію розділу $z = h$) хвilia (8.1) відбивається з коефіцієнтом відбиття V_0 від покрівлі під відомим кутом $(-\theta_1)$ і поширюється з амплітудою $V_0 W_1 A_2$

$$u_{l(ref)}(x, z, \theta_1, t) = V_0 W_1 A_2 e^{i[(k_1 \sin \theta_1)x - (k_1 \cos \theta_1)z - \omega t]}, \quad (8.5)$$

Далі використовуються граничні умови контакту атмосфери з ґрунтовим шаром – зміщення на покрівлі задаються формулою

$$u_1(x, h, t) = u_{l(inc)}(x, h, t) + u_{l(ref)}(x, h, t), \quad (8.6)$$

і на покрівлі шару зсувне напруження відсутнє

$$\sigma_{zx(1inc)}(x, h, t) + \sigma_{zx(1ref)}(x, h, t) = 0. \quad (8.7)$$

Формули (8.6), (8.7) записують більш докладно в наступному вигляді

$$u_1(x, h, t) = W_1 A_2 e^{i[(k_1 \sin \theta_1)x - \omega t]} \left(e^{i(k_1 \cos \theta_1)h} + V_0 e^{-i(k_1 \cos \theta_1)h} \right),$$

$$\mu_1 k_1 \cos \theta_1 e^{i[(k_1 \sin \theta_1)x - \omega t]} \left(e^{i(k_1 \cos \theta_1)h} - V_0 e^{-i(k_1 \cos \theta_1)h} \right) = 0.$$

Відповідні формули для коефіцієнтів мають вигляд

$$V_0 = e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h}, \quad W_1 = \frac{2\mu_2 k_2 \cos \theta_2}{\mu_2 k_2 \cos \theta_2 (1 + e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h}) + \mu_1 k_1 \cos \theta_1 (1 - e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h})}, \quad (8.8)$$

$$V_1 = \frac{\mu_2 k_2 \cos \theta_2 (1 + e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h}) - \mu_1 k_1 \cos \theta_1 (1 - e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h})}{\mu_2 k_2 \cos \theta_2 (1 + e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h}) + \mu_1 k_1 \cos \theta_1 (1 - e^{2i(k_1 \cos \theta_1)h})}. \quad (8.9)$$

Зміщення на поверхні Землі дорівнюють

$$u_1(x, h, t) = 2W_1 \cos(k_1 h \cos \theta_1) A_2 \cos[(k_1 \sin \theta_1)x - \omega t], \quad (8.10)$$

Формула (8.10) свідчить, що зміщення на поверхні Землі є гармонічним за часом; воно змінюється періодично вздовж поверхні; амплітудний множник є постійним $2W_1 \cos(k_1 h \cos \theta_1) A_2$ і залежить від багатьох чинників.

Так коротко виглядає аналіз найпростішої задачі сейсмофізики щодо поширення гармонічної зсувної хвилі через ґрутовий шар. В рамках такого аналізу потрібно знати фізичні властивості ґрутового шару.

8.2. Загальні факти з теорії в'язкопружності

Дослідження моделей матеріалів, що одночасно виявляють властивості пружності та в'язкості, є предметом теорії в'язкопружності. Якщо припустити, що вся сукупність пружних моделей є основою теорії пружності, то теорія в'язкопружності відповідно є найбільш близькою до теорії пружності серед інших теорій, таких як термопружність, п'єзопружність і т.п.

Зазначена близькість полягає в тому, що для побудови теорії в'язкопружності не потрібно вводити якесь нове фізичне поле (наприклад, у теорії термопружності необхідно ввести температурне поле, у теорії п'єзопружності – електромагнітні поля тощо), як показано [41, 78, 102].

Можна вважати, що основна концепція теорії в'язкопружності основана

на принципі пружності Больцмана і математичному апараті, розробленому близько ста років тому Вольтерра.

Особливістю принципу Больцмана є те, що він поширюється тільки на деяку групу основних рівнянь теорії пружності і перетворює в кінцевому результаті всю систему в основні рівняння теорії в'язкопружності. Цю групу рівнянь називають конститутивними рівняннями або краще сказати узагальненнями закону Гука.

Традиційно основні рівняння в теорії в'язкопружності називаються реологічними рівняннями. Отже, принцип пружності Больцмана застосовано для створення нових реологічних рівнянь із пружного закону Гука.

У загальному випадку закон Гука дає деяку нелінійну залежність між компонентами тензорів напружень і деформацій

$$\sigma_{ik} = f_{ik}(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{31}), \quad \varepsilon_{ik} = f_{ik}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{31})$$

або $\sigma(x, t) = f(\varepsilon(x, t)), \quad \varepsilon(x, t) = g(\sigma(x, t)). \quad (8.11)$

Таким чином, цей закон пов'язує напруження в даній точці і в даний момент часу з деформаціями в тій же точці і той самий момент.

Принцип Больцмана стверджує, що напруження в даній точці і в даний момент залежить від усього часу зміни деформацій на інтервалі. Тому кажуть, що матеріали мають пам'ять, а напруження є функціоналом деформацій. Цю залежність позначають так

$$\sigma(x, t) = \underset{\tau=0}{F}^{\tau=t}(\varepsilon(x, \tau)), \quad \varepsilon(x, t) = \underset{\tau=0}{G}^{\tau=t}(\sigma(x, \tau)). \quad (8.12)$$

Другий важливий компонент принципу Больцмана полягає в тому, що пам'ять про значення деформацій у попередні моменти така, що вплив останніх моментів є більшим, ніж вплив старих, і аналітично цей вплив описується спадною функцією.

Зазначимо, що більшість результатів в теорії в'язкопружності отримано для лінійних функціоналів і, отже, для лінійної теорії.

Термін в'язкопружність можна пояснити тим, що теорія описує явища

повзучості деформації та релаксації напруження як прояв наявності в матеріалі властивостей пружності та в'язкості. Це добре видно з аналізу найпростіших реологічних моделей, які були історично першими і особливості яких вплинули і на назву теорії.

Розглянемо коротко три найпростіші та найбільш використовувані серед простих моделей реологічні моделі: двоелементні моделі Максвелла і Фойгта, триелементна стандартна модель (модель Кельвіна).

У цих моделях використовуються два елементи: пружина, яка пружно деформується і позначається H (від Гук-Hook), і поршень, який деформується в'язко і позначається N (від Ньютон-Newton). Елементи розташовуються шляхом послідовного або паралельного зв'язування. Деформація елементів вивчається спеціальним підходом, давно розробленим в реології.

При навантаженні (роздягуванні) елементи деформуються і можуть характеризуватися напруженням і деформацією - двома основними механічними характеристиками. Обидва елементи деформуються за лінійними одновимірними моделями: пружне тіло і в'язка рідина відповідно.

8.3. Дво-елеменитна реологічна модель Максвелла

Реологічна формула для двоелементної моделі Максвелла має вигляд $M = H - N$. Максвелл розглядав цю модель для дослідження природи в'язкості газів. Назва «двоелементна» пов'язана з тим, що в теорії в'язкопружності існує практика графічного зображення простих моделей, які складаються з двох основних елементів – пружини і поршня. Пружина моделює пружне деформування і характеризується пружиною постійною μ_K , тоді як поршень моделює в'язке деформування і характеризується в'язкою постійною η_K .

Реологічна схема наведена на рис.8.1. Схему коментують так: завдяки послідовному з'єднанню елементів, напруження в елементах будуть однаковими. $\sigma_H = \sigma_N = \sigma$, $\sigma_H = 2\mu\varepsilon_H$, $\sigma_N = 2\eta\dot{\varepsilon}_N$.

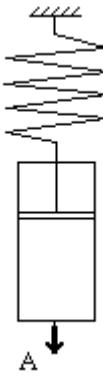


Рис. 8.1. Зображення схеми Максвелла

Швидкість деформації в точці A , до якої прикладена сила розтягу, дорівнює сумі швидкостей в елементах

$$\dot{\varepsilon}_H = \frac{\dot{\sigma}_H}{2\mu}, \quad \dot{\varepsilon}_N = \frac{\sigma_N}{2\eta}.$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{(A)} = \frac{\dot{\sigma}(t)}{2\mu} + \frac{\sigma(t)}{2\eta}. \quad (8.13)$$

Це реологічне рівняння для моделі Максвелла.

Рівняння (8.13) відносно функцій $\sigma(t), \varepsilon(t)$ є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Зазвичай рівняння (8.13) інтегрується з умовою відсутності напружень і деформацій у початковий момент $\sigma(0)=0, \varepsilon(0)=0$. У результаті виходить представлення напруження та деформації

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\mu} \sigma(t) + \frac{\eta}{\mu} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau. \quad (8.14)$$

Якщо припустити $\sigma(0)=\sigma_o, \varepsilon(0)=\varepsilon_o$, тоді $\sigma(t) = e^{-\frac{\mu}{\eta}t} \left[\sigma_o + 2\mu \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) e^{\frac{\mu}{\eta}\tau} d\tau \right]$ або

$$\sigma(t) - \sigma_o = 2\mu \left[\varepsilon(t) - \varepsilon_o - \frac{\mu}{\eta} \int_0^t \varepsilon(\tau) e^{-\frac{\mu}{\eta}(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (8.15)$$

Як правило, три окремі випадки цікаві можливістю досить повно охарактери-

зувати здатність моделі описувати явища релаксації напружень і повзучості деформацій:

Випадок 1. $\varepsilon = \text{const}$. *Випадок 2.* $\sigma = \text{const}$. *Випадок 3.* $\sigma(t) = \sigma_o \sin \omega t$ або $\varepsilon(t) = \varepsilon_o \sin \omega t$.

Випадок 1. Рівняння (8.15) спрощується до

$$\sigma(t) = \sigma_o e^{-\frac{\mu}{\eta} t}. \quad (8.16)$$

Отже, напруження спадає за експоненціальним законом від σ_o до нуля, що відповідає класичному визначенню релаксації.

Зазначимо, що час протягом якого напруження зменшується в e разів, називається часом релаксації. У моделі Максвелла він має вигляд:

$$\tau_{rel} = \frac{\eta}{\mu}. \quad (8.17)$$

і наступну розмірність $([\mu] = Pa, [\eta] = Pa \cdot s)$.

Випадок 2. Якщо розглянути рівняння (8.13), з якого випливає $\frac{\sigma}{2\eta} = \dot{\varepsilon} = \text{const}$. Тобто в цьому випадку матеріал тече з постійною швидкістю, як рідина Ньютона.

Таким чином, модель Максвелла не описує повзучість деформації і в цьому сенсі є виродженою моделлю.

Випадок 3. Рівняння (8.13) з урахуванням того, що $\sigma(t) = \sigma_o \sin \omega t$ перетвориться на форму

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2\eta} \sigma_o \sin \omega t + \frac{\omega}{2\mu} \sigma_o \cos \omega t. \quad (8.18)$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{2\eta\omega} \sigma_o \cos \omega t + \frac{1}{2\mu} \sigma_o \sin \omega t. \quad (8.19)$$

Позначимо $-\frac{\sigma_o}{2\eta\omega} = \varepsilon_o \cos \varphi$, $\frac{\sigma_o}{2\mu} = \varepsilon_o \sin \varphi$, то останнє рівняння перетвориться

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.20)$$

Зазвичай так кажуть ε_o – амплітуда коливань деформації і φ – кут зсуву фази коливань деформації відносно коливань напружень. Вони визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_o}{2\eta\omega}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_o}{2\mu}\right)^2} = \frac{\sigma_o}{2\mu\eta\omega} \sqrt{\mu^2 + \eta^2\omega^2} = \\ &= \frac{\sigma_o}{2\mu\omega\tau_{rel}} \sqrt{1 + (\tau_{rel})^2\omega^2}, \quad \tan \varphi = -\frac{\mu}{\eta\omega} = -\frac{1}{\omega\tau_{rel}}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Таким чином, коли частота (або час релаксації) змінюється від нуля до нескінченності, то амплітуда змінюється від нескінченності до $\sigma_o/2\mu$ і кут фазового зсуву змінюється від $-\pi/2$ до нуля. Кут зсуву фази завжди негативний, що означає, що зміна напруження завжди має наслідком зміну деформації.

Зазначимо ти, що модель Максвелла належить до найпростіших реологічних моделей і має методологічний характер, якісно вірно відображає найбільш суттєві особливості деформування полімерів при переході їх із високопружного стану до стану в'язкої течії.

8.4. Дво-елементна реологічна модель Фойхта

Модель запропонована Кельвіном у 1875 році для пояснення явища затухання під час коливань гелів і використана Фойхтом у 1890-92 роках як моделювання поведінки однофазних середовищ, які деформувалися як тверде тіло. Цю модель разом з моделлю Максвелла відносять до найпростіших – двоелементних моделей теорії в'язкопружності.

Модель Фойхта графічно зображається як пружина і поршень, що складені паралельно. $F = H \parallel N$. Реологічна схема показана на рис.8.2.

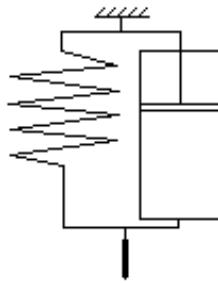


Рис. 8.2. Зображення схеми Фойхта

Рівняння зв'язку між напруженням і деформацією (конститутивне рівняння) має вигляд звичайного диференціального рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\sigma(t) = \mu_K \varepsilon(t) + \eta_K \dot{\varepsilon}(t). \quad (8.22)$$

Залежність (8.22) може бути представлена у вигляді лінійного інтегрального рівняння за умови відсутності початкової деформації $\varepsilon(0) = 0$

$$\varepsilon(t) = (1/\eta_K) \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K}(t-\tau)} d\tau. \quad (8.23)$$

Відповідного інтегрального рівняння щодо напруження немає, його заміняє диференціальне рівняння (8.22).

Формули (8.22) і (8.23) використовуються для вивчення релаксації напруження при постійній деформації і повзучості деформації при постійному напруженні.

Формула (8.23) дає відповідь, чи описує модель Фойхта явище повзучості при постійному значенні $\sigma(t) = \sigma^o$

$$\varepsilon(t) = (\sigma^o / \mu_K) \left(1 - e^{-\frac{\mu_K}{\eta_K} t} \right) = (\sigma^o / \mu_K) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{ret}}} \right). \quad (8.24)$$

Отже, у початковий момент деформація відсутня і далі зростає за експоненціальним законом до значення σ^o / μ_K . У формулі (8.24) з'являється величина τ_{ret} як час запізнювання (ретардації) деформації, протягом якого

деформація збільшується (повзе) від нуля до $(1 - e^{-1})$. Таким чином, модель описує повзучість.

Формула (8.22) дає відповідь, чи описує модель Фойхта явище релаксації при постійному значенні деформації $\varepsilon(t) = \varepsilon^o$. Оскільки з (8.22) випливає, що $\sigma(t) = \mu_k \varepsilon^o + \eta_k \cdot 0$, то напруження не змінюється і релаксація відсутня. Тому модель називають виродженою і, як правило, використовують лише для прикладів в підручниках.

Розглянемо можливість застосування реологічної моделі Фойхта до вивчення поширення сейсмічної плоскої поперечної гармонічної хвилі зміщення (SH-хвилі). Опишемо задачу поширення SH-хвилі в рамках лінійної теорії в'язкопружності.

Оскільки будь-яка одновимірна гармонічна хвиля зміщення має вигляд

$$u(x, t) = u^o e^{i(kx - \omega t)}, \quad (8.25)$$

(тобто з часом відбуваються коливання з частотою ω), то загальноприйнятий метод отримання рівняння поширення такої хвилі в теорії в'язкопружності використовує так звані комплексні модулі. Вони вводяться на основі представлення рівняння руху, яке у теорії в'язкопружності отримують з використанням інтегрального в'язкопружного оператора заміною в рівнянні теорії пружності пружного модуля на цей оператор.

