

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ИМ. С.П. ТИМОШЕНКО

На правах рукописи

ПОСЛАВСКИЙ СЕРГЕЙ ЮРЬЕВИЧ

УДК 531.36

**КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

01.02.01 – теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
Зевин Александр Аронович

Киев – 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
РАЗДЕЛ 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	10
1.2. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздыванием	13
1.3. Абсолютная устойчивость.....	15
1.4. Системы с переключениями	17
РАЗДЕЛ 2. ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА	21
2.1. Постановка задачи	21
2.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова	22
2.3. Нижняя оценка максимального показателя Ляпунова.....	25
2.4. Примеры применения оценок.....	27
2.5 Точные значения максимального показателя Ляпунова.....	30
2.6. Метод расчета устойчивости систем со стационарной линейной частью.....	32
Выводы к разделу 2	36
РАЗДЕЛ 3. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ И	37
СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ.....	37
3.1. Системы с переменным и распределенным запаздыванием	37
3.1.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова	38
3.1.3. Нижняя оценка максимального показателя Ляпунова.....	41
3.1.4. Точные значения максимального показателя Ляпунова.....	43
3.1.5. Метод расчета устойчивости систем со стационарной линейной частью и распределенным запаздыванием.....	44
3.2. Системы с чистым запаздыванием.....	49
3.2.1. Постановка задачи	50
3.2.2. Системы с переменными запаздываниями.....	50
3.2.3. Системы с переменными и распределенными запаздываниями	55
3.2.4. Примеры применения критериев устойчивости	60

3.3. Специальный критерий устойчивости для систем с постоянным запаздыванием	63
3.3.1. Постановка задачи	63
3.3.2. Условия экспоненциальной устойчивости	64
3.4. Системы с нелинейностью специального вида	67
3.4.1. Постановка задачи	67
3.4.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова	68
3.4.3. Точные значения максимального показателя Ляпунова.....	70
3.5. Устойчивость систем с переключениями	72
3.5.1. Постановка задачи	72
3.5.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова	72
3.5.3. Условие экспоненциальной устойчивости	75
3.5.4. Примеры расчетов	76
Выводы к разделу 3	78
РАЗДЕЛ 4. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ	80
4.1. Устойчивость системы стабилизации перевернутого маятника с запаздыванием	80
4.2. Модель процесса фрезерования с одной степенью свободы	89
4.3. Нелинейная модель процесса фрезерования с одной степенью свободы.....	95
4.4 Модель процесса фрезерования с двумя степенями свободы	98
Выводы к разделу 4	103
ВЫВОДЫ.....	104
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	106

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Большое количество систем встречающихся в задачах механики, теории автоматического регулирования и других областях науки и техники описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Анализ устойчивости является необходимой частью исследования таких систем.

В прикладных задачах устойчивости различных систем часто нелинейная характеристика объекта точно не известна или изменяется со временем в определенных пределах. Нужно найти условия, гарантирующие устойчивость системы для любых нелинейных характеристик, лежащих в допустимых пределах. Такая задача была впервые поставлена в работе А.И. Лурье и В.Н. Постникова «К теории устойчивости регулируемых систем» (1944 г.), где была рассмотрена устойчивость системы автоматического регулирования при любых начальных возмущениях и любой нелинейности сервомотора, которая лежит в заданном секторе. Эта статья привлекла внимание многих исследователей и положила начало новому направлению - теории абсолютной устойчивости, где рассматривается устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, принадлежащего определенному классу. Были рассмотрены новые виды динамических систем, в частности, системы с запаздыванием. В работах Б.С. Разумихина достаточные условия устойчивости таких систем были получены методом функции Ляпунова. Н.Н. Красовский предложил вместо функций Ляпунова рассматривать функционалы, имеющие аналогичные свойства. Работы В.М. Попова и А. Халаная положили начало развитию частотных методов исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Большинство современных исследований устойчивости таких систем посвящены выводу критериев устойчивости с помощью функций и функционалов Ляпунова. Оценкам максимального показателя Ляпунова,

характеризующего скорость убывания решений, посвящено значительно меньшее количество исследований. Так в работах Д.Я. Хусаинова такие оценки найдены методом функций Ляпунова.

Другой подход, основанный на оценках эволюционного оператора системы, позволяет получать критерии устойчивости и верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова выраженные непосредственно через параметры системы, без использования функций или функционалов Ляпунова. Для систем без запаздывания такие результаты приведены в монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна «Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве». В работах А.А. Зевина такой подход был применен для систем содержащих запаздывание.

В большинстве работ рассматриваются системы с постоянным запаздыванием, однако, зачастую, информация о функции запаздывания отсутствует, известна лишь ее верхняя граница, кроме того система может содержать распределенное запаздывание. Устойчивость систем с переменным и распределенным запаздыванием изучена в значительно меньшей степени.

Известные методы, в большинстве случаев позволяют получать лишь достаточные условия устойчивости или верхние оценки максимального показателя Ляпунова. Недостатком таких результатов является то, что степень их консервативности остается неизвестной. В связи с этим является актуальной задача локализации максимального показателя Ляпунова, то есть кроме верхней оценки, необходимо найти его нижнюю оценку. Близость этих оценок гарантирует точность полученной верхней оценки и следовательно достаточных условий устойчивости.

Перечисленные задачи составляют предмет диссертации. Актуальность тематики работы обуславливается важностью и необходимостью решения таких задач при исследовании математических моделей реальных механических систем.

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Исследования проводились по плану научно-исследовательских работ Института транспортных систем и технологий НАН Украины тема - 1.3.6.14: «Развитие методов исследования механики транспортных средств и энергетических систем» (№ гос. Регистрации 0107U001166) и тема - 1.3.6.16: «Развитие методов и исследования механики, аэродинамики и систем управления транспортных средств и энергетических объектов» (№ гос. регистрации 0112U000097).

Цель и задачи исследования. Целью работы является разработка новых критериев устойчивости и их применение к анализу некоторых нелинейных механических систем с запаздыванием.

Объектом исследования являются математические модели механических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием.

Предметом исследования являются условия устойчивости указанных систем.

Методами исследований являются методы качественной теории дифференциальных уравнений, матричного анализа и теории эволюционных операторов.

Сформулируем *задачи* исследований.

1. Разработать новый подход к получению критериев устойчивости нелинейных механических систем с постоянными, переменными и распределенными запаздываниями.
2. Получить верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости.
3. Получить нижнюю оценку максимального показателя Ляпунова и достаточные условия неустойчивости.
4. Разработать метод расчета устойчивости систем высокого порядка.
5. Получить условия устойчивости систем с переключениями и опозданием.

6. Установить достаточные условия устойчивости и неустойчивости для системы стабилизации перевернутого маятника с учетом запаздывания в обратной связи.
7. Исследовать устойчивость процессов резки металла при вертикально-фрезерной обработке.

Научная новизна полученных результатов. Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Предложен новый подход для исследования устойчивости различных типов нелинейных систем с запаздыванием основанный на оценках эволюционных операторов линейной части системы, позволяющей получать критерии устойчивости выраженные непосредственно через параметры системы.
2. Получена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости указанных систем.
3. Получена нижняя оценка максимального показателя Ляпунова и достаточные условия неустойчивости системы. Эти результаты позволяют локализовать границу области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров системы.
4. Для некоторых классов систем получены точное значение максимального показателя Ляпунова и необходимые и достаточные условия устойчивости. Такие результаты могут быть, в частности, использованы для оценки консервативности известных достаточных критериев устойчивости.
5. Предложен простой метод расчета устойчивости, вычислительная сложность которого практически не зависит от порядка системы.
6. Предложен новый подход для анализа устойчивости систем с переключениями, найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова для произвольного закона переключения. Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости таких систем.

7. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости для системы стабилизации перевернутого маятника с учетом запаздывания в обратной связи. Для переменного и постоянного запаздывания получена оценка величины критического запаздывания, при котором происходит дестабилизация системы. Полученная оценка хорошо согласуется с известным экспериментальным результатом.
8. Исследована устойчивость процессов резки металлов при вертикально-фрезерной обработке. Найдено режима устойчивого резания, хорошо согласующиеся с известными экспериментальными результатами.

Обоснованность и достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается: корректностью поставленных задач; использованием известных результатов теории дифференциальных уравнений; полным и строгим доказательством всех основных утверждений и расчетов и совместимостью полученных результатов с известными теоретическими и экспериментальными результатами.

Практическое значение полученных результатов. Полученные в работе результаты во многих случаях позволяют рассматривать более широкий класс задач или получать более достоверные результаты по сравнению с известными методами. Практическое значение состоит в возможности их использования при исследовании устойчивости механических систем, которые моделируются нелинейными дифференциальными уравнениями с опозданием. Результаты исследования устойчивости процессов резки металлов могут быть применены при выборе оптимальных параметров обработки для фрезерных станков с числовым программным управлением.

Личный вклад соискателя. Все результаты работы, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. В работах, опубликованных в соавторстве, диссертанту принадлежит выбор методики решения поставленных перед ним задач, аналитические и численные расчеты, анализ

полученных результатов, научному руководителю Зевину А.А. принадлежат постановка задачи и обсуждение результатов.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах Института транспортных систем и технологий НАН Украины, семинаре отдела устойчивости процессов Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (руководитель семинара академик НАН Украины А.А. Мартынюк), семинаре секции по направлению «Динамика и устойчивость движения механических систем» Института механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины (руководитель семинара академик НАН Украины В.Д. Кубенко), на заседаниях IX Крымской международной математической школы «MFL-2008 Метод функций Ляпунова и его приложения» (сентябрь 2008, Алушта), на украинском математическом конгрессе-2009 (август 2009, Киев), на международной научно-технической конференции «Моделирование, идентификация, синтез систем управления» (сентябрь 2009, Донецк), на заседаниях X Крымской международной математической школы «MFL-2010 Метод функций Ляпунова и его приложения» (сентябрь 2010, Алушта), на международной конференции по математическому моделированию «МКММ-2011» (сентябрь 2011, Херсон), на международной конференции «Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)» (сентябрь 2012, Севастополь).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 печатных работах. Среди них 6 статей [1-6] в специализированных научных изданиях и 6 – тезисы докладов [7-12] научных конференций.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех разделов, выводов, списка использованных источников из 117 наименований (12 страниц) и 19 рисунков. Полный объем работы составляет 117 страниц.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю А.А. Зевину за определение актуального направления исследования, постановку задач и постоянное внимание к работе.

РАЗДЕЛ 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

При математическом описании различных процессов используется предположение, что поведение системы зависит только от текущего состояния. Такое предположение удовлетворяется для широкого класса динамических систем. Однако существует большое количество задач в различных областях науки и техники, для которых использование этого предположения не позволяет адекватно описать динамику процесса. В этом случае необходимо использовать модели учитывающие эффект последействия, когда поведение процесса в текущий момент времени также зависит и от предыдущих состояний.

В литературе приведено большое количество таких моделей, описывающих дифференциальными уравнениями с последействием, для решения задач механики, автоматизированного управления, биологии, химии, экономики и т.д. В частности, такие модели приведены в монографиях [13]-[18]. В последнее десятилетия появилось много работ посвященных исследованию влиянию эффекта запаздывания при решении различных задач в областях информационных технологий и робототехники, например: моделирование задержек пакетов при маршрутизации в высокоскоростных коммуникационных сетях [19], [20]; устойчивость сетевых управляемых систем [21], [22]; балансировка нагрузки в системах параллельного вычисления [23]; роботизированные телекомандные системы [24]-[27]. Кроме того, модели с запаздыванием могут использоваться для упрощения моделей очень высокой размерности [28].

1.1. Решения дифференциальных уравнений с запаздыванием

Дифференциальные уравнения с запаздыванием начали изучаться достаточно давно, отдельные результаты были получены еще в XVIII

столетии. Однако систематическое изучение и выделение в отдельный раздел общей теории дифференциальных уравнений, началось во второй половине XX века после выхода работ А.Д Мышкиса, Е.М. Райта и Р. Беллмана.

А.Д. Мышкисом в [29], [30] была поставлена и подробно изучена начальная задача для уравнений с запаздыванием. Для простейшего дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1.1)$$

основная начальная задача (задача Коши) заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ уравнения (1.1) при $t > t_0$, при условии, что $x(t) = x_0(t)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, где $x_0(t)$ – заданная непрерывная начальная функция.

В работах [30]-[35] доказываются различные теоремы о существовании, единственности и непрерывности решений указанной задачи.

Наиболее простым методом получения решения системы (1.1) является метод шагов. Это метод заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ задачи путем последовательного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Заменяя в (1.1) значение $x(t - \tau)$ при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ на значение начальной функции $x_0(t - \tau)$, получим для определения $x(t)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x_0(t - \tau)), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0.$$

Определив решение на отрезке $[t_0, t_0 + \tau]$, подобным же образом можно найти его и при $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$ и т.д.

Метод шагов не является универсальным, например, его нельзя применять для уравнений с переменным запаздыванием, которое в некоторых точках обращается в нуль [35]. В [32] было показано, что метод шагов применим для уравнений с переменным запаздыванием если будет существовать

$$\inf \tau(t) = d > 0$$

при $t \geq t_0$. В этом случае можно будет продвигаться вперед шагами, равными d , получая на каждом шаге обыкновенное дифференциальное уравнение.

В [35] было дано интегральное представление решения. Получена формула, аналогичная формуле Коши в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая решение линейного уравнения с последействием в зависимости от коэффициентов уравнения, начальных условий и правой части. Показано, что решение уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f(t),$$

$$x(t) \equiv 0 \text{ при } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x \in R^n,$$

можно записать в интегральной форме

$$x(t) = \int_{t_0}^t W(s,t)f(s)ds,$$

где матрица $W(s,t)$ при каждом фиксированном t удовлетворяет по s уравнению

$$\dot{W}(s,t) + W(s,t)A(s) + W(s + \tau, t)B(t + \tau) = 0,$$

$$W(t,t) = I, \quad W(s,t) = 0, \quad s > t,$$

где I – единичная матрица.

В [18] для неоднородной системы с чистым запаздыванием (т.е. содержащей только запаздывающие члены) дано интегральное представление через т.н. «запаздывающий экспоненциал». Показано, что решение системы

$$\dot{x}(t) = Bx(t - \tau) + f(t),$$

$$x(t) \equiv 0 \text{ при } t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad x \in R^n,$$

можно записать в виде

$$x(t) = \int_{t_0}^t \exp_{\tau}\{B, t - \tau - s\}f(s)ds,$$

где $\exp_{\tau}\{B, t\}$ – матричная функция (запаздывающий экспоненциал), которая имеет вид полинома степени k , «склеенного» в узлах $t = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\exp_{\tau}\{B, t\} = \begin{cases} \Theta, & -\infty < t < -\tau \\ I, & -\tau \leq t < 0 \\ \dots\dots\dots \\ I + B \frac{t}{1!} + B^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + B^k \frac{(t-\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau \leq t < k\tau \end{cases}$$

где Θ – нулевая матрица.

1.2. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздыванием

Как известно, запаздывание может оказывать существенное влияние на качественное поведение решений системы, например, иметь дестабилизирующий эффект или приводить к появлению колебаний, в частности, для систем нейтрального типа, неустойчивость может быть вызвана даже сколь угодно малым запаздыванием [36]-[38]. В то же время, запаздывание может оказывать и стабилизирующий эффект, например, решение уравнения $\ddot{y}(t) + y(t) - y(t-h) = 0$ является неустойчивым при $h=0$, но при $h=1$ становится асимптотически устойчивым [28]. Другие линейные и нелинейные примеры такого рода можно найти в [39]-[40].

В настоящее время, наиболее изученными являются стационарные линейные дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием. Вопрос об устойчивости решений таких уравнений может быть решен на основе анализа корней соответствующего характеристического уравнения. Однако, для систем даже с одним запаздыванием, характеристическое уравнение является трансцендентным, что приводит к бесконечному количеству комплексных корней.

Реальные системы могут моделироваться уравнениями более сложной структуры, например уравнениями, содержащими несколько дискретных запаздываний, распределенное запаздывание, случайное запаздывание или их комбинацию. Исследование нулей характеристического уравнения более общих систем представляет собой достаточно трудную задачу. Это

послужило причиной развития большого количества различных подходов для исследования устойчивости таких систем. Изложение этих подходов можно найти, например, в обзорах [28], [41], [42] и монографиях [43], [44], [15], [18].

При исследовании устойчивости дифференциальных уравнений с запаздыванием одним из наиболее используемых является второй метод Ляпунова, при этом имеются два направления.

В первом направлении, предложенном Б.С. Разумихиным [45]-[48], используются функции Ляпунова с дополнительным условием, которое ограничивает множество кривых, на которых оценивается производная функции Ляпунова, т.е. предыстория находится не в произвольной точке фазового пространства, а внутри области, ограниченной поверхностью уровня, на которой вычисляется производная. Аналитически это условие имеет вид

$$V(s, x(s)) \leq V(t, x(t)) \text{ при } t - h \leq s \leq t.$$

Это условие получило название «условие Разумихина».

Второе направление основано Н.Н. Красовским [49], который предложил рассматривать отрезок решения $x(s)$ при $t - h \leq s \leq t$ как точку в функциональном пространстве. При этом вместо функций Ляпунова вводятся функционалы Ляпунова-Красовского, обладающие соответствующими свойствами.

В [28] приведено множество примеров функционалов Ляпунова-Красовского для получения условий устойчивости (зависящие и не зависящие от величины запаздывания) для различных систем содержащих постоянное, переменное и распределенное запаздывания. Однако, как было отмечено там же, эти условия могут давать очень консервативные результаты.

Следует отметить, что при практическом исследовании систем с запаздыванием оба подхода, в большинстве случаев, дают лишь достаточные условия устойчивости [18].

1.3. Абсолютная устойчивость

В прикладных задачах устойчивости различных систем зачастую нелинейная характеристика объекта точно не известна или меняется со временем в определенных пределах. Требуется найти условия, гарантирующие устойчивость системы для любых нелинейных характеристик, лежащих в допустимых пределах. Такая задача впервые была поставлена в 1944 г. А.И. Лурье и В.Н. Постниковым в работе [50], где рассматривалась устойчивость системы автоматического регулирования при любых начальных возмущениях и любой нелинейности сервомотора, лежащей в заданном секторе. Эта статья положила начало новому направлению – теории абсолютной устойчивости, где рассматривается устойчивость не одной конкретной системы, а некоторого множества систем, принадлежащих определенному классу. Задача привлекла внимание многочисленных ученых, работающих в различных областях науки и техники, ее исследованию посвящено большое количество работ (см., например обзоры [51]-[52]). Были рассмотрены новые виды динамических систем, в частности, системы с запаздыванием. В работе Б.С. Разумихина [53] достаточные условия устойчивости таких систем были получены методом функции Ляпунова. Работа В.М. Попова и А. Халаная [54] положила начало развитию частотных методов исследования устойчивости систем с запаздыванием.

Задача абсолютной устойчивости для систем с запаздыванием рассматривалась также в работах [17], [55]-[79].

Большинство современных исследований устойчивости таких систем посвящены выводу критериев устойчивости с помощью функций и функционалов Ляпунова. Оценкам максимального показателя Ляпунова, характеризующего скорость убывания решений, посвящено значительно меньшее количество исследований. Так в работе Д.Я. Хусаинова и А.В. Шатырко [17] такие оценки найдены с использованием функций

Ляпунова вида Лурье-Постникова, т.е. «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности».

Другой подход, основанный на оценках эволюционного оператора системы, позволяет получать критерии устойчивости и верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова, выраженные непосредственно через параметры системы, без использования функций или функционалов Ляпунова. Для систем без запаздывания такие результаты приведены в монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна «Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве» [80]. Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t), t), \quad (1.2)$$

$$f(0, t) = 0, \quad \|f(x, t)\| \leq k\|x\|.$$

Решение дифференциального уравнения (1.2) представляется в интегральной форме

$$x(t) = W(t, 0)x_0 + \int_0^t W(t, s)f(x(s), s)ds,$$

где W – эволюционный оператор линейной части $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, которому для конечномерного пространства соответствует матрицант (фундаментальная матрица).

Если линейная часть системы устойчива с показателем $-\alpha$ то справедлива следующая оценка

$$\|W(t, s)\| \leq N \exp[-\alpha(t - s)], \quad t \geq s \quad (1.3)$$

С учетом (1.3) записывается интегральное неравенство для решения (1.2)

$$\|x(t)\| \leq \|W(t, 0)x_0\| + \int_0^t N \exp[-\alpha(t - s)]k\|x\|ds$$

и доказывается теорема дающая условие устойчивости

$$k < \alpha / N \quad (1.4)$$

и верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова

$$\bar{\lambda} \leq kN - \alpha. \quad (1.5)$$

Недостатком приведенного результата является то, что условие (1.4) и оценка (1.5) требуют вычисления констант N и α , что в случае переменной матрицы $A(t)$ представляет достаточно трудоемкую задачу.

Для систем с запаздыванием существуют результаты, выраженные непосредственно в параметрах системы, получены с использованием неравенств для решений соответствующих дифференциальных уравнений [81-84]. Так, например, в [82] для стационарной системы (1.2), содержащей переменное запаздывание в нелинейной части,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + f(x(t - \tau(t)), t), \\ f(0, t) &= 0, \quad \|f(x, t)\| \leq k\|x\|, \\ 0 < \tau(t) &\leq h, \quad 0 < \dot{\tau}(t) \leq h_d < 1,\end{aligned}\tag{1.6}$$

получено условие устойчивости, совпадающее с (1.4). Оценка максимального показателя Ляпунова определяется как $\bar{\lambda} \leq -\sigma/h$, где $\sigma > 0$ находится из уравнения

$$1 - \frac{\sigma}{\alpha\tau(0)} = \frac{N}{\alpha}k \exp\left(\frac{\sigma}{1-h_d}\right).\tag{1.7}$$

Для некоторых систем рассматриваемого типа найдены необходимые и достаточные условия устойчивости [84]-[86], однако подавляющее большинство условий являются лишь достаточными. Недостатком таких условий (равно как и известных оценок показателей Ляпунова) является то, что степень их консервативности остается неизвестной.

1.4. Системы с переключениями

В последнее время значительное внимание уделяется исследованию гибридных систем, в частности, систем с переключением. Это связано с тем, что математические модели, построенные с использованием дифференциальных уравнений с переключаемой правой частью, позволили адекватно описать значительное количество реальных систем в различных

областях науки и техники, например: двигатели с автоматической коробкой передач [87]; распределенные системы автоматизированного управления [88]; электрические схемы импульсный источников питания [89]; коммуникационные протоколы сети Интернет [90]-[91] и многие другие.

Системы с переключениями описываются комбинацией дифференциальных уравнений и дискретного переключающего сигнала

$$\dot{x}(t) = f_i x(t),$$

$$x \in R^n, f_i \in \Omega = \{f_1, \dots, f_m\}.$$

Переключающий сигнал $i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ – кусочно-постоянная функция определяющая последовательность переключений между подсистемами.

Анализ устойчивости является важной частью исследования таких систем. Отметим особенности систем с переключением, влияющие на их устойчивость. Рассмотрим систему, в которой $x \in R^2$, $i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2\}$. Предположим, что обе подсистемы устойчивы с фазовыми траекториями показанными на рисунках 1.1 а), 1.1 б), соответственно.

Различный выбор переключающего сигнала $i(t)$ может привести как к асимптотической устойчивости соответствующей системы (Рис. 1.1, в)), так и к неустойчивости (Рис. 1.1, г)). Другими словами, случайные переключения могут дестабилизировать систему, даже если все ее подсистемы являются устойчивыми.

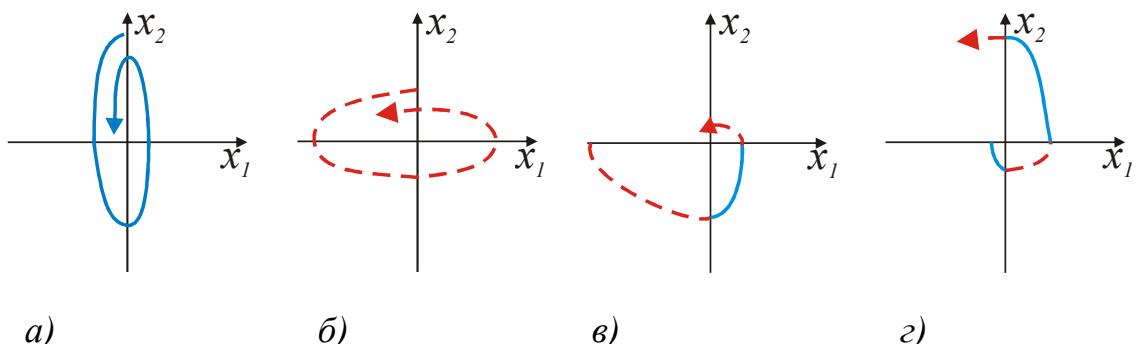


Рис. 1.1. Фазовые траектории системы

С другой стороны, переключением между неустойчивыми подсистемами, можно добиться устойчивости системы в целом.

Эти примеры показывают, что устойчивость систем с переключениями зависит не только от динамики системы в каждом режиме, но также и от свойств сигнала переключения.

Исследование устойчивости систем с переключениями может быть примерно разделено на два класса задач. Задача стабилизации: необходимо синтезировать стабилизирующий переключающий сигнал для заданного набора подсистем. Задача устойчивости при произвольных переключениях: необходимо найти условия, которые гарантируют устойчивость системы для любого закона переключения $i(t)$.

Решение задачи об устойчивости системы при произвольных переключениях представляет интерес для систем, в которых механизм переключения неизвестен или слишком сложен. Такой подход может также использоваться для анализа аварийного режима работы системы с известным законом переключения.

Гибридные системы привлекли внимание ученых во второй половине прошлого века. Прообразом таких систем были релейные системы и системы со скачкообразными изменениями параметров. Теория систем с переменной структурой разрабатывалась Е.А. Барбашиним и С.В. Емельяновым (см., например, [92], [93]). В работах А.А. Мартынюка [94], [95] рассматривались нелинейные системы со структурными возмущениями, для анализа устойчивости таких систем было предложено использовать матричнозначные функции Ляпунова. А.Ф. Филлипов [96] рассматривал вопросы устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов. Современное состояние теории устойчивости систем с переключениями отображено в обзорах [97], [98]. Большинство существующих работ посвящено исследованию линейных систем. Для них были установлены условия устойчивости, связанные с условием, существования общей квадратичной функции Ляпунова. Однако существование такой функции

дает только достаточные условия устойчивости, которые могут быть очень консервативными. Были предприняты попытки использования различных классов функций Ляпунова для ослабления условий, основанных на существовании общей квадратичной функции Ляпунова. Для некоторых частных случаев были получены необходимые и достаточные условия устойчивости (см., например, [97]-[100]). Так, в [100] такие условия получены для одного класса нелинейных систем, в котором матрицы A_i попарно коммутируемы ($A_i A_j = A_j A_i$ для всех $i \neq j$). Следует отметить, что для нелинейных систем не существует общих конструктивных способов построения функций Ляпунова [98].

