

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

На правах рукопису

СЕМЕНОВИЧ КАТЕРИНА ОЛЕКСІЙВНА

УДК 532.595

**НЕЛІНІЙНІ МЕХАНІЗМИ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ЕНЕРГІЇ В СИСТЕМІ
РЕЗЕРВУАР – РІДИНА НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ**

01.02.01 – теоретична механіка

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Лимарченко Олег Степанович,
доктор технічних наук, професор

КИЇВ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ПІДХОДІВ ТА МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРІВ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ, ПРИ КУТОВИХ РУХАХ	12
Висновки до розділу 1	23
РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРУ З РІДИНОЮ НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ ПРИ КУТОВИХ РУХАХ СИСТЕМИ	24
2.1. Варіаційна постановка задачі	27
2.2. Побудова розкладів шуканих величин.....	32
2.3. Виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні	34
2.4. Побудова дискретної моделі	37
Висновки до розділу 2	40
РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ СУМІСНОГО РУХУ СИСТЕМИ РЕЗЕРВУАР – РІДИНА НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ	41
3.1. Початкове кінематичне збурення системи	43
3.1.1. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:10	44
3.1.2. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:4	50
3.1.3. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:2	53
3.2. Імпульсне моментне збудження руху резервуару з рідиною	56
3.3. Сумісний рух системи під дією зовнішнього гармонічного навантаження	61
3.3.1. Визначення частот сумісного руху системи	61

3.3.2. Резонансні властивості системи	63
3.3.3. Виникнення внутрішніх резонансів	69
Висновки до розділу 3	75
РОЗДІЛ 4. МЕХАНІЧНІ ЕФЕКТИ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ СУМІСНОМУ КУТОВОМУ РУСІ СИСТЕМИ	76
4.1. Залежність динаміки системи від довжини маятникового підвісу ...	77
4.1.1. Класифікація діапазонів довжин підвісу за характером руху системи	77
4.1.2. Динамічна взаємодія рідини з резервуаром	85
4.2. Перерозподіл енергії між різними формами руху в системі	90
4.3. Порівняння чисельних результатів з лабораторним експериментом	102
Висновки до розділу 4	104
ВИСНОВКИ	106
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	108

ВСТУП

Задачі про нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі почали привертати увагу дослідників ще у 50-х роках ХХ століття, оскільки моделі таких систем широко застосовуються в ракетній техніці, для забезпечення стійкості конструкцій при вибухових хвилях, при розрахунку висотних споруд. На початкових етапах розвитку цієї галузі можна виділити два основні типи задач, яким приділяли найбільшу увагу:

- загальна постановка і формулювання задач динаміки тіл з рідиною;
- коливання рідини у випадку нерухомого резервуару і резервуару, що рухається поступально за заданим законом.

Розробка методів розв'язання задач руху тіл з рідиною була предметом уваги багатьох дослідників. Ключову роль у розвитку цієї галузі механіки зіграли: Г.С. Наріманов, Л.В. Докучаєв, В.В. Румянцев, Б.І. Рабинович, В.Д. Кубенко, І.О. Луковський, М.М. Мойсеєв, Р.Ф. Ганієв, Дж. Майлз, О.М. Фалтінсен, М. Ля Рокка, О.С. Лимарченко, П.С. Ковальчук та інші.

Зокрема, в роботах Г.С. Наріманова, Л.В. Докучаєва, В.В. Румянцева, Б.І. Рабиновича, В.Д. Кубенка, І.О. Луковського були представлені основні аналітичні формулювання задач кутового руху резервуару з рідиною. Задачі динаміки твердого тіла з рідиною в лінійній постановці були сформульовані в роботі Г. Бауера. Нелінійну постановку такої задачі здійснили І.О. Луковський, В.В. Румянцев. В своїх роботах І.О. Луковський побудував динамічну модель руху резервуару, навів коефіцієнти розв'язуючої системи рівнянь. Задачі кутового руху резервуара було реалізовано в роботах М. Ля Рокка, Ж.-П. Шортіно, П.С. Ковальчука для випадку заданого руху резервуару в околі парціальних частот системи. Явище зародження кругової хвилі на поверхні рідини при кутовому русі резервуара було предметом досліджень в роботах Б.П. Ковальчука.

Як показує аналіз літературних джерел, на даний час в недостатній мірі досліджено задачі динаміки системи при кутових рухах резервуару в сумісній постановці.

Актуальність. Конструкції, до складу яких входять баки з рідиною, зустрічаються у хімічній промисловості, при транспортуванні, зокрема, при перевезенні баків з рідиною на кораблях, у нафтovidобувній галузі, в літакобудуванні тощо. Як відомо, велику цікавість з практичної точки зору являє випадок, коли рідина заповнює резервуар не повністю, або ж заповненість змінюється в процесі експлуатації. Зокрема, така задача має екологічний аспект; як приклад можна навести спосіб зберігання рідких радіоактивних відходів, що утворюються в процесі експлуатації атомних електростанцій, в частково заповнених контейнерах. Якщо маса рідини є значною у порівнянні з масою резервуару, коливання на вільній поверхні, що виникають в процесі експлуатації конструкцій, породжують значні сили тиску на стінки баку і можуть привести до небажаних наслідків, як то втрата стійкості конструкції, руйнування резервуару тощо. Тому важливою є розробка надійної моделі динаміки таких систем, яка дасть можливість передбачити небажані режими експлуатації.

Вивчення кутових рухів резервуару, частково заповненого рідиною, має широке коло застосувань. Зокрема, при транспортуванні рідин на кораблях резервуари зазнають кутових коливань внаслідок качки. Задачі кутового руху резервуарів з рідиною представляють особливий інтерес у сумісній постановці. Це обумовлено тим, що на практиці виникають ситуації, коли резервуар з рідиною зазнає зовнішнього впливу і потрібно передбачити, якою буде динаміка системи. Поведінка системи в сумісному русі істотно відрізняється від випадку заданого руху резервуару, зокрема змінюються резонансні режими, виникають внутрішні резонанси, виявити які без врахування фактору сумісності неможливо.

Об'єктом дослідження даної роботи є динаміка механічної системи, що складається з циліндричного резервуара на маятниковому підвісі та рідини з вільною поверхнею. Резервуар є абсолютно твердим, рідина – ідеальною, однорідною та нестисливою.

Предметом дослідження роботи є особливості динаміки системи резервуар – рідина з вільною поверхнею в сумісному русі при імпульсному та вібраційному навантаженні та кінематичному збуренні руху в залежності від довжини підвісу, перерозподіл енергії між різними формами руху в системі.

Методи дослідження. В роботі використано варіаційне формулювання та алгоритми розв'язання задачі. Модель системи побудовано на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Застосовано концепцію розділення рухів. Для переходу від континуальної моделі до дискретної використано метод модальної декомпозиції. Чисельні результати одержані завдяки використанню чисельних методів та засобів графічного представлення даних.

Головна мета дисертаційної роботи:

- дослідити особливості поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі при імпульсному і вібраційному навантаженні в залежності від довжин підвісу;
- вивчити нелінійні механізми перерозподілу енергії в сумісному русі системи.

Основні завдання, які необхідно було вирішити для досягнення поставленої мети:

- Розробити модель і засоби аналізу енергообміну.
- Дослідити закономірності розвитку динамічних процесів в системі.
- Провести аналіз перерозподілу енергії між формами коливань рідини та між різними формами руху в системі.

- На основі лабораторного досліду виконати аналіз достовірності одержаних результатів на якісному рівні.

Наукова новизна отриманих в дисертаційній роботі результатів полягає у тому, що:

- Досліджено задачу про коливання резервуару з рідиною на маятниковому підвісі в сумісній постановці при кінематичному збуренні і під дією імпульсного і вібраційного навантаження.
- Досліджено зміну власних частот системи з урахуванням фактору сумісності руху в залежності від довжини маятникового підвісу; показано, що для коротких підвісів може відбуватись зміна черговості розташування частот коливань в порівнянні з розташуванням парціальних; вказано наявність внутрішніх резонансів в системі і досліджено прояв внутрішнього резонансу між першими антисиметричною та осесиметричною формами коливань рідини.
- Встановлено особливості перерозподілу енергії між формами коливань рідини та ступінь прояву нелінійних механізмів в залежності від довжин підвісу і показано відмінність від випадку поступального руху резервуару.
- Досліджено перерозподіл енергії між різними формами руху в системі резервуар – рідина з урахуванням узагальненої дисипації енергії коливань рідини.
- Проведено порівняння одержаних результатів на якісному рівні з лабораторним експериментом, в якому продемонстровано ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху в системі.

Достовірність отриманих результатів забезпечується:

- використанням варіаційного формулування та алгоритмів розв'язання задачі;

- проведенням контролю виконання законів симетрії та збереження енергії;
- порівнянням отриманих результатів на якісному рівні з лабораторним експериментом та експериментами, виконаними іншими авторами.

Практична цінність отриманих результатів. В дисертаційній роботі були розроблені методи динамічного обмеження коливань резервуару на маятниковому підвісі шляхом вибору довжин підвісу і створення умов для цілеспрямованого енергообміну між формами коливань рідини. Одержані результати можуть знайти застосування при розробці заходів вібро- і сейсмозахисту конструкцій з рідиною.

Дисертацію виконано в рамках держбюджетних науково-дослідних тем №11БФ038-04 «Варіаційні та асимптотичні методи в задачах механіки суцільних середовищ» (2012–2013 pp., № держреєстрації 0111U004956), №14БП038-01 «Конструктивні методи дослідження сучасних задач механіки суцільних середовищ, орієнтованих на застосування в техніці і медицині» (2014–2015 pp., № держреєстрації 0114U003473) науково-дослідної частини механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок дисертанта. Представлені до захисту результати були отримані здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві з науковим керівником роботах дисертанту належить дослідження загальних закономірностей і особливостей розвитку динамічних процесів в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі, аналіз специфіки енергообміну між формами коливань рідини та між формами руху в системі, аналіз чисельних прикладів.

О.В. Константінову належить аналіз спектральних характеристик задачі про рух резервуару з рідиною під дією вібраційного навантаження, дослідження задачі про параметричні коливання резервуару з рідиною;

Ю.О. Крамаренко належить порівняння результатів у випадках сумісного і заданого руху резервуару з рідиною; науковому керівнику О.С. Лимарченку належить постановка задачі, ідея методу та участь в систематизації одержаних результатів.

Апробація роботи. Наукові та практичні результати дисертаційної роботи були розглянуті на семінарах та конференціях.

Основні результати за темою дисертації були представлені та обговорювались на наступних конференціях:

- Сучасні математичні методи досліджень в механіці, Київ, 8–11 жовтня 2012 р.;
- International Workshop “Hydrodynamics of Moving Objects”, Інститут математики НАНУ, Київ, 17–19 квітня 2013 р.;
- Міжнародна конференція “Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування”, Інститут математики НАНУ, Київ, 19–23 серпня 2013 р.;
- Міжнародна наукова конференція «Варіаційні методи механіки», КНУ імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, Київ, 23–25 вересня 2013 р.;
- III Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки», КНУ імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет, Київ, 27–29 серпня 2015 р.;
- Науково-технічна конференція «Мікро- та нанонеоднорідні матеріали: моделі та експеримент», Львів, 22–24 вересня 2015 р.

У повному обсязі робота доповідалась і була підтримана на наступних семінарах:

- семінарі кафедри механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка під керівництвом професора О.С. Лимарченка (2015);

- об'єднаному семінарі кафедр теоретичної та прикладної механіки і механіки суцільних середовищ механіко-математичного факультету КНУ імені Тараса Шевченка під керівництвом професора Я.О. Жука (2015);
- семінарі відділів диференціальних рівнянь та теорії коливань і аналітичної механіки Інституту математики НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора А.М. Самойленка (2015);
- семінарі відділу стійкості процесів Інституту механіки НАН України під керівництвом академіка НАН України, професора А.А. Мартинюка (2015);
- семінарі секції за напрямком «Динаміка та стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка НАН України В.Д. Кубенка (2015).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 наукових праць, серед них 7 статей [15, 33–35, 66, 67, 69] у фахових наукових виданнях, затверджених МОН України (стаття [35] – у науковому журналі, який має міжнародний імпакт-фактор). За результатами дисертації також опубліковано 3 статті [65, 68, 88] у збірниках матеріалів наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається з вступу, 4 розділів, які містять 85 рисунків та 5 таблиць, висновків та списку використаних літературних джерел із 104 найменувань на 12 сторінках. Загальний обсяг дисертації складає 119 сторінок.

У **вступі** обґрунтовано вибір теми для дослідження, сформульовано основну мету і задачі роботи, окреслено актуальність обраної теми та наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, наведено перелік публікацій з теми дисертаційної роботи та дані про апробацію результатів на конференціях та семінарах.

Розділ 1 являє собою огляд літературних джерел з тематики дисертації, аналіз підходів та методів розв'язання задач нелінійної динаміки резервуарів з рідиною при кутових рухах резервуару і містить обґрунтування вибору методів розв'язання задачі, що розглядається.

В розділі 2 описано побудову математичної моделі руху резервуару на маятниковому підвісі, частково заповненого рідиною. Охарактеризовано складності, що виникають внаслідок наявності кінематичної граничної умови на вільній поверхні, та методики виключення цієї граничної умови. Виконано перехід від континуальної до дискретної моделі механічної системи та аналітично отримано розв'язуючу систему рівнянь мінімальної розмірності.

В розділі 3 подано аналіз чисельних результатів, отриманих при розв'язанні задач про рух системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішнього імпульсного та періодичного моментного навантаження, а також у випадку початкового кінематичного збурення руху.

Розділ 4 присвячено механічним ефектам, що виникають в сумісному русі системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі. Проаналізовано залежність динаміки системи від довжини маятникового підвісу та механізми перерозподілу енергії в системі між різними формами руху. Проведено порівняння отриманих чисельних даних з лабораторним експериментом, яке показало добре узгодження результатів на якісному рівні.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому керівнику Олегу Степановичу Лимарченку за постановку задачі, незамінні поради по систематизації результатів та постійну увагу до роботи; співавторам Олександру Володимировичу Константінову та Юлії Олександрівні Крамаренко за плідну співпрацю і участь у підготовці спільних публікацій за результатами досліджень; викладачам кафедри механіки суцільних середовищ Київського національного університету за слушні зауваження і поради по ходу виконання та оформлення дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ПІДХОДІВ ТА МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРІВ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ, ПРИ КУТОВИХ РУХАХ

В цьому розділі наведено огляд літературних джерел, присвячених задачам нелінійної динаміки циліндричних резервуарів з рідиною, зокрема, при кутових рухах резервуару, проведено аналіз розроблених підходів та методів розв'язання таких задач та огляд експериментальних результатів.

Задачі руху резервуарів з рідиною, яка має вільну поверхню, обумовлені практичними потребами таких галузей науки та промисловості, як транспортування рідких вантажів, палива, літакобудування, космічна галузь, будівництво тощо. Інтерес дослідників до задач руху тіл з рідиною не згасає впродовж більш як півстоліття. Багато вчених присвятили свою роботу дослідження коливань рідини з вільною поверхнею, серед них: Г.С. Наріманов, Л.В. Докучаєв, В.В. Румянцев, В.П. Шмаков, Г.Н. Мікішев, Б.І. Рабинович, В.Д. Кубенко, І.О. Луковський, М.М. Мойсеєв, Р.Ф. Ганієв, Дж.В. Майлз, Н. Абрамсон, Ф. Додж, Г. Бауер, О.М. Фалтінсен, М. Ля Рокка, Ж.П. Шортіно, О.С. Лимарченко, П.С. Ковальчук. Найбільш повний огляд сучасного стану досліджень в галузі задач руху тіл з рідиною, що має вільну поверхню, можна знайти в оглядових роботах та монографіях [48, 80, 86, 87, 93].

Загалом, розроблені на сьогодні методи дослідження задач динаміки тіл з рідиною можна поділити на три групи:

- аналітичні методи;
- чисельні методи;
- чисельно-аналітичні методи (з використанням підходу модальної декомпозиції).

Методи першої групи дають змогу отримати точний аналітичний розв'язок, але вони придатні лише для невеликої групи задач. Аналітичні розв'язки можливо отримати лише в окремих випадках з резервуарами канонічної форми. У випадку складної геометрії доводиться застосовувати методи другої або третьої групи.

Чисельні методи є найбільш широко застосовними, але їхній основний недолік полягає в неможливості розробити на їх основі загальні рекомендації щодо експлуатації механічних конструкцій. Для чисельного моделювання задач руху конструкцій з рідиною використовуються такі сіткові методи, як метод скінчених різниць, метод скінчених об'ємів, метод граничних елементів, метод скінчених елементів. Останні розробки в галузі методів скінчених елементів та граничних елементів сприяли вивчення руху рідини з вільною поверхнею в резервуарах канонічної форми та у випадку складної геометрії баків [87]. Недолік сіткових методів полягає в тому, що їх точність залежить від побудови сітки, а для задач зі складною геометрією та рухомими границями ця задача стає надто громіздкою та затратною за часом. Безсіткові методи, такі як метод згладжених частинок, метод дифузних елементів, дозволяють уникнути проблем, пов'язаних з побудовою сіток. Як показано в [80], навіть враховуючи доступні на сьогодні обчислювальні потужності комп'ютерів, задача чисельного моделювання неперіодичних рухів на вільній поверхні рідини є складною, адже для отримання достовірного результату необхідно врахувати нелінійну природу системи. Потрібно зазначити, що нові теоретичні та експериментальні роботи останніх років (зокрема, [8, 82]) спростили існування періодичних режимів сумісного руху в системі резервуар – рідина з частковим заповненням як таких.

Методи третього типу в певному сенсі суміщають переваги чисельних та аналітичних підходів. Ці методи дозволяють звести вивчення динаміки континуальної системи до розв'язання системи зі скінченної кількості

звичайних диференціальних рівнянь, для чого існує широкий арсенал добре розроблених чисельних методів. Варто відзначити, що саме такі підходи показали високу ефективність у застосуванні до баків зі складною геометрією. Для розв'язання поставленої задачі в даній дисертаційній роботі було застосовано один з методів цієї групи.

Поряд з теоретичними дослідженнями було проведено значну кількість експериментів. Ранні експериментальні дослідження [49–51, 73] проводились переважно в діапазонах збурень, що відповідали лінійній теорії, і дали змогу провести порівняння та уточнення розроблених на той час теоретичних результатів. Зокрема, було виявлено значні неточності в теоретичних виразах для дисипації у порівнянні з експериментальними даними. Пізніше було проведено також експерименти в нелінійному діапазоні та виявлено низку нелінійних ефектів в динаміці системи резервуар – рідина, найважливішими серед яких є залежність частоти коливань на вільній поверхні від амплітуд, взаємозалежність форм коливань, наявність супергармонік в складових сил тиску рідини на стінки резервуару [93].

Варто зазначити, що експериментальні дослідження проводяться переважно для прямокутних та призматичних баків. Зокрема, в роботах [81, 83, 101, 90] приведено результати експериментальних досліджень руху рідини з вільною поверхнею в частково заповненому призматичному контейнері, який зазнає зовнішнього збурення. В роботі [83] досліджено амплітуди коливань рідини на вільній поверхні в так званому стійкому стані і в переходному процесі в просторовому русі в баку з квадратною основою і вертикальними стінками. Рух резервуару збуджується бічною силою з частотами, близькими до найнижчої власної частоти системи, резервуар виконує кутові рухи. Як показують результати проведених авторами експериментів, система не виходить на усталений режим руху, як в дорезонансній, так і в зарезонансній областях. В другому випадку

спостерігається суттєва модуляція коливань. Хоча результати таких досліджень не можна кількісно і в повній мірі порівнювати з задачею руху циліндричного резервуару внаслідок відмінностей геометрії баків, тим не менше, вони дають можливість відстежити спільні тенденції та особливості динаміки системи принаймні на якісному рівні і оцінити працевздатність побудованої теоретичної моделі.

Лінійні моделі руху резервуарів, частково заповнених рідиною, є важливим етапом розвитку теорії нелінійної динаміки тіл з рідиною. Перш за все, лінеаризовані моделі дозволили визначити частоти та форми коливань рідини [4, 6, 27, 41, 50, 56, 72]. К.В. Лондон в роботі [94] аналізував випадок багатокомпонентної моделі у застосуванні до космічного супутника "Тріана". Лінійну задачу руху вільної поверхні рідини розглянув в своїх роботах [96, 97] Дж.В. Майлз. В роботах К.С. Колеснікова [12, 13], Г.Н. Мікішева та Б.І. Рабіновіча [49] було проведене порівняння руху рідини в резервуарі при частковому заповненні з випадком руху системи із "затверділою" рідиною для оцінки впливу рідини на рух резервуару. Як буде показано далі, лінійна задача є початковою фазою при розв'язанні задачі в нелінійній постановці чисельно-аналітичними методами з використанням методу модальної декомпозиції для переходу до дискретної моделі механічної системи. Лінійна задача динаміки резервуару, частково заповненого рідиною, при кутових рухах резервуару була докладно розглянута в роботах [1, 13, 75]. В монографії [73] було розглянуто задачі руху рідини з вільною поверхнею, що виникають в аерокосмічній галузі. Розв'язання задач також проводилось переважно в рамках лінійної теорії. Монографія містить аналітичні та експериментальні дослідження динаміки рідини з вільною поверхнею, поведінки рідкого палива при низькій і нульової гравітації, задачі з вертикальним збуренням руху резервуарів тощо. В лінійній постановці були отримані аналітичні розв'язки для випадків канонічної

форми резервуару (зокрема, для кругового циліндра, паралелепіпеда, конуса). Також варто зазначити, що дослідження динаміки баків з конструктивними елементами були проведені наразі лише на основі лінійної теорії [87]. Лінійна теорія має широке застосування, але, на жаль, не дозволяє описати широкий спектр механічних ефектів, які спостерігаються на практиці (наприклад, характерну для нелінійних процесів залежність частоти від амплітуди, несиметричність профілю хвилі, тощо), оскільки лінеаризація повністю виключає їх з розгляду.

Постановки задач кутового руху тіл з порожнинами, частково заповненими рідиною, були запропоновані в роботах вчених В.В. Румянцева, Г.С. Наріманова, І.О. Луковського, Л.В. Докучаєва, Б.І. Рабиновича [9, 62, 61]. Загальні теоретичні методи дослідження нелінійної динаміки тіл з рідиною були розроблені та розвинуті М.М. Мойсеєвим, В.В. Румянцевим [55, 63], Дж. В. Майлзом [99], Г.С. Нарімановим, І.О. Луковським, Л.В. Докучаєвим [61]. Найбільш потужним підходом до розв'язання цього класу задач на сьогодні вважається варіаційний метод на основі класичного варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського, який був запропонований та розвинений в роботах М.М. Мойсеєва, І.О. Луковського, В.В. Румянцева, О.С. Лимарченка, П.С. Ковальчука, В.Д. Кубенка та інших.

Метод розв'язання нелінійної задачі коливання рідини з вільною поверхнею в циліндричному резервуарі був вперше запропонований Г.С. Нарімановим в роботах [58–60]. Розроблений ним підхід базувався на використанні положень теорії збурень, за малий параметр було прийнято відхилення від положення рівноваги вільної поверхні ξ . Подальша реалізація методу ґрунтуються на ідеї знсення збуреної вільної поверхні рідини на незбурену із застосуванням рядів Тейлора. Потрібно підкреслити, що Г.С. Наріманов першим наголосив на необхідності включення до розгляду значної кількості форм коливань вільної поверхні

рідини для вивчення нелінійної задачі в повному обсязі. Результати, отримані Г.С. Нарімановим, були розвинуті в роботах Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського [36, 37, 61], Р.Ф. Ганієва [7]. Зокрема, в публікаціях [10, 43] були отримані рівняння руху резервуару з рідиною для випадку довільного руху резервуару, включаючи кутовий рух.

Застосовуючи методи теорії збурень, М.М. Мойсеєв в роботі [57] розробив аналітичний алгоритм побудови періодичного розв'язку нелінійної задачі руху рідини в резервуарі, що рухається за наперед заданим законом горизонтально, а також у випадку кутового руху з малою амплітудою з частотою зовнішнього навантаження, близькою до головної резонансної частоти системи. Пізніше Дж.В. Майлзом, І.О. Луковським, О.С. Лимарченком в роботах [17–19, 39, 99] були запропоновані варіаційні методи та алгоритми розв'язання задач динаміки тіла, частково заповненого рідиною. Основні відомості стосовно математичних методів, які використовуються для розв'язання задач руху тіл з рідиною (теорія коливань, асимптотичні методи, варіаційні методи тощо), можна знайти в роботах [2, 3, 52–54, 102].

Варто зазначити, що сумісне використання варіаційного підходу з методами теорії збурень призвело до якісно нових результатів досліджень. В основі підходу, запропонованого Дж.В. Майлзом та І.О. Луковським в роботах [43, 99], лежить використання варіаційного принципу Бейтмена. В роботі [93] показано еквівалентність цього варіаційного алгоритму та підходу, запропонованому та розробленому, зокрема, в роботах О.С. Лимарченка, який ґрунтується на застосуванні варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. Нелінійна задача довільного руху резервуару з рідиною, яка має вільну поверхню, була детально розглянута в роботах І.О. Луковського та А.М. Пількевича [42], які розробили дискретну модель механічної системи і побудували вирази для коефіцієнтів розв'язуючої системи рівнянь.

I.O. Луковський розвинув метод Г.С. Наріманова та розробив методику розв'язання задач руху тіл з рідиною на основі варіаційного підходу. В роботі [44] можна знайти огляд підходів з використанням варіаційних методів у застосуванні до нелінійних задач динаміки тіл з рідиною, що має вільну поверхню. Зокрема, роботу [38] присвячено розгляду задачі просторового нелінійного руху рідини в прямому круговому циліндрі. В монографії [48] наводиться опис розроблених академіком I.O. Луковським моделей нелінійної динаміки тіл з рідиною, також розглядаються задачі вимушених коливань резервуару з рідиною, методики побудови періодичних розв'язків задачі та коротко розглядається можливість вивчення неусталених коливань за допомогою побудованої математичної моделі. В роботах [46–48] проведено побудову рівнянь руху систем на основі семимодової та дев'ятимодової моделей та визначено параметри силової взаємодії рідини з резервуаром. Аналіз багатомодових моделей динаміки рідини з вільною поверхнею проведено в оглядовій роботі I.O. Луковського та О.М. Тимохи [95].

О.С. Лимарченком був розроблений прямий метод на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського [20, 21] та побудовано нелінійну математичну модель динаміки рідини з вільною поверхнею, придатну для дослідження теоретичних та інженерних задач в діапазоні істотного прояву нелінійних ефектів. Запропонований підхід виявився ефективним у застосуванні до задач сумісного руху таких систем, для імпульсних навантажень високої інтенсивності, коли необхідно моделювати систему з використанням досить великої кількості форм коливань рідини. В роботах [22–26, 28–32] було розглянуто особливості нелінійної динаміки резервуарів з рідиною та доведено до чисельного розв'язку широку групу задач, зокрема, для резервуарів складної геометрії. Побудована О.С. Лимарченком математична модель з урахуванням величин до третього порядку малості та алгоритм розв'язання дозволяють

вивчати просторовий рух резервуарів з рідиною, яка має вільну поверхню, в сумісній постановці при довільному зовнішньому навантаженні, утримуючи в моделі бажану кількість форм коливань рідини. Перевага даного методу полягає в тому, що після переходу до дискретної моделі вдається отримати розв'язуючу систему мінімальної розмірності, що дорівнює кількості ступенів вільності системи, значно знижуючи тим самим обсяг аналітичних перетворень та обчислень у порівнянні з раніше запропонованим методом Дж.В. Майлза.

Складність задачі та, зокрема, чисельної реалізації вищезгаданих методів у випадку нелінійного кутового руху резервуару полягає в необхідності введення до розгляду векторного потенціалу швидкостей додатково до скалярного у порівнянні з випадком поступального руху резервуару. Внаслідок цього зростає кількість рівнянь та, відповідно, обсяг необхідних аналітичних перетворень та обчислень. Варіаційний метод, який був запропонований Дж.В. Майлзом та І.О. Луковським, призводить до системи з $5N+6$ рівнянь (де N це кількість форм коливань рідини, яку приймають до розгляду) у випадку кутового руху резервуару, проти $2N+3$ для поступального руху. Також додатково виникають складності при побудові самої функції векторного потенціалу. Детально питання побудови функцій векторного потенціалу для різних випадків геометрії резервуару, зокрема, для циліндричного баку, розглянуте в роботі [1]. Методики, викладені в цій праці, були застосовані для побудови функцій Стокса – Жуковського в даній дисертаційній роботі.

Нелінійні задачі руху рідини з вільною поверхнею при наперед заданих кутових коливаннях резервуару були розглянуті та доведені до числового розв'язку в роботах італійських науковців М. Ля Рокка та Ж.-П. Шортіно [90, 91]. В Україні також є зацікавленість серед дослідників нелінійними задачами руху резервуарів з рідиною. Нелінійна динаміка баків з рідиною при заданому русі резервуару входить до наукових інтересів В.Д. Кубенка,

П.С. Ковальчука [5, 16]. Зокрема, в роботі [5] була розв'язана задача вимушених кутових коливань циліндричного резервуару з рідиною.

Як правило, в публікаціях, присвячених нелінійній динаміці резервуарів з рідиною з вільною поверхнею, розглядаються випадки із заданим рухом резервуару, хоча рівняння сумісного руху таких систем були отримані в багатьох роботах, зокрема, в таких [7, 43, 90, 91, 93]. Така ситуація, імовірно, пов'язана з тим, що у випадку сумісного руху резервуару з рідиною виникає складніший тип взаємодії і для отримання достовірних результатів потрібно враховувати велику кількість форм коливань рідини. Як показано в роботах [51, 93, 64], навіть у найпростішому випадку збурення коливального руху на вільній поверхні рідини в циліндричному резервуарі лише за першою антисиметричною формою за короткий проміжок часу після початку руху старші гармоніки також зазнають збурення, подекуди складаючи дуже суттєвий за енергією внесок.

З практичної точки зору, одним з важливих аспектів розв'язання задач руху резервуарів з рідиною передбачає знаходження відповіді на питання – як уникнути небажаної деформації та руйнування елементів конструкцій в процесі експлуатації. Причому у випадку часткового заповнення контроль хвильового руху на вільній поверхні рідини є головною проблемою, як було показано в численних теоретичних та експериментальних дослідженнях. На основі аналізу літератури можна виділити декілька підходів, а саме: введення конструктивних елементів всередині резервуару як то ребра, перегородки, мембрани (детальний аналіз наявних результатів, зокрема, для циліндричних баків наведено в роботах [74, 86]); врахування рекомендацій щодо підбору геометрії резервуару та опорної конструкції та підбір режимів експлуатації задля уникнення небезпечних резонансних умов; використання деформівних резервуарів, еластичних мембран, які б забезпечували згасання коливань на вільній поверхні і таким чином

зменшували динамічний вплив рідини на резервуар. В роботі [78] показано, що якщо вільна поверхня в'язкої рідини повністю покрита пружною пластинкою, то власні частоти такої системи зміщуються в напрямку більших значень, ніж у випадку рідини з вільною поверхнею. Крім того, хвильовий рух рідини відбувається зі значно меншими амплітудами, також помітно знижаються сили тиску рідини на стінки резервуару. В дослідженні [76] запропоновано використання часткового покриття вільної поверхні рідини та виконано чисельне моделювання руху рідини в резервуарі з кришкою у вигляді кільця і показано, що при запровадженні кришки відбувається зсув резонансної частоти у бік зростання, хвильовий рух на поверхні рідини відбувається з меншими амплітудами. В багатьох роботах, зокрема [77, 84, 86, 89], розглядається взаємодія рідини з деформівним резервуаром, також випадки резервуару з твердими стінками та еластичним дном, деформівними стінками. Такий підхід також можна розглядати як один зі шляхів зниження динамічного впливу рідини на стінки резервуару. Для повноти даного огляду відзначимо також дослідження стійкості резервуарів з рідиною при наявності деформівних елементів в системі, які є розвиненням і узагальненням так званої задачі Сретенського. Зокрема, в роботі [14] розглянуто задачу про поперечні коливання циліндричного резервуару з пружними основами, заповненого ідеальною нестисливою рідиною.

В низці робіт, зокрема [79, 103, 104], розглядаються задачі кутового руху резервуарів з рідиною на підвісі в сумісній постановці. Головна відмінність цієї групи робіт від підходу, який застосовано в даній дисертаційній роботі, полягає в тому, що метод розв'язання базується на рівняннях теорії мілкої води. В роботі [79] проведено експериментальні та теоретичні дослідження задачі руху підвішеного бака з рідиною на основі лінеаризованих рівнянь мілкої води і отримано періодичні розв'язки. В пізніших роботах було модернізовано модель М.Дж. Кукара введенням

нелінійних членів до системи рівнянь мілкої води, проте рух резервуару залишається лінійним. Такий підхід застосовується, зокрема, при проектуванні демпферів у вигляді резервуарів з рідиною і належить до іншої галузі досліджень, яка не є предметом розгляду даної роботи. Також є дослідження, присвячені вивченю можливостей стабілізації руху несучого тіла при кутових рухах системи з використанням інших типів демпферів, зокрема маятниковых балансирів [71].

Нелінійні задачі кутового руху резервуарів з рідиною, що має вільну поверхню, в сумісній постановці були детально розглянуті в роботах Лимарченка, зокрема, задачі з кутовим та обертальним рухом резервуару; отримані результати детально описані в роботі [93]. Перехідні процеси при кутових рухах циліндричного резервуару з рідиною під дією зовнішнього імпульсного навантаження з імпульсами різної форми досліджено в роботі [11], вивчено явище зародження кругової хвилі на вільній поверхні рідини. Випадку руху резервуару в формі параболоїду обертання присвячено роботу [64]. На окремих прикладах показано суттєвість впливу вищих гармонік на розвиток хвилеутворення, що визначає необхідність врахування вищих форм коливань рідини в розрахунковій моделі. В дисертаційній роботі [8] було розглянуто задачу поступального руху резервуару в формі оберненого усіченого конуса, частково заповненого рідиною, в нелінійній сумісній постановці при різних типах динамічного збудження, проведено дослідження виходу системи резервуар – рідина на стаціонарний режим руху під дією зовнішнього гармонічного навантаження. Як було показано В.В. Губською, виходу системи на усталений режим руху не відбувається при жодних значеннях частоти зовнішнього навантаження, хоча для деяких частот спостерігається квазівпорядкований коливальний рух системи.

Висновки до розділу 1

На основі аналізу літератури можна стверджувати, що задачі нелінійних коливань вільної поверхні рідини при кутовому русі резервуару наразі є малодослідженими. Зокрема, дуже обмежена кількість публікацій присвячена задачам руху системи в сумісній постановці, хоча саме такий тип задач має чіткий практичний аспект і дозволяє визначити динамічний вплив рідини на резервуар. Складність задач сумісного руху полягає в тому, що рух резервуару не є наперед заданим, а визначається в процесі розв'язання внаслідок взаємовпливу резервуару та рідини. Важливою перевагою такого підходу є те, що розгляд руху резервуару, частково заповненого рідиною, в сумісній постановці дозволяє визначити сили тиску рідини на стінки резервуару, які необхідно враховувати при розробці практичних рекомендацій по експлуатації конструкцій з рідиною.

Динаміка системи в сумісному русі має суттєві відмінності у порівнянні з випадком заданого руху резервуару, оскільки виникають нові механічні ефекти, відстежити які без врахування сумісності руху не є можливим. Випадок сумісного кутового руху системи є найменш вивченим, зокрема, немає досліджень динаміки таких систем в залежності від довжини маятникового підвісу. Тому предметом дослідження даної дисертаційної роботи було обрано особливості нелінійного кутового руху циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, на маятниковому підвісі в сумісній постановці.