Але для простих моделей, до яких відноситься модель Фойхта, можна застосувати прямий підхід. На першому кроці цього підходу використовується факт, що будь-який одновимірний рух для будь-якої залежності напруження від деформації (конкретно, як для пружного закону деформування, так і для в'язкопружного закону) описується рівнянням

$$\rho \left(\partial^2 u / \partial t^2 \right) = (\partial \sigma / \partial x). \quad (8.26)$$

Далі прямий підхід полягає у прямій підстановці конститутивного закону (8.22) для моделі Фойхта. Цей підхід уможливлює пряме обчислення

параметрів плоскої поперечно поляризованої гармонічної хвилі зміщення, саме яка є предметом аналізу.

Представлення хвилі у цьому випадку використовує поняття постійної амплітуди A , дійсного хвильового числа k та коефіцієнта релаксації $\gamma > 0$

$$u(x,t) = A e^{-\gamma x - i(kx - \omega t)}. \quad (8.27)$$

Підставимо представлення деформації через зміщення $\varepsilon = (\partial u / \partial x)$ в конститутивне рівняння (8.22)

$$\sigma(t) = \mu_K \varepsilon(t) + \eta_K \dot{\varepsilon}(t) = \mu_K \frac{\partial u}{\partial x} + \eta_K \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \quad (8.28)$$

Цей вираз підставимо в рівняння руху (8.26) і отримаємо рівняння, яке описує гармонічну в'язкоупружну SH-хвиллю,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu_K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta_K \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (8.29)$$

Зауважимо, що це вже не найпростіше хвильове рівняння, яким описується поширення пружної хвилі – порядок рівняння третій, а не другий.

Отже, формально затухання хвилі в рамках моделі Фойхта враховується в рівнянні (8.29) членом $\eta_K (\partial^3 u / \partial x^2 \partial t)$.

Перевіримо, чи має рівняння (8.29) розв'язок у вигляді хвилі (8.27). Для цього підставляємо (8.27) в (8.29) і з врахуванням позначень $v_T^o = \sqrt{\mu_K / \rho}$, $\alpha = (\eta_K / \mu_K)$ отримуємо

$$-\left(v_T^o\right)^{-2} \omega^2 + 2\alpha\gamma k\omega - \left(\gamma^2 - k^2\right) + i\left[-2\gamma k - \alpha\omega(\gamma^2 - k^2)\right] = 0. \quad (8.30)$$

Прирівняємо окремо до нуля дійсну і уявну частини в (8.30) і далі розв'яжемо два рівняння щодо двох невідомих величин – хвильового числа k і коефіцієнта затухання γ .

З рівності уявної частини нулеві отримуємо значення γ через k

$$\gamma^2 + \frac{2k}{\alpha\omega}\gamma - k^2 = 0, \quad \gamma = -\frac{k}{\alpha\omega} \left(1 \mp \sqrt{1 + (\alpha\omega)^2} \right), \quad \gamma = -\frac{1}{\alpha v_T} \left(1 \mp \sqrt{1 + (\alpha\omega)^2} \right). \quad (8.31)$$

де вважається, що невідома швидкість хвилі виражається через невідоме хвильове число $v_T = (\omega/k)$.

Далі, враховуючи формулу (8.31), отримуємо формулу для знаходження швидкості хвилі через відомі параметри реологічної моделі і відому частоту

$$v_T = \sqrt{2} \frac{v_T^o}{\alpha\omega} \sqrt{\left[1 + (\alpha\omega)^2 \right] \left[\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2} - 1 \right]}, \quad (8.32)$$

і формулу для визначення коефіцієнта затухання

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}v_T^o} \left[\left(\omega \sqrt{\sqrt{1 + (\alpha\omega)^2} - 1} \right) \Big/ \sqrt{1 + (\alpha\omega)^2} \right]. \quad (8.33)$$

Обидві формули свідчать, що частота суттєво впливає на параметри хвилі. Формула (8.33) також свідчить, що хвиля дисперсивна, оскільки її швидкість нелінійно залежить від частоти.

Нагадаємо тут, що модель Фойхта не описує одне з двох основних явищ реологічної поведінки - релаксації напруження. У цій моделі напруження весь час незмінні, коли насправді в ґрутових шарах вони зменшуються. Як відомо, одним з основних механізмів руйнування є перевищення певного рівня напружень. Більш повні реологічні моделі описують факт, що деформування супроводжується зниженням рівня напружень і таким способом зменшенням імовірності руйнування.

8.5. Стандартна реологічна модель (три-елементні моделі Пойнтінга-Томсона та Кельвіна).

Наступною за складністю простотою моделлю є три-елементна модель, коли до двох елементів моделі Фойхта додають ще одну пружину.

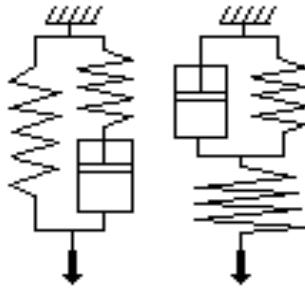


Рис. 8.3. Схематичне зображення три-елементних схем

(зліва модель Пойнтінга-Томсона $P - T = H \parallel (N - H)$, справа модель Кельвіна $K = (H \parallel N) - H$).

Отримується так звана стандартна модель теорії в'язкопружності, яка описує обидва явища – релаксацію напруження і повзучість деформації. Але існують ще інші переваги стандартної моделі, які будуть показані згодом.

У цій моделі рівняння зв'язку між напруженням і деформацією (конститутивне рівняння) має вигляд звичайного диференціального рівняння 1-ого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\frac{\eta_K}{\mu_K + \mu_S} \dot{\sigma}(t) + \sigma(t) = \frac{\mu_S \eta_K}{\mu_K + \mu_S} \dot{\varepsilon}(t) + \frac{\mu_S \mu_K}{\mu_K + \mu_S} \varepsilon(t). \quad (8.34)$$

Звичайно рівняння (8.34) записують у вигляді

$$n \dot{\sigma}(t) + \sigma(t) = E n \dot{\varepsilon}(t) + H \varepsilon(t), \quad (8.35)$$

де використовуються три реологічні параметри: E - миттєвий модуль пружності, H - тривалий модуль пружності, n - час релаксації. Кожен з цих трьох параметрів має фізичне трактування.

Модуль E називають миттєвим модулем пружності з тих міркувань, що при швидких процесах деформування швидкості $\dot{\sigma}(t), \dot{\varepsilon}(t)$ є великими порівняно з самими $\sigma(t), \varepsilon(t)$ і тоді величинами $\sigma(t), H\varepsilon(t)$ в (8.35) можна знехтувати. Реологічний закон (8.35) перетворюється в закон Гука $\dot{\sigma}(t) = E \dot{\varepsilon}(t)$ з модулем пружності E .

Модуль H називають тривалим модулем пружності тому, що при по-

вільних процесах деформування величини $\sigma(t), H\varepsilon(t)$ є великими порівняно з їхніми швидкостями і тоді виразами $n\dot{\sigma}(t), nE\dot{\varepsilon}(t)$ в (8.35) можна знехтувати. У цьому разі з (8.35) знову отримується закон Гука $\sigma(t)=H\varepsilon(t)$ з модулем пружності H .

Диференціальне рівняння (8.35) має два еквівалентні представлення у вигляді інтегральних рівнянь з простими експоненціальними ядрами

$$\sigma(t)=E\varepsilon(t)-\frac{E-H}{n}\int_0^t\varepsilon(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{n}}d\tau, \quad (8.36)$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\frac{E-H}{E^2n}\int_0^t\sigma(\tau)e^{-\frac{H}{En}(t-\tau)}d\tau. \quad (8.37)$$

Релаксацію напруження при заданому постійному значенні деформації ε^o стандартна модель описує за формулою (8.36) таким чином

$$\sigma(t)=\varepsilon^o\left[H+(E-H)e^{-\frac{t}{n}}\right], \quad (8.38)$$

Тобто, напруження релаксує від початкового значення $E\varepsilon^o$ до значення $H\varepsilon^o$, яке відповідає тривалому періоду спостереження.

Повзучість деформації при сталому значенні напруження σ^o стандартна модель описує за формулою (8.37) таким виразом

$$\varepsilon(t)=\sigma^o\left[\frac{1}{H}+\left(\frac{1}{E}-\frac{1}{H}\right)e^{-\frac{H}{En}t}\right], \quad (8.39)$$

Тобто, деформація зростає (повзе) від початкового значення σ^o/E до значення σ^o/H , яке відповідає тривалому періоду спостереження.

8.6. Задача про гармонічну сейсмічну хвиллю в рамках стандартної реологічної моделі

Застосуємо прямий підхід до аналізу поширення зсувиної гармонічної хвилі в рамках стандартної моделі. Для цього підставимо лінійне представ-

лення деформації через зміщення $\varepsilon = \partial u / \partial x$ в рівняння (8.35), у якому змінимо позначення, ввівши модуль зсуву μ ($\mu_0 = E$, $\mu_\infty = H$)

$$n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \mu_0 n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8.40)$$

Рівняння руху, записане через зміщення, можна отримати використавши класичне рівняння руху $\rho (\partial^2 u / \partial t^2) = (\partial \sigma / \partial x)$ і створивши на його основі рівності

$$n \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = n \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t} \quad \text{та} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + n \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}.$$

Підстановка цих рівностей в рівняння (8.40) дає нове рівняння руху

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu_0 n \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.41)$$

Рівняння (8.41) містить додатково два доданки з третіми похідними.

Зауважимо, що це не найпростіше хвильове рівняння, яким описується класична пружна зсувна хвиля

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (8.42)$$

При вивченні гармонічних хвиль, які описує реологічне рівняння (8.41), можливі три випадки.

У випадку 1 вважається, що хвиля затухає за просторовою координатою і має вигляд

$$u(x, t) = A e^{-\gamma x - i(kx - \omega t)}. \quad (8.43)$$

Випадок 2 розглядає затухання за часом і тоді хвиля має інший вигляд

$$u(x, t) = A e^{i[kx - (\omega + i\alpha)t]}. \quad (8.44)$$

Випадок 3 відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом

$$u(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)}. \quad (8.45)$$

В усіх випадках слід перевірити, чи має рівняння (8.41) розв'язок у вигляді хвилі (8.43) або (8.44).

У випадку 1 при підстановці (8.43) у (8.41) з врахуванням позначення $v_T^o = \sqrt{\mu_0/\rho}$ отримуємо рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі - хвильовим числом k , коефіцієнтом затухання γ і частотою ω

$$\begin{aligned} & \left[\left(v_T^o \right)^{-2} \omega^2 + \left(\mu_\infty / \mu_0 \right) (\gamma^2 - k^2) - 2n\omega\gamma k \right] + \\ & + i \left[n \left(v_T^o \right)^{-2} \omega^3 + n\omega(\gamma^2 - k^2) + 2 \left(\mu_\infty / \mu_0 \right) \gamma k \right] = 0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

Далі необхідно прирівняти дійсну та уявну частини рівняння (8.46) до нуля. При цьому введемо позначення

$$\left(\mu_0 / \mu_\infty \right) = \left(v_T^{o2} \right) / \left(v_T^{\infty 2} \right) = m \quad (8.47)$$

і отримаємо два рівняння дуже подібної структури

$$v_T^{-2} + 2nm\gamma v_T^{-1} - \frac{m}{\left(v_T^o \right)^2} - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0, \quad (8.48)$$

$$\gamma^2 + 2\gamma \frac{v_T^{-1}}{nm} + \left[\left(v_T^o \right)^{-2} - v_T^{-2} \right] \omega^2 = 0. \quad (8.49)$$

Отримані рівняння не є ідентичними і містять три невідомі величини – актуальну швидкість хвилі v_T , коефіцієнт затухання хвилі γ та частоту ω . Тому з цих рівнянь можна визначити перші дві величини як функції частоти.

Рівняння (8.48), (8.49) можна перетворити до більш зручного вигляду шляхом ділення рівняння (8.49) на ω^2 і наступного додавання отриманого рівняння і рівняння (8.48)

$$\gamma = Kv_T, \quad K = \frac{(m-1)}{2 \left(v_T^o \right)^2 nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}, \quad (8.50)$$

$$v_T^4 - \omega^2 m \left(\frac{2n}{K} - \frac{1}{(v_T^o)^2 K^2} \right) v_T^2 - \frac{\omega^2}{K^2} = 0. \quad (8.51)$$

Отже, в стандартній моделі актуальна швидкість хвилі і затухання амплітуди хвилі за просторовою координатою залежать нелінійно від частоти і визначаються початковою швидкістю та відношенням миттєвого модуля до тривалого модуля.

Можливо, найбільш важливим висновком з отриманих формул щодо швидкості хвилі і її затухання для подальшого аналізу сейсмічних хвиль є те, що ці характеристики хвилі в окремо взятому шарі ґрунту є різними для різних частот. Це не узгоджується з загальноприйнятим в теорії сейсмічних хвиль припущенням про незалежність модуля зсуву від частоти і залежності модуля зсуву (отже, швидкості зсувної хвилі в окремо взятому шарі ґрунту), а також залежності цього модуля від часу. Ця залежність взагалі протирічить концепції континуальної механіки про сталість модулів (параметрів моделі, сталих, констант).

У випадку 2 підстановка представлення (8.44) у рівняння (8.41) дає інше рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі - хвильовим числом k , коефіцієнтом затухання α і частотою ω

$$\begin{aligned} & \rho(\alpha^2 - \omega^2) - 3\alpha\omega^2 n\rho + n\rho\alpha^3 + k^2(\alpha\mu_0 n + \mu_\infty) \\ & i\omega(-3\rho\alpha^2 n - 2\rho\alpha + \rho\omega^2 n + \mu_0 n k^2) = 0 \end{aligned} \quad (8.52)$$

Прирівнюючи дійсну та уявну частини рівняння (8.52) до нуля, отримуємо два рівняння структури, відмінної від структури рівнянь (8.50), (8.51)

$$(v_T^o)^{-2} \left[n\alpha_T^3 + \alpha_T^2 - 3\omega^2 n\alpha_T - \omega^2 \right] - v_T^{-2} \omega^2 (n\alpha_T + 1/m) = 0, \quad (8.53)$$

$$(v_T^o)^{-2} \left\{ 2(\alpha_x/n\omega^2) + (3\alpha_x^2/\omega^2 - 1) \right\} - (v_T)^{-2} = 0. \quad (8.54)$$

Рівняння (8.54) дає просту формулу зв'язку між актуальною швидкістю хвилі

v_T , коефіцієнтом затухання хвилі що до частоти ω

$$v_T^2 = \frac{v_T^{o2}}{3\alpha_x^2/\omega^2 + 2\alpha_x/n\omega^2 - 1}. \quad (8.55)$$

Підстановка значення швидкості хвилі (8.55) в рівняння (8.53) дає кубічне алгебраїчне рівняння щодо величини коефіцієнта затухання α_T

$$\alpha_T^3 + \alpha_T^2 (3/4n)(1+1/m) + \alpha_T (1/2n^2m - \omega^2) - \omega^2 (1/4n)(1+1/m) = 0. \quad (8.56)$$

При відомому дійсному α_x представлення хвилі у вигляді (8.44) є можливим і швидкість хвилі визначається за формулою (8.55). Отже, цей випадок описує дисперсійну хвиллю.

Випадок 3 досліджується за схемою, використаною для двох попередніх випадків.

Однак при припущення, що хвильове число є дійсним, рівняння типу (8.48), (8.49) та (8.53), (8.54) не узгоджуються між собою, з чого випливає, що шуканий розв'язок не існує. Коли припустити, що хвильове число є комплексним, то випадок 3 співпадає з випадком 1.

Перевагою в застосуванні стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль в ґрутових шарах можна вважати можливість аналітично порахувати характеристики хвилі. Для кожного конкретного шару треба знати три константи моделі (миттєвий модуль, тривалий модуль, час релаксації) і параметри хвилі на вході в шар (амплітуду, кут падіння, частоту, коефіцієнт затухання). Отже, в конкретних задачах про сейсмічні хвилі необхідні конкретні знання значень реологічних параметрів моделі. Вважається, що константи стандартної моделі визначаються зі стандартних (регламентованих) дослідів на повзучість зразків при зсуви.

