

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КІЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА

*Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису
УДК 539.3*

ГРИГОР'ЄВА ЛЮДМИЛА ОЛЕКСАНДРІВНА

ДИСЕРТАЦІЯ

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕлювання динамічних процесів
в п'єзoeлектричних тілах з урахуванням дисипативних
властивостей та неоднорідності матеріалу**

Спеціальність: 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ Людмила ГРИГОР'ЄВА

Науковий консультант: **ЯНЧЕВСЬКИЙ Ігор Владиславович,**
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Григор'єва Л.О. Чисельне моделювання динамічних процесів в п'єзоелектричних тілах з урахуванням дисипативних властивостей та неоднорідності матеріалу. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Міністерства освіти і науки України, м. Київ; Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, 2025.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної наукової проблеми побудови ефективної чисельної методики дослідження динамічного електромеханічного стану однорідних та неоднорідних п'єзоелектричних елементів конструкції з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу.

При проєктуванні п'єзоелектричних перетворювачів з підвищеними вимогами за критеріями надійності, узгодженості з навколишнім середовищем, діапазоном робочих частот, електроакустичним відгуком все частіше використовуються неоднорідні (багатошарові, композитні, функціонально-неоднорідні) п'єзоелементи. Чисельне моделювання дозволяє детально аналізувати складні фізичні процеси, які відбуваються в таких матеріалах, що може забезпечити точні прогнози їх поведінки в залежності від форми, матеріальних характеристик і умов експлуатації. Це, у свою чергу, сприяє оптимізації їх конструкцій та підбору оптимальних компонентів для досягнення бажаних характеристик. Врахування при моделюванні переходних процесів дисипативних властивостей матеріалу та контакту з зовнішнім середовищем дає змогу отримувати результати, більш наближені до реальності, та сприяти узгодженню аналітичних та експериментальних даних при резонансних та нестационарних збуреннях.

Актуальність чисельного дослідження п'єзоелектричних композитних матеріалів зростає в умовах сучасних технологічних викликів і потреби у нових матеріалах з унікальними властивостями. До таких матеріалів відносяться

п'єзоелектричні композити та функціонально-неоднорідні матеріали, що широко застосовуються в адаптивних системах, смарт-технологіях та мікроелектроніці. Широкий спектр застосування таких об'єктів вимагає побудови надійних універсальних засобів та підходів до моделювання динамічного електромеханічного стану п'єзоелементів.

Таким чином, створення нових математичних моделей та ефективних чисельних підходів дослідження динамічного стану електропружних елементів з врахуванням дисипативних властивостей і неоднорідності матеріалу, а також прогностичні розрахунки поведінки елементів конструкцій при гармонічних та нестационарних електричних та механічних навантаженнях, представляють актуальну наукову проблему сучасної механіки деформівного твердого тіла, дослідженню якої і присвячена дана дисертаційна робота.

Наукова новизна роботи полягає у створенні нових математичних моделей та чисельних підходів, що дозволяють описати роботу типових п'єзокерамічних перетворювачів при усталених та нестационарних навантаженнях з врахуванням неоднорідності та дисипативних властивостей матеріалу та встановлення нових закономірностей поширення збурень та затухання коливань в таких тілах. Даний підхід дозволяє отримувати розв'язки зв'язаних динамічних задач теорії електров'язкопружності з врахуванням неоднорідності матеріалу, що дозволяють науково обґрунтувати конструктивні рішення проектованих пристрій.

У представлений дисертаційній роботі досліджуються нестационарні та установлені коливання п'єзоелектричних однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних тіл з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу. Дано постановки нового класу задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища на основі теорії електропружності, механіки спадкового середовища, реологічних співвідношень, механіки композитів, гідропружності. Побудовано математичні моделі електров'язкопружних композиційних матеріалів багатошарової та функціонально-неоднорідної структури.

На базі описаної математичної моделі коливань п'єзоелектричних неоднорідних елементів канонічних форм побудовано ефективні чисельні підходи на основі скінченних різниць, варіаційних принципів, сплайн-апроксимацій, гамільтонового формалізму, методу скінченних елементів і т.ін. Для розв'язання отриманих систем рівнянь використовувалися метод дискретної ортогоналізації, явна та неявна чисельна схема, метод Ньюмарка, метод Рунге-Кутта та ін. За допомогою розвинутих чисельних підходів досліджуються усталені коливання однорідних та композитних циліндрів скінченної довжини; перехідні процеси в багатошарових та функціонально-неоднорідних поляризованих за товщиною плоских тілах, порожнистих циліндрах та кулях; планарні нестационарні коливання круглих та кільцевих п'єзокерамічних поляризованих за товщиною пластин при електричних та механічних навантаженнях; аналіз власних, гармонічних та нестационарних коливань функціонально-неоднорідних тіл у тривимірній постановці.

Для дослідження усталених віссесиметричних коливань однорідних та композитних п'єзоелектричних тіл розвинуто варіаційно-сплайновий метод та метод на основі гамільтонового формалізму. Для розв'язання отриманих краївих задач використовується метод дискретної ортогоналізації. Проведена реалізація та порівняння врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм. Розвинуті підходи адаптовано до дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних та композитних п'єзоелектричних циліндрів скінченної довжини. Описано залежність амплітудно-частотних характеристик від матеріалу та розмірів п'єзоелемента. З резонансних кривих визначаються дисипативні характеристики коливного процесу. Описано залежність гармонічних коливань циліндрів з п'єзоелектричних шаруватих композитних матеріалів від частки п'єзокераміки.

Запропоновано та реалізовано узагальнений чисельний спосіб дослідження пульсуючих коливань функціонально-неоднорідних тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм при нестационарних навантаженнях з урахуванням впливу акустичного середовища. Для врахування дисипативних властивостей запропоновано та реалізовано чотирипараметричну модель електров'язкопружності, що включає

в себе демпфування за Релеєм, в'язкопружну модель Фойгта, діелектричні та п'єзоелектричні втрати. Для врахування впливу акустичного середовища на коливання п'єзоелемента рівняння гідропружності розв'язуються в просторі перетворень Лапласа з послідовним виключенням змінних акустичного поля з граничних умов на поверхні випромінювача. Проводиться послідовне дослідження нестационарних коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів вказаної геометрії. Зроблено оцінку впливу зовнішнього пружного шару та акустичного середовища на коливання п'єзоелемента. Проводиться аналіз динамічного електромеханічного стану п'єзоелемента в режимі випромінення коливань та генерації різниці потенціалів. Визначено логарифмічні декременти для чисельної схеми та альфа- та бета- демпфування. Проводиться порівняння впливу механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат енергії з впливом акустичного середовища.

Розвинuto чисельний підхід до дослідження власних, усталених та нестационарних коливань п'єзоелектричних функціонально-неоднорідних тіл методом скінченних елементів. Функціональна неоднорідність матеріалу реалізується пошаровою модифікацією матеріальних характеристик скінченних елементів. Застосовуються програмно реалізовані механізми дисипації механічної та електричної енергії. Досліджується вплив функціональної неоднорідності та дисипації енергії на динамічні процеси в п'єзокерамічних неоднорідних секціонованих циліндрах скінченної довжини з жорсткої та м'якої п'єзокераміки. Визначаються частоти електричних резонансів та антирезонансів та відповідні коефіцієнти електромеханічного зв'язку. При гармонічних коливаннях визначаються дисипативні характеристики резонансних кривих з врахуванням демпфування за Релеєм, частотно-незалежного демпфування, комплексних модулів. При нестационарних збуреннях досліджується затухання коливань при врахуванні демпфування коливань за Релеєм в високодобротній та низькодобротній п'єзокераміці з врахуванням неоднорідності матеріалу.

Таким чином, у дисертації розроблено загальну методику моделювання динамічних процесів в однорідних, багатошарових, композитних та функціонально-

неоднорідних п'єзоелектричних тілах, що дозволяє досліджувати динамічний електромеханічний стан п'єзоелектричних перетворювачів при усталених та нестационарних навантаженнях. Основні наукові результати полягають у наступному:

- Дано постановки нового класу задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища на основі теорії електропружності, механіки спадкового середовища, реологічних співвідношень, механіки композитів, гідропружності в акустичному наближенні та ін.
- У рамках моногармонічного наближення розвинуто підходи до розв'язання динамічних задач електропружності на основі варіаційно-сплайнового методу та гамільтонового формалізму. Виконано чисельну реалізацію розвинутих підходів за допомогою методу дискретної ортогоналізації. Розвинуті підходи адаптовано до розрахунку гармонічних віссесиметричних коливань однорідних та композитних електров'язкопружних тіл.
- Розроблено новий узагальнений чисельний підхід для дослідження нестационарних пульсуючих коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форм з врахуванням механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат енергії. Розвинуто спосіб визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при механічних нестационарних навантаженнях
- Систематизовано підходи до врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм, тангенсів діелектричних та п'єзоелектричних втрат при усталених коливаннях. Запропоновано та досліджено чотирипараметричну модель електров'язкопружності при нестационарних навантаженнях.
- Запропоновано спосіб аналізу вільних, гармонічних та нестационарних коливань електров'язкопружних функціонально-неоднорідних п'єзоелементів складної форми за допомогою методу скінченних елементів. Ефективність

даного підходу апробовано на задачах дослідження електромеханічного стану секціонованих циліндрів.

Отримані результати можуть бути використані для модернізації існуючих та проектування нових однорідних та неоднорідних п'єзоперетворювачів. Розвинута методика є корисною при виборі матеріалів та їх комбінацій для п'єзоелектричних елементів конструкцій з метою задоволення необхідним експлуатаційним показникам; при оптимізації геометричних параметрів п'єзоелемента, їх умов навантаження і закріплення для максимально ефективного перетворення енергії; визначенням конфігурації згенерованого електричного сигналу при механічних навантаженнях; врахуванні дисипативних процесів для коректного моделювання та керування коливаннями п'єзоелемента.

Ключові слова: електров'язкопружність, динамічний електромеханічний стан, демпфування коливань, дисипативні властивості матеріалу, п'єзоелектричні функціонально-неоднорідні матеріали, електрорушійна сила.

SUMMARY

Hryhorieva L.O. Numerical modeling of dynamic processes in piezoelectric bodies taking into account dissipative properties and inhomogeneity of the material. – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

The dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.02.04 “Mechanics of a deformable solid” (131 - Applied Mechanics). – National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv; S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is devoted to solving of the current scientific problem of creating of an effective numerical methodology for studying the dynamic electromechanical state of homogeneous and inhomogeneous piezoelectric structural elements taking into account the dissipative properties of the material.

When designing piezoelectric transducers with increased requirements for reliability, environmental compatibility, operating frequency range, and electroacoustic response, heterogeneous (multilayer, composite, functionally heterogeneous) piezoelectric elements are increasingly used. Numerical modeling allows to conduct a detailed analysis of complex physical processes occurring in such materials, which can provide accurate predictions of their behavior under different loads and in different operating conditions. This, in turn, contributes to the optimization of their designs and the selection of optimal components to achieve the desired characteristics. Taking into account the dissipative properties of the material and contact with the acoustic environment at modeling transient processes allows to get results that are closer to reality and contributes to the agreement of experimental and analytical results for steady and non-stationary loads.

The relevance of numerical research of piezoelectric composite materials is growing in the context of modern technological challenges and the need for new materials with unique properties. Such materials include piezoelectric composites and functional inhomogeneous materials, which are widely used in adaptive systems, smart technologies and microelectronics. A wide range of applications of such objects requires the creating of reliable universal tools and approaches to investigating of the dynamic electro-mechanical state of piezoelectric elements.

Thus, the creation of new mathematical models and effective numerical approaches to the study of the dynamic state of electroelastic elements taking into account dissipative properties and material heterogeneity, as well as predictive calculations of the behavior of structural elements under harmonic and non-stationary electrical and mechanical loads, represent a relevant scientific problem of modern mechanics of deformable solids, the study of which this dissertation work is devoted to.

The scientific novelty of the work lies in the creation of new numerical approaches that allow to describe the operation of typical homogeneous and heterogeneous electroviscoelastic transducers under dynamical loads and establishing new patterns of propagation of disturbances and damping of oscillations in such bodies. This approach allows to obtain solutions of coupled dynamic problems of the theory of electroviscoelasticity,

taking into account the heterogeneity of the material, which allow scientifically justifying the design solutions of the projected devices.

In the presented dissertation work a new class of electroviscoelasticity problems for inhomogeneous bodies is formulated on the basis of the theory of electroelasticity, mechanics of the hereditary medium, rheological relations, mechanics of composites, and hydroelasticity. Mathematical models of electroviscoelastic composite materials of multilayer and continuously-inhomogeneous structure are constructed. The influence of the acoustic environment is taken into account through boundary conditions.

On the basis of the described mathematical dynamic models of piezoelectric inhomogeneous elements of canonical forms, effective numerical approaches based on finite differences, variational principles, spline approximations, Hamiltonian formalism, finite element method, etc. were developed. To solve the resulting systems of equations, the method of discrete orthogonalization, explicit and implicit numerical schemes, the Newmark method, the Runge-Kutta method, etc. were used. Using developed numerical approaches, steady oscillations of homogeneous and composite cylinders of limited length are studied; transient processes in multilayer and continuously-inhomogeneous thickness-polarized flat bodies, hollow cylinders and spheres; planar unsteady oscillations of round and annular thickness-polarized piezoceramic plates under electrical and mechanical loads; analysis of natural, harmonic and unsteady oscillations of continuously-inhomogeneous bodies in a three-dimensional setting.