РОЗДІЛ 2. НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РЕЗЕРВУАРУ З РІДИНОЮ НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ ПРИ КУТОВИХ РУХАХ СИСТЕМИ

В цьому розділі дисертаційної роботи описано побудову математичної моделі сумісного руху циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною рідиною, на маятниковому підвісі. Охарактеризовано складності, що виникають внаслідок наявності кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, та представлено методи, які були використані для виключення цієї граничної умови. Виконано перехід від континуальної до дискретної моделі механічної системи та аналітично отримано розв'язуючу систему рівнянь мінімальної розмірності.

Предметом вивчення дисертаційної роботи є особливості нелінійної динаміки сумісного руху циліндричного резервуару на маятниковому підвісі, частково заповненого рідиною, при кутових рухах системи. Для аналізу динамічних процесів в системі побудовано математичну модель, що ґрунтуються на наступних припущеннях: рідина є ідеальною, однорідною, нестисливою і в початковий момент часу її рух безвихровий, впливом поверхневого натягу на коливання вільної поверхні рідини нехтуємо [93].

На рис. 2.1 подано схематичне зображення досліджуваної механічної системи. Задача про сумісний рух системи резервуар – рідина з вільною поверхнею це нестационарна нелінійна крайова задача з геометричними та фізичними нелінійностями. Фізичні нелінійності виникають внаслідок того, що граничні умови задані нелінійними рівняннями. Геометричні нелінійності обумовлені тим, що граничні умови доводиться задавати на невідомій збуреній вільній поверхні рідини.

Скористаємось позначеннями, які є традиційними для даної галузі механіки:

τ – область, яку займає рідина,

S – вільна поверхня рідини,

Σ – змочувана поверхня резервуару,

L – контур контакту трьох середовищ газ–рідина–тіло.

Позначення з індексом "0" відповідають незбуреному стану рідини.

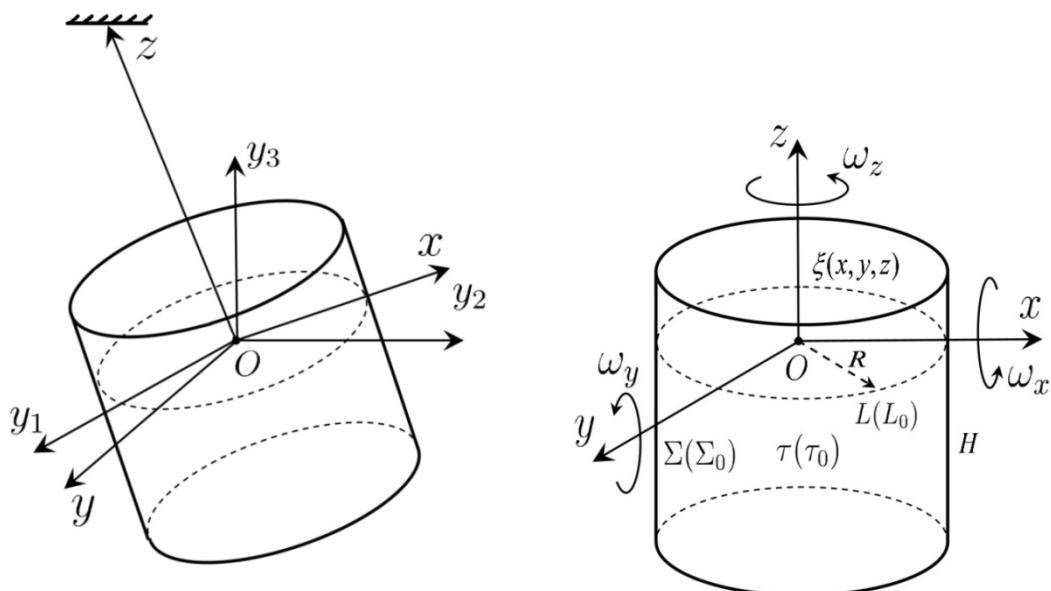


Рис. 2.1. Схематичне зображення системи та основні позначення.

Для опису динаміки системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею введемо наступні системи координат аналогічно до роботи [93]:

- $O_1x_1x_2x_3$ – умовно нерухома система координат з центром в точці підвісу O_1 ;
- $Oxyz$ – жорстко зв'язана з резервуаром система координат з початком в точці O в центрі незбуреної вільної поверхні рідини, вісь Oz перпендикулярна до незбуреної вільної поверхні;
- $Oy_1y_2y_3$ – система координат, вісі якої відповідно паралельні осям нерухомої системи координат $O_1x_1x_2x_3$.

Рух точки O в системі $O_1x_1x_2x_3$ задається радіус-вектором $\vec{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$. Обертальний рух системи $Oxyz$ відносно системи

$O_1x_1x_2x_3$ задається трьома кутами повороту $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Кут α_1 визначається як кут обертання системи $Oxyz$ відносно осі Oy_1 , кут α_2 – кут обертання відносно осі Oy_2 , кут α_3 – кут обертання відносно осі Oy_3 . Таким чином, набір параметрів $\alpha_i, \varepsilon_i, i = \overline{1,3}$ повністю описує рух резервуару в нерухомій системі координат $O_1x_1x_2x_3$.

Точка підвісу O_1 вважається нерухомою в даній дисертаційній роботі, що робить можливими лише кутові рухи системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі. Зазначимо, що побудову рівнянь руху виконано в загальному вигляді для довільного руху резервуару.

2.1. Варіаційна постановка задачі

Згідно з прийнятими припущеннями, в початковий момент часу рух рідини є безвихровим. З теореми Лагранжа про рух ідеальної однорідної нестисливої рідини випливає, що в такому випадку рух рідини залишатиметься безвихровим і надалі. Це дозволяє ввести функцію потенціалу швидкостей рідини $\Phi(\vec{r}, t)$. Потенціал швидкостей (вводиться у нерухомій системі координат) для задачі з кутовими рухами резервуару представляємо у наступній формі згідно з роботою [93]:

$$\Phi = \varphi_0 + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}, \quad (2.1)$$

де \vec{r} – радіус-вектор довільної точки простору в жорстко зв'язаній з резервуаром системі координат, φ – скалярний потенціал швидкостей рідини, $\vec{\Omega}$ – векторний потенціал Стокса – Жуковського.

Абсолютна \vec{V}_a , переносна \vec{V}_e та відносна \vec{V}_r швидкості руху частинок рідини подаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \vec{V}_a &= \vec{\nabla} \Phi; \\ \vec{V}_e &= \dot{\vec{\varepsilon}} + \vec{\omega} \times \vec{r}; \\ \vec{V}_r &= \vec{\nabla} \Phi - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Оскільки розглядається резервуар циліндричної форми, рівняння вільної поверхні можна розв'язати відносно z . Тому вільну поверхню рідини можна задати наступним чином:

$$z = \xi(x, y, t) \quad (2.3)$$

або в циліндричних координатах:

$$z = \xi(r, \theta, t). \quad (2.4)$$

Формульовання задачі про рух циліндричного резервуару, частково заповненого рідиною, є сукупністю кінематичних умов, динамічних граничних умов, рівнянь руху і початкових умов; кінематичні умови

розглядаються як механічні в'язі, динамічні граничні умови та рівняння руху випливають з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. До кінематичних умов задачі відносяться вимога нерозривності потоку рідини в області, що розглядається, умови неперетікання на твердій поверхні резервуару та на вільній поверхні рідини. Проаналізуємо кожну з зазначених умов окремо. Умова нерозривності потоку для ідеальної нестисливої рідини має наступний вигляд:

$$\operatorname{div} \vec{V}_a = 0. \quad (2.5)$$

З урахуванням представлення (2.2) рівняння (2.5) після очевидних перетворень можна подати в формі (2.6):

$$\Delta\Phi = 0. \quad (2.6)$$

Беручи до уваги представлення (2.1), отримуємо умову нерозривності у вигляді сукупності рівнянь (2.7):

$$\Delta\varphi = 0, \Delta\vec{\Omega} = 0 \text{ в } \tau. \quad (2.7)$$

Умова неперетікання на границі контакту тіло – рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі \vec{n} подається в наступній формі:

$$\vec{V}_n \Big|_{\Sigma} = \vec{n} \vec{V}_r \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (2.8)$$

Після підставлення представлення (2.1) умова (2.8) набуває вигляду:

$$\vec{n} \vec{V}_r \Big|_{\Sigma} = 0 = (\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}) \vec{n}. \quad (2.9)$$

Після низки перетворень отримуємо умову неперетікання через тверду поверхню у вигляді двох співвідношень:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \Big|_{\Sigma} &= 0; \\ \vec{\omega} \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{n}} = \vec{\omega}(\vec{r} \times \vec{n}) \text{ або } \vec{\omega} \left(\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial\vec{n}} - \vec{r} \times \vec{n} \right) &= 0 \text{ на } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оскільки кінематична гранична умова не повинна залежати від законів руху, то остання рівність в (2.10) має виконуватись для будь-якого

значення $\vec{\omega}$. Тому остаточно отримуємо умову неперетікання на твердій поверхні у вигляді:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma. \quad (2.11)$$

Умова неперетікання через вільну поверхню рідини:

$$\vec{n} \vec{V}_{\substack{\text{вільної} \\ \text{поверхні}}} = \vec{n} \vec{V}_{\substack{\text{рідини} \\ \text{на поверхні}}}. \quad (2.12)$$

Рівняння вільної поверхні (2.3) можна представити як $z - \xi(x, y, t) = 0$, тоді нормаль до неї записується у вигляді:

$$\vec{n} = \frac{\left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial x}, -\frac{\partial \xi}{\partial y}, 1 \right\}}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}}. \quad (2.13)$$

Нормальну швидкість на вільній поверхні можемо записати у вигляді:

$$\vec{V}_n = \vec{V}_r \vec{n} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2}}. \quad (2.14)$$

Остаточно отримуємо умову неперетікання на вільній поверхні:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot [\vec{\nabla} \varphi_0 + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r}] &= \\ = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\vec{\varepsilon}}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z, \xi = z; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } S.$$

Рівняння (2.7), (2.11), (2.15) являють собою систему кінематичних обмежень (в'язей) відносно варіаційного принципу (2.16). Для ефективного застосування варіаційних методів необхідно задоволінити цим в'язям до початку розв'язання варіаційної задачі.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (2.16)$$

Функція Лагранжа для системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею може бути представлена у загальному вигляді (2.17):

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 + \\
& + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j - (M_r + M_l) g \varepsilon_r + \\
& + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \\
& - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \quad (2.17) \\
& - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_r h_r + M_l h_l)(1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) - \\
& - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi},
\end{aligned}$$

де ρ – густина рідини, g – гравітаційне прискорення, H – рівень заповнення рідини в резервуарі, M_l , M_r – маси рідини та резервуару, h_l , h_r – зміщення центрів мас рідини та резервуару відносно площини незбуреної вільної поверхні рідини S_0 , σ – коефіцієнт поверхневого натягу на вільній поверхні рідини, θ_1 – сталій кут (визначається зі співвідношення між коефіцієнтами поверхневого натягу $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma \cos \theta_1$, де σ_1 – коефіцієнт поверхневого натягу на границі рідина – тверде тіло, σ_2 – коефіцієнт поверхневого натягу на границі газ – тверде тіло), J_{res}^{ij} – тензор інерції резервуару, визначений відносно точки O ; \vec{F} , \vec{M} – головний вектор та головний момент зовнішніх сил, що діють на резервуар, визначені відносно точки O ; $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – представлення кутів повороту резервуару відносно нерухомої системи координат.

Представлення (2.17) справедливе для випадку довільного руху резервуару; у випадку тільки кутових рухів члени в правій частині (2.17),

що містять параметри поступального руху резервуару $\vec{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, зникають.

Динамічні граничні умови задачі та рівняння руху механічної системи отримуються з варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського (2.16) для функції Лагранжа механічної системи у вигляді (2.17).

2.2. Побудова розкладів шуканих величин

Для того, щоб ефективно використати варіаційні підходи при розв'язанні задачі, необхідно застосувати такі представлення для шуканих величин, які задовольняють всі кінематичні граничні умови наперед.

Шукатимемо невідомі величини в наступному вигляді, наслідуючи роботи [20, 21, 93]:

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta); \quad (2.18)$$

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{ch \kappa_n(z + H)}{\kappa_n sh \kappa_n H}; \quad (2.19)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{ch \kappa_n(z + H)}{\kappa_n sh \kappa_n H}. \quad (2.20)$$

В представленнях шуканих величин (2.18–2.20) невідомими є лише набори коефіцієнтів a_n, b_n, q_n . Функції ψ_n та $\vec{\Omega}_0$ є наперед визначеними. Важливо зазначити, що набори невідомих коефіцієнтів не є незалежними. Було використано методику аналітичного виключення залежності коефіцієнтів, розроблену в роботі [93]. Не вдаючись в деталі, зазначимо, що в загальному випадку форма цієї залежності може бути представлена наступними формулами:

$$b_i = b_i(a_i, \dot{a}_j), \vec{q}_i = \vec{q}_i(a_i). \quad (2.21)$$

Покажемо, що наявність таких взаємозалежностей коефіцієнтів в представленнях невідомих величин є природним наслідком прийнятих гіпотез. Відповідно до теореми про безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини, такий рух повністю визначається рухом границь рідини. З цього випливає, що коефіцієнти в розкладах для φ та $\vec{\Omega}$ мають бути функціями від коефіцієнтів a_i . Це твердження є у повній відповідності з результатами (2.21).

Набір функцій $\psi_n(r, \theta)$ – це повна ортогональна система функцій в області S_0 , яка отримана як розв'язок краєвої задачі Неймана (2.22) з параметром κ_n :

$$\begin{aligned} \Delta\psi_n + \kappa_n^2\psi_n &= 0 \text{ на } S_0. \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial n} &= 0 \text{ на } L_0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Функція $\vec{\Omega}_0$ являє собою векторний потенціал Стокса – Жуковського, який є розв'язком краєвої задачі Неймана (2.23) для рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\Omega}_0 &= 0 \text{ в } \tau; \\ \frac{\partial\vec{\Omega}_0}{\partial\vec{n}} &= \vec{r} \times \vec{n} \text{ на } \Sigma + S_0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Задача (2.23) була детально розглянута в роботах [1, 49]. Алгоритм побудови потенціалу Стокса – Жуковського для резервуарів різних форм, в тому числі у випадку циліндричного резервуару, був розроблений в роботі [1]. Наведене представлення невідомих (2.18–2.20) в силу вибору функцій ψ_n тодіжно задовільняє рівнянню нерозривності потоку (2.7) та умові неперетікання на бічній поверхні резервуару (2.11). В підході, яки застосовано в даній роботі, будемо шукати розв'язок нелінійної задачі про сумісний рух резервуару з рідиною у вигляді розкладу по власним функціям лінійної задачі, розклади змінних $\xi, \varphi, \vec{\Omega}$ за формулою збігаються з розв'язком задачі про рух обмеженого об'єму рідини в рухому циліндричному резервуарі в лінійній постановці.

2.3. Виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні

Однією з головних складностей при побудові розкладів змінних є задовільнення кінематичної граничної умови на рухомій вільній поверхні. Проблема виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини є типовою для даного класу задач і може бути вирішена за допомогою методу Гальоркіна з використанням основ нелінійної механіки. Для того, щоб виключити кінематичну граничну умову на вільній поверхні, необхідно вибрати набір базових параметрів системи, через які далі будуть виражатися залежні параметри. Виходячи з теореми про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, число ступенів вільності всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює числу ступенів вільності руху самої вільної поверхні. Тому за базовий параметр системи приймемо зміщення вільної поверхні ξ , а $\varphi, \vec{\Omega}$ вважатимемо залежними, що відповідає залежності b_i, \vec{q}_i від a_k .

Для визначення форми цієї залежності використовується кінематична гранична умова на вільній поверхні; ця умова повинна виконуватись для довільного закону руху резервуару. Для $z = \xi$ перша умова (2.15) переписується у вигляді чотирьох умов (2.24, 2.25):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \varphi_0 - \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0; \quad (2.24)$$

$$\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \vec{i}_k \cdot (\vec{i}_3 \times \vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

де $\Omega_k, k = 1, 2, 3$ – компоненти векторного потенціалу швидкості $\vec{\Omega}$. Отже, відносно амплітудних параметрів a_i кінематична гранична умова на вільній поверхні рідини становить одну неінтегровну за часом (2.24) та три голономні (2.25) механічні в'язі.

Подальше визначення вигляду залежностей параметрів b_i , \vec{q}_i від амплітудних параметрів a_k проводиться на основі методу Гальоркіна. Розклади шуканих змінних (2.18–2.20) підставляємо до умов (2.24, 2.25), отримані вирази множимо на ψ_p та виконуємо інтегрування по незбуреній вільній поверхні рідини S_0 . При цьому використано розклад гіперболічних функцій в ряди по змінній ξ в околі $\xi = 0$.

Виходячи з загальних законів нелінійної механіки, залежність b_i , \vec{q}_i від a_k будемо шукати у формі (2.26, 2.27), застосовуючи методику, викладену в роботі [93]:

$$b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)} + b_i^{(3)} + b_i^{(4)}; \quad (2.26)$$

$$\vec{q}_i = \vec{q}_i^{(1)} + \vec{q}_i^{(2)} + \vec{q}_i^{(3)}, \quad (2.27)$$

де індекси в круглих дужках відповідають порядку малості відповідних величин. Залежності b_i , \vec{q}_i від a_k являють собою кінематичні в'язі і визначаються за допомогою методу Гальоркіна.

Після підставлення розкладів (2.26, 2.27) до виразів, отриманих в зазначеній процедурі з (2.24, 2.25), отримуємо вирази для b_i , \vec{q}_i , використовуючи порівняння величин за порядком малості:

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^\omega + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nml}^\omega + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^\omega; \quad (2.28)$$

$$\vec{q}_p = \sum_j a_j \vec{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{\gamma}_{jkp}^u + \sum_{j,k,l} a_j a_k a_l \vec{\delta}_{jklp}^u. \quad (2.29)$$

Коефіцієнти, які входять до співвідношень (2.28) та (2.29), є або квадратурами від функцій ψ_i , $\vec{\Omega}_0$, що обчислюються по області S_0 , або деякими виразами від цих квадратур.

Таким чином, на основі використання розкладів шуканих змінних по

розв'язках відповідної лінійної задачі на власні значення і попереднього задовільнення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини за викладеною методикою побудовані розклади шуканих змінних, які тодіжно задовольняють умові нерозривності потоку в області τ , кінематичним граничним умовам на твердій границі Σ області і з точністю до величин третього порядку малості кінематичній граничній умові на вільній поверхні рідини.

2.4. Побудова дискретної моделі

Метод побудови нелінійної дискретної моделі динаміки сумісного руху тіла з рідиною з вільною поверхнею здійснюється на основі метода Канторовича, що застосовується до варіаційного формулування задачі динаміки системи. Метод Канторовича складається з трьох етапів: вибір форми розкладів шуканих змінних; інтегрування виразів, що входять в функціонал, на основі виведених розкладів; отримання рівнянь для визначення кінцевої форми розв'язку.

Специфіка задачі, що розглядається, призводить до необхідності виключення із розгляду кінематичної граничної умови на границі, що обумовлено наявністю вільної поверхні рідини. В класичній схемі застосування методу Канторовича такий етап відсутній, а у випадку, що розглядається, є важливою складовою частиною і виконується між першим і другим етапами, що вказані вище.

Важливою особливістю побудованого алгоритму є такий факт, що прийнятий підхід дозволяє отримати нелінійну дискретну модель механічної системи мінімальної розмірності – її розмірність співпадає з кількістю ступенів вільності механічної системи, якщо розуміти під числом ступенів вільності для рідини з вільною поверхнею кількість прийнятих до розгляду форм коливань рідини. Нагадаємо, що всі ці форми коливань не суперечать в'язям, що накладені на систему, а їх незалежність забезпечується лінійною незалежністю системи функцій $\psi_n(r, \theta)$, застосованої для опису руху вільної поверхні рідини.

Динаміка сумісного руху резервуару з рідиною описується системою рівнянь нескінченної розмірності. Тому для отримання чисельних результатів потрібно ввести припущення, які дозволили б обмежитись розглядом скінченного набору форм коливань рідини. В теоретичних та експериментальних роботах інших авторів було показано, що при

врахуванні дисипації в системі істотного збудження зазнають лише перші форми коливань рідини, авищими гармоніками можна знехтувати. Разом з цим, у випадку розгляду нелінійної задачі для забезпечення прояву нелінійних ефектів кількість форм коливань рідини, що враховуються, має бути достатньо великою.

Як було показано в роботах [64, 93], форми коливань рідини можна умовно поділити на три групи в залежності від ступеня їхнього впливу на динаміку системи і враховувати амплітуди цих форм відповідно до цього поділу. Наводимо поділ форм коливань рідини на групи, що був застосований в роботі І.Ю. Семенової [64]:

- форми коливань, що впливають на формування механічних процесів у системі, їх амплітуди враховуються в рівняннях до величин третього порядку малості;
- форми коливань, що додають якісних змін у систему, це осесиметричні форми, які визначають несиметричність профілю хвилі на вільній поверхні, а також появу внутрішніх нелінійних зв'язків, наприклад, перерозподіл енергії між формами коливань у взаємно ортогональних напрямках; в цьому випадку амплітуди утримують з точністю до другого порядку малості;
- гармоніки, що забезпечують крутизну хвиль на вільній поверхні, тобто вищі форми; ці форми важливо враховувати при дослідженнях перехідних процесів і достатньо обмежитися першим порядком малості амплітуд.

В даній дисертаційній роботі було обрано набір форм коливань вільної поверхні рідини у відповідності з викладеним вище підходом. Як було встановлено при вивченні задач нелінійної динаміки рідини з вільною поверхнею, однією з важливих рис таких систем є взаємопов'язаність форм коливань рідини. Збудження однієї з форм коливань рідини

призводить до збудження інших в залежності від початкових умов задачі, причому ці зв'язки проявляються лише при врахуванні величин амплітуд до третього порядку малості.

Для побудови нелінійної дискретної моделі системи резервуар – рідина були введені наступні узагальнені координати:

a_i – амплітуди збудження форм коливань рідини;

α_i – кути відхилення резервуару від положення рівноваги;

ε_i – параметри поступального руху резервуару.

Оскільки розклади невідомих величин було обрано так, щоб вони задовільняли кінематичним в'язям, функція Лагранжа (2.17) після дискретизації (підстановки виразів (2.18–2.20), виключення залежних коефіцієнтів і проведення інтегрування) відповідатиме вільній механічній системі, а система параметрів $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$ є сукупністю незалежних змінних, які повністю характеризують поведінку механічної системи тіло – рідина з вільною поверхнею. Після отримання Лагранжіану в дискретній формі з нього виводяться рівняння руху системи, що є рівняннями Лагранжа другого роду. Застосована методика призводить до рівнянь руху системи з точністю до третього порядку малості відносно амплітудних параметрів коливань вільної пвоерхні. Після зведення подібних і спрощення рівняння руху системи в параметрах $a_i, \alpha_i, \varepsilon_i$ можна записати в наступному вигляді:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn} \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn} \ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn} \ddot{\alpha}_{n-N-3} = q_r, \quad r = \overline{1, N+6}, \quad (2.30)$$

де p_{rn} і q_r це квадратна матриця та вектор розміру $N+6$ відповідно.

Елементи матриці та вектору залежать від $t, a_i, \dot{a}_i, \alpha_i, \dot{\alpha}_i, \varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i$.

Система (2.30) в загальному випадку складається з $N+6$ рівнянь, де N – це кількість форм коливань рідини, яку приймаємо до розгляду. Для чисельного розв'язання нелінійної задачі сумісного руху резервуару з

рідиною аналогічно роботі [93] приймемо до розгляду $N = 12$ форм коливань рідини. Зазначимо, що технічно немає жодних перешкод для утримання більшої кількості форм коливань рідини, однак це призведе до істотного збільшення як аналітичних перетворень, так і обсягу обчислень. Разом з тим, в роботах О.С. Лимарченка було показано, що подальше збільшення кількості форм коливань не призводить до істотного поліпшення точності розв'язку.

Система рівнянь (2.30) описує сумісний рух системи резервуар – рідина в загальному випадку, допустимими є як кутові, так і поступальні рухи. В даній роботі початок координат обрано в точці підвісу, яка є нерухомою, отже, поступальні рухи резервуару відсутні і відповідні доданки в рівняннях (2.30) зникають. Остаточно розмірність системи скорочується до $N + 3$. Зазначимо, що розв'язуючу систему рівнянь було побудовано аналітично для довільної кількості форм коливань рідини. Однією із суттєвих переваг застосованого методу розв'язання є те, що розмірність отриманої в результаті розв'язуючої системи мінімальна і дорівнює кількості ступенів вільності механічної системи, що вивчається. Система рівнянь (2.30) є лінійною відносно других похідних від невідомих величин, це дозволяє перетворити її до нормальної форми Коші і виконати інтегрування системи за часом методом Рунге – Кутта 4-го порядку.

Висновки до розділу 2

Побудовано математичну модель сумісного руху циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною рідиною, при кутових рухах системи, проведено виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, виконано перехід від континуальної до дискретної моделі системи та отримано розв'язуючу систему рівнянь мінімальної розмірності.

РОЗДІЛ 3. ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛОВАННЯ ЗАДАЧ СУМІСНОГО РУХУ СИСТЕМИ РЕЗЕРВУАР – РІДИНА НА МАЯТНИКОВОМУ ПІДВІСІ

В цьому розділі проведено аналіз чисельних результатів, отриманих при вивченні руху системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішнього імпульсного та періодичного моментного навантаження, а також у випадку початкового кінематичного збурення руху.

Як було підкреслено раніше, точка підвісу є нерухомою, тому можливі лише кутові рухи резервуару. Для отримання чисельних даних було прийнято до розгляду 12 форм коливань рідини, що є достатнім для відображення нелінійних процесів в системі в повній мірі, як було показано в роботі [93]. Чисельні результати наведено для циліндричного резервуару радіусу $R = 1$ м, висотою $H = 1,5R$, заповненого рідиною на глибину 1 м. Коливання на вільній поверхні рідини відбуваються без дисипації енергії. Було розглянуто рух системи під дією наступних типів зовнішнього впливу:

- початкове кінематичне збурення руху системи;
- імпульсне моментне навантаження;
- вібраційне моментне навантаження.

Задачі кінематичного збурення та імпульсного моментного збудження руху було використано як тестові для демонстрації адекватності і працездатності побудованої математичної моделі динаміки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі, коректності відображення особливостей нелінійних процесів, перевірки виконання законів збереження енергії та симетрії.

Задачу руху системи під дією вібраційного навантаження було розглянуто для аналізу резонансних властивостей системи в сумісному русі.

Було розглянуто задачі для різних наборів параметрів і проаналізовано наступні характеристики динаміки системи:

- амплітуди форм коливань рідини;
- амплітуди кута відхилення резервуару від вертикалі та його кутової швидкості;
- сили тиску рідини на стінки резервуару.

3.1. Початкове кінематичне збурення системи

Було розглянуто задачу руху циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною рідиною, при початковому куті відхилення резервуару від положення рівноваги. На рис. 3.1 наведено схематичне зображення системи у початковий момент часу, поверхня рідини до початку руху є горизонтальною. Отже, під початковим кінематичним збуренням розуміємо такий початковий стан механічної системи, коли резервуар є відхиленим від положення рівноваги на деякий кут, поверхня рідини є горизонтальною, початкові швидкості системи нульові. Чисельні результати продемонстровано на прикладі задачі з початковим кутом відхилення $\alpha_0 = \frac{\pi}{8}$.

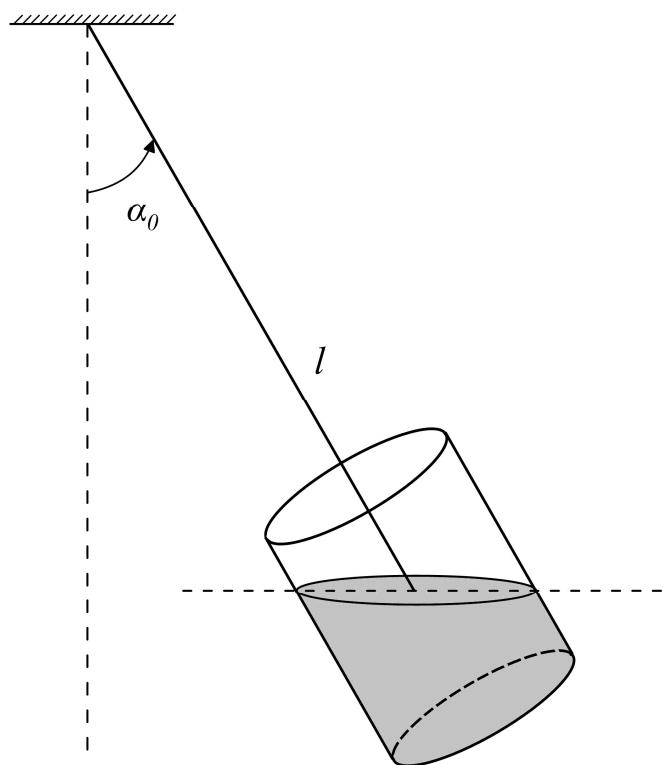


Рис. 3.1. Система у початковий момент часу при початковому кінематичному збуренні.

Оскільки при початковому відхиленні резервуару поверхня рідини повинна залишитись горизонтальною (в стані спокою до початку руху), необхідно надати формам коливань вільної поверхні рідини початкових

збурень в наступному вигляді для повного коректного задання граничних умов:

$$r = \sum_{i=1}^3 a_i \tilde{J}_1 \left(\frac{\kappa_1^{(i)} r}{R} \right);$$

$$a_i = \frac{\int_0^R r^2 \tilde{J}_1 \left(\frac{\kappa_1^{(i)} r}{R} \right) dr}{\int_0^R \tilde{J}_1^2 \left(\frac{\kappa_1^{(i)} r}{R} \right) r dr};$$

$$x_3 = r \operatorname{tg} \alpha_0,$$
(3.1)

де α_0 – кут початкового відхилення резервуару від вертикалі. $O_1 x_1 x_2 x_3$ – нерухома система координат, описана в підрозділі 2.1.

Було проведено дослідження для різних співвідношень маси резервуару та рідини, при змінній довжині маятникового підвісу. Потрібно підкреслити, що метою розгляду цих задач була демонстрація працездатності побудованої математичної моделі системи, а всебічний розгляд динамічних процесів в системі в залежності від довжин підвісу проведено в підрозділі 4.1. Нижче наведено графіки зміни в часі амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, кута та кутової швидкості резервуару. В силу початкових умов рух резервуару відбувається в одній площині. Тут і далі амплітуди форм коливань вільної поверхні рідини подано в безрозмірному вигляді. В задачах пунктів 3.1.1–3.1.3 проявляються зміни динаміки сумісного руху системи в залежності від маси резервуару відносно маси рідини, при цьому кожен пункт має два підпункти з різними довжинами підвісу, що дозволяє оцінити вплив довжини підвісу на розвиток динамічних процесів в системі.

3.1.1. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:10

Перший тип задач, які були розглянуті, це випадок значної маси рідини у порівнянні з резервуаром: маса резервуару складає 0,1 маси рідини.

Нижче наведено чисельні результати для різних значень довжин маятникового підвісу.

3.1.1.1. Довжина маятникового підвісу $l=0,25$

З графіків зміни в часі кута та кутової швидкості резервуару (рис. 3.4, 3.5) випливає, що для даного набору параметрів системи рух резервуару відбувається з незначними відхиленнями від періодичного закону; наявність нерегулярностей в графіках параметрів руху резервуару є наслідком взаємопливу хвильового руху на вільній поверхні рідини і коливань резервуару. Після нетривалого переходного періоду коливання резервуару набувають квазісталеного характеру.

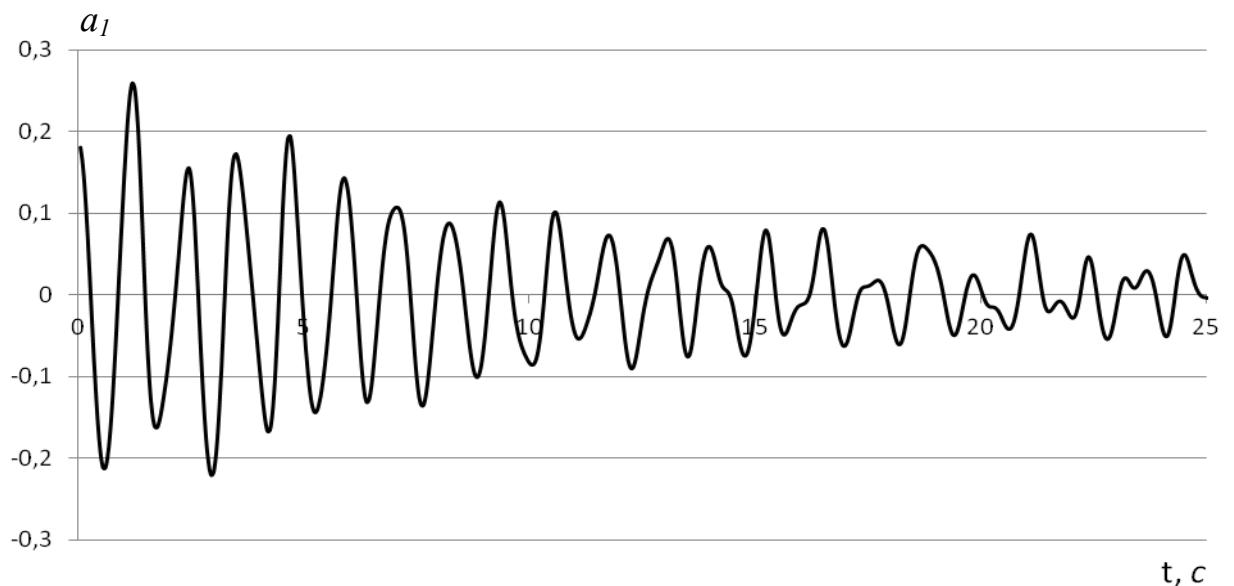


Рис. 3.2. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

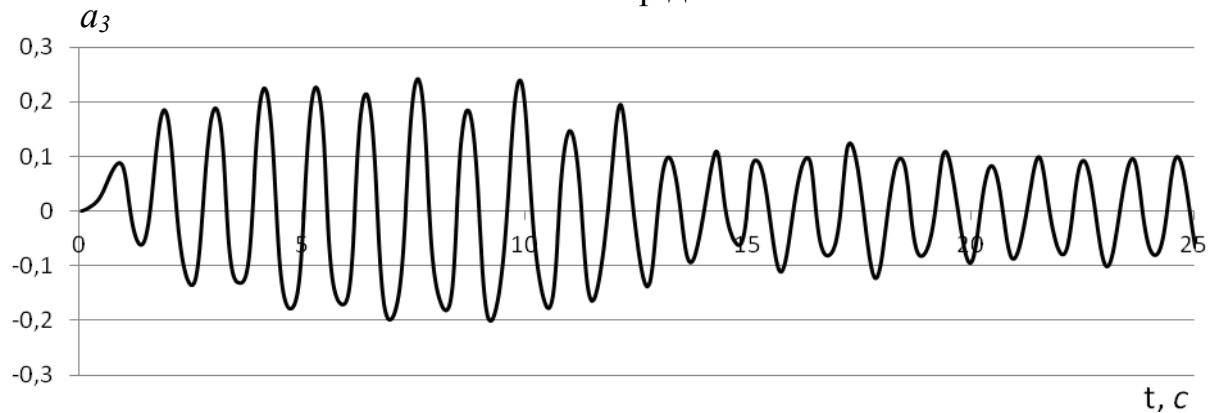


Рис. 3.3. Графік зміни в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини.