РАЗДЕЛ 2

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА

В данном разделе рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений с заданной линейной частью, ограниченным по норме нелинейным слагаемым, содержащим переменное запаздывание. Найдены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова, выраженные с помощью нормы нелинейного члена и максимумов функций запаздывания. Для некоторых систем найдено точное значение указанного показателя. Полученные результаты дают достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия экспоненциальной устойчивости системы, инвариантные относительно запаздывания. Предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости, вычислительная трудоемкость которого практически не зависит от порядка системы. Приведены примеры, иллюстрирующие применение разработанной методики.

2.1. Постановка задачи

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t - \tau(t), t), \quad (2.1)$$

где $A(t)$ – заданная матрица, $x \in R^n$.

Функции $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f(x, t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \tau(t) &\in [0, h], \quad x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h, 0], \\ \|x_0(t)\| &\leq M, \\ \|f(x, t)\| &\leq k\|x\|, \quad f(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

Функции $x_0(t)$, $f(x,t)$ и $\tau(t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют приведенным выше условиям.

Пусть λ' – показатель Ляпунова решения $x(t)$ уравнения (2.1) при некоторых допустимых $x_0(t)$, $f(x,t)$, и $\tau(t)$, т.е.

$$\lambda'(x_0, f, \tau_B, \tau) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t}.$$

Максимальный показатель Ляпунова решений $x(t)$ системы (2.1) равен

$$\bar{\lambda} = \sup \lambda(\tau, f, x_0),$$

где супремум вычисляется по всем допустимым функциям $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$.

Определение 1. Система (2.1) экспоненциально устойчива, если $\bar{\lambda} < 0$. Тогда при любых $x_0(t)$, $f(x,t)$, $\tau_B(t)$ и $\tau(t)$, удовлетворяющих условиям (2.2), для соответствующих решений справедливо неравенство

$$\|x(t)\| \leq N \|x_0(t)\| \exp(\bar{\lambda} t), \quad t \in (0, +\infty),$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная.

Цель работы: разработать новые критерии устойчивости систем с запаздыванием, выраженные непосредственно с помощью параметров системы, основанные на оценках максимального показателя Ляпунова.

2.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова

Представим решение (2.1) в виде

$$x(t) = W(t, 0)x(0) + \int_0^t W(t, s)f(x(s - \tau(s)), s)ds, \quad (2.3)$$

где $W(t, s)$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Пусть α – его наибольший показатель Ляпунова, тогда при некотором $M > 0$ и любых $0 \leq s \leq t < \infty$

$$\|W(t, s)\| \leq M \exp(\alpha(t - s)). \quad (2.4)$$

Ясно, что верхнюю границу величины $\bar{\lambda}$ следует искать в интервале

$$\lambda > \alpha . \quad (2.5)$$

Положим:

$$v(t, \lambda, \tau) = \int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s))] \|W(t,s)\| ds.$$

В силу (2.4) и (2.5) функции $v(t, \lambda)$ ограничены на $[0, \infty)$; положим:

$$v(\lambda, \tau) = \sup_t v(t, \lambda, \tau), \text{ при } t \geq 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что если матрица A постоянна, то

$$W(t,s) = W(t-s),$$

$$v(t, \lambda, \tau) = \int_0^t \exp[-\lambda(t-s)+\tau(s)] \|W(t-s)\| ds = \int_0^t \exp[-\lambda(s+\tau(s))] \|W(s)\| ds. \quad (2.7)$$

Очевидно, что здесь $v(t, \lambda, \tau)$ монотонно возрастает по t , поэтому

$$v(\lambda, \tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, \lambda, \tau), \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Обозначим $\lambda_+ = \lambda_+(k)$ – наибольший по $\tau(t)$ корень уравнения

$$kv(\lambda, \tau) = 1. \quad (2.8)$$

Соответствующие значения величины τ определяются из следующих соображений. Как видно из (2.7), $v(t, \lambda, \tau)$ убывают по λ . Поэтому $\lambda_+ < 0$ и $\lambda_+ > 0$ при $kv(0) < 1$ и $kv(0) > 1$ соответственно. С другой стороны, при возрастании $\tau(t)$ функция $v(t, \lambda, \tau)$ убывает при $\lambda > 0$ и возрастают при $\lambda < 0$. Поэтому при вычислении $v(\lambda, \tau)$ в (2.8) следует положить $\tau = h$, в случае $kv(0) < 1$ и $\tau = 0$, в случае $kv(0) > 1$ (при $kv(0) = 1$ левая часть (2.8) не зависит от $\tau(t)$).

Следующая теорема дает верхнюю границу показателя $\bar{\lambda}$.

Теорема 2.1. В системе (2.1), (2.2)

$$\bar{\lambda} \leq \lambda_+.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение (2.1) при некоторых $x_0(t)$, $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ и $f(x, t)$. Положив в (2.3) $x(t) = y(t) \exp(\lambda t)$, получим

$$y(t) = \exp(-\lambda t) W(t, 0) x(0) + \exp(-\lambda t) \int_0^t W(t, s) f(\exp[\lambda(s - \tau(s))] y(s - \tau(s)), s) ds$$

Используя условия (2.1) и (2.2), найдем

$$\|y(t)\| \leq \exp(-\lambda t) \|W(t,0)x(0)\| + k \int_0^t \exp(-\lambda(t-s+\tau(s))) \|W(t,s)\| \|y(s-\tau(s))\| ds. \quad (2.9)$$

Пусть

$$\|y(t_*)\| = \max \|y(t)\| \text{ при } t \in [0, t_*], \quad (2.10)$$

где $t_* = t_*(t_+)$. Положив в (2.9) $t = t_*$ и учитывая (2.10) и (2.6), получим

$$\|y(t_*)\| \leq \exp(-\lambda t_*) \|W(t_*,0)x(0)\| + \|y(t_*)\| [kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B)]. \quad (2.11)$$

Покажем, что при $\lambda \geq \lambda_+$ функция $\|y(t)\|$ ограничена на $(0, \infty)$.

Действительно, в противном случае $t_* \rightarrow \infty$ при $t_+ \rightarrow \infty$ и в силу (2.4) и (2.5) $\exp(-\lambda t_*) \|W(t_*,0)x(0)\| \rightarrow 0$. Так как $v(t, \lambda, \tau)$ и $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ убывают по λ , то $kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ и любых допустимых $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ (как показано выше, λ_+ определяется при тех значениях $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$, при которых левая часть (2.8) максимальна). Но при этом неравенство (2.11) не выполняется для достаточно больших t_* . Полученное противоречие доказывает, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| \exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и $t > 0$; следовательно, $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$. Теорема доказана.

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (2.1), (2.2), инвариантное относительно запаздывания $\tau(t)$.

Теорема 2.2. *При условии*

$$k < k_* = \frac{1}{v(0)} \quad (2.12)$$

система (2.1), (2.2) экспоненциально устойчива.

Доказательство. Как отмечено выше, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$. Как следует из (2.12), при $k = k_*$ корень уравнения (2.8) $\lambda_+ = 0$ при любых $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$. Так как $v(\lambda)$ и $v_1(\lambda)$ убывают по λ , то $\lambda_+ < 0$ при $k < k_*$ и, следовательно, $\bar{\lambda} < 0$. Теорема доказана.

Заметим, что в отличие от верхней оценки максимального показателя Ляпунова, условия устойчивости (2.12), не зависят от величины запаздывания.

Полученное условие устойчивости улучшает указанный ранее критерий Крейна (1.4) в нескольких отношениях.

Прежде всего для любой системы оно является более точным т.к. $v(0) \leq N/\alpha$, следовательно $1/v(0) \geq \alpha/N$. Кроме того, условие (2.12) не требует вычисления констант N и α , что в случае переменной матрицы $A(t)$ представляет собой достаточно трудную задачу. Важно также отметить что, предложенное условие остается справедливым и при наличии любого переменного запаздывания в нелинейной части системы.

2.3. Нижняя оценка максимального показателя Ляпунова

Известные методы в большинстве случаев позволяют получать лишь достаточные условия устойчивости или верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова. Недостатком таких результатов является то, что степень их консервативности остается неизвестной. В связи с этим представляет интерес получение достаточных условий неустойчивости и нижней оценки максимального показателя Ляпунова в пространстве параметров системы. Наличие двусторонних оценок позволит локализовать точное значение максимального показателя Ляпунова.

Пусть для некоторой системы $\dot{x} = f(x)$ получены достаточные условия устойчивости $F_+(\alpha) \leq 0$ и неустойчивости $F_-(\alpha) \geq 0$, где α – некоторые параметры системы. Пусть α_+ и α_- корни уравнений $F_+(\alpha) = 0$ и $F_-(\alpha) = 0$, соответственно. Очевидно, что точное критическое значение параметров α гарантирующих устойчивость системы лежит в интервале (α_+, α_-) . По близости значений α_+ и α_- можно судить о степени консервативности полученных достаточных условий устойчивости.

Найдем нижнюю оценку максимального показателя Ляпунова для случая, когда линейная часть системы (2.1) стационарна. Идея предлагаемого метода заключается в следующем. В допустимой области пространства параметров отыскивается точное решение системы. В частности, для этой цели, нелинейная функция $f(x)$ заменяется линейной, лежащей в допустимой области. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + kD(\varphi)x(t - \tau), \quad (2.13)$$

где $\tau \in [0, h]$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\|D(\varphi)\| = 1$. В силу последнего равенства функция $f(x) = kD(\varphi)x$ удовлетворяет условию (2.2), поэтому уравнение (2.13) принадлежит к рассмотренному выше классу.

Следовательно, $\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}$ – максимальные показатели Ляпунова систем (2.13) и (2.1) соответственно.

Представив решение (2.13) в виде $x(t) = \exp(\lambda t)y$, получим уравнение относительно λ :

$$\det[A + k \exp(-\lambda\tau)D(\varphi) - \lambda I] = 0, \quad (2.14)$$

где I – единичная матрица.

Для такого решения показатель Ляпунова определяется в явном виде. Ясно, что показатель Ляпунова указанного решения может служить нижней оценкой максимального показателя Ляпунова исходной системы.

Пусть $\beta = \max_p(\operatorname{Re}(\lambda_p))$, $p = 1, \dots, n$, где λ_p – корни уравнения (2.14), тогда $\bar{\lambda}_1 = \beta$. Поэтому нижнюю оценку λ_- величины $\bar{\lambda}$ можно определять по формуле

$$\lambda_- = \sup_{\tau, \varphi} [\beta(\tau, \varphi)]. \quad (2.15)$$

Заметим, что в случае евклидовой нормы в качестве $D(\varphi)$ можно принять любую ортогональную матрицу (как известно, для такой матрицы $\|D(\varphi)\| = 1$).

2.4. Примеры применения оценок

Проиллюстрируем применение полученных оценок на примерах.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t - \tau(t)), t),$$

$$x \in R^2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\|f(x, t)\| \leq k\|x\|$ и $\tau(t) \in [0, h]$.

Так как матрица A постоянна, то $W(t, s) = W(t - s)$. Легко проверить, что

$$W(t) = \begin{bmatrix} 2b(t) - a(t) & 2b(t) - 2a(t) \\ -b(t) + a(t) & -b(t) + 2a(t) \end{bmatrix},$$

где $a(t) = \exp(-t)$, $b(t) = \exp(-2t)$.

Уравнение (2.8) для определения верхней границы λ_+ показателя $\bar{\lambda}$ принимает вид

$$kv(\lambda, \tau) = 1,$$

$$v(\lambda, \tau) = \int_0^\infty \exp(-\lambda(s + \tau(s))) \|W(s)\| ds,$$

где $\tau = h$ при $kv(0) < 1$ и $\tau = 0$ при $kv(0) \geq 1$.

Нижняя граница λ_- определялась с помощью соотношений (2.14), (2.15), где матрица D принималась в виде

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

На рисунке 2.1 представлены графики $\lambda_+(k)$ – сплошной линией и $\lambda_-(k)$ – пунктирной линией при различных значениях параметра h (в расчетах использовалась евклидова норма).

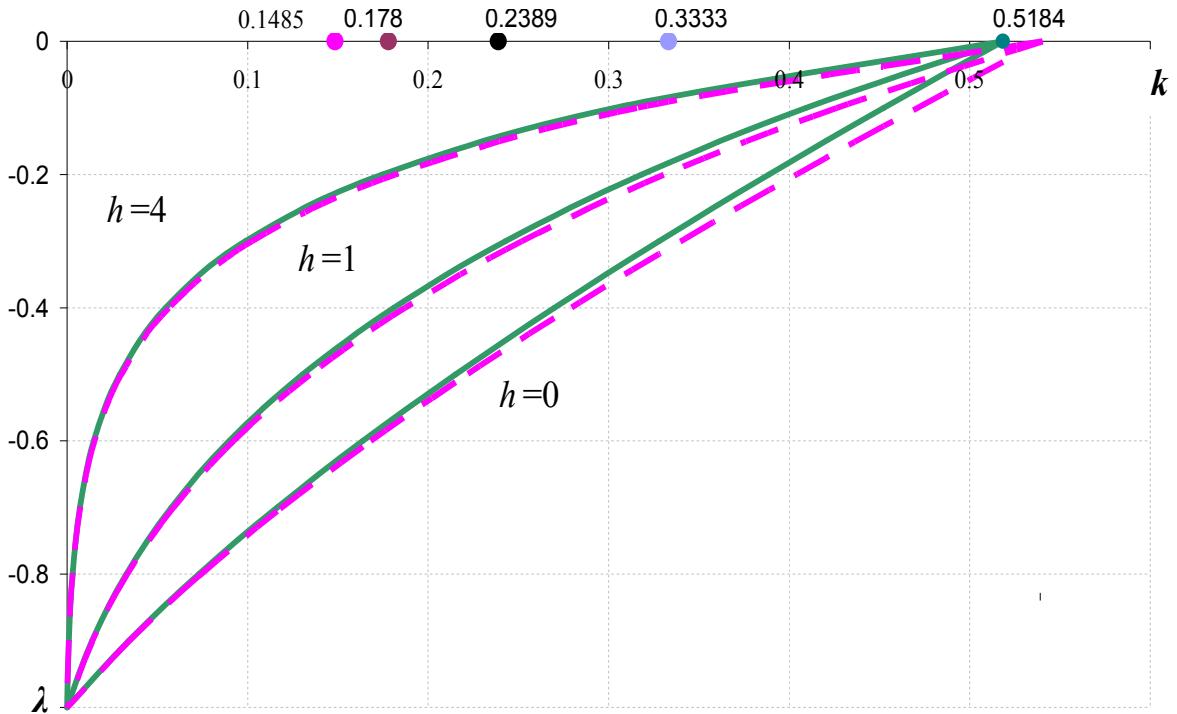


Рис. 2.1. Границы $\lambda_+(k)$ и $\lambda_-(k)$ показателя $\bar{\lambda}$ при различных значениях параметра h

Функции $\lambda_+(k, h)$ возрастают по h и k , однако $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k(\lambda, h) = k_* = 0.5184$ при $\lambda \rightarrow 0$ не зависит от h . Поэтому условие $k < 0.5184$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любых конечных h (этот вывод согласуется с полученным выше общим результатом). Заметим, что найденное условие устойчивости существенно улучшает известные условия $k \leq 0.1458$, $k \leq 0.178$ [101], $k \leq 0.2389$ [102], $k \leq 0.3333$ [103] установленные другими методами. Наилучшее из этих критических значений $k = 0.3333$.

Таким образом, найденное значение $k_* = 0.5184$ значительно улучшают известные оценки устойчивости и оно не может быть существенно улучшено.

Как видно из рисунка 2.1, функции $\lambda_+(k, h)$ и $\lambda_-(k, h)$ весьма близки друг к другу в достаточно широкой области параметров k и h , что свидетельствует о высокой точности предлагаемого метода применительно к данной задаче. Интересно, что при увеличении максимального запаздывания h точность возрастает.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение третьего порядка

$$\dot{x}(t) + Ax(t) = f(x(t - \tau(t), t),$$

$$x \in R^3, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 2.2 представлены графики $\lambda_+(k)$ – сплошной линией и $\lambda_-(k)$ – пунктирной линией при различных значениях параметра h . Функции $\lambda_+(k)$ и $\lambda_-(k)$ вычислялись здесь аналогично предыдущему примеру. В качестве $D(\varphi)$ в (2.14) принималась ортогональная матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & -\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 \sin\varphi_3 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 & \cos\varphi_1 \sin\varphi_3 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \\ \cos\varphi_1 \sin\varphi_3 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 & -\cos\varphi_2 \sin\varphi_3 & \cos\varphi_1 \cos\varphi_3 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \end{pmatrix}$$

так что максимизация $\lambda_-(k)$ осуществлялась по параметрам (углам Эйлера) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

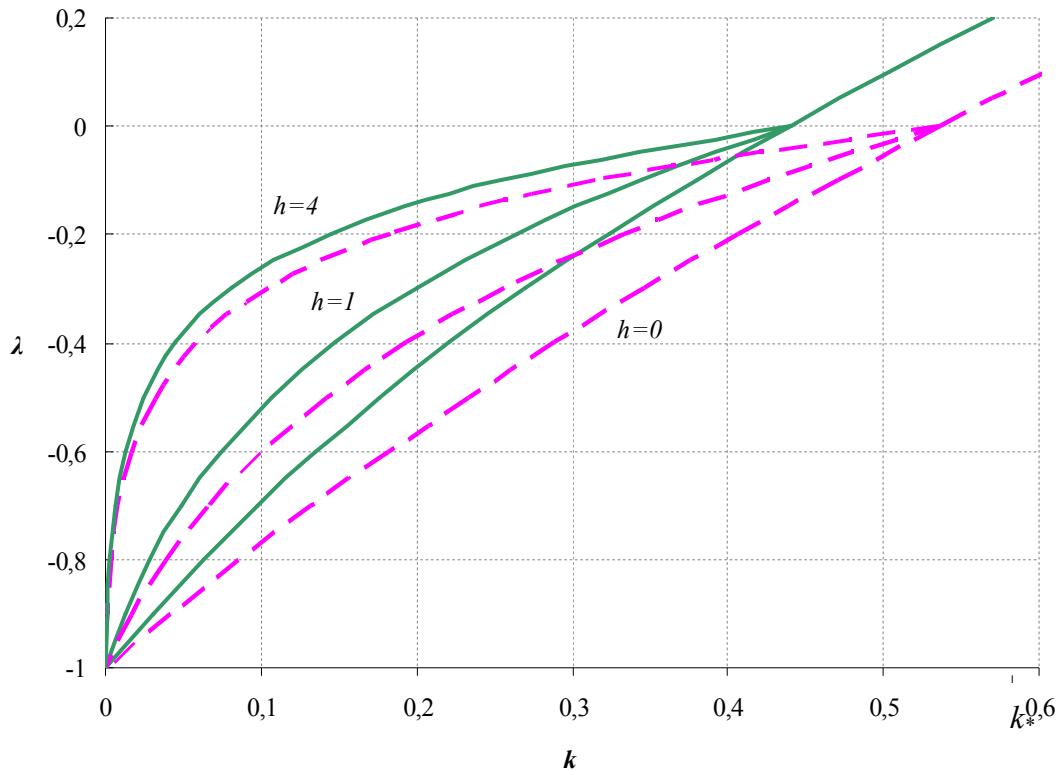


Рис. 2.2. Границы $\lambda_+(k)$ и $\lambda_-(k)$ показателя $\bar{\lambda}$ при различных значениях параметра h

Как и в предыдущем примере, оказалось, что при увеличении максимальной величины запаздывания h точность возрастает.

2.5 Точные значения максимального показателя Ляпунова

Как было отмечено ранее, в большинстве случаев известные методы позволяют получать верхние оценки максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости. Ниже получены точные значения указанных величин для некоторых классов нелинейных систем.

Если в некоторой системе найденные оценки λ_- , λ_+ совпадают, то очевидно, что точное значение наибольшего показателя Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_- = \lambda_+$. Укажем системы, для которых это равенство имеет место, при этом полагаем, что в (2.2) используется евклидова норма.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t - \tau(t))), \quad (2.16)$$

где A – постоянная симметрическая матрица. Как известно, собственные значения такой матрицы действительны, обозначим их $\lambda_i, i=1,\dots,n-1$ ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$).

Теорема 2.3. В системе (2.16), (2.2) максимальный показатель Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_+$, где λ_+ определяется из уравнения (2.8) при

$$v(\lambda, \tau^*) = \frac{\exp(-\lambda \tau^*)}{\lambda_1 + \lambda}, \quad (2.17)$$

где $\tau^* = h$ при $kv(0) < 1$, $\tau^* = 0$ при $kv(0) \geq 1$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[(t-s)A]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[(t-s)\lambda_i]$, $i=1,\dots,n$. В силу симметрии A матрица $W(t,s)$ также симметрична, поэтому ее евклидова норма равна максимальному собственному значению, т.е.

$\|W(t,s)\| = \exp[\lambda_1(t-s)]$. Подставив это выражение в (2.6) и (2.7), получим (2.17).

В соответствии с теоремой 2.1 $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$, покажем, что на самом деле имеет место равенство $\bar{\lambda} = \lambda_+$.

Положим в (2.16) $f(x) = kx$ и $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$, где a_1 – собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ_1 . Учитывая, что $Aa_1 = \lambda_1 a_1$ и что по определению λ_+

$$k \frac{\exp(-\lambda_+ \tau^*)}{\lambda_+ + \lambda_1} = 1, \quad (2.18)$$

найдем, что $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$ является решением уравнения (2.16) с показателем λ_+ . По определению показатель любого решения не превышает $\bar{\lambda}$, с другой стороны, в силу теоремы 1 $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$. Таким образом, $\bar{\lambda} = \lambda_+$. Теорема доказана.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t - \tau(t)), t), \quad (2.19)$$

$$A = K + mI, \quad (2.20)$$

где K – кососимметрическая матрица ($K^T = -K$), а $f(x, t)$ удовлетворяет условию (2.2).

Теорема 2.4. В системе (2.19), (2.20), (2.2) максимальный показатель Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_+$, где

при $k - m \geq 0$

$$\lambda_+ = k - m, \quad (2.21)$$

а при $k - m < 0$ λ_+ – корень уравнения

$$\lambda + m - k \exp(-\lambda h) = 0. \quad (2.22)$$

Доказательство. Дифференцируя $X(t) = \|x(t)\| = (x(t), x(t))^{1/2}$, с учетом (2.2), (2.19) и (2.20) получим

$$X(t)\dot{X}(t) = -\frac{1}{2}((A + A^T)x(t), x(t)) + (x(t), f(x(t - \tau(t)), t)) \leq$$

$$\leq -mX(t)^2 + kX(t)X(t - \tau(t)). \quad (2.23)$$

Из (2.22), (2.23) имеем

$$\dot{X}(t) + mX(t) \leq kX(t - \tau(t)). \quad (2.24)$$

Положив в (2.6) $X(t) = Y(t)\exp(\lambda t)$, аналогично доказательству теоремы 2.3 найдем, что верхняя оценка λ_+ наибольшего показателя Ляпунова системы (2.19) определяется с помощью соотношений (2.21) или (2.22). Покажем, что $\lambda_+ = \bar{\lambda}$.

Пусть $\lambda_k = i\omega_k$ (i – мнимая единица) и y_k , $k = 1, \dots, n$ – собственные значения и векторы матрицы K (действительные части λ_k равны нулю в силу $K^T = -K$). Положив в (2.19) $f(x, t) = kx$, $\tau = 0$ при $k - m \geq 0$, $\tau = h$ при $k - m < 0$ и учитывая равенство $Ky_k = i\omega_k y_k$, непосредственной подстановкой можно убедиться, что $x(t) = \exp(\lambda_+ + i\omega_k)t y_k$ служит решением (2.19). Следовательно, $\bar{\lambda} \geq \lambda_+$, что с учетом полученного выше неравенства $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$ доказывает теорему 3.

Как установлено выше, для уравнений (2.16) и (2.19) $\lambda_+ = \bar{\lambda}$. Следовательно, для них неравенство (2.12) является не только достаточным, но и необходимым условием экспоненциальной устойчивости.

Полученные результаты представляют самостоятельный интерес, кроме того, они могут быть использованы для оценки эффективности известных методов.

2.6. Метод расчета устойчивости систем со стационарной линейной частью

Во всех известных методах вычислительная сложность исследования устойчивости существенно возрастает с увеличением порядка системы. В данном подразделе систем со стационарной линейной частью предложен

простой метод расчета устойчивости, трудоемкость которого практически не зависит от порядка системы.

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t - \tau(t)), t), \quad (2.25)$$

где матрица A – гурвицева, т.е. все ее собственные значения β_i удовлетворяют неравенству $Re\beta_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Функции $\tau(t)$, $f(x, t)$ и $x_0(t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям (2.2); при этом полагаем, что в (2.2) используется евклидова норма.

В силу $f(0, t) = 0$, система (2.25) имеет положение равновесия $x(t) \equiv 0$.

Далее рассматривается устойчивость этого положения.

Будем считать, что матрица A имеет различные собственные значения β_1, \dots, β_n (этого можно достичь произвольно малым возмущением A [104]). Пусть v_1, \dots, v_n – соответствующие собственные векторы, нормированные условием

$$(v_i, v_i) = 1, i = 1, \dots, n.$$

Обозначим T матрицу, столбцами которой являются векторы v_i :

$$T = (v_1, \dots, v_n).$$

Как известно [104],

$$T^{-1}AT = J = diag(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Положив в системе (2.25) $x = Ty$, получим

$$\dot{y}(t) = Jy(t) + T^{-1}f(Ty(t - \tau(t)), t). \quad (2.26)$$

Следующая теорема дает условие экспоненциальной устойчивости системы (2.25).

Теорема 2.5. *При условии*

$$\frac{1}{\beta} \|T^{-1}\| k \|T\| < 1 \quad (2.27)$$

система (2.25) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

здесь $\beta = \min |Re\beta_i|$, λ – корень уравнения

$$V(\lambda) = \frac{1}{\beta + \lambda} \exp[-\lambda h] \|T^{-1}\| k \|T\|. \quad (2.28)$$

Доказательство. Представим решение (2.26) в виде

$$y(t) = W(t,0)y(0) + \int_0^t T^{-1} f(Ty(s-\tau(s)), s) ds, \quad (2.29)$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажем сначала, что при условии (2.27) $y(t)$ ограничено на $(0, +\infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$), такая, что

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\| \quad \text{где } t \leq t_q. \quad (2.30)$$

Из (2.29), с учетом (2.2) и (2.30), имеем

$$\|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \int_0^{t_q} \|T^{-1}\| k \|T\| \|y(t_q)\| ds. \quad (2.31)$$

В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[(t-s)J]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[(t-s)\beta_i]$, $i=1,\dots,n$. Матрица J – диагональная, следовательно, $W(t,s)$ также диагональная, поэтому $\|W(t,s)\| = \exp[-\beta(t-s)]$. Тогда

$$\lim_{t_q \rightarrow +\infty} \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| ds = \lim_{t_q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} (1 - \exp[-\beta t_q]) = \frac{1}{\beta}.$$

С учетом этого, неравенство (2.31) запишем в виде

$$\|y(t_q)\| \leq \|W(t_q,0)y(0)\| + \|y(t_q)\| \frac{1}{\beta} \|T^{-1}\| k \|T\|. \quad (2.32)$$

Так как система $\dot{y}(t) = Jy(t)$ устойчива, то $\|W(t_q,0)y(0)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow +\infty$. Следовательно, при условии (2.27), неравенство (2.31) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Максимальный показатель Ляпунова решений системы $\dot{y}(t) = Jy(t)$ равен $\bar{\lambda} = -\beta$. Будем искать верхнюю оценку величины $\bar{\lambda}$ системы (2.25) в интервале

$$\lambda > -\beta.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положим в (2.26)

$$y(t) = \exp(\lambda t)z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \quad (2.33)$$

в результате получим

$$\dot{z}(t) = (J - \lambda I)z(t) + \exp[-\lambda t]T^{-1}f(T \exp[\lambda(t - \tau(t))]z(t - \tau(t)), t) \quad (2.34)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (2.34) ограничены, если

$$\frac{1}{\beta + \lambda} \exp[-\lambda h] \|T^{-1}\| k \|T\| < 1.$$

Функция $V(\lambda)$ убывает по λ , по условию (2.27) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, следовательно при $V(\lambda) = 1 \quad \lambda < 0$. Учитывая (2.33), найдем, что система (2.25) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

Для проверки эффективности предложенного метода проведены были расчеты и получены условия устойчивости для модельных примеров рассмотренных в подразделе 2.4.

