

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка

РОЖОК Лілія Степанівна



УДК 539.3

**ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА СТРУКТУРИ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ 2019

Дисертацію є рукопис.

Роботу виконано у відділі обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України і на кафедрі теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету МОН України (м. Київ).

Науковий консультант: академік НАН України,
доктор технічних наук, професор
Григоренко Ярослав Михайлович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
головний науковий співробітник.

Офіційні опоненти:

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
Хіміч Олександр Миколайович
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН
України, заступник директора;

доктор фізико-математичних наук, професор
Мольченко Леонід Васильович,
Миколаївський національний університет
ім. В.О. Сухомлинського, завідувач кафедри
фізики та математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Жук Ярослав Олександрович,
Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка, завідувач кафедри
теоретичної та прикладної механіки.

Захист відбудеться "24" вересня 2019 р. об 11⁰⁰ годині на засіданні
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України за адресою: м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 211.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к. 504.

Автореферат розісланий "14" серпня 2019 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,
доктор фізико-математичних наук

О.П. Жук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Оболонкові конструкції найбільш оптимальним способом поєднують у собі, з одного боку, мінімальну вагу, а з іншого – необхідну міцність та жорсткість. Саме через це їм віддається перевага в таких галузях як аерокосмічна, будівництво, енергетика, машинобудування, судно-будування, трубопровідна, медицина та ін. Широкого використання в умовах зростаючого рівня інтенсивності зовнішнього впливу набувають конструкції у вигляді нетонких та товстостінних пластин і оболонок. Як приклад можна навести посудини високого тиску, кріогенну техніку, двигуни; крім того, при розрахунках інженерних споруд, таких як кільцеві фундаменти, напірні труби, склепіння будівель, використовують розрахункові схеми у вигляді товстостінних циліндрических оболонок.

Аналіз досліджень напружено-деформованого стану (НДС) нетонких циліндрических оболонок показав, що значна кількість робіт присвячена застосуванню різних уточнених моделей. При цьому правомірність використання тих чи інших припущень на основі порівняльного аналізу з точним розв'язком, досліджена здебільшого для оболонок з круговим поперечним перерізом.

В загальному випадку проблему розрахунку нетонких циліндрических оболонок слід розглядати як проблему розв'язання відповідної крайової задачі просторової теорії пружності. При цьому, точні розв'язки побудовано для порівняно вузького класу задач у випадку циліндрических оболонок кругового поперечного перерізу та близького до нього. Підхід, заснований на побудові строгого аналітичного розв'язку тривимірної крайової задачі математичної теорії пружності виявляється проблематичним для оболонок довільної геометрії та з анізотропними властивостями матеріалу. Аналітичні розв'язки певних класів задач отримані за допомогою асимптотичного методу, методу малого параметру та ін.

Для розв'язування класу задач теорії пластин та оболонок, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, або такими, що зводяться до них, широко застосовуються чисельні методи. Так, дослідження напружено-деформованого стану нетонких циліндрических оболонок здійснюється на основі методу скінчених елементів (МСЕ), скінчених різниць та ін. Проте застосування МСЕ пов'язане зі значними труднощами та громіздкістю обчислювального процесу, а у випадку апроксимації розв'язку вздовж товщини скінченими різницями, граничні умови на бічних поверхнях задовольняються наближено.

Необхідність створення конструкцій з підвищеними вимогами до їх міцності й довговічності з використанням мінімальної кількості матеріалів та з найменшими витратами на їх виготовлення і експлуатацію висуває на перший план проблему оптимального проектування. Саме на етапі проектування конструкцій велику роль відіграють чисельно-аналітичні методи теорії оболонок, оскільки вони дозволяють найбільш просто виявити вплив тих чи інших параметрів та підказати шляхи покращення самої конструкції стосовно підвищення характеристик її міцності.

Відсутність достатньо точних та надійних методів розв'язання задач теорії пружності для нетонких неоднорідних анізотропних оболонок призводить до необхідності розробки нових ефективних методик до розв'язання задач статики оболонок в просторовій постановці, що дозволять отримати з високим степенем точності значення всіх факторів напруженого-деформованого стану в широких діапазонах зміни геометричних та механічних характеристик за різних видів прикладеного навантаження.

Крім того, певну зацікавленість викликає питання, пов'язане з розширенням класів задач, розв'язок яких можна отримати за допомогою вже існуючих методів.

Врахування вищезгаданих обставин обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні таких науково-дослідних робіт: НДР № 326 "Розробка чисельно-аналітичних підходів до розв'язання статичних та динамічних задач для просторових тіл і оболонок різної форми та структури з врахуванням анізотропії і неоднорідності", номер державної реєстрації 0101U002861, 2001 – 2005 рр.; НДР № 443п "Розв'язання окремих класів задач та дослідження напруженого стану і коливань пластин та оболонок складної геометрії", номер державної реєстрації 0103U005976, 2003 – 2005 рр.; НДР № 349 "Розробка методів розв'язання задач та дослідження статичного і динамічного деформування пружних тіл складної геометрії та структури на основі моделей різного рівня", номер державної реєстрації 0105U001991, 2005 – 2009 рр.; НДР № 1.3.1.358 "Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей до дослідження деформування і руйнування композитних матеріалів для розв'язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій", номер державної реєстрації 0107U000345, 2007 – 2011 рр.; НДР № 1.3.1.370 "Розробка нових підходів до дослідження деформування складних оболонкових систем з неоднорідних анізотропних матеріалів при різних видах навантаження на основі методів чисельного аналізу", номер державної реєстрації 0109U004184, 2009 – 2013 рр.; НДР № 1.3.1.382 "Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей", номер державної реєстрації 0112U000249, 2012 – 2016 рр.; НДР № 1.3.1.401 "Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування", номер державної реєстрації 0115U005709, 2016 – 2020 рр. Дисертаційна робота проводилася згідно тематики науково-дослідної роботи кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету МОН України К 04 – 11 – 3 "Розробка теорій і методів дослідження статичного та динамічного станів тіл складної геометрії за формулою та структурою" (2006 – 2012), "Розробка методів дослідження статичного та динамічного

станів тіл з ускладненими геометричними та фізико-механічними характеристиками" (2013 – 2018).

Мета та завдання дослідження. Мета роботи полягає в розробці спільної ефективної чисельно-аналітичної методики розв'язання задач статики лінійної теорії пружності для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців на основі просторової моделі із використанням чисельно-аналітичних методів та проведені на її основі дослідження впливу геометричних та механічних параметрів циліндричних тіл зазначених класів на фактори їх напруженого-деформованого стану, викликаного прикладеним поверхневим навантаженням.

Досягнення цієї мети передбачає:

- розробку спільної чисельно-аналітичної методики до розв'язання задач статики циліндричних тіл двох типів, що базується на редукції вихідної крайової задачі, з використанням ефективних аналітичних методів, до одномірної крайової задачі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь, та розв'язанням останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації;
- побудову розв'язку задачі про напруженого-деформований стан некругових неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок за певних граничних умов на торцях при дії розподіленого поверхневого навантаження на основі удосконаленого підходу з використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є;
- побудову розв'язку осесиметричної задачі про напружений стан ізотропних суцільних циліндрів на основі сплайн-функцій, з розкриттям невизначеності в геометрично особливій точці;
- проведення досліджень достовірності, точності й збіжності чисельно-аналітичної методики, що реалізується шляхом порівняння числових розв'язків модельних задач з відомими в літературі аналітичними розв'язками, отриманими іншими авторами, а також на основі різних індуктивних методів;
- дослідження напруженого-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок, що мають двопараметричне відхилення форми поперечного перерізу від кругової в залежності від зміни геометричних параметрів, анізотропії матеріалу та за наявності шарів по товщині при дії поверхневого навантаження;
- аналіз показників напруженого-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів в залежності від зміни їх кривизни, анізотропії матеріалу за наявності шарів по товщині, що знаходяться під дією розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній або внутрішній бічній поверхні;
- дослідження впливу локального навантаження на фактори напруженого-деформованого стану некругових нетонких циліндричних оболонок в залежності від інтервалу та способу прикладання навантаження і зміни геометричних параметрів та механічних характеристик матеріалу оболонок;
- аналіз напруженого стану суцільних ізотропних циліндрів при дії поверхневого навантаження за різних способів закріплення торців;

- виявлення характерних закономірностей в розподілі полів переміщень і напружень, викликаних прикладеним поверхневим навантаженням, та встановлення нових ефектів, пов'язаних з їх геометричними та механічними характеристиками.

Об'єктом досліджень є просторовий напружене-деформований стан циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою, за певних граничних умов на торцях та суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців.

Предметом досліджень є вплив геометричних та механічних параметрів циліндричних тіл, що розглядаються, на характеристики об'єкта дослідження.

Методи дослідження. При розв'язуванні задач лінійної просторової теорії пружності для некругових нетонких анізотропних циліндричних оболонок складної форми поперечного перерізу та неоднорідної по товщині структури, для зведення тривимірної крайової задачі до двовимірної використовується точний аналітичний метод відокремлення змінних в напрямку твірної оболонки.

Для відокремлення змінних в напрямку напрямної, в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, записують доповняльні функції замість добутків розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від координат напрямної та товщини. Формально, отримана таким чином система рівнянь, дозволяє відокремлення змінних в напрямку напрямної шляхом розвинення розв'язувальних, доповняльних функцій та компонент навантаження у звичайні ряди Фур'є, після чого, двовимірна крайова задача зводиться до одномірної, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь більш високого порядку зі ста-лими коефіцієнтами.

Для інтегрування отриманої системи рівнянь використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. При цьому, для обчислення амплітудних значень доповняльних функцій, використовується їх апроксимація дискретними рядами Фур'є.

Для визначення поверхні відліку поперечного перерізу знакозмінної кривизни використовуються рівняння гладких кривих без перегинів та розривів (гофрований еліпс, епіциклоїда та гіпоциклоїда), що звільняє від необхідності задовольняти умовам спряження у місцях з'єднання гофрів та напівгофрів.

При дослідженні впливу локального навантаження на напружений стан зазначеного класу оболонок, навантаження подається у вигляді відповідного збіжного ряду Фур'є.

При розв'язуванні осесиметричної задачі теорії пружності про напруженний стан суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців, для зведення двовимірної крайової задачі до одномірної використовується метод сплайн-функцій; при цьому розкривається невизначеність у геометрично особливій точці.

Отримана одномірна крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:

- Розроблено спільну ефективну методику чисельно-аналітичного розв'язання задач статики для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців;
- отримано подальший розвиток методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є для циліндричних тіл першого типу та вперше застосовано метод сплайн-апроксимації для циліндричних тіл другого типу;
- з використанням розробленої методики побудовано розв'язки нових розширеніх класів просторових задач для циліндричних тіл двох типів, пов'язаних з ускладненими геометричними та механічними характеристиками;
- на основі отриманих розв'язків проведено аналіз напружено-деформованого стану циліндричних тіл, що розглядаються, при заданих навантаженнях;
- виявлено характерні закономірності розподілу полів переміщень та напружень і встановлено нові ефекти, пов'язані з геометрією та структурою розглядуваних тіл, зокрема, розглянуто суперпозицію деяких форм поперечних перерізів.

Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації, забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла та просторової лінійної теорії пружності, застосуванням обґрунтованих, здебільш точних аналітичних методів розв'язування поставлених задач, тестуванням підходу на ряді задач даного класу та контролем точності розрахунків на базі індуктивних оцінок.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання розробленої методики, що враховує складну структуру та форму поперечного перерізу розглядуваних циліндричних тіл для дослідження їх напружено-деформованого стану з метою проведення розрахунків оцінки міцності та надійності подібних конструкцій та їх елементів, вибору відповідної структури та форми поперечного перерізу, що задовольнятиме заданим умовам експлуатації і дає можливість уникнути необхідності проведення дорогих пошукових експериментальних досліджень, а також для індуктивних оцінок правомірності результатів, отриманих з використанням уточнених моделей теорії оболонок.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювались на наукових вітчизняних на міжнародних конференціях, зокрема: XI Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (Львів 2004); міжнародна конференція "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (Київ 2005); міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми технічної механіки – 2006" (Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ 2006); LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Київ, 2008); LXVI, LXVII, LXX, LXXII, LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету (Київ, 2010, 2011, 2014, 2017, 2018); 77 Annual Meeting of the Gesellschaft

fur Angewandte Mathematik und Mechanik (Берлін, Німеччина 2006); 9th SSTA Conference (Jurata, Poland 2009); IV, V, VI Міжнародна науково-практична конференція "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ 2015 – 2017); XVIII International Conference: Dynamical system modeling and stability investigation (Київ 2017); Сучасні проблеми механіки та математики: (Львів 2018).

У повному обсязі дисертація доповідалась й обговорювалась на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки "Сучасні проблеми теоретичної та прикладної механіки" Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н., професор І.А. Лоза, 2018 р.); на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2018 р.); на науковому семінарі за напрямком "Механіка оболонкових систем" Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2018 р.); на загальноінститутських семінарах з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2018 – 2019 pp.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертації висвітлено в 54 наукових працях, у тому числі: 26 публікації у індексованих Google Scholar та Scopus наукових виданнях; 2 статті [7, 47] у провідному англомовному міжнародному журналі, 29 статей [1 – 6, 8 – 30] у наукових фахових виданнях України за спеціальністю дисертації, 7 робіт [48 – 54] – у фахових виданнях з технічних наук та 16 тез доповідей і матеріалів вітчизняних та міжнародних наукових конференцій. Праці [6, 12, 14, 28, 35, 37 – 39, 41 – 46, 48 – 54] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, що опубліковані в співавторстві, здобувач приймав участь у постановці задач, реалізації та розробці підходу до їх розв'язання. Здобувачеві повністю належить адаптація методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є для розв'язання розширених класів просторових задач для нетонких циліндричних оболонок; програмна реалізація розробленої методики; отримання числових результатів та їх ілюстрація, частково – інтерпретація отриманих розв'язків.

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел із 345 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 331 сторінку, разом із 126 рисунками та 55 таблицями.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультантові – аcadеміку НАН України, доктору технічних наук, професору Ярославу Михайловичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та виражає подяку доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Ярославовичу Григоренку за постійну увагу до роботи, слушні поради та пропозиції при її написанні.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв'язок роботи з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; наведено дані про публікації за темою дисертації та особистий внесок в них здобувача, апробацію результатів дисертації та її структуру і обсяг.

