

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**

**Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка**

**ОРЛЕНКО СЕРГІЙ ПЕТРОВИЧ**



УДК 539.3

**ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З  
ДИСКРЕТНО НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла.

Автор ефера  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

**Київ – 2020**

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана у відділі будівельної механіки тонкостінних конструкцій  
Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

**Науковий керівник:**

доктор технічних наук, професор  
**Луговий Петро Захарович,**  
 в.о. завідувача відділу будівельної механіки  
 тонкостінних конструкцій Інституту  
 механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

**Офіційні опоненти:**

доктор технічних наук, професор  
**Гайдайчук Віктор Васильович,**  
 завідувач кафедри теоретичної механіки  
 Київського національного університету  
 будівництва і архітектури МОН України;

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Лоза Ігор Андрійович,**  
 завідувач кафедри теоретичної та прикладної  
 механіки Національного транспортного  
 університету МОН України.

Захист відбудеться «22» грудня 2020 р. о 13<sup>30</sup> годині на засіданні  
 спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки  
 ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57, вул.  
 Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки  
 ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57,  
 вул. Нестерова, 3.

Автореферат розісланий «20» листопада 2020 р.

Учений секретар  
 спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01  
 доктор фізико-математичних наук

О.П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** В авіабудуванні, кораблебудуванні, ракетобудуванні, атомній енергетиці, а також в інших областях техніки широко використовуються неоднорідні шаруваті оболонкові елементи. Використання таких конструктивних елементів, при дії на них динамічних навантажень, дозволяє вирішити проблему матеріалоемності і ваги виробів при збереженні необхідної міцності і достатньої легкості. Для тришарових оболонок з різкою відмінністю фізико-механічних властивостей шарів слід застосовувати теорію незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. В якості прикладів використання шаруватих оболонок, в яких кожен шар виконує одну або декілька функцій, можна назвати корпуси надзвукових літаків, ракет-носіїв, сучасних потягів, а також різні конструктивні елементи обладнання атомної енергетики. Такий перелік прикладів можна значно продовжити. Тому є необхідність удосконалити методику визначення динамічної поведінки несиметричних тришарових циліндричних та зрізаних конічних і сферичних оболонок при різноманітних граничних умовах і нестационарних розподілених і локальних навантаженнях. Розв'язання відповідних крайових задач пов'язане з труднощами обчислювального характеру, що вимагає при дослідженні механічної поведінки тришарових оболонок з сучасних матеріалів вдосконалення ефективних чисельно-аналітичних підходів і використання сучасних скінчено-елементних комплексів. При цьому необхідно визначити характер динамічних процесів, які протикають в таких конструкціях для визначення їх міцності і життєздатності. Дискретно-симетричний легкий заповнювач, армований ребрами, значно підвищує міцність тришарових конструкцій при незначному збільшенні їх ваги. Дослідження впливу конструктивної та структурної неоднорідності тришарових оболонкових елементів конструкцій на їх механічну поведінку і отримання інформації про вплив механічних та геометричних властивостей шарів на параметри коливальних процесів при нестационарному деформуванні, є **актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла**, яка потребує свого вирішення.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана у відповідності до програм і планів наукових робіт Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за темами: “Динаміка складних оболонкових систем при дії розподілених та локальних нестационарних навантажень” (шифр 1.3.1. 402 - 16, № ДР 0115U005704, 2016 - 2019 pp.), “Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем” (шифр 1.3.1. 410 - 17. № ДР 0117U000700, 2017 - 2021pp.), та “Чисельне моделювання динаміки і статики шаруватих оболонкових елементів складної геометрії стосовно об'єктів атомної та космічної галузей” (шифр 1.3.1.6 417 - 20, № ДР 0119U103374, 2020 - 2024), співвиконавцем яких був дисертант.

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є поглиблений аналіз нестационарного деформування тришарових несиметричних оболонок обертання з дискрето-симетричним неоднорідним заповнювачем в рамках різних моделей на основі нових та ефективних скінчено-різницевих і сучасних скінчено-елементних підходів, включаючи:

- створення розрахункової моделі тришарових несиметричних оболонок обертання з дискретно-симетричним неоднорідним легким заповнювачем, армованим ребрами жорсткості, яка враховує взаємовплив несучих шарів і складових заповнювача;
- дослідження впливу зовнішнього навантаження на динамічні характеристики тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем на основі вдосконалених ефективних чисельно-аналітичних підходів і скінчено-елементних методів;
- побудова розв'язків задач про нестационарне деформування структурно неоднорідних тришарових оболонок обертання з врахуванням дискретності неоднорідного заповнювача при розподілених і локальних динамічних навантаженнях;
- розроблення схематизації та вибору розрахункових моделей при чисельному дослідженні конкретних задач динамічної поведінки несиметричних тришарових оболонок обертання при різних видах нестационарних навантажень;
- узагальнення результатів досліджень стосовно аналізу напруженодеформованого стану тришарових несиметричних оболонок обертання з дискретно-симетричним неоднорідним легким заповнювачем для створення основ розрахунку на міцність таких елементів конструкцій.

На основі аналізу отриманих результатів виявити нові механічні ефекти і розробити рекомендації щодо створення інженерних методів розрахунків неоднорідних тришарових оболонкових елементів конструкцій при динамічних навантаженнях. Робота спрямована на підвищення рівня розрахунків тришарових оболонкових елементів, які застосовуються в атомній і космічній та інших галузях.

**Об'єкт дослідження:** напружено-деформований стан тришарових оболонок обертання при нестационарних навантаженнях.

**Предмет дослідження:** вплив дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача на динаміку несиметричних тришарових оболонок обертання при нестационарних навантаженнях.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі використано основні співвідношення теорії оболонок та криволінійних стрижнів теорії С.П. Тимошенка. Розв'язок одновимірних динамічних задач для дискретно-симетричного заповнювача базується на використанні інтегро-інтерполаційного методу побудови скінчено-різницевих схем по просторовим координатам та явній різницевій апроксимації по часовій координаті. Розв'язок більш складних задач динамічної поведінки несиметричних тришарових оболонок з дискретно-симетричним

неоднорідним легким, армованим ребрами заповнювачем заснований на використанні скінчено-елементного методу.

**Достовірність отриманих результатів,** обґрунтованість та вірогідність результатів розрахунків НДС тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем при нестационарних навантаженнях забезпечується:

- точним і детальним моделюванням геометрії і структури дискретно-симетричного заповнювача, коректністю постановок вихідних задач;
- перевіркою практичної збіжності обчислювальних процесів;
- застосуванням скінчено-елементної моделі із оптимальним співвідношенням розмірів скінчених елементів, при яких забезпечується найкраща апроксимація;
- верифікацією розробленої методики порівнянням з тестовими задачами, з результатами альтернативних розрахунків.

#### **Наукова новизна отриманих результатів:**

1. Розроблена нова розрахункова модель тришарової несиметричної оболонки обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем.

2. На основі варіаційного принципу Гамільтона - Остоградського виведені нові рівняння коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким заповнювачем з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів.