Так, для примера 2.1, теорема 2.5 позволяет получить условие экспоненциальной устойчивости

$$k < 0.1458,$$

в то время как теорема 2.2 дает условие $k < 0.5184$.

Очевидно, что условия устойчивости получаемые из теоремы 2.2 менее консервативны, однако, метод, предлагаемый в данном подразделе, существенно проще.

В случае симметрической матрицы A , найденное решение является точным решением исходной задачи. Поэтому данный метод тем точнее, чем ближе матрица A к симметрической.

Выводы к разделу 2

В разделе разработаны новые критерии устойчивости систем дифференциальных уравнений с заданной линейной частью и неизвестной ограниченной по норме нелинейностью содержащей переменное запаздывание.

Найдены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова, выраженные с помощью нормы нелинейного члена и максима функции запаздывания. Для некоторых систем найдено точное значение указанного показателя. Полученные результаты дают достаточные (а в некоторых случаях и необходимые) условия экспоненциальной устойчивости системы, инвариантные относительно величины запаздывания. Предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости, вычислительная трудоемкость которого практически не зависит от порядка системы. Приведены примеры, иллюстрирующие применение разработанной методики.

Основные результаты настоящего раздела опубликованы в работах [2] и [5].

РАЗДЕЛ 3

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ И СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В данном разделе полученные выше результаты были обобщены на более сложные системы. В частности рассмотрена система, содержащая переменное запаздывание в линейной части и содержащая элемент с распределенным запаздыванием. Найдены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова, выраженные с помощью нормы нелинейного члена и максимумов функций запаздывания. Для некоторых систем найдено точное значение указанного показателя. Рассмотрена система с «чистым» запаздыванием, которая содержит несколько элементов с различным запаздыванием, причем отсутствует устойчивая линейная подсистема без запаздывания. Разработанный подход обобщен на системы с переключениями, содержащих запаздывание. Получены достаточные условия, гарантирующие устойчивость системы при любом законе переключения. Для всех указанных систем эффективность предложенного подхода проверена на модельных примерах рассмотренных ранее другими авторами; полученные результаты существенно расширяют известные области устойчивости.

3.1. Системы с переменным и распределенным запаздыванием

3.1.1. Постановка задачи

Рассматривается система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau_B(t)) + f(x(t - \tau(t), t)) + C(t) \int_{t-\mu}^t x(s)ds \quad (3.1)$$

где $A(t)$ – заданная матрица, $x \in R^n$.

Функции $\tau(t)$, $\tau_B(t)$, $x_0(t)$ и $f(x,t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \tau(t) &\in [0, h], \tau_B(t) \in [0, h_B], \\ x(t) = x_0(t) &\text{ при } t \in [-H, 0], H = \max(h, h_B, \mu), \|x_0(t)\| \leq M, \\ \|f(x, t)\| &\leq k\|x\|, f(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

В силу $f(0, t) = 0$, система (3.1) имеет положение равновесия $x(t) \equiv 0$. Необходимо получить критерии устойчивости систем с переменным и распределенным запаздываниями основанные на оценках максимального показателя Ляпунова.

3.1.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова

Представим решение (3.1) в виде

$$x(t) = W(t, 0)x(0) + \int_0^t W(t, s) \left[f(x(s - \tau(s)), s) + B(s)x(s - \tau_B(s)) + C(s) \int_{s-\mu}^s x(u) du \right] ds \quad (3.3)$$

где $W(t, s)$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$. Пусть α – его наибольший показатель Ляпунова, тогда при некотором $M > 0$ и любых $0 \leq s \leq t < \infty$

$$\|W(t, s)\| \leq M \exp(\alpha(t - s)). \quad (3.4)$$

Ясно, что верхнюю границу величины $\bar{\lambda}$ следует искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \quad (3.5)$$

Положим:

$$\begin{aligned} v(t, \lambda, \tau) &= \int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s))] \|W(t, s)\| ds, \\ v_1(t, \lambda, \tau_B) &= \int_0^t \|W(t, s)B(s)\| \exp[-\lambda(t-s+\tau_B(s))] ds + \\ &+ \frac{1 - \exp(-\lambda\mu)}{\lambda} \int_0^t \|W(t, s)C(s)\| \exp(-\lambda(t-s)) ds. \end{aligned}$$

В силу (3.4) и (3.5) функции $v(t, \lambda)$ и $v_1(t, \lambda)$ ограничены на $[0, \infty)$; положим:

$$v(\lambda, \tau) = \sup_t v(t, \lambda, \tau), \quad v_1(\lambda, \tau_B) = \sup_t v_1(t, \lambda, \tau_B), \text{ при } t \geq 0. \quad (3.6)$$

Заметим, что если матрицы A , B и C постоянны, то

$$\begin{aligned} v(t, \lambda, \tau) &= \int_0^t \exp[-\lambda(t-s) + \tau(s)] \|W(t-s)\| ds = \int_0^t \exp[-\lambda(s + \tau(s))] \|W(s)\| ds, \\ v_1(t, \lambda, \tau_B) &= \int_0^t \|W(s)B\| \exp[-\lambda(s + \tau_B(s))] ds + \frac{1 - \exp(-\lambda\mu)}{\lambda} \int_0^t \|W(s)C\| \exp(-\lambda s) ds. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Очевидно, что здесь $v(t, \lambda, \tau)$ и $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ монотонно возрастают по t , поэтому

$$v(\lambda, \tau) = \lim v(t, \lambda, \tau), \quad v_1(\lambda, \tau_B) = \lim v_1(t, \lambda, \tau_B) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что $\lim[1 - \exp(-\lambda\mu)]\lambda^{-1} = \mu$ при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$v_1(0) = \int_0^t \|W(t,s)B(s)\| ds + \mu \int_0^t \|W(t,s)C(s)\| ds.$$

Обозначим $\lambda_+ = \lambda_+(k)$ – наибольший по $\tau(t)$ корень уравнения

$$kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) = 1. \quad (3.8)$$

Соответствующие значения величины τ и $\tau_B(t)$ определяются из следующих соображений. Как видно из (3.7), $v(t, \lambda, \tau)$ и $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ убывают по λ . Поэтому $\lambda_+ < 0$ и $\lambda_+ > 0$ при $kv(0) + v_1(0) < 1$ и $kv(0) + v_1(0) > 1$ соответственно. С другой стороны, при возрастании $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$ функции $v(t, \lambda, \tau)$ и $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ убывают при $\lambda > 0$ и возрастают при $\lambda < 0$. Поэтому при вычислении $v(\lambda, \tau)$ и $v_1(\lambda, \tau_B)$ в (3.8) следует положить $\tau = h$, $\tau_B = h_B$ в случае $kv(0) + v_1(0) < 1$ и $\tau = 0$, $\tau_B = 0$ в случае $kv(0) + v_1(0) > 1$ (при $kv(0) + v_1(0) = 1$ левая часть (3.8) не зависит от $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$).

Следующая теорема дает верхнюю границу показателя $\bar{\lambda}$.

Теорема 3.1. В системе (3.1), (3.2)

$$\bar{\lambda} \leq \lambda_+.$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение (3.1) при некоторых $x_0(t)$, $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ и $f(x,t)$. Положив в (3.3) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, получим

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-\lambda t)W(t,0)x(0) + \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)f(\exp[\lambda(s-\tau(s))]y(s-\tau(s)),s)ds + \\ &+ \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)B(s)\exp[\lambda(s-\tau_B(s))]y(s-\tau_B(s))ds + \\ &+ \exp(-\lambda t)\int_0^t W(t,s)C(s)\int_{s-\mu}^s y(u)\exp(\lambda u)duds. \end{aligned}$$

Используя условия (3.1) и (3.2), найдем

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\leq \exp(-\lambda t)\|W(t,0)x(0)\| + k\int_0^t \exp(-\lambda(t-s+\tau(s)))\|W(t,s)\|\|y(s-\tau(s))\|ds + \\ &+ \int_0^t \|W(t,s)B(s)\|\exp[-\lambda(t-s+\tau_B(s))]\|y(s-\tau_B(s))\|ds + \\ &+ \exp(-\lambda t)\int_0^t \|W(t,s)C(s)\|\int_{s-\mu}^s \|y(u)\|\exp(\lambda u)duds. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Пусть

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при } t \in [0, t_+], \quad (3.10)$$

где $t_* = t_*(t_+)$. Положив в (3.9) $t = t_*$ и учитывая (3.10) и (3.6), получим

$$\|y(t_*)\| \leq \exp(-\lambda t_*)\|W(t_*,0)x(0)\| + \|y(t_*)\| [kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B)]. \quad (3.11)$$

Покажем, что при $\lambda \geq \lambda_+$ функция $\|y(t)\|$ ограничена на $(0, \infty)$.

Действительно, в противном случае $t_* \rightarrow \infty$ при $t_+ \rightarrow \infty$ и в силу (3.4) и (3.5) $\exp(-\lambda t_*)\|W(t_*,0)x(0)\| \rightarrow 0$. Так как $v(t, \lambda, \tau)$ и $v_1(t, \lambda, \tau_B)$ убывают по λ , то $kv(\lambda, \tau) + v_1(\lambda, \tau_B) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ и любых допустимых $\tau(t)$, $\tau_B(t)$ (как показано выше, λ_+ определяется при тех значениях $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$, при которых левая часть (3.8) максимальна). Но при этом неравенство (3.11) не выполняется для достаточно больших t_* . Полученное противоречие

доказывает, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| \exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и $t > 0$; следовательно, $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$. Теорема доказана.

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (3.1), (3.2), инвариантное относительно запаздывания.

Теорема 3.2. *При условии*

$$k < k_* = \frac{1 - v_1(0)}{v(0)} \quad (3.12)$$

система (3.1), (3.2) экспоненциально устойчива.

Доказательство. Как отмечено выше, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$. Как следует из (3.12), при $k = k_*$ корень уравнения (3.8) $\lambda_+ = 0$ при любых $\tau(t)$ и $\tau_B(t)$. Так как $v(\lambda)$ и $v_1(\lambda)$ убывают по λ , то $\lambda_+ < 0$ при $k < k_*$ и, следовательно, $\bar{\lambda} < 0$. Теорема доказана.

3.1.3. Нижняя оценка максимального показателя Ляпунова

Найдем нижнюю оценку максимального показателя Ляпунова для случая, когда линейная часть системы (3.1) стационарна, для этого воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B^0) + kD(\varphi)x(t - \tau^0) + C \int_{t-\mu}^t x(s)ds, \quad (3.13)$$

где $\tau_B^0 \in [0, h_B]$ и $\tau^0 \in [0, h]$ – постоянные, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\|D(\varphi)\| = 1$. В силу последнего равенства функция $f(x) = kD(\varphi)x$ удовлетворяет условию (3.2), поэтому уравнение (3.13) принадлежит к рассмотренному выше классу. Следовательно, $\bar{\lambda}_l \leq \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}_l$ и $\bar{\lambda}$ – максимальные показатели Ляпунова систем (3.13) и (3.1) соответственно.

Представив решение (3.13) в виде $x(t) = \exp(\lambda t)y$, получим уравнение относительно λ :

$$\det \left[A + \exp(-\lambda \tau_B^0) B + k \exp(-\lambda \tau^0) D(\varphi) + \frac{1 - \exp(\lambda \mu)}{\lambda} C - \lambda I \right] = 0, \quad (3.14)$$

где I – единичная матрица.

Для такого решения показатель Ляпунова определяется в явном виде. Ясно, что показатель Ляпунова указанного решения может служить нижней оценкой максимального показателя Ляпунова исходной системы.

Пусть $\beta = \max_p (\operatorname{Re}(\lambda_p))$, $p = 1, \dots, n$, где λ_p – корни уравнения (3.14), тогда

$\bar{\lambda}_1 = \beta$. Поэтому нижнюю оценку λ_- величины $\bar{\lambda}$ можно определять по формуле

$$\lambda_- = \sup_{\tau^0, \tau_B^0, \varphi} [a_1(\tau^0, \tau_B^0, \varphi)]. \quad (3.15)$$

Заметим, что в случае евклидовой нормы в качестве $D(\varphi)$ можно принять любую ортогональную матрицу (как известно, для такой матрицы $\|D(\varphi)\| = 1$).

Проиллюстрируем применение полученных оценок на примерах.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение с сосредоточенным и распределенным запаздываниями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t)) + C \int_{t-\mu}^t x(s) ds, \quad (3.16)$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Условие экспоненциальной устойчивости (3.12) для системы (3.16) принимает вид

$$a_1 < \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu \sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \quad (3.17)$$

Заметим, что для системы (3.16) с произвольным постоянным запаздыванием τ методом функций Ляпунова получено следующее условие устойчивости [105]:

$$a_1 > (1 + \mu)^{1/2} (b_1^2 + b_2^2 + \mu(c_1^2 + c_2^2))^{1/2}. \quad (3.18)$$

Нетрудно проверить, что условие (3.17) менее консервативно, чем (3.18) (лишь при $b_1^2 + b_2^2 = \mu c_1^2 + c_2^2$ они совпадают). При этом условие (3.17) является более общим, охватывая системы с произвольным переменным запаздыванием $\tau(t)$.

3.1.4. Точные значения максимального показателя Ляпунова

Как было отмечено ранее, в большинстве случаев известные методы позволяют получать верхние оценки максимального показателя Ляпунова либо достаточные условия устойчивости. Ниже получены точные значения указанных величин для некоторых классов нелинейных систем.

Если в некоторой системе найденные оценки λ_- , λ_+ совпадают, то очевидно, что точное значение наибольшего показателя Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_- = \lambda_+$. Укажем системы, для которых это равенство имеет место, при этом полагаем, что в (3.2) используется евклидова норма.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t - \tau(t))) + c \int_{t-\mu}^t x(s) ds, \quad (3.19)$$

где c – константа, A – постоянная симметрическая положительно определенная матрица. Как известно, собственные значения такой матрицы действительны и положительны, обозначим их λ_i , $i = 1, \dots, n-1$ ($\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$).

Теорема 3.3. В системе (3.19), (3.2) максимальный показатель Ляпунова $\bar{\lambda} = \lambda_+$, где λ_+ определяется из уравнения (3.8) при

$$v(\lambda, \tau^*) = \frac{\exp(-\lambda \tau^*)}{\lambda_1 + \lambda}, \quad v_1(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda c \mu)}{\lambda(\lambda_1 + \lambda)}, \quad (3.20)$$

где $\tau^* = h$ при $kv(0) + v_1(0) < 1$, $\tau^* = 0$ при $kv(0) + v_1(0) \geq 1$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[-(t-s)A]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[-(t-s)\lambda_i]$, $i = 1, \dots, n$. В силу симметрии A матрица $W(t,s)$ также симметрична, поэтому ее евклидова норма равна максимальному собственному значению, т.е. $\|W(t,s)\| = \exp[-\lambda_1(t-s)]$. Подставив это выражение в (3.6) и (3.7), получим (3.20).

В соответствии с теоремой 3.1 $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$, покажем, что на самом деле имеет место равенство $\bar{\lambda} = \lambda_+$.

Положим в (3.19) $f(x) = kx$ и $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$, где a_1 – собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ_1 . Учитывая, что $Aa_1 = \lambda_1 a_1$ и что по определению λ_+

$$k \frac{\exp(-\lambda_+ \tau^*)}{\lambda_+ + \lambda_1} + \frac{1 - \exp(-\lambda_+ c\mu)}{\lambda_+(\lambda_+ + \lambda_1)} = 1, \quad (3.21)$$

найдем, что $x(t) = \exp(\lambda_+ t)a_1$ является решением уравнения (3.19) с показателем λ_+ . По определению показатель любого решения не превышает $\bar{\lambda}$; с другой стороны, в силу теоремы 1 $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$. Таким образом, $\bar{\lambda} = \lambda_+$. Теорема доказана.

Как установлено выше, для уравнения (3.19) $\lambda_+ = \bar{\lambda}$. Следовательно, для них неравенство (3.12) является не только достаточным, но и необходимым условием экспоненциальной устойчивости.

Полученные результаты представляют самостоятельный интерес, кроме того, они могут быть, использованы для оценки эффективности известных методов.

3.1.5. Метод расчета устойчивости систем со стационарной линейной частью и распределенным запаздыванием

Как было отмечено ранее, во всех известных методах вычислительная сложность исследования устойчивости существенно возрастает с

увеличением порядка системы. В данном подразделе предложен простой метод расчета устойчивости, трудоемкость которого практически не зависит от порядка системы.

Рассматривается система уравнений (3.1) со стационарной линейной частью

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + f(x(t - \tau(t)), t) + C \int_{t-\mu}^t x(u) du, \quad (3.22)$$

где матрица A – гурвицева, т.е. все ее собственные значения β_i удовлетворяют неравенству $Re\beta_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Функции $\tau(t)$, $f(x, t)$ и $x_0(t)$ кусочно-непрерывны и удовлетворяют условиям (3.2), при этом полагаем, что в (3.2) используется евклидова норма.

Будем считать, что матрица A имеет различные собственные значения β_1, \dots, β_n (этого можно достичь произвольно малым возмущением A [104]). Пусть v_1, \dots, v_n – соответствующие собственные векторы, нормированные условием

$$(v_i, v_i) = 1, i = 1, \dots, n.$$

Обозначим T матрицу, столбцами которой являются векторы v_i :

$$T = (v_1, \dots, v_n).$$

Как известно [104],

$$T^{-1}AT = J = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Положив в системе (3.22) $x = Ty$, получим

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Jy(t) + T^{-1}BTy(t - \tau_B(t)) + \\ &+ T^{-1}f(Ty(t - \tau(t)), t) + T^{-1}C \int_{t-\mu}^t Ty(u) du. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Следующая теорема дает условие экспоненциальной устойчивости системы (3.22).

Теорема 3.5. *При условии*

$$\frac{1}{\beta} (\|T^{-1}BT\| + \|T^{-1}\|k\|T\| + \|T^{-1}C\|\mu\|T\|) < 1 \quad (3.24)$$

система (3.22) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

где $\beta = \min |Re\beta_i|$, λ – корень уравнения

$$\begin{aligned} V(\lambda) = & \frac{1}{\beta + \lambda} (\exp[-\lambda h_B] \|T^{-1}BT\| + \exp[-\lambda h] \|T^{-1}\| k \|T\| + \\ & + \frac{1 - \exp[-\lambda \mu]}{\lambda} \|T^{-1}C\| \|T\|) = 1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Доказательство. Представим решение (3.23) в виде

$$\begin{aligned} y(t) = & W(t,0)y(0) + \int_0^t W(t,s)(T^{-1}BTy(s - \tau_B(s)) + \\ & + T^{-1}f(Ty(s - \tau(s)), s) + T^{-1}C \int_{s-\mu}^s Ty(u)du) ds, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{y}(t) = Jy(t)$.

Покажем сначала, что при условии (3.24) $y(t)$ ограничено на $(0, +\infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$), такая, что

$$\|y(t_q)\| \geq \|y(t)\| \quad \text{где } t \leq t_q. \quad (3.27)$$

Из (3.26), с учетом (3.2) и (3.27), имеем

$$\begin{aligned} \|y(t_q)\| \leq & \|W(t_q,0)y(0)\| + \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| (\|T^{-1}BT\| \|y(t_q)\| + \\ & + \|T^{-1}\| k \|T\| \|y(t_q)\| + \|T^{-1}C\| \int_{s-\mu}^s \|T\| \|y(t_q)\| du) ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В рассматриваемом случае $W(t,s) = \exp[(t-s)J]$, поэтому собственные значения матрицы $W(t,s)$ равны $\exp[(t-s)\beta_i]$, $i = 1, \dots, n$. Матрица J – диагональная, следовательно, $W(t,s)$ также диагональная, поэтому $\|W(t,s)\| = \exp[-\beta(t-s)]$. Тогда

$$\lim_{t_q \rightarrow +\infty} \int_0^{t_q} \|W(t_q,s)\| ds = \lim_{t_q \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta} (1 - \exp[-\beta t_q]) = \frac{1}{\beta}.$$

С учетом этого, неравенство (3.28) запишем в виде

$$\begin{aligned} \|y(t_q)\| \leq & \|W(t_q,0)y(0)\| + \\ & + \|y(t_q)\| \frac{1}{\beta} (\|T^{-1}BT\| + \|T^{-1}\| k \|T\| + \|T^{-1}C\| \mu \|T\|). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Так как система $\dot{y}(t) = Jy(t)$ устойчива, то $\|W(t_q, 0)y(0)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow +\infty$. Следовательно, при условии (3.24), неравенство (3.28) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Максимальный показатель Ляпунова решений системы $\dot{y}(t) = Jy(t)$ равен $\bar{\lambda} = -\beta$. Будем искать верхнюю оценку величины $\bar{\lambda}$ системы (3.22) в интервале

$$\lambda > -\beta.$$

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положим в (3.23)

$$y(t) = \exp(\lambda t)z(t), \quad -\beta < \lambda < 0, \quad (3.30)$$

в результате получим

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (J - \lambda I)z(t) + \exp[-\lambda \tau_B(t)]T^{-1}BTz(t - \tau_B(t)) + \\ &\quad + \exp[-\lambda t]T^{-1}f(T \exp[\lambda(t - \tau(t))]z(t - \tau(t)), t) + \\ &\quad + \exp[-\lambda t]T^{-1}C \int_{t-\mu}^t T \exp[\lambda u]z(u)du. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (3.31) ограничены, если

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta + \lambda} (\exp[-\lambda h_B] \|T^{-1}BT\| + \exp[-\lambda h] \|T^{-1}\| k \|T\| + \\ + \frac{1 - \exp[-\lambda \mu]}{\lambda} \|T^{-1}C\| \|T\|) < 1. \end{aligned}$$

Функция $V(\lambda)$ убывает по λ ; по условию (3.24) $V(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, следовательно при $V(\lambda) = 1 \quad \lambda < 0$. Учитывая (3.30), найдем, что система (3.22) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

Проиллюстрируем эффективность полученных условий устойчивости на модельных примерах.

Пример 3.2. Для проверки эффективности разработанной методики, рассмотрим уравнение из примера 3.1, для которого условия устойчивости были получены ранее другими методами в [105]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + C \int_{t-\mu}^t x(u) du, \quad (3.32)$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A – диагональная, следовательно $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Пусть a_1 – минимальное по модулю собственное значение матрицы A , тогда условие экспоненциальной устойчивости (3.24) для системы (3.32) принимает вид

$$a_1 > \sqrt{b_1^2 + b_2^2} + \mu \sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \quad (3.33)$$

Заметим, что такое условие было получено ранее в примере 3.1 из неравенства (3.12). В [105] для уравнения (3.32) с постоянным запаздыванием τ_B методом функций Ляпунова получено следующее условие устойчивости

$$a_1 > (1 + \mu)^{1/2} [(b_1^2 + b_2^2) + \mu(c_1^2 + c_2^2)]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Нетрудно проверить, что условие (3.33) менее консервативно, чем (3.34) (лишь при $b_1^2 + b_2^2 = \mu(c_1^2 + c_2^2)$ они совпадают). При этом условие (3.33) является более общим, охватывая системы с произвольным переменным запаздыванием $\tau_B(t)$.

Пример 3.3. Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau_B(t)) + f(x(t - \tau(t)), t), \quad (3.35)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0.1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0.2 & 1 & -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

где $\tau(t) \in [0, h]$, $\tau_B(t) \in [0, h_B]$, $\|f(x, t)\| \leq k\|x\|$.

Условие устойчивости (3.24) принимает вид

$$k < \frac{\beta - \|T^{-1}BT\|}{\|T^{-1}\| \|T\|} < 0.0829... \quad (3.36)$$

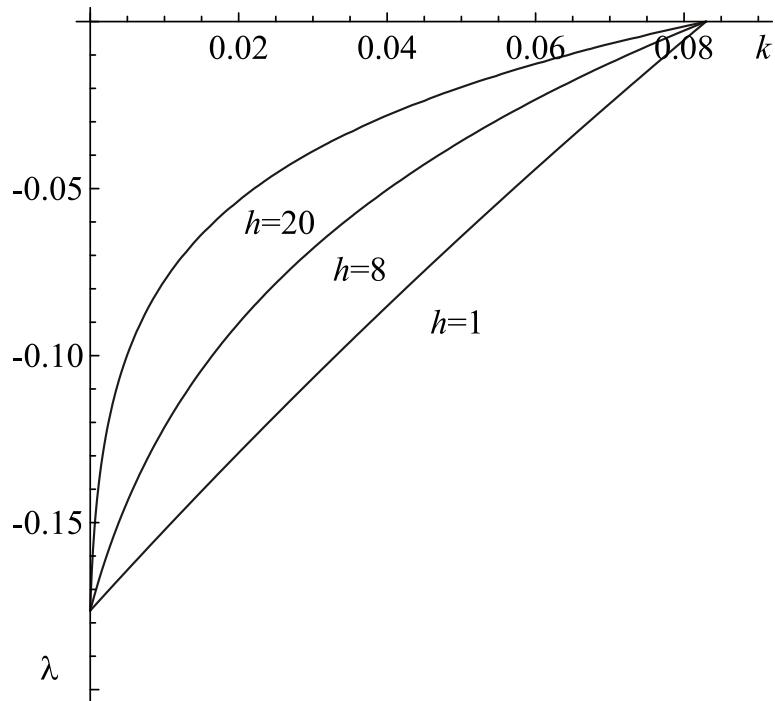


Рис. 3.1. Верхние оценки $\lambda(k)$ максимального показателя Ляпунова

На рисунке представлены графики верхней оценки максимального показателя Ляпунова $\lambda(k)$ при различных значениях максимальной величины запаздывания h и фиксированной $h_B = 0.5$.

Функции $\lambda(k, h)$ возрастают по k и h , однако $\lim_{k \rightarrow 0} k(\lambda, h) = 0.0829\dots$ при $\lambda \rightarrow 0$ не зависит от h . Поэтому условие $k < 0.0829\dots$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любом конечном h .