8.7. Простий спосіб визначення трьох реологічних параметрів моделі.

Цей спосіб застосовується в механіці полімерних матеріалів і описаний у книзі [106] і, скоріш за все, невідомий у механіці ґрунтів та сейсмофізиці.

Простота методу полягає у тому, що всі три параметри реологічної моделі визначаються з однієї кривої повзучості, отриманої з досліду на одновісний розтяг чи простий зсув.

Як відомо з [32, 106, 109], теоретична крива повзучості у стандартній реологічній моделі визначається формулою (8.39)

$$\varepsilon(t) = \sigma^o \left[\frac{1}{H} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{H} \right) e^{-\frac{H}{En} t} \right].$$

Будь-який спосіб визначення реологічних параметрів за допомогою експериментальної кривої повзучості пов'язаний з умовою, що експериментальна і теоретична криві повзучості повинні бути якомога ближче одна до одної. Тут виникають дві проблеми, пов'язані з аналізом експериментальної кривої. Проблема 1 полягає у тому, що миттєву деформацію ε_0 складно зафіксувати для початкових значень часу кривої повзучості (складно зафіксувати відповідну точку на кривій). Проблема 2 стосується тривалого модуля і відповідного значення деформації на кривій повзучості. Таке значення можна отримати лише при довготривалому експерименті, який складно здійснити. Тому в механіці полімерних матеріалів вироблена така методика.

Спочатку фіксуються моменти часу

$$t = t_n \quad (n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots) \quad (8.57)$$

і вводяться позначення

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon(t_1) = \varepsilon_1, \quad \varepsilon(t_2) = \varepsilon_2, \dots \quad H/En = 1/b. \quad (8.58)$$

Тоді з формулі (8.39) випливають такі рівності

$$\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_1}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = e^{-\frac{t_1}{b}}, \quad \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_2}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = e^{-\frac{t_2}{b}} = e^{-\frac{2t_1}{b}} = \left[e^{-\frac{t_1}{b}} \right]^2, \quad \frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon_{2n}}{\varepsilon_\infty - \varepsilon_0} = e^{-\frac{t_{2n}}{b}} = \left[e^{-\frac{t_1}{b}} \right]^{2n}, \quad (8.59)$$

або

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2}, \dots, \varepsilon_{\infty} = \frac{(\varepsilon_n)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_{2n}}{2\varepsilon_n - \varepsilon_0 - \varepsilon_{2n}}. \quad (8.60)$$

З формул (8.60) отримується рівність

$$\frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2} = \frac{(\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_4}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0 - \varepsilon_4}. \quad (8.61)$$

Таким чином, для знаходження ε_0 , яке дає значення миттєвого модуля E за однією з відомих формул (для кривої повзучості значення напруження σ відоме)

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma}{H}, \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}, b = \frac{En}{H}, \quad (8.62)$$

треба знати $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$ - три величини, які визначаються з кривої повзучості. За очевидної умови $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ таке значення знаходиться як корінь квадратного рівняння (8.61) щодо ε_0 .

При відомому ε_0 значення деформації при довготривалій повзучості ε_{∞} (а, отже, тривалого модуля H згідно з першою формулою (8.62)), вираховується за першою формулою (8.60).

Як випливає з проведеного вище аналізу, два реологічні параметри знаходяться досить просто. Однак, третій параметр – час релаксації n – потребує подальшого аналізу.

Розглянемо далі коротко гіпотетичний приклад з книги [111] та ряду посилань [122, 142-144]. Нагадаємо, що аналізується відповідність експериментальної кривої теоретичній, яка проходить через три точки $\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \varepsilon(t_3)$ з експериментальної кривої. Цих трьох значень достатньо для визначення трьох реологічних параметрів стандартної моделі. Оскільки спосіб отримання значень миттєвого і тривалого модулів вже описаний, то зосередимось на визначенні часу релаксації.

Звернемося до формули (8.39), яка описує теоретично повзучість для до-

вільного напруження і у довільний момент часу. Особливістю кривої повзучості є те, що вона будується експериментально при постійному напруженні. Для конкретних точок на кривій t_N при позначенні $b_N = \frac{En}{H} t_N$ значення деформації, яка відповідає цій точці на кривій, визначається за простою формулою

$$\varepsilon(b_N) = \varepsilon_\infty - \sigma \frac{H-E}{HE} e^{-b_N}, \quad (8.63)$$

або

$$-b_N = \ln \left[\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon(b_N)}{\sigma} \frac{HE}{H-E} \right], \quad (8.64)$$

Формула (8.64) дає значення часу релаксації, на чому процедура знаходження реологічних параметрів закінчується.

Рис. 8.4 показує гіпотетичну криву повзучості і схематично вибір точок на кривій повзучості [33, 111]. Нехай моменти часу t_1, t_2, t_3 вибрані так, як показано на цьому рисунку. Відповідні значення деформації є такими (система CI): $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 4, \varepsilon_3 = 5$.

Зазначимо, що на рисунку прийняті позначення $\varepsilon_0 = \varepsilon_y, \varepsilon_\infty = \varepsilon_n$. Тоді

$$\varepsilon_0 = 1,38, \varepsilon_\infty = 5,6. \quad (8.65)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64)

$$n = 2,4 \cdot 10^{-3}. \quad (8.66)$$

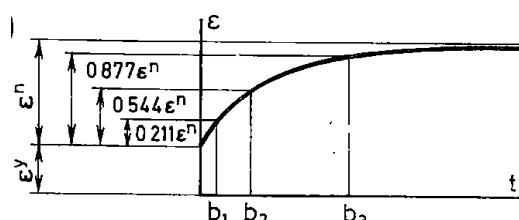


Рис. 8.4 Гіпотетична крива повзучості

Таким чином, розвинена стосовно полімерних матеріалів методика визначення реологічних параметрів стандартної моделі є простою, однозначною і виключає суб'єктивний вибір точок на експериментальній кривій повзучості.

повзучості.

Ще одною перевагою цієї методики є вже згадувана можливість визначати три реологічні параметри з одного експерименту на одновісний розтяг чи простий зсув.

8.8. Обчислення параметрів реологічної моделі для трьох типів ґрутових шарів. Теоретичний та числовий аналіз сценарій зміни швидкості хвилі та затухання амплітуди хвилі з часом та відстанню поширення хвилі

Розглянемо далі можливість застосування описаного підходу (способу, методики) до аналізу ґрутових шарів. Для цього використаємо експериментальні криві повзучості трьох типів ґрутових шарів - бурого суглинку, піщаного жирного суглинку, отримані в роботі [103, 109] та мулистої глини отримані в роботі [156]. Ці криві показані на рисунках 8.5 та 8.6 відповідно.

На рисунках 8.5 та 8.6 показані залежності деформації зсуву (насправді, показані значення відхилення від початкової довжини циліндричного зразка) від часу при різних значеннях прикладеного зсувного напруження.

Показані рисунки дають змогу розглянути три приклади обчислення реологічних параметрів та знаходження сценарій зміни характеристик хвилі.

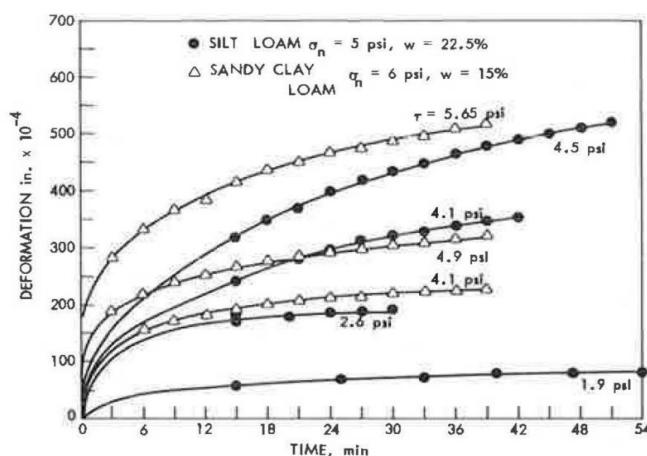


Рис. 8.5 Криві повзучості для бурого суглинку та піщаного жирного суглинку

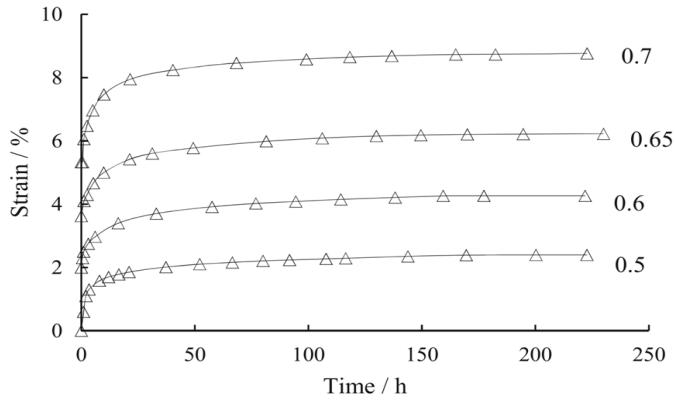


Рис. 8.6 Криві повзучості для мулистої глини.

Далі проаналізуємо розв'язки які описують реологічне рівняння (8.41) для двох перших можливих випадків (варіант 1, 2).

Відповідні розв'язки залежності швидкості зсувної хвилі від частоти (8.49) та залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (8.48) варіанту 1 наступні:

$$v_T = \left(v_T^o \right) \sqrt{2nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)} \times \quad (8.67)$$

$$\times \sqrt{\left(\omega^2 nm \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right) + \sqrt{\omega^4 n^2 m^2 \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}} \right)}$$

$$\gamma = \frac{(m-1)}{2(v_T^o) nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)} \times \quad (8.68)$$

$$\times \sqrt{2nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right) \left(\omega^2 nm \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right) \pm \sqrt{\omega^4 n^2 m^2 \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right)^2 + \frac{1}{(m-1)^2}} \right)}$$

Розглянемо рівняння (8.55) залежності швидкості від коефіцієнта затухання хвилі α з часом поширення хвилі для варіанту 2 та рівняння (8.56)

залежності величини α від частоти для варіанту 2

$$\nu_T^2 = \frac{\nu_T^{o2}}{3\alpha_X^2/\omega^2 + 2\alpha_X/n\omega^2 - 1}.$$

$$\alpha_T^3 + \alpha_T^2 (3/4n)(1+1/m) + \alpha_T (1/2n^2m - \omega^2) - \omega^2 (1/4n)(1+1/m) = 0.$$

Оскільки математично важко виразити α_T з рівняння (8.56), то було прийнято, що графіки для (8.55) та (8.56) будуть отримані з рівнянь поточково – шляхом вибору десяти значень ω та відповідної підстановки в дані рівняння.

Розв'язок, що розглядає затухання за часом (випадок 2) відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом і має вигляд

$$u(x, t) = Ae^{i[kx - (\omega + i\alpha)t]} = Ae^{(ikx - i\omega t + \alpha t)} = Ae^{\alpha t} \cos(kx - \omega t). \quad (8.69)$$

Далі проведено теоретичний та чисельний аналіз для кожного типу ґрунтових шарів. Всього розглянуто 6 прикладів. Кожному прикладу відповідає один із трьох ґрунтових шарів та два різних значення напруження σ , які визначені з робіт [112, 130, 126, 128]. Для одного ґрунтового шару та відповідного значення напруження знайдено відповідні деформації $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ з яких отримані деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$, значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, а також відповідні швидкості хвилі та час релаксації.

Для кожного ґрунтового шару (один ґрунтовий шар та відповідне значення напруження) побудовано шість наборів графіків. Кожен набір включає п'ять графіків: перший графік відповідає залежності швидкості хвилі від частоти (випадок 1), другий – залежності затухання амплітуди хвилі від частоти хвилі (випадок 1), третій – залежності швидкості хвилі від частоти (випадок 2), четвертий – залежності затухання хвилі α_T від частоти хвилі (випадок 2), п'ятий – сценарій еволюції хвилі в залежності від часу.

Приклад 1 (піщаний жирний суглиночок для $\sigma = 4,1 \text{ psi}$).

Виберемо далі криву, яка відповідає піщаному жирному суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi} = 28,25851 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (третя знизу крива на рисунку 8.5).

Спочатку фіксуємо моменти часу: $t_1 = 9, t_2 = 18, t_4 = 36$ (у хвилинах) або $t_1 = 540, t_2 = 1080, t_4 = 2160$ (у секундах).

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації ϵ такими (система СІ):

$$\epsilon_1 = 5,83 \cdot 10^{-3}, \epsilon_2 = 6,66 \cdot 10^{-3}, \epsilon_3 = 7,5 \cdot 10^{-3}. \quad (8.70)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\epsilon_0, \epsilon_\infty$ приймають значення

$$\epsilon_0 = 4,4 \cdot 10^{-3}, \epsilon_\infty = 8,0 \cdot 10^{-3}. \quad (8.71)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$E = \mu_0 = 6,28 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 3,51 \cdot 10^6, \quad (8.72)$$

$$v_T^o = \sqrt{\mu_0 / \rho} = 75,94, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 56,77 \\ \mu_0 / \mu_\infty = m = 1,8. \quad (8.73)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64)

$$n = 639.87 \quad (8.74)$$

Всі три реологічні параметри стандартної моделі для піщаного жирного суглинку знайдені. Запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і для отриманих значення реологічних параметрів (8.72-8.74).

На рис. 8.7-8.11 наведено графіки для варіанта, що відповідає ґрунтовому шару піщаний жирний суглинок і таким значенням параметрів: $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

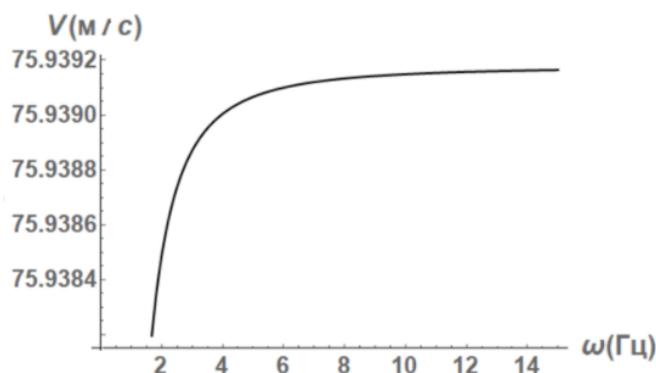


Рис. 8.7. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

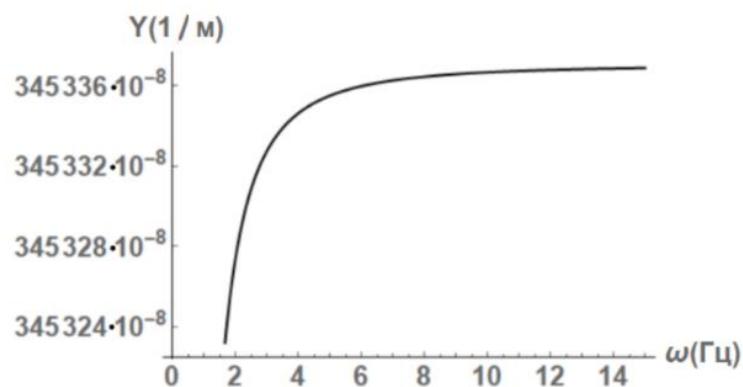


Рис. 8.8. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

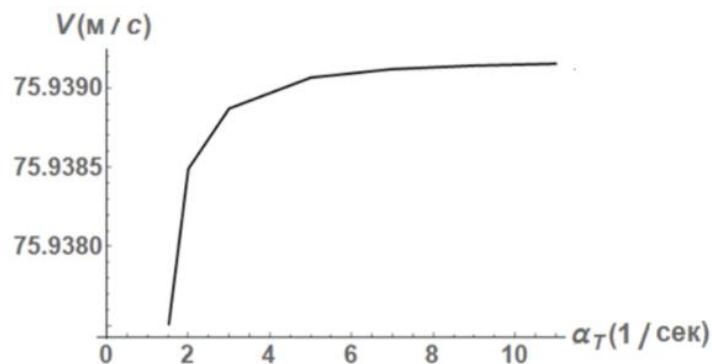


Рис. 8.9. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

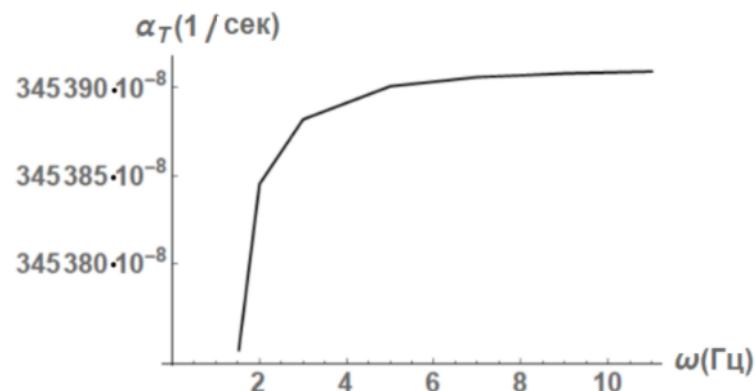


Рис. 8.10. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

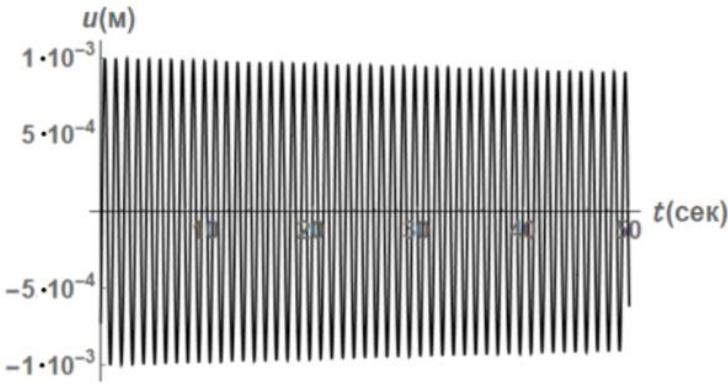


Рис. 8.11. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Приклад 2 (піщаний жирний суглинок для $\sigma = 4,9 \text{ psi}$).