3. Досліджено вплив дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами, заповнювача на напружено-деформований стан несиметричної тришарової циліндричної оболонки з при динамічному навантаженні.

4. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при розподіленому імпульсному навантаженні.

5. Створена методика розрахунку динаміки несиметричної тришарової конструктивно-ортотропної сферичної оболонки з стільниковим заповнювачем при дії на неї плоскої ударної хвилі.

6. Досліджено вплив несиметрії тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем на її напружено-деформований стан при дії імпульсного навантаження.

7. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при дії імпульсного розподіленого і локального навантаження.

**Практичне значення отриманих результатів полягає в тому,** що вони можуть бути використані для дослідження прикладних задач в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка, в Державному підприємстві «Державний науково-технічний центр з ядерної та радіаційної безпеки», Національному технічному університету України ім. Ігоря Сікорського, на Державному підприємстві КБ "Південне" ім. М.К. Янгеля"

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати досліджень, одер-

жані в дисертаційній роботі, належать її автору. Вибір теми, формування завдань та аналіз результатів проведених досліджень виконано спільно з науковим керівником. У наукових публікаціях, підготовлених у співавторстві, безпосередньо автором виконано таке: проведено математичне моделювання НДС неоднорідних і шаруватих оболонок обертання з дискретно-симетричним заповнювачем [1-3,7], та обґрунтування скінченно-елементних моделей оболонок. Роботи [4-6] написані самостійно.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи частково і повністю доповідалися на семінарах відділу будівельної механіки тонкостінних конструкцій Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України; повністю робота доповідалась на науковому семінарі за напрямком “Механіка оболонкових систем” при Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Частково матеріали дисертації доповідалися на міжнародних конференціях.

**Публікації.** За результатами дисертації опубліковано: 7 статей у наукометричних фахових виданнях [1-7]; 8 робіт у збірниках матеріалів і праць міжнародних наукових конференцій [8-15]. Опубліковані роботи з достатньою повнотою передають зміст дисертації.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається з анотації (українською, російською та англійською), вступу, п'яти розділів, загальних висновків, списку використаних джерел з 187 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 150 сторінок машинописного тексту, в тому числі, 57 рисунків, 1 таблиця, акт впровадження на 1 сторінці.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові доктору технічних наук, професору, Заслуженому діячу науки і техніки України, Лауреату державної премії в галузі науки і техніки України Петру Захаровичу Луговому за постійну допомогу та корисні поради при виконанні дисертаційної роботи.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** розкрито суть і стан науково-технічної проблеми, обґрунтовано **актуальність** теми дисертації, викладено мету роботи та сформульовано основні положення, що виносяться на захист, практичне значення та наукову новизну результатів дисертаційної роботи. Наводяться дані щодо апробації та структури роботи.

У **першому** розділі висвітлені загальні питання розвитку методів розв'язку задач шаруватих оболонкових конструкцій, наведених у працях і монографіях С.А Амбарцумяна, В.А. Баженова, В.З. Власова, А.С. Вольміра, В.В. Гайдайчука, О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, В.Г. Карнаухова, В.Д. Кубенка, С.Г. Лехницкого, П.З. Лугового, В.Ф. Мейша, В.Г. Новожилова, Е. Рейснера, С.П. Тимошенка, E. Carrera, L. Librescu, A.K. Noor, N.J. Pagano та інших.

Ці роботи залишаються ґрунтовною математичною базою для вибору відповідних гіпотез при побудові розрахункових моделей тришарових оболонкових елементів і визначення застосування аналітичних і чисельних методів розрахунку реальних конструкцій.

На основі аналізу ґрунтовно виконаного огляду визначене місце даної роботи серед проведених раніше розробок і обґрунтовано вибір напрямків досліджень.

У другому розділі викладена постановка задачі, створена розрахункова модель і виведені нові розв'язувальні системи рівнянь коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при вимушених динамічних навантаженнях. Застосована теорія оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів. Тришарова оболонка складається з внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів, різної товщини або виготовлених з різних матеріалів, і набору дискретних ребер, що жорстко з'єднані з вказаними несучими шарами. Неоднорідність дискретного ребристого заповнювача обумовлена наявністю легкого матеріалу в порожнинах між армуючими ребрами і несучими шарами. Передбачається ідеальне з'єднання між легким заповнювачем і несучими шарами без відриву і проковзування. Вирізаний елемент тришарової структури схематично зображенено на рис. 2.1.

Деформований стан несучих шарів може бути визначений через компоненти узагальненого вектора переміщень  $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$  і  $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$ . Деформований стан армуючого ребра, направленого вздовж осі  $x$ , будемо визначати узагальненим вектором переміщення

$\bar{U}_t = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ . Відповідно, вздовж осі  $y$  –  $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ . Деформований стан легкого заповнювача будемо визначати узагальненим вектором переміщення  $\bar{U}_t = (u_1^t, u_2^t, u_3^t, \varphi_1^t, \varphi_2^t)^T$ .

Зв'язок між компонентами переміщень несучих шарів і величинами дискретних армуючих елементів записуються згідно формул:

- для несучих шарів і дискретних повздовжніх армуючих ребер заповнювача

$$\begin{aligned} u_{1i}(x, t) &= u_1^k(x, y_i, t) \pm H_i^k \varphi_1^k(x, y_i, t); \quad u_{2i}(\alpha_1) &= u_2^k(x, y_i, t) \pm \\ H_i^k \varphi_2^k(x, y_i, t); \quad u_{3i}(x) &= u_3^k(x, y_i, t); \quad \varphi_{1i}(x) &= \varphi_1^k(x, y_i, t); \quad \varphi_{2i}(x) = \\ \varphi_2^k(x, y_i, t), \quad k &= 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

- для несучих шарів і дискретних поперечних армуючих ребер заповнювача

$$u_{1j}(y, t) = u_1^k(x_j, y, t) \pm H_i^k \varphi_1^k(x_j, y, t); \quad u_{2i}(y, t) = u_2^k(x_j, y, t) \pm$$

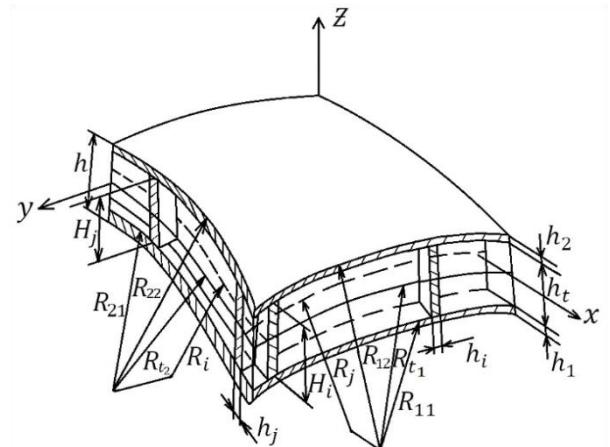


Рис. 2.1. Елемент тришарової структури

$$H_i^k \varphi_2^k(x_j, y, t); u_{3i}(y, t) = u_3^k(x_j, y, t); \varphi_{1i}(y, t) = \varphi_1^k(x_j, y, t); \varphi_{2i}(y, t) = \varphi_2^k(x_j, y, t), k=1,2 \quad (2.2)$$

У співвідношеннях (2.1), (2.2)  $H_i^k = 0,5(H_i + h_k)$ ,  $H_j^k = 0,5(H_j + h_k)$ , ( $k=1,2$ );  $H_i$ ,  $H_j$  – висоти i-того і j-того армуючих ребер заповнювача,  $h_i$ ,  $h_j$  – товщини i-того і j-того армуючих ребер заповнювача;  $h_k$  ( $k = 1,2$ ) товщини несучих шарів;  $x$  – координата лінії проектування центрів ваги поперечних перетинів повзводжного армуючого j-го ребра, направленого вздовж лінії  $y$ , на відповідну середину поверхню несучого шару.