Осьсиметрична форма коливань рідини (рис. 3.3) зазнає суттєвого збурення в процесі руху системи. Зазначимо, що початкове збурення цієї форми коливань нульове.

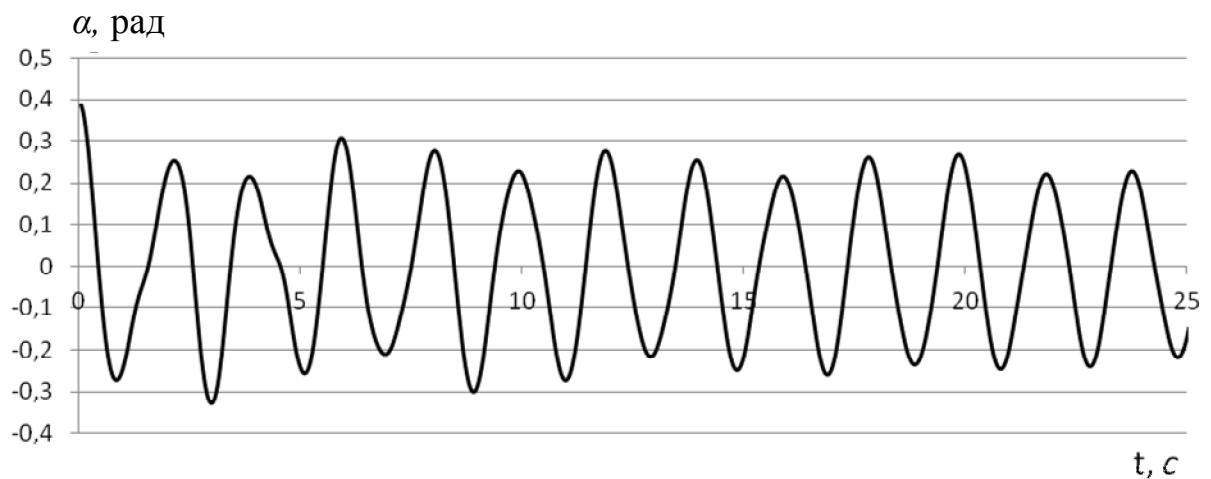


Рис. 3.4. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

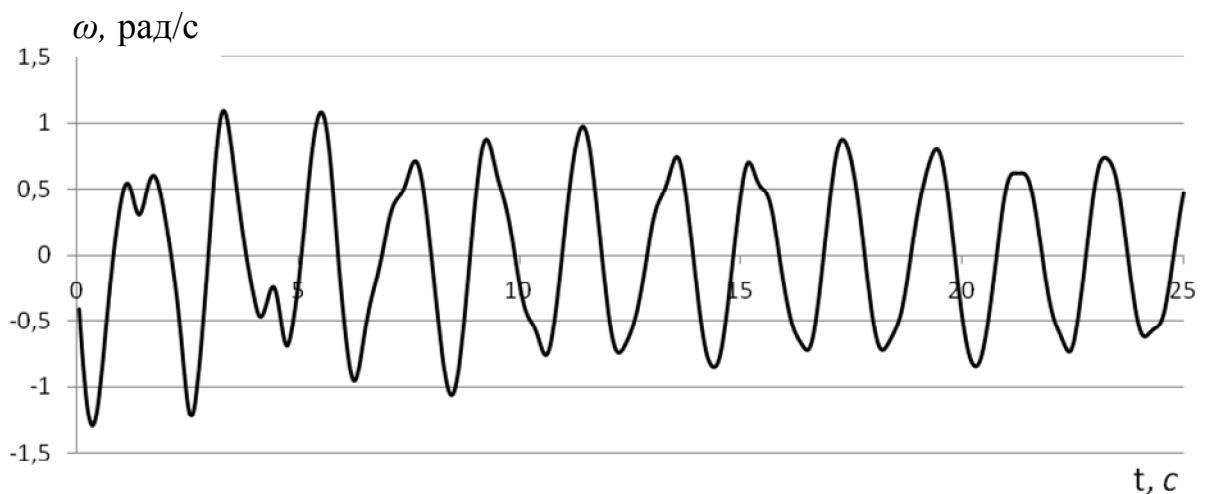


Рис. 3.5. Графік зміни в часі кутової швидкості резервуару.

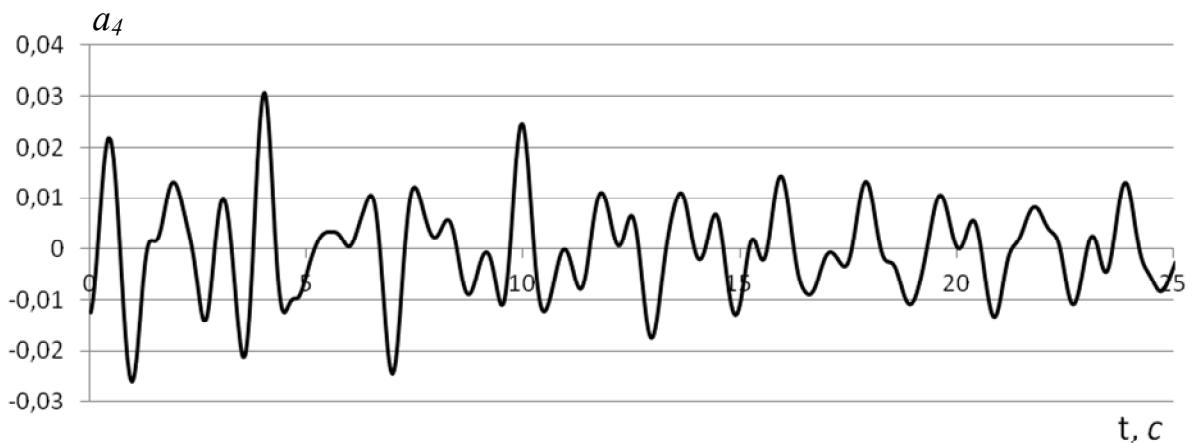


Рис. 3.6. Графік зміни в часі амплітуди другої антисиметричної форми коливань рідини.

Осьсиметрична форма коливань рідини не може бути збурена внаслідок зовнішнього впливу на резервуар напряму, тому її збурення є свідченням наявності нелінійних зв'язків між формами коливань рідини. Для ілюстрації хвильового руху рідини наведено також графіки зміни в часі старших гармонік (рис. 3.6, 3.7).

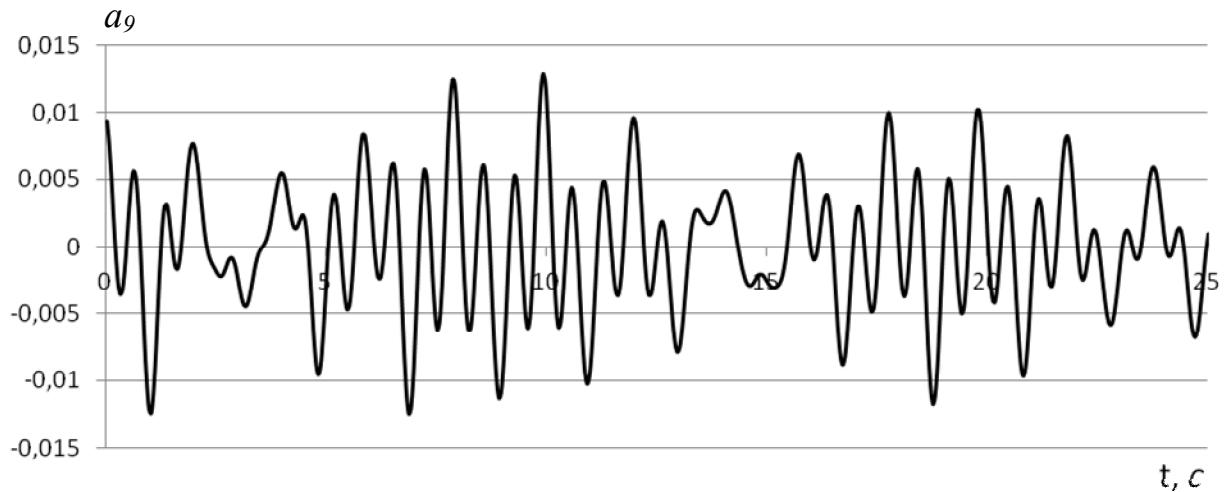


Рис. 3.7. Графік зміни в часі амплітуди третьої антисиметричної форми коливань рідини.

Як видно з графіків на рис. 3.3, 3.4, впродовж приблизно 12 періодів коливань резервуару амплітуда першої антисиметричної форми зменшується в декілька разів у порівнянні з початком коливального процесу, при цьому амплітуда коливань резервуару практично не знижується. Оскільки моделювання руху системи було проведено без врахування дисипації, для уникнення енергетичних втрат енергія коливального руху на вільній поверхні повинна перейти в якусь іншу форму руху в системі. Дослідженю механізмів перерозподілу енергії присвячено підрозділ 4.2.

3.1.1.2. Довжина маятникового підвісу $l=0,5$

При даних параметрах задачі характер руху системи демонструє відмінності у порівнянні із попереднім випадком, спостерігається значна нерегулярність руху та взаємопов'язаність коливань резервуару та рідини.

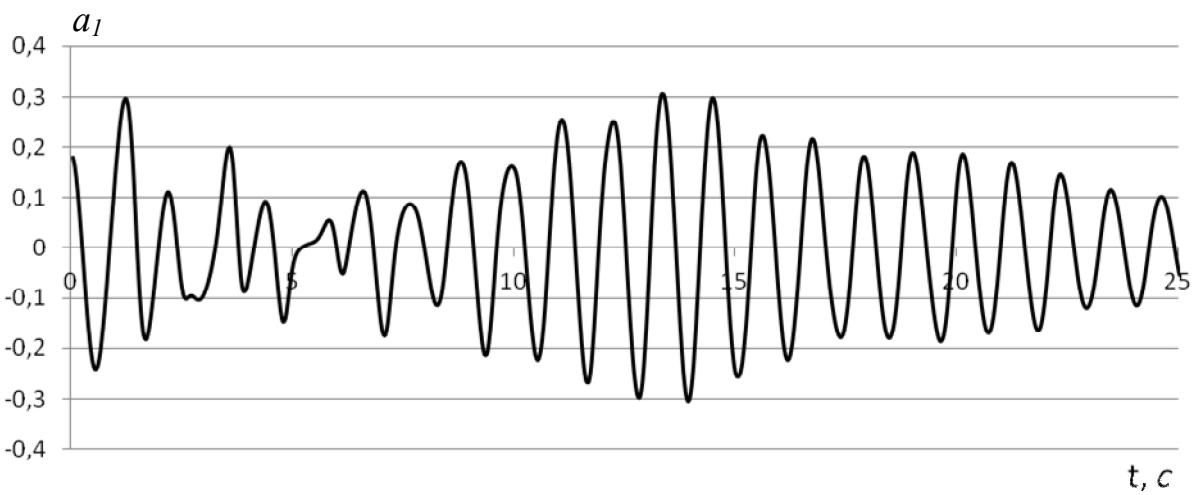


Рис. 3.8. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

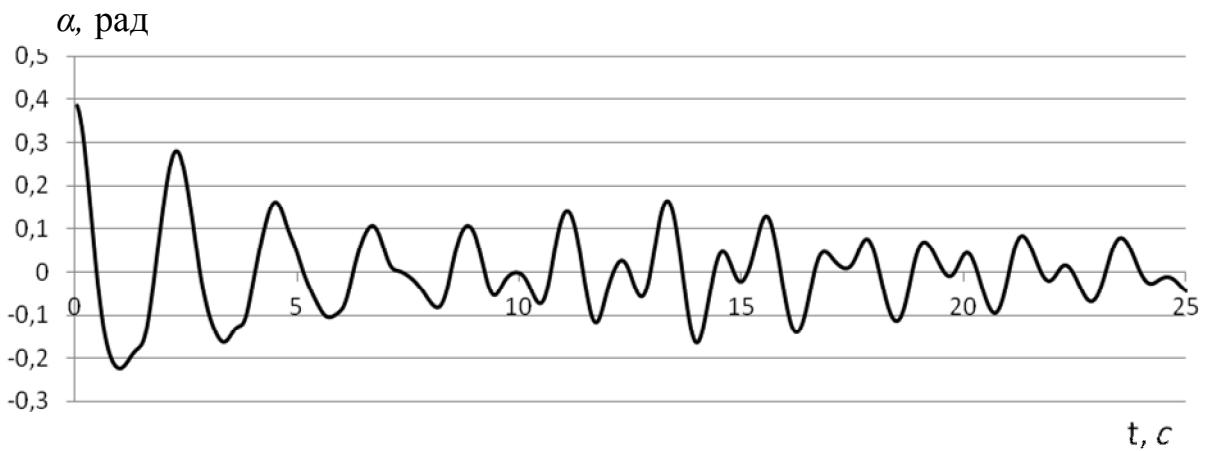


Рис. 3.9. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

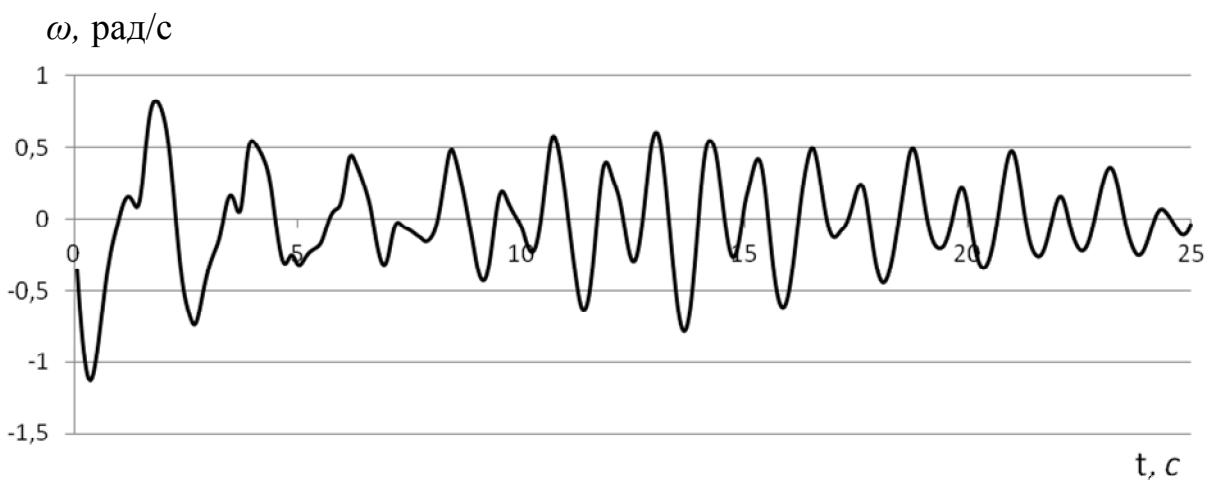


Рис. 3.10. Графік зміни в часі кутової швидкості резервуару.

Амплітуда коливань резервуару суттєво знижується впродовж 25 с руху (рис. 3.9), проте нерегулярний характер руху зберігається впродовж всього часу розгляду. Такі особливості динаміки системи пов'язані, по-

перше, зі значною масою рідини відносно резервуару. По-друге, збільшення довжини маятникового підвісу може призводити до зміни характеру руху системи, її частотних характеристик. Цей феномен потребує додаткового всебічного вивчення, якому присвячено підрозділи 3.3, 4.1.

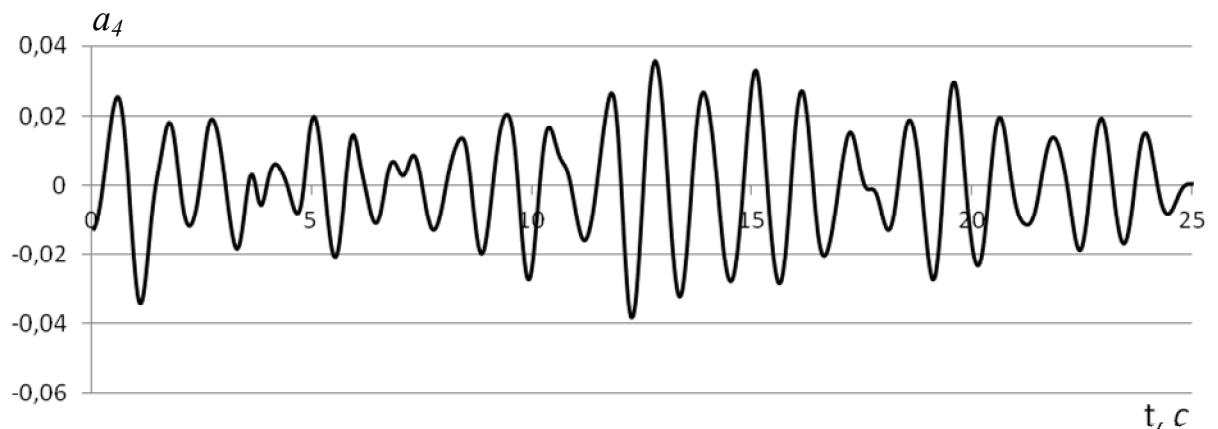


Рис. 3.11. Графік зміни в часі амплітуди другої антисиметричної форми коливань рідини.

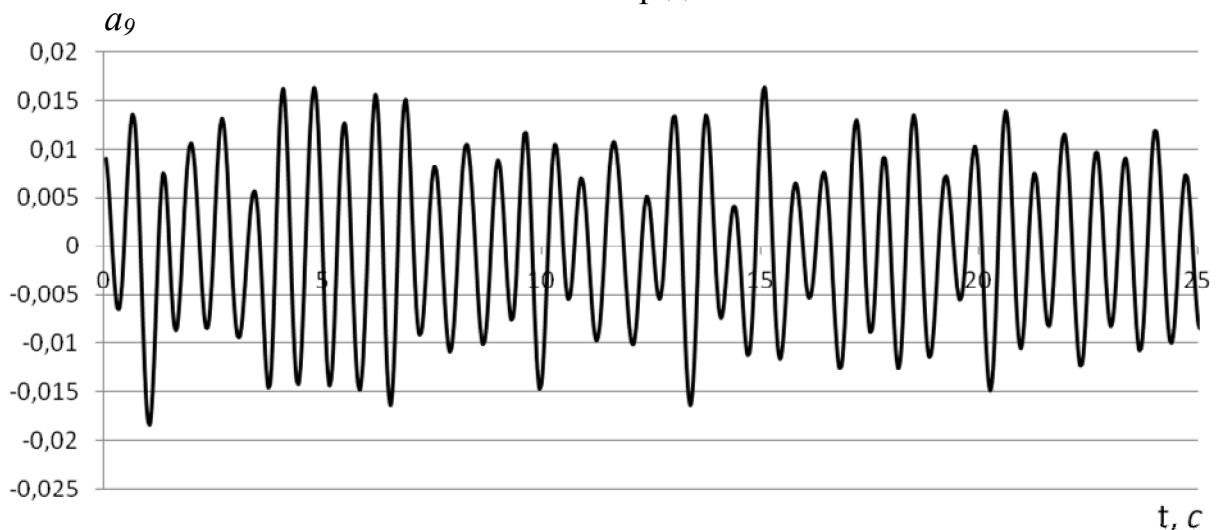


Рис. 3.12. Графік зміни в часі амплітуди третьої антисиметричної форми коливань рідини.

Коливання рідини на вільній поверхні в цьому випадку є суттєво нелінійними, що випливає із графіка зміни в часі першої осесиметричної форми (рис. 3.13); проте після проходження переходного періоду амплітуда осесиметричної форми помітно знижується.

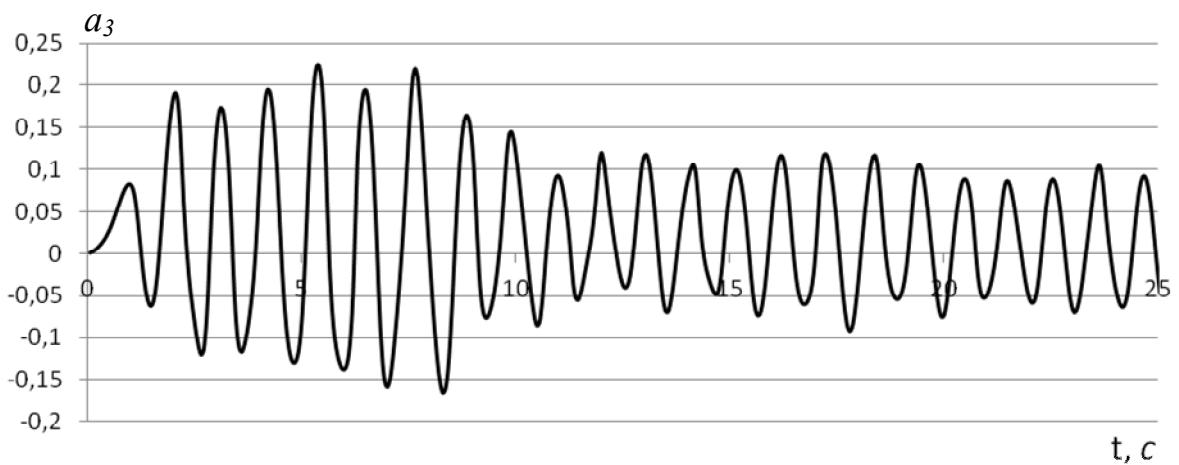


Рис. 3.13. Графік зміни в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини.

Вищі гармоніки також зазнають збурення (рис. 3.11, 3.12), але з амплітудами, меншими в декілька разів за амплітуди першої антисиметричної форми (рис. 3.8). Це є демонстрацією коректного відображення нелінійних зв'язків між формами коливань рідини в побудованій математичній моделі системи.

3.1.2. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:4

Другий тип задач це випадок з більш значною відносною масою резервуару: маса резервуару складає 0,25 маси рідини.

3.1.2.1. Довжина маятникового підвісу $l=0,25$.

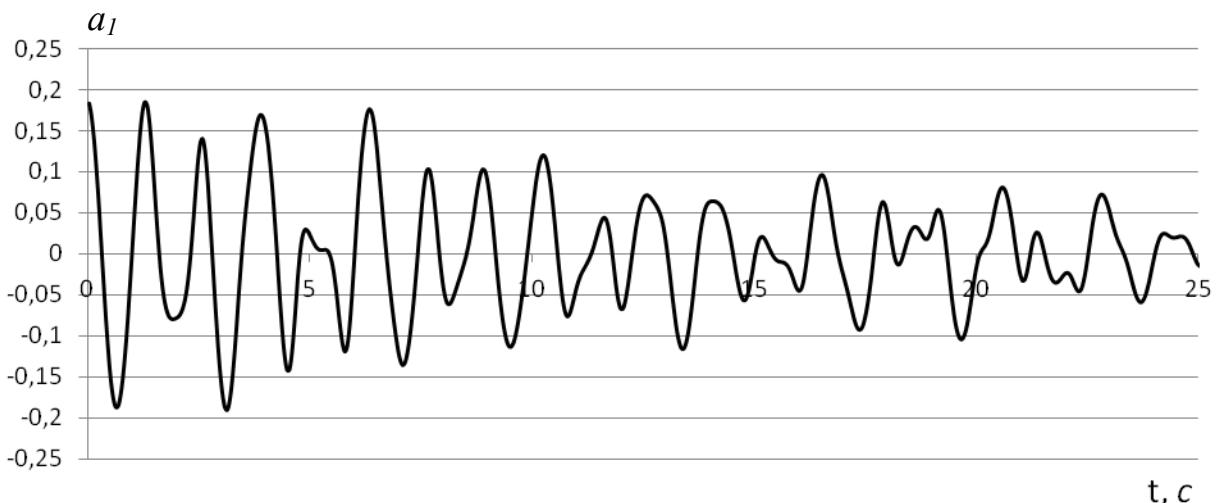


Рис. 3.14. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

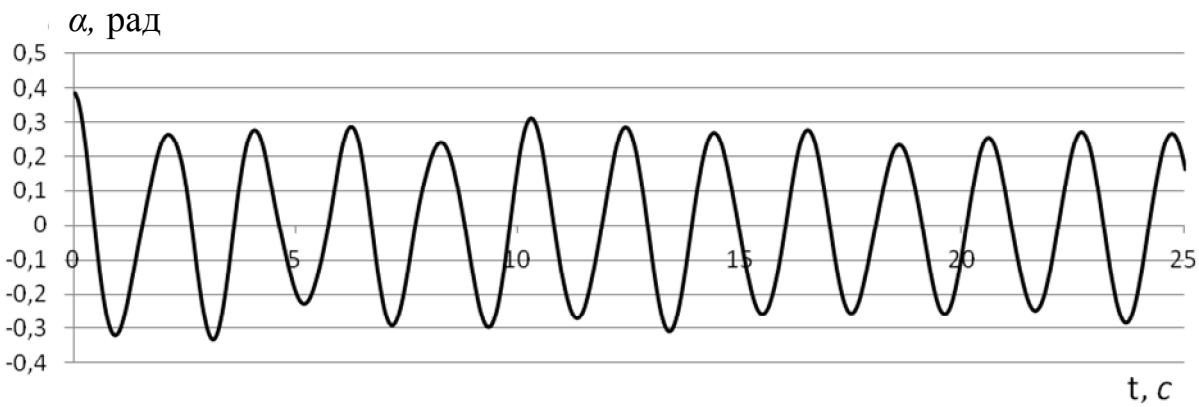


Рис. 3.15. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

Як видно з рис. 3.14, в процесі руху амплітуда першої антисиметричної форми зменшилася в десять разів протягом 25 с. При цьому рух резервуару відбувається з дуже незначними порушеннями періодичного закону (рис. 3.15). З порівняння розв'язків цієї задачі із задачами підпунктів 3.1.1.1, 3.1.1.2 випливає, що при зростанні маси резервуару відносно маси рідини вплив рідини на його динаміку знижується.

3.1.2.2. Довжина маятникового підвісу $l=0,5$

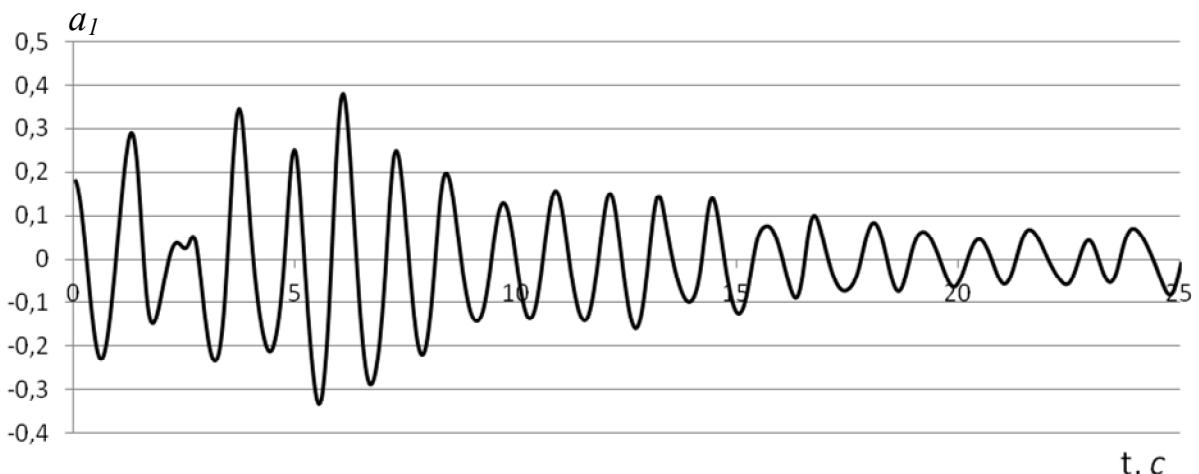


Рис. 3.16. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

На рис. 3.17 показано, що рух резервуару відбувається зі значними відхиленнями від періодичного закону. Після тривалого переходного періоду кут виходить на деякий квазістационарний режим. Тенденційно подібну поведінку демонструє і коливальний рух на вільній поверхні рідини (рис. 3.16, 3.18).

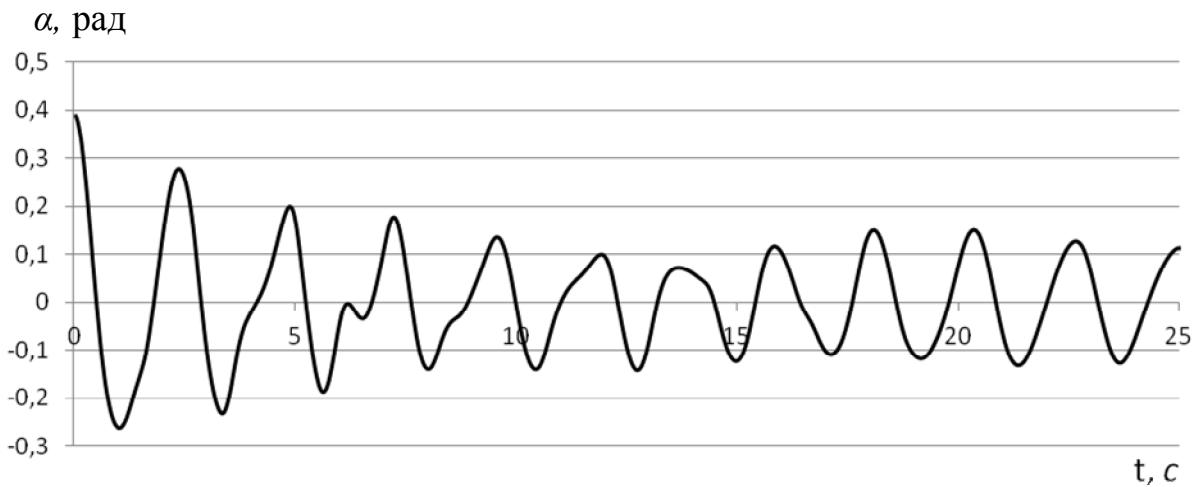


Рис. 3.17. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

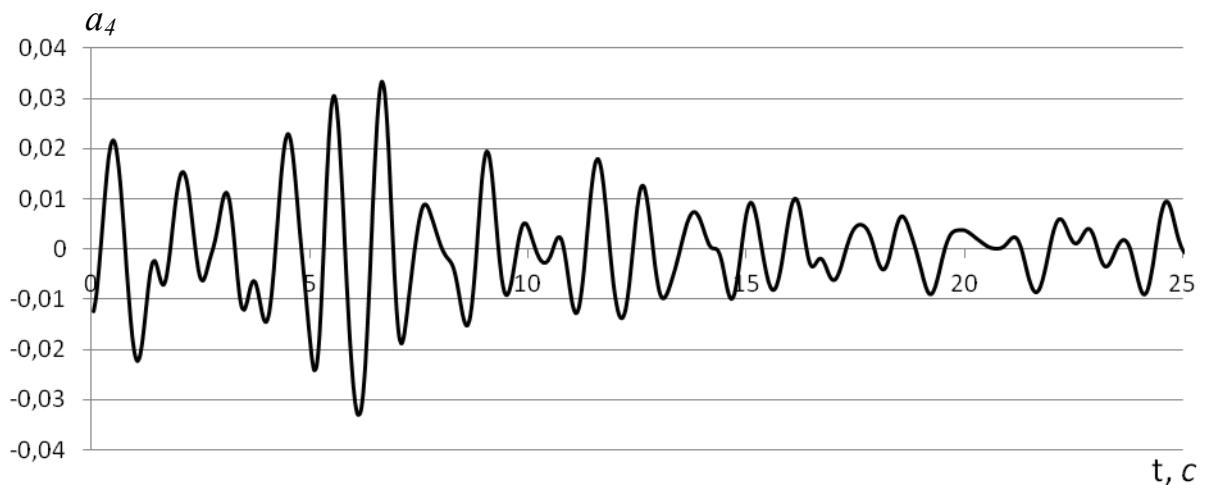


Рис. 3.18. Графік зміни в часі амплітуди другої антисиметричної форми коливань рідини.

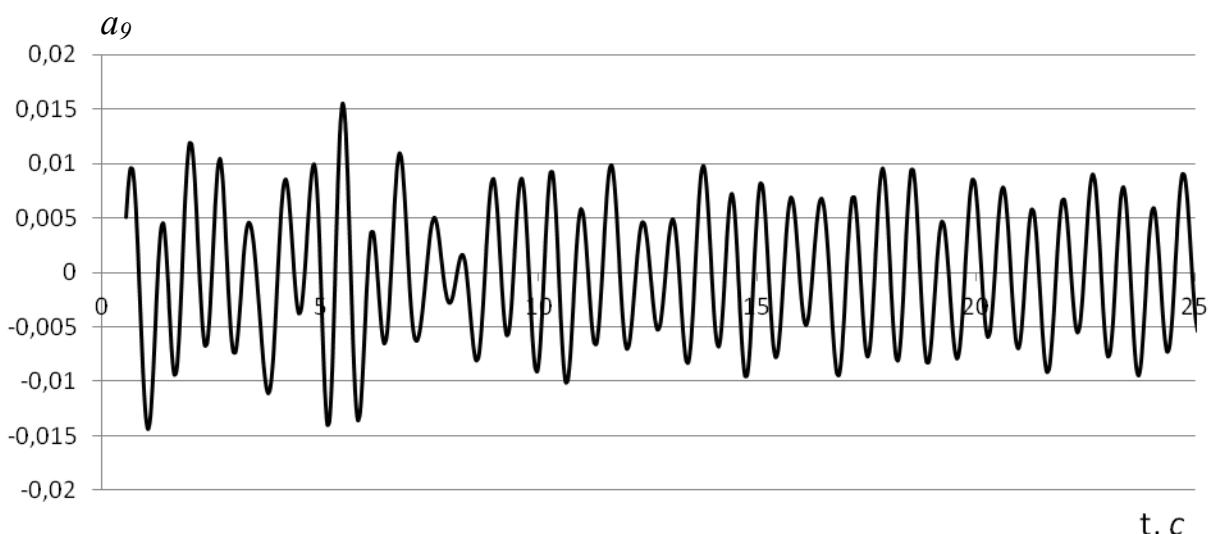


Рис. 3.19. Графік зміни в часі амплітуди третьої антисиметричної форми коливань рідини.

Суттєвого збурення зазнає перша антисиметрична форма коливань рідини, що є найбільш енергетично місткою, але протягом 7 періодів коливань резервуару амплітуда цієї форми помітно спадає з 0,4 до 0,05. Як було зазначено раніше, дисипація в побудованій моделі системи відсутня. Тому поясненням зниження коливань на вільній поверхні рідини, імовірно, є перерозподіл енергії в системі: енергія хвильового руху на вільній поверхні перейшла в деяку іншу форму руху. Докладно питання перерозподілу енергії між різними формами руху в системі розглянуто в підрозділі 4.2.

3.1.3. Співвідношення мас резервуару та рідини 1:2

Маса резервуару складає 0,5 маси рідини.