Виберемо далі криву, яка відповідає піщаному жирному суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,9 \text{ psi} = 33,784 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (третя знизу крива на рисунку . 8.5).

Спочатку фіксуємо моменти часу: $t_1 = 9, t_2 = 18, t_4 = 36$ (у хвилинах) або $t_1 = 540, t_2 = 1080, t_4 = 2160$ (у секундах).

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими (система CI):

$$\varepsilon_1 = 8,0 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_2 = 9,3 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_3 = 10,6 \cdot 10^{-3}. \quad (8.75)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 5,8 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_\infty = 11,4 \cdot 10^{-3}. \quad (8.76)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$E = \mu_0 = 5,72 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 2,96 \cdot 10^6, \quad (8.77)$$

$$v_T^\circ = \sqrt{\mu_0 / \rho} = 72,47, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 52,13 \\ \mu_0 / \mu_\infty = m = 1,93. \quad (8.78)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64)

$$n = 580.25 \quad (8.79)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для піщаного жирного суглинку знайдені. Запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і отриманих значення реологічних параметрів (8.77-8.79).

На рис. 8.12-8.16 наведено графіки для варіанта, що відповідає грунтовому шару піщаний жирний суглинок і таким значенням параметрів: $\sigma = 4,9 \text{ psi}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

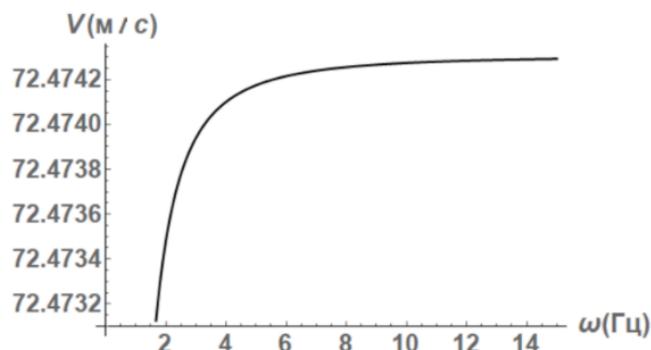


Рис. 8.12. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

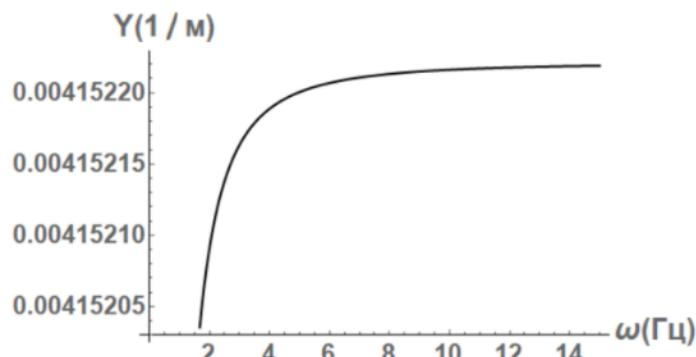


Рис. 8.13. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

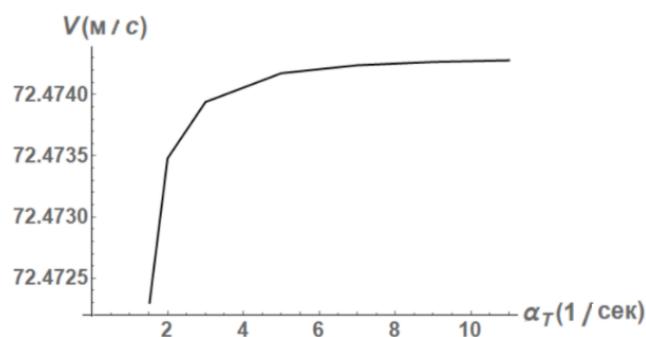


Рис. 8.14. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

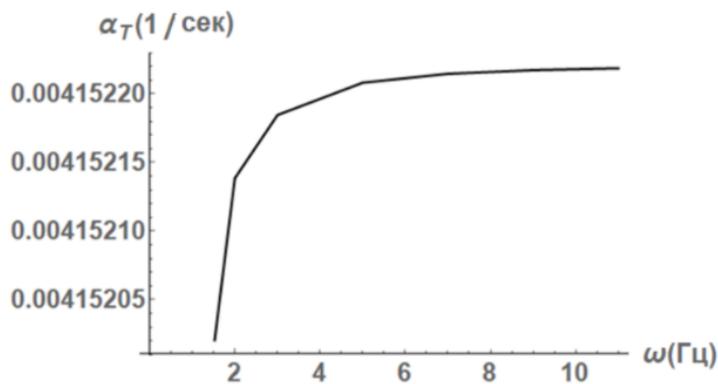


Рис. 8.15. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

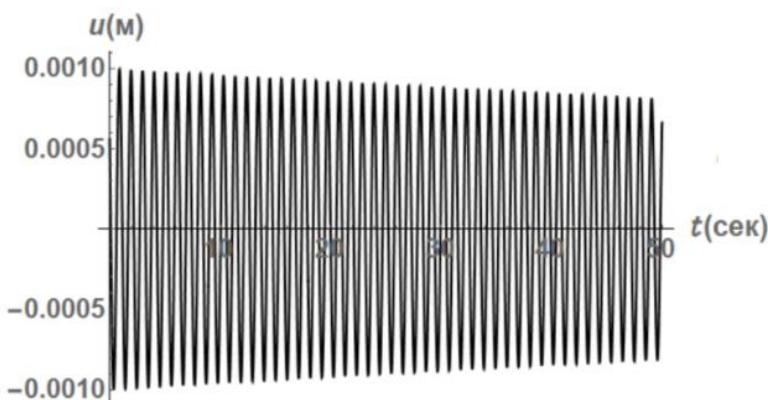


Рис. 8.16. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Проаналізовано два приклади для одного матеріалу, піщаного жирного суглинку, при наступних значеннях напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ та $\sigma = 4,9 \text{ psi}$ відповідно. На рисунках (8.7, 8.9, 8.12, 8.14) спостерігається зміна швидкості хвилі. Швидкість суттєво нелінійно змінюється зі зміною частоти, але спостережена зміна складає долі процента від початкового значення швидкості. Отже, зміна швидкості з частотою незначна і хвилю можна вважати не дисперсійною.

Друга група рисунків (8.8, 8.13) показує нелінійну зміну затухання амплітуди хвилі з пройденою хвилею відстанню при зміні частоти та з часом поширення хвилі. Ситуація аналогічна ситуації, яка показана на першій групі графіків. Зміна затухання амплітуди хвилі з часом чи з відстанню є якісно спостережуваною, але кількісно є незначною.

Третя група рисунків (8.10, 8.15) демонструє зміну затухання амплітуди хвилі від частоти (2-гий випадок). Графіки показують що залежність не-

значна. Зміна затухання є якісно спостережуваною, але кількісно є незначною.

Четверта група рисунків 8.11 та 8.16 показує сценарії еволюції хвилі при її поширенні (тобто, в залежності від часу поширення). Показані сценарії підтверджують початкове припущення, що стандартна реологічна модель описує хвилю, експоненціально затухаючу з часом поширення.

Приклад 3 (бурий суглинок для $\sigma = 4,1 \text{ psi}$).

Виберемо далі криву, яка відповідає бурому суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi} = 28,25851 \text{ KPa}$ і густині $\rho = 1,137 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (п'ята знизу крива на рисунку 8.5).

Спочатку виберемо моменти часу:

$t_1 = 9, t_2 = 18, t_4 = 36$ (у хвилинах) або $t_1 = 540, t_2 = 1080, t_4 = 2160$ (у секундах).

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими (система СІ):

$$\varepsilon_1 = 6,66 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_2 = 8,83 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_3 = 11,33 \cdot 10^{-3}. \quad (8.80)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 3,4 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_\infty = 13,5 \cdot 10^{-3}. \quad (8.81)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$\begin{aligned} E &= \mu_0 = 8,1 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 2,08 \cdot 10^6, \\ v_T^o &= \sqrt{\mu_0 / \rho} = 84,404, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 42,77 \\ \mu_0 / \mu_\infty &= m = 3,89. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64) і є таким

$$n = 366.68 \quad (8.83)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для бурого суглинку знайдені. Як і в попередньому прикладі, запропонований підхід пра-

цює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і отриманих значення реологічних параметрів (8.81-8.83).

На рис. 8.17-8.21 наведено графіки для варіанта, що відповідає ґрунтовому шару бурий суглинок і таким значенням параметрів: $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ і густині $\rho = 1,137 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

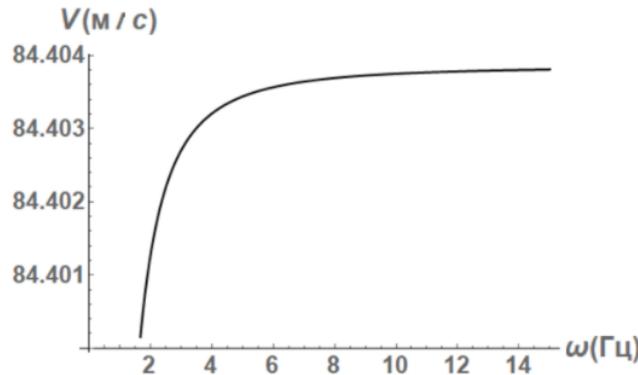


Рис. 8.17. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

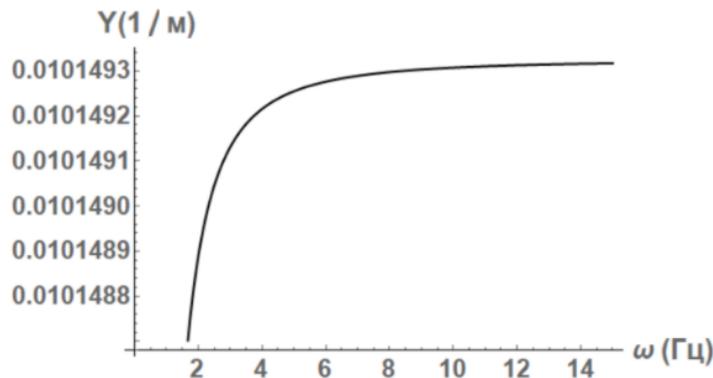


Рис. 8.18. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

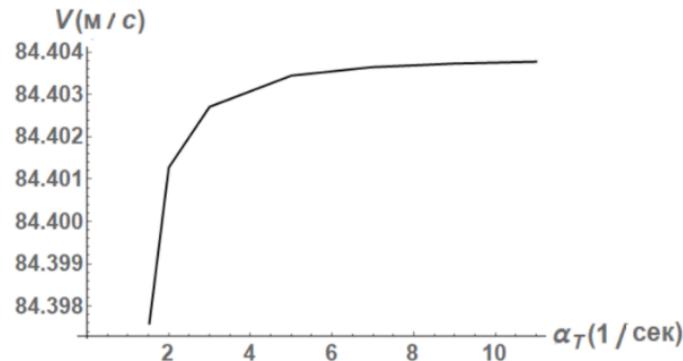


Рис. 8.19. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

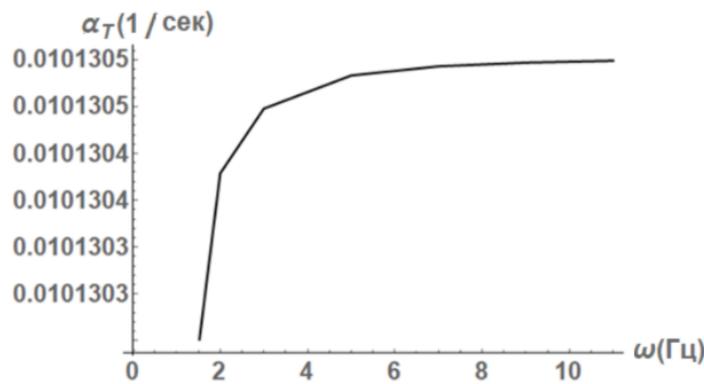


Рис. 8.20. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

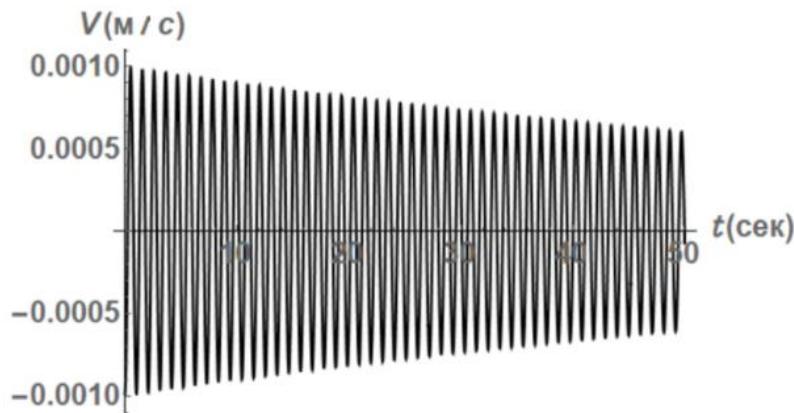


Рис. 8.21. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Приклад 4 (бурий суглинок для $\sigma = 4,5 \text{ psi}$).

Виберемо далі криву, яка відповідає бурому суглинку при значенні напруження $\sigma = 4,5 \text{ psi} = 31,026 \text{ KPa}$ і густині $\rho = 1,137 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (шоста знизу крива на рисунку 8.5).

Спочатку виберемо моменти часу:

$t_1 = 9, t_2 = 18, t_4 = 36$ (у хвилинах) або $t_1 = 540, t_2 = 1080, t_4 = 2160$ (у секундах).