Умови неперервності переміщень на поверхнях стику несучих шарів і легкого заповнювача у спрощеному вигляді записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} u_{10}^t &= \frac{1}{2}[u_{10}^1 + u_{10}^2 - \frac{1}{2}(h_1 u_1^1 - h_2 u_1^2)]; \\ u_{11}^t &= \frac{1}{h_t}[u_{10}^1 - u_{10}^2 - \frac{1}{2}(h_1 u_1^1 + h_2 u_1^2)]; \\ u_{20}^t &= \frac{1}{2}[u_{20}^1 + u_{20}^2 - \frac{1}{2}(h_1 u_2^1 - h_2 u_2^2)]; \\ u_{21}^t &= \frac{1}{h_t}[u_{20}^1 - u_{20}^2 - \frac{1}{2}(h_1 u_2^1 + h_2 u_2^2)]; \\ u_{30}^t &= \frac{1}{2}(u_{30}^1 + u_{30}^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для виводу рівнянь коливань використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона–Остроградського, згідно якого:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (2.4)$$

Вирази для повної потенціальної і кінетичної енергії записуються у вигляді:

$$\delta \Pi = \delta \sum_{i=1}^2 \Pi^i + \delta \sum_{i=1}^I \Pi_i + \delta \sum_{j=1}^J \Pi_j + \delta \sum_t \Pi^t \quad (2.5)$$

$$\delta K = \delta \sum_{i=1}^2 K^i + \delta \sum_{i=1}^I K_i + \delta \sum_{j=1}^J K_j + \delta \sum_t K_t \quad (2.6)$$

Після стандартних перетворень у варіаційному рівнянні (2.4), з врахуванням співвідношень (2.1) - (2.3), (2.5), (2.6), отримаємо системи рівнянь двовимірних коливань несиметричної тришарової оболонки з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^i}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}^i}{\partial y} + \frac{T_{13}^i}{R_{1i}} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial M_{12}^i}{\partial y} - \frac{4}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{12}^i}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}^i}{\partial y} + \frac{T_{13}^i}{R_{2i}} - \frac{4}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_2^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^i}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}^i}{\partial y} - \left( \frac{T_{11}^i}{R_{1i}} + \frac{T_{22}^i}{R_{2i}} \right) - \frac{1}{R_{t1} h_t} M_{11}^t - \frac{1}{R_{t2} h_t} M_{22}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} + \\ + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{23}^t}{\partial y} - \left( 1 \pm \frac{h_i}{2R_{1i}} \right) \left( 1 \pm \frac{h_i}{2R_{2i}} \right) P_i &= \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{30}^i}{\partial t^2}; \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial M_{11}^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{12}^i}{\partial y} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{12}^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}^i}{\partial y} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}; \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial T_{11}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}^t}{\partial y} + \frac{1}{R_{1t}} \left( \frac{\partial M_{21}^t}{\partial y} + T_{11}^t - T_{13}^t \right) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^t}{\partial x} + \frac{\partial M_{21}^t}{\partial y} - T_{13}^t + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{22}^t}{\partial y} + \frac{\partial T_{12}^t}{\partial x} + \frac{1}{R_{t2}} \left( \frac{\partial M_{12}^t}{\partial x} + T_{13}^t - T_{23}^t \right) + \frac{8}{h_t^2} M_{23}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{20}^t}{\partial t^2}; \\
& \frac{\partial M_{22}^t}{\partial y} + \frac{\partial M_{12}^t}{\partial x} - T_{23}^t + \frac{1}{R_{t2}} M_{23}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{21}^t}{\partial t^2}; \\
& \frac{\partial T_{13}^t}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}^t}{\partial y} - \frac{1}{R_{t1}} T_{11}^t - \frac{1}{R_{t2}} T_{22}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2}; \\
& [\tilde{S}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + k_1 T_{13i} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}, \quad [T_{11}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{21j}}{\partial y} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \\
& [T_{22}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}, \quad [\tilde{S}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + k_{2j} \bar{T}_{23j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{2j}}{\partial t^2}, \\
& [T_{23}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13i}}{\partial x} - T_{11i} k_{1i} = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2}, \quad [T_{13}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{13j}}{\partial y} - k_{2j} T_{22j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \\
& [M_{12}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} - T_{13i} = \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2}, \quad [M_{11}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} = \rho_j I_{krij} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}, \\
& [M_{22}]_i + \frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} = \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2}; \quad [M_{12}]_j + \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} - T_{23} = \rho_j I_{2j} \frac{\partial^2 \varphi_{2j}}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

В рівняннях (2.7) величини  $\sum_{i=1}^2 (T_{12}^{i\pm} - \frac{M_{12}^{i\pm}}{R_{1i}}) = [\tilde{S}]_i$ ;  $\sum_{i=1}^2 T_{22}^{i\pm} = [T_{22}]_i$ ;  $\sum_{i=1}^2 T_{23}^{i\pm} = [T_{23}]_i$ ;  $\sum_{i=1}^2 M_{12}^{i\pm} = [M_{12}]_i$ ;  $\sum_{i=1}^2 M_{22}^{i\pm} = [M_{22}]_i$  відповідають зусиллям–моментам, які діють на  $j$  – й дискретний елемент на лінії розриву  $x_I = x_{Ij}$ , аналогічно для  $y_I = y_{Ii}$ . Таким чином, маємо дві системи рівнянь двадцятого порядку. Рівняння руху неоднорідної пружної структури доповнюються граничними і початковими умовами, що витікають з варіаційного принципу (2.4).

В даному розділі дана постановка задач і виведені нові рівняння неосесиметричних коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з урахуванням наявності дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача.

**В третьому** розділі досліджені закономірності протікання хвильових процесів в несиметричних тришарових циліндричних оболонкових структурах з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при нестационарних навантаженнях [1, 2, 5, 7, 9, 12, 13].