3.1.3.1. Довжина маятникового підвісу $l=0,25$

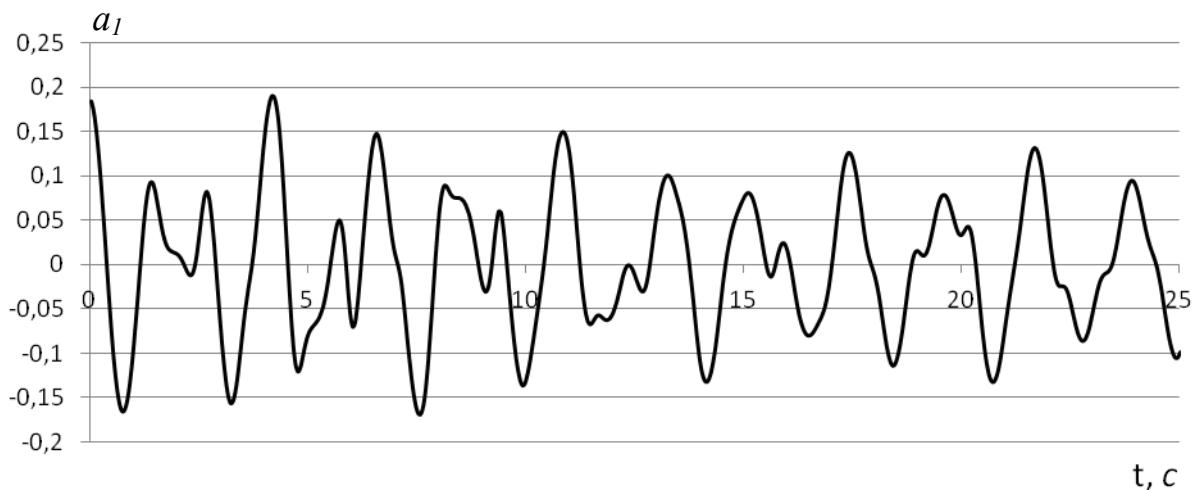


Рис. 3.20. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

Аналіз отриманих результатів показав, що із подальшим зростанням маси резервуару відносно маси рідини знижується вплив рідини на рух резервуару. Значні амплітуди коливань рідини на вільній поверхні (рис. 3.20) практично не привносять збурення у рух резервуару (рис. 3.21), який має практично періодичний характер. Зазначимо, що отримані дані є у відповідності з теоретичними результатами інших авторів, які говорять

про те, що при незначній відносно резервуару масі рідини впливом фактору сумісності можна знехтувати.

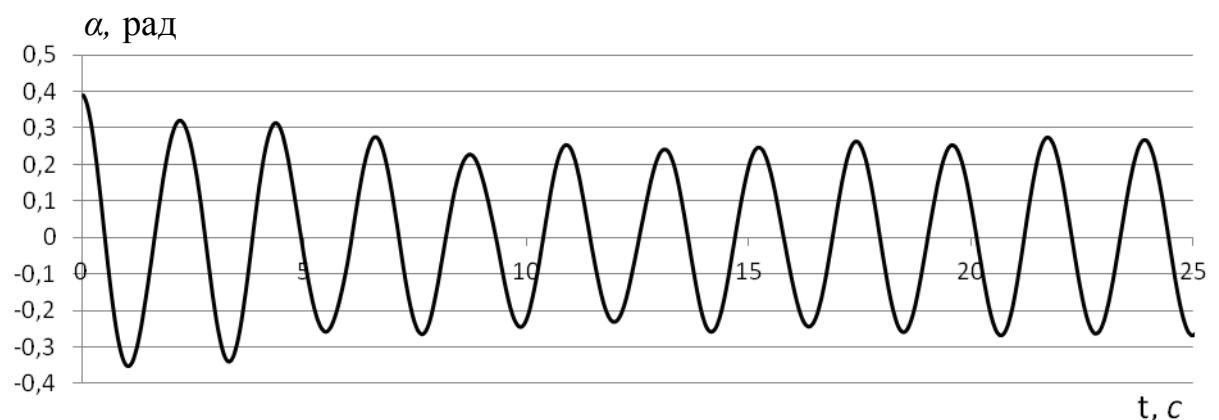


Рис. 3.21. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

3.1.3.2. Довжина маятникового підвісу $l=0,5$



Рис. 3.22. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

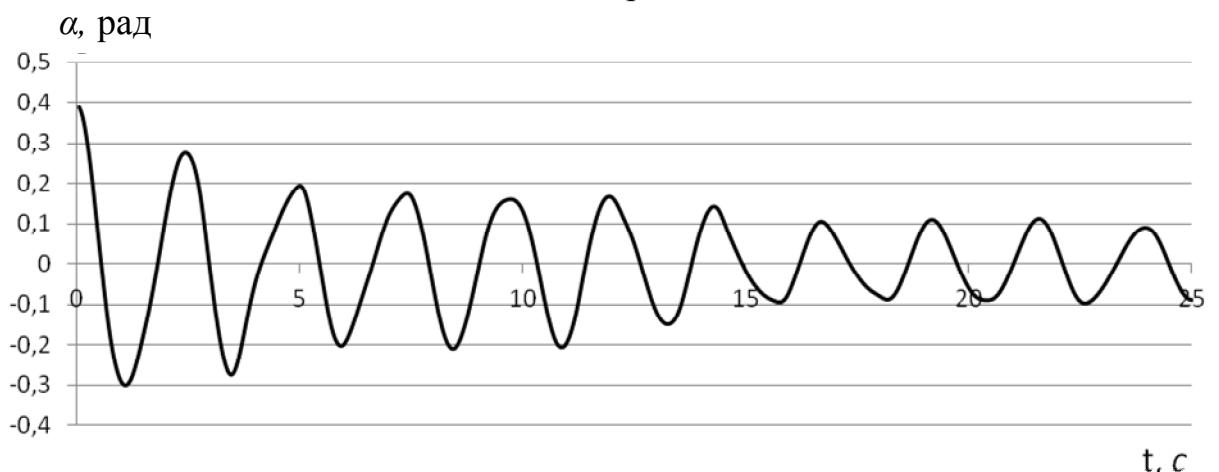


Рис. 3.23. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

Протягом приблизно 6 періодів коливань резервуару амплітуда першої антисиметричної форми згасає у декілька разів (рис. 2.22). Після деякого перехідного періоду рух виходить на певний квазістационарний режим (рис. 3.23). При згасанні хвильового руху на вільній поверхні характер руху резервуару уподібнюється до гармонічного.

Короткі висновки

Було розв'язано низку задач початкового кінематичного збурення руху резервуару з рідиною; основною метою було продемонструвати адекватність і працездатність побудованої математичної моделі динаміки системи. Отримані чисельні результати показали, що математична модель дозволяє описати теоретично очікувану поведінку системи, зокрема, наявні типові для нелінійних моделей ефекти, такі як взаємоз'язаність форм коливань вільної поверхні рідини, несиметричність профілю хвиль. Впродовж перехідного періоду коливання резервуару відбуваються з певними порушеннями гармонічного закону, що свідчить про взаємозалежність коливань на вільній поверхні і кутового руху резервуару. Було показано, що при зростанні маси резервуару відносно маси рідини знижується вплив хвильового руху на вільній поверхні на коливання резервуару. Таким чином, шляхом розв'язання такої тестової задачі було показано виконання законів симетрії та збереження в моделі.

Крім того, в усіх розглянутих задачах при початковому кінематичному збуренні рідини було виявлено суттєве зменшення амплітуди хвиль на вільній поверхні після проходження нетривалого перехідного періоду. Отриманий результат дозволяє висунути гіпотезу про те, що відбудувся перерозподіл енергії в системі і енергія хвильового руху на вільній поверхні перейшла в деяку іншу форму руху. Цей ефект є предметом подальших досліджень в даній роботі.

3.2. Імпульсне моментне збудження руху резервуару з рідиною

Для дослідження характеру впливу кутового руху резервуару на рух рідини з вільною поверхнею було розглянуто задачу руху системи під дією зовнішнього моментного навантаження у вигляді прямокутного імпульсу тривалістю τ с (рис. 3.24).

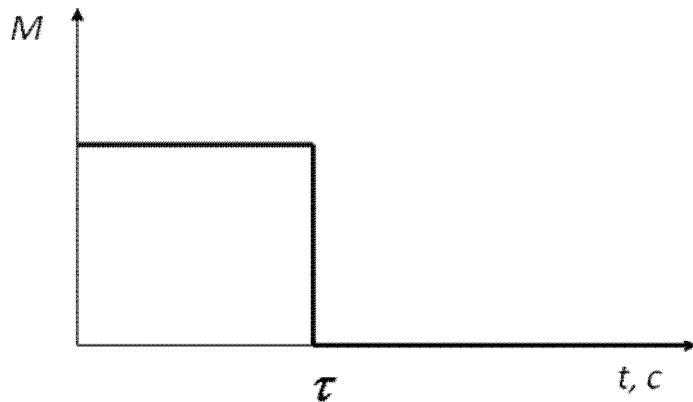


Рис. 3.24. Вигляд імпульсу зовнішнього навантаження.

Значення амплітуди імпульсу було підібране таким чином, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні знаходились в діапазоні розвинення хвиль з нелінійними властивостями $0,2R - 0,3R$, де R – радіус резервуару. Було розглянуто рух системи під дією імпульсів різної тривалості. Чисельні результати представлені для часткового випадку $\tau = 1$ с.

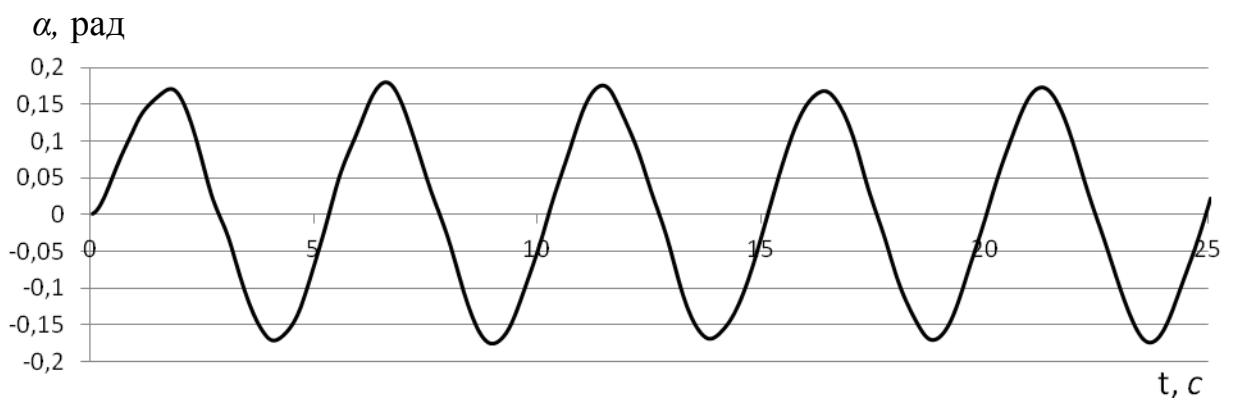


Рис. 3.25. Графік зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі.

На рис. 3.25–3.28 наведено графіки зміни в часі кута відхилення резервуару від вертикалі та кутової швидкості резервуару, а також

амплітуд першої антисиметричної та першої осесиметричної форм коливань для випадку довжини маятникового підвісу $l = 4R$, маса резервуару складає 0,25 маси рідини.

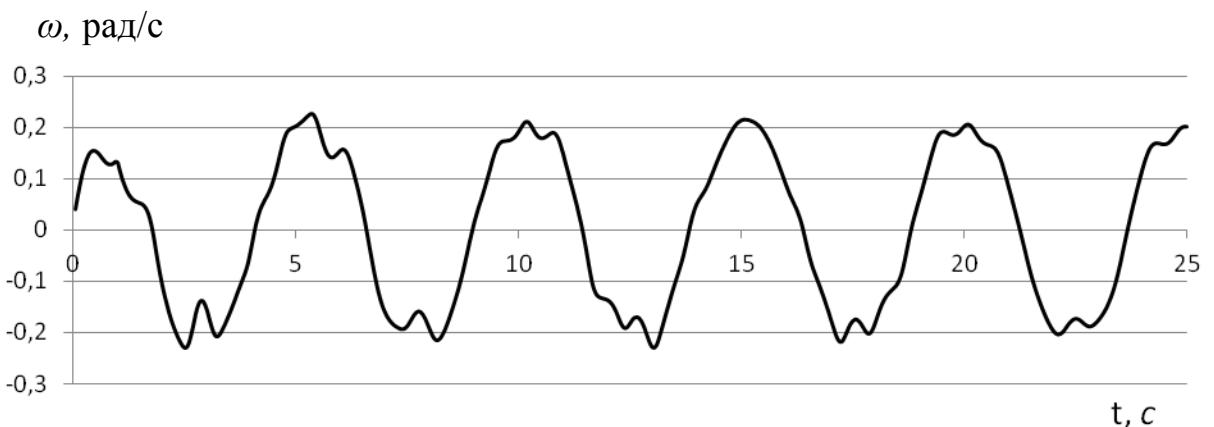


Рис. 3.26. Графік зміни в часі кутової швидкості резервуару.

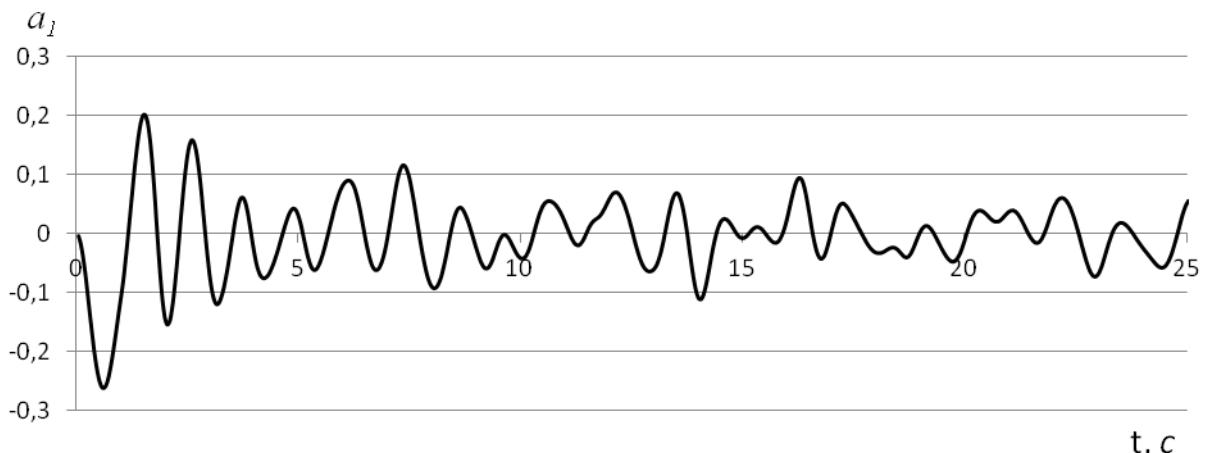


Рис. 3.27. Графік зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини.

Як показали отримані результати, рух резервуару відбувається із незначними відхиленнями від гармонічного закону (рис. 3.25). Коливання на вільній поверхні рідини згасають впродовж декількох періодів коливань резервуару, амплітуда першої антисиметричної форми коливань рідини знижується приблизно в 5 разів (рис. 3.27) у порівнянні з початком руху, тобто проявляється тенденція, аналогічна до задачі початкового кінематичного збурення руху, яка була розглянута в підрозділі 3.1. Процеси в системі є суттєво нелінійними, про що свідчить графік зміни в часі першої осесиметричної форми (рис. 3.28).

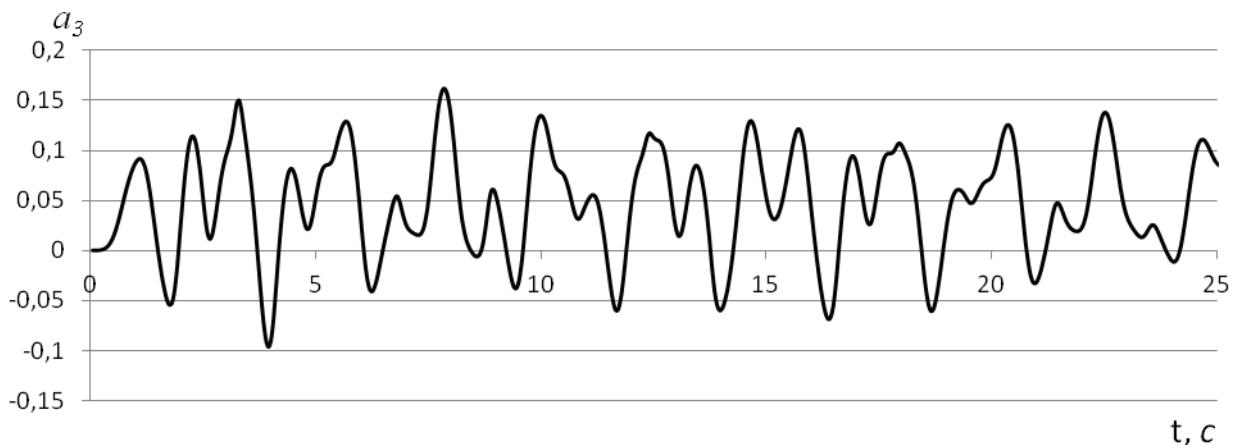


Рис. 3.28. Графік зміни в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини.

Важливим аспектом вивчення сумісного руху резервуарів з рідиною є знаходження величин сил впливу рідини на резервуар. Найбільший інтерес така задача становить при значній відносній масі рідини. Тому поряд з амплітудними параметрами руху було також проаналізовано характер динамічної взаємодії рідини та резервуару.

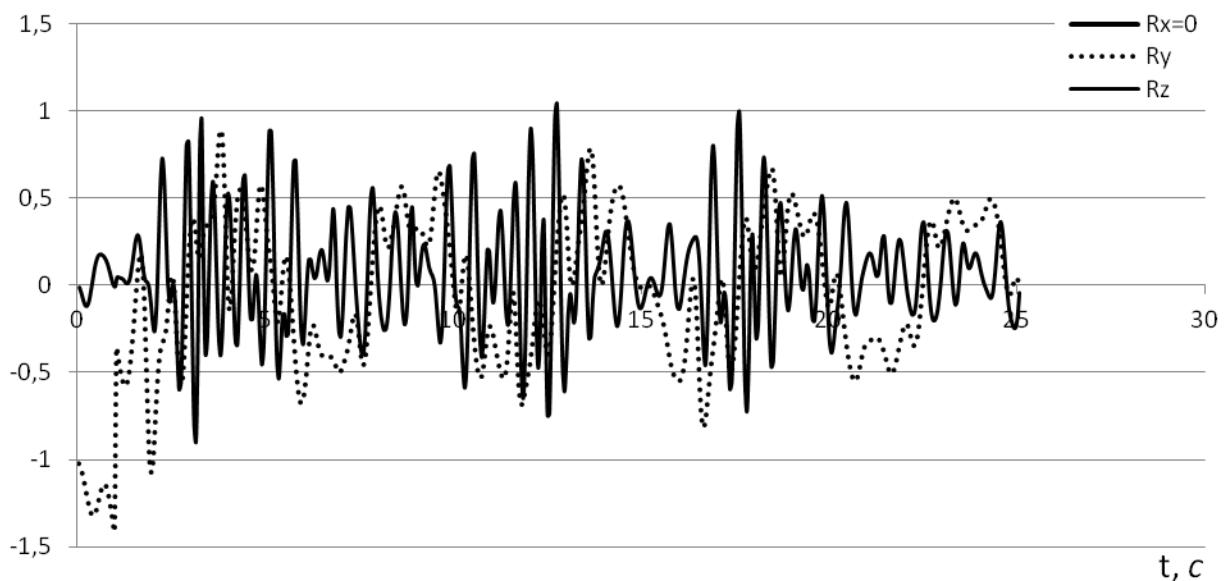


Рис.3.29. Графік зміни в часі проекцій головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару.

На рис. 3.29, 3.30 наведено графіки зміни в часі складових головного вектора та головного моменту сил тиску рідини на стінки резервуару ($l = 4R$, маса резервуару складає 0,25 маси рідини.). Складова R_x дорівнює нулю внаслідок початкових умов задачі, що розглядається. Графік на

рис. 3.29 демонструє наявність супергармонік в силах тиску рідини на стінки резервуару, що також є ознакою нелінійної природи задачі [93]. Більш детальному розгляду питання динамічної взаємодії рідини з резервуаром присвячено підрозділ 4.1.

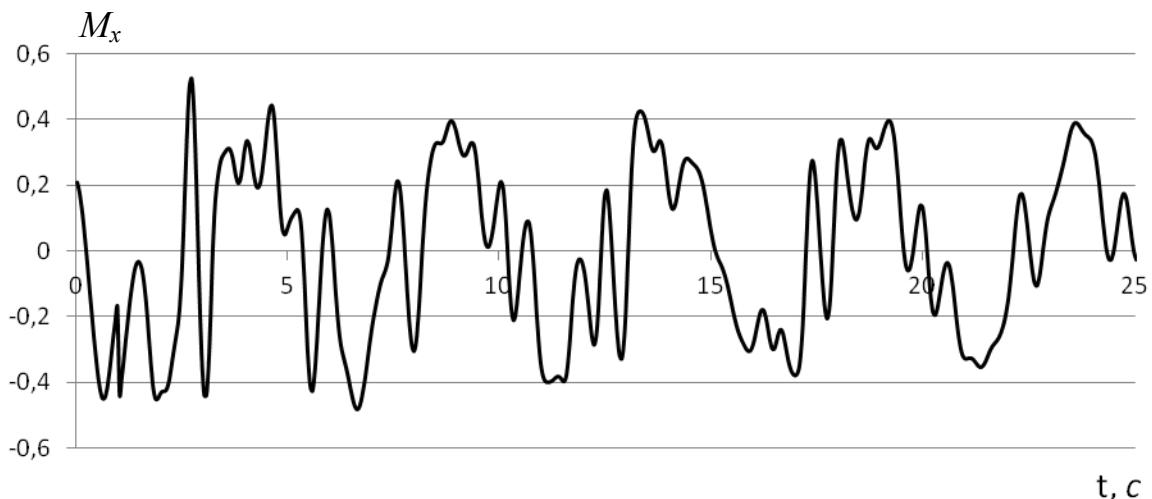


Рис. 3.30. Графік зміни в часі ненульової складової M_x головного моменту сил тиску рідини на стінки резервуару.

Короткі висновки

При імпульсному моментному збудженні руху системи рух резервуару є близьким до періодичного, разом з тим кутова швидкість резервуару демонструє значні розбіжності із гармонічним законом, що є наслідком взаємодії рідини та резервуару в процесі руху. При зменшенні маси рідини відносно резервуару вплив процесів на вільній поверхні рідини на рух системи знижується. Коливання вільної поверхні рідини мають суттєво нелінійний характер; зокрема, значних збурень зазнає перша осесиметрична форма коливань, що свідчить про наявність нелінійних зв'язків в системі.

Під час руху системи спостерігається явище, що вказує на цілеспрямований перерозподіл енергії: хвильовий рух на вільній поверхні рідини суттєво згасає після проходження 5–7 періодів коливань резервуару (тривалість переходного періоду залежить від величини імпульсу

зовнішнього навантаження), аналогічно до задачі початкового кінематичного збурення руху. Потрібно відзначити, що при динамічному збудженні руху таке зменшення амплітуд коливань вільної поверхні рідини проявляється більш суттєво у порівнянні з випадком початкового кінематичного збурення руху, спостерігаються значні прояви нелінійних властивостей хвиль (несиметричність профілю хвиль, наявність супергармонік в динамічних реакціях).

3.3. Сумісний рух системи під дією зовнішнього гармонічного навантаження

З метою вивчення резонансних характеристик було розглянуто задачу руху системи під дією зовнішнього періодичного моментного навантаження. В початковий момент часу система знаходиться в спокої в положенні рівноваги, зовнішнє моментне навантаження вигляду $M = M_0 \cos \omega t$ діє на систему протягом усього часу розгляду. Для представлення чисельних результатів використано такі параметри системи: маса резервуару складає 0,25 маси рідини, коефіцієнт узагальненої дисипації $k_v = 46$ (докладно введення дисипації і вибір значення коефіцієнта дисипації обґрунтовано в підрозділі 4.2).

3.3.1. Визначення частот сумісного руху системи

Для визначення власних частот системи резервуар – рідина потрібно розглянути рівняння сумісного руху системи (2.30) в лінеаризованій формі. Позначення, використані нижче, наведено в підрозділі 2.1. Враховуючи, що у випадку кутового руху резервуару $\varepsilon_i = 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v} \ddot{\alpha} + \Omega_1^2 a_1 &= 0; \\ \ddot{a}_1 E_{21}^{1*} + 2\ddot{\alpha} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{11} + E_{11}^2 \right) + \frac{2g}{\rho} \alpha (M_r h_r + M_l h_l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Після очевидних перетворень система (3.2) набуває вигляду (3.3):

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \frac{E_{11}^{1*}}{2\alpha_1^v} \ddot{\alpha} + \Omega_1^2 a_1 &= 0; \\ \ddot{\alpha} + \frac{\rho E_{21}^{1*}}{2(J_{res}^{11} + \rho E_{11}^2)} \ddot{a}_1 + \frac{g(M_r h_r + M_l h_l)}{J_{res}^{11} + \rho E_{11}^2} \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Розглядаючи кожне з рівнянь (3.3) окремо, отримаємо парціальні частоти системи в наступному вигляді:

$$\omega_{a_1} = \sqrt{\frac{\kappa_1 g}{R} \tanh\left(\frac{\kappa_1 H}{R}\right)}; \quad (3.4)$$

$$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{M_r h_r + M_l h_l}{J_{res}^{11} + \rho E_{11}^2} g}.$$

Власні частоти в сумісному русі системи при кутових рухах резервуару визначаються з системи (3.3) на основі умови рівності нулю визначника цієї системи. Аналогічно було отримано формули частот вищих форм коливань рідини. Було показано, що при врахуванні фактору сумісності значно змінюються власні частоти коливань системи. При цьому частина власних частот також залежить і від довжини маятникового підвісу. На рис. 3.31 наведено розподіл парціальних та власних частот резервуару та рідини у випадку маятникового підвісу довжиною $l = R$, R – радіус резервуару. Тут і далі всі значення частот подаються в $1/c$.

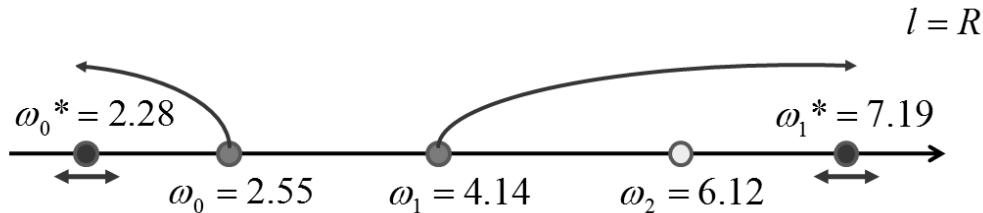


Рис. 3.31. Розподіл парціальних та власних частот системи резервуар – рідина, $l = R$.

Введемо наступні позначення. Парціальні частоти системи:

ω_0 – частота фізичного маятника, ω_1 – першої антисиметричної форми рідини, ω_2 – першої осесиметричної форми коливань рідини.

Власні частоти системи в сумісному русі:

ω_0^* – власна частота фізичного маятника, ω_1^* – першої антисиметричної форми коливань рідини, ω_2^* – першої осесиметричної форми коливань рідини.

Як видно зі схеми на рис. 3.31, власні частоти маятника та першої форми коливань рідини знаходяться зовні інтервалу, обмеженого значеннями парціальних частот системи. Такий розподіл частот є у відповідності з теоремою про розміщення власних частот відносно парціальних в системах з двома ступенями вільності [70].

Як відомо, перша осесиметрична форма не зазнає збурення внаслідок зовнішнього впливу на резервуар напряму, тому її власна частота зберігає своє значення в сумісному русі; також відсутня залежність від довжини підвісу. Отже, власна частота осесиметричної форми в сумісному русі збігається з її парціальною частотою:

$$\omega_2^* = \omega_2 = \text{const.} \quad (3.5)$$

Натомість власні частоти резервуару як фізичного маятника та першої антисиметричної форми коливань рідини змінюються в залежності від довжини маятникового підвісу l . Для різних значень довжин підвісу значення власної частоти ω_i^* будуть різні. Наприклад, у випадку $l = 7R$ відповідне значення частоти $\omega_1^* = 5,8$, частота першої антисиметричної форми стає першою. Для коротких підвісів, навпаки, частота першої осесиметричної форми стає першою, саме цим пояснюється зміна поведінки системи на коротких підвісах, докладно залежність динаміки системи від довжини підвісу розглянуто в підрозділі 4.1.

3.3.2. Резонансні властивості системи

Цікавим в контексті вивчення резонансних властивостей системи є дослідження поведінки системи для значень частоти ω зовнішнього навантаження, близьких доожної з частот, представлених на схемі рис. 3.31. Слід очікувати прояву резонансних ефектів в поведінці системи при значеннях частоти зовнішнього навантаження, близьких до власних частот системи в сумісному русі. На парціальних частотах не повинно бути резонансних ефектів. Зазначимо, що стосовно другої частоти сумісного

руху системи ω_1^* є певні складності у відстежуванні резонансу внаслідок високої добротності резонансної кривої.

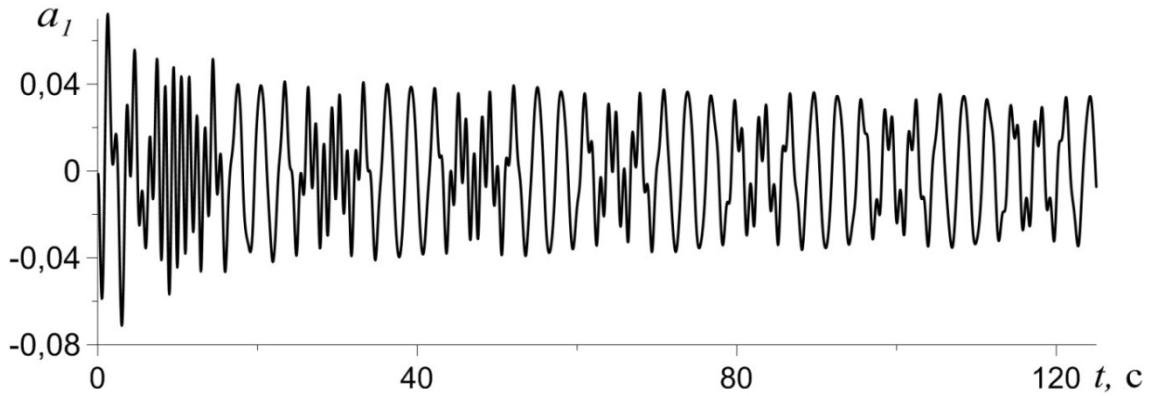


Рис. 3.32. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 2$.

Для значення частоти зовнішньої сили $\omega = 2,28$, яке збігається з однією з частот сумісного руху системи (власна частота фізичного маятника), побудована чисельна модель показує стрімкий вихід на резонанс, швидке зростання амплітуд форм коливань за короткий час перевершує межі припустимих значень амплітуд розробленої моделі.

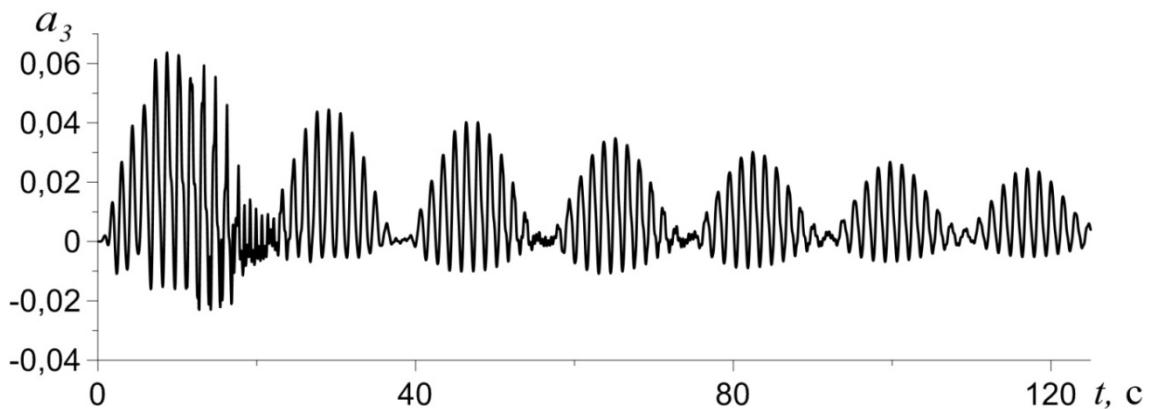


Рис. 3.33. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини, $\omega = 2$.

Дослідимо поведінку системи при частоті зовнішнього навантаження в околі цього значення. Розглянемо випадок $\omega = 2$. Як видно зі схеми частот на рис. 3.31, це значення частоти знаходиться в околі власної частоти коливань маятника. Коливання резервуару є суттєво модульованими (рис. 3.34), рух рідини на вільній поверхні також є суттєво нелінійним

впродовж всього часу розгляду (120 с), перша осесиметрична форма зазнає збурення зі значної амплітудою (рис. 3.32).

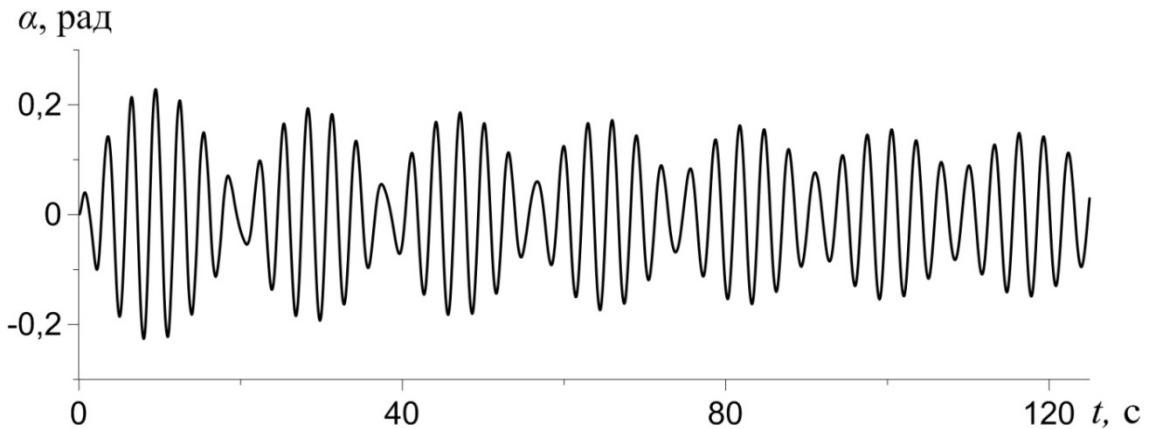


Рис. 3.34. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $\omega = 2$.

Крива зміни в часі першої осесиметричної форми на рис. 3.33 практично повністю знаходитьться вище нуля, що показує несиметричність профілю хвилі; наявні значні модуляції коливань, спостерігаються ділянки стагнації, або антирезонансу. Виходу системи на усталений режим руху не відбувається.

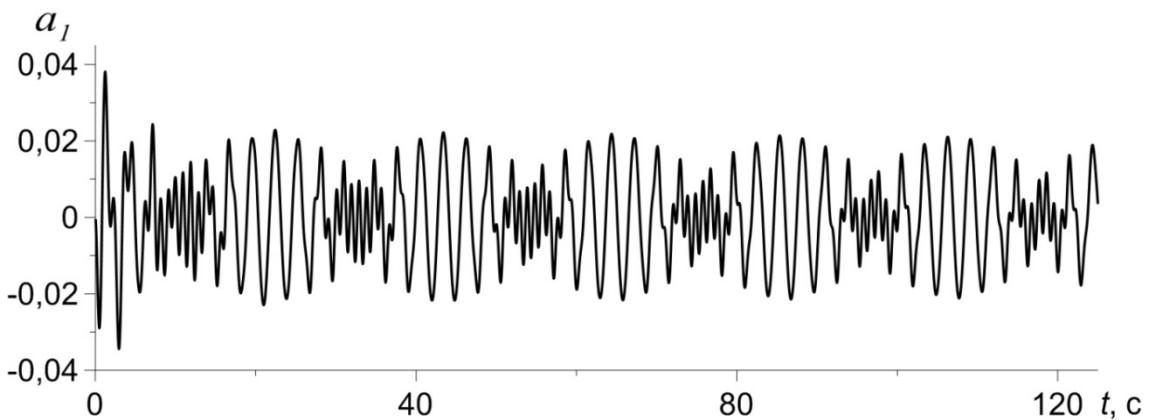


Рис. 3.35. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 2,1$.