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації ϵ такими (система СІ):

$$\epsilon_1 = 8,3 \cdot 10^{-3}, \epsilon_2 = 11,6 \cdot 10^{-3}, \epsilon_3 = 14,0 \cdot 10^{-3}. \quad (8.84)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\epsilon_0, \epsilon_\infty$ приймають значення

$$\epsilon_0 = 1,54 \cdot 10^{-3}, \epsilon_\infty = 14,7 \cdot 10^{-3}. \quad (8.85)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$\begin{aligned}
E = \mu_0 &= 20 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 2,1 \cdot 10^6, \\
v_T^o &= \sqrt{\mu_0 / \rho} = 132,62, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 42,97 \\
\mu_0 / \mu_\infty &= m = 9,52.
\end{aligned} \tag{8.86}$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64) і є таким

$$n = 78.98 \tag{8.87}$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для бурого суглинку знайдені. Як і в попередньому прикладі, запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і отриманих значення реологічних параметрів (8.85-8.87).

На рис. 8.22-8.26 наведено графіки для варіанта, що відповідає грунтовому шару бурий суглинок і таким значенням параметрів: $\sigma = 4,5 \text{ psi}$ і густині $\rho = 1,137 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

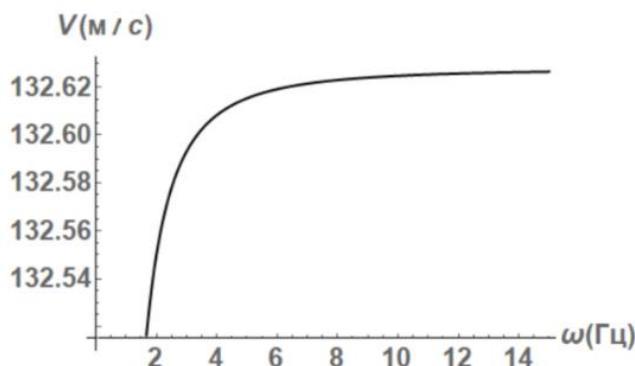


Рис. 8.22. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

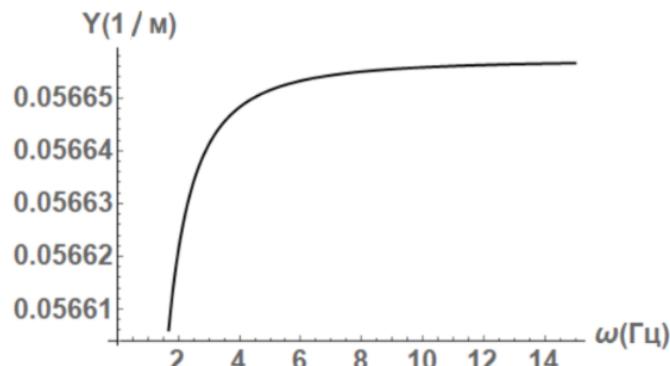


Рис. 8.23. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

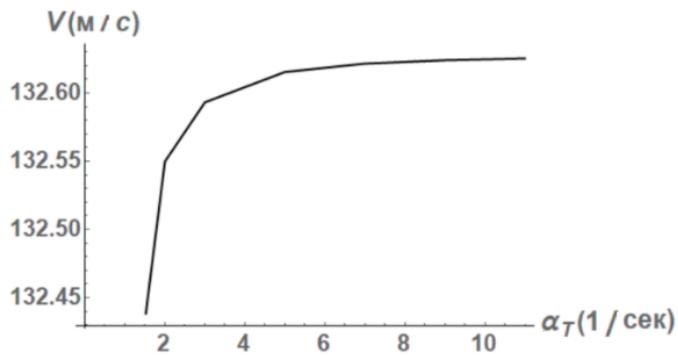


Рис. 8.24. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

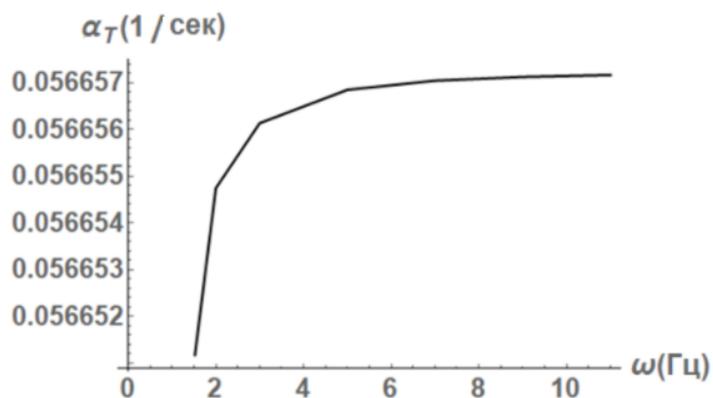


Рис. 8.25. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

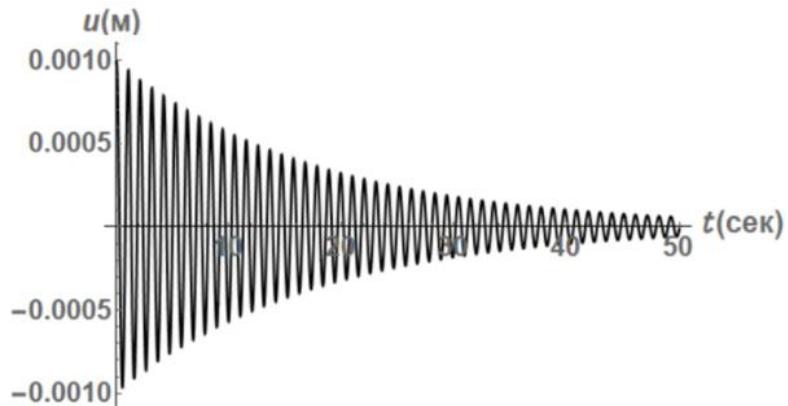


Рис. 8.26. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Проаналізовано два приклади для одного матеріалу (бурий суглинок), при наступних значеннях напруження: $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ та $\sigma = 4,5 \text{ psi}$.

На рисунках (8.17, 8.19, 8.22, 8.24) спостерігається зміна швидкості хвилі. Формально швидкість суттєво нелінійно змінюється зі зміною частоти. Це означає, що недисперсійна гармонічна хвилля в реологічному середовищі трансформується в дисперсійну хвиллю.

Однак практично у даних прикладах спострежена зміна складає долі процента від початкового значення швидкості. Тому можна вважати, що хвиля є недисперсійною.

Друга група рисунків (8.18, 8.23) показує нелінійну зміну затухання амплітуди хвилі з пройденою хвилею відстанню при зміні частоти та з часом поширення хвилі. Ситуація аналогічна ситуації, яка показана на першій групі графіків. Зміна затухання амплітуди хвилі з часом чи з відстанню є формально суттєво нелінійною. Практично у даних прикладах спострежена зміна амплітуди зі зміною частоти складає долі процента від початкового значення. Тому можна вважати, що зміна відсутня.

Третя група рисунків (8.20, 8.25) демонструє зміну затухання амплітуди хвилі від частоти (2-гий випадок). Графіки показують аналогічну картину до попереднього типу ґрунту.

Четверта група рисунків (8.21, 8.26) показує сценарії еволюції хвилі при її поширенні (тобто, в залежності від часу поширення). Показані сценарії аналогічні двом попереднім і підтверджують початкове припущення, що стандартна реологічна модель описує хвилю, експоненціально затухаючу з часом поширення.

Приклад 5 (мулиста глина для $\sigma = 100 \text{ КПа}$).

Експериментальні дані про повзучість мулистої глини взяті з недавньої публікації [32, 33, 151, 156]. Показаний нижче рисунок 8.6 з кривими повзучості відповідає рисунку 8.5 з публікації [110]. Деформації тут вираховуються в процентах до початкової форми зразка (з точки зору механіки матеріалів, $1\% = 1,0 \cdot 10^{-2}$). Час вираховується в годинах і потребує у системі СІ перерахування у секунди. Прикладене навантаження складає 100 КПа.

Виберемо криву повзучості, яка відповідає мулистій глині при значенні напруження $\sigma = 100 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,97 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (перша знизу крива на рисунку 8.6).

Далі виберемо моменти часу: $t_1 = 50, t_2 = 100, t_4 = 200$ (у годинах) або

$$t_1 = 1,8 \cdot 10^5, t_2 = 3,6 \cdot 10^5, t_4 = 7,2 \cdot 10^5 \text{ (у секундах).}$$

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими (система CI):

$$\varepsilon_1 = 2,2 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_2 = 2,4 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_3 = 2,6 \cdot 10^{-2}. \quad (8.88)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 1,87 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_\infty = 2,72 \cdot 10^{-2}. \quad (8.89)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$E = \mu_0 = 5,32 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 3,67 \cdot 10^6,$$

$$v_T^o = \sqrt{\mu_0 / \rho} = 51,96, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 43,16 \\ \mu_0 / \mu_\infty = m = 1,45. \quad (8.90)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64) і є таким

$$n = 2,57 \cdot 10^5 \quad (8.91)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для мулистої глини знайдені. Як і в попередніх прикладах, запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і отриманих значення реологічних параметрів (8.89-8.91).

На рис. 8.27-8.31 наведено графіки для варіанта, що відповідає ґрунтовому шару мулиста глина і таким значенням параметрів: $\sigma = 100 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,97 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

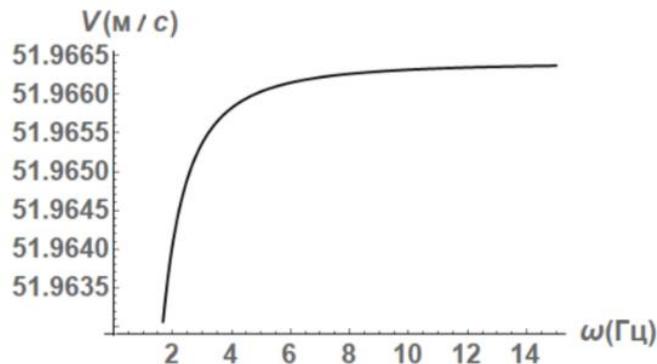


Рис. 8.27. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

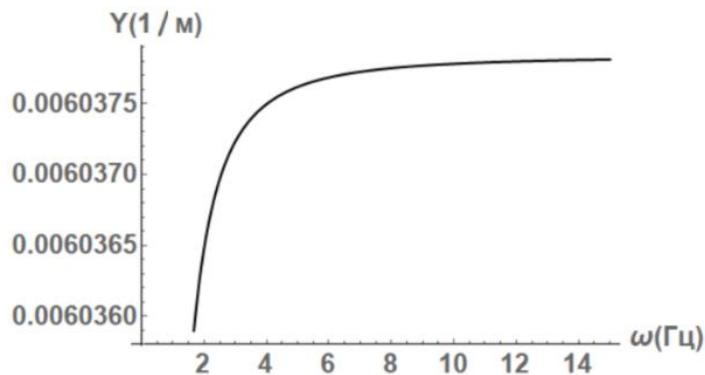


Рис. 8.28. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

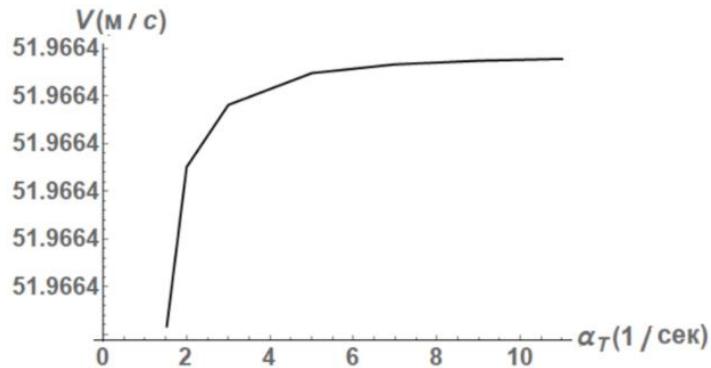


Рис. 8.29. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

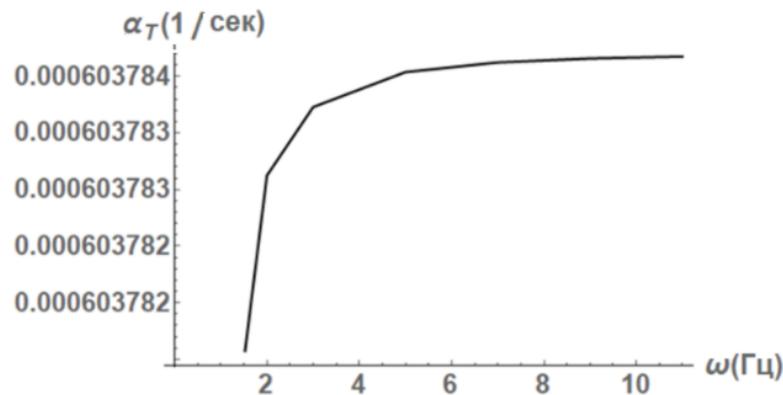


Рис. 8.30. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

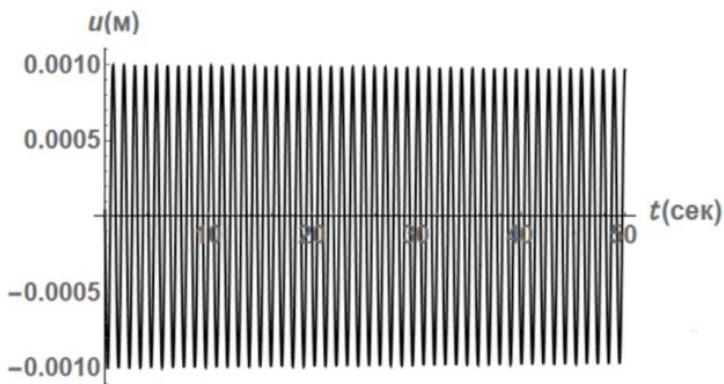


Рис. 8.31. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Приклад 6 (мулиста глина).

Експериментальні дані про повзучість мулистої глини взяті з недавньої публікації [32, 33, 103]. Деформації тут вираховуються в процентах до початкової форми зразка (з точки зору механіки матеріалів, $1\% = 1,0 \cdot 10^{-2}$) аналогічно до попереднього випадку з рисунка 8.6. Час вираховується у секундах. Прикладене навантаження складає 200 КПа.

Виберемо криву повзучості, яка відповідає мулистій глині при значенні напруження $\sigma = 200 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,97 \times 10^3 \text{ г/см}^3$ (друга знизу крива на рисунку 8.6 з [21]).

Далі виберемо моменти часу: $t_1 = 50, t_2 = 100, t_4 = 200$ (у годинах) або $t_1 = 1,8 \cdot 10^5, t_2 = 3,6 \cdot 10^5, t_4 = 7,2 \cdot 10^5$ (у секундах).

З форми вибраної кривої випливає, що відповідні значення деформації є такими (система СІ):

$$\varepsilon_1 = 4,0 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_2 = 4,2 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_3 = 4,4 \cdot 10^{-2}. \quad (8.92)$$

Тоді, згідно з формулами (8.60) - (8.62), деформації $\varepsilon_0, \varepsilon_\infty$ приймають значення

$$\varepsilon_0 = 2,86 \cdot 10^{-2}, \varepsilon_\infty = 4,4 \cdot 10^{-2}. \quad (8.93)$$

Відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими

$$E = \mu_0 = 3,49 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 2,26 \cdot 10^6,$$

$$v_T^o = \sqrt{\mu_0 / \rho} = 42,09, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty / \rho} = 33,87 \\ \mu_0 / \mu_\infty = m = 1,54. \quad (8.94)$$

Час релаксації визначається за формулою (8.64) і є таким

$$n = 8.77 \cdot 10^5 \quad (8.95)$$

Отже, всі три реологічні параметри стандартної моделі для мулистої глини знайдені. Як і в попередніх прикладах, запропонований підхід працює, він є простим і зручним.

Далі чисельно аналізуються формули (8.67), (8.68), (8.55), (8.56) та (8.69) і отриманих значення реологічних параметрів (8.93-8.95).

На рис. 8.32-8.36 наведено графіки для варіанта, що відповідає ґрунтовому шару мулиста глина і таким значенням параметрів: $\sigma = 200 \text{ КПа}$ і густині $\rho = 1,97 \times 10^3 \text{ г/см}^3$.