Розглянута симетрична тришарова циліндрична оболонка з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим ребрами. Дослідження напружене-деформованого стану вказаної оболонки розглянуто при наступних значеннях геометричних і фізико-механічних параметрів:

$$\frac{L}{h_1} = 40; h_1 = h_2 = 0,01 \text{ м}; \frac{R_1}{h_1} = 10; \frac{H_j}{h_1} = 2; F_j = H_j h_j = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \nu_1^1 = \nu_1^2 = \nu_1^j 0.3; \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Відношення  $E_1^1/E_1^t = 50$ ;  $E_1^1/E_1^t = 500$ ; щільність  $\rho_t = 25 \text{ кг/м}^3$ ; коефіцієнт Пуасона  $\nu_t = 0.33$ .

Армуочі елементи розташовані в точках:

$$x_j = [11 + (k - 1) \cdot 15] \cdot \Delta x; k = 1 \div 5; \Delta x = L/80.$$

На оболонку діє віссиметричне внутрішнє імпульсне навантаження:

$$P_3 = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)], \quad (3.1)$$

де  $\eta$  – функція Хевісайда.

В подальших розрахунках покладалося  $A=10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

Створена скінчено-елементна модель оболонки, що відображає взаємозв'язок потенціальної енергії деформацій в тілі з потенціалом зовнішніх навантажень:

$$\Pi = E - W, \quad (3.2)$$

де  $E$  – потенціальна енергія деформацій, а  $W$  – потенціал зовнішніх навантажень.

Після розбивки суцільної області на окремі елементи залежність (3.2) набуває вигляду:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)} \quad (3.3)$$

Глобальна матриця жорсткості і глобальний вектор-стовпець в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3.4)$$

відповідають співвідношенням:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad (3.5)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} \quad (3.6)$$

В моделях використаний тривимірний об'ємний скінчений елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів. Створена модель (Рис. 3.1), включала 19200 скінчених елементів і 22680 вузлів.

На рис. 3.2 наведені залежності максимальних нормальних прогинів, крива (1)  $u_3^1$  (внутрішній шар), –(2)  $u_3^2$  (зовнішній шар) від координати  $x$  в серединних поверхнях несучих шарів симетричної тришарової циліндричної оболонки.

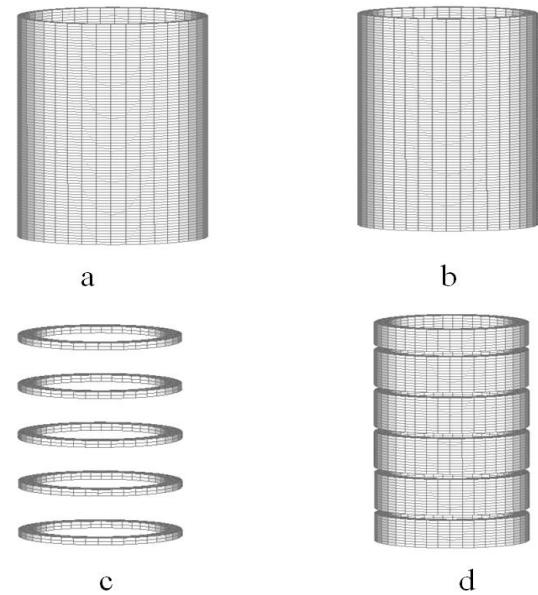


Рис. 3.1. Складові скінчено елементної моделі.

Для даної тришарової структури ці максимуми досягаються в момент часу  $t = 5.95T$ , а власна перша частота коливань такої конструкції тришарової конструкції 1848 Гц. Відношення модулів пружності  $E_1^1/E_1^t = 50$ .

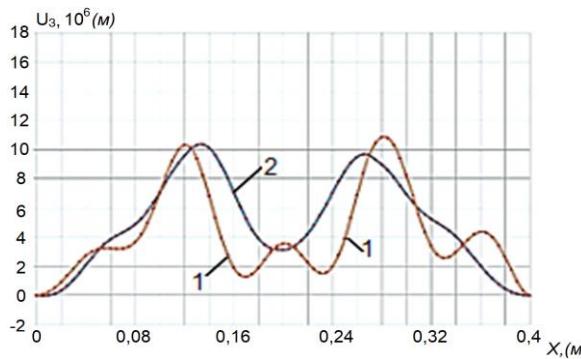


Рис. 3.2 Графіки максимальних прогинів в серединних поверхнях несучих шарів  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від координати  $x$  при  $t = 5.95T$ .  $E_1^1/E_1^t = 50$ .

В таблиці приведені результати дослідження динаміки несиметричних тришарових циліндричних оболонок при дії навантаження (3.1). Верхня частина таблиці відповідає випадку, коли внутрішній несучий шар виготовлений зі сталі, а зовнішній з АМГ-6. Нижній – навпаки.

Параметри Констр. обол.		$t$	1 - внутрішня 2 - зовнішня	$u_3^{\max} \cdot 10^6$	$\sigma_{22}^{\max} \cdot 10^{-6}$	1 Власна частота, Гц
A/C	6/п	3,0T	1	4,61	8,01	2517
			2	3,21	3,61	
	50	3,05T	1	4,35	10,75	2715
			2	3,75	2,87	
	500	3,15T	1	7,45	7,15	2549
			2	2,85	5,35	
C/A	6/п	2,5T	1	-5,82	-12,05	2394
			2	6,01	3,81	
	50	3,35T	1	3,95	8,51	2651
			2	4,52	2,87	
	500	2,95T	1	-6,21	5,85	2424
			2	5,34	5,34	

Проведені в даному розділі дослідження використання в заповнювачі матеріалів з низькими масовими характеристиками дозволяє при порівнянно невеликому збільшенні ваги конструкції (на 1-3 відсотки) істотно підвищити її згинальну жорсткість.

В четвертому розділі досліджена дискретно-симетрична структура конічного типу, яка навантажена внутрішнім віссесиметричним тиском (3.1).

Виходячи з приведених залежностей та рівнянь (2.7), запишемо рівняння коливань несиметричної тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами:

$$\cos\alpha \propto \frac{\partial T_{11}^i}{\partial s} + \frac{T_{13}^i}{R_{is}} - \frac{4}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \quad (4.1)$$

$$\cos\alpha \propto \frac{\partial M_{11}^i}{\partial s} - T_{13}^i + \frac{2h_i}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_i \frac{h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2};$$

$$\cos\alpha \propto \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - \frac{T_{11}^i}{R_{is}} - \frac{1}{R_{ts}h_t} M_{11}^t + \frac{1}{h_t} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial x} - (1 \pm \frac{h_i}{2R_{is}}) P_i = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_{03}^i}{\partial t^2} \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
 \cos a &\propto \frac{\partial T_{11}^t}{\partial s} + \frac{1}{R_{ts}}(T_{11}^t - T_{13}^t) + \frac{8}{h_t^2}M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2}; \\
 \cos a &\propto \frac{\partial M_{11}^t}{\partial s} - T_{13}^t + \frac{1}{R_{ts}}M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2}; \\
 \cos a &\propto \frac{\partial T_{13}^t}{\partial s} - \frac{1}{R_{ts}}T_{11}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2}; \\
 [T_{13}^i] &= \rho_{rj} F_j \frac{\partial^2 u_{3j}^k}{\partial t^2}; [T_{11}^i] = \rho_{rj} F_j \frac{\partial^2 u_{1j}^k}{\partial t^2}; [M_{11}^i] = \rho_{rj} I_{kr}^j \frac{\partial^2 \varphi_{1j}^k}{\partial t^2} \quad k = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Таким чином маємо дві системи дев'ятого порядку. Проведене дослідження коливань несиметричної тришарової конічної оболонки з допомогою методу скінчених елементів при жорсткому защемленні країв несучих шарів оболонки [6, 10, 11].