To study steady axisymmetric oscillations of homogeneous and composite piezoelectric bodies, a variational spline method and an approach based on the Hamiltonian formalism have been developed. Obtained boundary value problems are solved using discrete orthogonalization method. The implementation and comparison of the dissipative characteristics of the material using complex modules, frequency-independent damping, and Rayleigh damping were carried out. The developed approaches were adapted to the study of harmonic oscillations of piezoelectric and composite piezoelectric cylinders of limited length. The dependence of the amplitude-frequency characteristics on the material and dimensions of the piezoelectric element is described. Dissipative characteristics of the vibration process are determined from the resonance curves. The

dependence of harmonic oscillations of cylinders made of piezoelectric layered composite materials on the proportion of piezoelectric ceramics is described.

A generalized numerical method for studying pulsating oscillations of functionally inhomogeneous bodies of flat, cylindrical and spherical shape under non-stationary loads, taking into account the influence of the acoustic environment, has been developed and implemented. To take into account the dissipative properties, a four-parameter model of electroviscoelasticity has been proposed and explored. It includes Rayleigh damping, the Kelvin-Voigt viscoelastic model, dielectric and piezoelectric losses. To take into account the influence of the acoustic environment on the piezoelectric element oscillations, the acoustic equations are solved in the space of Laplace transforms with the sequential exclusion of acoustic field variables from the boundary conditions on the surface of the actuator. A sequential study of non-stationary oscillations of homogeneous, multilayer and functionally inhomogeneous piezoelectric elements of the specified geometry is carried out. The influence of the external elastic layer and the acoustic environment on the oscillations of the piezoelectric element is assessed. The dynamic electromechanical state of the piezoelectric element in the mode of vibration radiation and potential difference generation is analyzed. There are determined logarithmic decrements for the numerical scheme and alpha and beta damping. The influence of mechanical, piezoelectric and dielectric energy losses is compared with the influence of the acoustic environment. A numerical approach to the study of natural, steady and non-stationary oscillations of piezoelectric functionally inhomogeneous bodies by the finite element method is developed. The functional heterogeneity of the material is implemented by layer-by-layer modification of the material characteristics of finite elements. Software-implemented mechanisms of mechanical and electrical energy dissipation are used. The influence of functional heterogeneity and energy dissipation on dynamic processes in piezoceramic inhomogeneous sectioned cylinders of finite length made of hard and soft piezoceramics is investigated. The frequencies of electrical resonances and anti-resonances and the corresponding coefficients of electromechanical coupling are determined. In the case of harmonic oscillations, the dissipative characteristics of resonance curves are determined taking into account Rayleigh damping, frequency-independent damping, and complex moduli. In the case of non-stationary disturbances, the

damping of oscillations is investigated taking into account Rayleigh damping of oscillations in hard and soft piezoceramics.

Thus, the dissertation develops a general methodology for modeling dynamic processes in homogeneous, multilayer, composite and functionally inhomogeneous piezoelectric bodies, which allows studying the dynamic electromechanical state of piezoelectric transducers under steady and non-steady loads. The main scientific results are as follows:

- A new class of electroviscoelasticity problems with accounting of the material heterogeneity, its dissipative properties and the influence of the acoustic environment is formulated on the base of the theory of electroelasticity, mechanics of the hereditary medium, rheological relations, mechanics of composites, hydroelasticity and so on.
- Within the framework of the monoharmonic approximation, approaches to solving of dynamic electroelasticity problems based on the variational spline method and Hamiltonian formalism were developed. Indegration of the obtained boundary value problems was implemented using the discrete orthogonalization method. The developed approaches were adapted to the calculation of harmonic axisymmetric vibrations of homogeneous and composite electroviscoelastic bodies.
- A way for analyzing free, harmonic and non-stationary vibrations of electroviscoelastic functionally inhomogeneous piezoelectric elements of complex shape using the finite element method is proposed. The effectiveness of this approach was tested on the problems of studying the electromechanical state of sectioned cylinders.
- A new generalized numerical approach was developed for studying non-stationary pulsating vibrations of homogeneous, multilayer and functionally inhomogeneous piezoelectric elements of flat, cylindrical and spherical shapes, taking into account the dissipative properties of the material. A method for determining the electromotive force of piezoelectric elements under mechanical non-stationary loads has been developed
- Approaches to taking into account the dissipative characteristics of the material using complex modules, frequency-independent damping, Rayleigh damping, dielectric and piezoelectric losses under steady oscillations have been systematized. A four-parameter model of electroviscoelasticity at non-stationary oscillations has been proposed and investigated.

The obtained results can be used to modernize existing and design new homogeneous and heterogeneous piezoelectric transducers. The developed methodology is useful in selecting materials and their combinations for piezoelectric elements of structures in order to meet the required performance indicators; in optimizing the geometric parameters of the piezoelectric element, their loading and mounting conditions for the most efficient energy conversion; in determining the configuration of the generated electrical signal under mechanical loads; in taking into account dissipative processes for correct modeling and control of piezoelectric element oscillations.

Keywords: electroviscoelasticity, dynamic electromechanical state, damping of vibrations, material dissipative properties, piezoelectric functional-inhomogeneous materials, electromotive force.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Гармонічні коливання п'єзокерамічних секціонованих функціонально-градієнтних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Mech. Adv. Technol.* 2024. Т. 8, № 1. С. 98–107.
2. Yanchevskyi I. V., Hryhorieva L. O. Nonstationary Vibrations of a Viscoelastic Functionally Graded Cylinder. *International Applied Mechanics.* 2023. Vol. 59. P. 708–717. (Scopus)
3. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання п'єзо-електричних перетворювачів з функціонально-градієнтних матеріалів. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2022. № 35. С. 29–41.
4. Grigoryeva L., Ivanenko P., Korbakov O. Generation of energy in console piezoelectric energy harvesters. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 108. P. 337–348. (Web of Science)
5. Hryhorieva L., Yanchevskyi I. Influence of material functional heterogeneity on non-stationar oscillations of piezoceramic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 109. P. 359–368. (Web of Science)

6. Григор'єва Л. О., Безверхий О. І. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій*. 2020. № 31. С. 44–54.
7. Grigoryeva L.O. Transient responses in piezoceramic multilayer actuators taking into account external viscoelastic layer. *Strength of materials and theory of structures*. 2020. No. 105. P. 255–266. (Web of Science)
8. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Comparative analysis of two methods used for the investigation of harmonic vibrations of piezoceramic cylinders. *Journal of mathematical sciences*. 2019. Vol. 240, no. 2. P. 129–140. (Scopus)
9. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Підхід до розрахунку гармонічних коливань електропружних циліндрів. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2018. Т. 23, № 1. С. 39–45.
10. Grigoryeva L. O. Calculation of Cylindrical Multilayer Electromechanical Transducer at Different Polarization Types in Non-stationary Modes. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2018. Vol. 54, no. 1. P. 5–11.
11. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Варіаційно–сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Onip матеріалів і теорія споруд*. 2017. № 98. С. 149–161. (Web of Science)
12. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Електромеханічна чутливість круглих та кільцевих п'єзоелектричних тонких пластин при механічному збуренні. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2017. Т. 22, № 5. С. 40–46.
13. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Застосування гамільтонового формалізму для дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2017. Т. 38, № 2. С. 23–28.
14. Григор'єва Л. О. Нестаціонарні коливання плоского багатошарового п'єзоелемента з урахуванням пружного підкріплюючого шару і акустичного середовища. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико–математичні науки*. 2017. № 1. С. 103–109.

15. *Bezverhyi O. I., Grigoryeva L. O., Grigoryev S. A.* Resonance radial oscillations of a piezoceramic cylinders and spheres taking into account electromechanical losses. *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2016. Vol. 81, no. 1. P. 41–48.
16. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2015. № 24. С. 5–17.
17. *Григор'єва Л. О., Кириченко А. А., Бабкова Н. О.* Визначення електрорушійної сили поляризованої по товщині кільцевої пластини при механічному збуренні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 47–55.
18. *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Babkova N. O.* Electrically Excited Nonstationary Vibrations of Thin Circular Piezoelectric Plates. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 406–411. (Scopus)
19. *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kirichenko A. A.* Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 274–280. (Scopus)
20. *Шульга Н. А., Григорьева Л. О., Ластивка И. О., Бабкова Н. О.* Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин. *Теоретич. и прикладная механика*. 2011. Т. 48, № 2. С. 98–104.
21. *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O.* Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 2. P. 177–185. (Scopus)
22. *Shulga M. O., Grigoryeva L. O.* Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical vibrations: types, testing, and analysis*. N.Y, 2011. P. 179–204. (Scopus)
23. *Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kornienko V. F.* Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 1. P. 62–69. (Scopus)
24. *Шульга М. О., Григор'єва Л. О.* Про коливання пружних шарів з викривленими границями. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2010. № 84. С. 120–126.

Наукові праці за доповідями на міжнародних і вітчизняних конференціях:

25. Григор'єва Л. О. Усталені коливання електров'язкопружного композитного циліндра. *Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» : Матеріали доп.*, м. Київ, 8–10 жовт. 2024 р. 2024. С. 24–26.
26. Григор'єва Л. О. М'яка та тверда п'езокераміка в функціонально-градієнтних п'езокерамічних перетворювачах. *XIX міжнародна науково-технічна конференція “Вібрації в техніці та технологіях” : Матеріали конф.*, м. Київ, 23–25 трав. 2023 р. Київ, 2023. С. 30–32.
27. Янчевський І. В., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних коливань електро-в'язко-пружних функціонально-градієнтних тіл. *Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки»*, м. Київ. Київ, 2023. С. 123-124.
28. Hryhorieva L. O. CAE Simulation of console piezoelectric energy harvesters. Modern directions of scientific research development: *Proceedings of the 15th International scientific and practical conference*, Chicago. Chicago, 2022. С. 148–153.
29. Григор'єва Л. О. Узагальнений підхід до розрахунку нестационарних коливань багатошарових п'езокерамічних перетворювачів. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2021» : матеріали конф.*, м. Дніпро, Кам'янське. Дніпро, 2021. С. 20–21.
30. Grigoryeva L. O. Piezoelectric devices for Energy harvesting in building structures. *VI International Scientific and Practical Conference «Transfer of Innovative technologies – 2021» : Conference proceedings*. Kyiv, 2021. P. 22–24.
31. Grigoryeva L. O. Vibrations of piezoceramic multilayer actuators with elastic matching layers. *International scientific-practical conference “International scientific integration–2020”*: *Conference proceedings, 9–10 November 2020*. Kyiv, 2020. P. 58–62.
32. Григор'єва Л. О. Резонансні коливання п'езокерамічних циліндричних перетворювачів з врахуванням втрат енергії. *Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*, м. Одеса. Одеса, 2019. С. 345–348.

33. Grigoryeva L. O. Piezoelectric multilayer actuators in acoustic control devices for building structures. BMC-2018 : International Scientific-Practical Conference of young scientists "Build-Master-Class-2018", Kyiv, November 2018. P. 198–199.
34. Григор'єва Л. О. Поширення нестационарних збурень в багатошаровому п'єзокерамічному циліндрі при електричному навантаженні. *Тези доповідей IV Міжнародної науково–практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*. Одеса, 2017. С. 185–186.
35. Grigoryeva L. O. Numerical investigation method of vibrations of piezoceramic transformers. *Матеріали XVIII міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука, 7–10 жовтня 2017 року, Київ*. Т. 1. Київ, 2017. Р. 87–90.
36. Григор'єва Л. О. Застосування варіаційних принципів та сплайн апроксимацій при вивченні товщинних нестационарних коливань п'єзокерамічних тіл. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2016» : матеріали конф*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2016. С. 48.
37. Безверхий А. И., Григорьева Л. О. Нестационарные электроупругие колебания сферического пьезокерамического преобразователя с импедансными граничными условиями // *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2015» : матеріали конф*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2015.
38. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних електропружинних коливань п'єзокерамічної кулі в акустичному середовищі. Акустичний симпозіум «Консонанс–2015», м. Київ. Київ, 2015. С. 20–25.
39. Григор'єва Л. О. Нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних та механічних збуреннях. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2014» : матеріали конф.*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2014.