У **першому розділі** наводиться огляд літератури за темою дисертації. На основі аналізу літературних джерел висвітлено виникнення і становлення теорії пластин та оболонок, напрямки розвитку та сучасний стан проблеми.

Значний внесок у розвиток теорії пластин та оболонок зробили праці С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотіна, І.Н. Векуа, В.З. Власова, І.І. Воровича, О.М. Гузя, Б.Г. Гальоркіна, Н.К. Галімова, О.В. Гольденвейзера, Е.І. Григорюка, Я.М. Григоренка, М.О. Кільчевського, С.В. Корольова, С.Г. Лехніцького, А.І. Лур'є, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, Ю.М. Работнова, С.П. Тимошенка, І.Я. Штаєрмана, Е. Рейсснера та ін.

Дослідженням НДС пластин та оболонок на основі уточнених моделей присвячені роботи В.А. Баженова, О.І. Беспалової, В.Д. Будака, А.Т. Василенка, Е.І. Григорюка, Я.М. Григоренка, О.Я. Григоренка, Н.А. Гук, В.І. Гуляєва, Я.О. Жука, В.Г. Карнаухова, В.І. Козлова, В.Д. Кубенка, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, П.З. Лугового, В.Ф. Мейша, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Л.В. Мольченка, О.О. Рассказова, І.К. Сенченкова, Н.В. Сметанкіної, В.І. Сторожева, І.Ю. Хоми, Л.П. Хорошуна, І.С. Чернишенка, М.О. Шульги, О.М. Шупікова та ін.

Основи класичної теорії анізотропних оболонок розвинуті в монографіях С.А. Амбарцумяна, Я.М. Григоренка, С.В. Корольова, С.Г. Лехніцького, Е.І. Григорюка. Некласична теорія пластин та оболонок набула свого розвитку в роботах С.А. Амбарцумяна, В. Васильєва, О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, І.Ю. Бабіча, Л. Доннела, П. Нагді та ін.

Дослідженням способів підвищення точності розв'язків краївих задач присвячена значна кількість робіт, серед яких праці Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошниченка, С.Б. Стечкіна, Ю.М. Субботіна, А.О. Лігуна та ін.

З огляду на сучасний стан проблеми моделювання просторового напружене-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури при дії поверхневого навантаження залишаються актуальними проблемами розробки нових чисельно-аналітичних методик дослідження НДС цього класу задач, підвищення точності отримуваних наближених розв'язків краївих задач та задач Коші.

Зроблений аналіз наукової літератури показав доцільність та актуальність проведення досліджень в обраному напрямку.

У **другому розділі** роботи дана постановка та розроблена методика розв'язування класу задач про напружене-деформований стан нетонких шаруватих анізотропних некругових циліндричних оболонок. Розв'язується просторова задача лінійної теорії пружності. В загальному випадку розглядаються циліндричні оболонки в системі координат s, t, γ , яку побудовано таким

чином. В ортогональній криволінійній системі координат s, t обирається криволінійна циліндрична поверхня за поверхню відліку, а координату γ відкладено вздовж нормалі до цієї поверхні. За координатну поверхню прийнято середину поверхню оболонки. В обраній системі координат квадрат довжини лінійного елемента визначається рівністю

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1)$$

де $H_1 = 1$; $H_2 = 1 + \gamma / R_t$; $H_3 = 1$ – параметри Ламе, R_t – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу.

Розглядувані оболонки складені з шарів, які контактують між собою без проковзування та відриву. Умови спряження шарів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, & \tau_{s\gamma}^i &= \tau_{s\gamma}^{i+1}, & \tau_{t\gamma}^i &= \tau_{t\gamma}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, & u_s^i &= u_s^{i+1}, & u_t^i &= u_t^{i+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

З врахуванням (1) основні (вихідні) рівняння лінійної просторової теорії пружності для анізотропного тіла набувають вигляду:
вирази деформацій через переміщення

$$\begin{aligned} e_s^i &= \frac{\partial u_s^i}{\partial s}; & e_t^i &= \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i; & e_\gamma^i &= \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma}; \\ e_{st}^i &= \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s}; & e_{s\gamma}^i &= \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} + \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma}; & e_{t\gamma}^i &= H_2^i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_t^i}{H_2^i} \right) + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t}; \end{aligned} \quad (3)$$

рівняння рівноваги

$$\begin{aligned} H_2^i \frac{\partial \sigma_s^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{s\gamma}^i) &= 0; & \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{t\gamma}^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial s} + \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma}^i &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \sigma_\gamma^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial t} - \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_t^i &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

співвідношення узагальненого закону Гука для анізотропного тіла з трьома площинами пружної симетрії

$$\begin{aligned} e_s^i &= a_{11}^i \sigma_s^i + a_{12}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i; & e_t^i &= a_{12}^i \sigma_s^i + a_{22}^i \sigma_t^i + a_{23}^i \sigma_\gamma^i; & e_\gamma^i &= a_{13}^i \sigma_s^i + a_{23}^i \sigma_t^i + a_{33}^i \sigma_\gamma^i; \\ e_{t\gamma}^i &= a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i; & e_{s\gamma}^i &= a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i; & e_{st}^i &= a_{66}^i \tau_{st}^i, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$a_{11}^i = \frac{1}{E_s^i}; \quad a_{12}^i = -\frac{v_{st}^i}{E_t^i} = -\frac{v_{ts}^i}{E_s^i}; \quad a_{13}^i = -\frac{v_{s\gamma}^i}{E_\gamma^i} = -\frac{v_{\gamma s}^i}{E_s^i};$$

$$a_{22}^i = \frac{1}{E_t^i}; \quad a_{23}^i = -\frac{v_{\gamma t}^i}{E_t^i} = -\frac{v_{t\gamma}^i}{E_\gamma^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{E_\gamma^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G_{t\gamma}^i}; \quad a_{55}^i = \frac{1}{G_{s\gamma}^i}; \quad a_{66}^i = \frac{1}{G_{st}^i},$$

тут E_s^i, E_t^i, E_γ^i – модулі пружності в напрямку координатних осей, $G_{t\gamma}^i, G_{sy}^i, G_{st}^i$ – модулі зсуву для площин, паралельних координатним поверхням, $v_{st}^i, v_{ts}^i, v_{sy}^i, v_{ys}^i, v_{ty}^i, v_{yt}^i$ – коефіцієнти Пуассона.

В силу замкненості оболонок вздовж напрямної, граничні умови в цьому напрямку відповідають умовам періодичності факторів напруженодеформованого стану (T – період)

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^i(s, t, \gamma) &= \sigma_\gamma^i(s, t + T, \gamma); \tau_{sy}^i(s, t, \gamma) = \tau_{sy}^i(s, t + T, \gamma); \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, u_t^i(s, t, \gamma) = u_t^i(s, t + T, \gamma),\end{aligned}\tag{6}$$

На бічних поверхнях внаслідок прикладеного навантаження граничні умови визначаються виразами

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^q &= q_\gamma^+; \quad \tau_{sy}^q = q_s^+; \quad \tau_{ty}^q = q_t^+ \quad \text{при } \gamma = \gamma_q; \\ \sigma_\gamma^P &= q_\gamma^-; \quad \tau_{sy}^P = q_s^-; \quad \tau_{ty}^P = q_t^- \quad \text{при } \gamma = \gamma_P.\end{aligned}\tag{7}$$

Додаючи граничні умови на торцях, отримуємо тривимірну крайову задачу, що описує напруженено-деформований стан розглядуваних оболонок.

При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь приймаються такі припущення: напрямна серединної поверхні являє собою довільну неперервну криву; механічні характеристики є змінними вздовж товщина, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладених до оболонки поверхневих сил може бути заданий довільним чином.

За розв'язувальні функції приймаються три компоненти напружень $\sigma_\gamma^i, \tau_{sy}^i, \tau_{ty}^i$ та три компоненти переміщень u_γ^i, u_s^i, u_t^i , відповідно до тих функцій, в яких формулюються умови спряження шарів (2) та граничні умови на бічних поверхнях (7). Після деяких перетворень отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \gamma} &= \left(c_2^i - 1 \right) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_\gamma^i - \frac{\partial \tau_{sy}^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \tau_{ty}^i}{\partial t} + b_{22}^i \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma^i + \\ &+ b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^{i2}} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}, \\ \frac{\partial \tau_{sy}^i}{\partial \gamma} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{sy}^i - b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s^2} - \\ &- b_{66}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} \right) - (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s \partial t}, \\ \frac{\partial \tau_{ty}^i}{\partial \gamma} &= -c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial t} - \frac{2}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{ty}^i - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i \right) -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(b_{12}^i + b_{66}^i \right) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s \partial t} - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} \right) - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s^2}, \\
& \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma} = c_4^i \sigma_\gamma^i - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i - c_1^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}, \quad (8) \\
& \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma} = a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i - \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t^i}{\partial \gamma} = a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_t^i \\
& \left(b_{11}^i = a_{22}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{12}^i = -a_{12}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{22}^i = a_{11}^i a_{66}^i / \Omega^i; \right. \\
& \left. b_{66}^i = (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) / \Omega^i; \quad \Omega^i = (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) a_{66}^i; \right. \\
& \left. c_1^i = -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i \right).
\end{aligned}$$

Напруження σ_s^i , σ_t^i , τ_{st}^i визначаються через розв'язувальні функції таким чином

$$\begin{aligned}
\sigma_s^i &= c_2^i \sigma_\gamma^i + b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i + b_{22}^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t^i}{\partial s}; \\
\sigma_t^i &= c_2^i \sigma_\gamma^i + b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i + b_{12}^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t^i}{\partial s}; \\
\tau_{st}^i &= \frac{1}{a_{66}^i} \left[\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s} \right].
\end{aligned}$$

Метод розв'язування отриманої краєвої задачі складається з п'яти етапів.

Нехай на торцях оболонки мають місце граничні умови, що відповідають діафрагмі абсолютно жорсткій в своїй площині та гнучкій при виході з неї

$$\sigma_s^i = u_t^i = u_\gamma^i = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l. \quad (9)$$

Для зниження розмірності задачі на *першому етапі* розв'язування застосовується метод відокремлення змінних в напрямку твірної. Для цього розв'язувальні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розчинень в ряди Фур'є

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (10)$$

де $X = \{\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q_\gamma, q_t\}$; $Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s, q_s\}$ $\lambda_n = \pi n / l$ ($0 \leq s \leq l$)

і підставляються до розв'язувальної системи рівнянь (8) та граничних умов (7). Після відокремлення змінних тривимірна краєва задача зводиться до послідовності двовимірних краївих задач відносно амплітудних значень рядів (10) (надалі індекс n для розв'язувальних функцій та компонентів навантаження опустимо).

Отримана система диференціальних рівнянь, як і вихідна (8), містить в собі доданки у вигляді добутків розв'язувальних функцій, або їх похідних на коефіцієнти, що є залежними від двох координат і перешкоджають відокремленню змінних вздовж напрямної t . Для подолання цієї перешкоди на *другому етапі* розв'язування задачі, в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь замість зазначених доданків записують доповняльні функції у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1,5}); \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \tau_{t\gamma}; u_t \right\} \quad (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_4^2.\end{aligned}\tag{11}$$

Нова система диференціальних рівнянь в частинних похідних з доповняльними функціями набуває вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_1^1 + \lambda_n \tau_{t\gamma} - \varphi_4^1 + b_{22} \varphi_1^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_1^4 + b_{22} \varphi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma - \varphi_1^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_1^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_s - b_{66} \varphi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \varphi_3^1 - 2 \varphi_2^1 - b_{22} \varphi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_3^3 - b_{22} \varphi_7 - b_{66} \lambda_n^2 u_t; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \varphi_4^2 + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \varphi_1^3; \\ \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2,\end{aligned}\tag{12}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma &= q_\gamma^-; \quad \tau_{s\gamma} = q_s^-; \quad \tau_{t\gamma} = q_t^- \quad \text{при } \gamma = \gamma_p; \\ \sigma_\gamma &= q_\gamma^+; \quad \tau_{s\gamma} = q_s^+; \quad \tau_{t\gamma} = q_t^+ \quad \text{при } \gamma = \gamma_q.\end{aligned}$$

Формально, коефіцієнти отриманої системи рівнянь (12) не залежать від координати напрямної і дозволяють відокремити змінні в даному напрямку. Для цього на *третьому етапі* розв'язування задачі розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є за координатою t

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t, \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t, \text{ де} \quad (13)$$

$$\tilde{X} = \left\{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma, q_s \right\}, \quad \tilde{Y} = \left\{ \tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7, q_t \right\}, \quad \lambda_k = 2k\pi/T$$

і, після підстановки їх до системи рівнянь (12), відповідних граничних умов та відокремлення змінних, приходять до одномірної крайової задачі, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (13)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2 \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2 \varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k} + b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K}) \end{aligned} \quad (14)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^-; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^-; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^-; \\ \gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^+; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^+; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^+. \end{aligned} \quad (15)$$

Для інтегрування отриманої системи звичайних диференціальних рівнянь, на **четвертому етапі** розв'язування задачі застосовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації одночасно для всіх гармонік розвинень (13). При цьому, оскільки кількість невідомих в розв'язувальній системі рівнянь (14) перевищує кількість рівнянь (за рахунок введення доповнельних функцій), для замикання отриманої системи рівнянь на кожному кроці застосування чисельного методу, амплітудні значення доповнельних функцій обчислюються за поточним значенням амплітуд розв'язувальних функцій на **n'ятому етапі** за допомогою апроксимації їх дискретними рядами Фур'є. Для цього, в ряді точок напрямної, при фіксованому значенні координати γ_k , згідно співвідношень ($i = \overline{1, R}$)

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_t(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_t(t_i)}{R_t(t_i) + \gamma_k};$$

$$\varphi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \left\{ \sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \right\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1, 4}); \quad \varphi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2,i}^j &= h_1^i \sum_{m=0}^M \left\{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \right\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j=1,2); \\
 \varphi_{3,i}^j &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \left\{ \sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \right\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j=\overline{1,3}); \\
 \varphi_{4,i}^j &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \left\{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \right\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j=1,2); \quad \varphi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i \\
 \varphi_{5,i} &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \varphi_{6,i} = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i; \quad \varphi_{7,i} = -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i,
 \end{aligned} \tag{16}$$

будують таблиці значень доповняльних функцій. Використовуючи стандартну процедуру визначення коефіцієнтів Фур'є для функцій, заданих таблицею, знаходять ці коефіцієнти і, підставляючи їх до розв'язувальної системи рівнянь (14), роблять наступний крок інтегрування. На початку інтегрування амплітудні значення доповняльних функцій визначаються за значеннями амплітуд розв'язувальних функцій, згідно з відповідними граничними умовами (15).