Є підстави очікувати більш яскравих проявів резонансних властивостей системи при наближенні значень частоти зовнішнього навантаження до першої власної частоти сумісного руху системи. Отже, розглянемо випадок руху системи під дією зовнішнього гармонічного навантаження частотою $\omega = 2,1$.

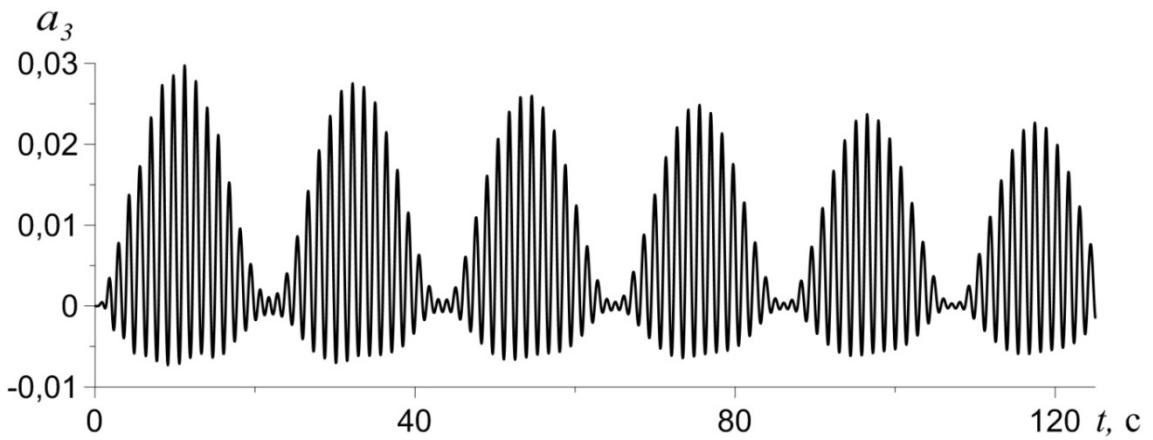


Рис. 3.36. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини, $\omega = 2,1$.

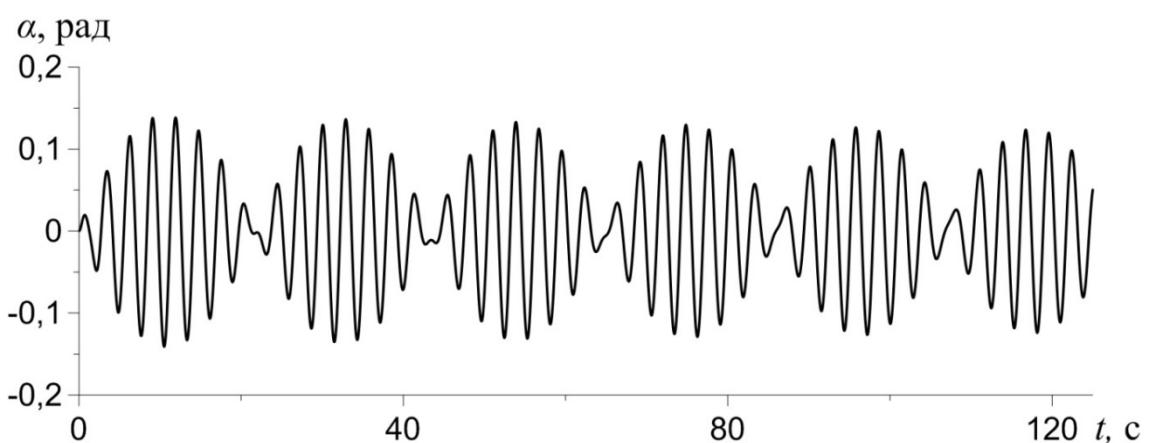


Рис. 3.37. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $\omega = 2,1$.

Кут відхилення резервуару від вертикалі практично не згасає протягом руху і є суттєво модульованим, як видно з рис. 3.37. Перша осесиметрична форма, яка є показником проявів нелінійних властивостей системи, в цьому випадку зазнає суттєвого збурення, що показує графік на рис. 3.36. Потрібно врахувати те, що при максимальній амплітуді осесиметричної форми на стінці 0,15 фактична її величина є в 2,5 рази більшою. Таким чином, в околі власної частоти резервуару динаміка системи є істотно нелінійною. При цьому амплітуда першої антисиметричної форми є незначною, проте коливання на вільній поверхні рідини суттєво модульовані, причому період модуляції не збігається з періодом модуляції коливань резервуару (рис. 3.34, 3.35).

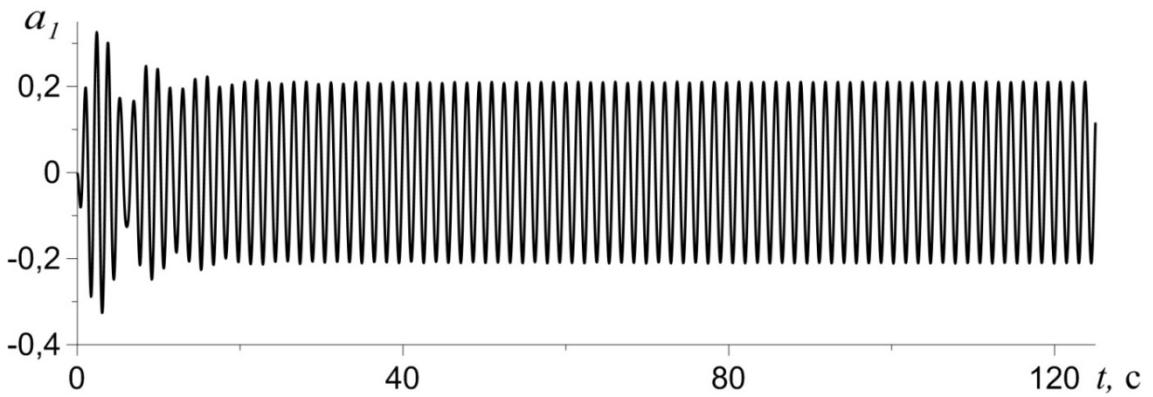


Рис. 3.38. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 4,14$.

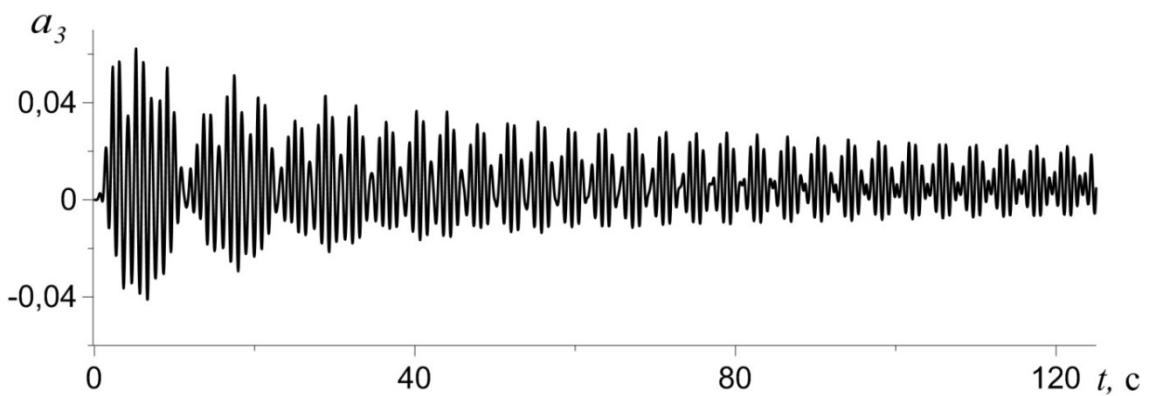


Рис. 3.39. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини, $\omega = 4,14$.

Розглянемо рух системи при частоті зовнішнього навантаження $\omega = 4,14$, що збігається з парціальною частотою першої антисиметричної форми коливань рідини. Після короткого переходного періоду амплітуди коливань на вільній поверхні знижуються (рис. 3.38), максимуми амплітуд першої антисиметричної форми коливань рідини досягають певного сталого значення, спостерігається квазіусталений рух рідини. Амплітуда першої осесиметричної форми є малою на початку і суттєво знижується в процесі руху (рис. 3.39), що свідчить про незначний вплив нелінійностей на коливальний процес. Амплітуда коливань резервуару також знижується (рис. 3.40). Виходу системи на усталений режим руху не відбувається, як добре видно з графіку на рис. 3.40, хоча зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми в значній мірі подібна до гармонічного закону (рис. 3.38).

Дослідимо динаміку системи при частоті зовнішнього навантаження $\omega = 7,19$, що збігається з власною частотою першої антисиметричної форми коливань рідини.

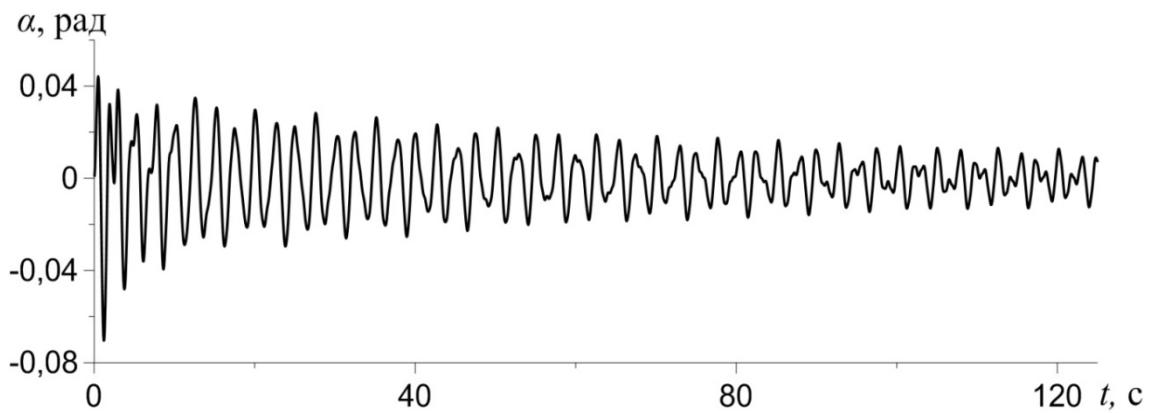


Рис. 3.40. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $\omega = 4,14$.

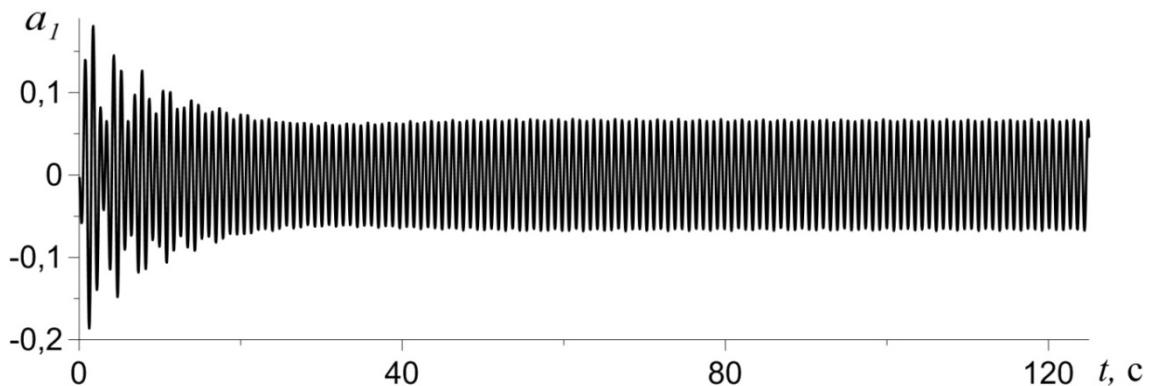


Рис. 3.41. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 7,19$.

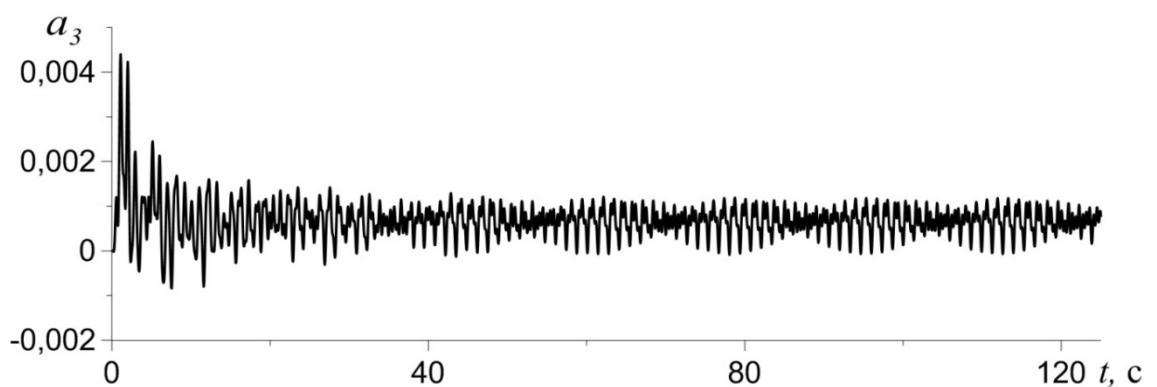


Рис. 3.42. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини, $\omega = 7,19$.

Система демонструє короткий перехідний період, після якого відбувається фактичний перехід на квазіусталений режим руху

(рис. 3.40, 3.41). Значення амплітуди першої осесиметричної форми є малими, як видно з графіку на рис. 3.42, прояви нелінійних властивостей системи незначні.

3.3.3. Виникнення внутрішніх резонансів

Оскільки, як було показано в пункті 3.3.1, є група власних частот системи, які змінюють значення при зміні довжини маятникового підвісу, та група незмінних частот (власні частоти форм коливань рідини з окружним номером $m \neq 1$), в системі стає можливим виникнення внутрішніх резонансів при збігу значень власних частот на певних довжинах підвісу і зміна черговості розташування власних частот в порівнянні з розташуванням парціальних при їх розміщенні за зростанням.

Один з таких механічних ефектів було детально вивчено в даній роботі. Встановлено, що існує такий набір параметрів системи, при якому власні частоти першої антисиметричної та першої осесиметричної форм коливань рідини рівні за значенням:

$$\omega_1^* = \omega_2^* = 6,12. \quad (3.6)$$

Дослідження показали, що на частоті зовнішнього навантаження $\omega = 6,12$ при довжині підвісу $l = 3,08$ в системі виникають резонансні ефекти (внутрішній резонанс), що проявляються у значному зростанні амплітуди першої осесиметричної форми коливань після тривалого часу руху.

Важливо відзначити, що при довжинах підвісу, менших за $l = 3,08$, власні частоти ω_1^* та ω_2^* міняються місцями (див. схему на рис. 3.31). Отже, на коротких підвісах власна частота першої антисиметричної форми стає не першою, а другою за значенням власною частотою рідини. Оскільки перша антисиметрична форма є найбільш енергомісткою, ця зміна порядку власних частот суттєво впливає на резонансні властивості

системи. Саме цим фактом пояснюються особливості динаміки системи на коротких підвісах, які буде детально розглянуто в підрозділі 4.1.

Розглянемо поведінку системи резервуар – рідина для двох значень частоти зовнішнього навантаження: $\omega = 6,11$ – частота, близька до частоти внутрішнього резонансу (3.6), і $\omega = 6,25$ – на певній віддалі від резонансного значення.

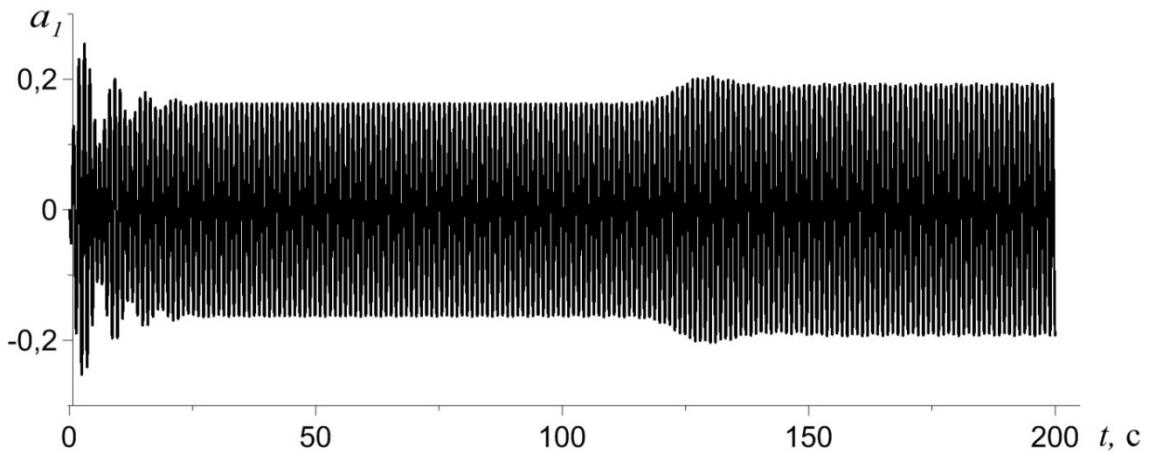


Рис. 3.43. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 6,11$.

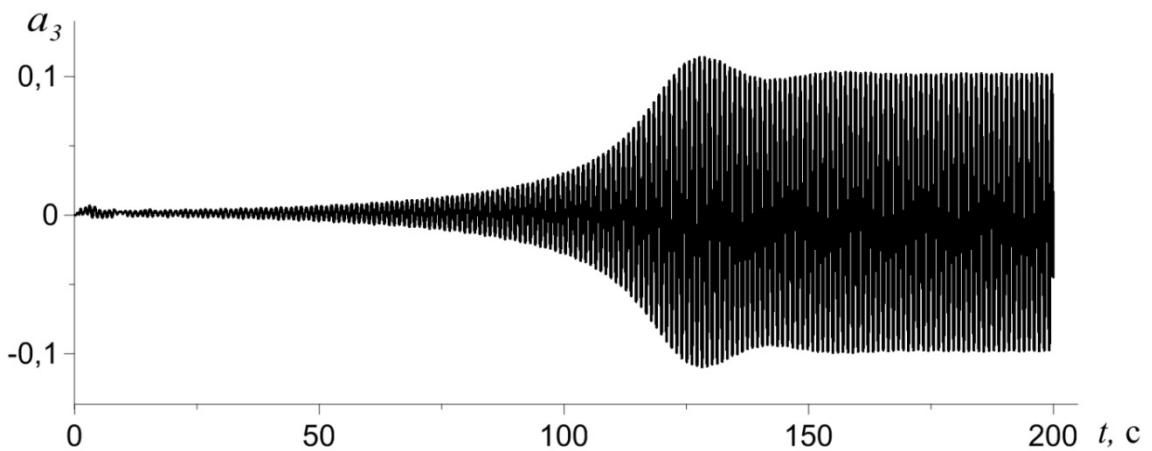


Рис. 3.44. Зміна в часі першої осесиметричної форми коливань рідини, $\omega = 6,11$.

В першому випадку амплітуди коливань рідини на вільній поверхні демонструють зростання з виходом на деяке сталое значення. Перша антисиметрична форма (рис. 3.43) зазнає досить суттєвих збурень вже на початку руху, на відміну від осесиметричної форми (рис. 3.44), яка лише

після приблизно 80 періодів коливань резервуару стрімко зростає і сягає значення $0,1R$.

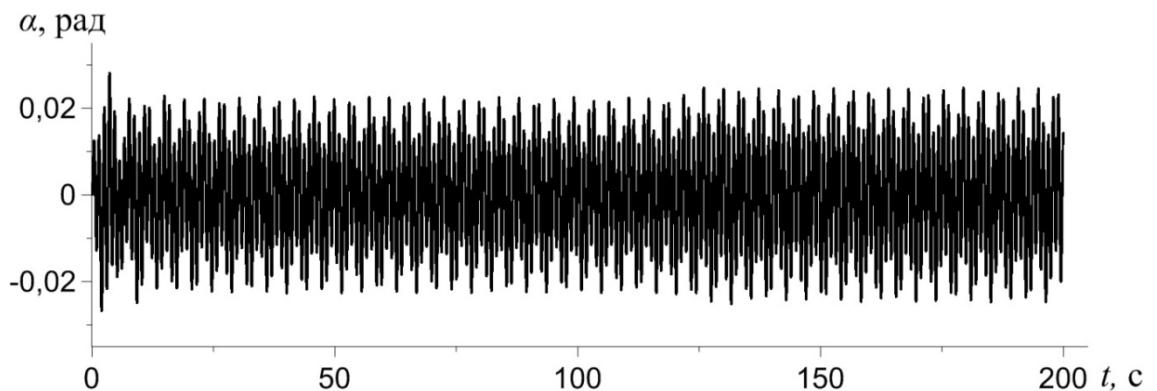


Рис. 3.45. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $\omega = 6,11$.

Такий ефект може бути як проявом резонансних властивостей механічної системи, так і результатом накопичення обчислювальної похибки, тому потребує додаткового дослідження. Для отримання відповіді на це питання було проаналізовано систему рівнянь руху механічної системи.

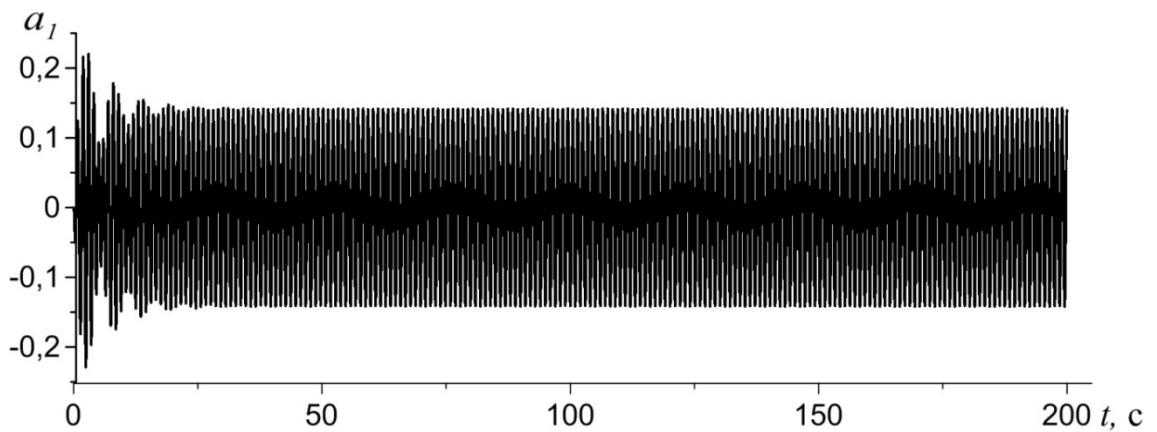


Рис. 3.46. Зміна в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 6,25$.

У випадку зарезонансної частоти зовнішнього навантаження система після нетривалого переходного періоду виходить на деякий квазіусталений режим руху. Поведінка першої антисиметричної форми коливань рідини подібна до гармонічної, як видно з графіка на рис. 3.47.

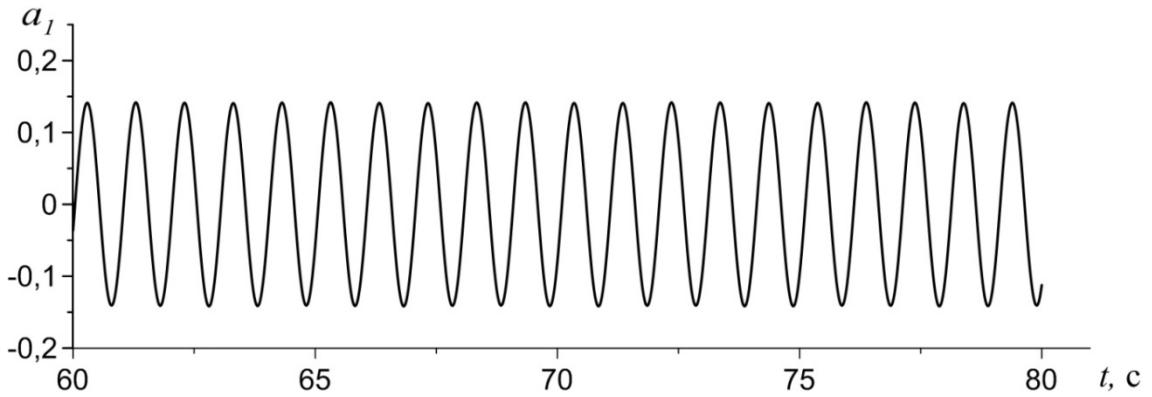


Рис. 3.47. Фрагмент графіка зміни в часі першої антисиметричної форми коливань рідини, $\omega = 6,25$.

Повертаємось до вивчення руху в околі резонансу. Динаміка системи, що досліджується, описується системою рівнянь в дискретній формі (2.30), яка зводиться до нормальній форми Коші і далі застосовується метод Рунге – Кутта (побудові рівнянь руху системи присвячено підрозділ 2.4). Було проведено порівняння результатів для різних значень кроку інтегрування, що дало підстави вважати, що спостережений процес не є результатом накопичення обчислювальної похибки.

Було також проведено спектральний аналіз, який показав, що при частоті зовнішнього навантаження в околі резонансу узагальнена сила в правій частині відповідного рівняння для осесиметричної форми коливань рідини містить компоненту з частотою, близькою до резонансної; для частот поза резонансною ділянкою така складова відсутня. На рис. 3.48, 3.49 наведено спектрограми для першої осесиметричної форми коливань у випадку частоти зовнішнього навантаження $\omega = 6,11$ (близька до резонансної) та $\omega = 6,25$ (зарезонансна) відповідно. На відміну від резонансу на власній частоті фізичного маятника, діапазон частот в околі власної частоти рідини, в якому проявляються резонансні ефекти, є дуже вузьким, і найменше відхилення призводить до кардинальної зміни поведінки системи: осесиметрична форма, що є показником нелінійності коливань, практично не зазнає збурення, а коливання за домінантною

першою формою відбуваються з незначними відхиленнями від гармонічного закону.

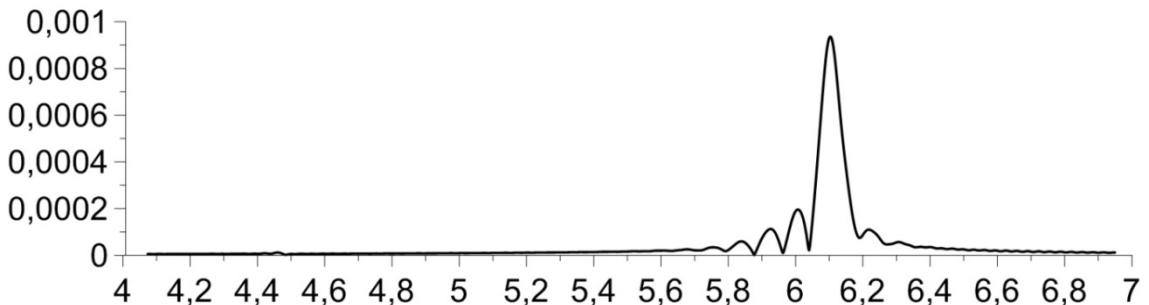


Рис. 3.48. Спектрограма для першої осесиметричної форми, $\omega = 6,11$.

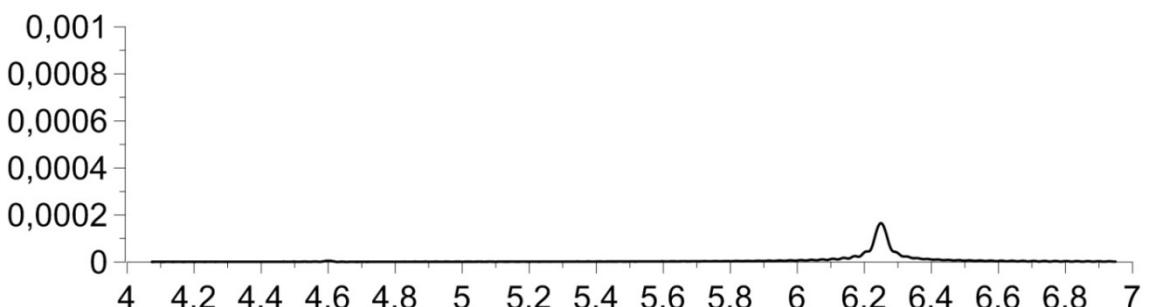


Рис. 3.49. Спектрограма для першої осесиметричної форми, $\omega = 6,25$.

Описаний ефект є тим більш цікавим через те, що не можна збудити осесиметричну форму коливань рідини через жодний зовнішній вплив на резервуар, її збурення можливе лише через взаємодію з іншими формами коливань рідини. Таким чином, було показано, що поясненням механічних ефектів в околі внутрішнього резонансу антисиметричної та осесиметричної форм коливань рідини є нелінійний перерозподіл енергії між формами коливань рідини в системі.

Короткі висновки

Сумісні коливання системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі мають власні частоти, які значно відрізняються від парціальних частот коливань системи. На резонансній частоті, що відповідає домінуванню кутових коливань маятника, резонанс яскраво проявляється, коливання є суттєво модульованими, наявні ділянки

стагнації (антирезонансу). Для резонансної частоти, що відповідає домінуванню коливань вільної поверхні рідини за першою формою, резонансні ефекти практично непомітні. Для всіх інших частот, включаючи парціальні частоти коливань системи, резонансних ефектів не було спостережено. Для частот зовнішнього навантаження, що перевищують власну частоту першої форми коливань рідини, система має тенденцію до квазістійкого режиму руху. При цьому важливо підкреслити, що виходу на усталений режим руху не відбувається ні на парціальних, ні на власних частотах сумісного руху системи, цей результат є у повній відповідності з результатами теоретичних досліджень та експериментів інших авторів.

Оскільки є група власних частот системи, які залежать від довжини маятникового підвісу (частоти антисиметричних форм коливань), та незмінні власні частоти (частоти осесиметричних форм), в системі створюються передумови для виникнення внутрішніх резонансів для певних довжин підвісу та співвідношень мас резервуару та рідини. Було виявлено, що один з таких резонансів призводить до нетипового механічного явища – зростання енергії осесиметричної форми коливань рідини внаслідок дії зовнішнього навантаження на резервуар після тривалого часу руху. Сутність даного явища було підтверджено проведеним спектральним аналізу рівнянь системи. Оскільки, як відомо, осесиметрична форма не може бути збурена безпосередньо внаслідок рухів резервуару, поясненням цього ефекту є прояв нелінійних механізмів перерозподілу енергії в системі.

Виявлено, що при коротких довжинах маятникового підвісу в системі відбувається зміна порядку власних частот, частота першої антисиметричної форми рідини стає другою за значення власною частотою рідини, на відміну від випадку довгих підвісів, де ця частота є першою за значенням. Цим пояснюється відмінність поведінки системи на коротких

підвісах, зниження прояву нелінійних ефектів та практично відповідний лінійній теорії рух на ультракоротких підвісах.

Висновки до розділу 3

Проведено аналіз чисельних розв'язків задач про рух системи циліндричний резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішнього імпульсного та періодичного моментного навантаження, а також у випадку початкового кінематичного збурення руху. Показано, що побудована математична модель адекватно описує нелінійну динаміку механічної системи, коректно відображає нелінійні зв'язки між формами коливань рідини та інші механічні ефекти, які визнано характерними проявами нелінійної природи задачі.

Для задачі імпульсного збудження та кінематичного збурення руху виявлено явище згасання коливань на вільній поверхні рідини після нетривалого перехідного періоду.

Встановлено частотні особливості системи в сумісному русі; вивчено зміну резонансних властивостей системи в залежності від довжини маятникового підвісу; показано передумови для виникнення внутрішніх резонансів та проведено детальний аналіз резонансу перших антисиметричної та осесиметричної форм коливань рідини.

РОЗДІЛ 4. МЕХАНІЧНІ ЕФЕКТИ, ЩО ВИНИКАЮТЬ ПРИ СУМІСНОМУ КУТОВОМУ РУСІ СИСТЕМИ

В цьому розділі дисертаційної роботи проведено дослідження динаміки системи, зокрема, динамічної взаємодії рідини з резервуаром в залежності від довжин маятникового підвісу, висвітлені особливості перерозподілу енергії між різними формами руху в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі. Проведено порівняння отриманих чисельних даних з лабораторним експериментом та отримано добре узгодження результатів на якісному рівні.

Як показав аналіз чисельних результатів моделювання руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією різних видів зовнішнього навантаження, проведений в розділі 3, в процесі сумісного руху такої системи частотні та інші характеристики системи зазнають суттєвої зміни в залежності від довжин підвісу і внаслідок врахування сумісності руху.

На тестових задачах початкового кінематичного збурення (підрозділ 3.1) та імпульсного моментного збудження руху (підрозділ 3.2) був виявлений процес згасання хвильового руху на поверхні рідини і висунуто гіпотезу про наявність цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху. Тому було проведено дослідження залежності динаміки системи від довжини підвісу в задачах з кінематичним збуренням та імпульсним збудженням руху, а також проаналізовано зміну в часі складових кінетичної енергії системи, що описують різні форми руху.

4.1. Залежність динаміки системи від довжини маятникового підвісу

Було розглянуто задачі початкового кінематичного збурення руху та імпульсного збудження системи в залежності від довжини маятникового підвісу. Рух системи було вивчено для довжин підвісу $0 - 25R$ протягом 25 с, що відповідає 20–25 періодам коливань рідини за першою антисиметричною формою. Чисельні результати наведені для випадку руху системи під дією зовнішнього імпульсного моментного навантаження. Проаналізовано зміну амплітуди перших антисиметричної та осесиметричної форм коливань рідини, кута відхилення резервуару від вертикалі, динамічну взаємодію рідини з резервуаром. Зауважимо, що перша осесиметрична форма визначає несиметричність профілю хвиль на вільній поверхні і її можна розглядати як міру прояву нелінійностей коливального процесу.

4.1.1. Класифікація діапазонів довжин підвісу за характером руху системи

Було встановлено, що в залежності від довжини маятникового підвісу можна виділити три діапазони поведінки системи. На довгих підвісах поведінка системи уподібнюється до випадку поступального руху, коливальний процес є суттєво нелінійним. На коротких підвісах, навпаки, прояви нелінійностей значно знижуються. Такі відмінності у поведінці системи пояснюються зміною порядку взаєморозташування величин власних частот сумісного руху, яка відбувається на коротких підвісах. Докладно питання розподілу власних частот в системі було розглянуто в підрозділі 3.3. Нижче подано характеристику кожного з діапазонів довжин підвісу.

1. Довгі підвіси, діапазон довжин $5R - 25R$

Для аналізу поведінки системи розглянемо графіки зміни в часі форм коливань рідини та кута відхилення резервуару для двох значень довжин маятникового підвісу із цього діапазону: $25R, 10R$.