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

- $\hat{\sigma}$, $\hat{\epsilon}$ – тензори напружень та деформацій
- $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ – псевдовектори (6×1) напружень та деформацій
- $\check{\sigma}$, $\check{\epsilon}$ – псевдовектори (9×1) узагальнених напружень та деформацій
- \mathbf{E} , \mathbf{D} – вектори напруженості електричного поля та електричної індукції
- \mathbf{B} , \mathbf{H} – вектори напруженості магнітного поля та магнітної індукції
- φ – електричний потенціал
- $\sigma_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{D}_{\mathbf{n}}$ – вектори напружень та електричної індукції на майданчику з нормаллю \mathbf{n}
- \mathbf{c}^E – матриця (6×6) модулів пружності при сталому електричному полі
- \mathbf{e} – матриця (6×3) п'єзоелектричних модулів
- $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ – матриця (3×3) коефіцієнтів діелектричної проникності при постійних деформаціях
- $\tilde{\mathbf{c}}^E$, $\tilde{\mathbf{e}}$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^S$ – матриці комплексних модулів
- i – уявна одиниця
- I – електричний струм
- q_s – щільність поверхневого заряду
- ∇ , ∇^2 – оператор Гамільтона та оператор Лапласа
- Δ – крок за просторовою координатою
- Ξ – диференціальний оператор
- ψ – скалярний потенціал акустичного поля, коефіцієнт поглинання
- ρ_a , c_a , z_a – густина, швидкість поширення і чутливість акустичного середовища
- ξ_d – частотно незалежний коефіцієнт затухання
- α_d , β_d – коефіцієнти демпфування за Релеєм (коефіцієнти механічних втрат)
- γ_d , λ_d – коефіцієнти діелектричних та п'єзоелектричних втрат
- $tg\delta$ – тангенс діелектричних втрат
- Q_d (Q_m), Q_e – механічна та електрична добротність матеріалу

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АЧХ – амплітудно-частотна характеристика

ВСМ – варіаційно-сплайновий метод

ВРМ – варіаційно-різницевий метод

ЕАП – електроактивний полімер

ЕРС – електрорушійна сила

КЕМЗ – коефіцієнт електромеханічного зв’язку

МЕМА – метод електромеханічних аналогій

МЕМС – мікроелектромеханічні системи

МСЕ – метод скінченних елементів

МСР – метод скінченних різниць

ПВДФ (PVDF) – полівінілденфторид

ПЕП – п’зоелектричний перетворювач

СРТГ – система рівнянь типу Гамільтона

ФГМ – функціонально-градієнтний матеріал

ФНП – функціонально-неоднорідний п’зоелектрик

ФН – функціонально-неоднорідний

РЗТ (ЦТС) – цирконат-титанат свинцю

ЗМІСТ

ВСТУП.....	24
------------	----

РОЗДІЛ 1. СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ З МЕХАНІКИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ ...33

1.1. П'єзоелектричні матеріали та їх властивості	33
1.1.1. П'єзоелектрична кераміка та полімери	34
1.1.2. Композитні та функціонально-неоднорідні матеріали.....	39
1.2. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів.....	44
1.2.1. Типи п'єзоелектричних перетворювачів та пристрої на їх основі	45
1.2.2. Експериментальні методи дослідження п'єзоелементів	50
1.3. Усталені режими роботи п'єзоелектричних тіл.....	54
1.3.1. Дослідження динаміки однорідних та неоднорідних елементів конструкцій	55
1.3.2. Динамічні процеси з врахуванням дисипації енергії	60
1.4. Коливання п'єзоелектричних тіл при нестационарних навантаженнях	66
1.4.1. Аналітичні та чисельно-аналітичні методи досліджень	66
1.4.2. Чисельні методи розв'язання задач електропружності	70
1.5. Задачі та структура дисертації.....	71

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ГІДРОЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ.....75

2.1. Співвідношення теорії пружності, електродинаміки та акустики.....	75
2.1.1. Основні положення теорії пружності.....	75
2.1.2. Вхідні співвідношення механіки композитів	77
2.1.3. Електродинамічні співвідношення для речовини	79
2.1.4. Поширення збурень в акустичному середовищі	85
2.2. Основи теорії електропружності	89
2.2.1. Матеріальні співвідношення для п'єзокераміки на основі термодинамічних потенціалів	89

2.2.2. Варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського.	
Постановка початково-крайових задач електропружності	97
2.2.3. Співвідношення лінійної теорії електропружності	
в криволінійних координатах.....	100
2.2.4. Математична модель п'єзоелектричних композитів	104
2.2.5. Електричний резонанс та антирезонанс	106
2.3. Врахування дисипативних властивостей матеріалу	108
2.3.1. Розсіювання енергії в механічних системах	108
2.3.2. Комплексні модулі для п'єзоелектриків	118
2.3.3. Демпфування коливань за Релеєм в п'єзоелектричному середовищі	125
РОЗДІЛ 3. УСТАЛЕНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ОДНОРІДНИХ ТА КОМПОЗИТНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ЦИЛІНДРІВ	131
3.1. Чисельна методика розв'язання	131
3.1.1. Варіаційно-сплайновий метод розв'язання задач електропружності	131
3.1.2. Підхід на основі гамільтонового формалізму.....	139
3.2. Гармонічні коливання п'єзоелектричних циліндрів	149
3.2.1. Коливання однорідних п'єзокерамічних циліндрів	
при моногармонічних навантаженнях.....	149
3.2.2. Резонансні коливання з врахуванням дисипативних властивостей	
матеріалу	154
3.3. Усталені коливання композитних п'єзоелектричних циліндрів	159
3.3.1. Математичні моделі визначення ефективних матеріальних	
характеристик композитних матеріалів	160
3.3.2. Гармонічні коливання композитних п'єзоелектричних циліндрів ...	167
3.4. Висновки до розділу 3	172
РОЗДІЛ 4. НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ.....	175
4.1. Дослідження пульсуючих коливань тіл плоскої, циліндричної	
та сферичної форм	175

4.1.1. Узагальнений підхід до дослідження коливань тіл різної геометрії..	175
4.1.2. Чотирипараметрична модель електров'язкопружного демпфування коливань	184
4.1.3. Чисельний метод розв'язання	186
4.2. Коливання багатошарових п'єзоелементів із зустрічною поляризацією шарів	191
4.2.1. Поширення збурень в багатошарових тілах плоскої, циліндричної та сферичної форми.....	192
4.2.2. Коливання багатошарових п'єзоелементів з зовнішнім в'язкопружним шаром	200
4.3. Переходні процеси в функціонально-неоднорідних п'єзоелектричних тілах	203
4.3.1. Нестаціонарні коливання п'єзоелементів різної геометрії, що комбінують тверду та м'яку п'єзокераміку	203
4.3.2. Порівняння альфа- та бета-демпфувань неоднорідних тіл при електричних та механічних збуреннях	210
4.3.3. Нестаціонарні коливання функціонально-неоднорідних циліндрів з врахуванням чотирипараметричної моделі втрат енергії та впливу акустичного середовища	217
4.4. Нестаціонарні коливання тонких круглих та кільцевих в плані п'єзоелектричних пластин	222
4.4.1. Планарні коливання пластини при електричному збуренні	223
4.4.2. Визначення електрорушійної сили пластини при планарному механічному збуренні	229
4.4.3. Електромеханічна чутливість пластини при осьовому механічному навантаженні.....	236
4.5. Висновки до розділу 4	243
РОЗДІЛ 5. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ.....	246
5.1. Метод скінченних елементів в задачах електров'язкопружності	246

5.1.1. Побудова рівнянь МСЕ на основі інтегрального принципу Гамільтона-Остроградського	247
5.1.2. Особливості побудови програм розрахунку неоднорідних п'єзоелектричних тіл з врахуванням демпфування коливань	257
5.2. Аналіз динаміки функціонально-неоднорідних секціонованих циліндрів з коловою поляризацією	267
5.2.1. Скінченно-елементна модель секціонованого циліндра	267
5.2.2. Аналіз статичного електромеханічного стану.....	270
5.2.3. Визначення резонансних та антирезонасних частот	275
5.2.4. Аналіз гармонічних коливань	277
5.2.5. Нестаціонарні коливання п'єзоелемента з врахуванням демпфування коливань	285
5.3. Висновки до розділу 5	291
ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ.....	293
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	297
ДОДАТКИ	329
Додаток А. Список публікацій здобувача	328
Додаток Б. Матеріальні константи для п'єзокерамічних матеріалів різних кристалічних структур	333
Додаток В. Комплексні модулі для різних п'єзокерамічних матеріалів	334
Додаток Г. Комплексні модулі для п'єзоелектричних полімерів та наповнювачів композитів	335
Додаток Д. Комплексні модулі для промислових PZT та композитів на їх основі	336
Додаток Е. Акти впровадження дисертації.....	338

ВСТУП

Електромеханічні перетворювачі є невід'ємною частиною багатьох електронних пристройів і систем різного призначення та умов функціонування. П'єзоелементи використовуються в резонаторах, фільтрах, датчиках, актуаторах, ультразвукових випромінювачах та приймаючих, акустичних та гідроакустичних пристроях, годинниках, лініях затримки, збірниках механічної енергії, в медичних діагностичних та імплантованих пристроях. Як ультразвукові перетворювачі малої потужності вони знайшли застосування в приборах реєстрації сейсмічних коливань, в дефектоскопії, в пристроях моніторингу та неруйнівного контролю стану конструкцій, в ультразвукових лініях затримки сигналу. Інші області застосування включають п'єзотрансформатори для мікроелектроніки, датчики деформацій, швидкостей, пришвидшень, вимірювачі механічних властивостей твердих тіл та ін.

В залежності від режиму роботи пристрою п'єзоелементи можуть зазнавати статичних, періодичних, нестационарних електричних або механічних навантажень, виступати як сенсори або актуатори. Такий широкий спектр застосування вимагає для забезпечення оптимальної роботи у заданих умовах побудови надійних універсальних методів та підходів для розрахунку динамічного електромеханічного стану п'єзоелементів. Врахування при проектуванні перехідних процесів, що виникають внаслідок дисипації енергії або контакту з зовнішнім середовищем, дає змогу отримувати результати, більш наближені до реальності, або сприяти узгодженню експериментальних та аналітичних результатів.

Фундаментальні дослідження динаміки електропружиних та електров'язкопружиних однорідних та неоднорідних конструкцій проводились в роботах А. Е. Бабаєва, В. Т. Грінченка, О. Я. Григоренка, В. С. Дідковського, Я. О. Жука, В. Г. Ка RNAХОВА, І. Ф. Киричка, А. Г. Лейко, І. А. Лози, В. Г. Савіна, А. Ф. Улітка, В. М. Шарапова, М. О. Шульги, І. В. Янчевського, I. J. Busch-Vishniac, A. Erturk, A. J. Fleming, D. J. Inman, S. O. Moheimani, K. Uchino, J. S. Yang та інших.

Врахування зв'язаності полів, неоднорідності матеріалу, внутрішніх механізмів розсіювання енергії електромеханічних коливань, контакту з навколошнім середовищем, є складною математичною задачею, постановка якої вимагає великої кількості матеріальних характеристик та зазвичай розв'язується чисельно.

Використання сучасних матеріалів та технологій виготовлення п'єзоелементів дозволяють створювати багатошарові, композитні, неоднорідні, функціонально-неоднорідні п'єзоелементи з різним способом електродування та поляризації, що дає змогу керувати робочими характеристиками п'єзоелементів ще на етапі проектування.

Сучасний рівень розвитку технологічних процесів дає змогу синтезувати неоднорідні матеріали з поступовою (градієнтою) зміною фізико-механічних властивостей. Такі матеріали називаються функціонально-градієнтними (ФГМ) та отримуються при механічному компонуванні матеріалів з різко відмінними значеннями фізико-хімічних параметрів, наприклад, при спайці кераміки з металом або полімером. Функціонально-градієнтні п'єзоелектрики використовуються для сенсорів, актуаторів, збирачів енергії, оскільки завдяки компонуванню можна позбавитися недоліків та підсилити переваги матеріалів, що використовуються. Основна сфера застосування – матеріали і пристрой, що працюють в екстремальних умовах (значні градієнти механічних навантажень та температури).

Проектування нових неоднорідних п'єзоелектричних елементів конструкцій пов'язане з необхідністю розв'язання таких задач, як побудова математичних моделей багатошарових та функціонально-неоднорідних перетворювачів з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу, чисельна їх реалізація, дослідження збіжності та верифікація результатів, задача аналізу динамічного електромеханічного стану п'єзоелемента, аналіз залежності динамічних характеристик елемента від його розмірів, конструкційних особливостей та робочого середовища.

Врахування дисипативних властивостей п'єзоелектричних тіл є критично важливим при моделюванні динамічних процесів з кількох причин:

- *Втрата енергії*: Дисипативні ефекти, такі як тертя, внутрішня в'язкість, дисипація електричної енергії та неідеальне перетворення енергії з електричної в

механічну та навпаки, призводять до втрат енергії в п'єзоелектричних матеріалах. Без урахування цих втрат моделі можуть давати надмірно оптимістичні оцінки щодо ефективності перетворення енергії, що в свою чергу вплине на прогнозовану продуктивність пристрою.