Запропонована методика складається з 5 етапів, як було зазначено вище. Похибка розв'язку виникає безпосередньо на двох останніх етапах розв'язування за рахунок застосування чисельного методу дискретної ортогоналізації і апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є (рис. 1).

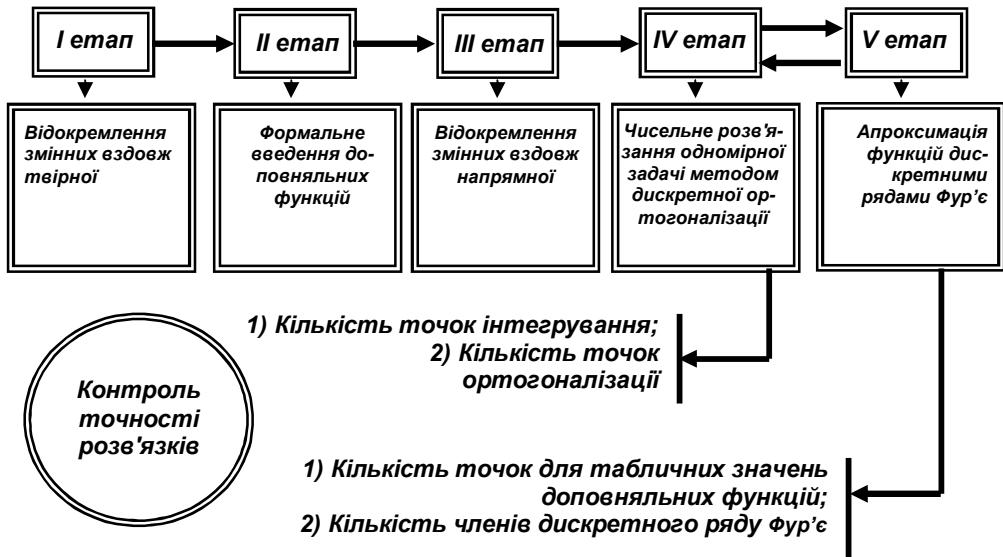


Рис. 1 Виникнення похибки розв'язку на етапах розв'язування задачі

Контроль точності отримуваних результатів було здійснено за рахунок варіації кількості точок інтегрування і ортогоналізації та в залежності від кількості точок для табличних значень доповняльних функцій і кількості членів, утримуваних в дискретних рядах Фур'є.

Для оцінки точності отримуваних результатів розглядалися циліндричні оболонки еліптичного гофрованого поперечного перерізу, що виготовлені з ортотропного матеріалу і знаходяться під дією внутрішнього тиску. Рівняння поверхні відліку цих оболонок задано в полярній системі координат у вигляді

$$\rho(\psi) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \quad e = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta},$$

$$a = r_0(1 - \Delta)/f, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \quad (17)$$

де α – характеризує амплітуду гофрування, m – частоту гофрування, e – ексцентрикитет еліпса (Δ – степінь еліптичності), r_0 – радіус вихідного кола.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки $l = 60$; $r_0 = 40$; $\Delta = 0,20$; $h = 8$; $\alpha = 3$; $m = 4$. При цьому враховано механічні характеристики для ортотропного матеріалу $E_s = 3,68E_0$; $E_\nu = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $v_{s\psi} = 0,105$; $v_{s\gamma} = 0,405$; $v_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$.

Результати розв'язку задачі для значень переміщень та напружень в середньому перерізі довжини для деяких перерізів напрямної наведено в табл. 1 при застосуванні дискретних рядів Фур'є та в табл. 2 при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації, на рис. 2 наведено графіки розподілу дотичних напружень на торцях оболонки ($s = 0$) в залежності від точності обчислення доповняльних функцій при застосуванні дискретних рядів Фур'є.

Табл. 1 Збіжність розв'язку в залежності від точності обчислень доповняльних функцій

M	R	$u_\gamma E_0 / q_0$			σ_ψ / q_0		
		$h = 0$			$h/2$		
		$\psi = 0$	$\psi = \pi/4$	$\psi = \pi/2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi/4$	$\psi = \pi/2$
10	20	-29,399	274,645	168,052	0,691	-12,423	-4,228
	60	-56,731	271,930	162,387	0,604	-12,322	-4,107
	80	-56,731	271,931	162,387	0,604	-12,322	-4,107
12	20	-76,347	282,813	192,254	1,123	-12,755	-5,085
	60	-56,731	275,530	162,387	0,248	-12,489	-3,809
	80	-56,731	275,530	162,387	0,248	-12,489	-3,808
14	60	-56,734	275,531	162,383	0,248	-12,488	-3,810
	80	-56,734	275,531	162,383	0,248	-12,488	-3,810

Табл. 2 Збіжність розв'язку при застосуванні чисельного методу

L^i	L^o	$h = 6$				$h = 10$			
		$u_\gamma E_0 / q_0$		σ_ψ / q_0		$u_\gamma E_0 / q_0$		σ_ψ / q_0	
		$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$
4	4	225,272	-76,286	-20,287	-1,777	581,869	-5,793	-7,282	0,716
8	4	225,314	-76,120	-20,291	-1,783	582,202	-5,667	-7,286	0,706
	8	225,312	-76,116	-20,291	-1,784	582,202	-5,668	-7,286	0,706
32	8	225,316	-76,110	-20,291	-1,784	582,226	-5,657	-7,286	0,705
	16	225,318	-76,111	-20,291	-1,784	582,226	-5,656	-7,286	0,705
	32	225,316	-76,095	-20,291	-1,784	582,226	-5,656	-7,286	0,705

З табл. 1 та рис. 2 видно, що точність результатів до 4-5 знаків спостерігається при 80-ти точках обчислення табличних значень доповняльних функцій та 12 членах утримуваних в рядах Фур'є (13).

Точність розв'язку при застосуванні дискретних рядів Фур'є досліджено і для циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих напівгофрів, поверхня відліку яких задається рівнянням скороченої епіциклоїди. Було з'ясовано, що достатня точність результатів спостерігається для 120 точок табличних значень доповняльних функцій та 16 членах відповідних дискретних рядів Фур'є.

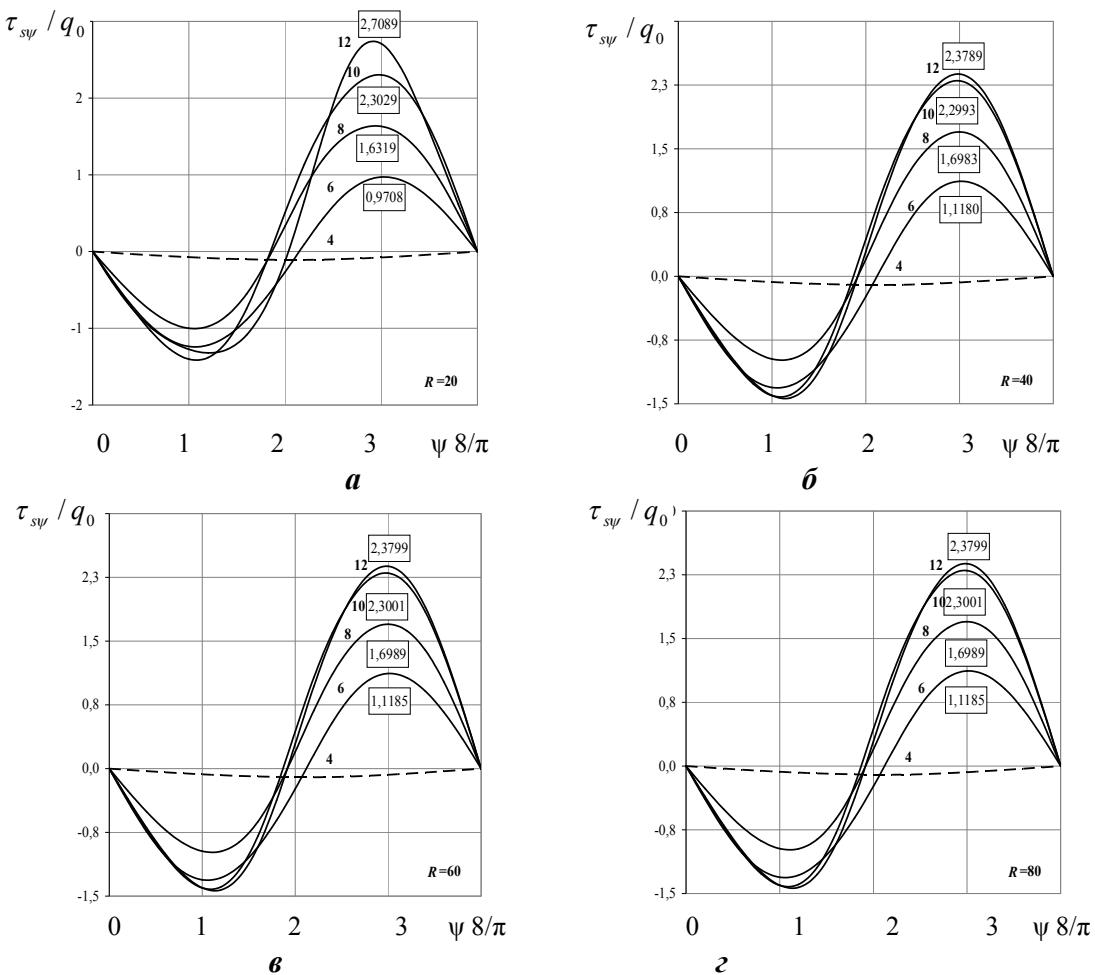


Рис. 2 Точність значень напружень τ_{sy} при застосуванні дискретних рядів Фур'є

Достатню точність при застосуванні чисельного методу можна досягти при 32 точках інтегрування та 16 точках ортогоналізації (табл. 2).

Слід зазначити, що при збільшенні кількості точок для табличних значень доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є все більше наближатиметься до звичайного, тому отриманий розв'язок задачі можна прийняти за точний з достатнім степенем вірогідності. Запропоновану методику розв'язування класу задач про напруженено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок можна використовувати для індуктивних оцінок розв'язків, отриманих на основі наближених уточнених моделей.

Було проведено порівняльний аналіз розв'язків задачі про НДС ізотропних еліптичних циліндричних оболонок під дією зовнішнього навантаження, отриманих за двома моделями: просторової та на основі уточненої моделі, що базується на гіпотезі прямої лінії (модель Тимошенка).

Табл. 3 Порівняльний аналіз показників НДС еліптичних оболонок за двома моделями

h	Δ	$\sigma_{\theta}^{+} / q_0$					$u_{\gamma} E_0 / q_0$				
		$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$			$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$		
		I	II	I	II	Похибка, %	I	II	I	II	Похибка, %
6	0	10,7	10,28	10,7	10,28	4	572,79	553,40	572,79	553,40	3
	0,05	8,78	8,3	12,7	12,18	4-5	394,12	378,00	776,17	754,90	3-4
	0,10	6,83	6,36	14,73	14,21	4-7	237,28	225,90	1007,05	983,90	2-5
	0,15	4,87	4,37	16,75	16,24	3-10	99,47	92,10	1267,74	1243,00	2-7
8	0	8,00	7,62	8,00	7,62	5	410,67	396,50	410,67	396,50	3
	0,05	6,64	6,05	9,27	8,74	6-9	301,57	286,80	531,86	512,50	4-5
	0,10	5,28	4,65	10,52	10	5-12	204,28	190,90	665,08	644,80	3-7
	0,15	3,88	3,19	11,71	11,21	4-18	118,34	107,40	809,85	788,90	3-9
10	0	6,25	5,69	6,25	5,69	9	311,20	294,40	311,20	294,40	5
	0,05	5,33	4,74	7,12	6,58	8-11	241,38	225,30	387,01	369,70	4-7
	0,10	4,36	3,73	7,91	7,4	6-14	178,06	162,90	468,03	450,40	4-9
	0,15	3,36	2,67	8,63	8,14	6-21	121,55	109,50	553,23	535,70	3-10
12	0	5,07	4,51	5,07	4,51	11	244,25	228,90	244,25	228,90	6
	0,05	4,42	3,84	5,66	5,13	9-13	197,89	182,80	293,50	278,00	5-8
	0,10	3,73	3,1	6,18	5,67	8-17	155,07	140,50	344,85	329,60	4-9
	0,15	3,00	2,31	6,63	6,14	7-23	116,27	102,30	397,39	382,70	4-12

Результати такого аналізу представлені в табл. 3 для значень напружень та нормальніх переміщень в середньому перерізі по довжині оболонки для двох значень напрямної (в зонах більшої та меншої кривизни) в залежності від степеня еліптичності та товщини. Цифрою II позначено результати, отримані за уточненою теорією, цифрою I – за пропонованою. З табл. 3 випливає, що в нетонких оболонках з еліптичним поперечним перерізом у вершині більшої півосі, на відміну від кругових оболонок, похибка значень показників НДС зумовлена степенем збільшення кривизни оболонки. Наведені результати дослідження напруженого-деформованого стану некругових нетонких циліндричних оболонок на прикладі оболонок з еліптичним поперечним перерізом, свідчать про те, що при розрахунках оболонок зі змінною кривизною координатної поверхні, разом з врахуванням зміни товщини, необхідно враховувати зміну відношення h / R_{θ} в різних зонах координатної поверхні, оцінюючи при цьому виникаючу похибку.