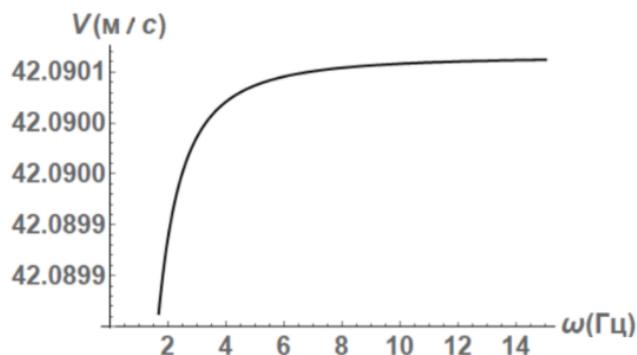


Рис. 8.32. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

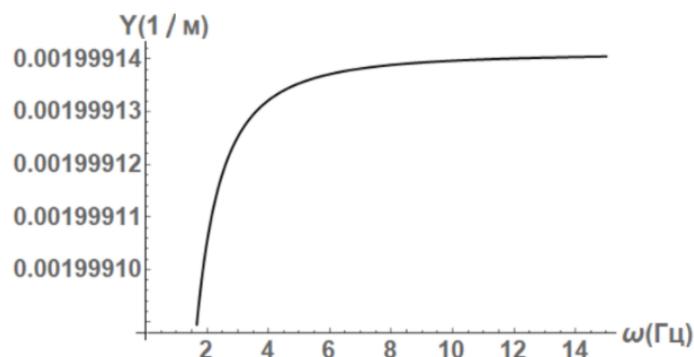


Рис. 8.33. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

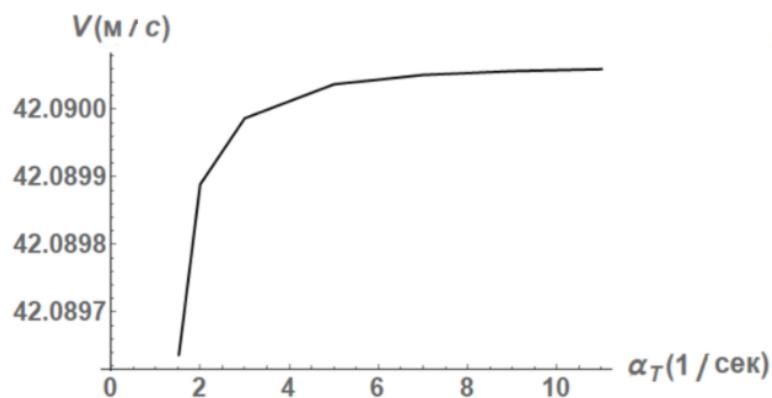


Рис. 8.34. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

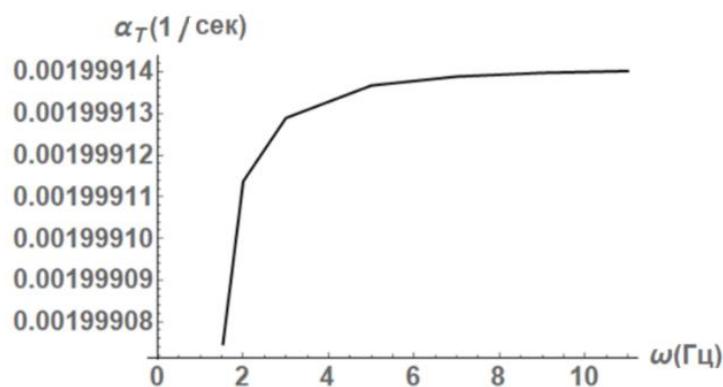


Рис. 8.35. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

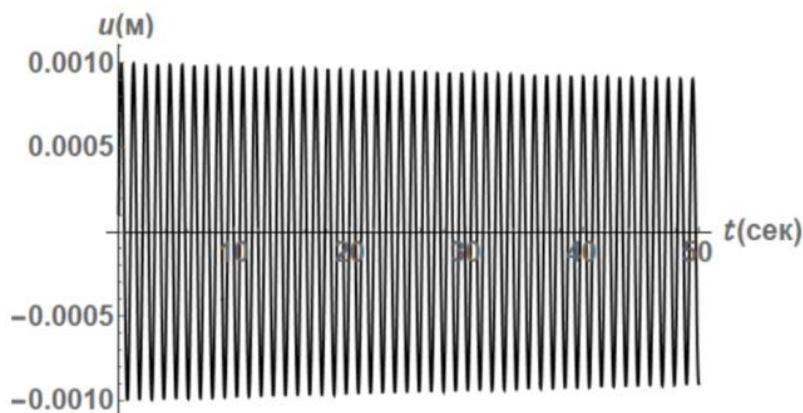


Рис. 8.36. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

Отже група рисунків (8.27, 8.29, 8.32, 8.34) стосується зміни швидкості хвилі. Практично у даних прикладах спострежена зміна складає долі процента від початкового значення швидкості. Тому можна вважати, що зміна якісно спостережувана та кількісно незмінна, а отже хвиля - недисперсійна.

Слід зазначити, що вибір початкового значення швидкості виявляється несуттєвим. Графіки залежності від частоти отримуються ідентичними для

довільного вибору початкового значення швидкості в рамках обмеження швидкості від v_0 до v_∞ .

Друга група рисунків (8.28, 8.33) показує нелінійну зміну затухання амплітуди хвилі з пройденою хвилею відстанню при зміні частоти та з часом поширення хвилі. Ситуація аналогічна ситуації, яка показана на першій групі графіків. Зміна затухання амплітуди хвилі з часом чи з відстанню є нормальним суттєво нелінійною. Практично у даних прикладах спострежена зміна амплітуди зі зміною частоти складає долі процента від початкового значення. Тому можна вважати, що зміна відсутня.

Третя група рисунків (8.30, 8.35) демонструє зміну затухання амплітуди хвилі від частоти (2-гий випадок). Графіки показують аналогічну картину до попередніх двох типів ґрунту. Спострежена зміна амплітуди затухання зі зміною частоти складає долю частини від початкового значення.

З рисунків (8.31, 8.36) видно сценарії еволюції хвилі при її поширенні (тобто, в залежності від часу поширення). Явище, яке спостерігається аналогічне попереднім чотирьом випадкам - реологічна модель описує хвилю, експоненціально затухаючу з часом поширення.

Отже в цілому спостережена для шести типів ґрунтових шарів в рамках стандартної реологічної моделі двох варіантів сейсмічних плоских зсувних гармонічних хвиль формально нелінійна залежність характеристик хвилі від частоти трансформується практично у настільки незначну, що нею можна знехтувати. При цьому, базова для реологічних моделей властивість експонентціального затухання амплітуди з часом поширення хвилі застосована, модель описує.

Іншими словами, якщо залежність параметрів хвилі від частоти стандартна модель практично не враховує, то залежність амплітуди хвилі від часу модель описує як дуже суттєву. При цьому хвilia вже не є просто гармонічною, а трансформується в експоненціально затухаючу гармонічну хвилю.

Отримані реологічні параметри, які продемонстровані в таблиці (8.1) показують, що при зміні напруження для кожного типу ґрунтів змінюються

реологічні параметри (миттєвий та тривалий модулі, час релаксації) (система CI):

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_0	ε_∞	E	H	n	v_T^o
Піщаний жирний суглинок $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ (приклад 1)	10^{-3} 5,83×	10^{-3} 6,66×	10^{-3} 7,5×	10^{-3} 4,4×	10^{-3} 8,0×	10^6 6,28×	10^6 3,51×		
Піщаний жирний суглинок $\sigma = 4,9 \text{ psi}$ (приклад 2)	10^{-3} 8,0×	10^{-3} 9,3×	10^{-3} 10,6×	10^{-3} 4,4×	10^{-3} 4,4×	10^6 6,28×	10^6 6,28×		
Бурий суглинок $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ (приклад 3)	10^{-3} 6,66×	10^{-3} 8,83×	10^{-3} 11,33×	10^{-3} 3,4×	10^{-3} 13,5×	10^6 8,1×	10^6 2,08×		
Бурий суглинок $\sigma = 4,5 \text{ psi}$ (приклад 4)	10^{-3} 8,3×	10^{-3} 11,6×	10^{-3} 14,0×	10^{-3} 1,54×	10^{-3} 14,7×	10^6 20×	10^6 2,1×		
Мулиста глина $\sigma = 100 \text{ KPa}$ (приклад 5)	10^{-2} 2,2×	10^{-2} 2,4×	10^{-2} 2,6×	10^{-2} 2,86×	10^{-2} 4,4×	10^6 5,32×	10^6 3,67×		
Мулиста глина $\sigma = 100 \text{ KPa}$ (приклад 6)	10^{-2} 4,0×	10^{-2} 4,2×	10^{-2} 10 ⁻²	10^{-2} 2,86×	10^{-2} 4,4×	10^5 10 ⁻²	10^5 2,1×		
								580,25	639,87
								72,47	75,94
42,09	51,96	132,62	84,404						

Таб.8.1. Реологічні параметри для трьох типів ґрунтів

Отримані сценарії виявилися подібними для всіх трьох типів ґрунтових шарів.

Основний результат. Теоретичний і практичний аналіз сценаріїв еволюції гармонічної сейсмічної хвилі, яка поширюється в ґрунтових шарах, полягає у тому, що:

1. Застосована стандартна реологічна модель дозволяє виявити нові хвильові ефекти при поширенні хвилі.
2. Сценарії еволюції початкового профіля хвилі (зміна амплітуди хвилі з часом (сценарій 1) чи з частотою (сценарій 2)) характерні затуханням амплітуди хвилі. Значення амплітуди зі збільшенням часу поширення хвилі прямають до нуля за експоненціальним законом і виявилися подібними для всіх трьох типів ґрунтових шарів. При цьому горизонтальні асимптоти, як видно з рисунків, для залежності швидкості від частоти і залежності амплітуди хвилі з при зміні частоти є різними.
3. Залежності швидкості хвилі і коефіцієнту затухання хвилі від частоти виявили неочікувану з практичної точки зору ситуацію, коли суттєва нелінійність цих залежностей спостерігається лише для дуже низьких частот від 1 до 4 герц і для більших значень частоти швидкість і затухання хвилі практично є постійними.

ВИСНОВКИ

ВИСНОВКИ ЗАГАЛЬНОГО ХАРАКТЕРУ

1. Найбільш загальний висновок з отриманих в роботі результатів полягає у тому, що ці результати є новими і у сукупності складають певний закінчений фрагмент сучасної нелінійної теорії хвиль в матеріалах.
2. Для чотирьох типів хвиль (плоска поздовжна, плоска поперечна – зсувна, циліндрична радіальна, крутильна) побудовано сценарії еволюції. Ці хвилі характеризуються різними початковими профілями – гармонічний косинусоїдальний, подинокий симетричний з одним горбом, поодинокий несиметричний з одним горбом, несиметричний без горба. Отже, застосований до групи хвиль підхід уможливив побудову нових сценаріїв, які відповідають фізичному сенсу проаналізованих задач.
3. Проведено порівняння різних сценаріїв за великою кількістю критеріїв порівняння. Сформульовані нові коментарі до отриманих сценаріїв. Показано, що сценарії за одними критеріями схожі, а за іншими – відмінні. Отримана сукупність сценаріїв і їх порівняння демонструють різноманітність процесу еволюції. У тому числі, подібності і відмінності цього процесу.
4. Отримано нові нелінійні хвильові рівняння для плоских поздовжніх хвиль (хвиль Гаусса та Уіттекера), плоских поперечних хвиль (сейсмічних гармонічних хвиль), циліндричних радіальних (хвиль Макдональда та Фрідляндра), крутильних гармонічних хвиль. Отримана множина нелінійних хвильових рівнянь створює базу даних для узагальнень і уточнень, які характерні для сучасної теорії хвиль.
5. Побудовано в рамках одного наближеного підходу обмеження на градієнт зміщення перші два і три наближення при розв'язуванні хвильових задач. Отримані загальні формули дають можливість вивчати конкретні початкові профілі.
6. Проведено числове моделювання для порівняння двох та трьох набли-

жень розв'язку хвильової задачі при різних типах матеріалів, підошв і максимальних амплітуд з метою виявлення впливу другого і третього наближення на спотворення початкового профілю хвилі. Цей вплив завжди присутній якісно, однак кількісно він може бути незначним для певних конкретних початкових профілів.

7. Побудовано сценарії поширення сейсмічної плоскої поперечної хвилі прямим методом розв'язання реологічного хвильового рівняння. Успішна реалізація вираного підходу створює можливість для розвитку нового напрямку в аналізі сейсмічних хвиль.

КОНКРЕТИЗОВАНІ ВИСНОВКИ СТОСОВНО РЕЗУЛЬТАТІВ, ВИКЛАДЕНИХ В ОКРЕМИХ РОЗДІЛАХ

8. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень. Цей метод успішно застосований до ряду нелінійних хвильових задач, має загальний характер і може бути застосованим для інших нових задач.
9. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної циліндричної радіальної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Метод виявився успішним. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень. Загальність отриманих формул створює можливість їх застосування і у випадку інших циліндричних хвиль.
10. Розділ 4. Для нелінійної задачі поширення поздовжної хвилі з гармонічним профілем проведено числове моделювання (два різні методи розв'язування в рамках двох та трьох перших наближень). Основний висновок – методи дають відмінні між собою результати для вищих ап-

роксимацій.

11. Розділ 4. Засвідчено існування нелінійного хвильового ефекту, який супроводжує класичний ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка. Ефект полягає в несиметричному деформуванні профіля другої гармоніки, яке відбувається з моменту початку руху хвилі і виявляється в зміщенні нулів вліво та вершин вверх. В результаті поєднання двох ефектів – присутності другої гармоніки в другому наближенні і деформуванні її класичного профіля – отриманий за двома наближеннями профіль стає несиметричним. Це спостереження стосується практично всіх розглянутих в роботі сценаріїв.
12. Розділ 4. Спостережено при аналізі отриманих графіків (для двох перших наближень за двома методами – послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення) утворення двох горбів замість одного. Отже, тут обидва методи описують основний нелінійний хвильовий ефект.
13. Розділ 4. Внаслідок різного математичного представлення при описанні еволюції початкового профіля хвилі профіль спотворюється по-різному. Для методу послідовних наближень третє наближення вводить нелінійну поправку четвертого порядку, яка не змінює знак при зміні знаку амплітуди, тоді як для методу обмеження на градієнт зміщення по-правка має третій порядок і змінює знак при зміні знаку амплітуди. Як відомо, при відмінностях в математичному описі механічних явищ критерієм є коректний експеримент.
14. Розділ 4. Отримані при застосуванні обох методів графіки для двох перших наближень показують подібні спотворення. У випадку методу послідовних наближень еволюція відбувається асиметрично: додатна частина профілю перетворюється у два горби, тоді як від'ємна частина має тенденцію трансформуватися по-іншому. У випадку методу обмеження на градієнт зміщення спотворення відбувається теж несиметрично щодо умовної вертикальної осі. Отже, математичні процедури

відмінні між собою і більш ґрунтовну відповідь можна отримати шляхом розширення нових нелінійних моделей і експериментальних спостережень.

15. Розділ 4. Виявлено, що для гармонічної хвилі третє наближення, знайдене за обома методами, змінює суттєво як початковий профіль так і профіль в рамках «перше +друге наближення». Зміна проявляється також по-різному. Для методу 1 виявлено тенденцію до утворення четвертої гармоніки, а для методу 2 - виявлено тенденцію до суттєвої деформації другої гармоніки. Можливо, при розширенні кількості типів початкових профілів можна буде виявити основну тенденцію у впливі наближень.
16. Розділ 5. Проведено числове моделювання та побудовані сценарії еволюції поширення поздовжної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функцій Гаусса та Уіттекера. Тут враховані два і три перші наближення, отримані за методом обмеження на градієнт зміщення. Реалізований підхід виявився успішним – сценарії відповідають фізичному змісту задачі.
17. Розділ 5. Отримані для хвилі Гаусса графіки для двох і трьох перших наближень в рамках методу обмеження на градієнт зміщення відрізняються між собою. Для перших двох наближень спотворення відбувається практично симетрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два горби. Для перших трьох наближень спотворення відбувається асиметрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два різні горби - лівий горб опускається і правий піднімається. Для всіх наближень розмір підошви хвилі є незмінним. Отже, врахування третього наближення вносить нові хвильові ефекти.
18. Розділ 5. Для несиметричної хвилі Уіттекера з двома варіантами початкового профіля з застосуванням методу обмеження на градієнт зміщення отримано графіки для двох та трьох перших наближень. Для первого

варіанту показано, що для обох наближень (1+2) і (1+2+3) спотворення відбувається несиметрично. Швидкість еволюції для різних варіантів і наближень різна, значення максимальної амплітуди зростає та розмір підошви зменшується. Третє наближення вносить зміни в профіль.