- *Динамічна стабільність:* Дисипативні властивості впливають на стійкість системи в динамічних умовах. В моделюванні важливо враховувати, як матеріали реагують на коливання та імпульси, оскільки дисипація може змінювати частотні характеристики системи і вести до неоднорідності в реакціях.
- *Термін часу та затримки:* Дисипативні процеси можуть створювати затримки в реакціях п'єзоелектричних матеріалів на зовнішні подразники. При розвитку моделей, які спрямовані на контроль механічних коливань або електричних сигналів, ці затримки можуть суттєво спотворити реальні результати та інтерпретації.
- *Моделювання циклічних навантажень:* У промислових застосуваннях, де п'єзоелектричні елементи зазнають циклічних навантажень (наприклад, в актуаторах і сенсорах), важливо враховувати накопичення пошкоджень і утоми матеріалів, які можуть збільшити дисипативні втрати і вплинути на довговічність.
- *Точність симуляцій:* При виконанні точних числових розрахунків і моделювань чисельними методами, врахування дисипативних ефектів дозволяє отримати більш реалістичні результати, що зменшує розбіжності між теорією та експериментальними даними.
- *Адаптація до змінюваних умов:* Врахування дисипативних властивостей дає можливість модифікувати моделі під конкретні умови експлуатації, що є важливим для розробки адаптивних систем, які можуть реагувати на зміни навколоїшніх умов.

Отже, урахування дисипативних властивостей п'єзоелектричних тіл є ключовим для розробки надійних і ефективних моделей, що правильно описують реальні динамічні процеси й забезпечують адекватну продуктивність пристрійв.

Математична модель елементів конструкції, які експлуатуються при динамічних навантаженнях, базується на реальних фізичних властивостях матеріалів, що визначаються експериментально. Особливо актуальним даний підхід є для елементів конструкцій з в'язкопружніх та п'єзоелектричних матеріалів, поведінка яких описується моделлю електров'язкопружного тіла. Проте експериментальні дослідження у цьому напрямі обмежуються описом в'язкопружних властивостей конструкцій простої форми при одночастотних навантаженнях. Встановлено, що п'єзоелектрики підпорядковуються властивостям спадкового середовища, для опису яких потрібно знати пружні, діелектричні та п'єзоелектричні функції релаксації для середовища. При усталених коливаннях ці функції зводяться до комплексних модулів. Проте наявність в науковій літературі повного набору комплексних модулів лише для окремих матеріалів значно обмежує коло застосування запропонованого підходу. Врахування дисипативних втрат в електров'язкопружних тілах при коливаннях, відмінних від гармонічних, а також методи аналізу нестационарних коливань при врахуванні пружних, п'єзоелектричних та діелектричних властивостей матеріалів є мало розвинутим напрямком електров'язкопружності. В зв'язку з цим виникає необхідність розвитку інших підходів врахування дисипативних втрат при нестационарних навантаженнях, що ґрунтуються на загально-прийнятих в механіці деформівного твердого тіла методах і підходах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, результати яких викладені в дисертаційній роботі, передбачені програмами і планами наукових досліджень з природничих наук НАН України і частково увійшли до проміжних звітів за науково-дослідною роботою Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка за темами «Коливання п'єзокерамічних перетворювачів енергії при гармонічних і нестационарних збуреннях з урахуванням електромеханічних втрат» (№ д. р. 0115U005706, 2015 – 2020 рр.) та «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траекторій механічних систем» (№ д. р. 0117U000700, 2017 – 2021 рр.). Окремі результати роботи внесені до звіту з науково-дослідної роботи за темою «Розробка аналітично-чисельних методів розрахунку елементів конструкцій на

силові, кінематичні, динамічні та температурні впливи» (№ 0118U002360, 2018 – 2023 рр.), що виконувалася на кафедрі опору матеріалів Київського національного університету будівництва і архітектури.

Мета даної роботи – розробка та апробація ефективної чисельної методики розв’язання динамічних задач електров’язкопружності з врахуванням неоднорідності матеріалу, дослідження на їх основі переходних процесів в п’єзоелектричних однорідних, композитних та функціонально-неоднорідних елементах конструкцій. Досягнення поставленої мети передбачає розв’язання наступних **задач дослідження**:

- Постановка нового класу задач електров’язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п’єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища.
- Побудова ефективних чисельних підходів дослідження усталених осесиметричних коливань однорідних та композитних п’єзоелектричних тіл обертання з урахуванням дисипативних властивостей матеріалу.
- Розробка узагальненого підходу розрахунку зв’язаних нестационарних осесиметричних задач для багатошарових та функціонально-неоднорідних п’єзоелектричних тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм з урахуванням дисипативних властивостей матеріалу.
- Виявлення нових закономірностей переходних процесів в багатошарових та функціонально-неоднорідних плоских тілах, циліндрах та кулях з урахуванням електромеханічних втрат енергії та впливу зовнішнього акустичного середовища.
- Розробка та реалізація алгоритму розрахунку планарних осесиметричних коливань тонких круглих та кільцевих поляризованих за товщиною п’єзоелектричних пластин при електричних та механічних нестационарних навантаженнях.

- Розвиток підходу до дослідження динаміки функціонально-неоднорідних електров'язкопружних елементів конструкцій в тривимірній постановці методом скінчених елементів.

Об'єктом дослідження є нестационарні та усталені коливання однорідних та неоднорідних електров'язкопружних тіл при електричних та механічних навантаженнях.

Предметом дослідження є чисельні методи розв'язання широкого класу динамічних задач електропружності для п'єзоелектричних конструктивних елементів з урахуванням неоднорідності матеріалу та дисипативних втрат.

Методологія досліджень будується на класичних динамічних співвідношеннях лінійної теорії електропружності, теорії спадкового середовища, теорії коливань суцільного середовища. Для розв'язання сформульованих в роботі задач використовувалися скінченно-різницеві апроксимації; неявна та явна різницева схема за часовою координатою; методи Ньюмарка та Рунге-Кутта; основи гамільтонового формалізму; варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського; сплайн-апроксимації; метод дискретної ортогоналізації; метод скінчених елементів; інтегральне перетворення Лапласа за часом. Врахування дисипативних властивостей матеріалу реалізується за допомогою комплексних модулів; моделі демпфування коливань за Релеєм, що включає в себе альфа-демпфування та бета-демпфування; модель демпфування Фойгта-Кельвіна; частотно-незалежного демпфування; тангенса діелектричних втрат; за допомогою запропонованої в роботі чотиріпараметричної математичної моделі електров'язкопружного демпфування коливань.

Наукова новизна роботи полягає у створенні нових чисельних методик та підходів, що дозволяють описати роботу типових п'єзокерамічних перетворювачів при усталених та нестационарних навантаженнях з врахуванням неоднорідності та дисипативних властивостей матеріалу. Даний підхід дозволяє отримувати розв'язки зв'язаних динамічних задач теорії електров'язкопружності з врахуванням неоднорідності матеріалу, що дозволяють науково обґрунтувати конструктивні рішення проектованих приладів.

У роботі отримано такі **нові наукові результати**:

- Дано постановки нового класу задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища.
- Побудовано методику розв'язання динамічних віссесиметричних задач електропружності на основі варіаційно-сплайнового методу. Виконано її чисельну реалізацію за допомогою методу дискретної ортогоналізації.
- Розвинуто підхід до дослідження гармонічних коливань п'єзоелектричних тіл обертання на основі гамільтонового формалізму. Підхід адаптовано до дослідження коливань електров'язкопружних однорідних та композитних циліндрів обмеженої довжини.
- Систематизовано підходи до врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм, діелектричних та п'єзоелектричних втрат.
- Запропоновано та досліджено нову чотирипараметричну модель електров'язкопружності врахування дисипативних властивостей матеріалів при нестационарних навантаженнях.
- Розроблено узагальнений чисельний підхід для дослідження нестационарних пульсуючих коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форми з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу. Розвинуто спосіб визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при нестационарних механічних навантаженнях.
- Запропоновано підхід до аналізу динаміки функціонально-неоднорідних п'єзоелементів складної форми за допомогою методу скінченних елементів. Ефективність даного підходу апробовано на задачах дослідження електромеханічного стану секціонованих циліндрів.

Достовірність отриманих в дисертації результатів визначається коректністю постановки задач, контролюваною точністю числових розрахунків,

перевіркою практичної збіжності для конкретних задач, узгодженістю окремих результатів роботи з відомими в літературі та побудованими точними і чисельними розв'язками одновимірних задач електропружності, відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям поширення електропружних коливань в п'єзокерамічних тілах.

Практичне значення отриманих наукових результатів полягає в можливості їх застосування в інженерній практиці при проєктуванні конкретних композиційних і п'єзоелектричних елементів конструкцій, що перебувають під дією динамічних механічних і електричних збурень; в безпосередньому використанні отриманих результатів для розробки, модернізації та раціональної експлуатації п'єзокерамічних елементів конструкцій.

Реалізовані в роботі підходи можуть бути застосовані для симуляції поведінки неоднорідних п'єзокерамічних елементів конструкцій при усталених та нестационарних навантаженнях, а також оптимізації матеріальних і геометричних параметрів та умов навантаження п'єзоелементів. Описані в роботі закономірності коливань п'єзоелементів з функціонально-неоднорідних матеріалів на основі сегнетотвердої та сегнетом'якої п'єзокераміки, а також композиту п'єзокераміки з п'єзополімерами можуть бути безпосереднього використані при проєктуванні елементів конструкцій. Запропонований спосіб врахування дисипативних властивостей матеріалів та взаємодії з акустичним середовищем дозволяють знайти резональні та антирезонансні частоти, коефіцієнти електромеханічного зв'язку, акустичну потужність перетворювача, час затухання нестационарних збурень. На основі отриманих розрахункових співвідношень розроблено програмне забезпечення, що дозволяє проводити чисельний аналіз електромеханічних процесів у п'єзокерамічних тілах. Розроблені в дисертації підходи, програми і досліджені закономірності коливного процесу з демпфуванням коливань були використані в ДП «КНДІ Гідроприладів» для розрахунку гідроакустичних перетворювачів циліндричної форми та в навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури.

Апробація результатів досліджень. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на 15 наукових конференціях, зокрема на Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2014, 2015, 2016 рр.; Дніпро, Кам'янське, 2021 р.); Міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, НТУУ «КПІ», 2012, 2017 рр.); Акустичному симпозіумі «Консонанс–2015» (Київ, Інститут гідромеханіки НАНУ, 2015 р.); Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, ОДАБА, 2017, 2019 рр.); International scientific-practical conference “International scientific integration – 2020” (Сіетл, Вашингтон, США, 2020 р.); International Scientific and Practical Conference «Transfer of Innovative technologies – 2021» (Київ, КНУБА, 2021 р.); International scientific and practical conference «Modern directions of scientific research development» (Чикаго, США, 2022 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Вібрації в техніці та технологіях» (Київ, КНУБА, 2023 р.); Міжнародній науковій конференції «Актуальні проблеми механіки» (Київ, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 2023 р.); Міжнародній науковій конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 2024 р.).

Результати дисертаційної роботи в повному обсязі доповідались і обговорювались на засіданні кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” (керівник — д.т.н., проф. Пискунов С. О.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник — чл.-кор. НАН України Жук Я. О.), науковому семінарі відділу теорії коливань Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Кубенко В. Д.), секції «Динаміка та стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Мартинюк А. А.), а також загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Назаренко В. М.), і одержали позитивні оцінки.

Публікації та особистий внесок здобувача. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 39 наукових працях. Основні публікації за темою дисертації [1-24] видано у фахових виданнях, затверджених ДАК України, з яких 11 робіт проіндексовані в наукометричних базах Scopus та Web of Science. Роботи [25-39] – матеріали і тези доповідей на Міжнародних конференціях, симпозіумах і семінарах. 15 робіт опубліковано самостійно. В роботах, виконаних у в співавторстві з М. О. Шульгою, І. В. Янчевським, О. І. Безверхим, співавторам належать постановка задач, запропонований підхід до їх розв'язання, а автору належить розробка алгоритму, реалізація чисельного підходу на ЕОМ та аналіз отриманих результатів. В роботах з іншими співавторами автору належить постановка задач, запропонований підхід до їх розв'язання, розробка чисельного алгоритму.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи складає 340 сторінок, включаючи 19 сторінок анотації, 83 рисунки, 7 таблиць, бібліографічний список із 329 позицій на 32 сторінках та 6 додатків на 13 сторінках. Обсяг основного тексту дисертації становить 276 сторінок.

Авторка висловлює щиру подяку своєму науковому консультанту, доктору фізико-математичних наук, професору Янчевському Ігорю Владиславовичу за постійну допомогу та підтримку, а також цінні поради і зауваження при підготовці дисертаційної роботи.

РОЗДІЛ 1. СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ З МЕХАНІКИ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ

Розділ присвячено огляду наукових публікацій, у яких досліджується динамічна поведінка п'єзоелектричних перетворювачів. Основна увага приділена стану досліджень неоднорідних елементів конструкції з врахуванням дисипативних властивостей при гармонічних та нестационарних збуреннях.

Розглянуто сучасні п'єзоелектричні матеріали і пристрой та основні сфери їх застосування. Наведено публікації, зосереджені на експериментальних, аналітичних або чисельних методах визначення матеріальних характеристик та дослідження коливних властивостей однорідних та неоднорідних п'єзоелементів.

Виконано аналіз знайдених в літературі досліджень поширення коливань в п'єзоелектричних тілах при різних способах їх електромеханічного навантаження. Описано основні моделі, методи та підходи, що використовуються при розв'язанні динамічних задач теорії електропружності та гідроелектров'язкопружності. Проаналізовано стан проблеми дослідження коливань багатошарових та функціонально-неоднорідних перетворювачів при гармонічних та нестационарних навантаженнях та розглянуто математичні методи та підходи, що для цього застосовуються. На основі викладеного матеріалу формулюються задачі дисертації та описується її структура.