В третьому розділі на основі розробленої методики розв'язано задачу про напружене-деформований стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом що має двопараметричне відхилення від кругової форми (рис. 3). Поверхня відліку таких оболонок являє собою гофровані еліпси та задається в полярних координатах рівнянням (17). Перший до-

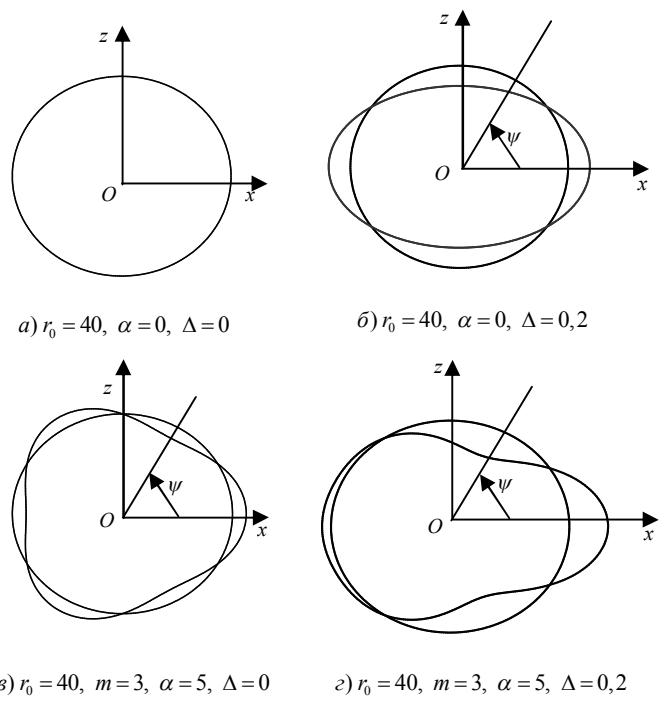
данок цього рівняння характеризує еліптичність форми, другий – наявність гофрів. Рівняння (17) описує одночасно 4 форми кривих: кругову (рис. 4 а); з однопараметричним відхиленням від кругової – еліптичну (рис. 4 б) і гофровану (рис. 4 в) та з двопараметричним відхиленням від кругової форми – гофрований еліпс (рис. 4 г).

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів при описі поперечного перерізу поверхні відліку рівнянням (17) та застосуванням розглянутої методики, проведено дослідження НДС оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, коли параметри еліптичності (Δ) та амплітуда гофрування (α) прямують до нуля. Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $l = 60$; $r_0 = 40$; $h = 6$; $\alpha = 0; 0,001; 0,003$, $m = 4; 8$; $\Delta = 0; 0,001; 0,003$ модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$.

Результати розв'язку наведено в табл. 4 в середньому перерізі по довжині оболонки для значень переміщень та напружень в двох перерізах напрямної для кругової та еліптичної гофрованої оболонок.

Табл. 4 Показники НДС еліптичних гофрованих оболонок при $\Delta \rightarrow 0$; $\alpha \rightarrow 0$

α	Δ	γ	$u_\gamma E_0 / q_0$		σ_ψ / q_0		Похибка, %
			$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi/2$	
0	0	- $h/2$	249,538	249,538	5,777	5,777	-
		$h/2$	236,125	236,125	6,115	6,115	-
$m = 4$							
0,001	0,001	- $h/2$	246,940	251,978	5,796	5,767	0,2 – 1,0
		$h/2$	233,527	238,478	6,077	6,146	0,5 – 1,1
	0,003	- $h/2$	243,178	255,772	5,818	5,746	0,5 – 2,5
		$h/2$	229,830	242,207	6,026	6,197	1,3 – 2,7
$m = 8$							
0,003	0,001	- $h/2$	246,952	251,911	5,808	5,780	0,1 – 1,0
		$h/2$	233,538	238,489	6,067	6,136	0,3 – 1,1
	0,003	- $h/2$	243,189	255,787	5,830	5,758	0,3 – 2,5
		$h/2$	229,840	242,219	6,016	6,187	1,2 – 2,7



a) $r_0 = 40$, $\alpha = 0$, $\Delta = 0$
 b) $r_0 = 40$, $\alpha = 0$, $\Delta = 0,2$
 c) $r_0 = 40$, $m = 3$, $\alpha = 5$, $\Delta = 0$
 d) $r_0 = 40$, $m = 3$, $\alpha = 5$, $\Delta = 0,2$

Рис. 3 Чотири форми поперечного перерізу

Як видно з табл. 4 при відхиленні форми поперечного перерізу від кругової в межах 3 % характеристики напруженено-деформованого стану еліптичних гофрованих оболонок так само знаходяться в межах 3 % порівняно з відповідними характеристиками для кругової оболонки.

В даному розділі було досліджено напруженено-деформований стан ізотропних еліптичних гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок різної товщини під дією внутрішнього тиску. Проведено аналіз впливу на НДС розглядуваних оболонок зміни еліптичності та параметрів гофрування. При цьому досліджувалась суперпозиція еліптичної та деяких гофрованих форм поперечних перерізів. Зокрема, на рис. 4 наведено результати впливу різних форм поперечних перерізів на розподіл полів нормальних переміщень та напружень σ_ψ вздовж напрямної оболонки.

Задачу розв'язано за таких умов: $l = 60$, $r_0 = 40$, $h = 4$, $E = E_0$, $\nu = 0,3$, $\alpha = 4$, $m = 4; 8$, $\Delta = 0; 0,1; 0,2$. З графіків, наведених на рис. 4 видно, що на спільному симетричному інтервалі зміни напрямної, монотонна крива розподілу полів переміщень та напружень, яка характерна для еліптичної форми (пунктирна лінія I) втрачає свою монотонність, набуваючи хвилястого вигляду, притаманного гофрованій формі поперечного перерізу (пунктирна крива II). При цьому хвилеподібна крива втрачає симетрію відносно перерізу $\psi = \pi / 4$.

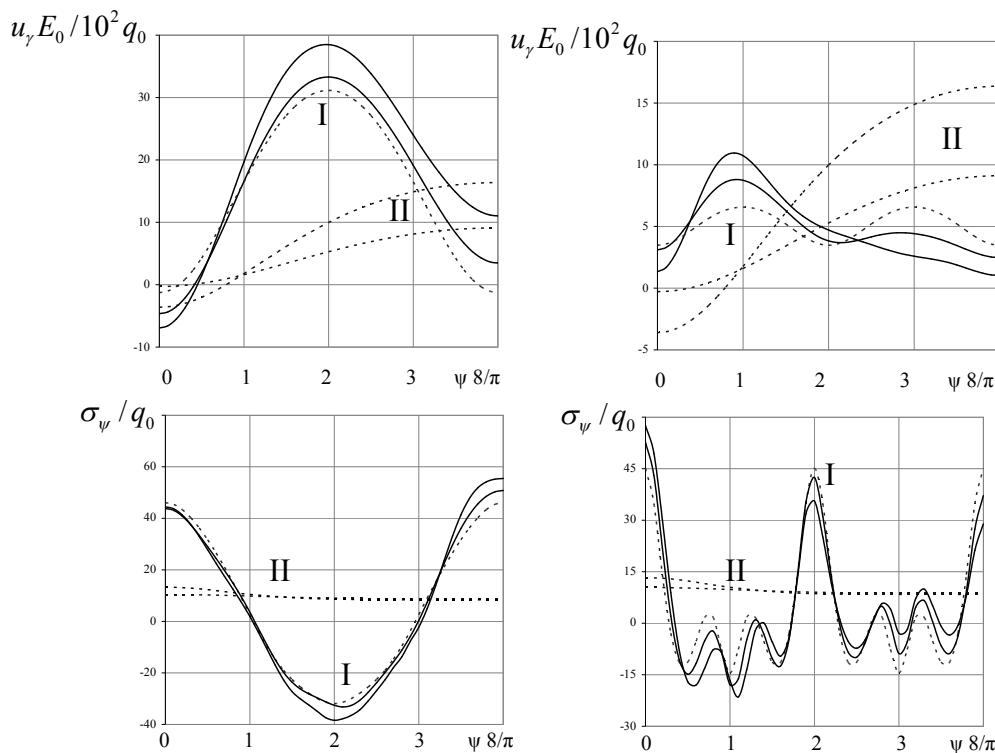


Рис. 4 Вплив суперпозиції форм на напруженено-деформований стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Варіація амплітуди та степеня еліптичності впливає на максимальну величину нормальних напружень, наближаючи її до відповідних величин в круговій гофрованій оболонці (пунктирна крива I) (рис. 4). При застосуванні теорії міцності, що базується на нормальних напруженнях, можна застосовувати спрощену

схему розрахунку, нехтуючи еліптичністю розглядуваних циліндричних оболонок. За об'єкт дослідження обрано нетонкі циліндричні оболонки з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, для яких у западині гофрів кривизна має додатній знак. Для визначення необхідних параметрів, за критерій оцінки взято відхилення радіуса кривизни поперечного перерізу поверхні відліку гофрованих еліпсів відносно радіуса кривизни гофрованого кола для $\psi = 0$. За вихідні дані оболонок прийнято: $l = 60$, $r_0 = 40$, $h = 2$, $m = 4$, $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0; 2,125$, $\Delta = 0; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,1$, механічні характеристики $E = E_0$, $\nu = 0,3$.

Результати відношення максимальних величин нормальних напружень σ_ψ кругової та еліптичної гофрованих оболонок в середньому перерізі довжини та відповідного відношення радіусів кривизни R_ψ наведено в табл. 5.

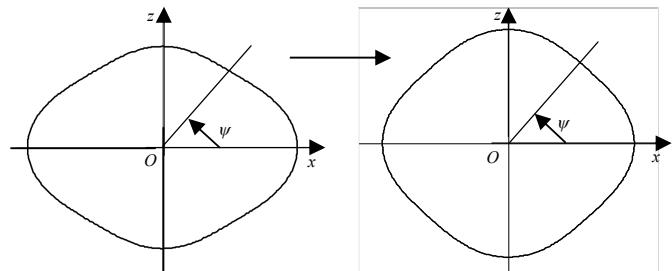
З наведених у табл. 5 даних видно, що похибка значень напружень σ_ψ до 5 % має місце для оболонок радіус кривизни яких в перерізі $\psi = 0$ не перевищує 10 %; похибка в межах 5 % – 10 % має місце при похибці радіусів кривизни в межах 10 % – 15 %; похибка в межах 10 % – 20 % має місце за похибки радіусів кривизни більше 15 % відносно радіуса кривизни кругової гофрованої оболонки.

Таким чином, спрощену форму поперечного перерізу (рис. 5), без врахування еліптичності, можна застосовувати при використанні критеріїв міцності, що базується на максимальних значеннях нормальних напружень, у випадку, коли радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку для $\psi = 0$ не перевищує 10 %.

В четвертому розділі роботи наведено результати досліджень напруженео-деформованого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів. Поперечний переріз поверхні відліку таких оболонок задано гладкою кривою, що являє собою скорочену епі- (рис. 6) або гіпоциклоїду (рис. 7). В першому випадку отримуємо опуклі напівгофри, у другому – увігнуті. Такі криві утворюються, коли рухоме коло котиться по поверхні нерухомого зовні – епіциклоїда, всередині – гіпоциклоїда. Рівняння скороченої епіциклоїди задається в параметричній формі у вигляді

Табл. 5 Вплив еліптичності на гофрований поперечний переріз

		Похибка (%) $\sigma_\psi : R_\psi$				
α	Δ	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5		4: 9,7	7: 14,5	10: 14,9	13: 17,0	20: 21,1
1		3: 8,7	4: 9,9	6: 11,7	10: 13,4	18: 17,0
1,25		3: 7,2	4: 8,7	6: 10,3	8: 12,0	16: 16,3
1,75		2: 6,0	3: 6,8	5: 8,1	6: 10,6	11: 15,2
2,125		2: 4,5	3: 5,5	4: 6,7	5: 7,9	8: 10,4



а (гофрований еліпс) б (гофроване коло)

Рис. 5 Спрощена розрахункова форма поперечного перерізу

$$x = (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left(\frac{A + a}{a} \psi \right), z = (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left(\frac{A + a}{a} \psi \right), \quad (18)$$

де A – радіус нерухомого кола, a – радіус рухомого кола. Відношення величини радіуса нерухомого до радіуса рухомого кола визначає кількість напівгофрів. Амплітуда напівгофрів визначається параметром λ (λa – відстань до центра рухомого кола, $\lambda < 1$). Варіюючи цими величинами можна отримувати поперечний переріз різної конфігурації. Для скороченої гіпоциколоїди необхідно покласти в рівняннях (18) замість $a = -a$.

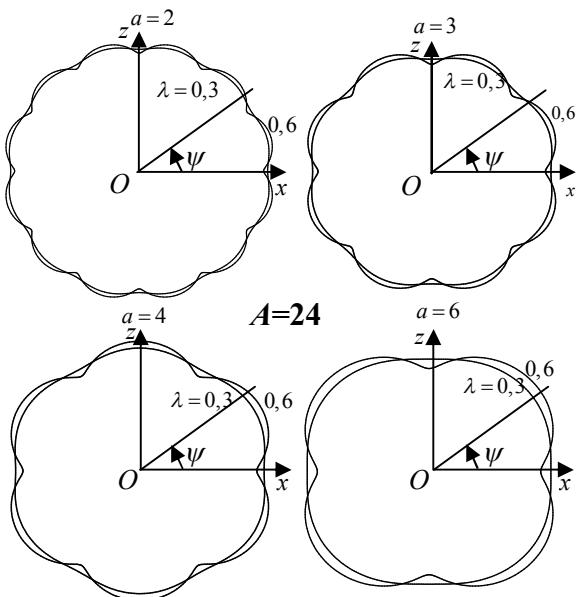


Рис. 6 Поверхня відліку у вигляді опуклих з'єднаних напівгофрів

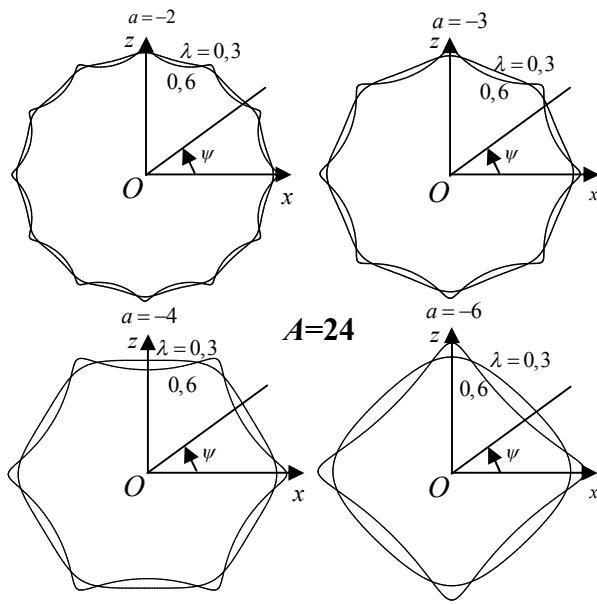


Рис. 7 Поверхня відліку у виглядіувігнутих з'єднаних напівгофрів

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів при описі поперечного перерізу поверхні відліку рівняннями (18) проведено дослідження напруженого стану оболонок з поперечним перерізом даної форми за умови, коли параметр λ прямує до нуля. При $\lambda = 0$ маємо кругову оболонку. Задачу розв'язано за таких умов: $l = 60$, $h = 2$, $A = 21$, для епіциколоїди $a = 3$, для гіпоциколоїди $a = -3$, $\lambda = 0,001; 0,002$, $E = E_0$, $v = 0,3$.