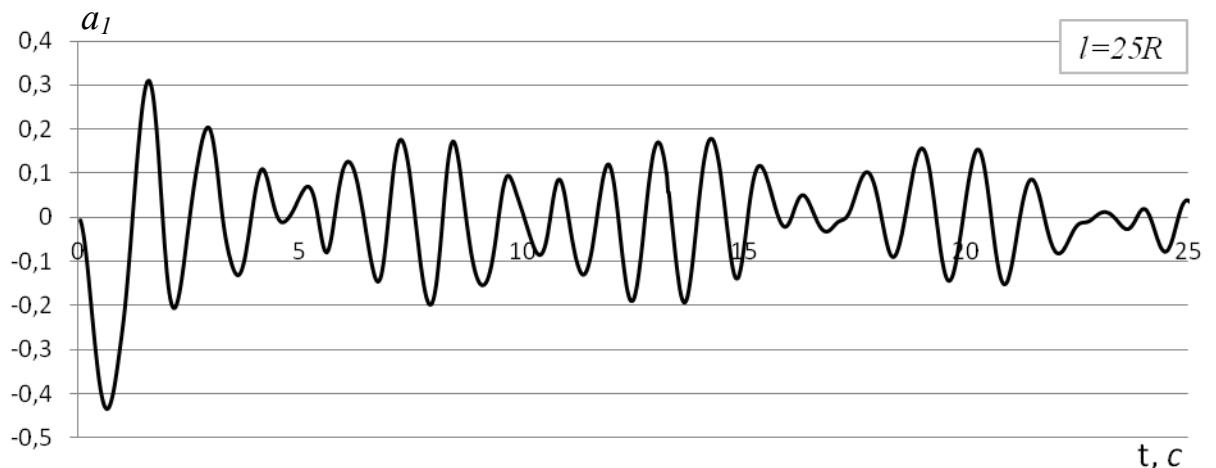


Рис. 4.1. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l = 25R$.

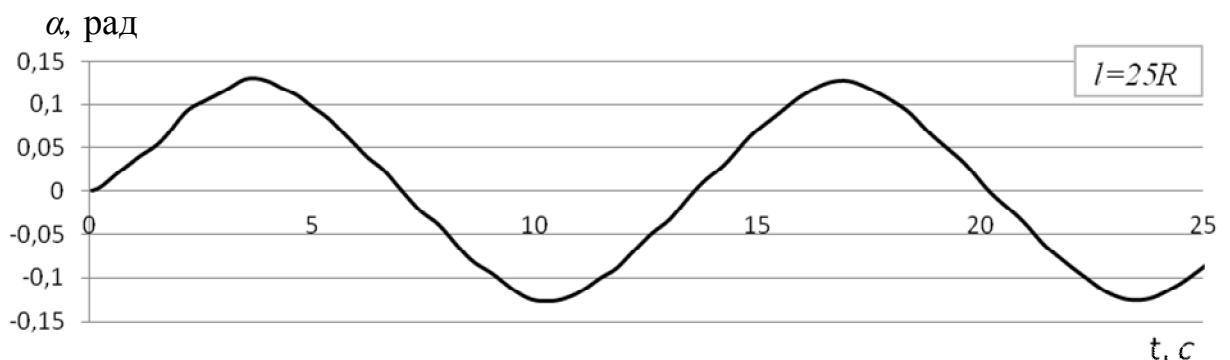


Рис. 4.2. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l = 25R$.



Рис. 4.3. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l = 25R$.

Для довжин $5R - 25R$ і більше розвинення хвилеутворення в значній мірі подібне до випадку поступального руху резервуару, який було, зокрема, досліджено в роботі [8, 85] для випадку руху резервуару у формі усіченого конуса. Подібно до задачі поступального руху резервуару з рідиною, для амплітуд коливань рідини на вільній поверхні суттєво проявляється модуляція, період якої не дорівнює періоду коливань резервуару (рис. 4.1, 4.2), а, як показують теоретичні дослідження [8], залежить від співвідношення маси рідини та резервуару.

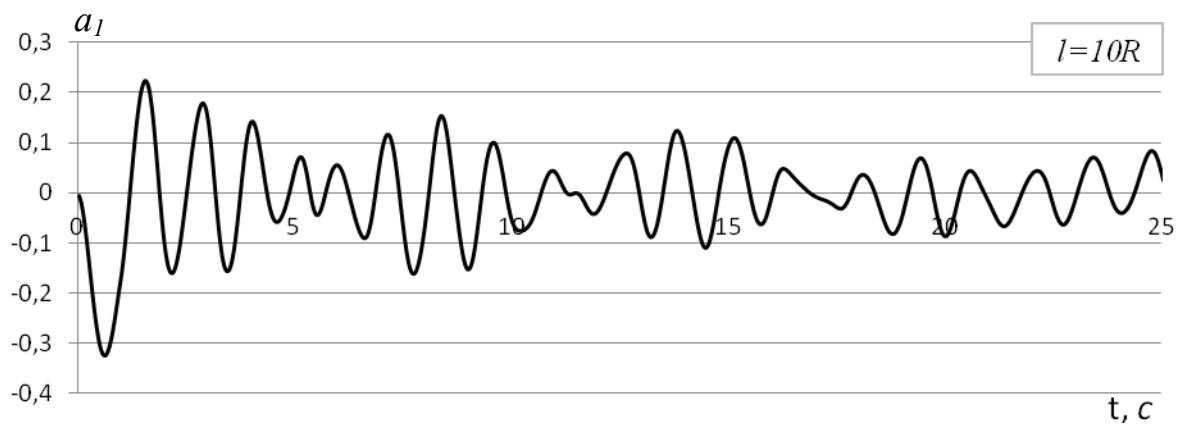


Рис. 4.4. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l = 10R$.

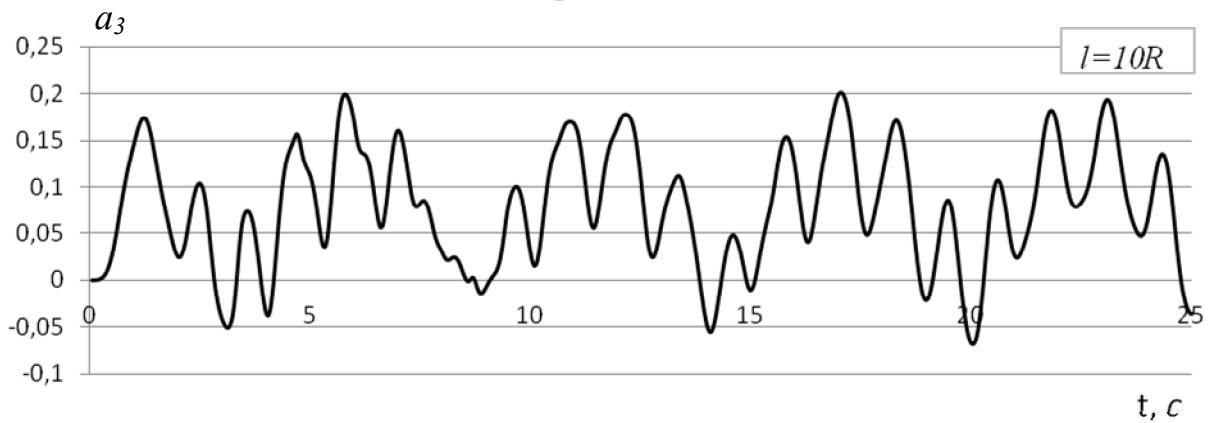


Рис. 4.5. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l = 10R$.

Привертає увагу динаміка зміни амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини (рис. 4.3, 4.5). Коливання є суттєво нелінійними, відхилення вільної поверхні в центрі практично на всьому проміжку розгляду додатні, що свідчить про несиметричність профілю хвиль з

опусканням рівня рідини в серединній точці, коли висота горба хвилі більша за глибину впадини.

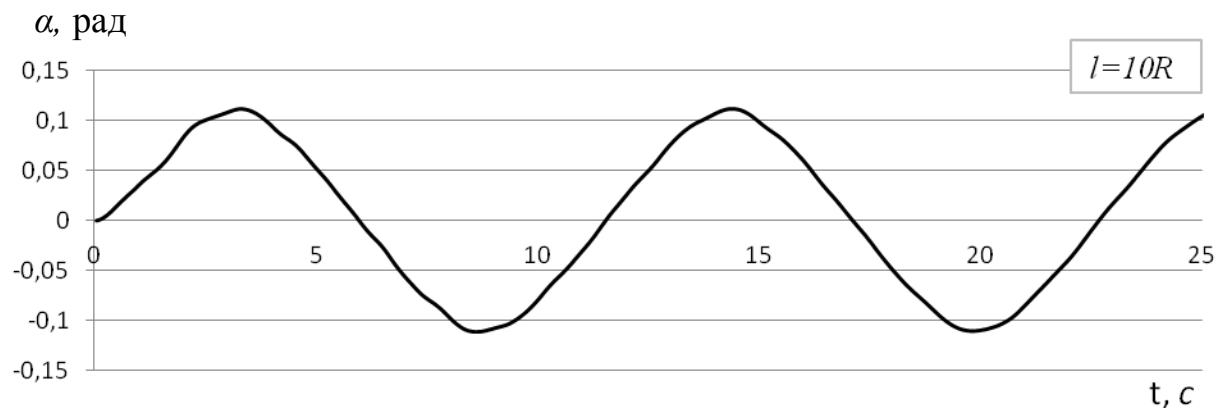


Рис. 4.6. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l = 10R$.

На проміжку часу (25 с), впродовж якого було розглянуто рух системи, амплітуди коливань рідини спадають приблизно в 2 – 3 рази. Для цього діапазону довжин підвісу безрозмірні амплітуди кутових коливань резервуару менші за безрозмірні амплітуди коливань рідини на вільній поверхні.

2. Середні підвіси, діапазон довжин $1,5 R – 5R$

Для ілюстрації на графіках показано динаміку системи у випадку $l = 5R, l = 1,5R$.



Рис. 4.7. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l = 5R$.

В другому діапазоні зміни довжин підвісу $1,5R - 5R$ амплітуди коливань вільної поверхні та кутових коливань резервуара мають одинаковий порядок. Зі зниженням довжини підвісу зникає модуляція коливань на вільній поверхні рідини, при малих довжинах вона вже непомітна (рис. 4.10).

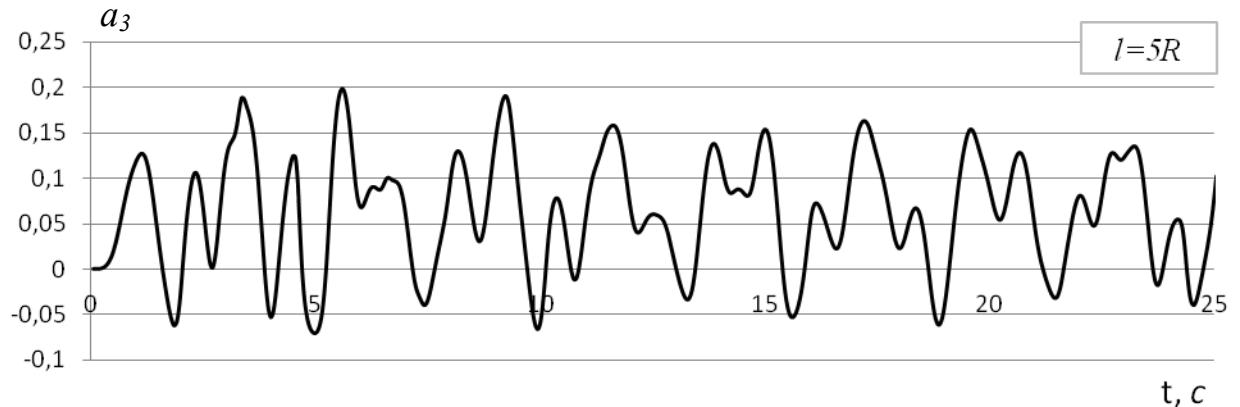


Рис. 4.8. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l = 5R$.

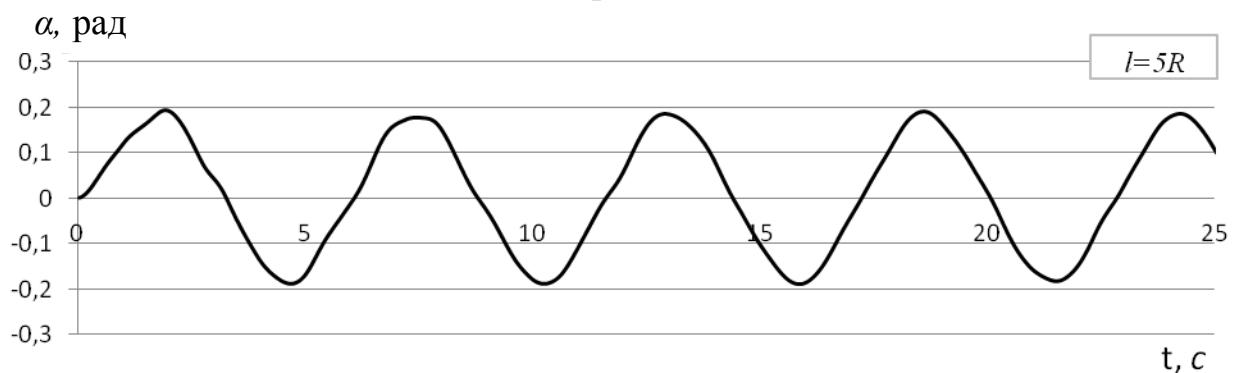


Рис. 4.9. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l = 5R$.



Рис. 4.10. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l = 1,5R$.

В цьому діапазоні перша осесиметрична форма коливань рідини також має характер сильного зміщення, аналогічно до попереднього випадку, що

зумовлено несиметричністю профілю хвиль, але це проявляється не настільки яскраво, як для великих довжин підвісу у попередньому діапазоні. Для діапазону середніх довжин підвісів характерним є спадання амплітуди коливань на вільній поверхні з часом у 3 – 4 рази.

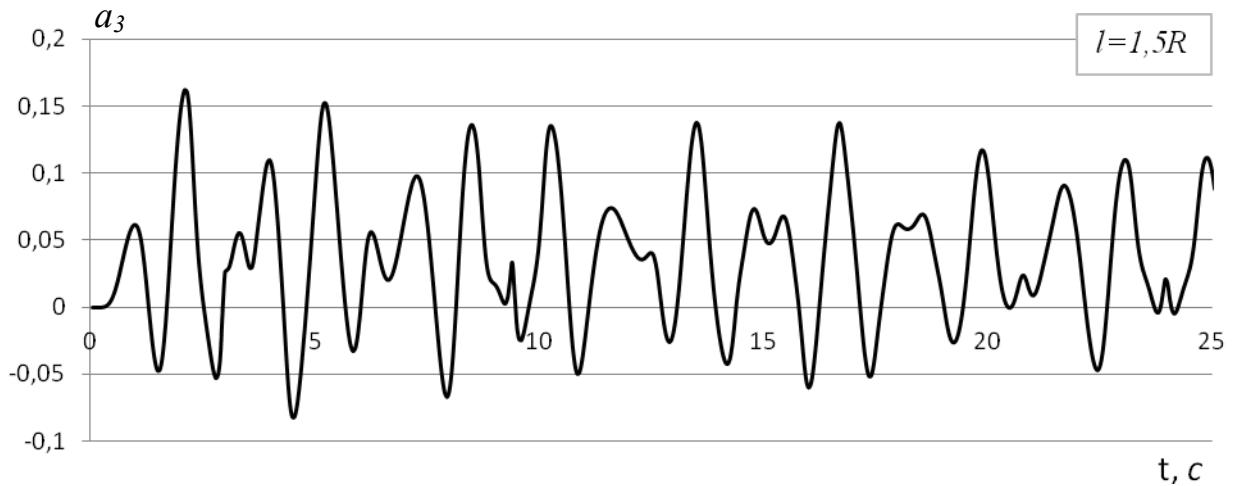


Рис. 4.11. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l = 1,5R$.

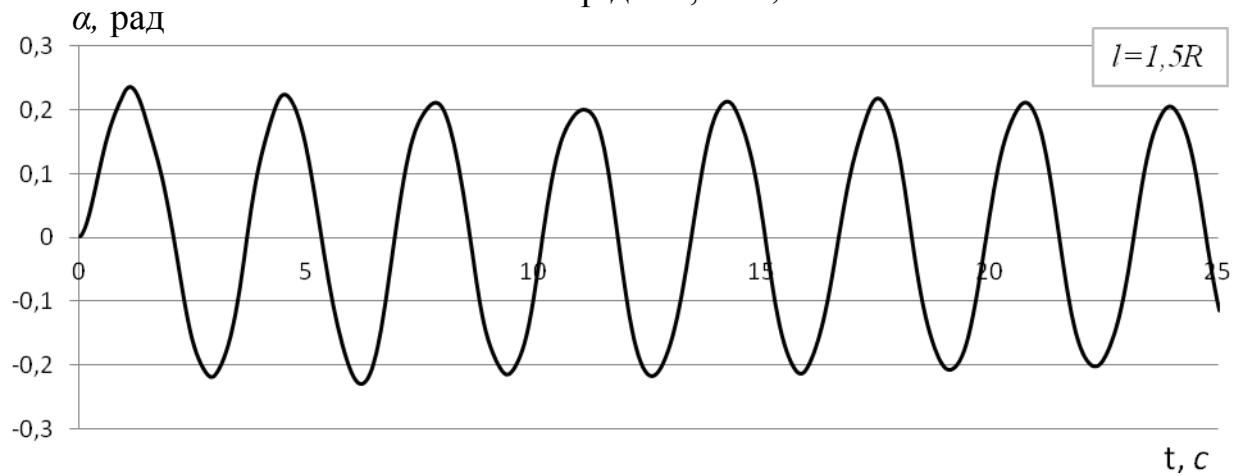


Рис. 4.12. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l = 1,5R$.

3. Короткі підвіси, діапазон довжин $0 – 1,5R$

Для ілюстрації розглянемо динаміку системи при довжині маятникового підвісу $l=R$. В діапазоні коротких довжин підвісу $0 – 1,5R$ після нетривалого переходного періоду енергія коливань значною мірою

зосереджується в квазітвердому русі резервуару, коливання вільної поверхні незначні.

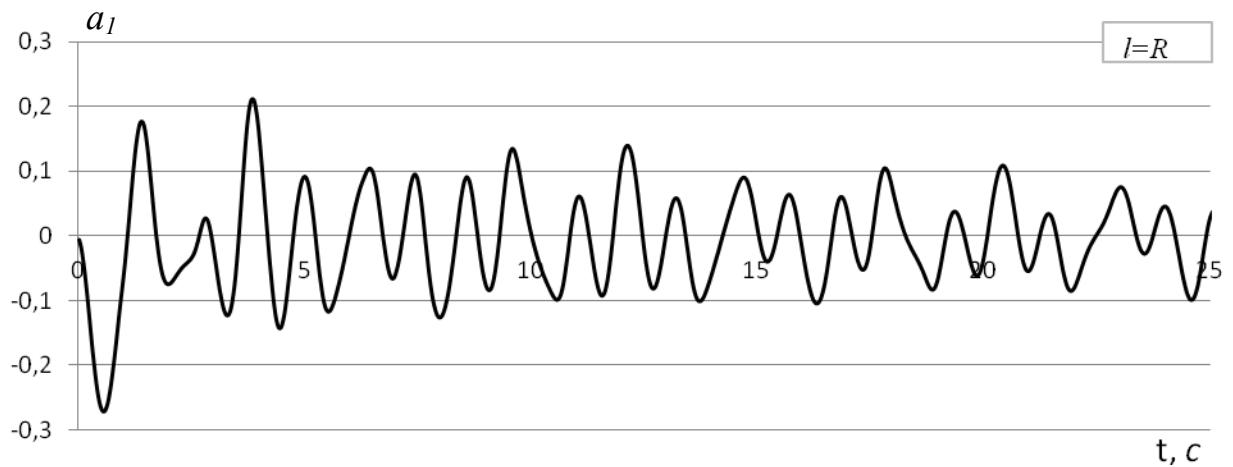


Рис. 4.13. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l=R$.

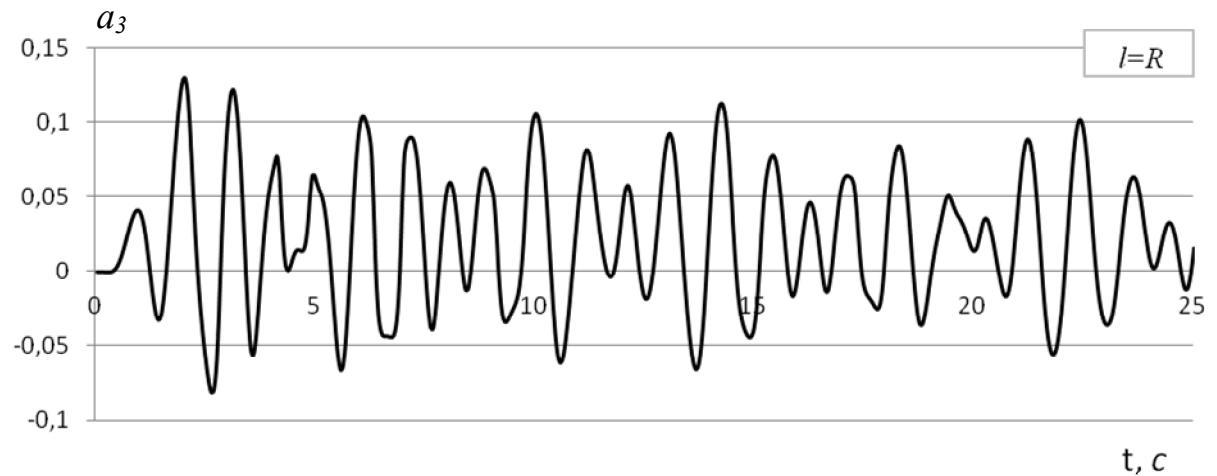


Рис. 4.14. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l=R$.

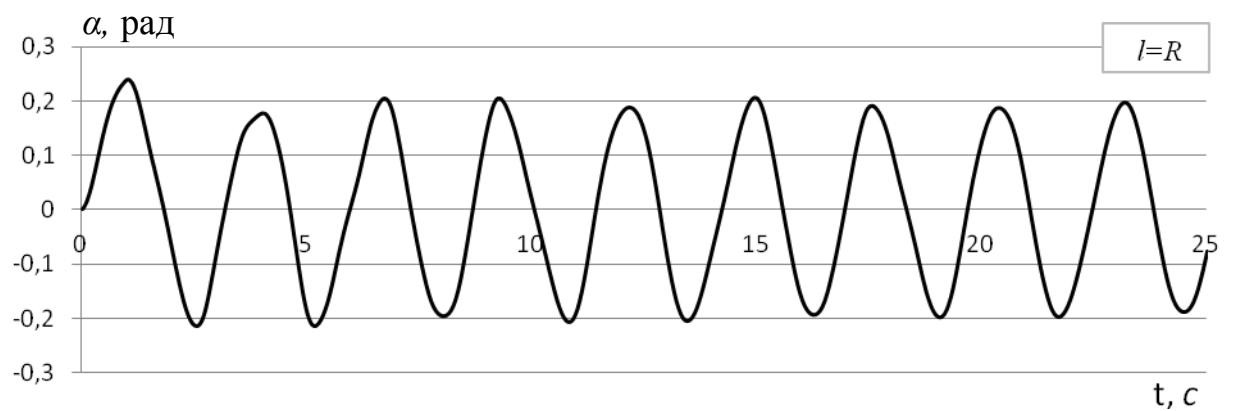


Рис. 4.15. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l=R$.

Характер зміни в часі амплітуди першої антисиметричної форми (рис. 4.16) наближається до гармонічного з малою амплітудою, що вказує на те, що рух рідини є майже лінійним, зумовленим в значній мірі протифазним рухом резервуару і рідини; такий тип руху визначається векторним потенціалом Стокса – Жуковського.

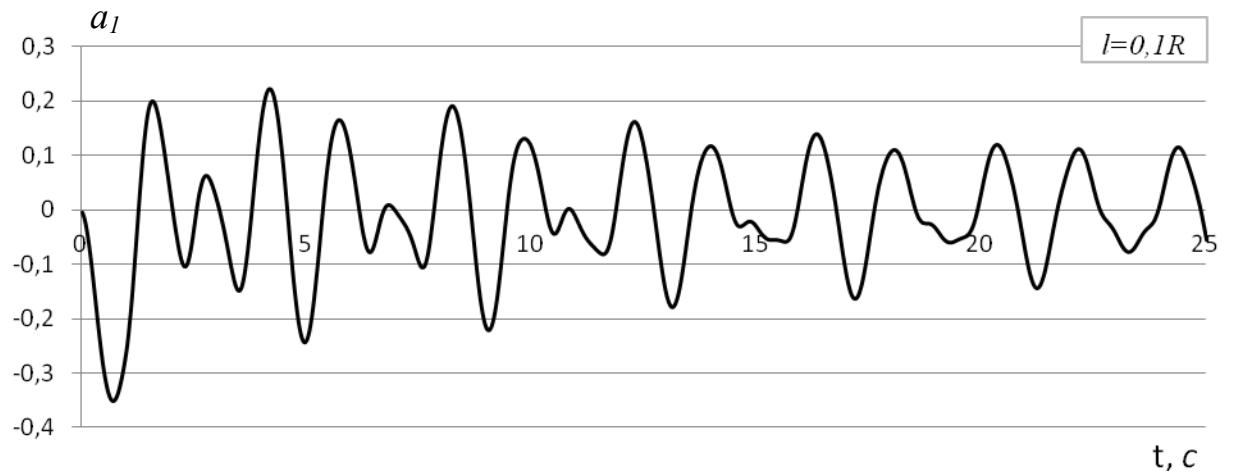


Рис. 4.16. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини, $l=R$.

У випадку перехідних процесів хвильовий рух швидко згасає без наявності демпферів і встановлюється режим квазіусталених коливань при відсутності хвильового руху на вільній поверхні рідини. Ці результати підтверджуються лабораторним дослідом, описаним в підрозділі 4.3.

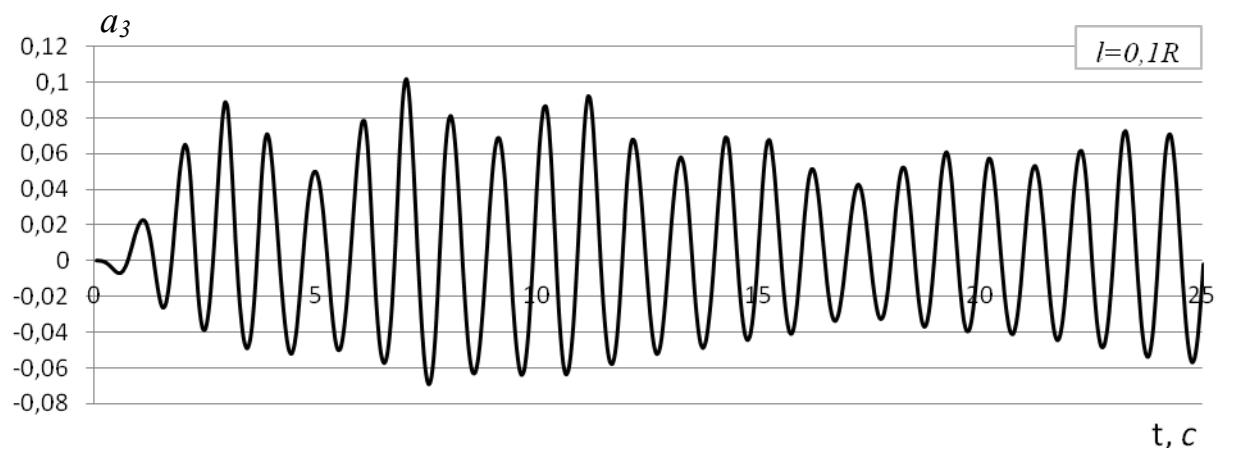


Рис. 4.17. Зміна в часі амплітуди першої осесиметричної форми коливань рідини, $l=R$.

Як було показано в підрозділі 3.3, у випадку коротких довжин маятникового підвісу в системі змінюється порядок розташування власних

частот рідини. Саме тому поведінка системи на коротких підвісах значно відрізняється від випадку довгих та середніх довжин, знижуються прояви нелінійностей, а на ультракоротких довжинах поведінка системи подібна до такої, що описується лінійною теорією.

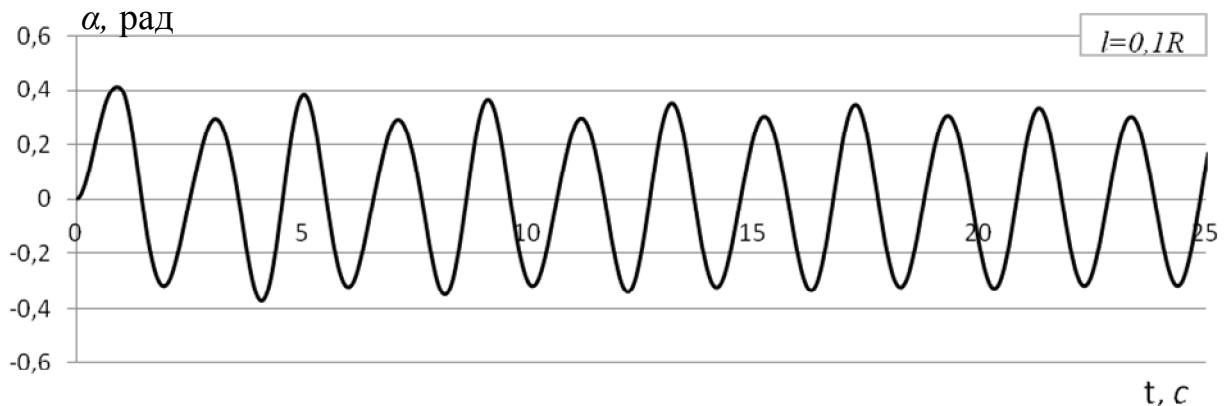


Рис. 4.18. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $l=R$.

4.1.2. Динамічна взаємодія рідини з резервуаром

Було також проаналізовано динамічну взаємодію рідини з резервуаром в залежності від довжин маятникового підвісу. Введемо наступні позначення:

R_x, R_y, R_z – компоненти головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуара; В задачі, що розглядається, в силу початкових умов $R_x = 0$;

M_x – ненульова складова головного моменту сил тиску рідини на стінки резервуара.

В табл. 4.1 наведено значення сил та моментів тиску рідини на стінки резервуару для різних довжин маятникового підвісу. Обчислення виконані без врахування перехідного процесу, тобто перші 10 с руху системи виключено з розгляду. Потрібно відзначити, що амплітуда зовнішнього моментного імпульсу не була сталою для різних задач, підбір її значення обумовлений необхідністю забезпечення розвитку коливального процесу на вільній поверхні в діапазоні нелінійних хвиль.

Таблиця 4.1. Максимальні та мінімальні значення ненульових компонент головного вектора і головного моменту сил тиску рідини на стінки резервуара для різних довжин підвісу.

	$\max R_y$	$\max R_z$	$\max M_x$	$\min R_y$	$\min R_z$	$\min M_x$
$l = 10R$	1,3281	2,1362	0,4225	-1,1119	-1,4882	-0,3008
$l = 0,7R$	1,0196	1,0605	2,0149	-1,0112	-0,868	-1,9735
$l = 0,1R$	2,1277	0,7073	3,6065	-2,268	-0,0419	-3,8177

Тому просте порівняння абсолютних значень реакцій рідини для різних довжин підвісу позбавлене сенсу. Разом з тим, виявилося можливим виділити спільні тенденції.

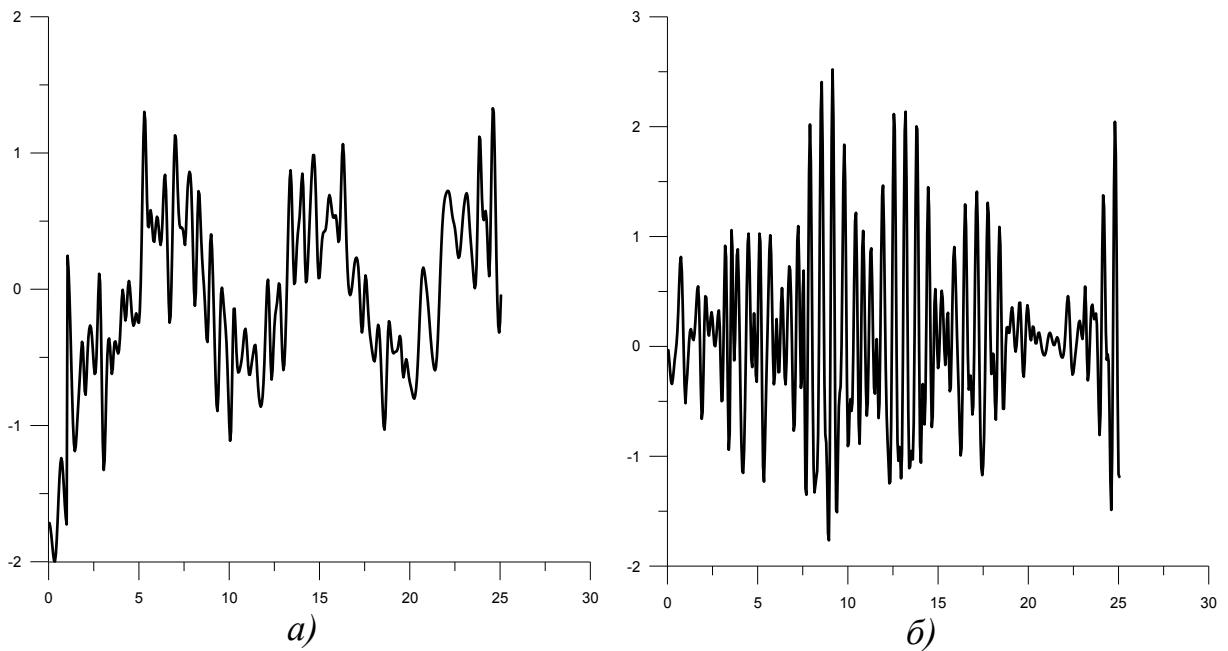


Рис. 4.19. Горизонтальна R_y а) та вертикальна R_z б) компоненти сил тиску, $l = 10R$.

Як видно з табл. 4.1, для великих довжин підвісу вертикальна складова сил тиску рідини на стінки більша за модулем, ніж горизонтальна. Розглянемо випадок довгих підвісів на прикладі $l = 10R$, де R – радіус резервуару. З графіка на рис. 4.19 б) видно, що в вертикальній компоненті

головного вектора сил тиску рідини на стінки резервуару наявні модуляції. Також відзначаємо значний вплив супергармонік в ненульових компонентах головного вектора, про що свідчить ізрізаність графіків на рис. 4.19 *a), б)*. Вищезгадані ефекти свідчать про нелінійність динаміки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі.

Задачі з короткими довжинами підвісу проілюструємо на прикладі випадку $l = 0,7R$. Як видно з графіків на рис. 4.20 *a), б)*, в компонентах сил тиску так само присутні супергармоніки, це випливає із ізрізаності кривих на графіках. У вертикальної складової сил тиску рідини присутня досить значна модуляція.