1.1. П'єзоелектричні матеріали та їх властивості

П'єзоелектрики відносяться до «розумних» матеріалів (smart materials), які також називаються інтелектуальними (intelligent) або чутливими (sensitive) матеріалами. Це штучні матеріали, які мають здатність перетворювати різні форми енергії. Розумні матеріали є основою багатьох сучасних адаптивних систем, для яких характерною є наявність вимірювальної (сенсорної) і виконавчої (акторної) компонент [128, 163, 170, 190, 191, 272 та ін.], які взаємодіють між собою за допомогою системи керування. Здатність п'єзокераміки до двонаправленого електромеханічного перетворення енергії (прямий та обернений п'єзо-ефект) дає змогу її використання і в вимірювальних, і в виконавчих компонентах, а часто і суміщати їх функції в одному елементі [141, 261, 309]. До розумних матеріалів, крім п'єзоелектриків, відносяться матеріали з ефектом пам'яті форми, магніто- і електрореологічні рідини [190, 191, 306]. За структурою п'єзоелектричні матеріали поділяються на монокристалічні, п'єзокераміку,

п'єзополімери, композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) [133, 142, 170] (рис. 1.1).



а) монокристали



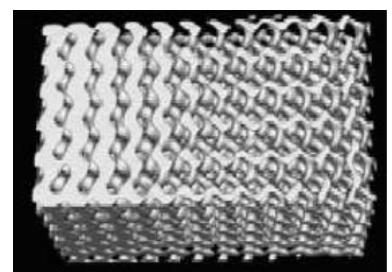
б) п'єзокераміка



в) п'єзополімери



г) п'єзокомпозити



д) п'єзоелектричні ФГМ

Рис. 1.1. Типи п'єзоелектричних матеріалів

1.1.1. П'єзоелектрична кераміка та полімери

З моменту відкриття наприкінці 1880 р. братами Кюрі п'єзоэффекту як здатності кварцу при механічному навантаженні накопичувати на його поверхнях електричні заряди, теоретичні та практичні дослідження п'єзоелектричних матеріалів та перетворювачів з них зазнали значного розвитку.

Традиційними природними п'єзоелектричними матеріалами є кристали кварцу, турмаліну, сегнетової солі [3, 45, 95]. Їх широкому поширенню в техніці обмежувала низка факторів: низький коефіцієнт електромеханічного перетворення, низька механічна міцність, неможливість виготовлення елементів довільної геометрії та ін. Широкого практичного розповсюдження явище п'єзоэффекту набуло з відкриттям керамічних п'єзоелектричних матеріалів [3, 95, 143, 230]. Властивості п'єзокерамічних матеріалів, можливості їх промислового застосування і принципи побудови загальної теорії п'єзоперетворювачів описано в [45, 95, 97, 132] та ін.

Будь-яка сегнетоелектрична кераміка має п'єзоелектричні властивості. Ці матеріали є досить жорсткими, хімічно неактивними та несприйнятливими до вологості та атмосферних впливів. П'єзокерамічні матеріали дають змогу виробляти перетворювачі різноманітної величини та геометричної форми з апріорним напрямком попередньої поляризації. Найбільш поширеними п'єзокерамічними матеріалами є полікристалічні тверді розчини титанату барію, цирконату титанату свинцю (ЦТС, PZT) та ніобата барію свинцю. Сучасні технології виготовлення п'єзокераміки, перспективи і тенденції в удосконаленні технологічних процесів описано в роботах [3, 134, 232].

Не дивлячись на широке застосування п'єзокераміки в різних приладах, монокристалічні матеріали зберігають свою важливість, залишаючись основними для таких застосунків, як частотно стабілізовані осцилятори та поверхневі акустичні пристрії. Найбільш популярними монокристалічними п'єзоелектричними матеріалами є кварц, ніобат літію (LiNbO_3) та танталат літію (LiTaO_3). Свинцевмісні монокристали $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$ (PMN) та $\text{Pb}(\text{Zn}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$ (PZN) та їхні бінарні системи з PbTiO_3 (PMN-PT та PZN-PT) використовуються як релаксорні сегнетоелектрики [133] та демонструють надзвичайно великі електромеханічні коефіцієнти зв'язку (k_{33} досягає значення 0,94).

П'єзоелектричний ефект можливий в 20 кристалічних класах симетрії (всього 32 класи), які не мають центра симетрії [3, 45, 79, 204, 230]: триclinна система 1; моноклинна система 2, m; ромбічна система 222, mm2; тетрагональна система 4, 4, 422, 4mm, 42m; ромбоедрична система 3, 32, 3m; гексагональна система 6, 6, 622, 6mm, 6m2; кубічна система 23, 43m.

На даний момент більшість практичних матеріалів в промисловості базуються на цирконат-титанаті свинцю ($\text{Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$: PZT, ЦТС), який є твердим розчином PbZrO_3 і PbTiO_3 . Кераміка на основі PZT забезпечує необхідні високі характеристики продуктивності для різних застосувань за відносно низькою ціною. PZT має кристалічну структуру перовскітового типу, яка представлена композиційною формулою ABO_3 , і ця структура вдала для високих

п'зоелектричних властивостей, особливо коли місце А заповнено свинцем [20, 95, 133]. П'зоелектричні властивості посилюються на складі межі розділу між ромбоедричною та тетрагональною фазами в твердому розчині. П'зокераміка типу PZT при робочих температурах (до 200°C) відноситься до гексагональної системи класу бтм, трансверсально-ізотропні матеріальні характеристики якої описуються п'ятьма незалежними пружними модулями, трьома незалежними п'зоелектричними сталими та двома компонентами діелектричної проникності.

До переваг PZT відносяться легке надання потрібної форми виробу, в тому числі формування багатошарових виробів з внутрішніми електродами. Доступними процедурами формування є пресування, екструзія, ліття під тиском і листове формування. Крім того, кераміка PZT має хорошу механічну оброблюваність завдяки пластичності кераміки, що містить свинець, що також впливає на якість електромеханічного відгуку. На даний момент також важливою є мінітоаризація елементів, що використовуються для виготовлення композитних матеріалів та в електронних пристроях. Така хороша здатність до формування, порівняно з іншими п'зоелектриками, можна вважати однією з головних причин широкого використання PZT.

В залежності від вмісту легуючих домішок в цирконат-титанаті свинцю (PZT) вводяться так звані класи жорсткої (сегнетожорсткої, hard) та м'якої (сегнетом'якої, soft) п'зокерамік. Перевагами м'яких матеріалів PZT є високі значення діелектричних проникностей, п'зоелектричних сталих та коефіцієнтів електромеханічного зв'язку [145, 168, 266] та легка поляризація навіть при відносно низькій напруженості поля [272]. Жорсткі матеріали PZT відрізняються помірною діелектричною проникністю, задовільними коефіцієнтами п'зоелектричного зв'язку, високою механічною добротністю та гарною стабільністю при значних механічних навантаженнях і напруженості електричного поля. Таким чином, м'які PZT слід використовувати для нерезонансних режимів, тоді як жорсткі PZT підходять для резонансних коливань (наприклад, в потужних акустичних системах). Застосування цих матеріалів для збору енергії розглядалося в [276, 301], експериментальне дослідження проводилося в [172, 168, 304].

Залежно від призначення, п'єзоелектричні матеріали на основі PZT поділяють на категорії, що вводяться стандартом MIL-STD-1376B [258]: Navy Type I, II, III, IV. Navy Type I включає жорсткі PZT (PZT-4), що використовуються для пристрій з постійними і повторюваними збуреннями, таких як ехолоти, ультразвукові очищувачі, позиціонери, датчики тиску, іскрові генератори, медичні терапевтичні засоби та інші електрооптичні прилади високої потужності. Ці п'єзокерамічні матеріали демонструють великі амплітуди механічного відгуку разом із низькими механічними та діелектричними втратами. Navy Type II (PZT-5A – м'які PZT, є перспективним для застосування в приймах або генераторах, у пришвидшувачах, датчиках вібрації та гідрофонах, медичних доплерівських датчиках завдяки своїй високій чутливості, діелектричній проникності і стабільності у часі. Navy Type III (PZT-8) – жорсткі PZT з надзвичайно високою механічною добротністю, придатний для експлуатації при дуже сильному електричному збудженні та механічному навантаженні. Ці матеріали можуть бути використані в ультразвукових очищувачах, портативних медичних пристроях, стоматологічних приладах, ультразвукових зварювальних апаратах, глибоководній апаратурі та інших потужних ультразвукових пристроях. Ці жорсткі PZT проявляють максимальну стабільність при високій температурі, електричному полі та напрузі. М'яка PZT-кераміка Navy Type VI (PZT-5H) має дуже високі коефіцієнти електромеханічного зв'язку, п'єзоелектричні сталі та діелектричні проникності, а також меншу стабільність у часі. Матеріали Navy Type VI знайти потенційне застосування в медичній діагностиці, в позиціонерах і чутливих приймах, промисловому неруйнівному контролі, нанопозиціонуванні. В 1999 р. стандарт MIL-STD-1376B був відмінений, а введена класифікація та термінологія перейшла до промислового вжитку.

Механічні та електричні властивості п'єзоелектриків значно залежать від температури. Поляризація п'єзокераміки здійснюється при температурі, яка дещо нижча від точки Кюрі. При підвищенні робочої температури до точки Кюрі відбувається деполяризація. Залежність матеріальних характеристик п'єзокерамічних матеріалів від температури досліджувалася в [55, 58, 151, 304]

та ін. В роботі [133] досліджуються температурні залежності матеріальних характеристик для матеріалів PZT-4, PZT-5A та PZT-5H. Наведені результати вказують на те, що м'яка п'єзокераміка має досить обмежений температурний діапазон (до 100°C), жорстка має більш широкий діапазон робочих температур (від -150°C до 250°C). В [173] наведено оцінку впливу п'єзоелектричного ефекту, електрострикції та сегнетоелектричних властивостей для різних п'єзокерамічних матеріалів. Питання втоми, механічної та електричної міцності п'єзоелектриків розглядалися в [91, 155, 203, 204, 326 та ін.].

В зв'язку зі шкідливістю виробництва свинцевмісних керамік розвиваються безсвинцеві п'єзоелектрики [174], що частково можуть замінити цирконатитанат свинцю в окремих застосунках.

Серед безсвинцевих п'єзоелектриків завдяки простоті виготовлення та експлуатації на перший план виходять *електроактивні полімери* (ЕАП, ЕАР). Перевагою п'єзоелектриків на основі полімерів є легкість, гнучкість, низький акустичний імпеданс, висока чутливість, що дозволяє їх використовувати у пристроях, де потрібна точна сенсорна реакція.

Полімери легкі, зручні для обробки та масового виробництва, механічно гнучкі, мають в'язкопружні властивості, що робить їх дуже привабливими для численних застосувань [20, 95, 133]. У відповідь на стимуляцію деякі полімери підтримують зміну механічних властивостей, що додає значних переваг їх використанню. Електричне збудження є одним із найбільш затребуваних методів стимуляції для викликання пружної деформації в полімерах. Здатність до оберненого п'єзоefекту робить їх корисними для датчиків і механізмів збору енергії. Відповідно до механізму їх активації, ЕАП можна класифікувати як електронні (також відомі як активовані полем) та іонні. Електроактивні полімери широко застосовуються в біоніці. На даний момент ЕАП актуатори найбільш близько серед інших штучних актуаторів моделюють біологічні м'язи. Останнім часом розроблено ряд матеріалів, що досягають значних змін в формі у відповідь на електричну стимуляцію. Завдяки можливості керування їх фізичним та хімічним станом, ці відносно нові матеріали можуть бути основою якісних наукових та інженер-

них рішень, що дозволяють їм стати «актуаторами вибору» серед інших генераторів переміщень.

На даний момент найбільш поширеним ЕАП є полівінілден діфлуриду (ПВДФ, PVDF) та його модифікації. П'єзоелектричні властивості ПВДФ були відкриті у 1969 р. Щоб надати матеріалу п'єзоелектричних властивостей, його механічно розтягають, щоб орієнтувати молекулярні зв'язки, і поляризують. На відміну від PZT, ПВДФ має від'ємний d_{33} . Це означає, що ПВДФ буде стискатися при додатній різниці потенціалів. ПВДФ-трифлуороетилен (PVDF-TrFE) – добре відомий п'єзоелектрик, який широко використовується як сенсор, наприклад, в клавіатурах.