Используя неравенство (3.12) для системы (3.35) было получено условие устойчивости

$$k < 0.0483\dots \quad (3.37)$$

Очевидно, что условие (3.36) менее консервативно чем (3.37). При этом расчеты, необходимые для получения (3.36), существенно проще.

3.2. Системы с чистым запаздыванием

В данном подразделе рассматриваются системы «с чистым запаздыванием», т.е. содержащие только члены с запаздыванием. Уравнения содержат заданные линейные члены с запаздыванием и распределенным

запаздыванием, нелинейные функции ограниченные по норме и содержащие запаздывание. Для функций запаздывания заданы лишь их верхние границы. В отличие от систем рассмотренных ранее, здесь отсутствует устойчивая линейная подсистема без запаздывания.

3.2.1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t), t)) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv, \quad (3.38)$$

$$x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h, 0], \quad 0 < h < \infty,$$

где $x \in R^n$, $x_0(t)$ – начальная функция, $A_i(t)$ – заданные ограниченные на $(0, \infty)$ матрицы, $f_i(x, t)$, $x_0(t)$, $\tau_i(t)$ – любые кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \tau_i(t) &\leq h_i < \infty, \\ \|x_0(t)\| &\leq M, \\ \|f_i(x, t)\| &\leq k_i \|x\|, \quad f_i(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где h_i – заданные числа, $\beta_i(t) < \infty$, $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и соответствующая норма матрицы, k_i – заданные величины.

Необходимо найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова, получить условия экспоненциальной устойчивости системы (3.38)-(3.39), выраженных с помощью A_i , k_i и h_i .

3.2.2. Системы с переменными запаздываниями

Сначала рассмотрим систему (3.38) без распределенного запаздывания

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t), t)). \quad (3.40)$$

Предположим, что при некотором $i = j$ уравнение

$$\dot{x}(t) = A_j(t)x(t) \quad (3.41)$$

экспоненциально устойчиво. Как известно [80], для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$W_j = \sup_0^t \|W_j(t,s)\| ds < \infty, \quad (3.42)$$

где $W_j(t,s)$ – матрицант уравнения (3.41).

Положим

$$W_{jj} = \sup_0^t \|W_j(t,s)A_j(s)\| ds, \quad W_A = \sup_0^t \left\| W(t,s) \sum_{i \neq j}^m A_i(s) \right\| ds. \quad (3.43)$$

Теорема 3.6. *При условии*

$$N = h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j < 1 \quad (3.44)$$

система (3.38)-(3.39) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda < \frac{N-1}{(W_j + h_j W_{jj})}. \quad (3.45)$$

Доказательство. Используя известный прием, запишем (3.40) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_j(t)x(t) - A_j(t) \int_{t-\tau_j(t)}^t \dot{x}(s) ds + \sum_{i \neq j}^m A_i(t)x(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t)), t) = \\ &= A_j(t)x(t) - A_j(t) \int_{t-\tau_j(t)}^t \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s - \tau_i(s)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds + \\ &\quad + \sum_{i \neq j}^m A_i(t)x(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t)), t) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Решение (3.46) представим в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{j0}(t) - \int_0^t W_j(t,u) \left(A_j(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds \right) du + \\ &\quad + \int_0^t W_j(t,u) \left[\sum_{i \neq j}^m A_i(u)x(u - \tau_i(u)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u)), u) \right] du \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $x_{j0}(t)$ – решение уравнения (3.41) при начальной функции $x_0(t)$.

Покажем сначала, что при условии (3.44) $x(t)$ ограничено на $(0, \infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$), такая, что

$$\|x(t_q)\| \geq \|x(t)\| \text{ при } t \leq t_q. \quad (3.48)$$

Из (3.47) с учетом (3.39), (3.39) и (3.48) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_q)\| &\leq \|x_{j0}(t_q)\| + \left\| \int_0^t W_j(t, u) \left(A_j(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s) x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds \right) du \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_0^t W_j(t, u) \left[\sum_{i \neq j}^m A_i(u) x(u - \tau_i(u)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u)), u) du \right] \right\| \leq \\ &\leq \|x_{j0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| \left\{ h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j \right\} = \|x_{j0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| N, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где $A_i^+ = \sup \|A_i(t)\|$ на $[h_j, \infty)$.

Так как система (3.41) устойчива, то $\|x_{j0}(t_q)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow \infty$. Поэтому при условии (3.44) неравенство (3.49) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Для доказательства экспоненциальной устойчивости, положив в (3.40)

$$x(t) = \exp(\lambda t) y(t), \quad \lambda < 0 \quad (3.50)$$

получим

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t) y(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(y(t - \beta_i(t), t) - \lambda y(t)), \quad (3.51)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (3.51) ограничены, если

$$N(\lambda) = h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j - \lambda (W_j + h_j W_{jj}) < 1, \quad (3.52)$$

т.е. при условии (3.45). Учитывая (3.50), найдем, что система (3.38) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

Отметим некоторые особенности полученного критерия:

1. Условие (3.44) позволяет получить несколько независимых достаточных условий устойчивости (число которых равно числу экспоненциально устойчивых линейных подсистем (3.41)).
2. В j -е условие устойчивости не входят величины h_i , $i \neq j$, поэтому функции $\tau_i(t)$, $i \neq j$ также, как и все $\beta_i(t)$ могут принимать сколь угодно большие значения.
3. Полученные условия справедливы для любой векторной нормы (это обстоятельство может быть использовано для их оптимизации).

Рассмотрим теперь другой метод представления системы (3.40). Запишем (3.40) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{x}(s)ds + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t)), t) = \\ &= \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s - \tau_i(s)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds + (3.53) \\ &\quad + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t)), t). \end{aligned}$$

Предположим, что уравнение

$$\dot{x}(t) = A_s(t)x(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t) \quad (3.54)$$

экспоненциально устойчиво. Для экспоненциальной устойчивости уравнения (3.54) необходимо и достаточно, чтобы

$$W = \sup_0^t \|W(t, s)\| ds < \infty, \quad (3.55)$$

где $W(t, s)$ – матрицант уравнения (3.54).

Положим

$$W_s = \sup_0^t \left\| W(t, s) \sum_{i=1}^m A_i(s) h_i \right\| ds. \quad (3.56)$$

Теорема 3.7. При условии

$$N = \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W < 1 \quad (3.57)$$

система (3.38)-(3.39) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda < \frac{N-1}{W+W_s}. \quad (3.58)$$

Доказательство. Решение (3.53) представим в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & x_{s0}(t) - \int_0^t W(t,u) \left(\sum_{i=1}^m A_i(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s) x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds \right) du + \\ & + \int_0^t W(t,u) \left[\sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u)), u) \right] du, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где $x_{s0}(t)$ – решение уравнения (3.54) при начальной функции $x_0(t)$

Покажем сначала, что при условии (3.57) $x(t)$ ограничено на $(0, \infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$), такая, что

$$\|x(t_q)\| \geq \|x(t)\| \text{ при } t \leq t_q. \quad (3.60)$$

Из (3.59) с учетом (3.39), (3.39) и (3.60) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_q)\| \leq & \|x_{s0}(t_q)\| + \left\| \int_0^t W(t,u) \left(\sum_{i=1}^m A_i(u) \left[\sum_{i=1}^m A_i(s) x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) \right] ds \right) du \right\| + \\ & + \left\| \int_0^t W(t,u) \sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u)), u) du \right\| \leq \\ & \leq \|x_{s0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| \left\{ \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W \right\} = \|x_{s0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| N, \end{aligned} \quad (3.61)$$

где $A_i^+ = \sup \|A_i(t)\|$ на $[h_i, \infty)$.

Так как система (3.54) устойчива, то $\|x_{s0}(t_q)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow \infty$. Поэтому при условии (3.57) неравенство (3.61) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Для доказательства экспоненциальной устойчивости, положив в (3.53)

$$x(t) = \exp(\lambda t)y(t), \quad \lambda < 0 \quad (3.62)$$

получим

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t)y(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{y}(s)ds + \sum_{i=1}^p f_i(s(t-\beta_i(t)), t) - \lambda y(t). \quad (3.63)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что это решения (3.63) ограничены, если

$$N(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W - \lambda (W + W_s) < 1. \quad (3.64)$$

Учитывая (3.62), найдем, что система (3.40) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

3.2.3. Системы с переменными и распределенными запаздываниями

Применим рассмотренные выше подходы к системам, содержащим распределенное запаздывание.

Полагая, что уравнение (3.41) экспоненциально устойчиво, запишем (3.38) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_j(t)x(t) - A_j(t) \int_{t-\tau_j(t)}^t \dot{x}(s)ds + \sum_{i \neq j}^m A_i(t)x(t-\tau_i(t)) + \\ &+ \sum_{i=1}^p f_i(x(t-\beta_i(t), t) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_j(t)x(t) - A_j(t) \int_{t-\tau_j(t)}^t \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s - \tau_i(s)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)) + \sum_{i=1}^r C_i(s) \int_{s-\mu_i}^s x(v)dv, s) \right] ds + \\
&\quad + \sum_{i \neq j}^m A_i(t)x(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(t - \beta_i(t), t) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Теорема 3.8. При условии

$$N = h_j(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \mu_i)W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j + W_C < 1 \tag{3.66}$$

система (3.38)-(3.39) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

где λ – корень уравнения

$$h_j(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \frac{\exp(\lambda \mu_i) - 1}{\lambda} - \lambda)W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j + W_{C\lambda} - \lambda W_j = 1, \tag{3.67}$$

$$\text{зде } W_{C\lambda} = \int_0^t \left\| W_j(t, u) \sum_{i=1}^r C_i \frac{1 - \exp(\lambda \mu_i)}{\lambda} \right\| du.$$

Доказательство. Представим решение (3.65) с учетом (3.42) в виде

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_{j0}(t) + \int_0^t W_j(t, u) \left[\sum_{i \neq j}^m A_i(u)x(u - \tau_i(u)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u), u) + \sum_{i=1}^r C_i(u) \int_{u-\mu_i}^u x(v)dv) \right] du - \\
&\quad - \int_0^t W_j(t, u) \left(A_j(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^r C_i(s) \int_{s-\mu_i}^s x(v)dv \right] ds \right) du
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Покажем сначала, что при условии (3.66) $x(t)$ ограничено на $(0, \infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$), такая, что

$$\|x(t_q)\| \geq \|x(t)\| \text{ при } t \leq t_q. \quad (3.69)$$

Из (3.68) с учетом (3.39) и (3.69) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_q)\| &\leq \|x_{j0}(t_q)\| + \left\| \int_0^t W_j(t,u) \left(A_j(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s-\tau_i(s)) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s-\beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^r C_i(s) \int_{s-\mu_i}^s x(v)dv \right] ds \right) du \right\| + \\ &+ \left\| \int_0^t W_j(t,u) \left[\sum_{i \neq j}^m A_i(u)x(u-\tau_i(u)) + \sum_{i=1}^p f_i(x(u-\beta_i(u)), u) + \sum_{i=1}^r C_i(u) \int_{u-\mu_i}^u x(v)dv \right] du \right\| \leq \\ &\leq \|x_{j0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| \left\{ h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \mu_i \right) \int_0^t \|W_j(t,u)A_j(u)\| du + \right. \\ &\quad \left. + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j + \int_0^t \|W_j(t,u) \sum_{i=1}^r C_i(u) \mu_i\| du \right\} \leq \\ &\leq \|x_{j0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| \left\{ h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \mu_i \right) W_{jj} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j + W_C \right\} = \\ &= \|x_{j0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| N, \quad (3.70) \end{aligned}$$

где $A_i^+ = \sup \|A_i(t)\|$, $C_i^+ = \sup \|C_i(t)\|$ на $[h_j, \infty)$, $W_C = \int_0^t \|W_j(t,u) \sum_{i=1}^r C_i(u) \mu_i\| du$.

Так как система (3.41) устойчива, то $\|x_{j0}(t_q)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow \infty$. Поэтому при условии (3.66) неравенство (3.70) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Для доказательства экспоненциальной устойчивости, положим в (3.38)

$$x(t) = \exp(\lambda t) y(t), \quad \lambda < 0. \quad (3.71)$$

В результате получим

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^m A_i(t) y(t - \tau_i(t)) + \sum_{i=1}^p f_i(y(t - \beta_i(t), t) + \exp(\lambda t) \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t y(v) dv + \lambda y(t)). \quad (3.72)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (3.72) ограничены, если

$$h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \frac{\exp(\lambda \mu_i) - 1}{\lambda} - \lambda \right) W_{ji} + W_A + \sum_{i=1}^p k_i W_j + W_{C\lambda} - \lambda W_j < 1. \quad (3.73)$$

Учитывая (3.71), найдем, что система (3.38) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

Получим условия устойчивости, аналогичные теореме 3.7, для системы содержащей распределенное запаздывание.

Запишем (3.38) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{x}(s)ds + \sum_{i=1}^p f_i(x(t-\beta_i(t)), t) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv = \\ = & \sum_{i=1}^m A_i(t)x(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s-\tau_i(s)) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s-\beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv \right] ds + \\ & + \sum_{i=1}^p f_i(x(t-\beta_i(t)), t) + \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t x(v)dv. \end{aligned} \quad (3.74)$$

С учетом (3.54) представим решение (3.74) в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & x_{s0}(t) - \int_0^t W(t,u) \left(\sum_{i=1}^m A_i(u) \int_{u-\tau_j(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s)x(s-\tau_i(s)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s-\beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^r C_i(s) \int_{s-\mu_i}^s x(v)dv \right] ds \right) du + \\ & + \int_0^t W(t,u) \left[\sum_{i=1}^p f_i(x(u-\beta_i(u)), u) \right] du, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где $x_{s0}(t)$ – решение уравнения (3.74) при начальной функции $x_0(t)$.

Теорема 3.9. При условии

$$N = \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \mu_i \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W + W_C < 1 \quad (3.76)$$

система (3.38)-(3.39) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda,$$

где λ – корень уравнения

$$\left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \frac{1 - \exp(\lambda \mu_i)}{\lambda} + \lambda \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W + W_{C\lambda} - \lambda W = 1, \quad (3.77)$$

здесь $W_{C\lambda} = \int_0^t \left\| W(t, u) \sum_{i=1}^r C_i^+ \frac{1 - \exp(\lambda \mu_i)}{\lambda} \right\| du$.

Доказательство. Покажем сначала, что при условии (3.76) $x(t)$ ограничено на $(0, \infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow \infty$), такая, что

$$\|x(t_q)\| \geq \|x(t)\| \text{ при } t \leq t_q \quad (3.78)$$

Из (3.75) с учетом (3.39) и (3.78) имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_q)\| &\leq \|x_{s0}(t_q)\| + \left\| \int_0^t W(t, u) \left(\sum_{i=1}^m A_i(u) \int_{u-\tau_i(u)}^u \left[\sum_{i=1}^m A_i(s) x(s - \tau_i(s)) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \sum_{i=1}^p f_i(x(s - \beta_i(s)), s) + \sum_{i=1}^r C_i(s) \int_{s-\mu_i}^s x(v) dv \right] ds \right) du \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_0^t W(t, u) \left[\sum_{i=1}^p f_i(x(u - \beta_i(u)), u) + \sum_{i=1}^r C_i(u) \int_{u-\mu_i}^u x(v) dv \right] du \right\| \leq \\ &\leq \|x_{s0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| \left\{ h_j \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^m k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \mu_i \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W + W_C \right\} = \quad (3.79) \\ &= \|x_{s0}(t_q)\| + \|x(t_q)\| N \end{aligned}$$

где $A_i^+ = \sup \|A_i(t)\|$, $C_i^+ = \sup \|C_i(t)\|$ на $[h_j, \infty)$.

Так как система (3.54) устойчива, то $\|x_{s0}(t_q)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow \infty$. Поэтому при условии (3.76) неравенство (3.79) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положив в (3.74)

$$x(t) = \exp(\lambda t) y(t), \quad \lambda < 0, \quad (3.80)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \sum_{i=1}^m A_i(t)y(t) - \sum_{i=1}^m A_i(t) \int_{t-\tau_i(t)}^t \dot{y}(s)ds + \sum_{i=1}^p f_i(y(t - \beta_i(t)), t) + \\ & + \exp(-\lambda t) \sum_{i=1}^r C_i(t) \int_{t-\mu_i}^t \exp(\lambda v) y(v) dv \end{aligned} \quad (3.81)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (3.81) ограничены, если

$$N(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^m A_i^+ + \sum_{i=1}^p k_i + \sum_{i=1}^r C_i^+ \frac{1 - \exp(\lambda \mu_i)}{\lambda} - \lambda \right) W_s + \sum_{i=1}^p k_i W + W_{C\lambda} - \lambda W < 1. \quad (3.82)$$

Учитывая (3.80), найдем, что система (3.38) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

3.2.4. Примеры применения критериев устойчивости

Проиллюстрируем эффективность полученных условий устойчивости на модельных примерах.

Пример 3.4. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & B \sum_{i=1}^m x(t - \tau_i(t)), \\ B = & \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.83)$$

где α, β – константы, $0 \leq \tau_i(t) \leq h_i$.

Запишем решение (3.83) в виде

$$x(t) = x_{j0}(t) - \int_0^t W_j(u) \left(B \int_{t-\tau_j(t)}^t B \sum_{i=1}^m x(s - \tau_i(s)) ds \right) du + \int_0^t W_j(u) B \sum_{i \neq j}^m x(t - \tau_i(t)) du,$$

где

$$W_j(t) = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha t) \cos \beta t & \exp(-\alpha t) \sin \beta t \\ -\exp(-\alpha t) \sin \beta t & \exp(-\alpha t) \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.5 дает условие устойчивости

$$h_j < \frac{\alpha - (m-1)\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{m(\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (3.84)$$

Представим решение (3.83) в форме

$$x(t) = x_{s0}(t) - \int_0^t W(u) \left(\sum_{i=1}^m \left[B \int_{t-\tau_j(t)}^t B \sum_{i=1}^m x(s-\tau_i(s)) ds \right] \right) du,$$

где

$$W(t) = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha mt) \cos \beta mt & \exp(-\alpha mt) \sin \beta mt \\ -\exp(-\alpha mt) \sin \beta mt & \exp(-\alpha mt) \cos \beta mt \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теоремой 3.6, получим условие устойчивости

$$h < \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (3.85)$$

где $h = \sum_{i=1}^m h_i$.

Нетрудно проверить, что условие (3.84) выполняется лишь при $m=1$ и совпадает с (3.85).

Заметим, что для частного случая системы (3.83) с постоянными запаздываниями $\tau_i(t) = h_i$, методом функций Ляпунова в [105] получено условие устойчивости, совпадающее с (3.85). Однако условие (3.85) является более общим, охватывая системы с переменным запаздыванием.

Пример 3.5. Рассмотрим систему (3.38) без нелинейных членов и членов с распределенным запаздыванием ($C_i = 0$, $f_i = 0$)

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 A_i(t)x(t-\tau_i(t)), \quad (3.86)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\gamma & \delta \\ -\delta & -\gamma \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – константы, $0 \leq \tau_i(t) \leq h_i$.

Теоремы 3.5 и 3.6 приводят, соответственно, к следующим условиям устойчивости

$$h_1 < \frac{\alpha - \sqrt{\gamma^2 + \delta^2}}{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}}, \quad (3.87)$$

$$\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)h_1^2 + 2(\alpha\gamma + \beta\delta)h_1h_2 + (\gamma^2 + \delta^2)h_2^2} < \frac{\alpha + \gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)}}. \quad (3.88)$$

Для системы (3.86) с постоянным запаздыванием $\tau_i(t) = h_i$, методом функций Ляпунова, в [105] получено следующее условие устойчивости

$$h_1\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)} + h_2\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2)} < \frac{\alpha + \gamma}{\sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + (\beta + \delta)^2}}. \quad (3.89)$$

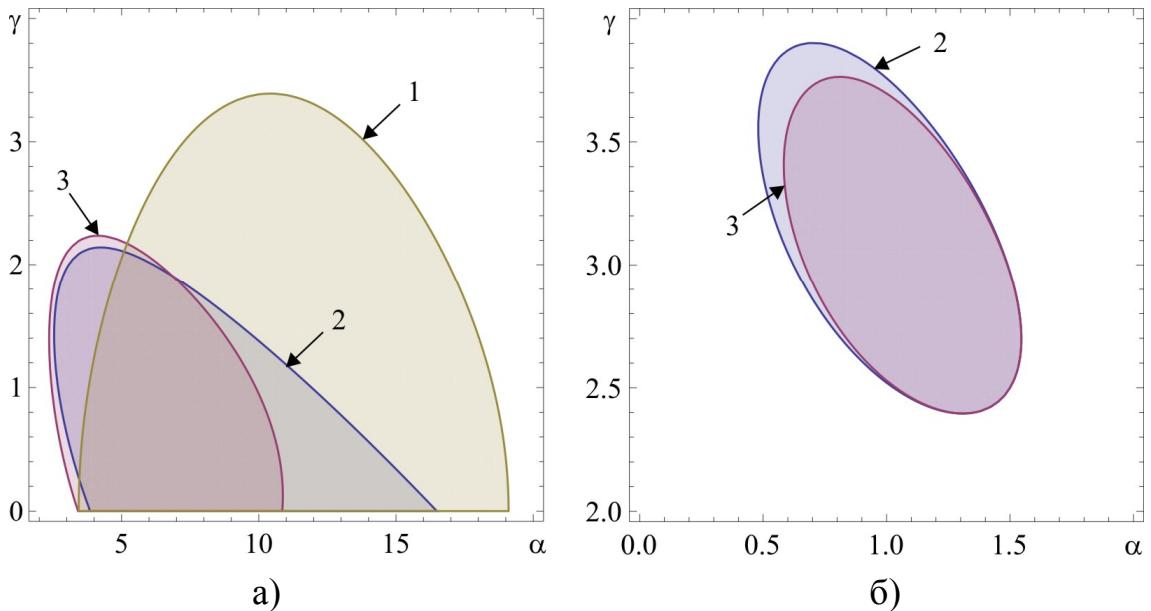


Рис. 3.2. Области устойчивости в пространстве параметров α и γ

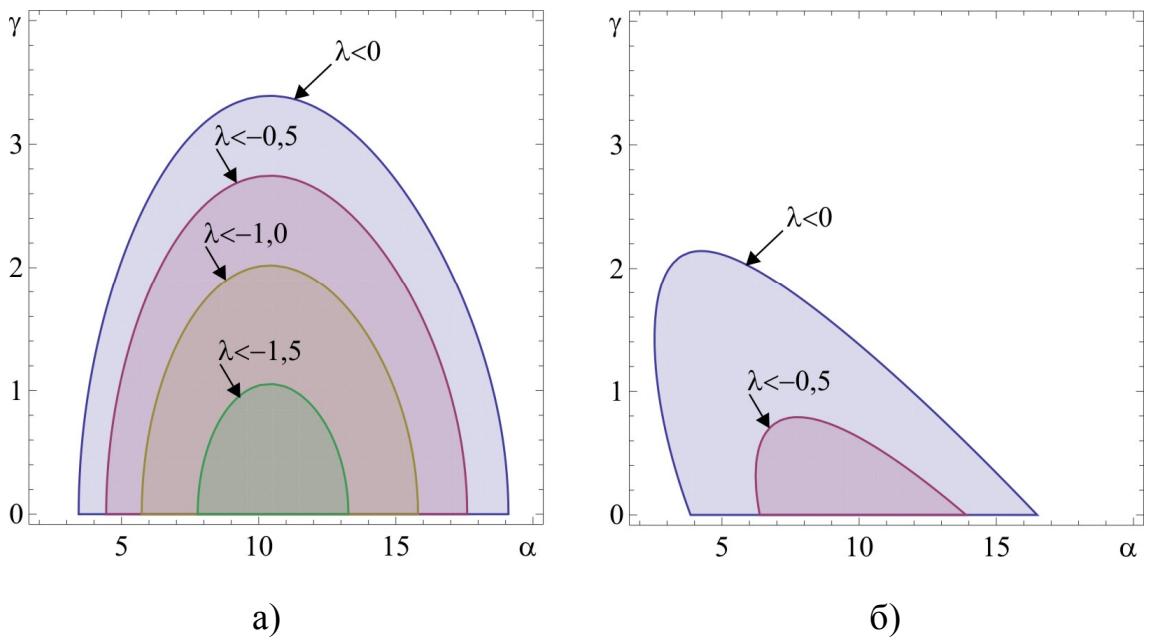


Рис. 3.3. Оценки максимального показателя Ляпунова

Очевидно, что условие (3.87) справедливо для любой величины запаздывания $\tau_2(t)$, при $h_1 = h_2$ условия (3.88) и (3.89) совпадают.

На рисунках 3.2 а) и 3.2 б) показаны области устойчивости в пространстве параметров α и γ при фиксированных значениях $\beta = 1,5$, $\gamma = 2,5$ для различных границ функции запаздывания $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,20$ (Рис. 3.2 а)) и $h_1 = 0,15$, $h_2 = 0,11$ (Рис. 3.2 б)). Области 1, 2, 3 соответствуют условиям устойчивости (3.87), (3.88) и (3.89).

Как видно из рисунков, предложенные условия позволяют получить более широкие области устойчивости по сравнению с известными результатами, кроме того, в отличие от последних, они справедливы не только для постоянного, но и для переменного запаздывания $\tau_i(t)$.

На рисунках 3.3 а) и 3.3 б) показаны области устойчивости в пространстве параметров α и γ при фиксированных значениях $\beta = 1,5$, $\gamma = 2,5$, $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,20$ для различных оценок максимального показателя Ляпунова, полученных при использовании теоремы 3.5 и 3.6, соответственно.

Заметим, что известные критерии дают только условия асимптотической устойчивости, в то время как предложенные в данной работе гарантируют экспоненциальную устойчивость, а также позволяют оценить максимальный показатель Ляпунова.

3.3. Специальный критерий устойчивости для систем с постоянным запаздыванием

3.3.1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t - \tau) + f_1(x(t), t) + f_2(x(t - \tau), t), \quad (3.89)$$

$$x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \quad 0 < \tau < \infty,$$

где $x \in R^n$, $A(t)$, $B(t)$ – заданные ограниченные на $(0, \infty)$ матрицы, $x_0(t)$ – начальная функция. Нелинейная часть системы ограничена условием

$$f_1(x(t), t) \leq k_1 \|x(t)\|, \quad f_2(x(t-\tau), t) \leq k_2 \|x(t-\tau)\|, \quad (3.90)$$

где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и соответствующая норма матрицы, k_1, k_2 – заданные величины.

Функции $x_0(t), f_1(x(t), t), f_2(x(t-\tau), t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют приведенным выше условиям.

Пусть λ' – показатель Ляпунова решения $x(t)$ уравнения (3.89) при некоторых допустимых $x_0(t), f_1(x(t), t), f_2(x(t-\tau), t)$, т.е.

$$\lambda'(x_0, f_1, f_2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|x(t)\|}{t}.$$

Максимальный показатель Ляпунова решений $x(t)$ системы (3.89) равен

$$\bar{\lambda} = \sup \lambda'(x_0, f_1, f_2),$$

где супремум вычисляется по всем допустимым функциям $x_0(t), f_1(x(t), t)$ и $f_2(x(t-\tau), t)$.