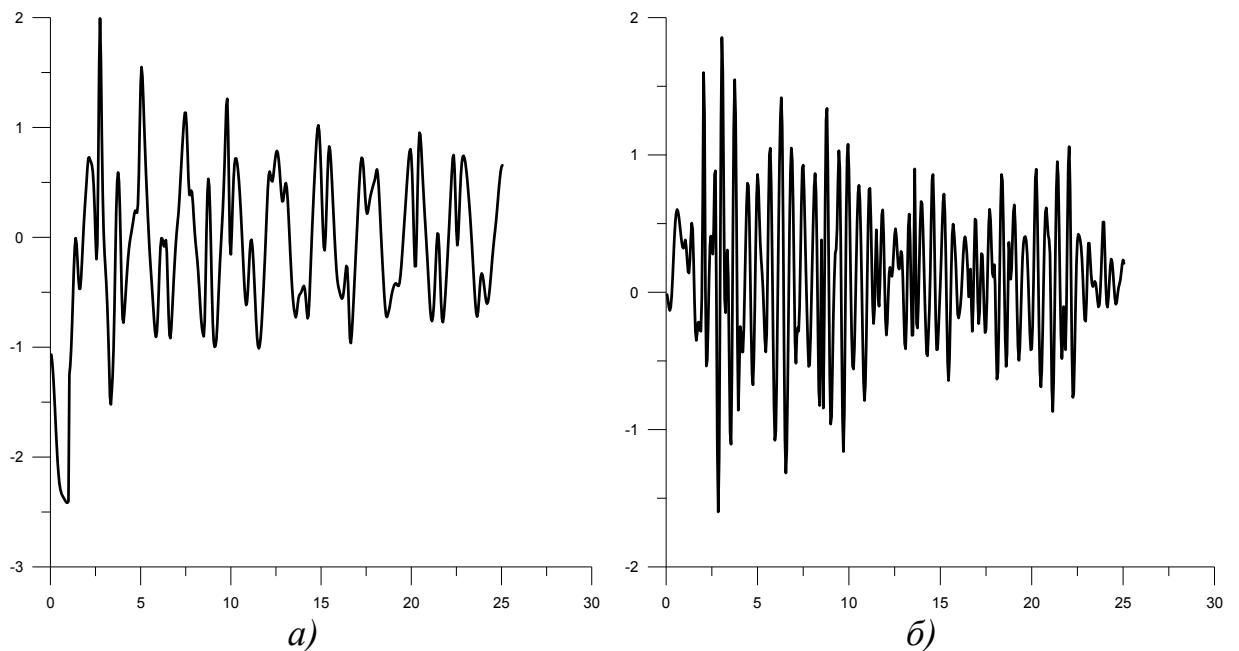


Рис. 4.20. Горизонтальна R_y *а)* та вертикальна R_z *б)* компоненти сил тиску, $l = 0,7R$.

Таким чином, динаміка системи демонструє риси, характерні для нелінійних систем. Разом з тим, на відміну від попередньої задачі, амплітуда вертикальної складової сил тиску рідини на стінки спадає впродовж періоду розгляду динаміки системи. Аналогічна тенденція наявна і в поведінці горизонтальної складової. Ці дані узгоджуються з теоретичними та експериментальними результатами, які передбачають, що

для коротких підвісів хвильовий рух на поверхні рідини швидко згасає. Рух системи на довгих підвісах близький за характером поведінки до випадку поступального руху резервуара з рідиною.

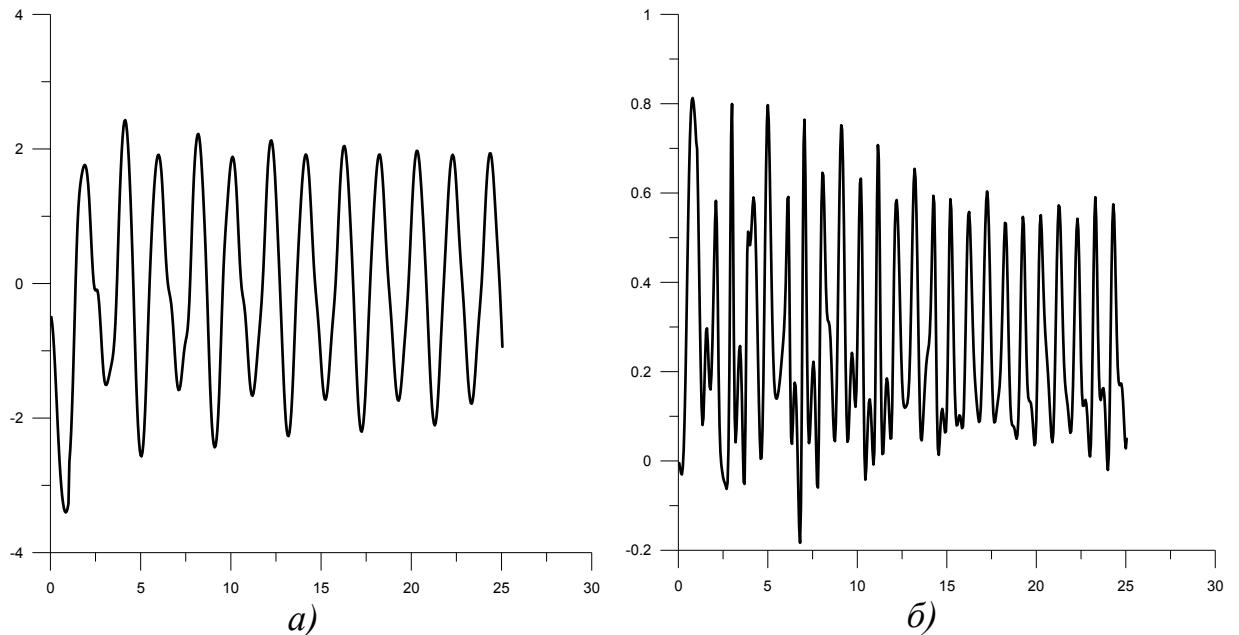


Рис. 4.21. Горизонтальна R_y а) та вертикальна R_z б) компоненти сил тиску, $l = 0,1R$.

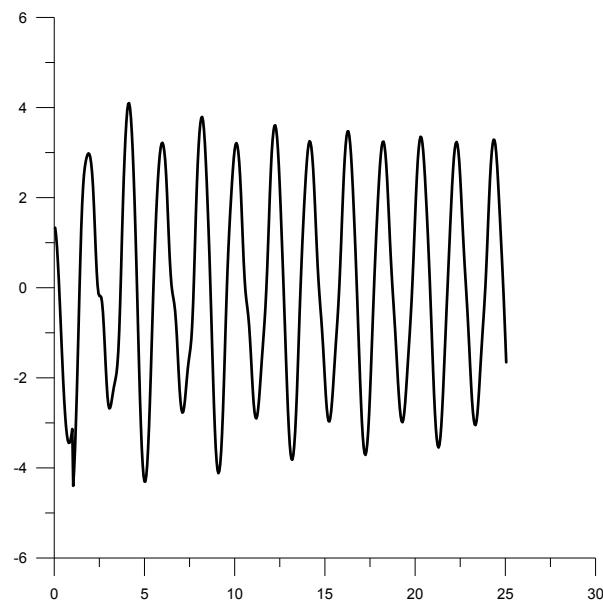


Рис. 4.22. Ненульова компонента головного моменту сил тиску M_x .

Проаналізуємо динаміку системи при ультракоротких підвісах на прикладі задачі для довжини підвісу $l = 0,1R$. Було встановлено, що

характер зміни в часі компонент головного вектора та моменту сил тиску рідини на стінки незначним чином відрізняється від гармонічного закону, на відміну від задач з середніми та довгими підвісами. Практично відсутні модуляції, ізрізаність графіків незначна (рис. 4.21 *a*), *б*).

Амплітуди компонент сил тиску рідини на стінки резервуару, як і в попередньому випадку, знижуються в процесі руху системи. Графік на рис. 4.21 *б*) демонструє відсутність модуляцій у вертикальній складовій головного вектору сил тиску рідини, що говорить про наближеність характеру руху системи до такого, що підкоряється лінійній теорії.

Короткі висновки

Для всіх діапазонів довжин маятникового підвісу характерним є те, що коливання рідини та рух резервуару відбуваються у протифазі, хоча для довгих підвісів рідина встигає виконати декілька коливань за один період коливання резервуару.

В діапазоні коротких підвісів спостерігається рух системи, що практично підкоряється лінійній теорії. Це, зокрема, проявляється у характері динамічного впливу рідини на стінки резервуару; в процесі руху амплітуди сил тиску рідини на стінки резервуару знижуються. Типовим для коротких підвісів є значне затухання коливань вільної поверхні рідини з часом та незначні прояви нелінійностей.

У випадку довгих підвісів поведінка системи уподібнюється до задачі поступального руху резервуара, коливання на вільній поверхні рідини є істотно нелінійними, наявні помітні модуляції коливань рідини, значного збурення зазнає перша осесиметрична форма. Згасання коливань на вільній поверхні рідини відбувається за більш тривалий проміжок часу, ніж на коротких підвісах. Присутні значні модуляції в вертикальній складовій головного вектору сил тиску рідини на стінки резервуару

4.2. Перерозподіл енергії між різними формами руху в системі

Особливість даного класу задач полягає в тому, що можна умовно відокремити у виразі кінетичної енергії системи складові, які відповідають різним формам руху. Розглянемо вираз повної кінетичної енергії системи в континуальній формі (4.1):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[\vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[(\vec{\nabla} \varphi)^2 + 2 \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) + (\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}))^2 \right] d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}))^2 d\tau + \frac{1}{2} J_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j + \rho \int_{\tau} \vec{\nabla} \varphi \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) d\tau. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Після розкриття квадрату та перегрупування доданків отримуємо суму чотирьох доданків (4.1), де перший доданок містить лише хвильовий потенціал φ , другий та третій доданки описують квазітверджий рух системи, а останній доданок містить як хвильовий потенціал φ , так і потенціал Стокса – Жуковського $\vec{\Omega}$, тобто відповідає за зв'язок хвильового та квазівердого рухів системи. Таким чином, кінетична енергія системи може бути подана у вигляді суми доданків, що відповідають різним формам руху:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.2)$$

Після переходу до дискретної моделі системи наведені складові кінетичної енергії подаються в наступному вигляді.

1. Кінетична енергія хвильового руху на поверхні рідини:

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\sum_i \dot{a}_i^2 \alpha_i^v + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \gamma_{ijk}^v + \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k a_l \delta_{ijkl}^v \right). \quad (4.3)$$

2. Кінетична енергія квазівердого руху системи:

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left(\frac{I_{\text{res}}^{ij}}{\rho} + E_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right). \quad (4.4)$$

3. Складова кінетичної енергії, що характеризує зв'язок хвильового та квазівердого рухів системи:

$$T_3 = \frac{1}{2} \rho \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \quad (4.5)$$

Було проаналізовано зміну в часі наведених вище складових кінетичної енергії. Результати, отримані в рамках моделі ідеальної рідини, яка була застосована в першу чергу, не показали достатнього узгодження зі спостереженнями на лабораторному досліді. Було висунуто гіпотезу, що розбіжність спостережень з чисельними результатами пов'язана з проявом дисипативних властивостей (в'язкості) рідини.

Для досягнення узгодження з лабораторною установкою до математичної моделі було введено узагальнену дисипацію відповідно до підходу Г.Н. Мікішева, розробленого в роботі [49], який ґрунтуються на теорії примежового шару. При великих числах Рейнольдса в'язку рідину можна розглядати як ідеальну у всьому об'ємі, за винятком невеликого шару поблизу твердої границі. Демпфування енергії коливань рідини відбувається в основному в цьому примежовому шарі внаслідок тертя рідини о стінки резервуару, як і було показано в роботі [49]. Такий підхід є прийнятним для задачі, що розглядається в даній дисертаційній роботі, оскільки для такої задачі значення чисел Рейнольдса мають порядок 10^4 , тобто є достатньо великими і належать діапазону застосування моделі примежевого шару.

Для збереження подібності систем в чисельних розрахунках та фактичної в експерименті коефіцієнт дисипації було обрано відповідно до критерію Рейнольдса, який має наступний вигляд:

$$Re = \frac{a \cdot v}{\nu}, \quad (4.6)$$

де Re – число Рейнольдса, a – характерний розмір в системі, v – характеристична швидкість, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості.

$$v = a \cdot \omega;$$

$$\begin{aligned} Re &= \frac{a \cdot v}{\nu} = \frac{a \cdot a \cdot \omega}{\nu} = \frac{a^2 \omega}{\nu}; \\ \omega &= \sqrt{g \frac{\kappa}{R} th \frac{H}{R}}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$a \sim 0.3R; \kappa = 1,84118; H = R.$$

Підстановка співвідношень (4.7) до критерію (4.6) дає вираз пропорційності числа Рейнольдса до радіусу резервуара (4.8):

$$Re = \frac{a^2 \omega}{\nu} \sim \frac{(0.3R)^2 \sqrt{9,81 \cdot \frac{1,84118}{R} th \frac{R}{R}}}{\nu} \sim R^{3/2}. \quad (4.8)$$

Порівнямо параметри експериментального баку та резервуару в побудованій математичній моделі. В обрахунках вважалось, що $R = 100$ см; фактичний радіус основи резервуару в експериментальній установці становить $R = 7,75$ см. Враховуючи співвідношення (4.8), отримуємо значення коефіцієнту дисипації:

$$k_v = \left(\frac{100}{7.75} \right)^{3/2} \approx 46. \quad (4.9)$$

Таким чином, для встановлення подібності між експериментальною установкою та побудованою моделлю маємо обрати коефіцієнт дисипації рівним $k_v = 46$. Для повного аналізу задачі було отримано дані для значень критерію Рейнольдса, що відповідають різним значенням коефіцієнту дисипації k_v .

Порівнямо випадки $k_v = 46$ (значення, яке забезпечує подібність з експериментом) та $k_v = 0$ (відповідає моделі з ідеальною рідиною, тобто без дисипації).

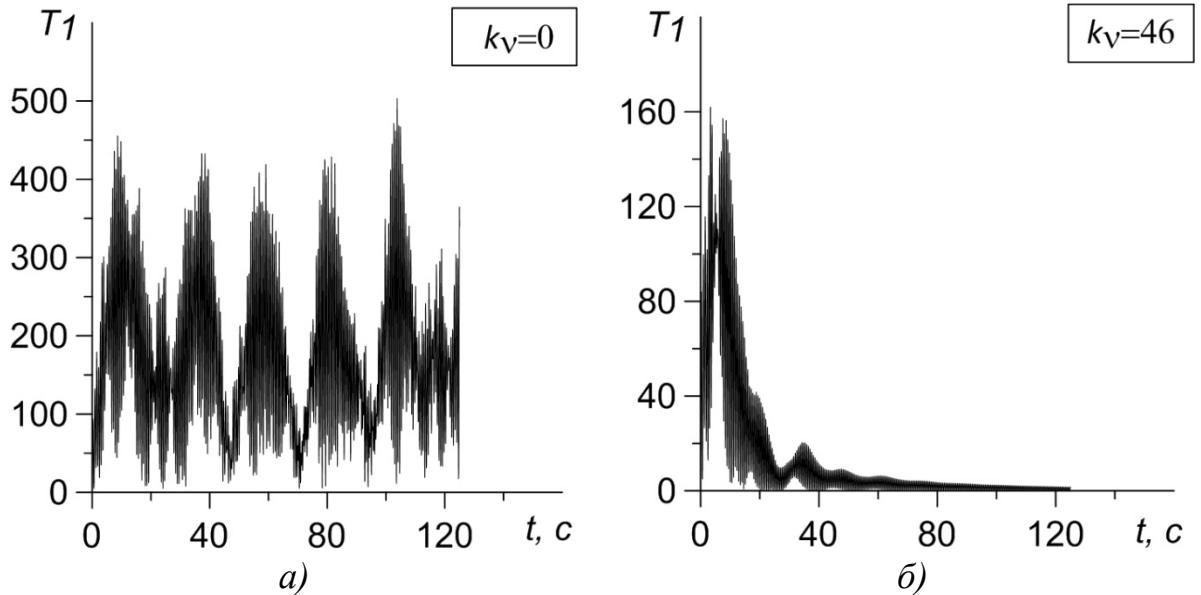


Рис. 4.23. Зміна в часі кінетичної енергії хвильового руху.

У випадку руху без дисипації перерозподіл енергії проявляється дуже слабко. Впродовж всього часу обрахунку характер руху системи практично не змінюється.

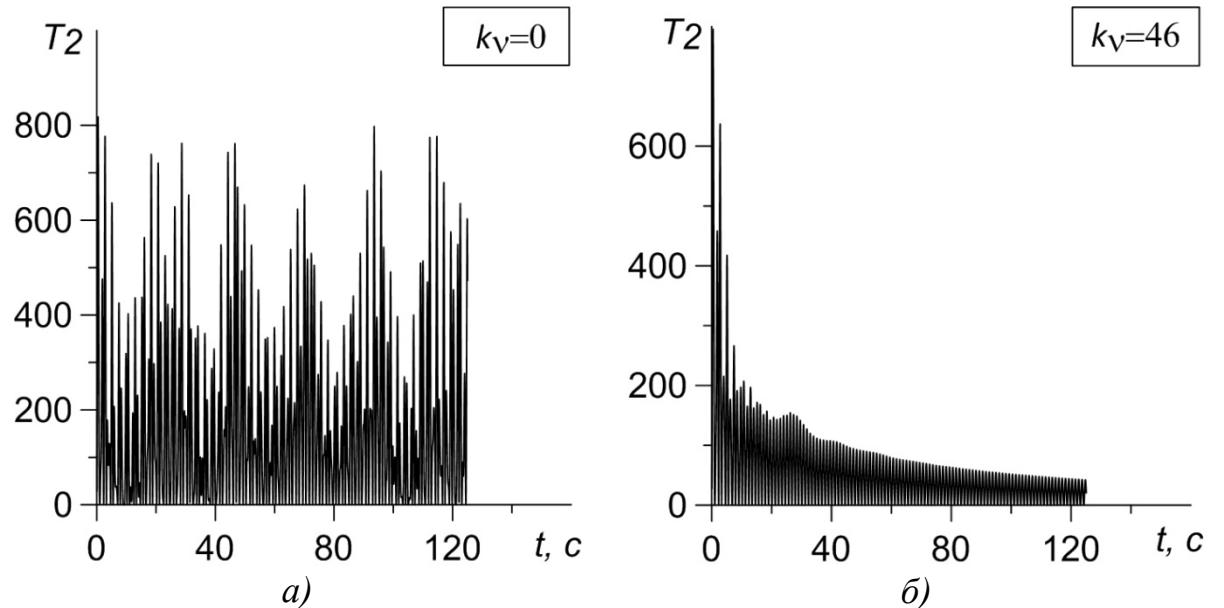


Рис. 4.24. Зміна в часі кінетичної енергії квазітвердого руху.

На рис. 4.27 подано графік зміни в часі кута відхилення резервуарі від вертикалі для випадку $k_v = 46$. Після нетривалого перехідного періоду

резервуар виходить на квазіусталений режим руху. Цю тенденцію також демонструє графік зміни в часі кінетичної енергії квазітвердого руху для випадку з врахуванням дисипації (рис. 4.24 а)).

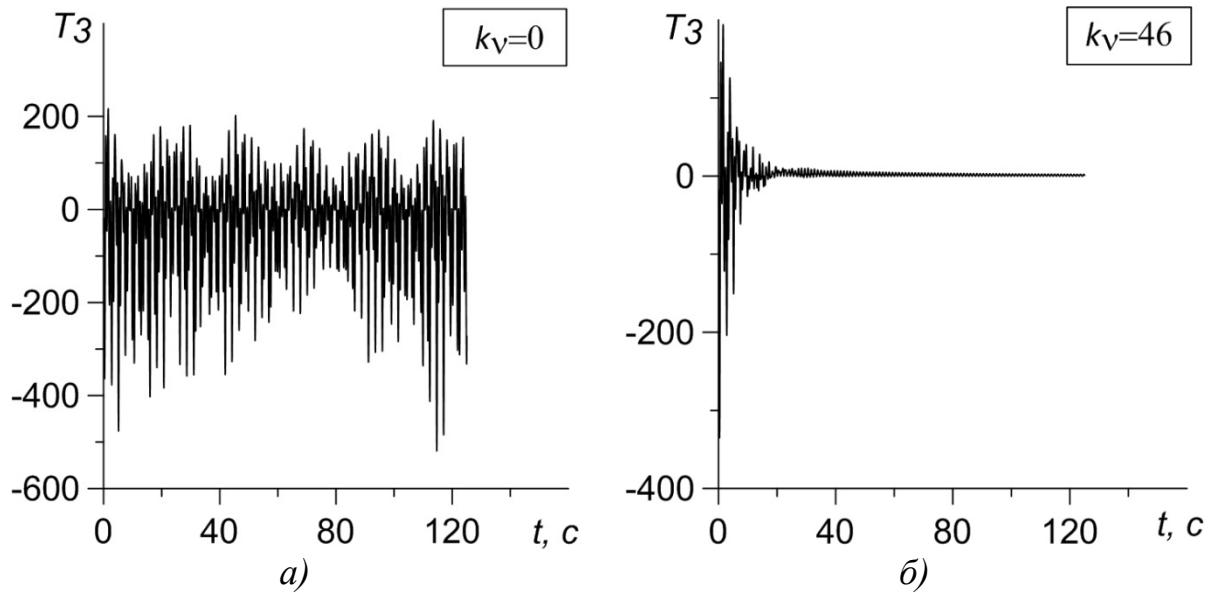


Рис. 4.25. Зміна в часі складової кінетичної енергії, що характеризує зв'язок хвильового та квазітвердого рухів.

З графіків на рис. 4.24–4.26 видно, що для випадку $k_v = 46$ дійсно має місце ефект перерозподілу енергії між хвильовим рухом та квазітвердим. Перша складова кінетичної енергії системи згасає впродовж декількох періодів коливання резервуару.

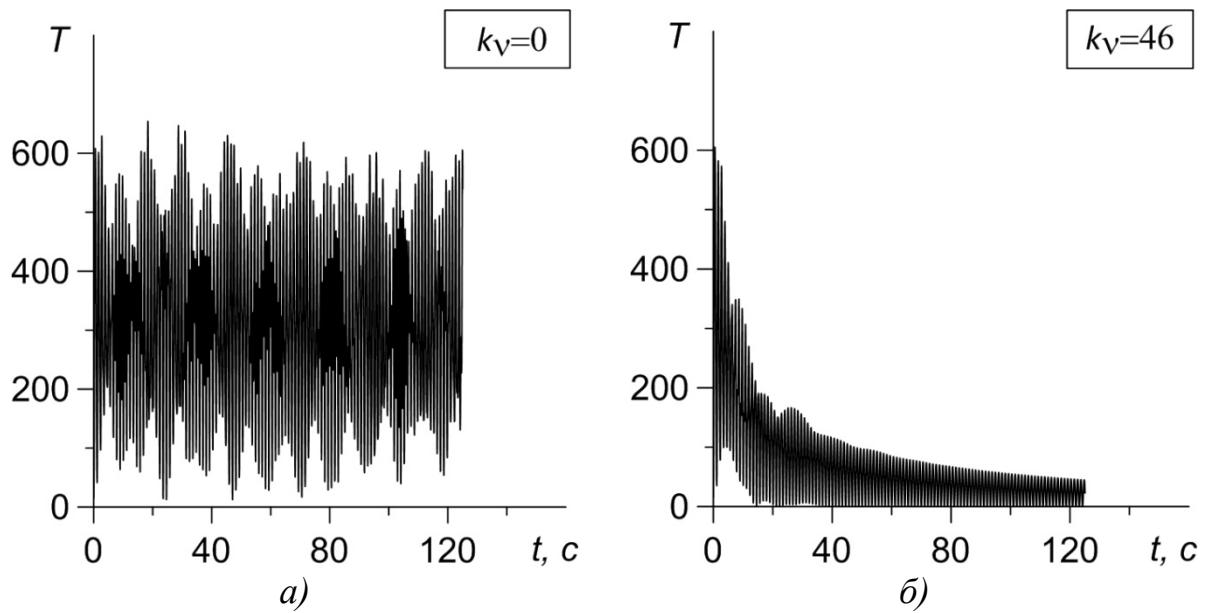


Рис. 4.26. Зміна в часі повної кінетичної енергії системи.

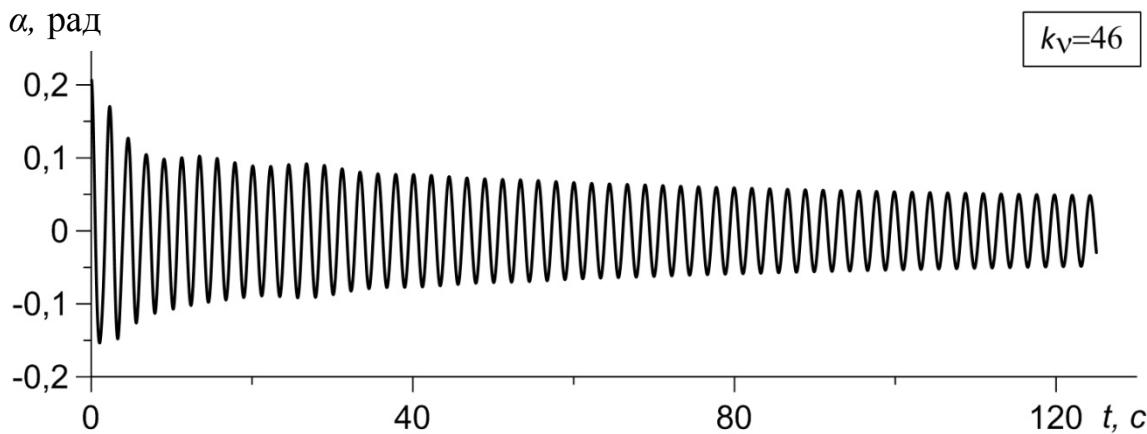


Рис. 4.27. Зміна в часі кута відхилення резервуару від вертикалі, $k_v = 46$.

Одночасно спостерігається зменшення амплітуди першої антисиметричної форми коливань в 4 рази. Разом з цим, згасає і третя складова кінетичної енергії, яка відповідає за зв'язок між хвильовою та квазітвердою кутовою формами рухів. Натомість друга складова, що відповідає квазівердому руху системи, дещо знижується, але прямує до сталого ненульового значення. Відповідно кутові коливання резервуару з часом згасають дуже повільно (рис. 4.27).

Було також вивчено поведінку системи при інших значеннях коефіцієнта дисипації. В табл. 4.2–4.5 подані відносні значення (у відсотках від сумарної кінетичної енергії системи) складових кінетичної енергії в залежності від коефіцієнта дисипації у початковий момент руху та після проходження переходного періоду (40 с.).

Таблиця 4.2. Значення складових кінетичної енергії на початку руху системи, випадок кінематичного збудження.

k_v	5	10	30	46	50
$T_1, \%$	26	23	16	13	13
$T_2, \%$	53	53	59	62	62
$T_3, \%$	21	24	25	25	25

Таблиця 4.3. Значення складових кінетичної енергії після проходження перехідного періоду руху, випадок кінематичного збудження.

k_v	5	10	30	46	50
$T_1, \%$	37	44	12	9	9
$T_2, \%$	56	51	82	87	87
$T_3, \%$	7	5	6	4	4

З порівняльного аналізу табл. 4.2, 4.3 випливає, що для невеликих значень коефіцієнта дисипації ефект перерозподілу енергії в системі проявляється вкрай слабко. Наприклад, для значення 10 після проходження перехідного періоду внесок хвильової складової становить 44% проти початкового 23%, тобто відносно сумарної кінетичної енергії системи хвильова складова зросла майже вдвічі. Натомість, для передбаченого значення коефіцієнту дисипації 46 маємо принципово іншу картину, після проходження перехідного періоду складова кінетичної енергії, що відповідає квазітвердому рухові, становить 87%.

Таблиця 4.4. Значення складових кінетичної енергії на початку руху системи, випадок імпульсного збурення.

k_v	5	10	30	46	50
$T_1, \%$	8	8	7	7	7
$T_2, \%$	53	56	55	58	58
$T_3, \%$	39	36	37	35	35

Таблиця 4.5. Значення складових кінетичної енергії після проходження перехідного періоду руху, випадок імпульсного збудження.

k_v	5	10	30	46	50
$T_1, \%$	11	8	4	3	3
$T_2, \%$	74	79	85	85	85
$T_3, \%$	15	13	11	12	12

Табл. 3, 4 демонструють тенденцію, аналогічну до випадку кінематичного збурення: для низьких значень коефіцієнта в'язкості перерозподіл енергії практично не спостерігається; для значення $k_v = 46$, яке задовольняє умовам подібності експериментальної та змодельованої систем, дійсно має місце ефект перерозподілу енергії між хвильовим рухом та квазітвердим.

Для повного розуміння ступеня впливу дисипації на перерозподіл енергії розглянемо динаміку системи при значенні коефіцієнта дисипації, дещо нижчого від значення, що встановлює подібність з експериментом. При $k_v = 30$ система демонструє схожу поведінку, спостерігається перерозподіл енергії та вихід на квазіусталений режим руху, відмінність полягає у тривалості переходного процесу.

Наведені результати дозволяють говорити про наявність перерозподілу енергії між хвильовим та квазітвердим кутовим рухами. Зауважимо, що такий перерозподіл наявний лише при застосуванні нелінійного підходу та врахування фактору сумісності руху. Також потрібно зазначити, що розрахунки без врахування дисипації енергії коливань рідини не дали бажаного узгодження з експериментом.

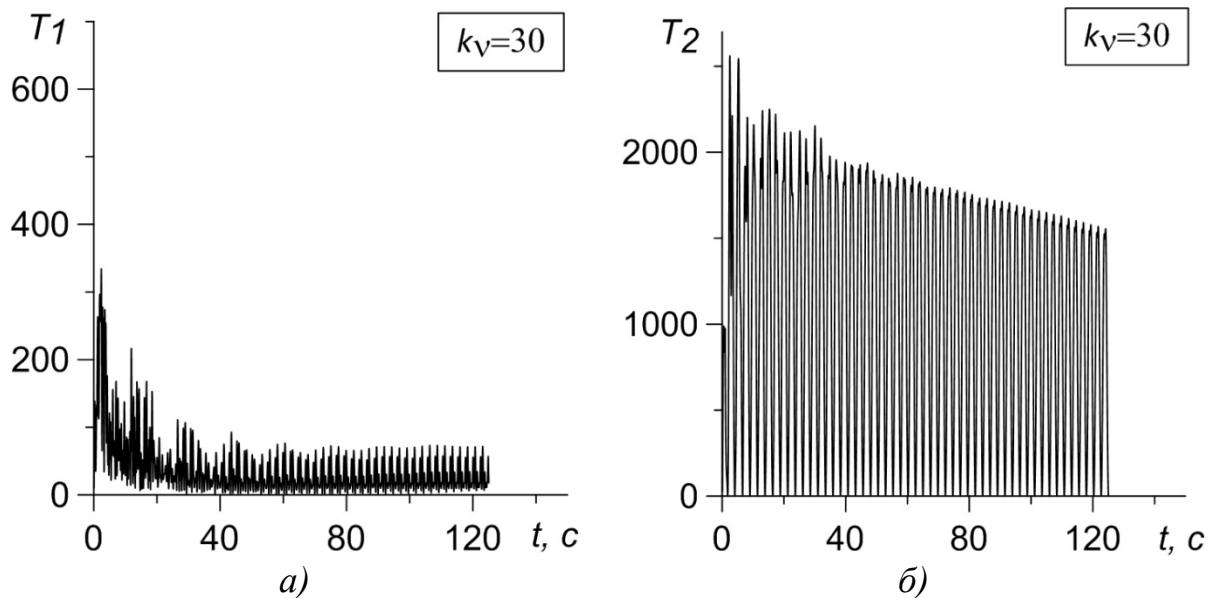


Рис. 4.28. Зміна в часі складових кінетичної енергії T_1 *a)* та. T_2 *б)*, $k_v = 30$.

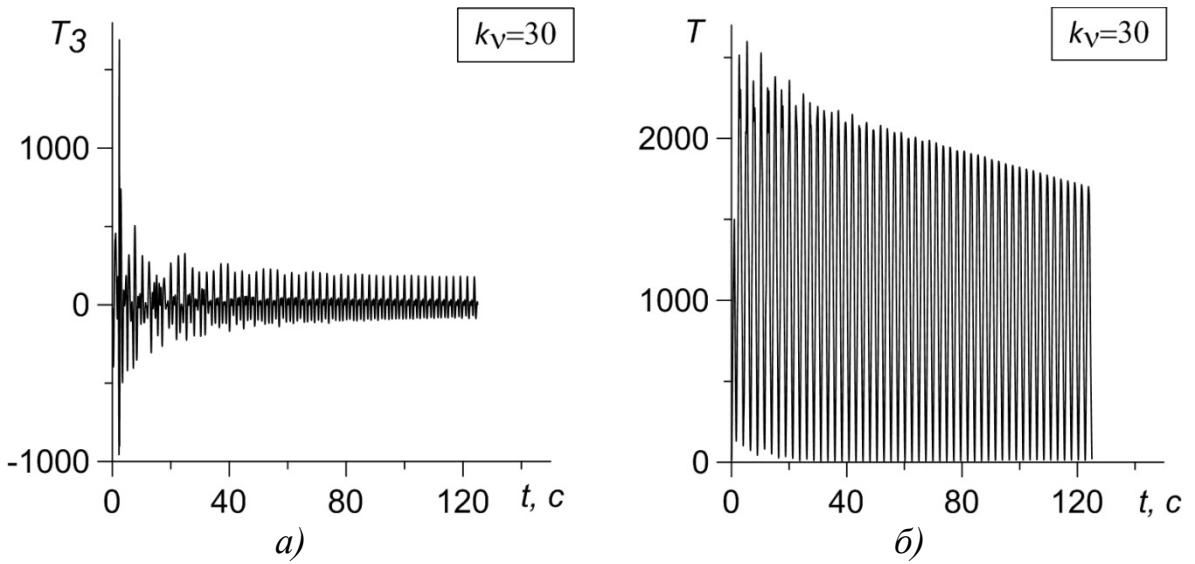


Рис. 4.29. Зміна в часі складової кінетичної енергії T_3 а) та повної кінетичної енергії T б), $k_v = 30$.

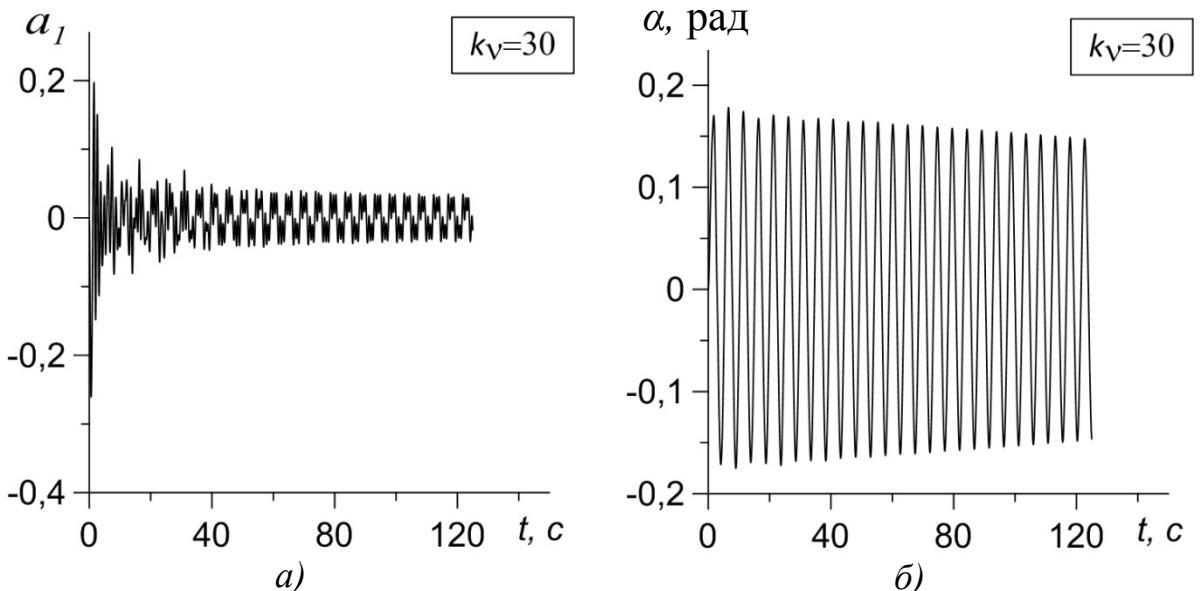


Рис. 4.30. Зміна в часі амплітуди першої антисиметричної форми коливань рідини а) та кута відхилення резервуару від вертикалі б), $k_v = 30$.