Результати розв'язку наведено в табл. 6 в середньому перерізі довжині оболонки для значень нормальних переміщень та напружень σ_ν в двох перерізах напрямної. Як видно з табл. 6, при відхиленні форми поперечного перерізу від кругової в межах 2 %, показники НДС розглядуваних оболонок так само знаходяться в межах 2 % порівняно з круговою оболонкою.

В даному розділі проведено дослідження НДС циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів різної товщини при дії зовнішнього навантаження та внутрішнього тиску. Проаналізовано вплив зміни кривизни, викликаних варіаціями величини рухомого кола та параметру λ на напружене-деформований стан оболонок, що розглядаються.

Зокрема, результати аналізу напруженено-деформованого стану циліндричних оболонок з опуклими (зовнішнє навантаження) таувігнутими (внутрішній

тиск) з'єднаними напівгофрами в поперечному перерізі наведено на рис. 8 для розподілу полів нормальних переміщень поверхні відліку та нормальних напружень σ_ψ в середньому перерізі довжини на внутрішній поверхні оболонки.

Табл. 6 Показники НДС оболонок зі з'єднаними напівгофрами при $\lambda \rightarrow 0$

a	γ	ψ	$u_\gamma E_0 / q_0$			σ_ψ / q_0			Похибка, %	
			λ							
			0,0	0,001	0,002	0,0	0,001	0,002		
3	$-h/2$	0	282,93	284,05	285,18	11,75	11,64	11,53	0,4 – 1,8	
		$\pi/7$	282,93	281,82	280,71	11,75	11,85	11,96		
	$h/2$	0	275,09	276,21	277,33	11,25	11,35	11,45		
		$\pi/7$	275,09	273,97	272,89	11,25	11,15	11,05		
-3	$-h/2$	0	158,43	157,95	157,46	8,88	8,96	9,05	0,3 – 1,9	
		$\pi/7$	158,43	158,92	159,42	8,88	8,79	8,71		
	$h/2$	0	152,39	151,91	151,42	8,16	8,08	8,01		
		$\pi/7$	152,39	152,88	153,38	8,16	8,23	8,31		

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $l = 60$, $h = 2$, $A = 24$, $a = \pm 3; \pm 6$; $\lambda = 0,4$, $E = E_0$, $\nu = 0,3$.

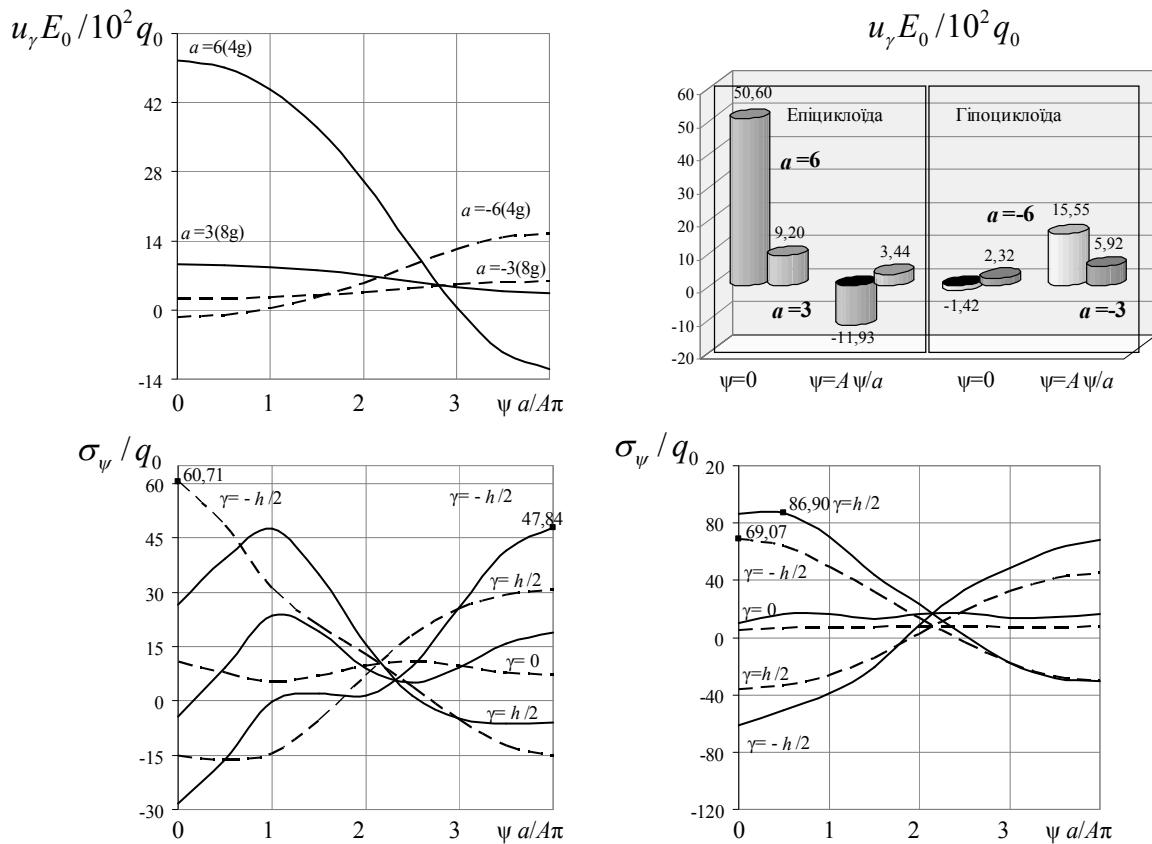


Рис. 8 Вплив зміни кривизни на напружений стан циліндричних оболонок зі з'єднаними напівгофрами в поперечному перерізі

З наведених на рис. 8 графіків розподілу переміщень видно, що своїх максимальних значень вони набувають в зонах від'ємної кривизни (в місцях з'єднання для опуклих напівгофрів та в середині напівгофрів – для увігнутих), при цьому, з даних діаграм випливає, що при збільшенні кількості напівгофрів максимальна величина переміщень зменшується приблизно в 5 разів для оболонок з опуклими напівгофрами та у 2,6 рази – з увігнутими. Максимальних значень напруження σ_ψ для оболонок з чотирма гофрами досягають в зоні з'єднання напівгофрів на навантаженій поверхні оболонок. У випадку восьми напівгофрів, максимальні значення напружень мають місце на внутрішній поверхні в зонах додатної кривизни. Зазначений перерозподіл полів переміщень та напружень, пов'язаний зі зміною жорсткості оболонок, викликаних збільшенням кількості напівгофрів. При цьому оболонка з увігнутими з'єднаннями напівгофрами виявляється більш жорсткою по відношенню до оболонки з опуклими напівгофрами.

У п'ятому розділі проведено дослідження НДС нетонких циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом, що виготовлені з трансверально-ізотропного та ортотропного матеріалу. Розроблений підхід дає можливість також враховувати наявність шарів по товщині оболонки, при цьому за рахунок вибору розв'язувальних функцій, умови спряження шарів задовільняються автоматично.

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів на основі розробленої методики проведено дослідження напруженого стану кругової ортотропної циліндричної оболонки при дії внутрішнього тиску, для якої існує точний розв'язок. Задачу розв'язано за таких вихідних даних: $l = 120$, $r_0 = 60$, $h = 20$, механічні характеристики матеріалу $E_s = 10 E_0$; $E_\psi = 2,5 E_0$; $E_\gamma = E_0$; $G_{s\psi} = 2 E_0$; $G_{\psi\gamma} = G_{s\gamma} = E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,06$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,1$; $\nu_{s\gamma} = 0,04$.

В табл. 7 наведено результати в середньому перерізі довжини оболонки для значень переміщень та колових і поздовжніх напружень на внутрішній та зовнішній поверхнях. Верхнє значення відповідає точному розв'язку задачі. Як видно з табл. 7, значення характеристик напруженого-деформованого стану оболонки не перевищують 5 % порівняно з точним розв'язком.

Табл. 7 Збіжність розв'язків за двома підходами

γ	$u_\gamma E_0 / q_0$	σ_s / q_0	σ_ψ / q_0	Похибка, %
$-h/2$	59,55	-3,516	2,517	1,07 – 4,79
	60,19	-3,348	2,559	
$h/2$	46,97	2,901	1,852	0,7 – 1,64
	47,57	2,762	1,865	

В даному розділі було проведено дослідження напруженого-деформованого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом, що має одно- та двопараметричне відхилення від кругової

форми, виготовлених з трансверально-ізотропного та ортотропного матеріалу, а також оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів, виготовлених з трансверально-ізотропного матеріалу при дії прикладеного навантаження.

Зокрема, досліджувався ефект суперпозиції форм поперечних перерізів у випадку ортотропного матеріалу. Задачу розв'язано за таких вихідних да-

них: $l = 60$, $r_0 = 40$, $h = 4$, $\Delta = 0; 0,1; 0,2$, $m = 4$, $\alpha = 4$ з механічними характеристиками матеріалу $E_s = 3,68 E_0$; $E_\psi = 2,68 E_0$; $E_\gamma = 1,1 E_0$; $G_{s\psi} = 0,5 E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41 E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45 E_0$; $v_{s\psi} = 0,105$; $v_{\psi\gamma} = 0,431$; $v_{s\gamma} = 0,405$.

Ефект суперпозиції форм поперечних перерізів у вигляді графіків розподілу полів переміщень поверхні відліку і напружень σ_ψ на внутрішній поверхні в середньому перерізі довжини оболонки наведено на рис. 9.

З графіків, наведених на рис. 9 видно, що ефект суперпозиції форм по-перечних перерізів зберігається якісно і змінюється в кількісному плані. Так, використання ортотропного матеріалу призводить до зменшення величини максимальних переміщень вдвічі та до збільшення максимальної величини напружень в 1,5 рази (рис. 4, рис. 9).

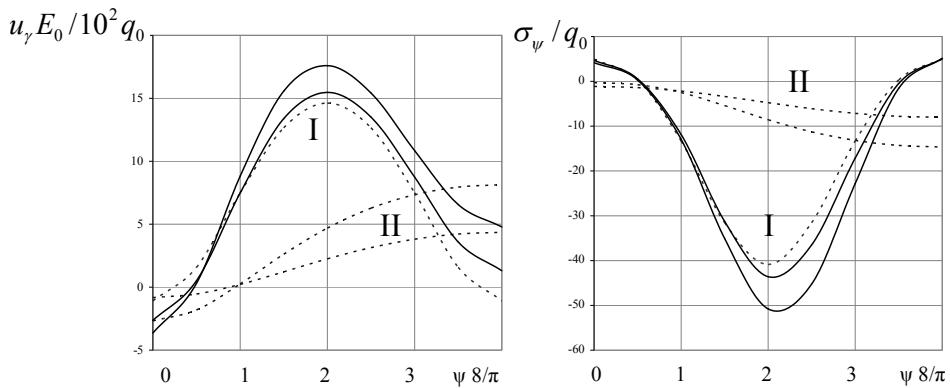


Рис. 9 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на напружене-деформований стан ортотропних еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Далі розглядалися тришарові некругові циліндричні оболонки з ізотропними несучими шарами та середнім шаром, виготовленим з трансверсально-ізотропного чи ортотропного матеріалу. Розроблений підхід дозволяє враховувати різні варіанти розташування шарів в шаруватих оболонках.

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів на основі розглянутої методики, та із застосуванням аналітичного методу відокремлення змінних в двох координатних напрямках та методу дискретної ортогоналізації, проведено дослідження напруженого стану тришарової циліндричної оболонки симетричної будови з ортотропним середнім шаром при дії внутрішнього тиску.

Зовнішні шари оболонки виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем пружності $E = 4 E_0$ і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, а внутрішній шар – з ортотропного матеріалу, що має такі характеристики: $E_s = E_0$; $E_\psi = 0,25 E_0$; $E_\gamma = 0,1 E_0$; $G_{s\psi} = E_0$; $G_{\psi\gamma} = E_0$; $G_{s\gamma} = 1/12 E_0$; $v_{s\psi} = 0,24$; $v_{\psi\gamma} = 0,1$; $v_{s\gamma} = 0,04$.

Геометричні параметри оболонки при-

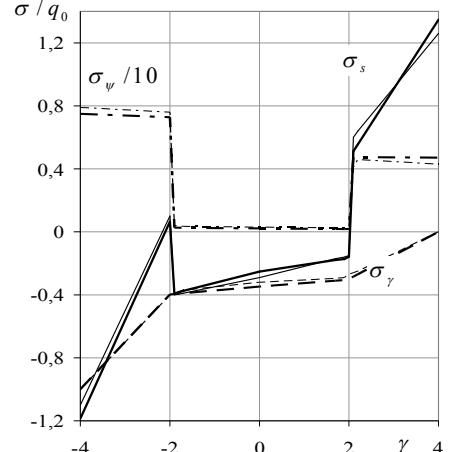


Рис. 10 Збіжність розв'язків за двома підходами

ймають значень: довжина оболонки $l = 60$, радіус кола поверхні відліку $r_0 = 30$, товщина несучих шарів $h_1 = h_3 = 2$, товщина середнього шару (заповнювача) – $h_2 = 4$.

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 10 в середньому перерізі довжини оболонки для значень трьох напружень вздовж товщини. Жирною лінією позначені криві за розглядуваною методикою, тонкі – за другою. Як видно з рис. 10 криві отримані за двома методиками майже співпадають, що свідчить про належну достовірність отримуваних результатів.

Було проведено дослідження НДС тришарових циліндричних оболонок з: еліптичним поперечним перерізом, із середнім шаром, виготовленим з трансверсально-ізотропного та ортотропного матеріалу; еліптичних гофрованих циліндричних оболонок з ортотропним середнім шаром; циліндричних оболонок з опуклими з'єднаннями напівгофрами в поперечному перерізі з ортотропним середнім шаром при дії поверхневого навантаження.