Необходимо получить условия экспоненциальной устойчивости системы (3.89), выраженные непосредственно с помощью параметров системы, а также найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова, продемонстрировать эффективность предложенного подхода на примерах реальных механических систем.

3.3.2. Условия экспоненциальной устойчивости

Решение системы (3.89) можно представить в интегральной форме

$$x(t) = W_0(t) + \int_0^t W(t, s) [f_1(x(s), s) + f_2(x(s-\tau), s)] ds, \quad (3.91)$$

где $W_0(t)$ – решение системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) \quad (3.92)$$

для начальной функции $x_0(t)$, $W(t, s)$ – матрицант системы (3.92).

Пусть система (3.92) экспоненциально устойчива с показателем α , тогда справедлива оценка

$$\|W(t,s)\| \leq N \exp(\alpha(t-s)), \quad \|W_0(t)\| \leq N \exp(\alpha t), \quad (3.93)$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная.

Очевидно, что верхнюю границу максимального показателя Ляпунова системы (3.89) следует искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \quad (3.94)$$

Положим

$$v(t, \lambda) = \int_0^t \|W(t,s)\| \exp(-\lambda(t-s)) ds.$$

В силу (3.93) и (3.94) функция $v(t, \lambda)$ ограничена на $[0, \infty)$. Пусть

$$v(\lambda) = \sup_t v(t, \lambda) \text{ при } t > 0.$$

Следующая теорема дает условие экспоненциальной устойчивости системы (3.89).

Теорема 3.10. *При условии*

$$kv(0) < 1, \quad (3.95)$$

$$k = k_1 + k_2$$

система (3.89) экспоненциально устойчива, причем

$$\bar{\lambda} < \lambda_+,$$

где λ_+ – корень уравнения

$$U(\lambda) = (k_1 + k_2 \exp(-\lambda \tau))v(\lambda) = 1. \quad (3.96)$$

Доказательство. Покажем сначала, что при условии (3.95) $x(t)$ ограничено на $(0, +\infty)$. В противном случае найдется последовательность t_q ($t_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow +\infty$), такая, что

$$\|x(t_q)\| \geq \|x(t)\|, \text{ где } t \leq t_q. \quad (3.97)$$

Из (3.91), с учетом (3.90) и (3.97), имеем

$$\begin{aligned} \|x(t_q)\| &\leq \|W_0(t_q)\| + \int_0^{t_q} \|W(t_q, s) [f_1(x(t_q), t_q) + f_2(x(t_q - \tau), t_q)]\| ds; \\ \|x(t_q)\| &\leq \|W_0(t_q)\| + \|x(t_q)\| k \int_0^{t_q} \|W(t_q, s)\| ds \leq \|W_0(t_q)\| + \|x(t_q)\| k v(0). \end{aligned} \quad (3.98)$$

В силу (3.93), $\|W_0(t_q)\| \rightarrow 0$ при $t_q \rightarrow +\infty$. Следовательно, при условии (3.95), неравенство (3.98) не выполняется. Полученное противоречие показывает, что решения системы ограничены.

Для доказательства экспоненциальной устойчивости положим в (3.91)

$$x(t) = \exp(\lambda t) y(t), \quad \alpha < \lambda < 0, \quad (3.99)$$

в результате получим

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-\lambda t) W_0(t) + \exp(-\lambda t) \int_0^t W(t, s) f_1(\exp(\lambda s) y(s), s) ds + \\ &+ \exp(-\lambda t) \int_0^t W(t, s) f_2(\exp(\lambda(s - \tau)) y(s - \tau), s) ds. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Аналогично приведенному выше доказательству найдем, что решения (3.100) ограничены, если

$$(k_1 + k_2 \exp(-\lambda \tau)) v(\lambda) < 1.$$

Функция $U(\lambda)$ убывает по λ ; по условию (3.95) $U(\lambda) < 1$ при $\lambda = 0$, следовательно при $U(\lambda) = 1 \quad \lambda < 0$. Учитывая (3.99), найдем, что система (3.89) экспоненциально устойчива с показателем λ . Теорема доказана.

Следует отметить, что полученное условие устойчивости (3.95) зависит от величины запаздывания τ , т.к. матрицант $W(t, s)$ вычисляется для системы содержащей линейную часть с запаздыванием.

3.4. Системы с нелинейностью специального вида

3.4.1. Постановка задачи

Рассматривается система нелинейных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(x(t - \tau(t), t)), \quad (3.101)$$

где $x \in R^n$, $\tau(t)$ – функция запаздывания. Полагаем, что функции $f(x, t)$, $\tau(t)$, и начальная функция $x_0(t) = x(t)$ при $t \in [-h, 0]$ кусочно-непрерывны, причем

$$f(x, t) = [f_1(x_1, t), \dots, f_n(x_n, t)]^T, \quad (3.102)$$

$$|f_i(x_i, t)| \leq k_i |x_i|, \quad i = 1, \dots, n,$$

где индекс T означает транспонирование. При этом запаздывания в отдельных компонентах вектора x могут быть различными, т.е.,

$$x(t - \tau(t)) = [x_1(t - \tau_1(t)), \dots, x_n(t - \tau_n(t))]^T,$$

где $\tau_i(t)$ удовлетворяют условию

$$\tau_i(t) \in [0, h] \text{ при } t \in [0, \infty).$$

Заметим, что условие (2.2) обычно используется в классической теории устойчивости [80], [92], в то время как функции (3.102) типичны для задач устойчивости управляемых систем, состоящих из линейного блока с нелинейными обратными связями, при этом $f_i(x_i, t)$ – характеристики обратных связей, $\tau_i(t)$ – соответствующие функции запаздывания.

Необходимо найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости системы (3.101), (3.102) выраженные с помощью параметров системы k_i , h ; указать системы для которых найденные оценки являются точными.

3.4.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова

Решение системы (3.101) можно представить в интегральной форме

$$x(t) = u(t) + \int_0^t W(t,s) f(x(s - \tau(s)), s) ds, \quad (3.103)$$

где $W(t,s) = [w_{ik}(t,s)]_{i,k=1}^n$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, $u(t)$ – решение соответствующей линейной системы при начальной функции $x_0(t)$.

Если линейная подсистема устойчива, справедлива следующая оценка

$$\|W(t,s)\| \leq C \exp(\alpha(t-s)), \quad \|u(t)\| \leq C \exp(\alpha t) \quad (3.104)$$

при некоторых $C > 0$ и $\alpha < 0$, где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

Прежде всего отметим следующее обстоятельство. При допустимой функции $f(x,t) \equiv 0$ соответствующее решение $x(t) = u(t)$ уравнения (3.101) устойчиво с показателем α . Поэтому при $f(x,t) \neq 0$ верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова системы (3.101), (3.102) будем искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \quad (3.105)$$

Положим

$$v_{ip}(t, \lambda) = \exp(-\lambda h) \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) |w_{ip}(t,s)| ds, \quad (3.106)$$

$$v_{ip}(\lambda) = \sup_t v_{ip}(t, \lambda) \text{ при } t \geq 0, \quad V(\lambda) = [k_p v_{ip}(\lambda)]_{i,p=1}^n.$$

Обозначим $\mu(\lambda)$ наибольшее по модулю собственное значение матрицы $V(\lambda)$. Так как последняя неотрицательна, то $\mu(\lambda)$ действительно и положительно [106, с.365]. Пусть λ_+ – корень уравнения $\mu(\lambda) = 1$.

Теорема 3.11. В системе (3.101), (3.102)

$$\bar{\lambda} \leq \lambda_+. \quad (3.107)$$

Доказательство. Положив в (3.103) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, получим

$$\begin{aligned} |y_i(t)| &\leq \exp(-\lambda t)|u_i(t)| + \exp(-\lambda t) \times \\ &\quad \times \int_0^t \sum_{p=1}^n |w_{ip}(t,s)| \left| f_p(y_p(s - \tau_p(s))) \right| \exp(\lambda(s - \tau_p(s)), s) ds \leq \\ &\leq \exp(-\lambda t)|u_i(t)| + \\ &\quad + \exp(-\lambda h) \int_0^t \exp(-\lambda(t-s)) \sum_{p=1}^n |w_{ip}(t,s)| k_p |y_p(s - \tau_p(s)), s| ds, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Покажем, что при $\lambda > \lambda_+$ все функции $|y_i(t, \lambda)|$ ограничены на $(0, \infty)$.

Пусть

$$v_i(t_+) = |y_i(t_i(t_+))| = \max |y_i(t)| \text{ при } t \in [-h, t_+]. \quad (3.109)$$

Полагая в (3.108) $t = t_i(t_+)$, $i = 1, \dots, n$ и учитывая (3.106) и (3.109),

получим

$$w(t_+) \leq V(\lambda)w(t_+) + \delta(t_+), \quad (3.110)$$

где

$$w(t_+, \lambda) = \frac{1}{v_*(t_+)} [v_1(t_+, \lambda), \dots, v_n(t_+, \lambda)]^T,$$

$$\delta(t_+) = \frac{1}{v_*(t_+)} [\exp(-\lambda t_1(t_+))|u_1(t_1(t_+))|, \dots, \exp(-\lambda t_n(t_+))|u_n(t_n(t_+))|]^T, \quad (3.111)$$

$$v_*(t_+) = \max v_i(t_+).$$

Предположим, что хотя бы одна из функций $|y_i(t)|$ не ограничена на $(0, \infty)$. Тогда $v_*(t_+) \rightarrow \infty$ и, следовательно,

$$\delta(t_+) \rightarrow 0 \text{ при } t_+ \rightarrow \infty. \quad (3.112)$$

Элементы матрицы $V(\lambda)$ неотрицательны и убывают по λ , поэтому ее максимальное собственное значение также убывает, т.е., $\mu(\lambda) < \mu(\lambda_0) = 1$ при $\lambda > \lambda_+$ [106]. Следовательно, матрица $[I - V(\lambda)]^{-1}$ (I – единичная матрица) неотрицательна [106, с.366]. В результате, из (3.110) получим

$$w(t_+, \lambda) \leq [I - V(\lambda)]^{-1} \delta(t_+),$$

откуда, с учетом (3.112), найдем, что $w(t_+, \lambda) \rightarrow 0$ при $t_+ \rightarrow \infty$. Последнее, однако, невозможно, так как $w_p(t_+) = 1$ в силу определения (3.111). Полученное противоречие доказывает, что при $\lambda > \lambda_0$ функции $|y_i(t, \lambda)|$ и, следовательно, $\|x(t)\| \exp(-\lambda t)$ ограничены на $(0, \infty)$. Теорема доказана.

Для получения достаточного условия экспоненциальной устойчивости системы (3.101), (3.102) следует положить в (3.106) $\lambda = 0$. Неравенство $\lambda_0 > 0$ и, следовательно, $\bar{\lambda} > 0$ будет выполнено, если

$$\mu(0) < 1. \quad (3.113)$$

Как видно из (3.106) $\mu(0)$ не зависят от h , то условие (3.113) гарантирует экспоненциальную устойчивость системы (3.101), (3.102) при любом ограниченном на $[0, \infty)$ запаздывании $\tau(t)$.

3.4.3. Точные значения максимального показателя Ляпунова

Найдем системы для которых найденные оценки являются точными, т.е. достигаются при некоторых допустимых $u(t)$, $f(x, t)$ и $\tau(t)$. Предположим, что матрица $W(t, s)$ неотрицательна, т.е.

$$w_{ik}(t, s) \geq 0 \text{ при } t > s. \quad (3.113)$$

Кроме того, полагаем, что

$$v_{ip}(t, \lambda) \rightarrow v_{ip}(\lambda) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (3.114)$$

Заметим, что условие (3.113) заведомо выполняется, когда внедиагональные элементы матрицы $A(t)$ неотрицательны [107, с.63]; условие (3.114) заведомо выполняется, когда $W(t, s) = W(t - s)$, т.е., линейная часть системы стационарна.

Теорема 3.12. В системе (3.101) при условиях (3.102), (3.113) и (3.114)

$$\bar{\lambda} = \lambda_0.$$

Доказательство. Положив в (3.103) $f_i(x_i, t) = k_i x_i$, $\tau_i(t) \equiv h$, $i = 1, \dots, n$ и $x(t) = y(t) \exp(\lambda_+ t)$, запишем полученное уравнение в виде

$$y(t) = \exp(-\lambda_+ t) u(t) + R(y, t), \quad (3.115)$$

где

$$R(y, t) = \exp(-\lambda_+ H) \int_0^t \exp(-\lambda_+(t-s)) K W(t, s) y(s-H) ds, \quad (3.116)$$

$$K = \text{diag}[k_1, \dots, k_n].$$

Предположим, что $\bar{\lambda} < \lambda_+$, тогда элементы матрицы $V(\lambda_0)$, определяемой соотношениями (3.106), конечны. Пусть v_0 – ее собственный вектор, отвечающий собственному значению $\mu(\lambda_0) = 1$. В силу (3.114), (3.116) и (3.106)

$$R(v_0, \infty) = V(\lambda_0)v_0 = v_0. \quad (3.117)$$

Поэтому непосредственной подстановкой можно убедиться, что при

$$u(t) = \exp(\lambda_+ t) [R(v_0, \infty) - R(v_0, t)]$$

уравнения (3.115) имеет решение $y(t) \equiv v_0$. Следовательно, соответствующее решение $x(t)$ уравнения (3.101) удовлетворяет соотношению $\|x(t)\| \exp(-\lambda_+ t) \equiv v_0$. Последнее, как показано выше, возможно только при $\lambda_+ \leq \bar{\lambda}$. Полученное противоречие с учетом неравенства (3.107) доказывает теорему. Теорема доказана.

Если $f(x, t)$ имеет вид (3.102), то верхняя граница показателя $\bar{\lambda}$ устанавливается неравенством (3.107). Если выполнены условия (3.113) и (3.114), то в соответствии с теоремой 3.12 указанная граница точная, она достигается при $f_i(x_i(t - \tau_i(t)), t) \equiv k_i x_i(t - h)$.

3.5. Устойчивость систем с переключениями

3.5.1. Постановка задачи

Рассматриваются динамические системы, которые описываются комбинацией дифференциальных уравнений и дискретного переключающего сигнала

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f_i(x(t - \tau(t)), t),$$

$$x \in R^n, \tau(t) \in [0, h], x(t) = x_0(t) \text{ при } t \in [-h, 0], A_i \in \Omega = \{A_1, \dots, A_m\}, \quad (3.118)$$

где A_i – заданные матрицы размерности $n \times n$. Функции $\tau(t)$, $x_0(t)$ и $f_i(x, t)$ кусочно-непрерывны, причем $\|x_0(t)\| \leq M$ и

$$\|f_i(x, t)\| \leq k \|x\|, \quad (3.119)$$

где $\|\cdot\|$ – любая норма вектора и согласованная норма матрицы.

Переключающий сигнал $i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ – кусочно-постоянная функция определяющая последовательность переключений между подсистемами.

Необходимо найти верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова и получить условия экспоненциальной устойчивости для системы при произвольном законе переключения.

3.5.2. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова

Запишем (3.118) в виде

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + (A_i - A_0)x(t) + f_i(x(t - \tau(t)), t), \quad (3.120)$$

где

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{m}.$$

Представим решение (3.120) в виде

$$x(t) = W(t,0)x(0) + \int_0^t W(t,s)[(A_i - A_0)x(s) + f_i(x(s - \tau(s)), s)]ds, \quad (3.121)$$

где $W(t,s)$ – матрицант уравнения $\dot{x}(t) = A_0x(t)$. Пусть α – его наибольший показатель Ляпунова, тогда при некотором $M > 0$ и любых $0 \leq s \leq t < \infty$ справедлива оценка

$$\|W(t,s)\| \leq M \exp(\alpha(t-s)). \quad (3.122)$$

Очевидно, что верхнюю границу величины $\bar{\lambda}$ следует искать в интервале

$$\lambda > \alpha. \quad (3.123)$$

Положим

$$\begin{aligned} v_0(t, \lambda) &= \int_0^t \max_i \|W(t,s)(A_i - A_0)\| \exp(-\lambda(t-s)) ds, \\ v(t, \lambda, \tau) &= \int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s))] \|W(t,s)\| ds. \end{aligned} \quad (3.124)$$

В силу (3.122) и (3.123) функции $v_0(t, \lambda)$ и $v(t, \lambda, \tau)$ ограничены на $[0, \infty)$.

Пусть

$$v_0(\lambda) = \sup_t v_0(t, \lambda), \quad v(\lambda, \tau) = \sup_t v(t, \lambda, \tau), \quad \text{при } t \geq 0.$$

Матрицы A_i и, следовательно, A_0 постоянны, поэтому

$$W(t,s) = W(t-s),$$

$$\begin{aligned} v_0(t, \lambda) &= \int_0^t \max_i \|W(t-s)(A_i - A_0)\| \exp(-\lambda(t-s)) ds = \\ &= \int_0^t \max_i \|W(s)(A_i - A_0)\| \exp(-\lambda(s)) ds, \\ v(t, \lambda, \tau) &= \int_0^t \exp[-\lambda(t-s+\tau(s))] \|W(t-s)\| ds = \int_0^t \exp[-\lambda(s+\tau(s))] \|W(s)\| ds. \end{aligned}$$

Очевидно, что здесь $v_0(t, \lambda)$ и $v(t, \lambda, \tau)$ монотонно возрастают по t , следовательно

$$v_0(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} v_0(t, \lambda), \quad v(\lambda, \tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, \lambda, \tau) \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Обозначим λ_+ – наибольший по $\tau(t)$ корень уравнения

$$v_0(\lambda) + kv(\lambda, \tau) = 1. \quad (3.125)$$

Соответствующая функция $\tau(t)$ определяется из следующих соображений. Как видно из (3.124), $v(t, \lambda, \tau)$ убывает по λ . Поэтому $\lambda_+ < 0$ и $\lambda_+ > 0$ при $v_0(0) + kv(0) < 1$ и $v_0(0) + kv(0) > 1$, соответственно. С другой стороны, при возрастании $\tau(t)$ функция $v(t, \lambda, \tau)$ убывает при $\lambda > 0$ и возрастает при $\lambda < 0$. Поэтому, при вычислении $v(\lambda, \tau)$ и в (3.125) полагаем $\tau = h$ в случае $v_0(0) + kv(0) < 1$ и $\tau = 0$ в случае $v_0(0) + kv(0) > 1$ (при $v_0(0) + kv(0) = 1$ левая часть (3.125) не зависит от $\tau(t)$).

Следующая теорема дает верхнюю оценку показателя $\bar{\lambda}$.

Теорема 3.13. Для системы (3.118) при произвольном $i(t)$

$$\bar{\lambda} \leq \lambda_+. \quad (3.126)$$

Доказательство. Пусть $x(t)$ – решение (3.118). Положив в (3.120) $x(t) = y(t)\exp(\lambda t)$, получим

$$\begin{aligned} y(t) = & \exp(-\lambda t)W(t, 0)x(0) + \exp(-\lambda t) \int_0^t W(t, s)(A_i - A_0)\exp(\lambda s)y(s)ds + \\ & + \exp(-\lambda t) \int_0^t W(t, s)f_i(\exp(\lambda(s - \tau(s))))y(s - \tau(s), s)ds. \end{aligned}$$

Используя (3.119), получим неравенство

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq & \exp(-\lambda t)\|W(t, 0)x(0)\| + \\ & + \int_0^t \max_i \|W(t, s)(A_i - A_0)\| \exp(-\lambda(t-s))\|y(s)\|ds + \\ & + k \int_0^t \exp(-\lambda(t-s+\tau(s)))\|W(t, s)\| \|y(s-\tau(s))\| ds. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Пусть

$$\|y(t_*)\| = \max\|y(t)\| \text{ при } t \in [0, t_+], \quad (3.128)$$

где $t_* = t_*(t_+)$. Положив в (3.127) $t = t_*$ и учитывая (3.128) и (3.124), получим

$$\|y(t_*)\| \leq \exp(-\lambda t_*) \|W(t,0)x(0)\| + \|y(t_*)\| [v_0(\lambda) + kv(\lambda, \tau)]. \quad (3.129)$$

Покажем, что при $\lambda \geq \lambda_+$ функция $\|y(t)\|$ ограничена на интервале $(0, \infty)$.

Действительно, в противном случае $t_* \rightarrow \infty$ при $t_+ \rightarrow \infty$ и в силу (3.122) и (3.123) $\exp(-\lambda t_*) \|W(t,0)x(0)\| \rightarrow 0$. Так как $v_0(t, \lambda)$ и $v(t, \lambda, \tau)$ убывает по λ , то $v(\lambda) < 1$ при $\lambda > \lambda_+$ и любых допустимых $\tau(t)$ (как показано выше, λ_+ определяется при тех значениях $\tau(t)$, для которых левая часть (3.125) максимальна). Но при этом неравенство (3.129) не выполняется для достаточно больших t_* . Полученное противоречие доказывает, что $\|y(t)\| = \|x(t)\| \exp(-\lambda t) < \infty$ при $\lambda > \lambda_+$ и $t > 0$, следовательно, $\bar{\lambda} \leq \lambda_+$. Теорема доказана.

3.5.3. Условие экспоненциальной устойчивости

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости системы (3.118) при произвольном сигнале переключения.

Теорема 3.14. *При условии*

$$v_0(0) + kv(0) < 1 \quad (3.130)$$

система (3.118) экспоненциально устойчива при любом переключающем сигнале.

Доказательство. Как отмечено выше, необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости служит неравенство $\bar{\lambda} < 0$, где $\bar{\lambda}$ – максимальный показатель Ляпунова. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова – λ_+ определяется из уравнения (3.125). При $\lambda_+ = 0$ левая часть (3.125) не зависит от $\tau(t)$. Так как $v_0(\lambda)$ и $v(\lambda, \tau)$ убывают по λ , то $\lambda_+ < 0$ при $v_0(0) + kv(0) < 1$ и, следовательно $\bar{\lambda} < 0$. Теорема доказана.

3.5.4. Примеры расчетов

Проиллюстрируем применение полученных оценок на примерах.

Пример 3.6. Рассмотрим трехмерную систему с переключениями. Пусть

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + f_i(x(t - \tau(t)), t),$$

$$\|f_i(x, t)\| \leq k \|x\|,$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

По формуле $A_0 = \sum_{i=1}^m A_i / m$ вычислим среднюю матрицу

$$A_0 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Условие экспоненциальной устойчивости (3.130) принимает вид

$$k < \frac{1 - \int_0^\infty \max_i \|W(s)(A_i - A_0)\| ds}{\int_0^\infty \|W(s)\| ds},$$

где $W(s) = \exp[A_0 s]$.

На рисунке 3.5 представлены графики верхней оценки наибольшего показателя Ляпунова $\lambda_+(k)$ при различных значениях максимальной величины запаздывания h . При вычислениях задавались λ и h , затем с помощью соотношения (3.125) определялись значения k (в расчетах использовалась евклидова норма $\|W(s)\|$, равная наибольшему собственному значению матрицы $[W(s)^T W(s)]^{1/2}$).

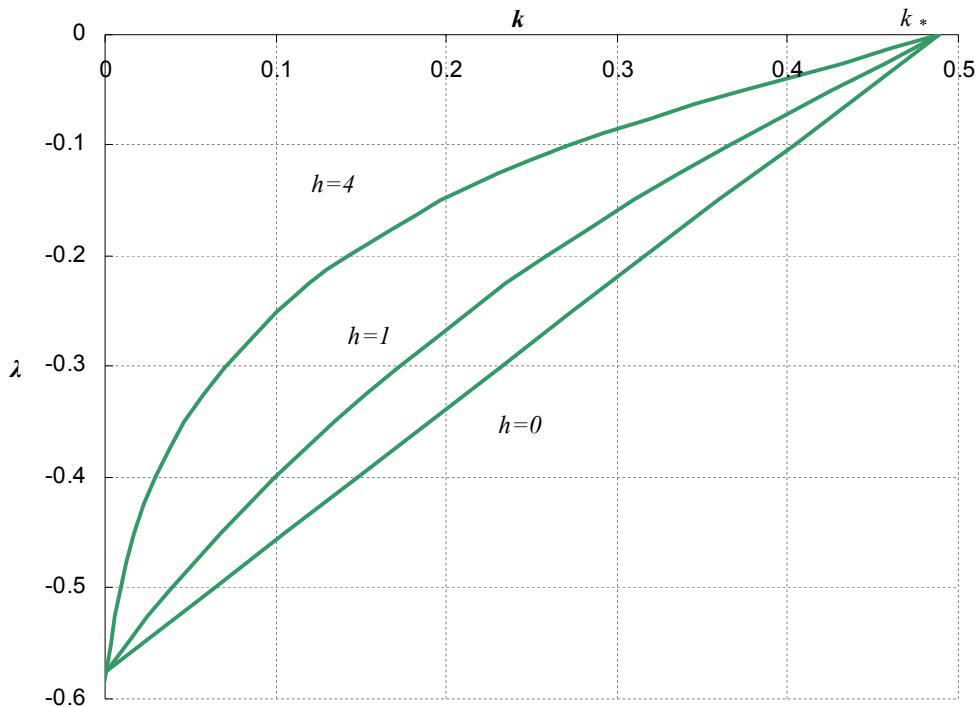


Рис. 3.5. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова $\lambda_+(k)$

Функции $\lambda_+(k, h)$ возрастают по h и k , однако $\lim_{\lambda \rightarrow 0} k(\lambda, h) = k_* = 0.4883$ при $\lambda \rightarrow 0$ не зависит от h . Поэтому условие $k < 0.4883$ гарантирует экспоненциальную устойчивость системы при любом конечном h .

Пример 3.7. Рассмотрим теперь частный случай (3.118) – переключающуюся систему

$$\dot{x}(t) = [A_i + \mu I]x(t),$$

где I – единичная матрица и

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0.1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^m [A_i + \mu I]}{3}.$$

Очевидно, что собственные значения матриц $[A_i + \mu I]$ равны $\lambda_{ip} + \mu$, $p = 1, 2$, где λ_{ip} – собственные значения матрицы A_i . При $\mu < 1.904\dots$, каждая подсистема устойчива.

Вычисления показали, что при $\mu_* = -0.636\dots$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3.636 & 0 \\ -0.3 & -2.303 \end{bmatrix},$$

$$\nu_0(0) = 1.$$

Следовательно, если $\mu < \mu_*$ – система устойчива при любом переключающем сигнале. Для этого примера в [99] было показано, что условие $\mu < 1.082\dots$ является необходимым и достаточным для устойчивости рассматриваемой системы.

Выводы к разделу 3

В данном разделе проведено обобщение результатов второго раздела на более сложные системы. Рассмотрена система, содержащая переменное запаздывание в линейной части и содержащая элемент с распределенным запаздыванием. Найдены двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова, выраженные с помощью нормы нелинейного члена и максимумов функций запаздывания. Для некоторых систем найдено точное значение указанного показателя. Предложен простой метод расчета экспоненциальной устойчивости, вычислительная трудоемкость которого практически не зависит от порядка системы.