Розрахунки проводились при наступних значеннях геометричних та фізико-механічних параметрів:

$E_2 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$  Па ;  $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $v_2 = v_j = 0,3$ ;  $R_0 = 0,3$  м,  $R_1 = 0,4$  м;  $R_S = 0,4$  м,  $R_0/h_1 = 30$ ;  $h_1 = h_2 = 0,01$  м;  $H_j = 2 h_1$ ;  $\alpha = \pi/12 = 15^\circ$ ;  $F_j = H_j \cdot h_j = 2 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, а  $h_j = 0,01$  м. Товщина легкого заповнювача –  $h_t = 0,02$  м, фізико-механічні параметри якого:  $(E_1+E_2)/2E_t = 50$  і  $(E_1+E_2)/2E_t = 500$ ;  $\rho_t = 25$  кг/м<sup>3</sup>;  $v_t = 0,33$ ;  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $v_1 = 0,3$ . Дискретні підкріплюючі елементи розташовані в точках внутрішнього несучого шару:  $s_j = [6 + (k - 1)16]\Delta s$ ;  $k = \overline{1,5}$ ,  $\Delta s = (S - s_0)/80$ ,  $(S - s_0) = 0,39$  м.

На рис. 4.1 приведені залежності величин  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від просторової координати  $s$  для випадку відсутності пінопласти в момент часу  $t = 3,10T$ . Перша власна частота тришарової конструкції складає 1559 Гц. Точки з'єднання кривих 1 і 2 вказують на розташування дискретних ребер.

На рис. 4.2 показані залежності величин  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від координати  $s$  для випадку  $(E_1+E_2)/2E_t = 50$  в момент часу  $t = 2,45T$ . Перша власна частота тришарової конструкції складає 1746 Гц.

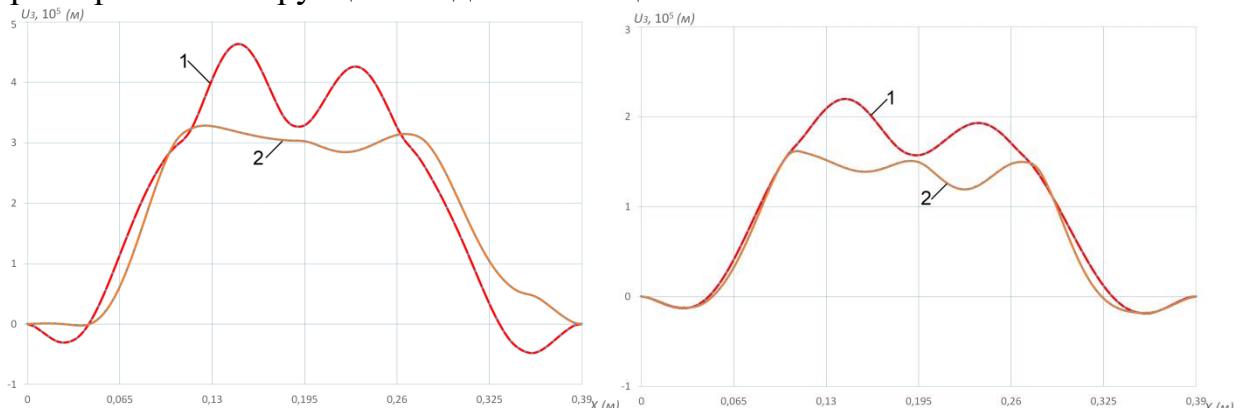


Рис. 4.1 Залежності величин  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від координати  $s$  для випадку відсутності пінопласти в момент часу  $t = 3,10T$ .

Рис. 4.2 залежності величин  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від координати  $s$  для випадку  $(E_1+E_2)/2E_t = 50$  в момент часу  $t = 2,45T$ .

Отримані результати свідчать про значний вплив легкого заповнювача на механічну поведінку тришарової конічної структури: збільшення ваги тришарової конічної оболонки за рахунок ваги легкого заповнювача на 0,01% збільшує першу власну частоту на 12%, а максимуми амплітуд коливань нормальних прогинів зменшуються вдвічі.

В п'ятому розділі досліджені задачі вісесиметричних коливань несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при динамічних навантаженнях.

**5.1.** Динаміка конструктивно-ортотропної тришарової сферично-циліндричної структури з стільниковим заповнювачем. Виконано дослідження динамічної поведінки сферичного елементу обтічника, який з'єднаний з циліндричним відсіком, при дії на нього плоскої ударної хвилі [3, 8]. Напружене-деформований стан такої пружної оболонки може бути визначено в рамках геометрично нелінійного варіанту теорії конструктивно-ортотропних оболонок типу Тимошенка в квадратичному наближенні.

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} &= I_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 \bar{T}_{13}) \right] - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3(\alpha_1, t) &= I_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} \right] - T_{13} &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Рівняння руху сферичної частини обтічника (5.1) доповнюються відповідними граничними умовами. Початкові умови при  $t = 0$  нульові.

З допомогою інтегро-інтерполяційного методу побудовані скінчено-різницеві схеми по просторовій координаті і явна схема інтегрування по часовій координаті  $t$ . Для усунення особливостей на лінії з'єднання оболонкових елементів є використовується спеціальний алгоритм.

Це, по суті, є граничними умовами для тришарової сферичної частини обтічника. Тришарова несиметрична сферична структура складається з несучих шарів товщиною  $1,3 \cdot 10^{-3}$  м і  $0,85 \cdot 10^{-3}$  м і стільниковим заповнювачем. На рис. 5.1 наведені залежності нормальних прогинів  $u_3^1$  від просторової координати сферичної частини конструкції при відповідних часових значеннях. Максимальний прогин не перевищує  $0,2h$ , а деформації  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ , що вказує на збереження працездатності обтічника після дії на нього ударної хвилі до  $\Delta P = 0,2 \cdot 10^5$  Па. Лінійні і нелінійні результати відрізняються на 16-20% (нелінійній теорії (пунктир) відповідають більші величини).

**5.2.** Динаміка тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем при нестационарних навантаженнях

Започатковані в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України дослідження динаміки тришарових оболонок з дискретно-симетричним заповнювачем знайшли своє продовження в даній дисертації [4, 15].