1.1.2. Композитні та функціонально-неоднорідні матеріали

Загальновідомо, що продуктивність п'єзоелектричних пристроїв сильно залежить від їх форми та розмірів. Тому для отримання вищої продуктивності постійно вивчаються структурні інновації. Для підвищення ефективності п'єзоперетворювачів, варіювання частотного діапазону і типу збурень можуть використовуватися кілька з'єднаних між собою п'єзоелементів, можливо, з різним типом поляризації. Для узгодження імпедансів п'єзокераміки та контролюваного об'єкта іноді додають переходні шари, виконані з пружних матеріалів. При необхідності демпфування коливань використовуються в'язкопружні шари. Для забезпечення цілісності та необхідних умов закріплення робочі елементи п'єзоперетворювачів можуть бути вкладені в корпус. При високовольтних режимах роботи використовуються конкретні діелектрики, огляд яких наведено в [217]. Таким чином, п'єзоперетворювачі являють собою складний об'єкт, виконаний з матеріалів з різними фізико-механічними властивостями: п'єзокераміки з різними напрямками поляризації, пружних, в'язкопружних, провідних матеріалів і ін.

Багатошарові структури успішно використовуються в генераторах струму, гучномовцях, біомедичних пристроях, приладах активного контролю і т. ін. Традиційно шари пакетного або багатошарового елемента з'єднувались між собою за допомогою клейових епоксидних сполук, міцність яких є меншою, ніж у

п'єзокераміки. Але з метою мінімізації розміру п'єзоелементів, підвищення механічної міцності та коефіцієнту електромеханічної передачі, розроблено технології виготовлення п'єзокерамічних композитів шляхом покровового нанесення шарів п'єзокераміки та провідника з послідовним спіканням (sintering), що використовується для виготовлення п'єзоелементів у формі пластин та оболонок обертання.

Керамічна багатошарова технологія отримала значний розвиток у галузі багатошарових керамічних конденсаторів. Вони складаються з десятків шарів PZT товщиною в кілька десятків мікрометрів. Цю багатошарову кераміку зазвичай отримують спіканням шаруватого тіла, що складається з попередньо спечених пресованих листів і друкованих внутрішніх електродів. Цей процес може забезпечити високу надійність виробу та відносно низьку вартість виробництва в масовому виробництві. PZT без модифікації складу спікається приблизно при 1200°C ; отже, метал внутрішнього електрода повинен мати температуру плавлення, вищу за 1200°C . Такій вимозі задовольняють кольорові метали (срібло, паладій) або сплави з високим вмістом кольорових металів, які є досить дорогими. Щоб застосовувати дешевші сплави, температуру спікання слід знизити щонайменше до 960°C , що є температурою плавлення срібла. Низькотемпературне спікання стало важливим технологічним процесом для розробки високопродуктивних і економічно ефективних багатошарових пристрій з PZT. Але навіть тут через відмінність фізико-механічних властивостей шарів на поверхні спряження виникає концентрація напружень, що призводить до виникнення мікротріщин та негативно впливає на міцність п'єзоелемента при циклічних навантаженнях [204, 210, 273].

Перші композитні матеріали на основі PZT та ПВДФ з'явилися в 1972 р. в Японії [133]. Перевагами п'єзополімерних композитів є високі коефіцієнти зв'язку, низький акустичний імпеданс, гарне узгодження з водою або біологічними рідинами, механічна гнучкість, широка смуга пропускання в комбінації з низькою добротністю, а також можливість створення суцільних масивів простим накладанням електродів [20, 95, 133]. Геометрія двофазних композитів може бути класифікована згідно до зв'язності кожної фази (1-, 2-, або 3-розмірна) в 10

структур (рис. 1.3). Найбільш вживаними є композити 1-3 (PZT-стержні в полімерній матриці) або 2-2 (шаруваті композити PZT-ПВДФ).

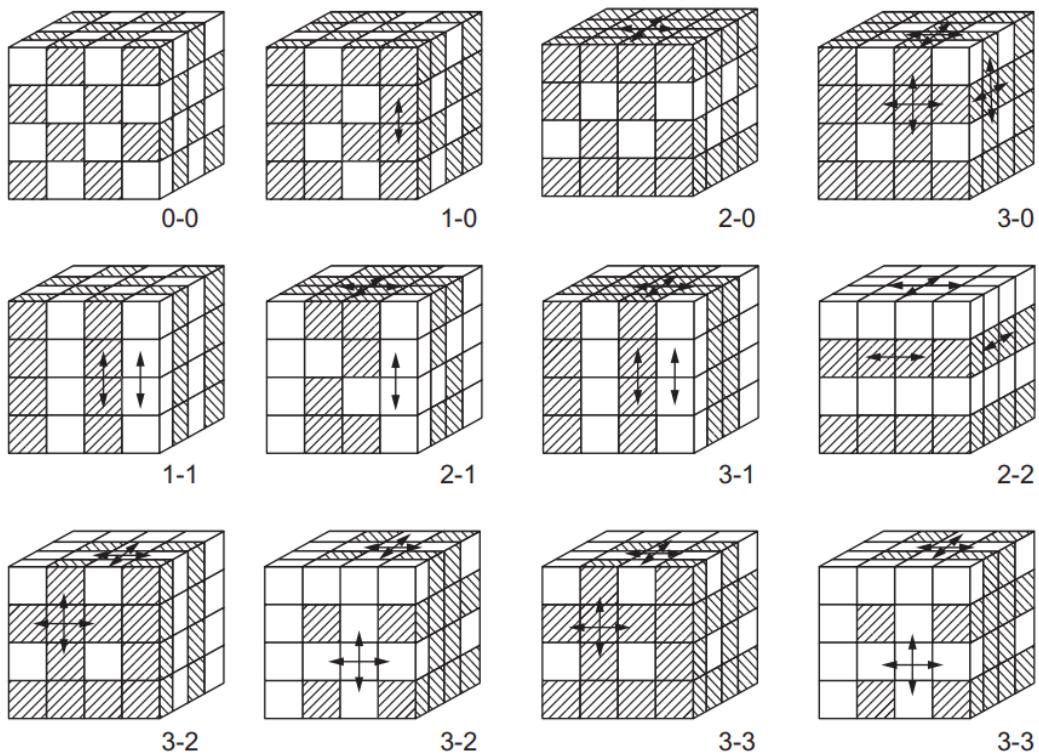


Рис. 1.2. Класифікація двофазних композитів за зв'язністю [133]

Класична теорія динаміки композитних матеріалів та п'єзоактивних композитів описана в роботах О.М. Гузя, В.Д. Кубенка, Л. П. Хорошуна [43, 81, 108] та ін. Огляд публікацій щодо композитних актуаторів з п'єзокерамічними волокнами зроблено в [142], в [219, 220] – огляд п'єзоелектричних перетворювачів для високотемпературних та високопотужних застосувань, в тому числі композитних. В [161, 264] досліджується проблема гомогенізації лінійно-п'єзоелектричних волокнистих композитів з періодичною мікроструктурою. В'язкопружні властивості композиційних матеріалів, що дозволяють зменшити інерційні характеристики елементів конструкції при пасивному та активному демпфуванні коливань, досліджувались в [41, 102, 188, 199] та ін. Застосування композитних матеріалів для збору енергії описано в [198, 248, 275, 316] та ін.

В гідроакустичних пристроях важливою характеристикою матеріалу є гідростатична добродійність [20, 95, 133], яка визначає придатність матеріалів для ви-

користання під водою. Мала гідростатична добротність і поганий акустичний зв'язок з водою роблять суцільну кераміку PZT непридатною для гідроакустичних застосувань. Але виявилося, що пориста п'єзокераміка має хороші характеристики для гідрофонів. Пористі п'єзоелектричні матеріали із заповненими повітрям порами мають часткове розщеплення між поперечним і поздовжнім ефектами. Крім того, пористі матеріали мають нижчу діелектричну проникність, що підвищує гідростатичну добротність на кілька порядків. Розмір пор і їх характеристики можна контролювати за допомогою різних методів обробки. Пористу п'єзокераміку можна розглядати як композит PZT з повітрям. В залежності від відсоткового складу кераміки класифікація структури композита змінюється: частка PZT > 60% показала зв'язність типу 3-0; зразки з низькою часткою PZT (<40%) мали зв'язність типу 3-3 (рис. 1.2). Основним способом виготовлення пористої кераміки PZT є синтезування за допомогою випалювання пластикових сфер, або технології полімерної губки. Для досягнення бажаної пористості мікроструктури з гарним контролем та для досягнення індивідуальних електромеханічних властивостей також може бути застосована технологія 3-D друку.

Сучасний рівень розвитку технологічних процесів дає змогу синтезувати неоднорідні матеріали з поступовою (градієнтною) зміною фізико-механічних властивостей. Такі матеріали називаються функціонально-градієнтними (ФГМ) [205, 216, 316, 318] та отримуються при механічному компонуванні матеріалів з різко відмінними значеннями фізико-хімічних параметрів, наприклад, при спайці кераміки з металом або полімером. Зазвичай, зміна властивостей ФГМ пов'язані з відповідним варіюванням хімічного складу чи фізичної структури матеріалу. Для отримання таких матеріалів використовують пошарове нанесення покриттів комбінованого складу, що змінюється, або спікання (сплавлювання, зварювання) декількох пластин або дисків різного складу. Неперевність властивостей матеріалу в об'ємі може бути реалізована зміною ступеня спайки, ступеня наповнення, а по поверхні – варіюванням, наприклад, ступеня модифікації. Неперевність зміни цих характеристик обумовлює рівномірність варіювання властивостей, а розривність – стрибкоподібну зміну властивостей. Функціонально-градієнтні матеріали відносяться до композитів класу 3-3. Основна сфера використання – ма-

теріали та пристрой, що працюють в екстремальних умовах (значні градієнти механічних, електричних, температурних навантажень). Використання функціонально-градієнтних матеріалів дозволяє уникнути концентрації напружень між шарами, що є недоліком багатошарових матеріалів.

Функціонально-неоднорідні п'єзоелектрики (ФНП) — це матеріали, в яких п'єзоелектричні властивості змінюються в напрямку однієї або кількох координат, що дозволяє реалізувати унікальні функціональні характеристики. Завдяки можливості індивідуального налаштування властивостей, ФНП знаходять застосування у багатьох високотехнологічних галузях, де потрібні матеріали з унікальними характеристиками:

- *Акустичні пристрой*: ФНП використовуються в ультразвукових датчиках, активних елементах мікрофонів та інші акустичні системи, оскільки їхні неоднорідні властивості дозволяють досягати високої чутливості та селективності.
- *Авіа- та космічна техніка*: У цих галузях ФНП можуть бути використані в сенсорах, приводах та акустичних екранах, де необхідно зменшити вагу і збільшити ефективність матеріалів.
- *Медичні технології*: ФНП застосовуються у виготовленні п'єзоелектрических датчиків для медичних ультразвукових пристрой, що забезпечує високу точність вимірювань та покращує якість зображення.
- *Збір енергії*: Використання ФНП в генераторах енергії на основі механічних коливань або вібрацій дозволяє перетворювати механічну енергію в електричну, що відкриває можливості для бездротових сенсорних мереж.
- *Системи управління*: Вони можуть бути інтегровані в системи автоматизації, де потрібна точна контролюваність сили, тиску або переміщення, наприклад, у системах активного керування у машинобудуванні та робототехніці, особливо в умовах високих температур та агресивних середовищ.
- *Мікроелектроніка*: ФНП можуть використовуватися в мікророзмірних пристроях і акселерометрах, де необхідно зменшити розмір при збереженні високих п'єзоелектрических характеристик.

Таким чином, функціонально-неоднорідні п'єзоелектрики мають широкий

спектр застосувань завдяки своїй здатності підлаштовуватися під специфічні вимоги, що робить їх корисними у багатьох інноваційних технологіях.

1.2. Застосування п'єзоелектричних перетворювачів

Сучасний стан теоретичного та експериментального дослідження, проєктування, використання п'єзоелектричних перетворювачів описано в наступних монографіях і довідниках: K. Uchino at al. (2001 p.) [268], Ding H., Chen W. (2001 p.) [182], J. S. Yang, G. A. Maugin (2003 p.) [254], Д. Бардзокас та ін. (2005 p.) [79, 156], J. S. Yang (2006 p.) [321], A. J. Fleming , S. O. Moheimani (2006 p.) [202], J. Tichý et al. (2010 p.) [206], N. Jalili (2010 p.) [231], С. А. Калоєров, А. В. Петренко (2011 p.) [52], A. Erturk , D. J. Inman (2011 p.) [198], I. J. Busch-Vishniac (2012 p.) [163], В. Г. Савін , А. В. Збруцький , І. О. Моргун (2013 p.) [101], В. М. Шарапов та ін. (2013 p.) [113], В. Б. Говоруха та ін. (2017 p.) [204], О. І. Дрозденко , К. С. Дрозденко, О. Г. Лейко (2018 p.) [44], S. J. Rupitsch (2019 p.) [272], A. Y. Grigorenko , W. H. Müller , I. A. Loza (2021 p.) [210], I. В. Янчевський (2023 p.) [128] та ін.

Основними науково-технічними галузями, що базуються на використанні п'єзоefекту, є п'єзоелектроніка, акустоелектроніка, акустооптика, мікроелектроніка. Основною задачею п'єзоелектроніки є проєктування і експлуатація п'єзоприймачів, п'єзотрансформаторів, двигунів, мікрофонів, п'єзорезонаторів та ін. [42, 95, 112, 113, 170, 202, 268]. Акустоелектроніка займається мікроелектронним перетворення інформації: лінії затримки, фільтри, датчики зовнішніх впливів, підсилювачі, конволтери і т. ін. Акустооптика використовує взаємодію оптичних хвиль з акустичними. Основними пристроями є дефлектори, оптичні фільтри та ін. оптичні пристрой. Мікроелектроніка використовує п'єзоелектрики як сенсори і виконавчі елементи у мікроелектронних системах.