Рассмотрена система с «чистым» запаздыванием, которая содержит несколько элементов с различным запаздыванием, причем отсутствует устойчивая линейная подсистема без запаздывания. Получены верхняя оценка максимального показателя Ляпунова и достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

Разработаны критерии устойчивости для систем с постоянным запаздыванием и систем с нелинейностями специального вида.

Предложен новый подход для анализа устойчивости систем с переключениями содержащих запаздывание. Найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова и получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы для произвольного закона переключения.

Для указанных систем эффективность разработанного подхода проверена на модельных примерах рассмотренных другими авторами. Полученные результаты позволили существенно расширить известные области устойчивости.

Основные результаты настоящего раздела опубликованы в работах [1], [2], [3], [4] и [5].

РАЗДЕЛ 4

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Настоящий раздел посвящен приложениям результатов предыдущих разделов к решению некоторых задач механики.

В первом подразделе решается задача анализа устойчивости системы стабилизации перевернутого маятника с учетом постоянного и переменного запаздывания в обратной связи; получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости системы, найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова.

Второй, третий и четвертый подразделы посвящены анализу устойчивости процесса резания металла при вертикально-фрезерной обработке, который моделируется дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Рассмотрены различные модели процесса, проведено сравнение полученных результатов с известными экспериментальными и теоретическими результатами.

4.1. Устойчивость системы стабилизации перевернутого маятника с запаздыванием

Стабилизация перевернутого маятника является классической задачей, которая имеет приложения, как в механических, так и биологических системах [108].

Схема системы изображена на рисунке 4.1. Ось маятника расположена на тележке, которая, под действием управляющей силы $F(t)$, может перемещаться в горизонтальном направлении x , что позволяет удерживать маятник в верхнем положении.

Система описывается следующими уравнениями

$$(M + m)\ddot{x} + \eta\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F(t); \quad (4.1)$$

$$ml\ddot{x}\cos\theta + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0, \quad (4.2)$$

где $x(t)$ – горизонтальное положение тележки, θ – угловое отклонение маятника от вертикального положения, M – масса тележки, m – масса маятника, l – расстояние между осью вращения и центром тяжести маятника.

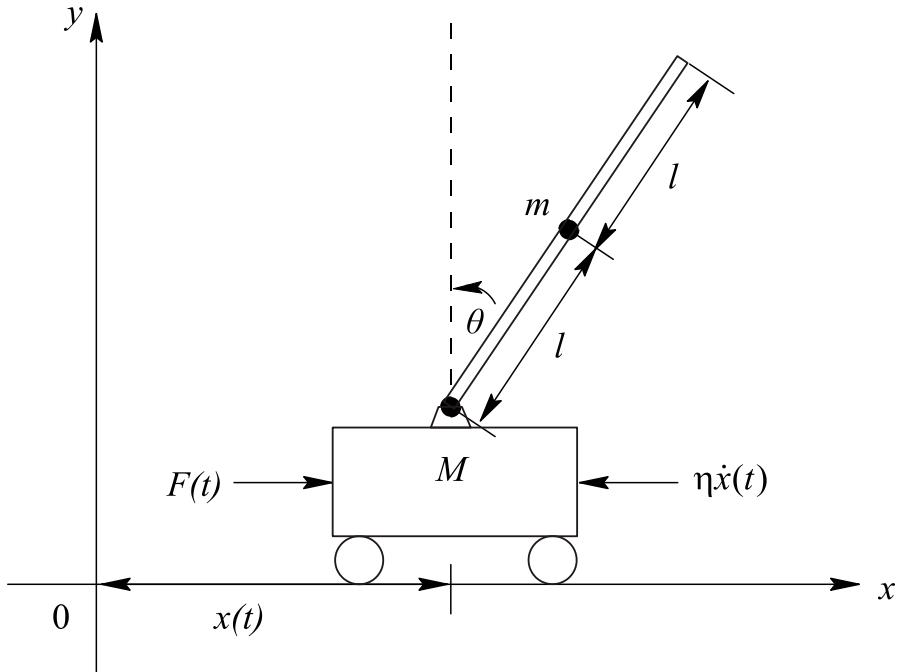


Рис. 4.1 Схема системы

Далее рассматривается устойчивость системы стабилизации реальной учебной экспериментальной установки IP-02 производства Quanser Consulting Inc. описанной в [109], [110], общий вид которой показан на рисунке 4.2.

В расчетах использовались следующие значения параметров $M = 0.815 \text{ кг}$, $m = 0.21 \text{ кг}$, $l = 0.305 \text{ м}$, $\eta = 10.6$. Для рассматриваемой установки управляющая сила $F(t)$ определяется как

$$F(t) = aV(t) - b\dot{x}(t), \quad (4.3)$$

где $V(t)$ – напряжение подаваемое на двигатель тележки, $a = 1.7189$ и $b = 7.682$ – коефициенты пропорциональные сопротивлению обмоток двигателя.

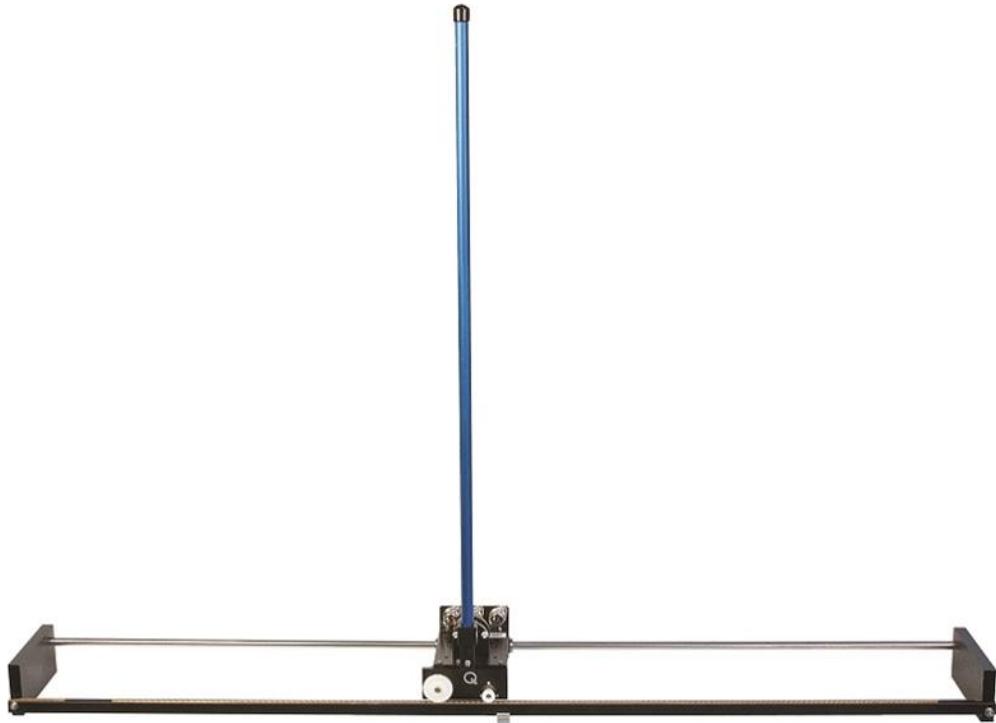


Рис. 4.2 Учебная экспериментальная установка IP-02

Разрешив уравнения (4.1), (4.2) относительно \ddot{x} , $\ddot{\theta}$ и произведя замену переменных

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})^T, \quad (4.4)$$

получили эквивалентную систему уравнений первого порядка

$$\dot{y} = \varphi(y) = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{4F(t) - 4\eta y_3 + 4mly_4^2 \sin y_2 - 3mg \sin y_2 \cos y_2}{4(M+m) - 3m \cos^2 y_2} \\ \frac{(M+m)g \sin y_2 - (F(t) - \eta y_3) \cos y_2 - mly_4^2 \sin y_2 \cos y_2}{l(\frac{4}{3}(M+m) - m \cos^2 y_2)} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Известно, что при отсутствии управляющего воздействия ($F(t) = 0$), верхнее положение равновесия маятника является неустойчивым. В [110] для линеаризованной системы (4.5), была решена задача синтеза линейно квадратичного регулятора. Закон управления, стабилизирующий систему в точке равновесия $y = 0$, получен в виде

$$V(t) = Ky, \quad (4.6)$$

где

$$K = (70.7107, 142.5409, 50.6911, 26.9817).$$

При рассмотрении реальных систем часто необходимо учитывать влияние запаздывания, которое неизбежно возникает из-за задержек в контуре управления, а также при поступлении или во время фильтрации информации с датчиков измеряющих текущее состояние. Вопрос об оценке допустимого запаздывания в цепи обратной связи весьма важен в задаче стабилизации всякого неустойчивого объекта, поскольку даже при «небольшом» запаздывании стабилизация такого объекта может оказаться невозможной [2].

Исследуем теперь влияние запаздывания в обратной связи на динамику рассматриваемой системы. Предположим, что между моментом измерения переменных состояния системы и приложения напряжения $V(t)$ проходит время τ . Тогда закон управления (4.6) с учетом запаздывания будет иметь вид

$$V(t) = Ky(t - \tau). \quad (4.7)$$

Пусть $d = aK$, тогда из (4.5), с учетом (4.3), (4.4) и (4.7), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = \phi_2(y(t - \tau)) + \phi_1(y(t)) &= \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 4 \\ \frac{4(M+m) - 3m\cos^2 y_2(t)}{l(4(M+m) - 3m\cos^2 y_2(t))} \end{array} \right) \sum_{i=1}^4 d_i y_i(t - \tau) + \\ &+ \left(\begin{array}{c} y_3(t) \\ y_4(t) \\ \frac{-4(b+\eta)y_3(t) + 4mly_4(t)^2 \sin y_2(t) - 3mg \sin y_2(t) \cos y_2(t)}{4(M+m) - 3m\cos^2 y_2(t)} \\ \frac{(M+m)g \sin y_2(t) + (b+\eta)y_3(t) \cos y_2(t) - mly_4(t)^2 \sin y_2(t) \cos y_2(t)}{l(\frac{4}{3}(M+m) - m\cos^2 y_2(t))} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Очевидно, что при достаточно большой величине запаздывания τ закон управления (4.7) не будет в состоянии стабилизировать систему и точка равновесия $y = 0$ перестанет быть устойчивой. Найдем критическое значение запаздывания, при котором происходит дестабилизация системы.

Для решения этой задачи, представим (4.8) в виде

$$\dot{y}(t) = Ax(t) + By(t - \tau) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - \tau)), \quad (4.9)$$

где матрицы A и B линейные составляющие системы (4.8)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-3mg}{m+4M} & \frac{-4(b+\eta)}{m+4M} & 0 \\ 0 & \frac{3(M+m)g}{l(m+4M)} & \frac{3(b+\eta)}{l(m+4M)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4d_1}{m+4M} & \frac{4d_2}{m+4M} & \frac{4d_3}{m+4M} & \frac{4d_4}{m+4M} \\ \frac{-3d_1}{l(m+4M)} & \frac{-3d_2}{l(m+4M)} & \frac{-3d_3}{l(m+4M)} & \frac{-3d_4}{l(m+4M)} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

функции f_1 и f_2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} f_1(y(t)) &= \phi_1(y(t)) - Ay(t), \\ f_2(y(t-\tau)) &= \phi_2(y(t)) - By(t-\tau). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Для анализа устойчивости системы и расчета верхней оценки максимального показателя Ляпунова λ_+ воспользуемся результатами, полученными в разделе 3.

Условием экспоненциальной устойчивости линеаризованной системы (4.8) ($f_1 \equiv 0$ и $f_2 \equiv 0$) служит неравенство

$$v(\lambda) < \infty,$$

где $v(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|W(t,s)\| \exp(-\lambda s) ds$, $W(t,s)$ – матрицант линейной части уравнения (4.9) $\dot{y}(t) = Ax(t) + By(t - \tau)$.

Заметим, что поскольку матрицы A и B постоянны, то

$$W(t,s) = W(t-s).$$

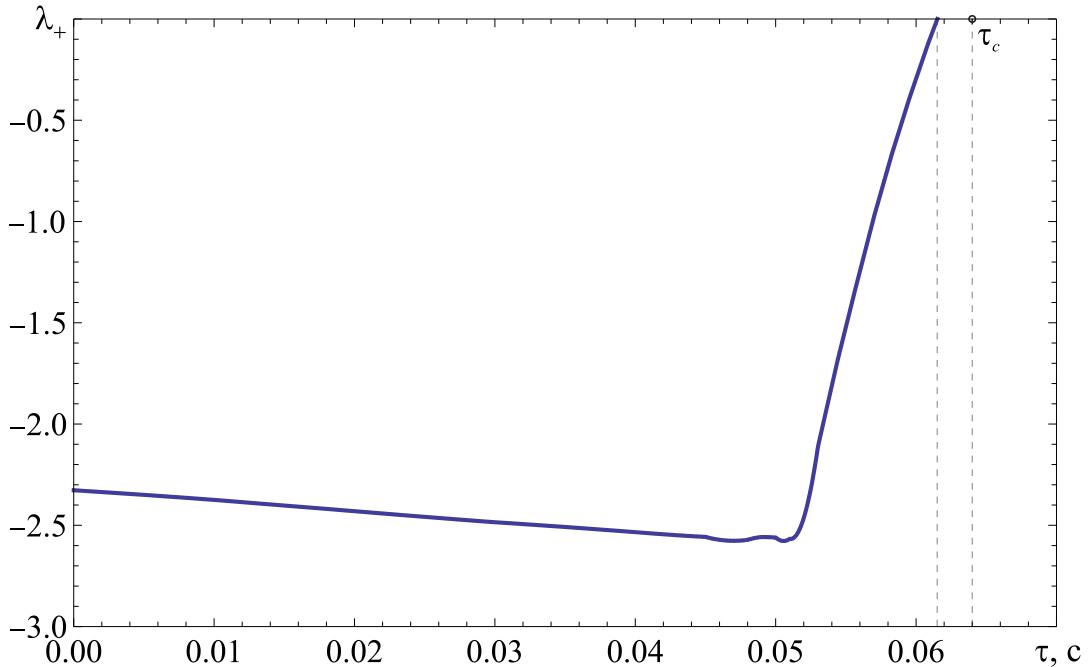


Рис. 4.3. Верхняя оценка максимального показателя Ляпунова

На рисунке 4.3 представлен график зависимости верхней оценки максимального показателя Ляпунова $\lambda_+(\tau)$ от величины запаздывания τ для системы (4.8) при $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$. Заметим, что $\lambda_+ = 0$ при величине запаздывания $\tau = 0.0615$, следовательно при $\tau < 0.0615$ система заведомо устойчива.

В [110] экспериментально получено критическое значение величины запаздывания $\tau_c = 0.064$. Близость полученной оценки и экспериментального результата свидетельствует о хорошей точности предложенного метода.

Предположим, что нелинейные части системы (4.9) удовлетворяют следующим условиям

$$\|f_1(y(t))\| \leq k_1 \|y(t)\|,$$

$$\|f_2(y(t-\tau))\| \leq k_2 \|y(t-\tau)\|,$$

$$k = k_1 + k_2.$$

Тогда, воспользовавшись результатами подразделов 3.1 и 3.3, положив $\lambda_+ = 0$ и $\lambda_- = 0$, получим достаточные условия устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров k и τ .

При вычислении оценки границы достаточной области неустойчивости руководствовались следующими соображениями. Система будет гарантированно неустойчивой, если нижняя оценка максимального показателя Ляпунова λ_- равна нулю.

При $\lambda = 0$, $C = 0$ корни уравнения

$$\det \left[A + \exp(-\lambda \tau_B^0) B + k \exp(-\lambda \tau^0) D(\varphi) + \frac{1 - \exp(\lambda \mu)}{\lambda} C - \lambda I \right] = 0$$

не зависят от величины запаздывания.

Тогда для получения достаточной области неустойчивости необходимо найти критическое значение k из уравнения

$$\det(A + B + kD) = 0,$$

где ортогональная матрица D равная

$$D = R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6,$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) & \sin(\alpha_1) & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_3) & 0 & \sin(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha_3) & 0 & \cos(\alpha_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_4 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_4) & 0 & 0 & \sin(\alpha_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_4) & 0 & 0 & \cos(\alpha_4) \end{pmatrix},$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_5) & 0 & \sin(\alpha_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_5) & 0 & \cos(\alpha_5) \end{pmatrix}, \quad R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_6) & \sin(\alpha_6) \\ 0 & 0 & -\sin(\alpha_6) & \cos(\alpha_6) \end{pmatrix}.$$

При вычислении критического значения k проводилась оптимизация по параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$.

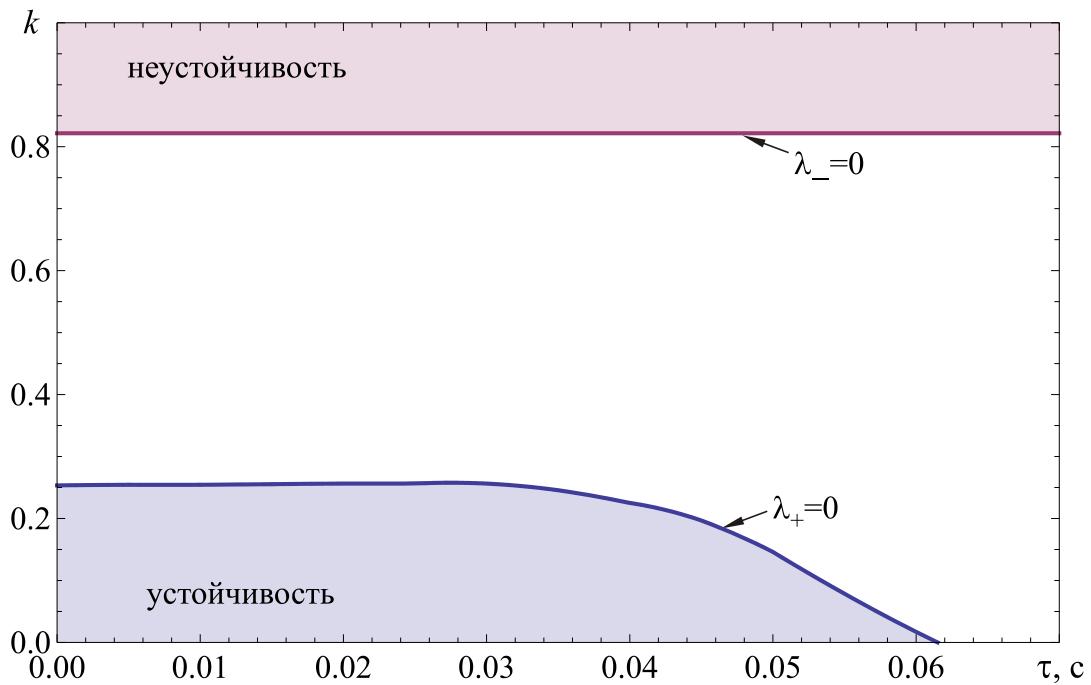


Рис. 4.4. Достаточные области устойчивости и неустойчивости

На рисунке 4.4 в пространстве параметров (ограничения нелинейности k и запаздывания τ) приведены достаточные области неустойчивости и устойчивости, ограниченные сплошными линиями с заданными оценками максимального показателя Ляпунова $\lambda_- = 0$ и $\lambda_+ = 0$ соответственно.

В реальных системах, часто, запаздывание является переменным, причем функция запаздывания неизвестна (обычно удается оценить только ее верхнюю границу). Наличие переменного запаздывания оказывает существенное влияние на динамику системы. Известно, например, что существуют системы, устойчивые при любой величине постоянного запаздывания и неустойчивые при некотором переменном запаздывании.

Рассмотрим устойчивость системы (4.9), заменив постоянное запаздывание переменным.

$$\dot{y}(t) = Ax(t) + Bx(t - h(t)) + f_1(y(t)) + f_2(y(t - h(t))) \quad (4.13)$$

$$h(t) \in [0, \tau]$$

Предположим, что нелинейные части системы удовлетворяют следующим условиям

$$\|f_1(y(t))\| \leq k_1 \|y(t)\|,$$

$$\|f_2(y(t - h(t)))\| \leq k_2 \|y(t - h(t))\|,$$

$$k = k_1 + k_2.$$

Воспользовавшись результатами подразделов 3.1 и 3.2, построим области достаточной устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров k и τ . При $\lambda_- = 0$ оценка границы области неустойчивости для переменного запаздывания совпадает с оценкой полученной выше для постоянного запаздывания.

На рисунке 4.5 в пространстве параметров ограничения нормы нелинейности k и максимальной величины запаздывания τ изображены достаточные области неустойчивости и устойчивости для системы с переменным запаздыванием. Области неустойчивости и устойчивости ограниченны сплошными линиями с заданными оценками максимального показателя Ляпунова $\lambda_- = 0$ и $\lambda_+ = 0$ соответственно.

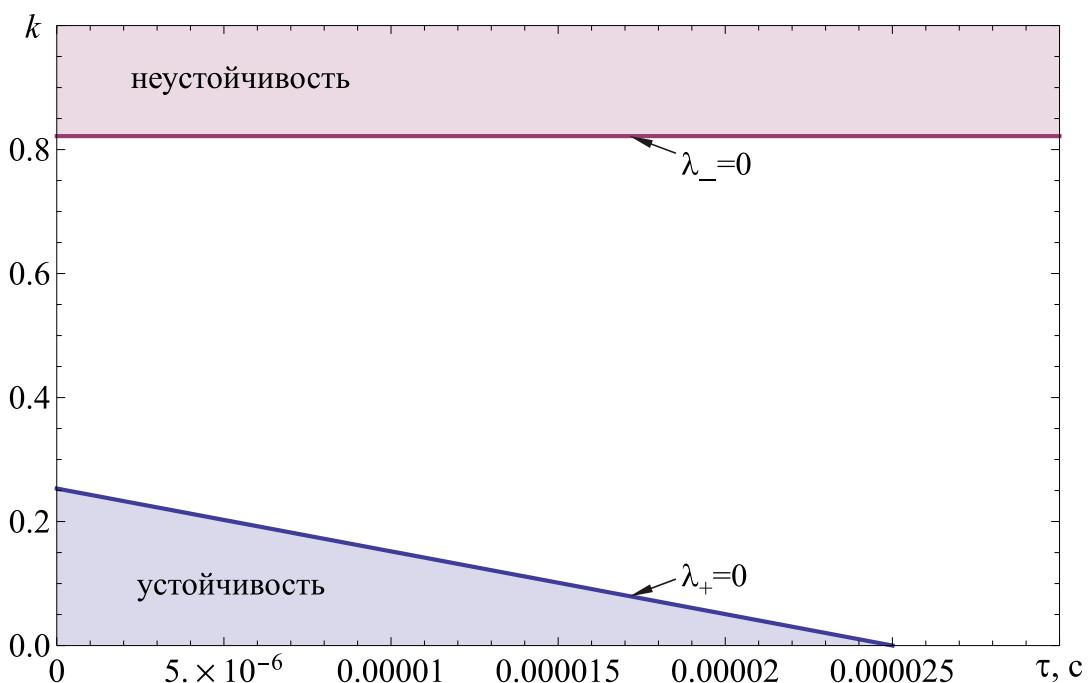


Рис. 4.5. Достаточные области устойчивости и неустойчивости системы с переменным запаздыванием

4.2. Модель процесса фрезерования с одной степенью свободы

Вибрации, возникающие в процессе резания металлов, приводят к снижению точности обработки, а также к преждевременному износу и поломке режущего инструмента. Теория возникновения вибраций разрабатывается достаточно давно, существенный вклад в ее развитие внесли работы [111]-[113]. В настоящее время, одной из основных причин возникновения автоколебаний считаются динамические силы, связанные со срезанием следа предыдущего прохода резца (т.н. эффект регенерации колебаний). Для соответствующего математического описания процессов резания используют дифференциальные уравнения с запаздыванием.

Рассмотрим устойчивость процесса вертикально-фрезерной обработки. Механическая модель системы показана на рисунке 4.6. Полагаем, что конструкция имеет гибкость только в направлении x , поэтому будет рассматриваться система с одной степенью свободы.

Уравнение движения этой системы можно записать в виде

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_x, \quad (4.14)$$

где m – модальная масса инструмента, c – коэффициент сопротивления, k – коэффициент упругости, F_x – сила, действующая в направлении x , v – скорость подачи.

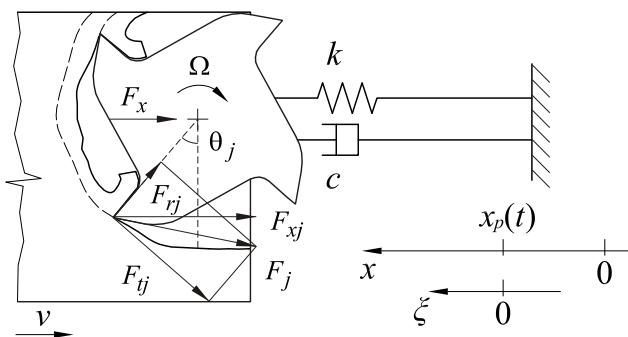


Рис. 4.6. Механическая модель системы

В соответствии с рисунком 4.6, x -компоненту режущей силы для j -го резца описывается выражением

$$F_{xj}(t) = g(\theta_j(t))(-F_{ij}(t)\cos\theta_j(t) - F_{rj}(t)\sin\theta_j(t)) \quad (4.15)$$

где функция $g(\theta_j(t))=1$ при контакте j -го резца с деталью и $g(\theta_j(t))=0$ в противном случае, т.е.

$$g(\theta_j(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{sgn}(\sin(\theta_j(t) - \psi) - p) \right) = \begin{cases} 1, & \theta_s < \theta_j(t) < \theta_f \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases},$$

где константы ψ и p определяются как

$$\tan\psi = \frac{\sin\theta_s - \sin\theta_f}{\cos\theta_s - \cos\theta_f},$$

$$p = \sin(\theta_s - \psi).$$

Здесь θ_s и θ_f углы входа и выхода резца в металл, которые зависят от ширины фрезерования a и диаметра фрезы D . Для встречного фрезерования $\theta_s = 0$, для попутного – $\theta_f = \pi$ (См. рисунок 4.7 а) и б), соответственно). Эти две операции, как будет показано ниже, имеют различные динамические характеристики, и, следовательно, различные области устойчивости.

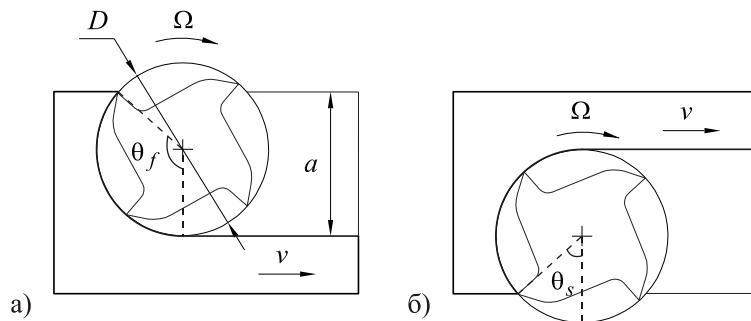


Рис. 4.7. Встречное и попутное фрезерование

Угловая позиция j -го резца определяется как

$$\theta_j(t) = (2\pi\Omega)t/60 + j2\pi/Z, \quad (4.16)$$

где Z – количество резцов фрезы, Ω – скорость вращения шпинделя (об./мин).