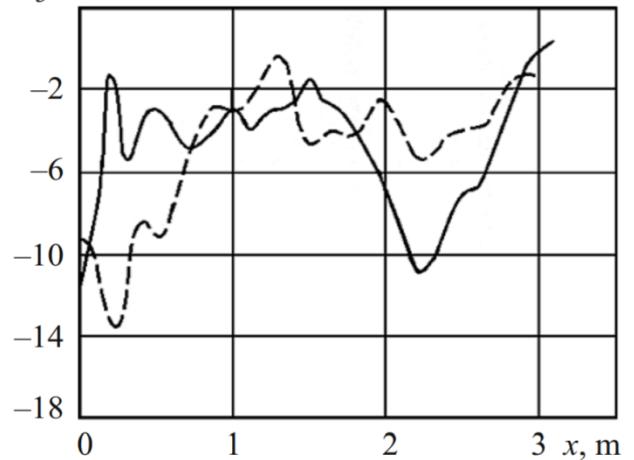


Рис. 5.1. Залежність прогину від просторової координати

Математичною моделлю процесу динамічного деформування несиметричної тришарової сферичної структури з дискретно-симетричним заповнювачем є система (2.7), яка для даного випадку набуває вигляду:

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R^i} T_{22}^i + \frac{T_{13}^i}{R^i} = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R^i} (T_{11}^i - T_{13}^i) + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2$$

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad [T_{13}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \quad [M_{11}]_j = \rho_j I_{kj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.$$

Це дві системи рівнянь шостого порядку. Рішення шукається в гладкій області – рівняння (5.2) і склеюються на лініях розривів. При побудові чисельного рішення в гладкій області використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевих рівнянь. Різницеві рівняння для рівнянь (5.2), записуються в такий спосіб

$$\frac{1}{\sin \alpha_k} [(sin \alpha_k T_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{1}{R^i} [\operatorname{ctg} \alpha_k (T_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n] = \rho_i h_i [(u_1^i)_k^n]_{tt}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha_k} [(sin \alpha_k T_{13}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{1}{R^i} [(T_{11}^i)_k^n + (T_{22}^i)_k^n] + P_{3k}^n = \rho_i h_i [(u_3^i)_k^n]_{tt},$$

$$\frac{1}{\sin \alpha_k} [(sin \alpha_k M_{11}^i)_{k-1/2}^n]_{s_i} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_k}{R^i} (M_{22}^i)_k^n - (T_{13}^i)_k^n = \rho_i \frac{h_i^3}{12} [(\varphi_3^i)_k^n]_{tt}.$$

Різницеві співвідношення на лініях розривів  $\alpha = \alpha_j$  записуються таким же чином. Отримана відповідна різницева схема є явною в часовій координаті, і виходячи з цього, є умовно стійкою по просторовій і часовій координатам.

В силу симетрії щодо вершини сфери при  $\alpha_1 = 0$ , то розглядався інтервал  $[0; \pi/2]$ . Розрахунок проводився при кількості дискретних інтервалів  $N = 160$ , тобто  $\Delta \alpha_1 = (\pi/2)/N$ . Дискретні підкріплюючі ребра (паралелі) перебувають у точках:  $\alpha_k = [41 + 40(k-1)]\Delta \alpha_1$ ,  $k = \overline{1, 3}$

У вершині сфери є особливість, необхідність розкриття якої дозволила записати граничні умови при  $\alpha_1 = 0$  в наступному вигляді:

$$u_1^k = \varphi_1^k = 0, \quad 2 \frac{\partial T_{13}^k}{\partial s} - P_3(s_0, t) \delta_{2k} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \quad (5.4)$$

- при  $\alpha_1 = \pi/2$  – жорстке защемлення:

$$u_1^k = u_3^k = \varphi_1^k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (5.5)$$

У формулах (5.4)  $\delta_{2k}$  – символ Кронекера. Початкові умови нульові. Зовнішнє навантаження  $P_3(s, t)$  задавалося у вигляді

$$P(\pi/2, t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{t}{T}\right) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}, \quad A = 10^6 \text{Pa}, \quad T = 50 \times 10^{-6} \text{s}. \quad (5.6)$$

Розрахунки проводилися при наступних значеннях геометричних і фізико - механічних параметрів:

$$E_1^1 = E_1^2 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па};$$

$$\nu_1^1 = \nu_1^2 = 0,3; \rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$h_1 = h_2; h_j = 2h_2; R_1 = 0,3 \text{ м}.$$

Використовуючи принцип субмоделінгу прораховані залежності НДС тришарової сферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем у її вершині при дії ударної хвилі рис.5.2.

**5.3.** Рівняння коливань несиметричних тришарових сферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при нестационарних навантаженнях отримані з рівнянь (2.7):

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R^i} T_{22}^i + \frac{T_{13}^i}{R^i} - \frac{4}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R^i} (T_{11}^i - T_{22}^i) - \frac{1}{R_{t1} h_t} M_{11}^t - \frac{1}{R_{t2} h_t} M_{22}^t +$$

$$+ \frac{1}{h_t \sin \alpha} \frac{\partial M_{13}^t}{\partial s} + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R^i} M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^i}{\partial t^2}; \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{11}^t) + \frac{1}{R_{t1}} (T_{11}^t - T_{13}^t) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{10}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha M_{11}^t) - T_{13}^t + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{11}^t}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{13}^t) - \frac{1}{R_{t1}} (T_{11}^t + T_{22}^t) = \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{30}^t}{\partial t^2};$$

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad [T_{13}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \quad [M_{11}]_j = \rho_j I_{kj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2},$$

Це дві системи рівнянь дев'ятого порядку.

При застосуванні скінчено-елементного методу в моделях був використаний тривимірний об'ємний скінчений елемент, який гарантує точність і достовірність отриманих результатів. Створена модель (Рис. 5.3 a-d), включала 19200 скінчених елементів і 22680 вузлів. Півсфера з трьома ребрами.

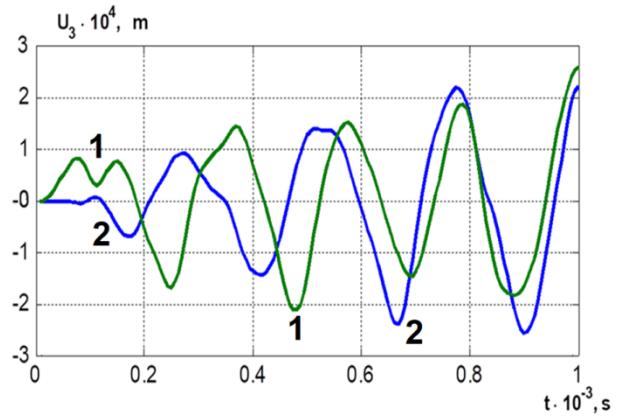


Рис. 5.2. Залежність прогинів  $u_3^1$ (1) і  $u_3^2$  (2) від часу у вершині сфери.

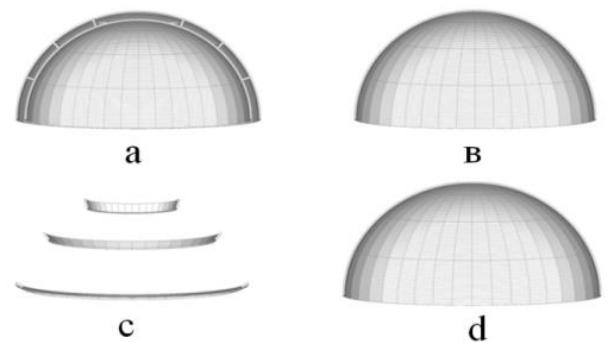


Рис. 5.3.  
Розрахунки проводилися при таких же параметрах, як і для розрахунків методом скінчених різниць  $h/R = 0,13$ .