19. Розділ 5. Хвилі Уіттекера для другого варіанту початкового профіля та відповідного розв'язку другого і третього наближення еволюціонують аналогічно несиметрично з різною дисторсією – зокрема третє наближення демонструє утворення горба. Швидкість спотворення та значення максимальної амплітуди для наближень (1+2+3) більша ніж для (1+2), а розмір підошви зменшується. Отже, обидва несиметричні профілі хвилі Уіттекера еволюціонують по-різному і вплив третього наближення не є суттєвим по відношенню до другого.
20. Розділ 6. Проведено числове моделювання та побудовані сценарії еволюції за методом обмеження на градієнт зміщення для нелінійної задачі поширення циліндричної радіальної поодинокої хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндра в рамках двох та трьох перших наближень. Отримані графіки показують, що несиметричність профілю Макдональда зберігається, а спотворений профіль стає крутішим і розмір підошви зменшується. Швидкість спотворення для наближення (1+2+3) вища ніж для (1+2). Застосований підхід виявився успішним. Отримані сценарії відповідають фізичному сенсу задачі.
21. Розділ 6. Показано теоретично і чисельно, що еволюція хвиль Макдональда та Фрідляндра для первого варіанту початкового профіля подібна. З цього факту випливає, що в рамках аналізу еволюції обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представлені по-різному.
22. Розділ 6. Для хвилі Фрідлендера з другим варіантом початкового профіля показано, що вона спотворюється несиметрично у випадку другого та третього наближень. Спотворення відбувається як для додатних значень ампулітуд, так і від'ємних. Для додатних профіль стає кру-

тішим, а для від'ємних стає ближчим до горизонтальної осі, а підошва суттєво зменшується. Проведений аналіз свідчить, що вибір форми початкового профіля є важливим – відповідні сценарії можуть суттєво відрізнятися.

23. Розділ 6. Хвиля Фрідляндра проаналізована для двох варіантів початкового профіля. Спостережено, що для первого варіанту спотворення відбувається аналогічно випадку хвилі Макдональда.
24. Розділ 6. Одним з основних висновків при порівняння хвиль Макдональда та Фрідляндра є те, що функція Макдональда може розглядатися як точний розв'язок нелінійного хвильового рівняння, а функцію Фрідлендера можна інтерпретувати як наближений розв'язок цього рівняння.
25. Розділ 7. Проаналізована циліндрична крутільна хвиля, яка поширюється в напрямку осі кругового циліндра. Отримана достатньо проста формула для знаходження розподілу амплітуд всередині циліндра і виявлені особливості розподілу.
26. Запропоновано і застосовано метод обмеження на змінну швидкість хвилі для перших двох наближень у випадку наближеного аналізу простого варіанту хвильового рівняння крутільної хвилі. Метод обмежує зміну швидкості крутільної хвилі і узагальнює метод, розвинений для інших хвильових рівнянь.
27. Розділ 7. Проведено числове моделювання спотворення початкового профіля радіальної циліндричної крутільної хвилі в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра до його центру для трьох типів матеріалів. Застосовані формули уможливили побудову нових сценаріїв еволюції, які відповідають фізичному сенсу задачі.
28. Розділ 7. Показано існування змінного спотворення крутільної хвилі у радіальному напрямку (всередині кругового циліндра) і постійного у осьовому (вздовж його осі симетрії).
29. Розділ 7. Спостережено значний вплив величини радіуса циліндра, в

якому поширюється крутильна хвиля, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Зокрема, це явище не коментоване для лінійної задачі і може трактуватися як новий хвильовий ефект.

30. Розділ 8. Запропоновано і реалізовано опис деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Такий підхід є новим і перспективним в теорії сейсмічних хвиль.
31. Розділ 8. Розроблено і застосовано новий і перспективний в теорії сейсмічних хвиль метод визначення параметрів реологічної моделі на основі експериментальної кривої повзучості реального ґрунтового шару.
32. Розділ 8. Для аналізу гармонічної сейсмічної хвилі застосовано прямий метод розвязування нелінійного хвильового рівняння. Успішність методу у випадку цієї задачі свідчить про його універсальність.
33. Розділ 8. Показано чисельно (для трьох типів ґрунтових шарів – мулиста глина, піщаний жирний суглинок, бурий суглинок), що для гармонічної сейсмічної хвилі зміна амплітуди хвилі з часом чи зі зміною частоти супроводжується затуханням амплітуди хвилі. Значення амплітуди зі збільшенням часу поширення чи частоти асимптотично прямують до нуля за експонентціальним законом. Оскільки показано, що суттєва нелінійність зміни амплітуди і затухання для дуже низьких частот є настільки незначною, що нею можна знехтувати, то можна вважати, що проведене дослідження підтверджує прийняте в теорії сейсмічних хвиль положення про постіність швидкості хвилі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — Москва: Наука, 1979.
2. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. — М.: Высшая школа. 1976. — 272 с.
3. *Андронов А.А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Наука. 1981. — 568с.
4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука. 1984. — 384с.
5. *Бабич В.М., Киселев А.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. — 320 с.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, пер. с англ., [2 изд.], т. 2, М., 1974.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, отгональные многочлены Справочная математическая библиотека М. Физматгиз 1966 г. 296 с.
8. *Белл Дж.Ф.* Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2 частях. Ч. 1. — М.: Наука, 1978. — 600 с.
9. *Бреховских Л.М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн).- М.: Наука. 1982. — 335с.
10. *Ван Фо Г.А., Грошева В.М., Карпинос Д.М. и др.* Композиционные материалы волокнистого строения Киев: Наук. думка, 1970. - 404 с..
11. *Викторов И. А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике в технике. — М.: Наука. 1996. — 168с.
12. *Викторов И. А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука. 1981. — 288с.
13. *Викторов И. А.* Об эффектах второго порядка в распространении волн в твердых телах // Акуст. журнал. — 1963. — 9 (2). — С. 296 – 298.
14. *Виноградова М. Б., Руденко О.В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука. 1990. — 432с.

15. Виленкин Н. Я. “Многочлены Лагерра, функции Уиттекера и представления группы окаймленных матриц”, *Матем. сб.*, №3. 1968.– С. 432–444.
16. Гедроиц А. А., Красильников В. А. Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и отклонения от закона Гука // Журн. эксп. теор. физики. – 1962. – 43. – С. 1592 – 1594.
17. Гольдберг З. А. О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн// Акуст. журнал. – 1960.- 6.№2.– С.307–310.
18. Гранитей И.С. Рыжик Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М. Физматгиз 1963. – 834с.
19. Гольдберг З. А. О взаимодействии плоских продольных и поперечных волн // Акуст. жур нал. – 1960. – 6 (3). – С. 307 – 310.
20. Гузь А. Н. Упругие волны в тела с начальными напряжениями. Т.1. Общие вопросы, Т.2. Закономерности распространения. Наукова думка – 1986. – 376с.
21. Гузь А. Упругие волны в тела с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
22. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. - Киев: Наукова думка, 1977. - 151 с.
23. Гузь А.Н., Руцицкий Я.Я. Об ограничениях значений градиентов перемещений для упругих материалов // Прикл.механика. – 2016. – 51, N3. -C.25 -31.
24. Демидов Б.И. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 436 с.
25. Ерофеев В. И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
26. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
27. Зарембо Л. К., Гедроиц А. А., Красильников В. А. Упругие волны конечной амплитуды в твердых телах и ангармоничность решетки // Вестник МГУ. Сер. физ. – 1962. – №3. – С. 92 – 98.

28. Заславский Г. М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука. 1988. –368 с.
29. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих волнах. – М.: Наука. 1973. – 154с.
30. Кабисов К.С., Камалов Т.ф., Лурье В.А., Колебания и волновые процессы, Теория, задачи с решениями.–КД Либроком. Москва.– 2017. 360 с.
31. Кампе де Ферье, Ж. Функции математической физики / Кампе де Ферье, Ж., Кембелл, Р., Петьо, Г. — М. : Физматлит, 1963.
32. Кендзера О.В., Руцицкий Я.Я. Спосіб визначення параметрів реологічної моделі ґрунтового шару за експериментальною кривою повзучості шару // Доп. НАН України. – 2022. – № 10. – С. 66 – 74.
33. Кендзера О.В., Руцицкий Я.Я., Юрчук В.М. До реологічної моделі ґрунтового шару: визначення параметрів моделі з досліду на повзучість шару // Прикл. механіка. – 2023. 59, №4. – С. 3 – 17
34. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: «Наука», 1974. — С. 777-780.
35. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
36. Крылов В.В., Красильников В.А. Введение в физическую акустику. — М.: Наука. 1986. — 432 с.
37. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука. 1958. — 678 с. — М.: Наука. 1980. - 512 с.
38. Лейбензон Л. С. Краткий курс теории упругости. — М. —Л.: Гостехизд., 1912. — 304с.
39. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука. 1970. — 939 с.
40. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука. 1980. — 512 с.
41. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – Москва: Наука, 1978. – 330 с.
42. Руцицкий Я. Я. Квадратично нелинейные цилиндрические гипупругие волны – вывод волновых уравнений. Состояние плоской деформации //

- Прикл. механика. – 2005. – 41, N6. - C.52-64.;
43. Руцицький Я.Я. Пружна крутільна хвиля і відповідне нове нелінійне хвильове рівняння // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 54 – 63.
44. Руцицький Я. Я. Элементы теории смеси – К.: Наук. думка, 1991.– 160 с.
45. Руцицький Я.Я. О постоянных моделях Мэрнагана нелинейного гиперупругого деформирования материалов // Прикл.механика. – 2016. — 52, N6.
46. Руцицький Я.Я, Каттани К. Сравнительный анализ нелинейных гиперупругих волн с плоским или цилиндрическим фронтом в материалах с внутренней структурой // Прикл. механика. – 2005. – 41, N6. - C.52-64.
47. Руцицький Я.Я., Симчук Я.В. Теоретичний та числовий аналіз квадратично нелінійних циліндричних осесиметричних хвиль, що поширяються в композитах мікро і нанорівня // Доповіді НАН України. - 2006, №.3. - C.54-62.
48. Руцицький Я.Я., Цурпал С.І. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. – Київ, Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка, 1998. – 89-106 с.
- 48.Руцицький Я.Я. Юрчук В.М. Нетипова еволюція поодинокої хвилі, що поширяється в нелінійно пружному середовищі //Доповіді НАН України, 2020, N12. - C.28-37.
49. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Комп'ютерний аналіз повільних і швидких хвиль в композитному матеріалі // Прикл. механіка. – 2022. 58, N6.
50. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Один приближенный метод анализа одиночных волн в материалах, деформирующихся нелинейно упруго // Прикл. механика. – 2016. — 52, N3. — С.38 — 46.
51. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Порівняння еволюції пружної поодинокої циліндричної хвилі з профілями Фрідляндра та Макдональда // Прикл. механіка. – 2022. 58, N5. – С. 16 – 26.
52. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Новий варіант методу обмеження на градієнт зміщення, що виникає при аналізі еволюції крутільної хвилі // Прикл. механіка. – 2023. 59, N2. – С. 19 – 27

53. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Про одну особливість еволюції нелінійної пружної хвилі з різними початковими профілями // Прикл. механіка. – 2024. 60, N5. – С. 112 – 116.
54. Руцицький Я.Я. Юрчук В.М. Про один нелінійний хвильовий ефект, який виникає за генерації другої гармоніки//Доповіді НАН України, 2025, N1. - С.22-30.
- 54.Руцицький Я.Я., Сінчило С.В., Юрчук В.М. Нові нелінійні хвильові рівняння для крутільних пружних хвиль, новий наближений метод аналізу рівнянь, числове моделювання еволюції хвиль //Прикл. механіка. – 2023. 59, N6. – С. 14 – 25.
55. Руцицький Я.Я.,Хотенко О.О., Юрчук В.М. Про особливості граничних умов в аналізі нелінійних хвиль наприкладі поверхневої і крутільної хвиль // Прикл. механіка. – 2023. 59, N5. – С. 44 – 60.
56. Савін Г.М., Руцицький Я.Я. Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища школа, 1976. – 276 с.
57. Селезов И. Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. — Киев: Наукова думка. 1989. — 204 с.
58. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, пер. с англ.2 изд., ч. 2, М., 1963 Ю. А. Брычков, А. П. Прудников.
59. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. - М.: Наука.1965.-388 с.
60. Хованский А. Г. Полиномы Чебышёва и их обращения // Математическое просвещение. — 2013. — Вып. 17. — С. 93—106.
61. Юрчук В.М., Комп'ютерне моделювання впливу величини радіуса циліндра на параметри крутільної нелінійної пружної хвилі // Прикл. механіка. – 2024. 60, N4. – С. 118 – 124.
62. Юрчук В.М., Сінчило С.В. Крутільні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка – 2023. N2. – С. 172 – 175.
63. Achenbach J.D. Wave Propagation in Elastic Solids. – Amsterdam: North Holland, 1973. p. 234–245.

64. Accorsi M. L., Bennett M. S. A finite element based method for the analysis of free wave propagation in stiffened cylinders // J SOUND VIB.– 1991.–V.148.– 2, 22.–P. 279-292.
65. Alonso M., Reguera N. Numerical detection and generation of solitary waves for a nonlinear wave equation // Wave Motion. – 2015. – 56. – P.137—146.
66. Anand G. V. Second harmonic generation in elastic surface waves on an isotropic solid // Int. J. Non-linear Mech. – 1976. – 11. – P. 277 – 284.
67. Altenbach H., Eremeyev V.A., Pavlov I.S., Porubov A.V. Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. – Cham: Springer, 2020. – 681 p.
68. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Danishevskyy V. Linear and Nonlinear Waves in Microstructured Solids: Homogenization and Asymptotic Approaches. – Boca Raton: CRC Press, 2021. – 250 p.
69. Altayeb Y. New scenario of decay rate for system of three nonlinear wave equations with visco-elasticities // AIMS Mathematics. (Special Issue: New trends in mathematical analysis of solitary wave solutions to nonlinear partial differential equations (including fractional PDE)).– 2021. – 6, N 7. – P. 7251 – 7265.
70. Arbab I.A. A New Wave Equation of the Electron // J. Modern Physics. – 2011. – 2, N 9. – P. 1012 – 1016.
71. Bedford A., Drumheller D. Introduction to Elastic Wave Propagation. – New York: John Wiley, 1994. – 300 p.
72. Bedford A., Stern M. Toward a diffusing continuum theory of composite materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1971. – 38, N 1. – P. 8-14.
73. Berezovski A., Maugin G.A., Engelbrecht J. Numerical Simulation of Waves and Fronts in Inhomogeneous Solids. - Singapore-London: World Scientific, 2008. – 250 p.
74. Bussink P. G. J., Iske P. L., Oortwijn. J., Verbist G. L. Selfconsistent analysis of elastic wave propagation in two-dimensional matrixinclusion composites // J. Mech. Phys. Solids.– 1995.–V. 43.– 10.– P. 1673-1690.
75. Cattani C., Rushchitsky J. J. Cubically Nonlinear Elastic Waves Versus

Quadratically Ones: Main Wave Effects // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N10.- P.1115-1145.