1.2.1. Типи п'єзоелектричних перетворювачів та пристрої на їх основі

П'єзоелектричні елементи конструкцій можна поділити на ті, що працюють на основі прямого п'єзоefекту (сенсори або датчики, приймачі акустичних сиг-

налів, генератори електричної енергії) [42, 44, 78, 112, 163, 201, 206, 229], на основі оберненого п'єзоefекту (актуатори або випромінювачі звуку та ультразвуку, п'єзоелектричні двигуни) [138, 142, 170, 187, 226, 272, 284], на п'єзорезонансні (п'єзотрансформатори струму та напруги, резонансні стабілізатори частоти, резонансні датчики тиску, вологості, температури) [5, 78, 90, 120, 321] та електро-стрикції (електрично контролювані фільтри, нелінійні акустичні пристрої) [95, 113].

Робочі п'єзоелектричні елементи конструкцій за формою можна поділити на тіла стержневої, пластинчастої, циліндричної та сферичної форми. Одними з найбільш поширених п'єзоелементів є круглі в плані пластини, порожнисті циліндри та кулі (рис.1.3). П'єзоелектричні елементи такої геометрії використовуються для отримання ультразвуку великої інтенсивності, в якості конструктивних елементів гідроакустичних систем та пристрій, датчиків сили та пришвидшення, вібродатчиків.



Рис. 1.3. П'єзокерамічні перетворювачі плоскої, циліндричної та сферичної форм

У технічній літературі і нормативно-технічній документації п'єзоелектричні перетворювачі можуть позначатися абревіатурою ПЕП. За типом конструкції п'єзоелектричні перетворювачі бувають *суміщені* – складаються з одного п'єзоелемента, який одночасно виконує роль джерела та приймача ультразвуку; *окремо-суміщені* – складаються з двох п'єзоелементів (один – джерело, а другий – приймач ультразвуку), розташованих в одному корпусі і розділених захисним акустичним екраном; *роздільні* – п'єзоелемент в перетворювачі виконує роль тільки джерела або тільки приймача ультразвуку.

Типовими представниками класів ПЕП є п'єзодвигуни, п'єзорезонатори, п'єзотрансформатори, п'єзогенератори, електроакустичні перетворювачі та ін.

Основним принципом роботи *п'єзодвигунів* є перетворення високочастотних електричних коливань в поступальний або обертовальний рух [112, 113, 309] (неперервний або дискретний, кроковий). Переваги п'єзодвигунів в порівнянні зі звичайними електродвигунами проявляються в діапазоні малих потужностей (менше 1 Вт), характерних для мікродвигунів. В конструкції п'єзодвигуна ротор і статор складаються з одного чи кількох п'єзоелектричних резонаторів в формі пластини, диска або циліндра, притиснутих один до одного пружним елементом. Ротор і статор в конструкції п'єзодвигуна можуть змінювати свої функції, і п'єзодвигун перетвориться в п'єзоелектричний генератор.

П'єзорезонатор має конкретні робочі частоти, що співпадають з власною частотою елемента. Вони використовуються, наприклад, для стабілізації частоти коливань в зовнішньому колі або для виділення деякого сигналу, частота якого співпадає з робочою частотою резонатора [11, 90, 120, 123].

Ультразвукові п'єзоелектричні випромінювачі є резонаторами, що працюють на частотах ультразвукового діапазону (частота вища за 20 кГц). Вони широко застосовуються в медичному діагностуванні, неруйнівному контролі, паркувальних системах, ультразвукових датчиках і т. ін. [187, 240, 279, 309]. Більшість ультразвукових випромінювачів працюють на базі п'єзоэффекту. Розрізняються два базових режими роботи ультразвукових перетворювачів: луна-

імпульсний метод (pulse-echo) і тіньовий метод (pitch-catch) [272]. Луна-імпульсний метод використовується, коли один перетворювач випускає ультразвуковий сигнал, отримує відбиття від цілі та перетворює відбиті хвилі в електричний відгук. Тіньовий або дзеркальний метод вимагає два ультразвукових перетворювача. Перший перетворювач (transmitter) випускає ультразвукові хвилі, інший (receiver) отримує відбиті або перетворені хвилі передачі. Існує багато типів ультразвукових перетворювачів, в яких внутрішня структура залежить від середовища поширення ультразвукових хвиль. Наприклад, так звані міжцифрові (interdigital) перетворювачі застосовуються для генерації та приймання поверхневих акустичних хвиль (SAW), також відомі як хвилі Релея [201]. Інші типи – ультразвукові перетворювачі, спроектовані для генерації та отримання звукових хвиль в рідкому середовищі, тобто повітрі або воді. В медичній діагностиці розглядається поширення хвиль в в'язкому середовищі змінної густини. В дефектоскопії хвилі поширяються в твердому середовищі [137, 228, 229]. В усіх випадках розрахунок режиму роботи перетворювача включає в себе дослідження поширення хвиль в акустичному середовищі.

П'єзоелектричні трансформатори являють собою одношаровий або багатошаровий п'єзоелемент в формі пластинки, диска або циліндра з розділеними електродами [82, 113, 145, 167, 196, 269]. Частина, що підключена до джерела електричного сигналу, функціонує як актуатор, а частина, яка підключена до навантаження, — генератор. П'єзоелектричні трансформатори являються трансформаторами напруги, причому максимальне значення коефіцієнта трансформації отримується при резонансних частотах і досягає кількох десятків і навіть сотень одиниць для п'єзотрансформаторів поздовжньо-поздовжнього та поперечно-поперечного типів. Коефіцієнт трансформації залежить від співвідношення геометричних розмірів секцій.

До *нерезонансних п'єзогенераторів* відносяться збирачі енергії. Збір механічної енергії коливань та перетворення її в електричну з метою накопичення для подальшого використання (energy harvesting) за допомогою п'єзоелектриків використовується у машинобудуванні, авіапромисловості, у будівництві та навко-

лишньому середовищі для демпфування коливань з перетворенням зайвої енергії в електричну або як автономні системи для моніторингу та контролю стану об'єкта [198, 263, 280]. Одними з найбільш поширених збірників енергії (energy harvesters) є консольні уніморфні або біморфні перетворювачі енергії, що складаються з пасивного шару та одним або двома тонкими симетрично розміщеніми п'єзокерамічними пластинами [141, 146, 179, 214, 227, 277]. Коригування робочої частоти елемента виконується за допомогою приєднаної маси на кінці (tip mass). Основним недоліком п'єзокераміки є її крихкість, тому для забезпечення міцності при великих переміщеннях на збірниках енергії можуть бути використані п'єзоактивні плівки, виготовлені з п'єзополімерних композитів [248, 316]. Огляд сучасних матеріалів та типових п'єзоелектричних збірників енергії зроблено в [275, 323].

Використання п'єзоелектриків в *електроакустичних перетворювачах* (ЕАП) є одним з традиційних їх застосувань. Це активні компоненти сонарів, гідрофонів, гідроакустичних антен і т. ін. За призначенням перетворювачі поділяються на випромінювачі, приймачі та зворотні перетворювачі. Для збурення і прийому акустичних хвиль застосовуються п'єзоелементи стержневої, пластинчастої, циліндричної, сферичної форми (рис. 1.1) з поверхневими електродами [1, 42, 44, 51, 65, 66, 67, 80, 94, 113, 139, 201]. Широко використовуються мономорфні та біморфні п'єзоелементи. П'єзоелемент акустично пов'язаний з звукопровідником і деформується під дією змінного електричного поля, прикладеного до електродів (режим випромінювання). Прийом акустичної хвилі, що поширюється в акустичному середовищі, здійснюється з допомогою аналогічного п'єзоелемента (прямий п'єзоefект).

До сучасних напрямків застосування п'єзоелементів відносяться *пасивне та активне керування* коливаннями механічної конструкції за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів, пов'язаних шунтувальними ланцюгами. Активне керування (демпфування) коливань в першу чергу застосовується для тонкостінних елементів конструкцій — стержнів, пластин, оболонок. Суть підходу полягає в тому, що одні п'єзоелектричні включення (сенсори) дають інфор-

мацію про механічний стан керованого елемента, а до інших (актуаторів) підводиться різниця потенціалів, пов'язана певними співвідношеннями (рівняннями зворотнього зв'язку) з показниками сенсорів. Таким чином можна змінювати динамічні характеристики тіла, наприклад, виходити з резонансу і суттєво збільшувати демпфування коливань тіла [41, 58, 131, 327]. В монографіях [201, 202, 231, 261, 269, 284] описуються базові методи та підходи, що використовуються для розрахунку та моделювання активного контролю коливаннями конструкції. Методи активного контролю дають гарні результати в низькочастотній області. Для розширення діапазону частот ефективного контролю коливань необхідно застосовувати комбіновану технологію з застосуванням як пасивних, так і активних методів контролю.

В системах контролю часто використовуються *уніморфи* або *біморфи*, що зазвичай працюють на згин в режимі генератора і часто використовуються як гнучкі датчики (sensors) [128, 137, 198, 308]. Датчик генераторного типу не вимагає для функціонування зовнішнього джерела живлення. Він призначений для перетворення динамічних деформацій на електричні сигнали з подальшою обробкою та реєстрацією різними приладами, в тому числі збору енергії. Біморф може бути використаний як самостійний перетворювач механічної енергії в електричний струм, так і бути складовою більш складного приладу. Він може бути пов'язаний із системою контролю та управління двома основними способами: за схемою реєстрації напруги або за схемою реєстрації заряду.

Останнім часом завдяки мінітоаризації електронних пристройів та зменшенню їх енерговитрат для моніторингу та контролю стану досліджуваного об'єкту стало можливим застосування автономних збирачів енергії [146, 227, 275]. Використання в якості збирачів енергії п'єзоелектричних біморфів з електров'язкопружними властивостями вимагає аналізу їх реакції на гармонічні, нестационарні та випадкові навантаження. При таких навантаженнях п'єзоелемент виступає як генератор напруги, що вимагає для повного аналізу процесу збору енергії застосування теорії електричних кіл.

В сучасній мікроелектроніці п'єзоелементи (Piezo&MEMS) використову-

ються у системах надточного позиціонування, в мініатюрних п'єзо-випромінювачах, в системах 2D та 3D друку для подачі друкуючого компоненту та ін. [226, 227]. До п'єзоелектронних приладів відносяться тонкі п'єзоелектричні плівки, інтегровані з напівпровідниками; мікросистеми, що поєднують сенсори, процесори і актуатори; надвисокочастотні компоненти на основі активних діелектриків, наноструктурні п'єзоелектрики та інші розумні елементи [95, 170, 191, 306].

1.2.2. Експериментальні методи дослідження п'єзоелементів

Визначення механічних, діелектричних та п'єзоелектричних характеристик п'єзоелектричних матеріалів є складною експериментальною задачею. Методи визначення основних параметрів п'єзокераміки та відповідна термінологія унормовуються стандартами [143, 258] та іншими промисловими нормативами. Для їх знаходження використовуються прямі та обернені підходи, що є комбінацією ітераційного чисельного моделювання та експерименту [148, 272, 281, 283]. Повні набори пружноп'єзодіелектричних характеристик для сучасних п'єзоелектричних матеріалів можна знайти на сайтах виробників [145, 168, 266, 267]. Там же наведено основні промислові типи перетворювачів та їх робочі характеристики.

На даний момент інтенсивно розвиваються два принципово різні методи до дослідження функціонування та експлуатаційних властивостей п'єзоелементів: метод еквівалентних електромеханічних схем і метод зв'язаних полів [42, 102, 120, 128]. Метод еквівалентних електромеханічних схем випливає з методу електромеханічних аналогій (МЕМА). Тут модель п'єзоперетворювача представляється у вигляді еквівалентної електричної схеми [10, 42, 51, 90, 113, 278]. Наступні розрахунки проводяться за теорією електричних кіл. Теоретичні та експериментальні підходи, що базуються на такій моделі, спрямовані на дослідження роботи перетворювача як елемента електричного кола і не дають змоги оцінити напруження та переміщення, що виникають в п'єзоелементі, вплив умов закріплення та зовнішнього середовища.

Згідно до МЕМА, п'єзоелемент є електромеханічною коливальною системою.

мою, найпростіша еквівалентна електрична схема зображена на рис. 1.4. Ця модель та її модифікації широко використовуються для вільних і навантажених масою резонаторів, нестационарних коливань, визначення констант матеріалу та безлічі інших застосувань.