Відповідні графічні залежності показані на рис. 5.4, де криві відповідають залежностям величин  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  у вершині сфери від часу.

Слід відзначити, що дані на рис. 5.4 добре узгоджуються з даними на рис. 5.2.

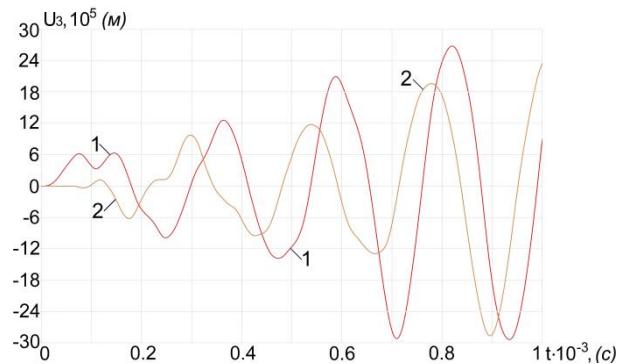


Рис. 5.4. Залежність прогинів  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  від часу у вершині сфери.

**5.4.** Досліджена динаміка несиметричної тришарової півсфери з дискретно-симетричним легким, армованим п'ятьма ребрами, заповнювачем. Розрахунки проводилися при наступних значеннях геометричних і фізико-механічних параметрів:  $E_1^1 = E_j = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1^1 = \nu_j = 0,3$ ;  $\rho_1 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $h_1 = h_2 = 0,005$ ;  $h_j = 2h_2$ ;  $R_1 = 0,3$  м;  $R_2 = 0,322$  м;  $F_j = 4 \times 10^{-5}$  м<sup>2</sup>,  $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu_1^2 = 0,3$ ;  $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $h/R = 0,075$ .

Дискретні армуючі ребра (паралелі) перебувають у точках:  $\frac{\pi}{12} i = x_i$ ;  $i = \overline{1,5}$ .

На лобову точку сталевого зовнішнього несучого шару сферичної оболонки діє зосереджений удар, дію якого можна описати виразом (5.6).

На рис. 5.5 приведені залежності нормальних прогинів  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  несучих шарів від координати  $\alpha$  в момент часу  $t = 9,55T$ . Відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності легкого заповнювача  $(E_1+E_2)/2E_t = 50$ , а момент часу  $t = 5,85T$ . Перша власна частота тришарової конструкції складає 1440 Гц. Виходячи з графіку можна візуально визначити як тришарова конструкція інтенсивно гасить коливальні процеси.

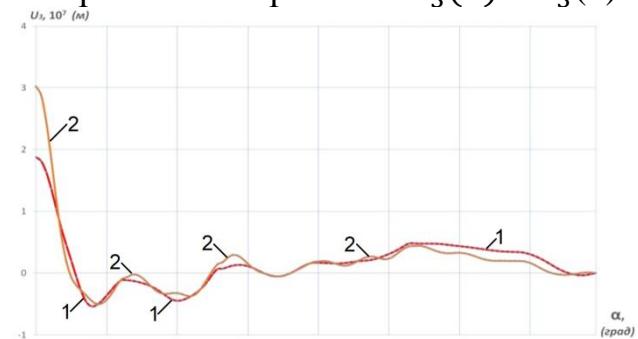


Рис. 5.5. Залежності прогинів  $u_3^1(1)$  і  $u_3^2(2)$  несучих шарів від кутової координати  $\alpha$ ,  $(E_1+E_2)/2E_t = 50$ ,  $t = 9,55T$ .

## ВИСНОВКИ

1. Розроблена нова розрахункова модель в рамках теорії оболонок та стрижнів моделі С.П. Тимошенка для несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем.

2. На основі варіаційного принципу Гамільтона - Остроградського виведені нові рівняння неосесиметричних коливань несиметричних тришарових оболонок обертання з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем з використанням незалежних гіпотез для кожного із шарів.

3. Вперше досліджено напружено-деформований стан несиметричної тришарової циліндричної оболонки з легким заповнювачем при імпульсному навантаженні.

4. Досконально проаналізованого напружено-деформований стан несиметричної тришарової циліндричної оболонки з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при розподіленому динамічному навантаженні.

5. Досліджено вплив дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача на динамічну поведінку тришарової конічної оболонки при розподіленому внутрішньому імпульсному навантаженні.

6. Розроблена методика розрахунку на працездатність тришарового сферично-циліндричного обтічника з стільниковим заповнювачем на основі конструктивно-ортотропної моделі при дії плоскої ударної хвили.

7. Вперше досліджено динамічний напружено-деформований стан тришарової напівсферичної оболонки з дискретно-симетричним заповнювачем при дії імпульсного навантаження.

8. Отримані нові результати при досліджені динамічного напружено-деформованого стану несиметричних тришарових напівсферичних оболонок з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при дії імпульсного розподіленого і локального навантаження.

9. Проведений розрахунок і аналіз перших власних частот тришарових оболонок обертання з дискретно неоднорідним заповнювачем.

## **СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ**

1. Lugovoi P. Z., Skosarenko Yu. V., Orlenko S. P., Shugailo O.P. Application of the Spline-Collocation Method to Solve Problems of Statics and Dynamics for Multilayer Cylindrical Shells with Design and Manufacturing Features//Intern. Appl. Mech. – 2019, **55**, № 5. – P. 524–533.
2. Луговой П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Применение метода сплайн – коллокации для решения задач статики и динамики конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Доповіді НАН України. 2019. № 8. – С.25 – 33.
3. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Meish Yu. A., Orlenko S. P. Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution Under Nonstationary Loads //Intern. Appl. Mech. – 2020, **56**, № 1 – P. 22–32.
4. Орленко С.П. Чисельне моделювання динаміки тришарової сферичної оболонки з дискретно неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 3 – С. 19 – 27.
5. Орленко С.П. Вплив несиметрії тришарових циліндричних оболонок з легким заповнювачем на їх напружено-деформований стан при нестационарних навантаженнях // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2020. № 31. – С. 42 – 52.
6. Орленко С.П. Чисельне моделювання коливань тришарової конічної оболонки з дискретно-симетричним неоднорідним заповнювачем // Доповіді НАН України. 2020. № 8 – С. 35 – 42.