Для того, щоб продемонструвати, що згасання руху на вільній поверхні не обумовлене лише дисипацією, було розглянуто задачу руху рідини при нерухомому резервуарі у порівнянні з випадком сумісного руху системи. В початковий момент часу рідина зазнає деякого кінематичного збурення, резервуар жорстко зафіковано. Спосіб надання такого початкового збурення докладно описано в роботах академіка М.М. Мойсеєва [55]. Величину початкового збурення обираємо аналогічно до задачі сумісного

руху з початковим відхиленням резервуару (опис такої задачі наведено у підрозділі 3.1), з якою будемо порівнювати результати.

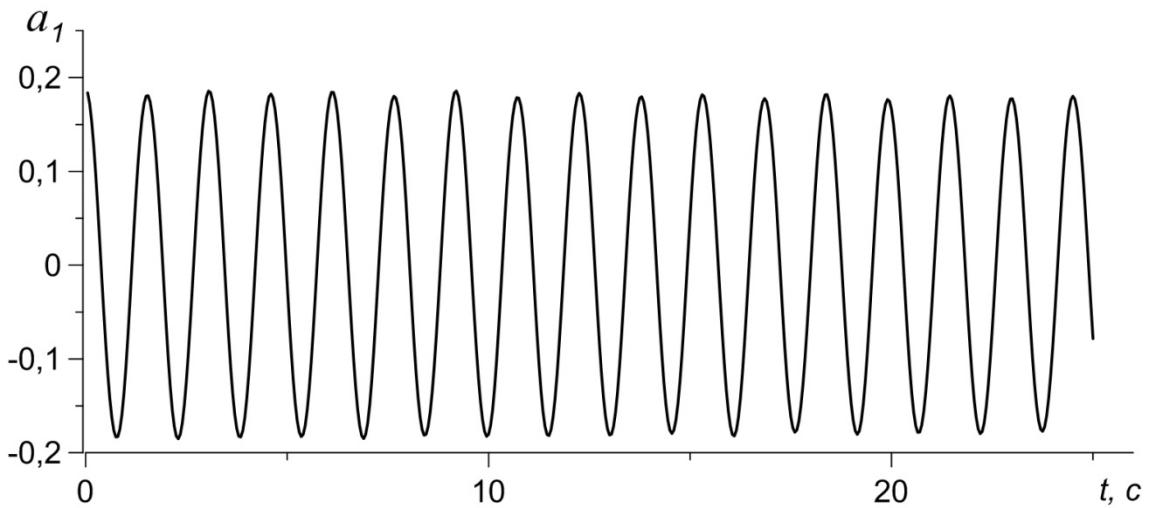


Рис. 4.31. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини у випадку нерухомого резервуару за відсутності дисипації.

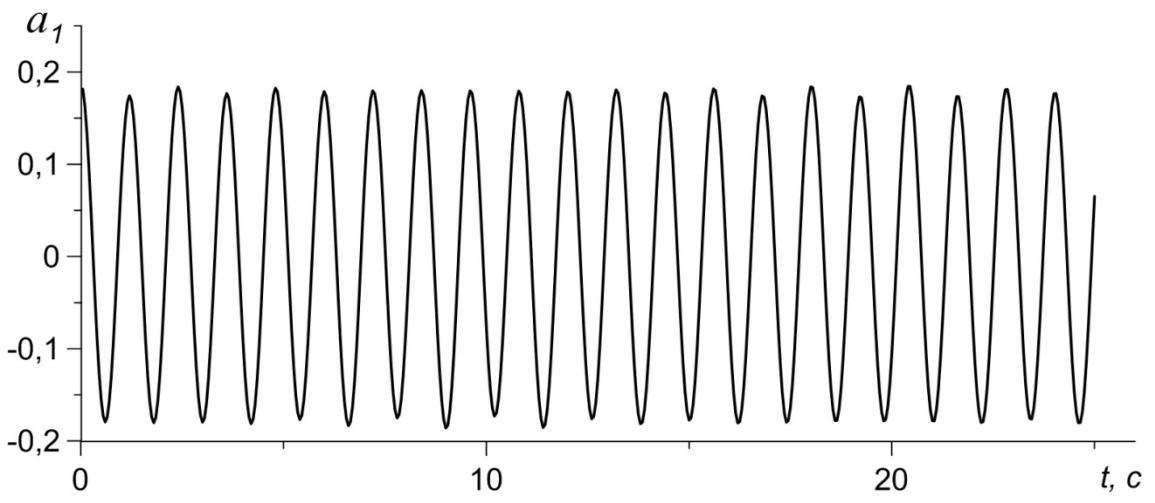


Рис. 4.32. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини у випадку кінематичного збурення руху системи за відсутності дисипації.

У випадку нерухомого резервуару і за відсутності дисипації при початковому збуренні рідини коливання на вільній поверхні не згасають, як показує графік на рис. 4.31. Це є цілком природним результатом і свідчить про адекватність розробленої моделі динаміки системи. Розглянемо випадок руху системи при початковому відхиленні резервуару, дисипація енергії коливань рідини відсутня. На рис. 4.32 подано графік зміни в часі першої антисиметричної форми коливань рідини у випадку руху системи при початковому відхиленні від положення рівноваги за

наявності дисипації. Крива на графіку показує, що коливання на вільній поверхні не згасають протягом часу розгляду.

Проаналізуємо динаміку системи за наявності дисипації. Розглянемо рух рідини в нерухомому резервуарі та при початковому кінематичному збуренні сумісного руху системи. Порівнюючи графіки на рис. 4.33, 4.34, можемо стверджувати, що у випадку нерухомого резервуару згасання коливань на вільній поверхні відбувається відчутно повільніше, ніж у випадку сумісного руху системи.

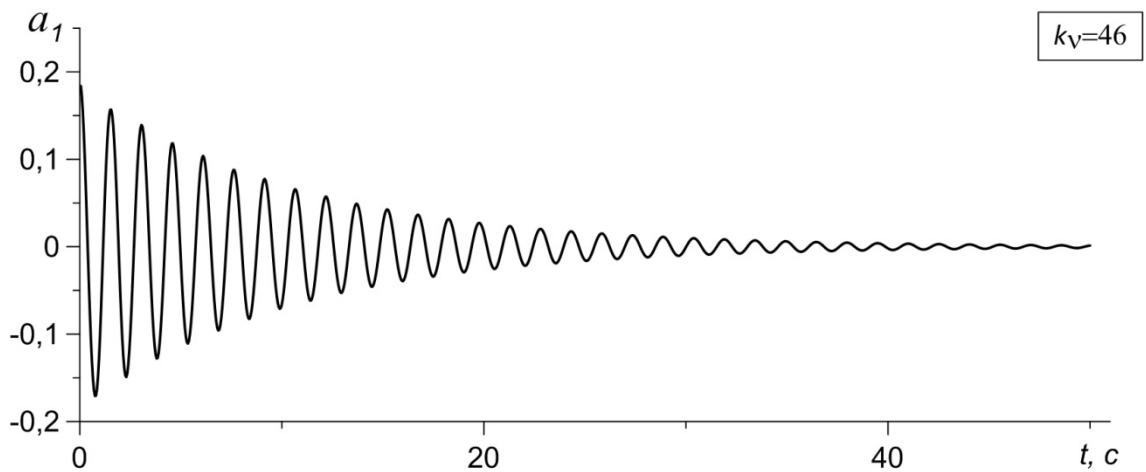


Рис. 4.33. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини у випадку нерухомого резервуару, $k_v = 46$.

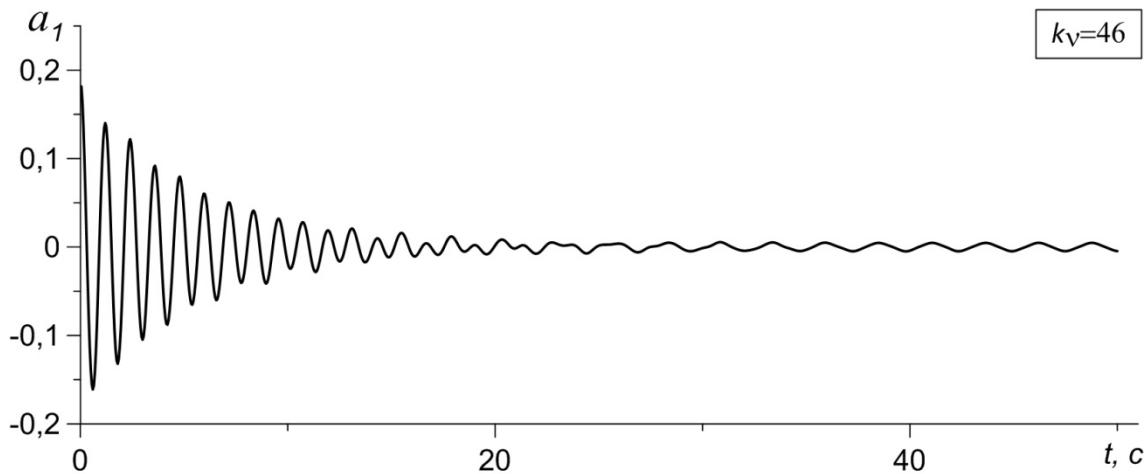


Рис. 4.34. Зміна в часі першої антисиметричної форми рідини у випадку кінематичного збурення руху системи, $k_v = 46$.

Таким чином, було показано, що дисипація не є єдиним чинником, який призводить до зменшення амплітуд коливань на вільній поверхні

рідини, інший вагомий фактор це перерозподіл енергії між хвильовим та квазітвердим рухами в системі.

Короткі висновки

В сумісному русі системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі при початковому кінематичному збуренні та імпульсному моментному збудженні руху відбувається перерозподіл енергії між формами руху в системі. Протягом декількох періодів коливань резервуару хвильовий рух на вільній поверхні практично повністю зникає і в системі переважає квазітвердий тип рухів. Потрібно підкреслити, що ефект перерозподілу енергії проявляється слабше у випадку ідеальної рідини та для низьких коефіцієнтів дисипації, хоча, як було показано, дисипація як така не є єдиною причиною затухання хвильового руху на вільній поверхні рідини.

Було вивчено випадок початкового збурення коливань рідини при нерухомому резервуарі з дисипацією, що встановлює подібність з експериментальною установкою, і встановлено, що згасання коливань на вільній поверхні рідини в нерухомому резервуарі відбувається значно повільніше, ніж в сумісному русі системи. Таким чином, вдалось продемонструвати вплив чиннику перерозподілу енергії на згасання поверхневих хвиль поряд із об'ємною дисипацією енергії коливань.

4.3. Порівняння чисельних результатів з лабораторним експериментом

Головна мета проведення лабораторного досліду – порівняння чисельних результатів математичного моделювання системи з експериментом на якісному рівні, верифікація побудованої моделі динаміки системи. У лабораторному досліді було застосовано експериментальну установку (рис. 4.35), яка являє собою резервуар циліндричної форми з радіусом основи $r = 7.5\text{ см}$ (впливом звуження резервуару біля дна та кришки нехтуємо) на маятниковому підвісі, частково заповнений рідинкою.

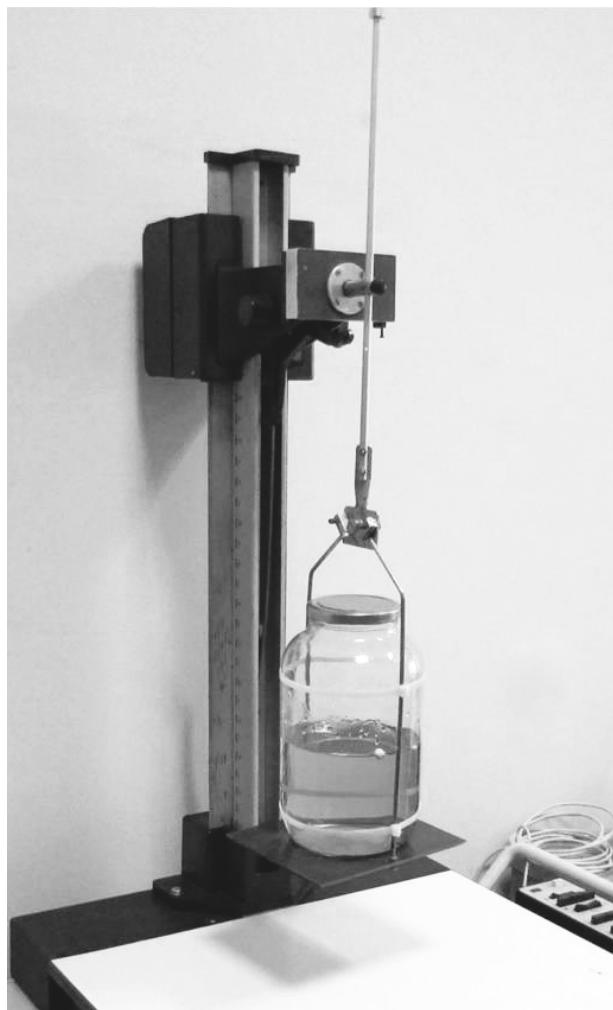


Рис. 4.35. Експериментальна установка.

Конструкція підвісу дозволяє резервуару коливатись в одній площині. Підвіс, що є жорстким металевим прутом, закріплено за допомогою

підшипників, які мінімізують дисипацію енергії коливань в закріпленні підвісу. Рідиною в резервуарі є вода, підфарбована для зручності спостережень. Для контролю процесів на вільній поверхні рідини було використано легкий поплавок у вигляді пінопластової кульки білого кольору. Наразі експериментальна установка не має засобів кількісної реєстрації коливань системи і дає можливість лише на якістному рівні відслідковувати механічні ефекти.

Було проведено два типи експериментів:

- Початкове кінематичне збурення руху системи.

В початковий момент часу резервуар є відхиленим від положення рівноваги на деякий кут, рідина знаходиться в спокої, поверхня рідини є горизонтальною. Резервуар відпускають і далі система рухається за інерцією.

- Імпульсне збудження руху системи.

В початковий момент часу резервуар знаходиться в положенні рівноваги, рідина незбурена. Рух системи починається після короткого поштовху резервуара, далі система рухається за інерцією.

При проведенні експериментів обох типів збудження руху системи було спостережено наступне явище: після початку руху коливання на вільній поверхні рідини згасали протягом 5–7 періодів коливань резервуару і надалі рух резервуару відбувався при відсутності поверхневих хвиль, причому при коливаннях резервуару поверхня рідини на перший погляд залишалась нерухомою і паралельною дну резервуара. Використання поплавка на поверхні рідини дозволило виявити, що насправді в системі відліку, жорстко зв'язаній з резервуаром, відбувається поворотний рух рідини у протифазі з рухом резервуару.

Побудована математична модель системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі демонструє якісно подібну до лабораторних спостережень поведінку. При введенні коефіцієнта дисипації для встановлення подібності з експериментальною установкою, як описано в підрозділі 4.2, вдалось досягти якісного збігу результатів. При встановленні подібності з дослідним устаткуванням згасання коливань на вільній поверхні рідини в математичній моделі відбувається за той же час, що і в експериментах. Інші значення коефіцієнта дисипації призводять до збільшення або зменшення тривалості коливань на вільній поверхні рідини, проте тенденція зберігається.

Короткі висновки

Було проведено серію лабораторних експериментів, в яких продемонстровано ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху в системі. Після врахування узагальненої дисипації в побудованій математичній моделі вдалося досягти узгодження спостережень досліду на якісному рівні з отриманими чисельними результатами, що є підтвердженням достовірності побудованої моделі динаміки системи резервуар – рідина.

Висновки до розділу 4

Встановлено особливості динаміки сумісного руху системи в залежності від довжини маятникового підвісу, і показано, що на коротких довжинах прояви нелінійностей знижаються. Динаміка системи при великих довжинах підвісу уподібнюється до динаміки у випадку поступального руху резервуару. Проаналізовано механізми перерозподілу енергії між різними формами руху і встановлено, що коливальний рух на

вільній поверхні рідини згасає і переходить у квазітвердий рух системи в сумісному русі, показано залежність цього процесу від дисипації. Проведено порівняння чисельних даних зі спостереженнями на лабораторному досліді і показано узгодженість на якісному рівні.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі було розглянуто нелінійну задачу динаміки системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі під дією різних видів зовнішнього впливу. Було зроблено наступні основні висновки, виходячи з проведених досліджень:

1. Реалізовано метод дослідження нелінійних задач початкового кінематичного збурення і динамічного (імпульсного і вібраційного) збудження коливань системи циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею на маятниковому підвісі при кутових рухах системи в сумісній постановці.
2. При аналізі поведінки системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі у випадку вібраційного навантаження суттєвою виявилась зміна розподілу власних частот при врахуванні фактору сумісності руху. Показано, що резонансні властивості системи суттєво проявляються на частотах, що пов’язані з домінуванням маятниковых коливань, і практично непомітні на частотах, що є близькими до резонансних частот рідини. На парціальних частотах система резонансних властивостей не проявляє.
3. Показано, що внаслідок залежності групи частот від довжини маятникового підвісу в системі можуть виникати внутрішні резонанси. Один з таких ефектів було детально розглянуто. Було виявлено ефект внутрішнього резонансу на довжині підвісу, за якої власні частоти першої осесиметричної та першої антисиметричної форм коливань рідини збігаються. При цьому відбувається зростання амплітуди першої осесиметричної форми після тривалого часу руху, що є проявом нелінійного перерозподілу енергії в системі.
4. Досліджено залежність розвинення динамічних процесів від довжини підвісу. Встановлено, що при малих довжинах підвісу в системі

значно знижуються прояви нелінійних механізмів. Натомість, у випадку великих довжин підвісу рух рідини уподоблюється до динаміки у випадку поступального руху резервуару, зростає внесок нелінійних механізмів. Встановлено, що зміна характеру поведінки системи пояснюється взаємним розташуванням власних частот коливань.

5. Для імпульсного збудження і початкового кінематичного збурення руху системи встановлено ефект цілеспрямованого перерозподілу енергії між різними формами руху в системі. Зокрема, показано, як залежить згасання кінетичної енергії хвильового руху від дисипації енергії рідини. Показано узгодженість встановленого ефекту з лабораторним експериментом на якісному рівні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абгарян К. А. Динамика ракет / К. А. Абгарян, И. М. Раппопорт. – М.: Машиностроение, 1969. – 379 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
3. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. В. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 394 с.
4. Бояршина Л. Г. О волновых формах свободной поверхности жидкости, содержащейся в цилиндрическом сосуде / Л. Г. Бояршина, П. С. Ковальчук // Прикладная механика. – 1986. – 22, № 3. – С. 113–116.
5. Бояршина Л. Г. Анализ нелинейных волновых движений жидкости в цилиндрическом сосуде, совершающем заданные угловые колебания / Л. Г. Бояршина, П. С. Ковальчук // Прикладная механика. – 1990. – 26, №6. – С. 95–101.
6. Ганиев Р. Ф. О колебательных формах движения свободной поверхности жидкости в движущихся полостях / Р. Ф. Ганиев, В. В. Холопова // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 10. – С. 883–886.
7. Ганиев Р. Ф. Нелинейные колебания тела с жидкостью, совершающего движение в пространстве / Р. Ф. Ганиев, В. В. Холопова // Прикладная механика. – 1975. – 11, № 1. – С. 115–126.
8. Губська В. В. Нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в оберненому усіченому конусі: дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.01 / Губська Вікторія Володимирівна – Київ, 2012. – 135 с.
9. Докучаев Л. В. Механическая модель осесимметричного тела с жидкостью, совершающего немалые движения / Л. В. Докучаев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 2. – С. 25–29.

10. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика космических аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машино-строение, 1987. – 232 с.
11. Ковальчук Б. П. Нелінійна динаміка рідини з вільною поверхнею в резервуарі, який виконує кутові рухи: дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.01 / Ковальчук Богдан Петрович – Київ, 2011. – 121 с.
12. Колесников К. С. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде / К. С. Колесников – М.: Типография МВТУ ім. Баумана, 1964. – 98 с.
13. Колесников К. С. Динамика ракет / К. С. Колесников. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
14. Кононов Ю. Н. Задача Сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями / Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. – 2010. – Вип. 40. – С. 210–220.
15. Крамаренко Ю. О. Роль фактора сумісності руху рідини з вільною поверхнею при різних способах закріплення резервуару / Ю. О. Крамаренко, О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С. 129–132.
16. Кубенко В. Д. Аналіз стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, М. П. Подчасов // Доповіді НАН України, серія фіз.-мат.наук. – 2010. – №5. – С. 50–56.
17. Лимарченко О. С. Вариационный принцип для нестационарных многокомпонентных континуальных систем / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1978. – 14, № 10. – С. 28–34.
18. Лимарченко О. С. Вариационная формулировка задачи о движении резервуара с жидкостью / О. С. Лимарченко // Доклады АН УССР, Сер. А. – 1978. – № 10. – С. 904–908.

19. Лимарченко О. С. Исследование задач нелинейной динамики резервуара с жидкостью вариационным методом / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 1. – С. 99–105.
20. Лимарченко О. С. Прямой метод решения задачи о совместных пространственных движениях системы тело – жидкость / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1983. – 19, № 8. – С. 77–84.
21. Лимарченко О. С. Применение вариационного метода решения нелинейных задач динамики совместных движений резервуара с жидкостью / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1983. – 19, № 11. – С. 100–104.
22. Лимарченко О. С. Исследование нелинейных пространственных движений системы резервуар – жидкость при импульсном возбуждении движения / О. С. Лимарченко // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1984. – С. 24–31.
23. Лимарченко О. С. Исследование эффективности дискретных моделей при решении задачи об импульсном возбуждении резервуара с жидкостью / О. С. Лимарченко // Математическая физика и нелинейная механика. – 1985. – № 4. – С. 44–48.
24. Лимарченко О. С. Исследование пространственного волнообразования жидкости при импульсном возбуждении резервуара с жидкостью / О. С. Лимарченко // Кавитационные колебания и динамика двухфазных систем. – Киев: Наукова Думка, 1985. – С. 118–124.
25. Лимарченко О. С. Исследование влияния движения жидкости со свободной поверхностью на угловые движения несущего тела / О. С. Лимарченко // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1986. – С. 19–26.

26. Лимарченко О. С. Исследование поведения системы цилиндрический резервуар – жидкость со свободной поверхностью при сложном динамическом нагружении // Прикладная механика. – 1987. – 23, № 3. – С. 111–117.
27. Лимарченко О. С. Уточненное определение форм колебаний жидкости в полостях вращения / О. С. Лимарченко // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1987. – С. 45–52.
28. Лимарченко О. С. Исследование переходных режимов вращательного движения резервуара с жидкостью со свободной поверхностью / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1987. – 23, № 11. – С. 98–105.
29. Лимарченко О. С. Нелинейная модель движения жидкости в полости вращения / О. С. Лимарченко // Математическое моделирование динамических процессов в системах тел с жидкостью. – Киев: Институт математики АН УССР, 1988. – С. 44–54.
30. Лимарченко О. С. Численное моделирование переходных режимов движения резервуаров с жидкостью / О. С. Лимарченко // Колебания упругих конструкций с жидкостью. – Новосибирск: СибНИА авиации им. С. А. Чаплыгина, 1990. – С. 122–126.
31. Лимарченко О. С. Нелинейные модели в прикладных задачах динамики тел с жидкостью со свободной поверхностью / О. С. Лимарченко, И. А. Луковский, А. Н. Тимоха // Прикладная механика. – 1992. – 28, № 11. – С. 108–109.
32. Лимарченко О. С. Моделирование нестационарного движения осесимметричного бака с жидкостью / О. С. Лимарченко // Прикладная механика. – 1994. – 30, № 5. – С. 63–68.
33. Лимарченко О. С. Поверхневе хвилеутворення в системі резервуар – рідина при кутовому збуренні руху резервуару / О. С. Лимарченко, К. О.

Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2014. – №3. – С. 50–53.

34. Лимарченко О. С. Особливості руху системи резервуар – рідина на маятниковому підвісі під дією зовнішньої гармонічної сили / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2014. – № 20. – С. 140–146.

35. Лимарченко О. С. Перерозподіл енергії між резервуаром і рідиною з вільною поверхнею при кутових рухах системи / О. С. Лимарченко, К. О. Семенович // Нелінійні коливання, Інститут математики НАН України. – 2016. – Т. 19, №1. – С. 85–92.

36. Луковський І. О. Рівняння збуреного руху твердого тіла з порожниною, яка має форму тіла обертання і частково заповнена рідиною / І. О. Луковський // Доп. АН УРСР. – 1962. – № 6. – С. 749–753.

37. Луковский И. А. О методах построения приближенных решений нелинейных краевых задач динамики ограниченного объема жидкости со свободной границей / И. А. Луковский // Математизация знаний и научно-технический прогресс. – Киев: Наукова Думка, 1975. – С. 129–148.

38. Луковский И. А. К задаче о пространственных нелинейных движениях жидкости в прямом круговом цилиндре / И. А. Луковский, А. С. Корнеева // Динамика и устойчивость управляемых систем. – Киев: Институт математики АН УССР, 1977. – С. 93–103.

39. Луковский И. А. Вариационная формулировка нелинейных краевых задач динамики ограниченного объема жидкости, совершающего заданное движение в пространстве / И. А. Луковский // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 2. – С. 102–108.

40. Луковский И. А. Приближенный метод решения нелинейных задач динамики жидкости в сосуде, совершающего заданное движение / И. А. Луковский // Прикладная механика. – 1981. – 17, № 2. – С. 89–90.
41. Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко – Киев: Наукова думка, 1984. – 232 с.
42. Луковский И. А. Численно-аналитические методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, О. С. Лимарченко, А. М. Пилькевич // Прикладная механика. – 1988. – 24, № 1. – С. 102–107.
43. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И. А. Луковский. – Киев: Наукова думка, 1990. – 295 с.
44. Луковский И. А. Вариационные методы в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, А. Н. Тимоха. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. – 400 с.
45. Луковский И. А. Определение сил взаимодействия в задачах динамики плавающего тела, содержащего жидкие грузы / И. А. Луковский // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 9. – С. 74–81.
46. Луковський І. О. Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини у кругових циліндричних ємностях на основі семимодової моделі третього порядку / І. О. Луковський, О. В. Солодун // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Київ: Праці Інституту математики НАН України. – Т. 47. – 2003. – С. 161–179.
47. Луковський І. О. Аналіз силової взаємодії в рухомому циліндричному резервуарі на основі дев'ятимодової нелінійної моделі / І. О. Луковський, Д. В. Овчинников // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ, Інститут математики НАН України, 2008. – Т.5. – №2. – С. 205–231.

48. Луковский И. А. Математические модели нелинейной линамики твердых тел с жидкостью / И. А. Луковский – Киев: Наукова Думка, 2010. – 208 с.
49. Мишишев Г. Н. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью / Г. Н. Мишишев, Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.
50. Мишишев Г. Н. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г. Н. Мишишев, Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1971. – 536 с.
51. Мишишев Г. Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов / Г. Н. Мишишев. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
52. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. – Киев: Наукова Думка, 1971. – 440 с.
53. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
54. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
55. Моисеев Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. Н. Румянцев. – М.: Наука, 1965. – 410 с.
56. Моисеев Н. Н. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости / Н. Н. Моисеев, А. А. Петров. – М.: ВЦ АН СССР, 1966. – 269 с.
57. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости / Н. Н. Моисеев // Прикладная математика и механика. – 1958. – 22, № 5. – С. 612–621.
58. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью: учет немалости движения последней / Г. С. Нариманов // Прикладная математика и механика. – 1957. – 21, № 4. – С. 513–524.

59. Нариманов Г. С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях / Г. С. Нариманов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 10. – С. 71–74.
60. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью / Г. С. Нариманов // Прикладная математика и механика. – 1966. – 30, № 1. – С. 21–38.
61. Нариманов Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
62. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет–носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
63. Румянцев В. В. О некоторых вариационных принципах в механике сплошных сред / В. В. Румянцев // Прикладная математика и механика. – 1973. – 37, № 6. – С. 963–973.
64. Семенова І. Ю. Нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в рухомому резервуарі параболічної форми : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.01 / Семенова Ірина Юліївна – Київ, 2008. – 133 с.
65. Семенович К. О. Переходний рух резервуара на маятниковому підвісі при кінематичних та силових збуреннях / Відп. ред. О. С. Лимарченко // Збірник матеріалів наукової школи-семінару «Сучасні математичні методи досліджень в механіці» (Київ, 8–11 жовтня 2012). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, видавництво «Адверта», 2012. – С. 32–37.
66. Семенович К. О. Сумісний рух резервуара на маятниковому підвісі і рідини при імпульсному збудженні / К.О. Семенович, О.С. Лимарченко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія фізико-математичні науки. – 2013. – №2. – С. 67–70.
67. Семенович К. А. Динамическое взаимодействие жидкости с резервуаром при угловых колебаниях / К. А. Семенович, О. С. Лимарченко

// "Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування", збірник праць Інституту математики НАН України. – 2013. – Т. 10, № 4–5. – С. 520–525.

68. Семенович К. О. Цілеспрямований перерозподіл енергії в процесі руху резервуару з рідиною на маятниковому підвісі / Відп. ред. О. С. Лимарченко // Збірник матеріалів міжнародної конференції «Варіаційні методи механіки» (Київ, 23–26 вересня 2013). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, видавництво «Адверта», 2014. – С. 8–12.

69. Семенович К. О. Внутрішній резонанс в системі резервуар – рідина на маятниковому підвісі / К. О. Семенович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – Спецвипуск. – С. 239–242.

70. Стрелков В. П. Введение в теорию колебаний 2-е изд. перераб. и доп. – Москва.: Наука, 1964. – 437с.

71. Филимонихин Г. Б. Стабилизация маятниковыми демпферами пространственного положения оси вращения несущего тела / Г. Б. Филимонихин, В. В. Пирогов, И. И. Филимонихина // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 10. – С. 120–128.

72. Шмаков В. П. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах / В. П. Шмаков // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Томск. ун-т. – 1978. – С. 157–162.

73. Abramson H. N. The dynamic behavior of liquids in moving containers / H. N. Abramson // NASA SP-106, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, 1966.

74. Abramson H. N. Liquid Sloshing in Compartmented Cylindrical Tanks / H. N. Abramson, L. R. Garza, D. D. Kana // ARS J., 32. – 1962. – P. 978–980.

75. Bauer H. F. Oscillations of non-viscous liquid in various container geometries / H. F. Bauer // Forschungbericht LRT-WE-9-FB-1, 1999.

76. Bauer H. F. Frictionless liquid sloshing in circular cylindrical container configurations / H. F. Bauer, W. Eidel // Aerospace and Technology. – 1999. – №5. – P. 301–311.
77. Bauer H. F. Interaction of a Sloshing Liquid With Elastic Containers / H. F. Bauer, Teh-Min Hsu, J. Ting-Shun Wang // School of Engineering Mechanics, Georgia Institute of Technology, 1968, Atlanta, Ga.
78. Bauer H. F. Axisymmetric oscillation of a viscous liquid covered by an elastic structure / H. F. Bauer, M. Chiba // Journal of Sound and Vibrations. – 2005. – 281. – P. 835–847.
79. Cooker M. J. Water waves in a suspended container / M. J. Cooker // Wave Motion 20. – 1994. – P. 385–395.
80. Dodge F. T. The new ‘Dynamic behavior of liquids in moving containers’ / F. T. Dodge // Southwest Research Inst., San Antonio, TX, 2000.
81. Faltinsen O. M. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth / O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, I. A. Lukovsky, A. N. Timokha // Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. – 2000. – Vol. 407. – P. 201–234.
82. Faltinsen O. M. An adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank / O. M. Faltinsen, A. N. Timokha // Journal of Fluid Mechanics. Cambridge University Press. – 2001. – Vol. 432. – P. 167–200.
83. Faltinsen O. M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, A. N. Timokha // Physics of Fluids, 18, American Institute of Physics, 2006.
84. Gradinscak M. Design of the flexible container for control of sloshing / M. Gradinscak // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vols. 365–366. – P. 62–65.
85. Gubska V. V. Dynamics of reservoir partially filled by liquid under spring restriction of motion / V. V. Gubska // Visnyk of Taras Shevchenko

Natio-nal University of Kyiv, Mathematics. Mechanics.–2011. – No. 26. – P. 4–7.

86. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications / R. A. Ibrahim // Cambridge University Press, 2005.
87. Ibrahim R. A. Recent advances in liquid sloshing dynamics / R. A. Ibrahim, V. N. Pilipchuk, T. Ikeda // Applied Mechanics Reviews, 2001. – Vol. 54, №2.
88. Konstantinov O. V. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems / O. V Konstantinov, O. S. Limarchenko, K. O. Semenovych // Mathematical Modeling & Computing. – Lviv, 2015. – Vol. 2, No. 1. – P. 48–57.
89. Kubenko V. D. Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid / V. D Kubenko, P. S.Kovalchuk // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36(4). – P. 421–448.
90. La Rocca M. On the analysis of sloshing of water in rectangular containers: numerical study and experimental validation / M. La Rocca, V. Armenio // Ocean Engng. – 1996. – Vol. 23, No. 8. – P. 705–739.
91. La Rocca M. A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container / M. La Rocca, G. Sciortino, M. Boniforti // Fluid Dynamics Research, 2000.
92. La Rocca M. Variational approach to the problem of sloshing / M. La Rocca, P. Mele, V. Armenio // Journal of Theoretical and Applied Fluid Mechanics. – 1997. – Vol. 1, no. 4. – P. 280–310.
93. Limarchenko O. Rotational motion of structures with tanks partially filled by liquid / O. Limarchenko, G. Matarazzo, V. Yasinsky // FADA LTD, Kyiv, 2003.
94. London K. W. A fully coupled multi-rigid-body fuel slosh dynamics model applied to the Triana stack / K. W. London // NASA Report 20010084984 2001127533.pdf, 2001.

95. Lukovsky I. A. Multimodal method in sloshing / I. A. Lukovsky, A. N Tymokha // Nonlinear Oscillations, Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2015. – Vol. 18. – №3 – P. 295–312.
96. Miles J. W. Free Surface Oscillations in a Rotating Liquid / J. W. Miles // Physics of Fluids. – 1959. – 2. – P. 297–305.
97. Miles J.W. Surface Oscillations of a Rotating Liquid / J. W. Miles, B. Troesch // ASME J. Applied Mechanics. – 1961. – 28. – P. 491–496.
98. Miles J.W. Surface waves damping in closed basins / J. W. Miles // Proc. Royal Soc. (London) A. Math. Phys. – 1967. – 297. – P. 459–475.
99. Miles J.W. Nonlinear surface waves in closed basins / J. W. Miles // Journal of Fluid Mechanics. – 1976. – 75. – P. 419–448.
100. Miles J. W. A note on interior vs boundary layer damping of surface waves in a circular cylinder / J. W. Miles, D. M Henderson // J. Fluid Mech. – 1998. – 364. – P. 319–323.
101. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – Vol. 1. – No. 6. – P. 1–5.
102. Pilipchuk V. N. Nonlinear Dynamics: Between Linear and Impact Limits (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics) / V. N. Pilipchuk // Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
103. Turner M. R. Instability of sloshing motion in a vessel undergoing pivoted oscillations / M. R. Turner, H. A. Ardakani, T. J. Bridges // Journal of Fluids and Structures. – 2015. – Vol. 52. – P. 166–180.
104. Turner M. R. Nonlinear energy transfer between fluid sloshing and vessel motion / M. R. Turner, T. J. Bridges // Journal of Fluid Mechanics. – 2013, Vol. 719. – P. 606–636.