На рис. 11 у вигляді графіків розподілу переміщень та напружень σ_ψ в середньому перерізі довжини, наведено результати дослідження суперпозиції форм поперечних перерізів у випадку тришарової циліндричної оболонки з еліптичним гофрованим поперечним перерізом симетричної будови при дії внутрішнього тиску. Несучі шари виконані з ізотропного матеріалу з механічними характеристиками $E = E_0$, $\nu = 0,3$, матеріал заповнювача – ортотропний з механічними параметрами: $E_s = 3,68 E_0$; $E_\psi = 2,68 E_0$; $E_y = 1,1 E_0$; $G_{s\psi} = 0,5 E_0$; $G_{\psi\psi} = 0,41 E_0$; $G_{sy} = 0,45 E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{\psi\psi} = 0,431$; $\nu_{sy} = 0,405$. Геометричні параметри оболонок: $l = 60$, $r_0 = 40$, $\Delta = 0,0$; $0,1$; $0,2$; $h_1=h_3=1$; $h_2=2$; $H = h_1+h_2+h_3$; $m = 4$, $\alpha = 4$.

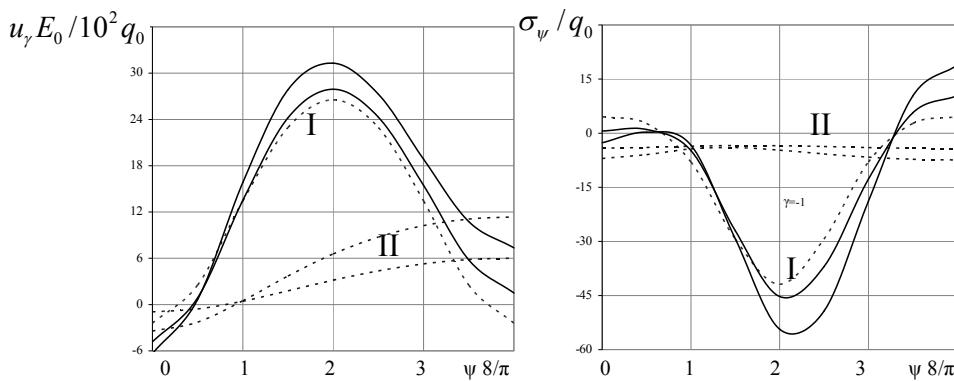


Рис. 11 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на напруженодеформований стан шаруватих еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Результати для нормальних переміщень наведено для поверхні відліку, для напружень σ_ψ – на верхній границі заповнювача, де вони приймають своїх максимальних значень. Порівнюючи дані, наведені на рис. 11 з аналогічними на рис. 4 та рис. 9, можна зробити такі висновки. Якісно ефект суперпозиції форм поперечних перерізів зберігається.

Максимальні значення переміщень зменшуються в 1,2 рази, порівняно з ізотропним матеріалом та збільшуються в 1,8 рази, порівняно з ортотропним. При цьому максимальна величина напруженій σ_y збільшується в 1,3 рази порівняно з ізотропним матеріалом та на 10 % порівняно з ортотропним.

Розроблену методику було застосовано для оптимізації еліптичного попечерного перерізу автоцистерни для перевезення світлих нафтопродуктів з метою зменшення висоти цистерни при збереженні горизонтальних габаритів та загального об'єму. При цьому перевірено виконання четвертого критерію міцності для цистерн, виготовлених з різних матеріалів та за наявності термоізоляції.

В шостому розділі роботи досліджено вплив локального навантаження на напружене-деформований стан некругових нетонких циліндричних оболонок.

Розглядалися два способи прикладання локального навантаження – на двох та чотирьох ділянках різного інтервалу зовнішньої поверхні. Для двох ділянок, навантаження задається у вигляді

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} -q_0(\cos\psi - \cos\beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ q_0(\cos\psi + \cos\beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{для чотирьох} - q_\gamma(\psi) = \begin{cases} q_0(\cos\psi - \cos\beta), & 0 \leq \psi \leq \beta; 2\pi - \beta \leq \psi \leq 2\pi; \\ q_0(\sin\psi - \cos\beta), & \pi/2 - \beta \leq \psi \leq \pi/2 + \beta; \\ -q_0(\cos\psi + \cos\beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ -q_0(\sin\psi + \cos\beta), & 3\pi/2 - \beta \leq \psi \leq 3\pi/2 + \beta, \end{cases} \quad (21)$$

Прикладене локальне навантаження можна подати у вигляді відповідних рядів Фур'є: для двох ділянок

$$q_\gamma(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[\sin\beta - \beta \cos\beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2\sin k\beta \cos\beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right] \quad (22)$$

та для чотирьох ділянок

$$q_\gamma(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[\sin\beta - \beta \cos\beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left(\frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2\sin k\beta \cos\beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right]. \quad (23)$$

На рис. 12 наведено графіки локального навантаження для різної довжини ділянок їх прикладання. Для дійсного навантаження криві позначено цифрою 1, інші криві відповідають навантаженню, апроксимованому рядами Фур'є з різною кількістю утримуваних членів. Як видно з рис. 12 для меншого інтервалу прикладання навантаження необхідно враховувати більшу кількість членів ряду, незалежно від способу його прикладання. При 24 – 28 членах ряду максимальне значення навантаження відрізняється від дійсного на 0,75 %, тому таке наближення є припустимим.

Контроль збіжності розв'язків проведено при розв'язуванні задачі про НДС стан ізотропної кругової циліндричної оболонки для двох способів прикладання локального навантаження різних інтервалів.

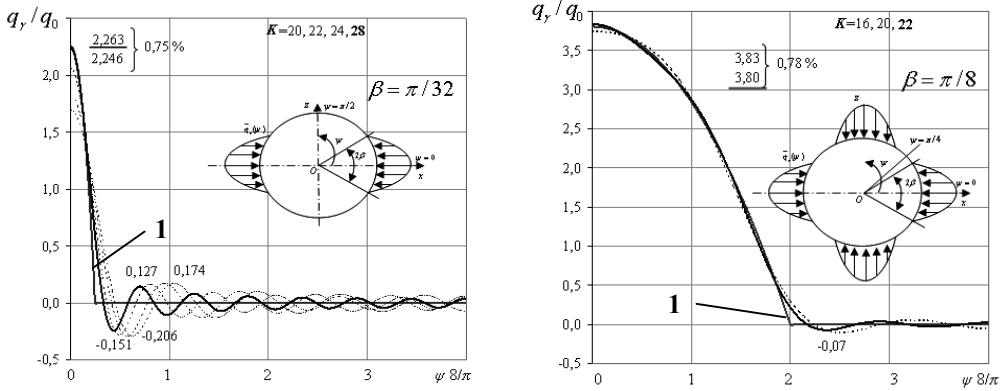


Рис. 12 Локальне навантаження та його апроксимація рядами Фур'є

Результати розв'язку наведено у табл. 8 для значень нормальних переміщень та колових і поздовжніх напружень в середньому перерізі довжини в залежності від кількості утримуваних членів рядів Фур'є (22, 23).

Табл. 8 Збіжність розв'язку в залежності від точності обчислень локального навантаження

N	ψ	$\beta = \pi / 32$ (II)			По-хиб-ка, %	N	ψ	$\beta = \pi / 8$ (I)			По-хиб-ка, %
		$u_y E_0 / q_0$	σ_ψ / q_0	σ_s / q_0				$u_y E_0 / q_0$	σ_ψ / q_0	σ_s / q_0	
20	0	74,314	1,003	2,042	--	16	0	63,505	0,929	1,262	--
	$\pi/4$	-41,137	-0,934	-0,758			$\pi/2$	-7,067	-0,092	0,093	
24	0	74,653	1,079	2,150	0,5 – 8,4	18	0	63,501	0,922	1,256	0,5 – 7,2
	$\pi/4$	-40,798	-0,862	-0,725			$\pi/2$	-7,071	-0,100	0,087	
28	0	74,734	1,136	2,218	0,1 – 5,0	20	0	63,512	0,916	1,253	0,2 – 4,4
	$\pi/4$	-41,088	-0,860	-0,706			$\pi/2$	-7,046	-0,104	0,088	

Зокрема, вплив локального навантаження на напруженій стан некругових циліндричних оболонок розглянуто на прикладі овальних циліндричних оболонок.

Отримати різні форми овалів, а також кругову та еліптичну, можна виходячи з одного рівняння, що описує овали Касині у вигляді

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad 0 \leq c/a < 1, \quad a \neq 0, \quad (24)$$

де ρ – полярний радіус, c – половина відстані між фокусами, a – добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів c та a характеризує форму поперечного перерізу (рис. 13). Так, якщо $c = 0$ – маємо коло (1), при $0 < c/a < 1/\sqrt{2}$ – еліпс (2), $c = a\sqrt{2}$ – овал (3), $1/\sqrt{2} < c/a < 1$ – сплюснений овал (4). Результати розв'язання задачі для двох інтервалів прикладеного навантаження наведено на рис. 13 у вигляді графіків розподілу нормальних

переміщень поверхні відліку та напружень σ_ψ на зовнішній поверхні в середньому перерізі по довжині оболонки.

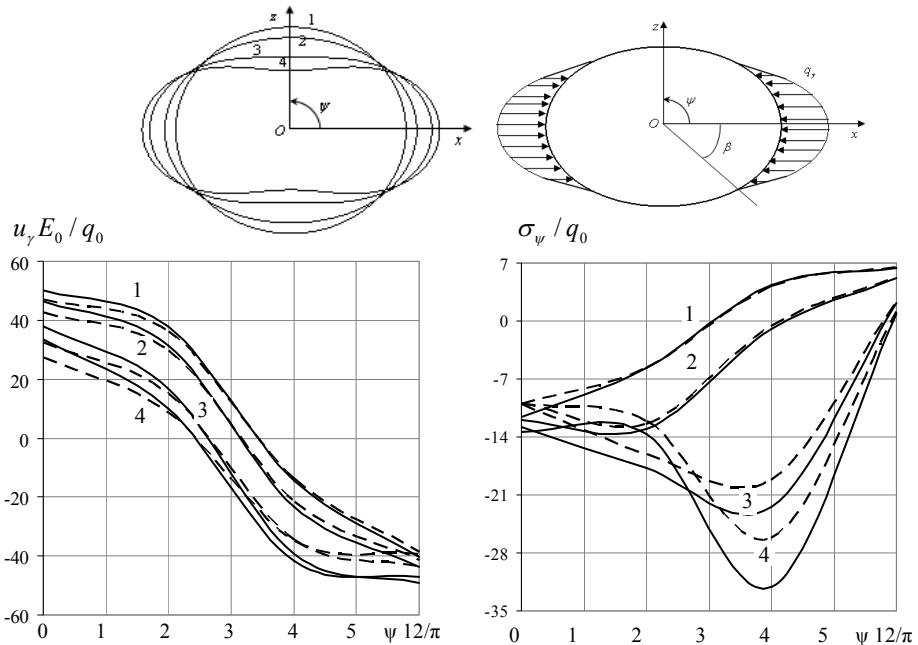


Рис. 13 Вплив локального навантаження на НДС овальних циліндричних оболонок

Суцільною лінією позначені криві для інтервалу $\beta = \pi / 16$, штриховою – для $\beta = \pi / 8$. Як видно з графіків, наведених на рис. 13, вплив локального навантаження на характеристики напруженого-деформованого стану більш відчутний на оболонках з овальним поперечним перерізом. Так, зменшення інтервалу локального навантаження призводить до зменшення переміщень в зоні максимального навантаження в 1,2 рази. При цьому їх максимальні значення зменшуються в 1,3 – 1,6 рази, порівняно з круговими оболонками.

Максимальних амплітудних значень напруження σ_ψ досягають на зовнішній поверхні, у вільній від навантаження зоні. Зменшення інтервалу призводить до зменшення їх величини на 15 – 18 %.

Порівняно з круговими оболонками, їх величина збільшується в 3 – 5 разів.

В сьомому розділі метод сплайн-функцій застосовано для визначення напруженого стану суцільних кругових циліндрів за різних способів закріплення торців. Розв'язується осесиметрична задача лінійної теорії пружності. Розглядаються ізотропні суцільні цилінди в циліндричній системі координат (рис. 14).

За вихідні прийнято рівняння лінійної теорії пружності для ізотропного тіла, які в циліндричній системі координат набувають вигляду ($0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l$): співвідношення Коші

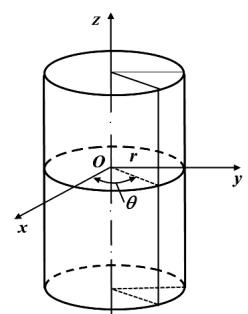


Рис. 14 Циліндрична система координат

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (25)$$

рівняння рівноваги $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;$ (26)

співвідношення закону Гука для ізотропного тіла

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)], \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz}, \end{aligned} \quad (27)$$

де u_r, u_θ – переміщення в радіальному та поздовжньому напрямку; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ – деформації; $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ – напруження у відповідних напрямках; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

На бічних поверхнях мають місце граничні умови

$$\begin{aligned} u_r &= 0, \tau_{rz} = 0 \text{ при } r = 0, \\ \sigma_r &= q_r, \tau_{rz} = 0 \text{ при } r = R. \end{aligned} \quad (28)$$

На торцях розглядаються умови жорсткого закріплення

$$u_r = 0, u_z = 0 \text{ при } z = 0; l, \quad (29)$$

або шарнірного закріплення

$$\sigma_z = 0, u_r = 0, \text{ або } u_r = 0, \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0; l \quad (30).$$

Для побудови розв'язувальної системи диференціальних рівнянь в переміщеннях, яку отримаємо з вихідних рівнянь (25) – (27), оберемо за розв'язувальні функції компоненти переміщень u_r, u_θ . Після деяких перетворень розв'язувальна система в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами набуде вигляду ($0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq l$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_r, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (31)$$

з граничними умовами на бічних поверхнях

$$u_r = 0, \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad (32)$$

$$\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z} = q_r, \quad \text{при } r = R.$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0$$

Метод розв'язування задачі складається з трьох етапів. На **першому етапі** двовимірна крайова задача зводиться до однорідної за допомогою відокремлення змінних вздовж твірної за рахунок застосування сплайн-функцій. Розв'язувальні функції подаються у вигляді рядів

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(r) \varphi_{1i}(z), \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(r) \varphi_{2i}(z), \quad (33)$$

де u_1, u_2 – шукані функції, φ_1, φ_2 – сплайн-функції, що являють собою комбінації B -сплайнів третього степеня і у випадку жорсткого закріплення мають вигляд (34. a) ($j = 1, 2$), у випадку шарнірного – (34. a) для $j = 1$, та (34. б) для $j = 2$.

$$\begin{aligned} \varphi_{j0}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); & \varphi_{j0}(z) &= B_3^0(z); \\ \varphi_{j1}(z) &= B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z); & \varphi_{j1}(z) &= B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z); \\ \varphi_{ji}(z) &= B_3^i \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); & \varphi_{ji}(z) &= B_3^i \quad (i = 2, 3, \dots, N-2); \\ \varphi_{jN-1}(z) &= B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); & \varphi_{jN-1}(z) &= B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \\ \varphi_{jN}(z) &= -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z). & \varphi_{jN}(z) &= B_3^{N+1}(z). \end{aligned} \quad (34. a) \quad (34. б)$$

Після підстановки рядів (33) до розв'язувальної системи (31) та граничних умов (32) і відокремлення змінних, приходять до розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку записують в обраних точках z_k твірної, кількість яких дорівнює кількості невідомих розв'язувальних функцій

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}''(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^N \frac{1}{r^2} u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}'(z_k), \\ \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \\ &\quad - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}''(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) \quad (k = 2(N+1)); \end{aligned} \quad (35)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) &= 0, \quad \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0 \quad \text{при } r = 0, \\ \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) &+ \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}'(z_k) = q_r, \\ \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) &+ \sum_{i=1}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0, \quad \text{при } r = R. \end{aligned} \quad (36)$$

Дана система рівнянь містить певні члени, які при $r = 0$ перетворюються на невизначеності 0/0.