7. Луговий П.З., Шугайло О.П., Орленко С.П., Деменков Коливання теплоізоляційних тришарових циліндричних труб при експлуатаційних навантаженнях // Ядерная и радиационная безопасность. – Киев: ГНТЦ ЯРБ, № 3, 2020, – С. 55 – 61.
8. Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамика составных оболочечных конструкций вращения при нестационарных нагрузках // Міжнародна наукова конференція. Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики – 2019. Матеріали конференції. Дніпро, Кам'янське – 2019. – С.15.
9. Луговий П.З., Скосаренко Ю.В., Орленко С.П. Методика дослідження напружене-деформованого стану оболонок з конструктивними особливостями. Там же – С.17.
10. Луговий П.З., Орленко С.П. К постановке и решению динамических задач теории трехслойных конических оболочек с дискретным ребристым наполнителем // XVII міжнародна науково - технічна конференція "Удосконалювання енергоустановок методами математичного та фізичного моделювання" 7-11 жовтня 2019 р., м. Харків, Україна. 2019. – С.14.
11. Орленко С.П. Динаміка тришарових конічних оболонок з підкріпленням та масами // 10 Міжнародна наукова конференція. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур» Львів. 2019. – С. 72-73.
12. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. Динамические задачи теории трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно – однородным заполнителем // Тези доповідей другої міжнародної науково – технічної конференції пам'яті академіка В.І. Моссаковського «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій». – Дніпро, 10-12 жовтня, 2019. – С. 178.
13. Мейш Ю.А., Орленко С.П. К численному расчету нестационарных колебаний трехслойных цилиндрических оболочек с поперечным дискретным ребристым наполнителем // Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей VI Міжнародної конференції. – Одеса, 20 – 24 травня, 2019. – С. 215 – 216.
14. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Орленко С.П. До чисельного моделювання динамічної поведінки рівнянь оболонок типу еліптичного параболоїду при нестационарних навантаженнях // I Міжнародна науково-технічна інтернет-конференція «Новітні технології в освіті, науці та виробництві» 18 квітня 2019 р. м. Київ, Україна. С. – 177.
15. Орленко С.П. Дослідження динаміки тришарового сферичного куполу з дискретно-неоднорідним заповнювачем // Science, society, education: topical issues and development prospects. Abstracts of the 3rd International scientific and practical conference. SPC “Sci-conf.com.ua”. Kharkiv, Ukraine. 2020. Pp. 111-114. URL: <https://sci-conf.com.ua>.

## АНОТАЦІЯ

**Орленко С.П.** Динаміка тришарових оболонок обертання з дискретно неоднорідним заповнювачем – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2020.

Дисертацію присвячена дослідженю динамічної поведінки несиметричних тришарових оболонок обертання з неоднорідним заповнювачем при нестационарних навантаженнях. Для їх дослідження застосована модель оболонок та стрижнів С.П. Тимошенка при прийнятті незалежних кінематичних та статичних гіпотез до кожного шару. На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського виведені рівняння коливань та відповідні природні граничні і початкові умови несиметричних оболонок обертання з врахуванням дискретно-симетричного легкого, армованого ребрами заповнювача. Вдосконалені скінчено-різницеві алгоритми і використаний скінчено-елементний метод для розв'язку поставлених задач. Розв'язані задачі осесиметричних коливань несиметричних тришарових оболонок обертання при різних граничних умовах і видах імпульсних навантажень. Виявлено вплив легкого заповнювача на характер коливань. Розроблено методику розрахунку сферичної частини обтічника при дії на неї плоскої вибухової хвилі. Проведено аналіз механічних ефектів при розповсюдженні збурень в напівсферичній несиметричній тришаровій оболонці з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами, заповнювачем при дії зосередженого удара по її вершині. Такі результати мають принципове значення при розрахунку на конструктивну міцність досліджуваних об'єктів.

**Ключові слова:** несиметричні тришарові оболонки обертання, дискретно-симетричний неоднорідний заповнювач, імпульсні навантаження, чисельні методи, методи скінчених елементів, нестационарні коливання.

## АННОТАЦИЯ

Орленко С.П. Динамика трехслойных оболочек вращения с дискретно неоднородным заполнителем – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2020.

Диссертация посвящена исследованию динамического поведения несимметричных трехслойных оболочек вращения с неоднородным заполнителем при нестационарных нагрузках. Для их исследования применена модель оболочек и стержней С.П. Тимошенко при принятии независимых кинематических и статических гипотез к каждому слою. На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского выведены уравнения колебаний и соответствующие природные предельные и начальные условия несимметричных оболочек вращения с учетом дискретно-симметричного легкого, армированного ребрами заполнителя.

Усовершенствованные конечно-разностные алгоритмы и использован конечно-элементный метод для решения поставленных задач. Нерешенные задачи осесимметричных колебаний несимметричных трехслойных оболочек вращения при различных граничных условиях и видах импульсных нагрузок. Выявлено влияние легкого заполнителя на характер колебаний. Разработана методика расчета сферической части обтекателя при воздействии на нее плоской взрывной волны. Проведен анализ механических эффектов при распространении возмущений в полусферической несимметричной трехслойной оболочке с дискретно-симметричным легким, армированным ребрами, заполнителем при действии сосредоточенной удар по ее вершине. Такие результаты имеют принципиальное значение при расчете на конструктивную прочность исследуемых объектов.

**Ключевые слова:** несимметричные трехслойные оболочки вращения, дискретно-симметричный неоднородный заполнитель, импульсные нагрузки, численные методы, методы конечных элементов, нестационарные колебания

## SUMMARY

Orlenko S.P. Dynamics of three-layer shells of rotation with a discrete inhomogeneous placeholder – Manuscript.

The dissertation on competition of a scientific degree of the candidate of technical sciences on a specialty 01.02.04 – mechanics of a deformable firm body. – Institute of Mechanics. S.P. Tymoshenko of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to research of dynamic behavior of asymmetric three - layer covers of rotation with inhomogeneous filler at nonstationary loadings. The model of shells and rods SP was used for their research. Tymoshenko in adopting independent kinematic and static hypotheses for each layer. On the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle, the equations of oscillations and the corresponding natural limit and initial conditions of asymmetric shells of rotation are derived, taking into account the discrete-symmetric light, edge-reinforced aggregate. Improved finite-difference algorithms and a sketch-element method are used to solve the problems. Unsolved problems of axisymmetric oscillations of asymmetric three-layer shells of rotation under different boundary conditions and types of impulse loads. The influence of light aggregate on the nature of oscillations is revealed. A method for calculating the spherical part of the fairing when exposed to a flat blast wave has been developed. The analysis of mechanical effects in the propagation of perturbations in a hemispherical asymmetric three-layer shell with a discrete-symmetric light, reinforced with ribs, aggregate under the action of a concentrated impact on its top. Such results are of fundamental importance when calculating the structural strength of the studied objects.

Keywords: asymmetric three-layer shells of rotation, discrete-symmetric inhomogeneous aggregate, pulse loads, numerical methods, finite element methods, nonstationary oscillations.

Підписано до друку 17.11.20 р. Формат 60x90<sup>1</sup>/16

Ум. друк. арк. 0,9. Обл-вид. арк 0,9

Наклад 100 прим. Замовлення № 594

Віддруковано на різографі в видавничому центрі "Принт-центр"

04053, м. Київ, вул. Січових Стрільців, 26А

Тел./факс: 486-50-88, 332-41-10, 277-40-16

<http://www.printc.com.ua>. E-mail [printcentr@ukr.net](mailto:printcentr@ukr.net)