Тангенциальная F_{tj} и радиальная F_{rj} компоненты режущей силы определяются следующими соотношениями

$$F_{tj}(t) = K_t b h_j(t), \quad (4.18)$$

$$F_{rj}(t) = K_r b h_j(t), \quad (4.19)$$

где K_t и K_r – линеаризованные тангенциальный и радиальный коэффициенты резания, соответственно, b – глубина резания, h_j – толщина стружки, которая зависит от подачи на один резец фрезы $s_z = v\tau$, угла резания θ_j и регенерации колебаний в направлении движения:

$$h_j(t) = s_z \sin \theta_j(t) + (x(t) - x(t - \tau)) \sin \theta_j(t), \quad (4.20)$$

где $\tau = 60/Z\Omega$ – период прохода резца.

Из (27-31) получим суммарную силу, действующую в направлении x

$$\begin{aligned} F_x(t) &= b \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-K_t \cos \theta_j(t) - K_r \sin \theta_j(t)] \sin \theta_j(t) \times \\ &\times [s_z + (x(t) - x(t - \tau))]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Пусть

$$K_s(t) = \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \cos \theta_j(t) + K_r \sin \theta_j(t)] \sin \theta_j(t), \quad (4.22)$$

$$K_0(t) = K_s(t) s_z. \quad (4.23)$$

Функции $K_s(t)$ и $K_0(t)$ являются τ -периодическими. С учетом (4.21)-(4.23), уравнение движения (4.14) имеет вид

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = -\frac{bK_s(t)}{m} (x(t) - x(t - \tau)) - \frac{bK_0(t)}{m}. \quad (4.24)$$

Представим решение (4.23) в виде

$$x(t) = x_p(t) + \xi(t), \quad (4.25)$$

где $x_p(t) = x_p(t + \tau)$ – τ -периодическая функция, соответствующая идеальному движению фрезы, $\xi(t)$ – возмущения. Подставив (4.25) в (4.24), получим систему уравнений

$$\ddot{x}_p(t) + \frac{c}{m} \dot{x}_p(t) + \frac{k}{m} x_p(t) = -\frac{bK_0(t)}{m}, \quad (4.26)$$

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{c}{m} \dot{\xi}(t) + \frac{k}{m} \xi(t) = -\frac{bK_s(t)}{m} (\xi(t) - \xi(t - \tau)). \quad (4.27)$$

Далее будем рассматривать уравнение (4.27), так как устойчивость решения $\xi(t) \equiv 0$, гарантирует устойчивость τ -периодического идеального решения $x_p(t)$ уравнения (4.24).

Произведя замену переменных в (4.28)

$$y = (y_1, y_2)^T = (\xi, \dot{\xi})^T, \quad (4.28)$$

получим эквивалентную систему уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{bK_s(t) + k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} bK_s(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t - \tau). \quad (4.29)$$

Далее был проведен анализ устойчивости экспериментальной вертикально-фрезерной установки, описанной в [114], произведено сравнение экспериментальных и теоретических результатов.

На экспериментальной установке производилась обработка заготовки сплава алюминия 7075-T6 концевой фрезой диаметром $D = 19.05 \text{ мм}$ с одним режущим зубом $Z = 1$. Производилось встречное и попутное фрезерование для различных значений глубины резания b и скорости вращения шпинделя Ω , при постоянных значениях ширины фрезерования $a = 4.515 \text{ мм}$ и подачи на зуб $s_z = v\tau = 0.1016 \text{ мм}$. При расчетах использовались значения параметров, экспериментально установленные в [114]: $m = 2.573 \text{ кг}$, $k = 2.18 \times 10^6 \text{ Н/м}$, $c = 15.1581 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$, $K_t = 5.5 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$, $K_r = 2 \times 10^8 \text{ Н/м}^2$.

Основными управляющими параметрами процесса фрезерования являются глубина фрезерования b и скорость вращения фрезы Ω . Представляет интерес получить область устойчивости и верхнюю оценку максимального показателя Ляпунова в пространстве этих параметров. Для анализа устойчивости уравнения (4.29) использовались результаты из раздела 3.3.

Положим

$$v(t, \lambda) = \int_0^t \|W(t, s)\| \exp(-\lambda(t-s)) ds,$$

где $W(t, s)$ – матрицант системы $\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau)$.

Пусть

$$v(\lambda) = \sup_t V(t, \lambda) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Условием экспоненциальной устойчивости системы служит неравенство

$$v(\lambda) < \infty,$$

где λ – верхняя оценка максимального показателя Ляпунова системы.

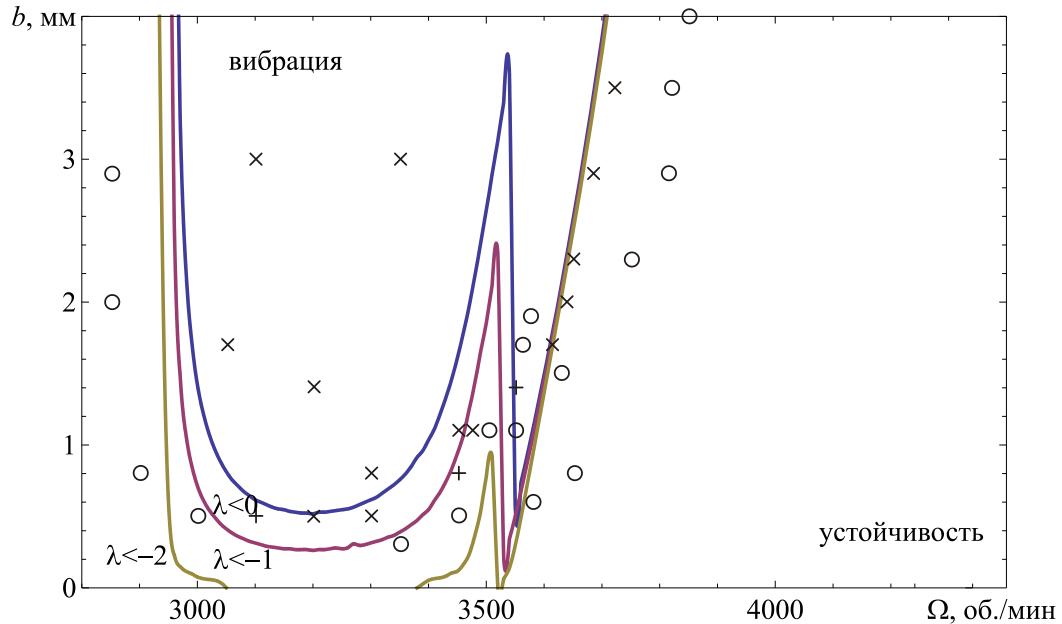


Рис. 4.8. Область устойчивости для встречного фрезерования

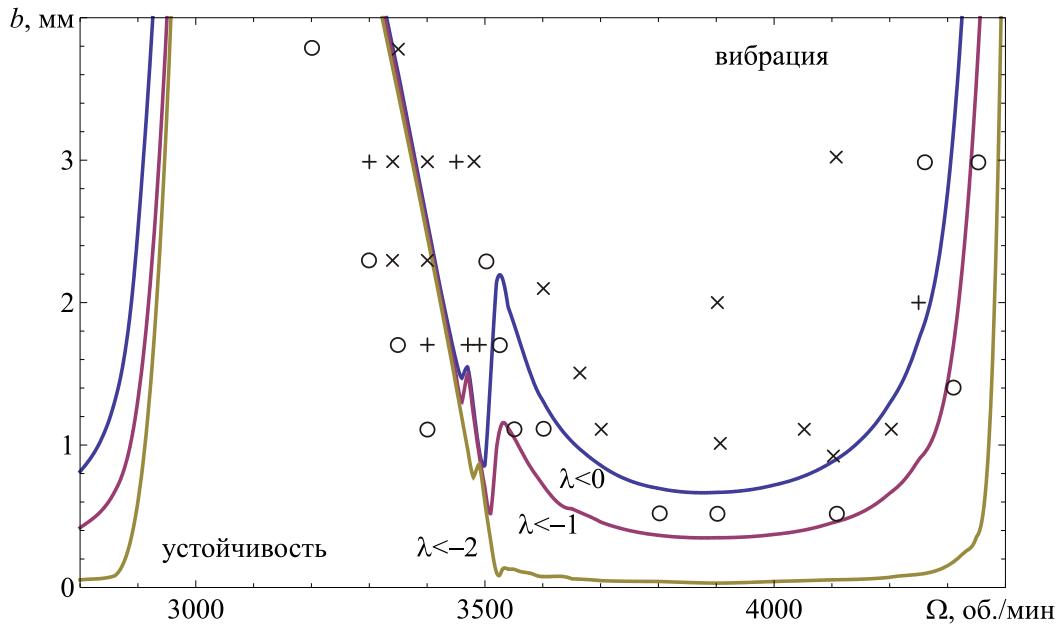


Рис. 4.9. Область устойчивости для попутного фрезерования

На рисунках 4.8 и 4.9 показаны области устойчивой обработки в пространстве параметров b и Ω для встречного и попутного фрезерования соответственно. Сплошными линиями ограничены области устойчивости с различными верхними оценками максимального показателя Ляпунова. Результаты экспериментальных исследований, полученных в [114] отмечены соответствующими символами («○» – устойчивый режим, «+» – граница, «×» – вибрация).

Как видно из рисунков 4.8 и 4.9, результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными, что говорит о высокой точности предложенного подхода.

Как показано выше, области устойчивости для встречного и попутного фрезерования значительно отличаются.

Полученные результаты могут быть использованы при выборе оптимальной скорости вращения шпинделя. Это позволит повысить качество и производительность обработки на станках с числовым программным управлением: задавая большую глубину резания, устойчивость обработки можно обеспечивать простым программным переключением скорости оборотов в зависимости от направления резания.

4.3. Нелинейная модель процесса фрезерования с одной степенью свободы

В предыдущем подразделе при вычислении режущих сил применялись линеаризованные коэффициенты резания. На практике, часто, при расчетах используют эмпирическую нелинейную модель режущих сил. Тангенциальная F_{tj} компонента режущей силы определяются следующим соотношением

$$F_{tj}(t) = Kb(h_j(t))^{x_F}, \quad (4.30)$$

где K – эмпирический коэффициент резания, b – глубина резания, h_j – толщина стружки, которая определяется соотношением (4.20), показатель степени x_F , обычно, принимают равным 0.8 или 3/4.

Для упрощения расчетов радиальной компоненты F_{rj} принято пользоваться следующим соотношением [115]

$$F_{rj}(t) = 0.3F_{tj}(t). \quad (4.31)$$

С учетом (4.30), (4.31) получим суммарную силу, действующую в направлении x

$$F_x(t) = bK \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-\cos \theta_j(t) - 0.3 \sin \theta_j(t)] [\sin \theta_j(t) [s_z + (x(t) - x(t-\tau))]]^{x_F}.$$

Пусть

$$K_s(t) = K \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [\cos \theta_j(t) + 0.3 \sin \theta_j(t)] \sin^{x_F} \theta_j(t). \quad (4.32)$$

Функции $K_s(t)$ и $K_0(t)$ являются τ -периодическими. С учетом (4.32), уравнение движения (4.14) имеет вид

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = -\frac{bK_s(t)}{m} (s_z + x(t) - x(t-\tau))^{x_F}. \quad (4.33)$$

Представим решение (4.33) в виде

$$x(t) = x_p(t) + \xi(t),$$

где $x_p(t) = x_p(t + \tau)$ – τ -периодическая функция, соответствующая идеальному движению фрезы, $\xi(t)$ – возмущения. Подставив это решение в (4.24), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + \frac{c}{m} \dot{x}_p(t) + \frac{k}{m} x_p(t) + \ddot{\xi}(t) + \frac{c}{m} \dot{\xi}(t) + \frac{k}{m} \xi(t) = \\ = -\frac{bK_s(t)}{m} (s_z + \xi(t) - \xi(t - \tau))^{x_F}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для идеального случая $\xi \equiv 0$, получим частное решение

$$\ddot{x}_p(t) + \frac{c}{m} \dot{x}_p(t) + \frac{k}{m} x_p(t) = -\frac{bK_s(t)}{m} s_z^{x_F}. \quad (4.35)$$

Разложив нелинейные члены (4.34) в ряд Тейлора относительно ξ и отбросив члены высшего порядка, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p(t) + \frac{c}{m} \dot{x}_p(t) + \frac{k}{m} x_p(t) + \ddot{\xi}(t) + \frac{c}{m} \dot{\xi}(t) + \frac{k}{m} \xi(t) = \\ = -\frac{bK_s(t)}{m} s_z^{x_F} - \frac{bK_s(t)}{m} x_F s_z^{x_F-1} (\xi(t) - \xi(t - \tau)). \end{aligned} \quad (4.36)$$

С учетом (4.35) и (4.36) получим

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{c}{m} \dot{\xi}(t) + \frac{k}{m} \xi(t) = -\frac{bK_s(t)}{m} x_F s_z^{x_F-1} (\xi(t) - \xi(t - \tau)). \quad (4.37)$$

Далее будем рассматривать уравнение (4.37), так как устойчивость решения $\xi(t) \equiv 0$, гарантирует устойчивость τ -периодического идеального решения $x_p(t)$ уравнения (4.33).

Произведя замену переменных в (4.37)

$$y = (y_1, y_2)^T = (\xi, \dot{\xi})^T,$$

получим эквивалентную систему уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{bx_F s_z^{x_F-1} K_s(t) + k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{bx_F s_z^{x_F-1} K_s(t)}{m} \end{pmatrix} y(t - \tau).$$

При расчетах использовались приведенные выше значения параметров, значения эмпирических коэффициентов были приняты приведенные в [13] $K = 1 \times 10^8 H/m^{1+x_F}$, $x_F = 0.8$.

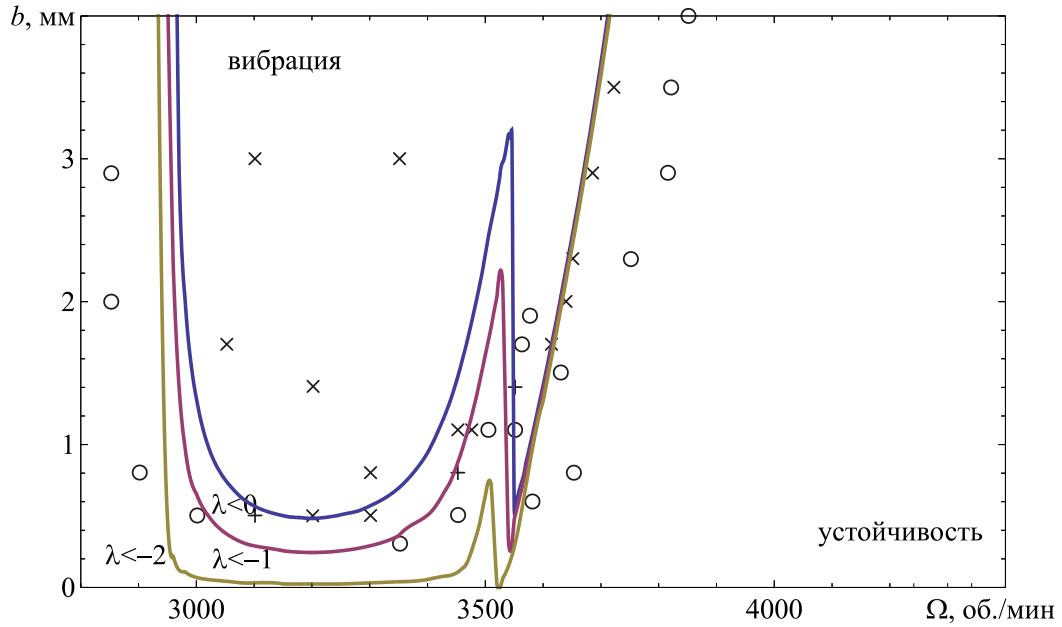


Рис. 4.9. Область устойчивости для встречного фрезерования

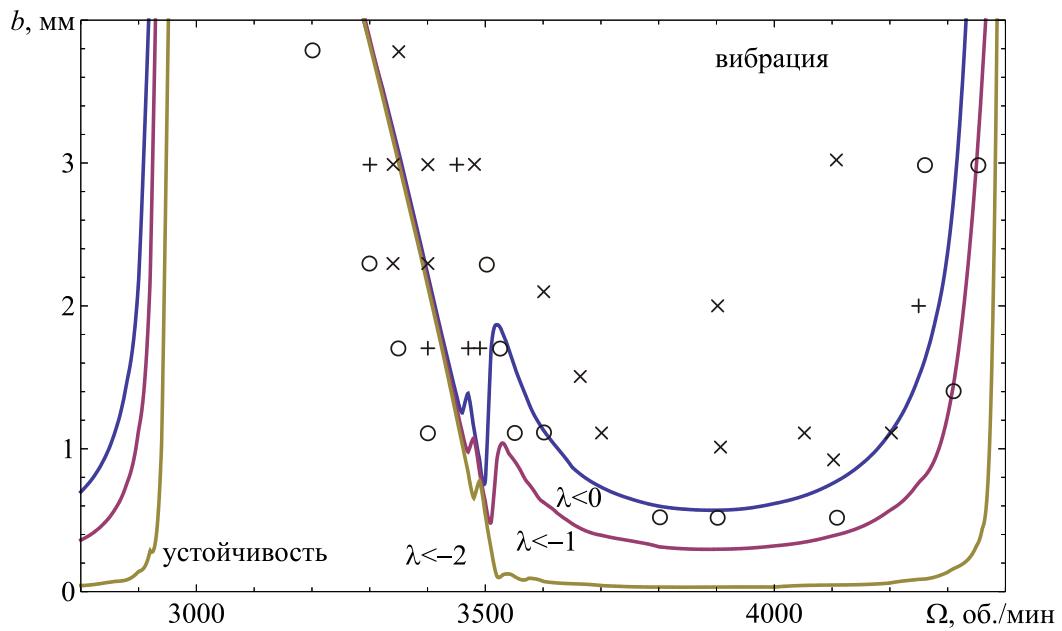


Рис. 4.10. Область устойчивости для попутного фрезерования

На рисунках 4.9 и 4.10 показаны области устойчивой обработки в пространстве параметров b и Ω для встречного и попутного фрезерования соответственно. Сплошными линиями ограничены области устойчивости с

различными верхними оценками максимального показателя Ляпунова. Результаты экспериментальных исследований, полученных в [11] отмечены соответствующими символами («○» – устойчивый режим, «+» – граница, «×» – вибрация).

Из рисунков видно, что рассматриваемая модель, как и предыдущая, позволяет качественно описать процесс фрезерования, при этом нелинейная модель лучше соответствует экспериментальным результатам.

4.4 Модель процесса фрезерования с двумя степенями свободы

В предыдущих подразделах рассматривались модели фрезерной обработки с одной степенью свободы. Такие модели удовлетворительно описывают динамику систем в которых жесткость в направлении y в разы превосходит жесткость в направлении x , однако для общего случая, возникает необходимость рассматривать более реалистичные модели с двумя степенями свободы.

Стандартная механическая модель процесса вертикально-фрезерной обработки с двумя степенями свободы показана на рисунке 4.11. Полагаем, что фреза имеет гибкость в двух направлениях относительно жесткой заготовки. Уравнение движения для этой системы можно записать в виде

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t), \quad (4.38)$$

где

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix}$$

и M , C , K – диагональные матрицы модальных масс, коэффициентов сопротивления, коэффициентов упругости, соответственно.

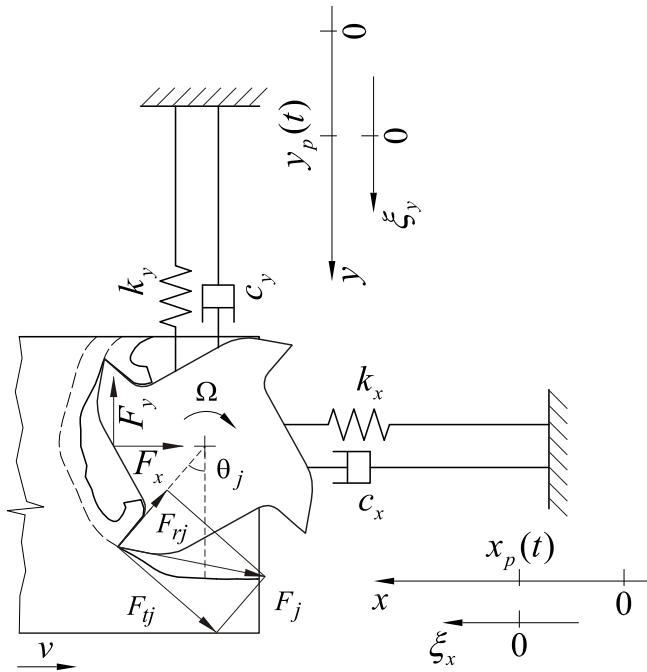


Рис. 4.11. Механическая модель системы

Компоненты режущей силы в направлениях x и y для j -го резца описывается выражениями

$$F_{xj}(t) = g(\theta_j(t))(-F_{tj}(t)\cos\theta_j(t) - F_{rj}(t)\sin\theta_j(t)), \quad (4.39)$$

$$F_{yj}(t) = g(\theta_j(t))(F_{tj}(t)\sin\theta_j(t) - F_{rj}(t)\cos\theta_j(t)). \quad (4.40)$$

Толщина стружки для модели с двумя степенями свободы определяется как

$$h_j(t) = (s_z + x(t) - x(t-\tau))\sin\theta_j(t) + (y(t) - y(t-\tau))\cos\theta_j(t). \quad (4.41)$$

Пусть тангенциальная F_{tj} и радиальная F_{rj} компоненты режущей силы определяются соотношениями (4.18) и (4.19), тогда суммарные силы, действующие на фрезу в направлениях x и y можно представить в виде

$$F_x(t) = b \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t))[-K_t \cos\theta_j(t) - K_r \sin\theta_j(t)]h_j(t), \quad (4.42)$$

$$F_y(t) = b \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t))[K_t \sin\theta_j(t) - K_r \cos\theta_j(t)]h_j(t). \quad (4.43)$$

Используя (4.41) - (4.43), уравнение движения (4.38) можно записать в виде

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = bA(t)[X(t) - X(t-\tau)] + A_0(t), \quad (4.44)$$

где $A(t) = \begin{bmatrix} a_{xx}(t) & a_{xy}(t) \\ a_{yx}(t) & a_{yy}(t) \end{bmatrix}$ – так называемая матрица вариации режущей силы,

$A_0(t) = \begin{bmatrix} a_{0x}(t) \\ a_{0y}(t) \end{bmatrix}$ – вектор стационарной режущей силы, с элементами

$$a_{xx}(t) = \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-K_t \cos \theta_j(t) - K_r \sin \theta_j(t)] \sin \theta_j(t),$$

$$a_{xy}(t) = \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [-K_t \cos \theta_j(t) - K_r \sin \theta_j(t)] \cos \theta_j(t),$$

$$a_{yx}(t) = \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \sin \theta_j(t) - K_r \cos \theta_j(t)] \sin \theta_j(t),$$

$$a_{yy}(t) = \sum_{j=1}^Z g(\theta_j(t)) [K_t \sin \theta_j(t) - K_r \cos \theta_j(t)] \cos \theta_j(t),$$

$$a_{0x}(t) = b s_z a_{xx}(t),$$

$$a_{0y}(t) = b s_z a_{yx}(t).$$

Отметим, что $A(t)$ и $A_0(t)$ являются τ -периодическими.

Представим решение (4.44) в виде

$$X(t) = X_p(t) + E(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

где $X_p(t) = X_p(t + \tau)$ – τ -периодическая функция, соответствующая идеальному движению фрезы, $E(t)$ – возмущения. Подставив (4.45) в (4.44), получим систему уравнений

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = A_0(t), \quad (4.46)$$

$$M\ddot{E}(t) + C\dot{E}(t) + KE(t) = bA(t)[E(t) - E(t - \tau)]. \quad (4.47)$$

Далее будем рассматривать уравнение (4.47), так как устойчивость решения $E(t) \equiv 0$, гарантирует устойчивость τ -периодического идеального решения $X_p(t)$ уравнения (4.46).

Произведя замену переменных в (4.47)

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T = (\xi_x, \xi_y, \dot{\xi}_x, \dot{\xi}_y)^T,$$

получим эквивалентную систему уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & 0 & 1 \\ \frac{ba_{xx}(t) - k_{xx}}{m_{xx}} & \frac{ba_{yy}(t) - k_{yy}}{m_{yy}} & \frac{-c_{xx}}{m_{xx}} & 0 \\ \frac{ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & 0 & 0 & \frac{-c_{yy}}{m_{yy}} \end{pmatrix} z(t) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-ba_{xx}(t)}{m_{xx}} & \frac{-ba_{xy}(t)}{m_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{-ba_{yx}(t)}{m_{yy}} & \frac{-ba_{yy}(t)}{m_{yy}} & 0 & 0 \end{pmatrix} z(t - \tau)$$

Для рассматриваемой системы существуют экспериментальные результаты [117], в которых исследовалась устойчивость процесса резания при различных значениях управляемых параметров b и Ω . Ниже в пространстве этих параметров построены достаточные области устойчивости и области с заданным показателем Ляпунова.

При расчетах использовались значения параметров, экспериментально установленные в [117]: $Z = 1$, диаметр фрезы $D = 8 \text{ мм}$, ширина фрезерования $a = 0.8 \text{ мм}$, $K_t = 237 \times 10^6 \text{ Н/м}^2$, $K_r = 644 \times 10^6 \text{ Н/м}^2$,

$$M = \begin{pmatrix} 0.0199 & 0 \\ 0 & 0.0201 \end{pmatrix} \text{кг}, K = \begin{pmatrix} 4.09 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 4.13 \times 10^5 \end{pmatrix} \text{Н/м}, C = \begin{pmatrix} 1.603 & 0 \\ 0 & 1.557 \end{pmatrix} \text{Н}\cdot\text{с/м}.$$

На рисунке 4.12. показаны области устойчивой обработки в пространстве параметров b и Ω для попутного фрезерования. Сплошными линиями ограничены области устойчивости с различными верхними оценками максимального показателя Ляпунова. Результаты экспериментальных исследований, полученных в [117] отмечены соответствующими символами («○» – устойчивый режим, «+» – граница, «×» – вибрация).