На *другому етапі* розкривають ці невизначеності. При цьому використовують граничні переходи

$$\frac{u_{1i}}{r} \rightarrow \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}). \quad (37)$$

З врахуванням (37) система (35) при $r = 0$ набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) &= 0, \\ \sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) &= -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k). \end{aligned} \quad (35^*)$$

На *третьому етапі* розв'язування задачі застосовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. При цьому, починаючи інтегрування з точки $r = 0$ використовують систему рівнянь (35*), а далі переходято до системи рівнянь (35).

Вводячи нові змінні

$$y_{1i} = u_{1i}, y_{2i} = \frac{du_{2i}}{dr}, y_{3i} = u_{2i}, y_{4i} = \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}), \quad (38)$$

отриману систему звичайних диференціальних рівнянь можна записати в векторному вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} + \bar{f}, \quad (0 \leq r \leq R), \text{ де} \quad (39)$$

$\bar{Y} = \{y_{10}, \dots, y_{1N}, y'_{10}, \dots, y'_{1N}; y_{20}, \dots, y_{2N}, y'_{20}, \dots, y'_{2N}; y_{30}, \dots, y_{3N}, y'_{30}, \dots, y'_{3N}; y_{40}, \dots, y_{4N}, y'_{40}, \dots, y'_{4N}\}^T$; $A(r)$ – квадратна матриця порядку $4(N+1)$, \bar{f} – вектор правої частини. Граничні умови у векторній формі мають вигляді

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1, B_2 \bar{Y}(R) = \bar{b}_2. \quad (40).$$

Деякі оцінки достовірності отримуваних результатів можна дістати, розв'язавши задачу про напружений стан суцільних циліндрів при шарнірному закріпленні торців двома способами: із застосуванням методу відокремлення змінних з використанням рядів Фур'є (з розкриттям невизначеності в геометрично особливій точці) та за допомогою розглянутого підходу з використанням сплайн-функцій.

Задачу розв'язано за таких умов: радіус циліндра $R=5$, довжина циліндра приймає значень $l_{1,2} = 1,2; 2,1$, модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. Результати розв'язування задачі для переміщень u_r та напружень σ_γ , σ_θ наведено в табл. 9 на зовнішній поверхні вздовж твірної циліндра. Цифрою I позначені розв'язки, отримані на основі методу відокремлення змінних із використанням рядів Фур'є, цифрою II – на основі сплайн-функцій. Як видно з наведених результатів, похибка не перевищує 1 %.

Табл. 9 Показники НДС циліндрів за двома підходами

l	z	I			II		
		$u_r E_0 / q_0$	σ_r / q_0	σ_θ / q_0	$u_r E_0 / q_0$	σ_r / q_0	σ_θ / q_0
1,2	$l/7$	3,0880	4,3388	3,2484	3,0852	4,3434	3,2498
	$2l/7$	5,5644	7,8183	5,8534	5,5602	7,8195	5,8496
	$3l/7$	6,9387	9,7493	7,2991	6,9332	9,7533	7,2965
	$l/2$	7,1172	10,0089	7,4868	7,1107	10,0091	7,4892
2,1	$l/7$	5,4342	4,3388	3,7162	5,4292	4,3432	3,7171
	$2l/7$	9,7920	7,8183	6,6963	9,7844	7,8195	6,6919
	$3l/7$	12,2104	9,7493	8,3501	12,2003	9,7532	8,3467
	$l/2$	12,5245	10,0071	8,5649	12,5126	10,0087	8,5661

На основі викладеного підходу розв'язано задачу про напруженій стан суцільних ізотропних циліндрів при дії нормального розподіленого навантаження для двох способів закріплення торців.

Задачу розв'язано за таких умов: радіус циліндра $R_{1,2} = 0,9; 5,0$; довжина циліндра приймає значень $l_{1,2} = 1,2; 2,1$ навантаження $q = q_0 \sin(\pi z/l)$ $q_0 = 10$; модуль Юнга $E = E_0$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$. При цьому розглядались два варіанти граничних умов на торцях: шарнірного та жорсткого закріплення.

На рис. 15 наведено графіки розподілу полів нормальних переміщень та колових напружень вздовж радіуса для певних перерізів твірної ($l_1 = l = 1,2$).

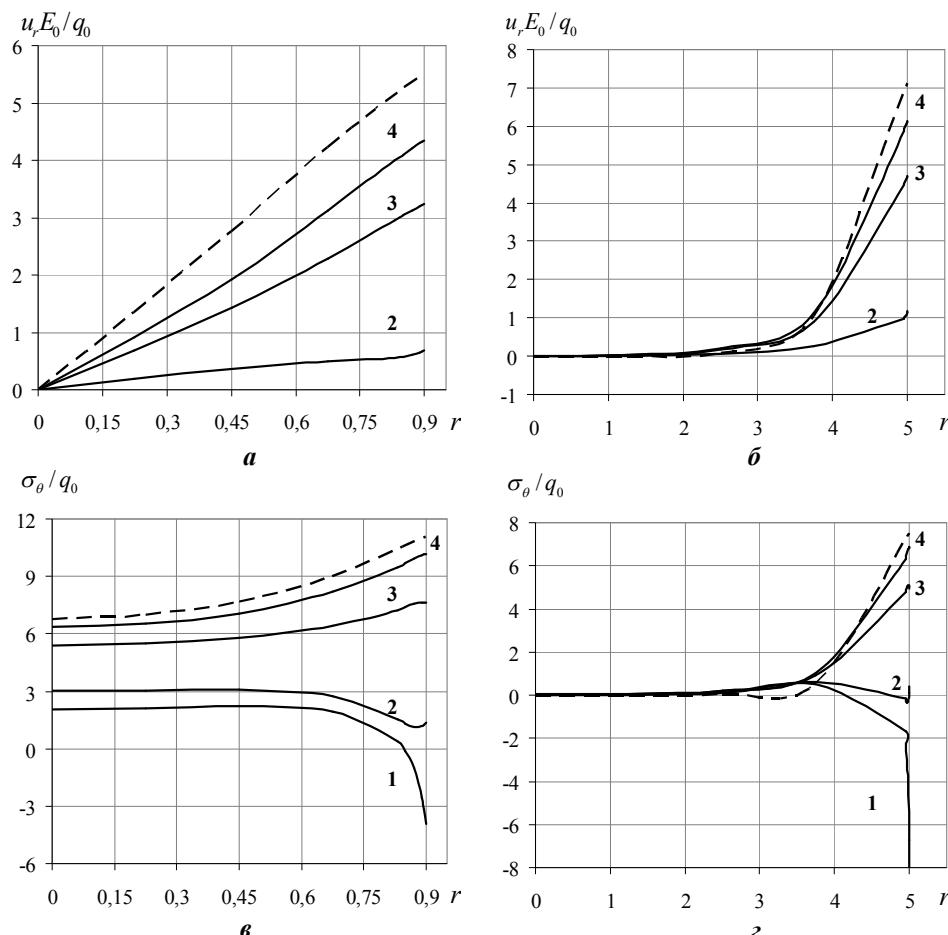


Рис. 15 Показники напруженого стану суцільних циліндрів в залежності від способу закріплення торців та їх геометричних характеристик

Цифрами 1, 2, 3, 4 позначені криві в перерізах $z = 0; l/14; l/7; 3l/14$ відповідно. Штриховою лінією наведено криві для шарнірного закріплення торців. Криві на рис. 15 а, в відповідають циліндром $R_1 = 0,9$, на рис. 15. б, г – $R_2 = 5$.

З наведених на рис. 15 графіків видно, що при збільшенні радіуса циліндра порушується лінійний розподіл переміщень в усіх перерізах твірної. Характерним в розподілі полів напружень є наявність крайових ефектів у випадку жорсткого закріплення торців, які проявляються в точках кутових кіл циліндра, де їх значення прямують до нескінченності.

На певній віддалі від торців (криві 3, 4) характер розподілу переміщень та напружень мало залежить від способу закріплення торців.

Застосування сплайн-апроксимації дозволяє отримувати розв'язки задачі про напруженій стан суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців з достатнім степенем точності та проводити дослідження впливу геометричних характеристик циліндрів на розподіл полів переміщень та напружень з метою встановлення характерних особливостей.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ І ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему лінійної просторової теорії пружності – розробка та удосконалення чисельно-аналітичної методики для дослідження напруженого-деформованого стану циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях та ізотропних суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців, що знаходяться під дією прикладеного поверхневого навантаження.

На основі запропонованої методики побудовані розв'язки нових задач про напруженого-деформованого стан розглядуваних класів циліндричних тіл в просторовій постановці; розроблені алгоритми їх чисельного розв'язання, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах та пакетах прикладних програм; проведено дослідження напруженого-деформованого стану та встановлено закономірності в розподілі полів переміщень та напружень, що характерні для даних класів циліндричних тіл, при цьому встановлені нові ефекти пов'язані з геометричними та механічними характеристиками циліндричних тіл первого типу.

Отримані основні наукові результати полягають у наступному:

1. Розроблено спільну чисельно-аналітичну методику розв'язання просторових задач лінійної теорії пружності для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців, що базується на застосуванні ефективних аналітических методів зведення вихідної крайової задачі до одномірної, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації; при цьому отримав розвиток метод апроксимації функцій дискретними

рядами Фур'є для циліндричних тіл першого типу та вперше застосовано метод сплайн-функцій для циліндричних тіл другого.

2. На основі розробленої методики побудовано розв'язки нових просторових задач статики для циліндричних тіл, що знаходяться при дії розподіленого та локального навантаження таких класів: нетонких ізотропних циліндричних оболонок зі знакозмінною кривизною поперечного перерізу (з двопараметричним відхиленням від кругової форми та у вигляді з'єднаних напівгофрів), при цьому використані рівняння гладких кривих для опису поверхні відліку поперечного перерізу (гофрованого еліпса та скороченої епі- (гіпо-) цикloid); нетонких некругових циліндричних оболонок, виготовлених з анізотропного матеріалу з врахуванням шарів по товщині; суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріplення торців.
3. Проведено оцінки достовірності і точності отримуваних результатів на основі порівняльного аналізу з точними розв'язками в тих випадках, коли вони існують; з розв'язками, отриманими іншими авторами; контролю точності на базі індуктивних оцінок.
4. Розроблено алгоритми, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах, що дозволяють проводити обчислювальний процес в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів розглядуваних тіл.
5. Проведено аналіз розподілу полів переміщень та напружень для циліндричних тіл двох типів в залежності від: зміни кривизни поперечного перерізу поверхні відліку з врахуванням анізотропії використовуваних матеріалів, локальності прикладеного навантаження, за наявності шарів по товщині для циліндричних тіл першого типу; способу закріplення торців для циліндричних тіл другого типу.
6. Встановлено характерні закономірності в розподілі факторів напруженодеформованого стану циліндричних тіл двох типів та виявлено ряд нових ефектів, пов'язаних з геометричними та механічними характеристиками циліндричних тіл першого типу, зокрема, досліджено ефект суперпозиції деяких форм поперечних перерізів та надано інженерні рекомендації щодо можливості застосування спрощених схем в залежності від геометричних характеристик при розрахунках на міцність.