76. *Cattani C., Rushchitsky J.* Wavelet and Wave Analysis as applied to Materials with Micro and Nanostructure.- Singapore-London: World Scientific, 2007.- 466 p.
77. Çelik N., Seadawy Aly R., & Sağlam Özkan Y., Yaşar E. A model of solitary waves in a nonlinear elastic circular rod: Abundant different type exact solutions and conservation laws// Chaos, Solitons & Fractals, Elsevier, vol. 143(C) 2021.
78. *Chapman C. H.* Fundamentals of seismic wave propagation. – Cambridge: University Press, 2004 – 608 p.
79. *Chandra N., Ganpule S., Kleinschmit N.N., Feng R., Holmberg A.D., Sundaramurthy A., Selvan V., Alai A.* Evolution of blast wave profiles in simulated air blasts: experiment and computational modeling // Shock Waves. – 2012. – 22. – P.403-415.
80. *Christensen R.M.* Mechanics of Composite Materials // John Wiley and Sons, New York, 1979.
81. *Cox G.A., Livermore P.W., Mound J.E.* The observational signature of modelled torsional waves and comparison to geomagnetic jerks // PHYS EARTH PLANET IN – 2016. – 255. – P. 50 – 65.
82. *Crawford F.S., Jr.* Waves. Berkley Physics Course. V. 3. – Newton, MA: Education Development Center, Inc., 1968. – 642 p.
83. *David E. A.* A uniform asymptotic solution for nonlinear surface acoustic Waves // Int. J. Engng. Sci. – 1985. – 23. – P. 699 – 708.
84. Defaz I., Epstein M., Federico S. The domain of existence of solitary waves in fluid-filled thin elastic tubes// Math Mech Solids Vol. 26, Is. 9, September 2021, P.- 1354-1375.
85. Deliktas-Ozdemir E., Ahmetolan S., Tuna D. Existence of solitary SH waves in a heterogeneous elastic two-layered plate. Z. Angew.// Math. Phys. 73, (2022), P-220.
86. *Drumheller D. S., Bedford A.* Wave propagation in elastic laminates using a

- second order microstructure theory // Int. J. Solids Structures. – 1974. – №10. – P.61–76.
87. *Du X., Fletcher R.P., Fowler P.J.* A New Pseudo-acoustic Wave Equation for VTI Media // Conf. Proc., 70th EAGE Conf.and Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2008.(Jun 2008).– p-40-44.
88. Edelen D.G.B. Monge-Ampere waves in 1-dimentional elastic medium // Int. J. Engng. Sci. – 1992. – 30. – P. 545 – 549.
89. Ekin D. Bright and Dark Solitary LoveWaves in a Heterogeneous Semi-Space Coated with a Heterogeneous Elastic Layer// Müh. Bil. ve Araş. Dergisi, 2023; 5 (1) P-67 - 78.
90. Erheng W., Mohith M., Amnaya P. A., Raj Kumar P., Philippe H. G., John L. High-amplitude elastic solitary wave propagation in 1-D granular chains with preconditioned beads: Experiments and theoretical analysis// J. Mech. Phys. Solids 72 (2014) P-161–173.
91. *Engelbrecht J.* Questions about Elastic Waves. - Berlin: Springer, 2015. –148 p.
92. *Farahani S.V., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H.* Torsional wave propagation in solar tornadoes//Astronomy and Astrophysics. - 2017.- 599, N A19. - P. 1 - 6.
93. *Farnell G. W.* Properties of elastic surface waves / In Physical acoustics. Ed. W.P. Mason, R.N. Thurston – New York: Academic Press, 1970. – 6. – P. 109 – 166.
94. *Freidlander F.G.* The diffraction of sound pulses. I. Diffraction by a semi-infinite plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A, - 1946. – 186. – P. 322-344.
95. Gao T., Wang Z., Vanden-Broeck J.-M. New hydroelastic solitary waves in deep water and their dynamics // J Fluid Mech, Vol.788, 10 February 2016, P.469-491.
96. *Gazis D.C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. Part I. Analytical foundation // J. Acoust. Soc. America. – 1959. – 31. – P.568-573.
97. *Guz I.A., Rushchitsky J.J.* Comparing the Evolution Characteristics of Waves in Nonlinearly Elastic Micro and Nanocomposites with Carbon Fillers // Int.

Appl. Mech. – 2004. – 40, N 7. – P. 785 – 793.

98. *Haug E.G.* Deeper insight on Existing and New Wave Equations in Quantum Mechanics // Norwegian University of Life Sciences, Norway. – 2020. – 9 p.
<https://vixra.org>
99. *Haddow J. B., Jiang Lei.* Finite amplitude elastic waves due to nonuniform traction at the surface of a cylindrical cavity // Int. J. of Non-Linear Mech.- 2006.-V.41.- P. 231-241.
100. *Hetnarski R., Ignaczak J.* Mathematical Theory of Elasticity. 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press 2018. – 837 p.
101. *Janke E., Emde F., Lösch F.* Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart, Teubner Verlagsgesell-schaft 1960.
102. *Kanaun S.* Heterogeneous Media. Local Fields, Effective Properties, and Wave Propagation. – Amsterdam: Elsevier, 2020. – 494 p.
103. *Kendzera O., Rushchitsky J., Semenova Yu.* Simple way of allowance for rheologic properties of layered earth stratum in study of seismic waves. Chapter 5 in the book: Latest Techniques and Advances in Seismic Waves Research. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2021. – 246 p.
104. *Kuriakose M., Skotak M., Misistia A., Kahali S., Sundaramurthy A., Chandra N.* Tailoring the Blast Exposure Conditions in the Shock Tube for Generating Pure, Primary Shock Waves: The End Plate Facilitates Elimination of Secondary Loading of the Specimen // PLoS ONE – 2016. - 11, N9.
105. *Kuriakose M., Skotak M., Misistia A., Kahali S., Sundaramurthy A., Chandra N.* Tailoring the Blast Exposure Conditions in the Shock Tube for Generating Pure, Primary Shock Waves: The End Plate Facilitates Elimination of Secondary Loading of the Specimen // PLoS ONE – 2016. - 11, N9.
106. *Lai X.L., Wang S.M., Ye W.M., Cui Y.J.* Experimental investigation on the creep behavior of an unsaturated clay // Canadien Geotechnical J. – 2014. – 51, N 6. – P. 621 – 28.
107. *Lempriere B.* Ultrasound and Elastic Waves: Frequently Asked Questions. – New York: Academic Press, 2002. –154 p.

108. Liu, Z. and Zhang, J. The Exact Solitary Wave Solutions in Continuity Equation of the One-Dimensional Granular Crystals of Elastic Spheres// *J Appl Mech Tech Phy* –N7., 2019,P-2760-2766.
109. *Lohnes R.A., Millan A., Demirel T., Handy R.L.* Tests for soil creep. Report of the Engineering Research Institute, Iowa State University. <https://onlinepubs.trb.org> › Onlinepubs › hrr, 1970. – P. 1 – 10.
110. *Luo Q., Chen X.* Experimental research on creep characteristics of Nansha soft soil // *The Scientific World J.* – 2014. – 5. – P. 728.
111. *Malkin A., Isayev A.* Rheology. Concepts, Methods, and Applications. 3rd ed. – Toronto: Chemtec Publi-shing, 2017. – 500 p.
112. *Malmeister A.C., Tamuzhs V.P., Teters G.A.* Strength of Polymeric and Composite Materials. 3rd. ed. – Riga: Zinatne, 1980. – 534 p.
113. *McNiven H.D., Mengi Y.A.* Propagation of transient waves in elastic laminated composites // *Ibid.* – P. 303 – 318.
114. *Morse R.W.* Compressional waves along an anisotropic circular cylinder having hexagonal symmetry // *J. Acoust. Soc. America.* – 1954. – 26. – P.1018-1021.
115. *Murnaghan F.* Finite Deformation in an Elastic Solid. 3rd ed. Gloucester. – MA, USA: Peter Smith Publisher Inc, 1985. – 230 p.
116. Nanta Kumar, U., Choy Y. Y. The Solitary Waves in Fluid Filled Elastic Tube with Variable Radius. *EKST*, Vol. 1 No. 2 , (2021) P-218-224.
117. Normandin R., Fukui M., Stegeman G. I. Analysis of parametric mixing and harmonic generation of surface acoustic waves // *J. Appl. Phys.* – 1979. – 50. – P. 81 – 86.
118. *Nowacki W.* Theory of Elasticity. – Warszawa: PWN, 1970. – 780 p.
119. *Olver F.W.J., Maximon L.C.* Bessel Functions. Chapter 10. P.215–286. In: Olver F.W.J., Lozier D.W., Bousvert R.F., Clark C.W. (eds) NIST (National Institute of Standards and Technology) Handbook of Mathematical Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – 968 p.
120. Požar, T., Laloš, J., Babník, A. et al. Isolated detection of elastic waves driven

by the momentum of light//Nat. Commun 9, Art. num.: 3340. – 2018.

121. Rao, C., Zhang, Y. Wan, D. Numerical simulation of the solitary wave interacting with an elastic structure using MPS-FEM coupled method. *J. Marine. Sci. Appl.* 16, (2017), P-395–404.
122. *Rheology*. Ed. De Vincente J. – New York: InTechOpen, 2012. – 352 p.
123. *Rushchitsky J.J.* Certain class of nonlinear hyperelastic waves: classical and novel models, wave equations, wave effects // *Int. J. Appl. Math. Mech.* – 2012. – 8, N 6. – P. 400 – 443.
124. *Rushchitsky J.J.* Plane Nonlinear Elastic Waves: Approximate Approaches to Analysis of Evolution. Chapter in the book “Understanding Plane Waves” Ed. Cooper W.A. – London: Nova Science Publishers, 2019. –300 p. – P. 201-220.
125. *Rushchitsky J.J.* On Constraints for Displacement Gradients in Elastic Materials // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – 52, N 2. – P. 119 – 132.
126. *Rushchitsky J.J.* Theory of waves in materials. Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2011.– 270p.
127. *Rushchitsky J.J.* Quadratically Nonlinear Cylindrical Hyperelastic Waves – Wave Equations. Axysymmetric and other states // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – 41, N6. - P.882-894.
128. *Rushchitsky J.J.* Foundations of Mechanics of Materials. – Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 276 p.
129. *Rushchitsky J.J.* Scenarios of Evolution of Some Types of Simple Waves in Nonlinear Elastic Materials // *Archive of Appl. Mech.* – 2021. – 91, N 7. – P. 3151 – 3170.
130. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
131. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1 // *Int.Appl.Mech.* – 2020. - 56, N5.- P.581-589.
132. *Rushchitsky J. J., Yurchuk V. M.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 2 // *Int.Appl.*

Mech. – 2020. - 56, N6.- P.666-673.

133. Rushchitsky, J., Yurchuk, V. Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (Harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, and Friedlander Initial Profiles). Chapter 25 in: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) Advances in Mechanics.– 2023. – P. 435-468.
134. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N On the Evolution of a Plane Harmonic Wave in a Nonlinear Elastic Composite Material Modeled by a Two-Phase Mixture// Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N2. – P. 172 – 183.
135. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Analogies Between the Classical Problem on the Oscillation of Bodies and the Nonclassical Problem on the Propagation of Plane Waves //Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N4. – P. 386 – 394.
136. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Distortion of a Nonlinear Elastic Solitary Plane Wave with Friedlander Profile // Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N4. – P. 389–397.
137. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Comparison of the Evolution of a Solitary Elastic Cylindrical Wave with Friedlander and Macdonald Profiles //Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, N5. – P. 497–509.
138. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N., Hryhorchuk O. M., Symchuk Ya. V. Noncharacteristic Evolution of a Nonlinear Elastic Single Cylindrical Wave //Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N6. – P. 619 – 634.
139. Samsonov A. M., Dreiden G. V., Semenova I. V., Shvartz A. G. Bulk solitary waves in elastic solids//AIP Conference Proceedings, Vol. 1684, Is. 1, October 2015.
140. Selezov, I. T. Solitary Wave Propagation In Elastic Plate On The Winkler Foundation / I. T. Selezov, Yu. V. Korolevich // Інформаційні системи, механіка та керування : науково-технічний збірник. – 2019. – Вип. 21. – С. 14-20.
141. Shu Haisheng, Dong Liqiang, Li Shidan, Liu Wei, Liu Shaogang, Wang Weiyuan, Shi Dongyan, Zhao Dan // Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals // J. Phys. D: Appl. Phys. 2014.

- 47. - P. 501-512
142. Soil types. <https://www.boughton.co.uk/products/topsoils/soil-types/>
143. Soil types. Soil Science Society of America. <https://www.soils.org/about-soils/basics/types/>
144. Soiltypes. [https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geology/Fundamentals_of_Geology_\(Schulte\)/04%3A_Soil/4.07%3A_Soil_Types](https://geo.libretexts.org/Bookshelves/Geology/Fundamentals_of_Geology_(Schulte)/04%3A_Soil/4.07%3A_Soil_Types)
145. Stewart A. Solitary Waves in a Peridynamic Elastic Solid. Silling Multiscale Science Department Sandia National Laboratories P.O Box 5800 Albuquerque, NM 87185-1322. SAND–2016,P-26.
146. Tomar S., Kaur N. Role of sliding contact interface on torsional waves // The Mathematics Student. - 2019. – 88, N 3-4. – P. 171-177.
147. Torres J., Faris I.H., Callejas A., Reyes-Ortega F., Melchor J., Gonzalez-Andrades M., Rus G. Torsional wave elastography to assess the mechanical properties of the cornea // Nature. Scientific Reports.–2022.–12,N8354.–P.1-11.
148. Tranter M.R. Solitary wave propagation in elastic bars with multiple sections and layers. Wave Motion, 86, 2019. P. 21 - 31.
149. Trichtchenko O., Părău EI., Vanden-Broeck JM., Milewski P. Solitary flexural-gravity waves in three dimensions. Philos Trans A Math Phys Eng Sci. Sep 28, 2018; 376 (2129): 20170345.
150. Vasheghani Farahani S., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H. Torsional wave propagation in solar tornadoes // Astronomy and Astrophysics. – 2017. – 599, A19. – P.7-12.
151. Wang Y.F., Zhou Z.G., Cai Z.Y. Studies about Creep Characteristic of Silty Clay on Triaxial Drained Creep // Advances in Civil and Industrial Engng. IV. – 2014. – 580. – P. 355 – 358.
152. Wu Z., Alkhalifah T. A New Wave Equation Based Source Location Method with Full-waveform Inversion // Conference Proc., 79th EAGE Conf. and Exhibition 2017. (Jun 2017). – P. 1 – 5.
153. Yang J., Zhu H. A new time – domain wave equation for viscoacoustic modeling and imaging // Proc. of the 2018 SEG Int. Exposition and Annual

Meeting, Anaheim. (California, USA, October 2018). – Paper Number: SEG-2018-2974332.

154. *Zabolotskaya E. A., Il'inskii Yu. A., Hamilton M.F.* Nonlinear surface waves in soil // J. Acoust. Soc. Am. – 2006. – 120 (5). – P. 3281 – 3281.
155. *Zakia Tebba, Boulaaras, Salah Degaichia, Hakima Allahem, Ali.* Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation // J. Intelligent and Fuzzy Systems. – 2020. – 38, N 3 – P. 2649 – 2660.
156. *Zhang Q.* Experimental analysis on creep mechanics of unsaturated soil based on empirical model // Open Geosciences. – 2022. – 14, N 1. – P. 785 – 793.
157. Zhan Wang, Emilian I Părău , Paul A Milewski , Jean-Marc Vanden-Broeck Numerical study of interfacial solitary waves propagating under an elastic sheet Proc// Math Phys Eng Sci. Aug. 8 2014;470(2168):20140111.
158. Zhi-Guo Liu, Yue-Sheng Wang, and Guoliang Huang Solitary waves in a granular chain of elastic spheres: Multiple solitary solutions and their stabilities // Phys. Rev. E 99, 062904 – Pub. 6 June 2019.
159. Ziv R., Shmuel G. Oscillating vector solitary waves in soft laminates// J. Mech. Phys. Solids, Vol. 143, October 2020, 104058.