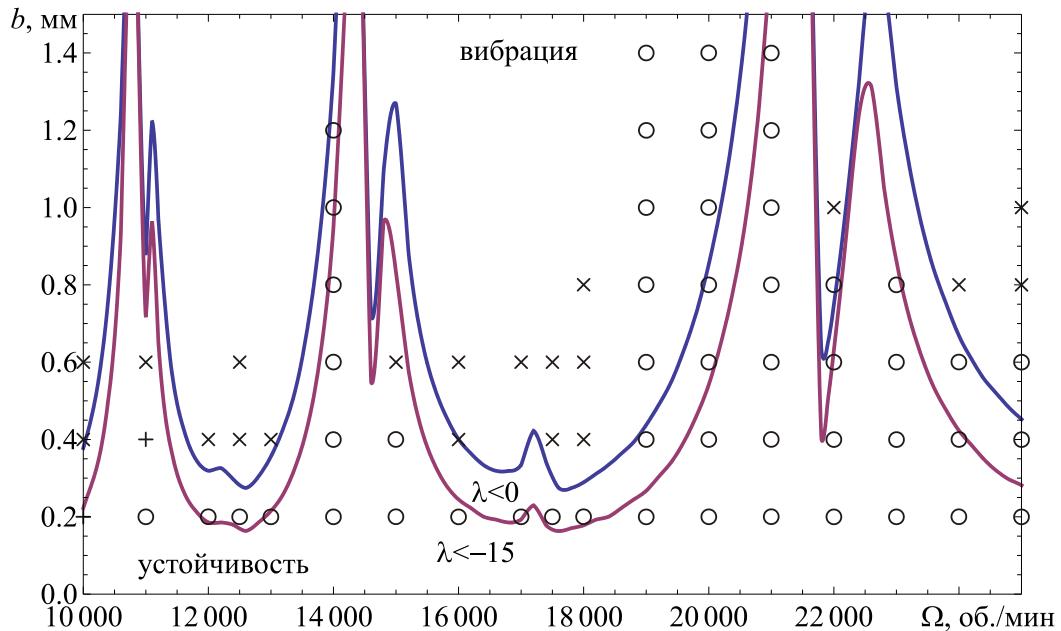


Рис. 4.12. Область устойчивости для попутного фрезерования

Полученные результаты сравнивались с результатами полученными методом «половидискретизации» в [117]. Результаты сравнения приведены на рисунке 4.13, пунктиром показаны области устойчивости полученные в [117].

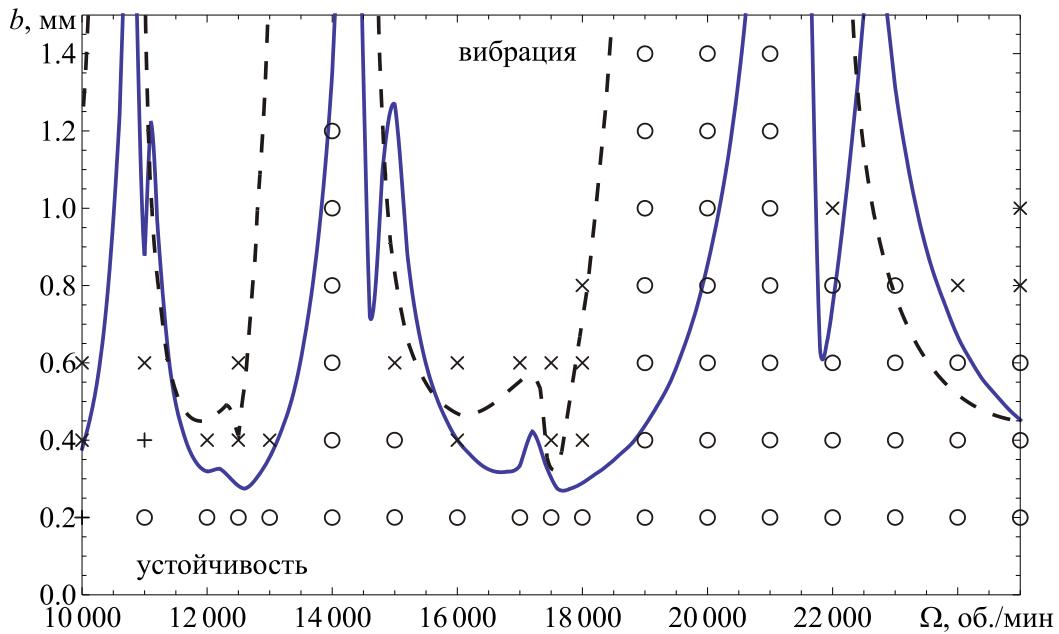


Рис. 4.13. Сравнение результатов теоретических расчетов

Оказалось, что предложенный подход позволяет обнаружить области неустойчивости, которые не были установлены другим методом в [117].

Хорошая согласованность теоретических и экспериментальных результатов говорит о высокой точности предложенного подхода.

Выводы к разделу 4

В разделе 4 установлены следующие основные результаты.

Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости для системы стабилизации перевернутого маятника с учетом запаздывания в обратной связи. Для переменного и постоянного запаздывания, получена оценка величины критического запаздывания, при котором происходит дестабилизация системы. Полученная оценка хорошо согласуется с известным экспериментальным результатом.

Исследована устойчивость процессов резания металлов при вертикально-фрезерной обработке. Найдены режимы устойчивого резания металла для встречного и попутного фрезерования при вертикально-фрезерной обработке. Близость полученных оценок и экспериментальных результатов свидетельствует о хорошей точности предложенного подхода. Полученные результаты могут быть использованы для выбора оптимальных параметров резания металла при составлении программ для фрезерных станков с числовым программным управлением.

Основной публикацией на основе материалов данного раздела является работа [6].

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена разработке новых подходов для анализа устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений содержащих переменное и распределенное запаздывания.

Основные результаты проведенных исследований заключаются в следующем.

1. Предложен новый подход для исследования устойчивости нелинейных систем с запаздыванием основанный на оценках эволюционных операторов системы и позволяющий получать критерии устойчивости выраженные непосредственно через параметры системы.

2. Получена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова и достаточные условия устойчивости системы. Данный результат позволяет установить не только факт устойчивости, но и оценить скорость роста или убывания решений системы.

3. Получена нижняя оценка максимального показателя Ляпунова и достаточные условия неустойчивости системы. Полученные результаты позволяют локализовать область экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров системы.

4. Для некоторых систем получены точное значение максимального показателя Ляпунова и необходимые и достаточные условия устойчивости. Эти результаты могут быть, в частности, использованы для оценки консервативности известных достаточных критериев устойчивости.

5. Предложен простой метод расчета устойчивости, вычислительная сложность которого практически не зависит от порядка системы.

6. Предложен новый подход для анализа устойчивости систем с переключениями, найдена верхняя оценка максимального показателя Ляпунова для произвольного закона переключения. Получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости таких систем.

7. Получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости для системы стабилизации перевернутого маятника с учетом запаздывания в обратной связи. Для переменного и постоянного запаздывания, получена оценка величины критического запаздывания, при котором происходит дестабилизация системы. Полученная оценка хорошо согласуется с известным экспериментальным результатом.

8. Исследована устойчивость процессов резания металлов при вертикально-фрезерной обработке. Найдены режимы устойчивого резания для встречного и попутного фрезерования. Эффективность предложенного подхода проиллюстрирована сравнением с известными экспериментальными и теоретическими результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Показатели экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сб. науч. стат. пам. акд. В.В. Румянцева. –М.: Изд. физ.-мат. лит., 2009. – С. 227–237.
2. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки наибольшего показателя Ляпунова и критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Автоматика и телемеханика. – 2012.– №1. – С.82–91.
3. Пославский С.Ю. Условия устойчивости систем с переключениями / С.Ю. Пославский // Технічна механіка. – 2014. – №3. – С.87-93.
4. Пославский С.Ю. Условия экспоненциальной устойчивости некоторых классов нелинейных систем с переменными и распределенными запаздываниями / С.Ю. Пославский // Вісник Дніпропетровського університету. Серія Механіка. – 2014. – Вип. 15. – Т. 2. – С. 157–171.
5. Пославский С.Ю. Метод расчета устойчивости нелинейных систем с запаздываниями / С.Ю. Пославский // Вестник Харьковского национального университета. – 2014. – №1133. – С. 48-55.
6. Пославский С.Ю. Критерии устойчивости механических систем с запаздыванием / С.Ю. Пославский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2015. – Вип. 24. – С. 232–247.
7. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // IX Крымская Международная математическая школа Метод функций Ляпунова и его приложения: Тез. докл.; Таврический нац. ун-т. –Симферополь, 2008. – С. 65.

8. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с переменным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Моделирование, идентификация, синтез систем управления // Сборник тезисов двенадцатой Международной научно-технической конференции. –Донецк: Изд. Института прикладной математики и механики НАН Украины, 2009. – С. 23.
9. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Тези доповідей Українського математичного конгресу (м. Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009) – 2009. – Режим доступу: <http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Poslavsky.pdf>
10. Пославский С.Ю. Двусторонние оценки максимального показателя Ляпунова и критерии устойчивости нелинейных систем с запаздыванием / С.Ю. Пославский // Х Крымская Международная математическая школа Метод функций Ляпунова и его приложения: Тез. докл.; Таврический нац. ун-т. –Сімферополь: ДІАЙПИ, 2010. – С. 119
11. Зевин А.А., Пославский С.Ю. Критерии экспоненциальной устойчивости нелинейных систем с произвольным запаздыванием / А.А. Зевин, С.Ю. Пославский // Вестник ХНТУ. Вып. 3(42) – Херсон: ХНТУ, 2011. – С. 215–221.
12. Пославский С.Ю. Метод расчета устойчивости систем с переключениями / С.Ю. Пославский // Международная конференция Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): Тез. докл.; Таврический нац. ун-т. –Симферополь, 2012. – С. 15-16.
13. Колмановский В.Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В.Б. Колмановский, В.Р Носов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
14. Kolmanovskii V. B. Introduction to the theory and applications of functional differential equations / V. B. Kolmanovskii, Myshkis A.D. – Dordrecht:

- Kluwer Acad. Publish., 1999. – 648 p.
15. Niculescu S. I. Delay effects on stability / S. I. Niculescu – Berlin: Springer, 2001. – 388 p. – (Lecture notes in control and information sciences; V. 269.).
 16. Gu K. Stability of Time-Delay Systems / K. Gu, V.L. Kharitonov, J. Chen – Boston: Birkhauser, 2005. – 351 p.
 17. Хусаинов Д.Я. Метод функции Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д.Я. Хусаинов, А.В. Шатырко. – К.: Изд-во Киевского университета, 1997, – 236 с.
 18. Хусаинов Д.Я. Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация / Д.Я. Хусаинов, Й. Диблик, М. Ружичкова; Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко. – К: ГП Информ.-аналит. Агенство, 2015. – 252 с.
 19. Ranjan P. Global stability in the presence of distributed communication delays / P .Ranjan, R.J. La, E.H. Abed // Proceeding of American Control Conference, 2005. – V.3. – P. 1823-1828.
 20. Raptis P. Packet Delay Modeling of IEEE 802.11 Wireless LANs / P. Raptis, V. Vitsas, K. Paparrizos, P. Chatzimisios, A.C. Boucouvalas, P. Adamidis // Proceeding of 2nd International CITSA, 2005. – P.71-76.
 21. Cloosterman M. Robust Stability of Networked Control Systems with Time-varying Network-induced Delays / M. Cloosterman, N. van de Wouw, M. Heemels, H. Nijmeijer, // Proceeding of 45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006. – P. 4980-4985.
 22. Gao H. A new delay system approach to network-based control / H. Gao, T. Chen, J. Lam // Automatica. – V. 44. – I. 1. – 2008. – P. 39-52.
 23. Tang Z. A time delay model for load balancing with processor resource constraints / Z. Tang; J.D. Birdwell, J. Chiasson, C.T. Abdallah, M.M. Hayat // Proceeding of 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004. – V. 4. – P. 4193-4198.
 24. Leleve A. Telerobotics over IP networks: Towards a low-level real-time architecture / A. Leleve, P. Fraisse, P. Dauchez, // Proceeding of IEEE/RSJ

- International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2001. –V. 2. – P. 643-648.
25. Wang S. Delays analysis for teleoperation over internet and smith predictor with adaptive time-delay control / S. Wang; B. Xu; Q. Wang // Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2005. – P.664-669.
 26. Ailon A. Asymptotic stability in flexible-joint robots with multiple time delays / A. Ailon // Proceeding of 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. – V.5. – P. 4375- 4380.
 27. Bahrami S. Motion tracking in robotic manipulators in presence of delay in measurements / S. Bahrami, M. Namvar // Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2010. – P.3884-3889.
 28. Richard J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems / J.-P. Richard // Automatica. – 2003. – V. 39. – P. 1667– 1694.
 29. Мышкис А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис // УМН. – 1949. – Т.4. № 5(33). – С 99-141.
 30. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 362 с.
 31. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, Л.Л. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 с.
 32. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом./ Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. – М.:Наука, 1971. – 296 с.
 33. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом./ Л.Э. Эльсгольц. – М.:Наука, 1964. – 127 с.
 34. Hale J.K. Functional differential equations. / J.K. Hale. – New York: Springer, 1971. – 238 p.
 35. Колмановский В.Б. Устойчивость и периодические режимы

- регулируемых систем с последействием. / В.Б. Колмановский, В.Р Носов. – М.: Наука, 1981. –448 с.
36. Колмановский В.Б. Уравнение с последействием и математическое моделирование / В.Б. Колмановский // Соросовский образовательный журнал. – 1996. –№4. – С. 122-127.
 37. Kolmanovskii V.B. Delay effects on stability:A survey / V.B. Kolmanovskii, S.I. Niculescu, K.Gu // Proceeding of 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999. – P. 1993–1998.
 38. Olbrot A.W. A sufficiently large time delay in feedback loop must destroy exponential stability of any decay rate / A.W. Olbrot // IEEE Transactions on Automatic Control. –1984. – V. 29. – P. 367–368.
 39. Abdallah G. Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems / G. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, R. Byrne // Proceeding of American control conference, 1993. – P. 3106–3107.
 40. Goubet A. An extension of stability criteria for linear and nonlinear time delay systems / A. Goubet, M. Dambrine, J.P. Richard // Proceeding of IFAC conference on system structure and control, 1995. – P. 278–283.
 41. Richard J. P. Some trends and tools for the study of time-delay systems / J.P. Richard // Proceeding of 2nd conference IMACS-IEEE on computational engineering in systems applications, 1998. – P. 27–43.
 42. Kharitonov V.L. Robust stability analysis of time delay systems: a survey / V.L. Kharitonov // Annual Reviews in Control. – 1999. – V.23. – P. 185-196.
 43. Hale J.K. Introduction to functional differential equations. Applied Mathematical Sciences. V. 99./ J. K. Hale, S.M. Verduyn-Lunel.– New York: Springer, 1993. – 450 p.
 44. Kolmanovskii V.B. Stability of functional differential equations. / V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov. – London: Academic Press, 1986. – 217 p.
 45. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием / Б.С. Разумихин // Прикладная математика и механика. – 1956. –№ 4. – С. 500-512.

46. Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием / Б.С. Разумихин // Автоматика и телемеханика, – 1960, – Т. 21. – Вып. 6. – С. 740–748.
47. Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием / Б.С. Разумихин // ДАН СССР. – 1966, – Т. 167. – № 6. – С. 1234-1237.
48. Разумихин Б. С. Устойчивость эридитарных систем. / Б.С. Разумихин. – М. : Наука, 1988. – 112 с.
49. Красовский Н.Н. Некоторые задачи устойчивости движения / Н.Н. Красовский. –М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
50. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т.8. – Вып.3. – С. 246–248.
51. Пятницкий Е.С. Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования / Е.С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика. – 1968. – №6. – С. 5-36.
52. Либерзон М.Р. Очерки о теории абсолютной устойчивости / М.Р. Либерзон // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №10. – С. 86-119.
53. Разумихин Б.С. Устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования с запаздыванием // Инженерный сборник. – 1960. – Т.19. – С. 21–29.
54. Попов В.М. Об устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования с запаздывающим аргументом / В.М. Попов, А. Халанай // Автоматика и телемеханика. – 1962.– №7. – С. 849–851.
55. Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. / В. Резван – М.: Наука, 1983. – 358 с.
56. Bliman P.A. Stability criteria for delay systems with sector-bounded nonlinearities / P.A. Bliman // Proceedings of the American Control Conference, 2001. – Р. 402-407.
57. Bliman P.A. Extension of Popov criterion to time-varying nonlinearities:

- LMI, frequential and grafical conditions / P.A. Bliman // Stability and stabilization of nonlinear systems, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., V 246. – London: Springer, 1999. P. 95–114.
58. Bliman P.A. Lyapunov – Krasovskii functionals and frequency domain: delay-independent absolute stability criteria for delay systems / P. A. Bliman // Int. J. Robust and Nonlinear Control. – 2001, –№ 11:8. – P. 771–788.
 59. Bliman P.A. Absolute stability criteria with prescribed decay rate for finite-dimensional and delay systems // Automatica. – 2002. –№ 38:11. –P. 2015–2019.
 60. Park P.G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time invariant delays / P.G. Park // IEEE Trans. Autom. Control. – 1999. – V. 44. – P. 876-878.
 61. Yu L. Stability robustness analysis of linear systems with delayed perturbations / L. Yu // Journal of the Franklin Institute. – 1999. – V. 336. – P. 755-765.
 62. Yu L. Delay-dependent conditions for robust absolute stability of uncertain time-delay systems / L. Yu, Q. Han , S. Yu, J. Gao // Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. – P. 6033-6037.
 63. Громова П.С. Абсолютная устойчивость систем автоматического регулирования с запаздыванием / П.С. Громова, А.Ф. Пелевина // Дифференц. Уравнения. – 1977. –Т. 13. – № 8. – С. 1375–1383.
 64. Леонов Г.А. Об устойчивости в целом фазовых систем с запаздыванием / Г.А. Леонов, А.Н. Чурилов // Проблемы теории периодических движений. – 1977. –С. 65–66.
 65. Абдуллаев А.А. Частотный критерий устойчивости СПС с запаздыванием / А.А. Абдуллаев, Э. М. Джабаров // АиТ. – 1979. –№ 6 – С. 198–205.
 66. Громова П.С. Метод векторных функций Ляпунова для систем с запаздыванием / П. С. Громова, П. М. Лисана// Дифференц. уравнения с отклоняющимся аргументом. – 1979. – № 11. – С. 14–22.

67. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З., Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров / // АиТ, 1991, № 8, 45–55
68. Liberzon M.R. Inner approach for the absolute stability of time-lag dynamical systems / M. R. Liberzon// Proc. Int. Congres. Mathematicians ICM'94, 1994. – P. 795.
69. Чурилова М.Ю. Аналог кругового критерия абсолютной устойчивости для систем с переменным запаздыванием / М.Ю. Чурилова // АиТ. – 1995. – № 2. – С. 52–56.
70. Кайзер К. Алгебраические коэффициентные признаки абсолютной устойчивости линейных разностных систем с непрерывным временем и запаздыванием / К. Кайзер, Д. Г. Кореневский // АиТ. – 1998. – № 1. – С. 22–27.
71. Джури Э.И. Робастная абсолютная устойчивость дискретных систем / Э.И. Джури, К. Премаратне, М.М. Эканайаке // АиТ. – 1999. – № 3. – С. 97–118.
72. Chu T. Guaranteed absolute stability and robustness of a class of delay systems with local sector nonlinearities via piecewise linear Lyapunov function / T. Chu, L. Huang, L. Wang // Proc. Amer. Control Conf., v. 6, 2001. – P. 4212–4217.
73. Guo S. Absolute stability criteria of Lurie-type nonlinear systems with MIMO bounded time-delays / S. Guo, S. Yan, S. Wen // Amer. Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE. – 2003. – V. 116:2. –P. 695–700.
74. He Y. Absolute stability for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities / Y. He, M. Wu // J. Comput. Appl. Math. – 2003. – V. 159:2. – P. 241–248.
75. Lu R. Q. A new absolute stability and stabilization conditions for a class of Lurie uncertain time-delay systems / R.Q. Lu, W. N. Zhou, H. Y. Su, J. Chu // Proc. IEEE Int. Conf. Syst., Man and Cybernetics, 2003. –V. 2. – P. 1916–1921.

76. Альтшуллер Д. Частотные критерии дихотомии и абсолютной устойчивости для интегральных уравнений с квадратичными связями, содержащими запаздывания / Д. Альтшуллер, А.В. Проскуряков, В.А. Якубович // Докл. АН. – 2004. – Т. 399:6. – С. 747–752.
77. Gao J. A delay-dependent criterion for robust absolutely stability of uncertain Lurie type control systems / J. Gao, H. Pan, W. Dai, // Proc. World Congr. Intelligent Control and Automation (WCICA), 2004. – V. 1. – P. 928–930.
78. He Y. Delay-dependent conditions for absolute stability of Lurie control systems with time-varying delay / Y. He, M. Wu // Acta Automatica Sinica. – 2005. – V. 31:3. – P. 475–478.
79. Liu X. Absolute stability of impulsive control systems with time delay / X. Liu, T. K. Lay, Y. Zhang // Nonlinear Analysis, Theory, Methods Appl. – 2005. – V. 62:3. – P. 429–453.
80. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970, – 536 с.
81. Rozhkov V.I. Inequalities for solutions of certain systems of differential equations with large time-lag / V.I. Rozhkov, A.M. Popov // Differ. Equat. – 1971. – V. 7. – P. 271–278.
82. Niculescu S.I. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays / S.I. Niculescu, C. E de Souza, L. Dugard, J.M. Dion // Proceeding of 3rd European control conference, 1995. – P. 1802-1807.
83. Niculescu S.I. Robust exponential stability of a class of uncertain systems with time-varying delays / S.I. Niculescu, C. E de Souza, L. Dugard, J.M. Dion // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1998. – V. 43 (5). – P. 743–748.
84. Zevin A.A. Delay-independent stability conditions for time-varying nonlinear uncertain systems / A.A. Zevin, M.A. Pinsky // IEEE Trans. Automat. Contr. 2006. V. 51 (9). P. 1482–1485.
85. Зевин А.А. Решение обобщенной задачи Лурье для двух классов управляемых систем / А.А. Зевин // Докл. РАН. – 2005. – Т. 403. – №1. –

- C. 25–29.
86. Зевин А.А. Критерии экспоненциальной устойчивости решений нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений с запаздыванием / А.А. Зевин // Докл. РАН. – 2006. – Т. 410. – № 5. – С. 592–595.
 87. Fang L. Optimal control of parallel hybrid electric vehicles based on theory of switched system / L. Fang, S. Qin // Asian Journal of Control. – 2006. – V. 8, – No. 3. – P. 274–280.
 88. Liberzon D. Switched systems. Handbook of Networked and Embedded Control Systems (D. Hristu-Varsakelis and W. S. Levine, Eds.), – Boston: Birkhauser, 2005. – P. 559–574.
 89. Erickson R. W. Fundamentals of Power Electronics. / R.W. Erickson, D. Maksimovic. – Boulder: Kluwer Academic Publishers, 2001. – 912 p.
 90. Hespanha J. Hybrid modeling of TCP congestion control, in Hybrid Systems: Computation and Control / J. Hespanha, S. Bohacek, K. Obraczka, J. Lee // ser. Lect. Notes in Comp. Science. – 2001. – V. 2034, – P. 291–304.
 91. Shorten R. Analysis and design of AIMD congestion control algorithms in communication networks / R. Shorten, D. Leith, J. Foy, R. Kildu // Automatica. – 2005. – V. 41. – P. 725–730.
 92. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. / Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1967. – 224 с.
 93. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. / С.В. Емельянов – М.: Наука, 1967. – 336 с.
 94. Мартынюк А.А. Об устойчивости систем с развивающимися возмущениями / А.А. Мартынюк // Доклады АН УССР, Сер.А. – 1975. – №7. – С. 613–616.
 95. Мартынюк А.А. Анализ устойчивости непрерывных систем со структурными возмущениями / А.А. Мартынюк // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. – № 7. – С. 25–52.
 96. Филиппов А.Ф. Условия устойчивости однородных систем с

- произвольными переключениями режимов / А.Ф. Филиппов // Автоматика и телемеханика. – 1980. – № 8. – С.48–55.
97. Lin H. Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results / H. Lin, P.J. Antsaklis // IEEE Trans. Automat. Control. – 2009. – V. 54. – P. 308– 322.
 98. Васильев С.Н. О некоторых результатах по устойчивости переключаемых и гибридных систем / С. Н. Васильев, А. И. Маликов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань, Фолиант. – 2011. – Т.1. – С. 23–81.
 99. Zevin A.A. General Solution of Stability Problem for Plane Linear Switched Systems and Differential Inclusions / A.A. Zevin, M.A. Pinsky // IEEE Trans. Automat. Control. – 2008. – V. 53. – P. 2149–2153.
 100. Bo H. Stability analysis for a class of nonlinear switched system / H. Bo, X. Xuping, A.N. Michel, P.J Antsaklis // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. – 1999. – V.5. – P. 4374–4379.
 101. Cheres E. Quantitative measures of robustness for systems including delayed perturbations / E. Cheres, Z. J. Palmor, S. Gutman // IEEE Trans. Autom. Control. – 1989. –V. 34. – № 11. – P. 1203-1205.
 102. Wu H. Robust stability criteria for dynamical systems including delayed perturbations / H. Wu, K. Mizukami // IEEE Trans. Autom. Control. – 1995. – V. 40. – №3. – P. 487-490.
 103. Hou C. Stability criterion for linear systems with nonlinear delayed perturbations / C. Hou, F. Gao, J. Qian // J. Math. Anal. Appl., – 1999. – V. 237. – P. 573-582.
 104. Беллман Р. Введение в теорию матриц. / Р. Беллман. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
 105. Kolmanovskii V.B., Richard J.-P. Stability of some linear systems with delay / V.B. Kolmanovskii, J.-P. Richard // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1999. – V. 44 (5). – P. 984–989.
 106. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. –

576 с.

107. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
108. Формальский Ф.М. Управление движением неустойчивых объектов./ Ф.М. Формальский. – М.:Физматлит, 2012. – 232 с.
109. IP-02 self-erecting, linear motion inverted pendulum. User's guide. [Electronic resource]; Quanser Consulting Inc.– 1996. – Available from : www.quanser.com.
110. Landry M. Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback Control / M. Landry, S.A. Campbell, K. Morris, C.O. Aguilar // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. – 2005, V. 4, N. 2. – P. 333–351.
111. Кудинов В.А. Теория вибрации при резании. / В.А. Кудинов // Передовая технология машиностроения. – М: АН СССР, 1955. – С.37–42.
112. Тлустый И. Автоколебания в металлорежущих станках / И. Тлустый; пер. с чешск. – М.: Машгиз, 1956. – 396с.
113. Tobias S.A. The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions / S.A. Tobias, W. Fishwick // Transactions of ASME. – 1958. – V. 80. – P. 1079–1088.
114. Mann B.P. Stability of up-milling and down-milling, Part 2: Experimental verification / B.P. Mann, T. Insperger, P.V. Bayly, G. Stépán // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2003, – V. 43. – P. 35–40.
115. Tlusty J. Manufacturing processes and equipment / J. Tlusty. – NJ: Prentice Hall, 1999. – 928 p.
116. Halley J.E. Stability of Low Radial Immersion Milling / J.E. Halley. – W: Washington University, 2000. – 160 p.
117. Insperger T. Machine tool chatter and surface location error in milling processes / T. Insperger, J. Gradisek, M. Kalveram, G. Stepan, K. Winert, E. Govekar // Journal of Manufacturing Science and Engineering. – 2006, – V. 128. – P. 913–920.