Дані дослідження можуть бути основою при проектуванні функціональних елементів авіакосмічної галузі, машинобудування, будівництва споруд, трубопровідної промисловості тощо. Крім того, розроблена методика може бути використана для індуктивних оцінок результатів, отриманих з використанням різних уточнених моделей теорії оболонок.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (2), 67 – 73 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section. Int. App. Mech. **40** (2), 169 – 175 (2004))
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (6), 99 – 106 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Orthotropic Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **40** (6), 679–685 (2004))
3. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние. Прикл. механика. **40** (9), 87 – 93 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of corrugation frequency and amplitude on the stress state of hollow elliptic cylinders. Int. App. Mech. **40** (9), 1012–1017 (2004))
4. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Прикл. механика. **41** (3), 62 – 69 (2005) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **41** (3), 277 –282 (2005))
5. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статики пружних тіл неканонічної форми. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **48** (2), 79 – 100 (2005)
6. Рожок Л.С.: Дослідження впливу локального навантаження на напруженний стан гофрованих порожністих циліндрів. Доповіді НАН України. (7), 56 – 59 (2006)
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. J. Eng. Math. **54**, 145–157 (2006)
8. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **42** (6), 24 – 31 (2006) (Grigorenko Ya.M., Grigorenko A. Ya., Rozhok L.S. Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. Int. App. Mech. **42** (6), 629 – 635 (2006))
9. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках. Прикл. механика. **42** (8), 44 – 57 (2006) (Grigorenko Ya.M., Urusova G. P., Rozhok L.S. Stress analysis of nonthin elliptic cylindrical shells in refined and spatial formulations . Int. App. Mech. **42** (8), 886 – 894 (2006))
10. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Анализ влияния кривизны на напряженное состояние полых эллиптических цилиндров по двум мо-

- делям. Вісник Донецького ун-ту. Сер А: Природн. науки. (1), 55 – 58 (2006)
11. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **42** (12), 87 – 96 (2006) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders. Int. App. Mech. **42** (12), 1389 – 1397 (2006))
 12. Рожок Л.С.: Шаруваті порожнисті циліндри з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (12), 70 – 75 (2007)
 13. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43** (12), 82 – 90 (2007) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of orthotropy parameters on the stress state of hollow cylinders with elliptic cross-section. Int. App. Mech. **43** (12), 1372 – 1379 (2007))
 14. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (3), 90 – 94 (2009)
 15. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **46** (3), 15 – 24 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders. Int. App. Mech. **46** (3), 255 – 263 (2010))
 16. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с некруговым поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **46** (7), 3 – 10 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of curvature on the stress state of hollow cylinders with complex-shaped noncircular cross-section. Int. App. Mech. **46** (7), 737 – 743 (2010))
 17. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Доповіді НАН України. (3), 57 – 62 (2011)
 18. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Расчет напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **47** (6), 48 – 56 (2011) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. Int. App. Mech. **47** (6), 645 – 652 (2011))
 19. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **55** (4), 125 – 130 (2012) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. J. Math. Sci. 198 (2), 158 – 165 (2014))
 20. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Дослідження напруженого стану некругових порожнистих циліндрів складної форми різної кривизни. Мат. методи

- ди та фіз. –мех. поля. **56** (3), 122 – 128 (2013) (Hryhorenko Ya.M., Rozhok L.S. Investigation of the stress state of noncircular hollow cylinders of complex shapes with different curvatures J. Math. Sci. 205 (5), 635 – 643 (2015))
21. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **50** (2), 3 – 26 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **50** (2), 105 – 127 (2014))
 22. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semi-corrugations. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **57** (4), 109 – 120 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semicorrugations. J. Math. Sci. 220 (2), 133 – 148 (2017))
 23. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз.–мех. поля. **58** (4), 70 – 77 (2015) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 228 (1), 80 – 89 (2018))
 24. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (1), 78 – 85 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of Curvature on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (1), 49 – 55 (2016))
 25. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с выпуклым гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (2), 55 – 63 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Orthotropy on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (2), 147 – 154 (2016))
 26. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напряженное состояние полых цилиндров с вогнутым гофрированным поперечным сечением разной кривизны. Прикл. механика. **52** (6), 26 – 33 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders with Different Cross-Sectional Curvature. Int. App. Mech. **52** (6), 581 – 586 (2016))
 27. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив зміни параметрів ортотропії на напружений стан порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **59** (1), 132 – 140 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of the Variations of Orthotropy Parameters on the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 228 (3), 268 – 279 (2018))

28. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. (1), 21 – 24 (2017)
29. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Влияние изменения параметров кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров. Прикл. механика. **54** (3), 27 – 35 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **54** (3), 266 – 274 (2018))
30. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Слоистые неоднородные полые цилиндры с вогнутым гофрированным поперечным сечением под действием внутреннего давления. Прикл. механика. **54** (5), 47 – 54 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Layered Inhomogeneous Hollow Cylinders with Concave Corrugations Under Internal Pressure. Int. App. Mech. **54** (5), 531 – 539 (2018))
31. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є при чисельному розв'язуванні краївих задач. В: Тези доповідей XI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 56 (2004)
32. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Моделювання та дослідження напруженого стану ортотропних циліндрів з некруговим поперечним перерізом. В: Тези доповідей міжнародної конференції "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем", Київ, 272 (2005)
33. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Некругові порожнисті цилінди при дії локального навантаження. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки – 2006", Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 43 (2006)
34. Grigirenko A.Ya., Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Mechanical Behavior of Elastic Cylinder with Various Cross-Section. In: 77 Annual Meeting of the Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, 128 (2006)
35. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів при дії локального навантаження. В: LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету, Київ, 384 – 385 (2008)
36. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Application of discrete Fourier series in the boundary value problems of plates and shells. In: Shell Structures: Theory and Applications (Vol. 2). – Proceedings of the 9th SSTA Conference, Jurata, Poland, 14 – 16 (2009)
37. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з некруговим поперечним перерізом в залежності від зміни кривизни. В: LXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2010)
38. Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних шаруватих порожнистих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. В: LXVII наукова конференція

- нція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2011)
39. Рожок Л.С.: Дослідження рівноваги пружних порожнистих неоднорідних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів. В: LXX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2014)
 40. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 35 – 39 (2016)
 41. Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 92 – 95 (2017)
 42. Рожок Л.С.: Вплив параметрів кривизни на напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. В: LXXIII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 472 (2017)
 43. Рожок Л.С.: Вплив форми поперечного перерізу на напружений стан трансверсально-ізотропних некругових порожнистих циліндрів. В: Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Київ, 131 (2017)
 44. Рожок Л.С.: Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 125 – 128 (2018)
 45. Рожок Л.С.: Напружений стан пружних порожнистих некругових циліндрів в залежності від їх геометричних та механічних параметрів. В: LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 482 (2018)
 46. Рожок Л.С.: Моделювання напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів при дії локального навантаження. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. Т. 1, Львів, 123 – 124 (2018)
 47. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Discrete Fourier-series method in problems of bending variable-thickness rectangular plates. J. Eng. Math. **46** (3–4), 269–280 (2003)
 48. Рожок Л.С.: Напружений стан тришаруватих еліптичних циліндрів. Вісник НТУ (9), 420 – 424 (2004)
 49. Рожок Л.С.: Трансверсально-ізотропні порожнисті цилінди під дією локального навантаження. Вісник НТУ (11), 163 – 166 (2006)

50. Рожок Л.С.: Рівновага пружних циліндрів канонічної та неканонічної форми поперечного перерізу. Вісник НТУ (13), 279 – 281 (2006)
51. Рожок Л.С.: Рівновага неоднорідних гофрованих в поперечному перерізі циліндрів при дії локального навантаження. Вісник НТУ (17), 346 – 349 (2008)
52. Рожок Л.С.: Визначення напруженого стану порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Вісник НТУ (18), 240 – 243 (2009)
53. Рожок Л.С.: Напружений стан ортотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі. Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2 (21), 358 – 361 (2010)
54. Рожок Л.С.: Рівновага шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі, циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2 (26), 457 – 461 (2012)

АНОТАЦІЯ

Рожок Л.С. Просторові задачі теорії пружності для циліндричних оболонок складної геометрії та структури. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 "Механіка деформівного твердого тіла". – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2019.

Дисертація присвячена розробці та удосконаленню методів дослідження напружено-деформованого стану циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури за певних граничних умов на торцях та ізотропних суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців при дії поверхневого навантаження в просторовій постановці.

Запропонована спільна методика базується на застосуванні ефективних аналітических методів для зведення вихідної крайової задачі, що описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При цьому, для циліндричних тіл першого типу отримав розвиток метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та вперше застосовано метод сплайн-функцій для циліндричних тіл другого типу з розкриттям невизначеності в геометрично особливій точці.

Розроблено алгоритми, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах для визначення напружено-деформованого стану при дії прикладеного поверхневого навантаження для циліндричних тіл двох типів. Створені обчислювальні комплекси дозволяють проводити розрахунки в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів розглядуваних тіл.

З використанням розробленої методики побудовано розв'язки нових просторових задач статики лінійної теорії пружності та проведено дослідження напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок, за певних

граничних умов на торцях, з врахуванням значної змінної кривизни поперечно-го перерізу поверхні відліку, анізотропії матеріалу, за наявності шарів по тов-щині, локальності прикладеного навантаження, а також суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців.

На основі отриманих розв'язків встановлено характерні закономірності розподілу полів переміщень та напружень, викликаних прикладеним поверхне-вим навантаженням для циліндричних тіл двох типів та виявлено ряд нових ефектів, пов'язаних з геометрією та структурою нетонких циліндричних оболо-нок.

Ключові слова: просторові задачі, нетонкі циліндричні оболонки, напру-жено-деформований стан, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналі-зації, двопараметричне відхилення від кругової форми, з'єднані напівгофри, ор-тотропні матеріали, локальне навантаження, суцільні циліндри, сплайн-функції, суперпозиція форм поперечних перерізів.

АННОТАЦИЯ

Рожок Л.С. Пространственные задачи теории упругости для цилиндриче-ских оболочек сложной геометрии и структуры. – Рукопись.

Диссертация на соискание научной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 – "Механика деформируемого твердого тела". – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, 2019.

Диссертация посвящена разработке и усовершенствованию методов иссле-дования напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел двух типов: нетонких цилиндрических оболочек сложной геометрии и структуры при определенных граничных условиях на торцах и сплошных изотропных ци-линдрах при разных способах закрепления торцов, находящихся при действии поверхностной нагрузки, в пространственной постановке.

Предложенная общая методика базируется на использовании эффективных аналитических методов сведения исходной краевой задачи, которая описана дифференциальными уравнениями в частных производных, к одномерной крае-вой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с посто-янными коэффициентами, которая решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации. При этом для цилиндрических тел первого типа получил развитие метод аппроксимации функций дискретными рядами Фурье и впервые был использован метод сплайн аппроксимации функций для цилинд-рических тел второго типа с раскрытием неопределенности в геометрически особенной точке.

Разработаны алгоритмы, которые реализованы в проблемно-ориентиро-ванных вычислительных комплексах для определения напряженно-деформиро-ванного состояния, вызванного приложенной поверхностной нагрузкой для ци-линдрических тел двух типов. Созданные вычислительные комплексы позво-

ляют проводить расчеты в широком диапазоне изменения геометрических и механических параметров рассматриваемых тел.

С использованием разработанной методики получены решения новых классов пространственных задач линейной теории упругости и проведено исследование напряженно-деформированного состояния нетонких цилиндрических оболочек сложной геометрии и структуры при действии равномерной и локальной нагрузки, а также сплошных изотропных цилиндров при различных способах закрепления торцов. В частности, решена задача о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с двухпараметрическим отклонением поперечного сечения от круговой формы в виде гофрированных эллипсов, при этом использовано уравнение гладкой кривой, которое позволяет получить четыре формы кривых поперечного сечения; исследовано напряженно-деформированное состояние нетонких цилиндрических оболочек с поперечным сечением в виде выпуклых (вогнутых) полугофров, которое описано уравнениями укороченной эпициклоиды (гипоциклоиды), в зависимости от изменения кривизны; решена задача о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением, изготовленных из ортотропного или трансверсально-изотропного материала, а также трехслойных нетонких цилиндрических оболочек в зависимости от характеристик материала среднего слоя и геометрических параметров поперечного сечения поверхности отсчета нетонких цилиндрических оболочек: проведен анализ влияния локальной нагрузки на характеристики напряженно-деформированного состояния нетонких цилиндрических оболочек сложной геометрии и структуры. Решена задача о напряженном состоянии сплошных изотропных цилиндров для двух способов закрепления торцов.

На основе полученных решений установлены характерные закономерности распределения полей перемещений и напряжений, вызванных приложенной поверхностной нагрузкой для цилиндрических тел двух типов, а также выявлен ряд новых эффектов, связанных с геометрией и структурой нетонких цилиндрических оболочек, в частности, исследована суперпозиция некоторых форм поперечных сечений и даны инженерные рекомендации относительно возможности использования упрощенных схем в зависимости от геометрических характеристик при расчетах на прочность.

Ключевые слова: пространственные задачи, нетонкие цилиндрические оболочки, напряженно-деформированное состояние, дискретные ряды Фурье, метод дискретной ортогонализации, двухпараметрическое отклонение от круговой формы, соединенные полугофры, ортотропные материалы, локальная нагрузка, сплошные цилиндры, сплайн-функции, суперпозиция форм поперечных сечений.

SUMMARY

Rozhok L.S. Three-dimensional problems of elasticity theory for cylindrical shells of complex shape and structure. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in physics and mathematics, speciality 01.02.04 "Mechanics of deformable solid". – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is devoted to development and improvement of the methods for investigating the stressed state of cylindrical bodies of two types – non-slim cylindrical shells of complex geometry and structure at specific boundary conditions on the ends, and isotropic continuous cylinders at various fixing of the ends under action of surface load, is 3D formulation.

The common technique is proposed that is based on the use of effective analytical methods for transformation of initial boundary problem, which is formulated in differential equations in partial derivatives, into a one-dimensional boundary problem for a system of ordinary differential equations with constant coefficients, which is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. For a cylindrical body of the first type, the method of function approximation with discrete Fourier series was developed, and for the first time the method of spline-functions was applied for a cylindrical body of the second type, with evaluation of indeterminate form in the geometrically singular point.

There were developed problem-oriented algorithms and implemented in the software for determination of stressed state due to applied surface load for cylindrical bodies of two types. The software allows making calculations in a wide range of geometrical and mechanical parameters of bodies under consideration.

With use of the developed technique, there were found solutions to new 3D problems of static linear elasticity theory on the stressed state of non-slim cylindrical shells at specific boundary conditions on ends, with account for essential curvilinearity of the cross section of the basic surface, anisotropy of the material, presence of layers through the thickness, local applied load, as well as for continuous isotropic cylinders at various types of fixing of the ends.

On the basis of the obtained solutions, for cylindrical bodies of two types there were found typical laws of distributions of displacement and stress fields due to the applied surface load, and new effects were revealed that are connected with the shape and structure of non-slim cylindrical shells.

Key words: 3D problems, non-slim cylindrical shells, stressed state, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method, two-parameter deviation from circular form, joined semi-corrugations, orthotropic material, local load, solid cylinders, spline-functions, superposition of cross sections shapes.

Підписано до друку 31 травня 2019р.

Формат 60x90¹/₁₆. Папір офсетний. Друк різографічний.

Кількість умовних друкованих аркушів 1,87

Тираж 100 екз. Замовлення №1772.

Суб'єкт видавничої діяльності занесено до державного реєстру №620049 13.10.2008.
ПРІНТЦЕНТР, м.Київ, вул. Політехнічна, 16