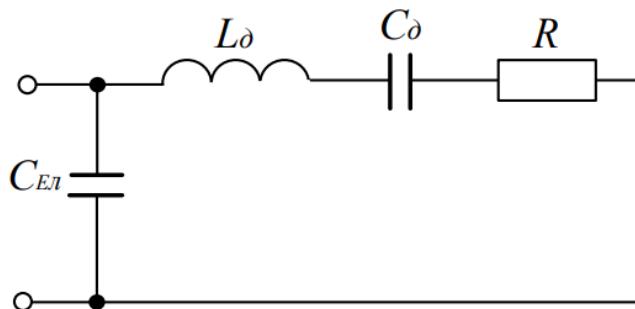


Рис. 1.4. Еквівалентна електрична схема п'єзоелемента [51]

Метод чотириполюсника Мезона [120] призначений для дослідження застосуваних в ультразвуковій ехоскопії п'єзоперетворювачів. Контакт між п'єзоелементом та досліджуваним тілом відбувається через перехідний шар. Для розширення смуги пропускання перетворювача використовується акустичний демпфер. Під час експерименту (рис. 1.5) або чисельного моделювання вимірюються частоти максимумів та мінімумів повної провідності та визначаються динамічні коефіцієнти електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) [11, 53, 138, 278, 279].



Рис. 1.5. Експериментальне визначення матеріальних характеристик п'єзокерамічного диска [279]

Повний аналіз динамічного електромеханічного стану п'єзоелемента можливий лише за допомогою застосування методу зв'язаних полів. Для дослідження використовується теорія електропружності, що базується на основних положеннях кристалофізики, механіки, гідроакустики, електро- і термодинаміки суцільних середовищ. Зв'язаність електричного та механічного полів зазвичай розглядається в лінійній постановці, оскільки нелінійність більшості діелектриків мала і може враховуватися лише в умовах впливу на діелектрик вкрай великих електричних полів: $10^8 \dots 10^{10} \text{ В/м}$, тоді як електрична міцність твердих діелектриків менша: $10^7 \dots 10^9 \text{ В/м}$. Таким чином, в більшості діелектриків пробій настає раніше, ніж у них могла б помітно проявитися нелінійність. Виключення складають параелектричні матеріали, для яких нелінійність проявляється вже при 10^5 В/м [95]. В загальному випадку недосконалість попередньої поляризації, непружної поведінки матеріалів, залежність матеріальних характеристик від температури (наприклад, дисипативний розігрів) вимагає використання нелінійної теорії [47, 58, 61, 241, 263, 327-329].

Одним з ключових параметрів в практичному застосуванні та моделюванні п'єзокераміки є тангенси втрат внаслідок дисипації енергії при резонансі. Експериментально-аналітична процедура визначення дійсних та уявних компонент матеріальних характеристик описана в [21, 53, 54, 97, 129, 136, 148, 181, 282, 310].

На рис. 1.6 наводиться приклад результатів експерименту щодо дослідження амплітудно-частотних залежностей провідності п'єзоелемента, що використовуються для визначення резонансних та антирезонансних частот, добротності, частотно залежних та частотно незалежних коефіцієнтів демпфування, тангенсів діелектричних втрат, коефіцієнтів електромеханічного зв'язку та ін.

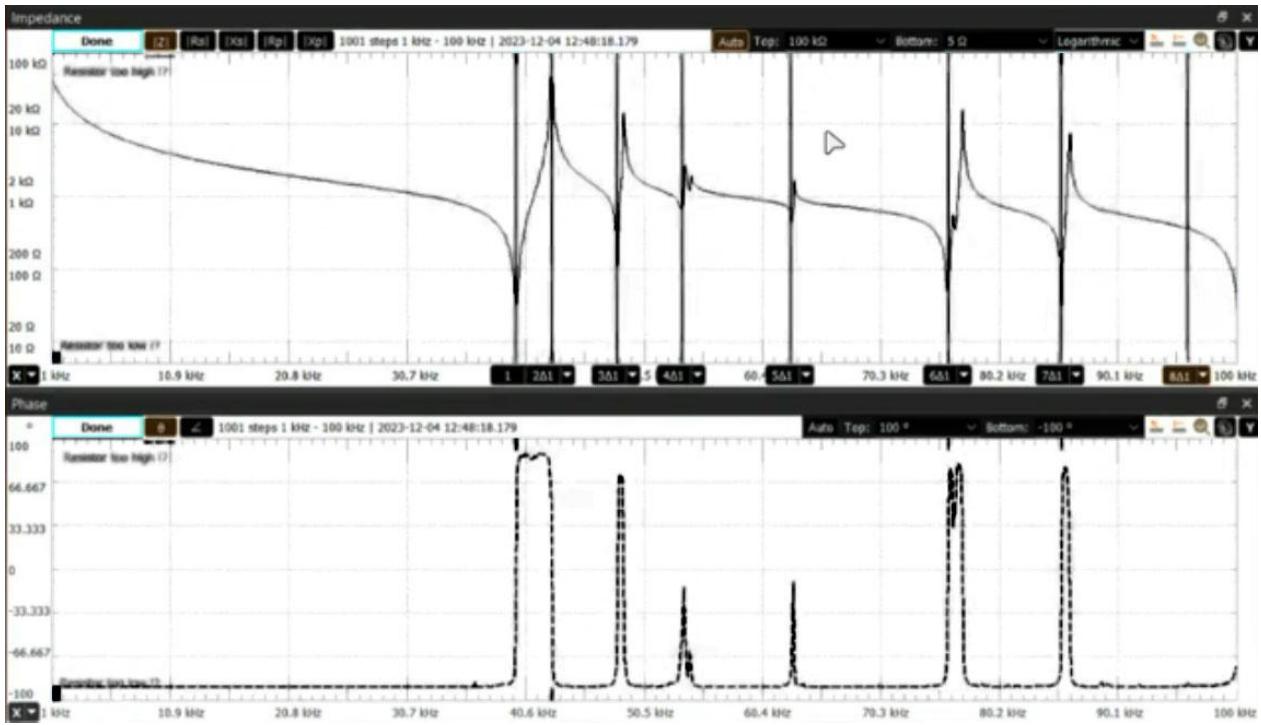


Рис. 1.6. Експериментальне дослідження амплітудно-частотних залежностей провідності п'єзоелемента [279]

Оцінка механічної міцності п'єзоелемента при циклічних навантаженнях вимагає проведення експеримента на втому. Такий експеримент проводився в роботі [91]. На рис. 1.7 наведено криві втоми для п'єзокераміки промислового складу. Для кераміки PZT японського виробництва спостерігається значно вища границя втоми, ніж для кераміки ЦТС, та досягає 38 МПа. Автори [91] це пояснюють тим, що зразки з кераміки ЦТС були більшими за розмірами, ніж зразки з PZT.

В [91] також досліджується вплив на міцність п'єзоелемента різних хімічних добавок, таких як нікель, кобальт кальцій та магній; умов виготовлення (рівня пресування, температури спікання, повторного синтезу); умов поляризації (температури, середовища, напруженості електричного поля). Встановлено, що при додаванні нікелю або марганця до складу п'єзокераміки межа витривалості елемента зростає на 80-110%; підвищення тиску пресування на 100% збільшує циклічну міцність п'єзокераміки на 50%; зростання температури спікання з 1173°К до 1473°К підвищує межу витривалості на 80%.

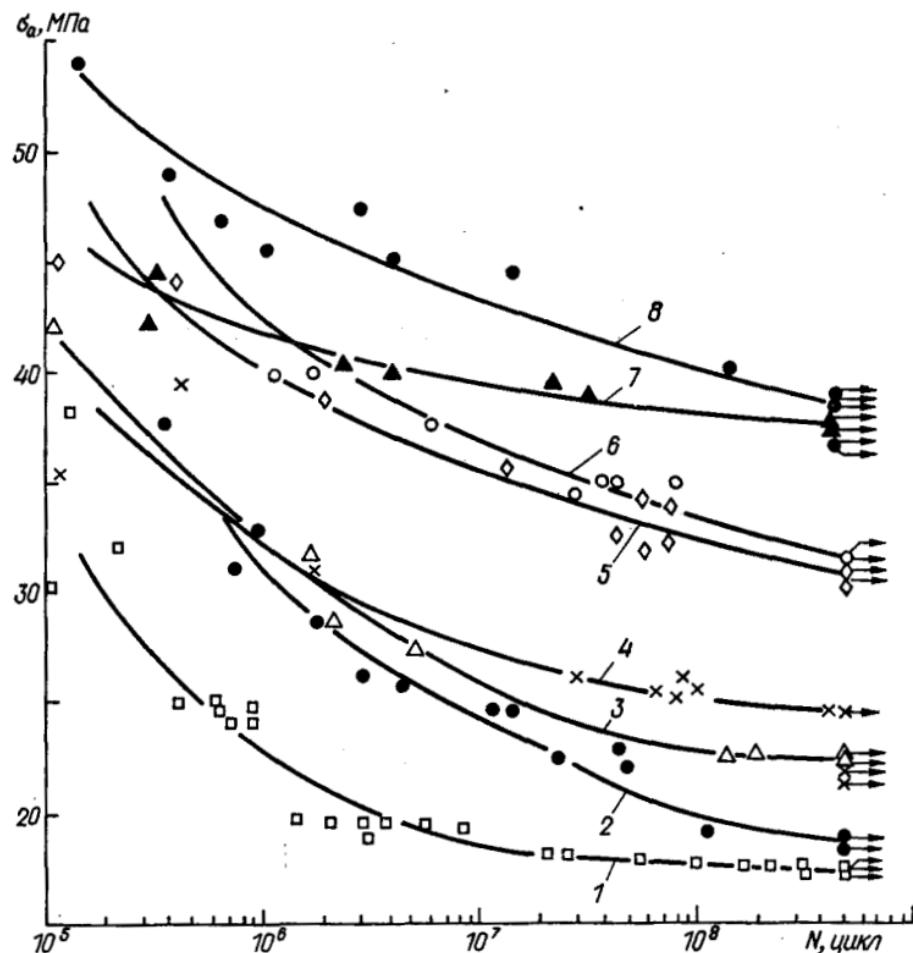


Рис. 1.7. Криві втоми п'єзокераміки : 1 – ЦТБС-1; 2 – ЦТС-19; 3 – ЦТС-23; 4 – ТВ; 5 – ТБК; 6 – ЦТБС-3; 7 – PZT-4; 8 – PZT [91]

1.3. Усталені режими роботи п'єзоелектричних тіл

Вагомий внесок у розвиток лінійної теорії електропружності, формування та розвиток сучасних уявлень про зв'язаність електричного та механічного полів зробили D. A. Berlincourt, D. R. Curran, W. R. Cook, W. G. Cady, P. and J. Curie, W. P. Mason, R. D. Mindlin, H. F. Tiersten, W. Voight, R. Holland, B. and H. Jaffe, T. Ikeda, J. Yang та інші. Фундаментальний підхід до постановки та розв'язання задач електропружності сформовано в роботах В. Новацкого (1986 р.) [85]; Б. О. Партона та Б. О. Кудрявцева (1988 р.) [89]; В. Г. Карнаухова, І. Ф. Киричка (1988 р.) [55]; В. Т. Грінченка, А. Ф. Улітка, М. О. Шульги (1989 р.) [37]; О. Ю. Жарія, А. Ф. Улітка (1989 р.) [46]; М. О. Шульги та А. М. Болкісева (1990 р.) [123]; А. Е. Бабаєва (1990 р.) [6], М. О. Шульги та В. Л. Карлаша (2008 р.) [121].

та ін. Сучасний стан та підходи до розв'язання тривимірних задач електропружності описано в [60, 128, 134, 182, 210, 255, 272] та ін. Феноменологічний підхід до дослідження питань міцності п'єзоелектриків розроблено в роботах [91, 204].

1.3.1. Дослідження динаміки однорідних та неоднорідних елементів конструкцій

Сучасна теорія гідроелектров'язкопружності змогла сформуватися завдяки значним досягненням механіки коливань деформівного твердого тіла, кристалофізики, гідроакустики, електро- і термодинаміки суцільних середовищ, що відбулися протягом останніх ста років.

Фундаментальні положення теорії пружності та теорії коливань описано в [25, 106, 171, 190, 218]. Поширення збурень в неоднорідних пружних середовищах досліджувались в [26, 43, 45, 81, 124, 126]. Електромагнітні ефекти в твердих тілах розглядались в роботах [74, 85, 96, 237]. Поширення акустичних збурень в рідині та газі та їх взаємодія з пружними елементами проаналізовано в роботах [39, 70, 130, 224, 243, 265]. Основи кристалографії поляризованих п'єзоелектриків представлено в [3, 45, 230]. В роботах [37, 55, 89, 123, 206, 225, 233] отримано фундаментальні рівняння і співвідношення теорії спряжених полів, описано взаємодію механічного, електричного та температурного полів. Взаємодія гідроакустичного середовища з електропружними п'єзоелементами досліджувалась в [1, 40, 102]. Теорія еквівалентних електромеханічних схем розвивалася в роботах [10, 42, 44, 51, 94, 97, 112, 113].

Для п'єзокерамічних елементів у формі балок, пластин з прямокутним і круговим контуром, тіл циліндричної та сферичної форм, оболонок обертання застосовуються припущення та спрощення, що дають змогу звести вхідну просторову задачу до двовимірної або одновимірної. Для тонкостінних балок, пластин та оболонок обертання, виготовлених з поляризованої за товщиною п'єзокераміки на низькочастотних коливаннях згину часто використовуються узагальнені на випадок електропружності гіпотези Кірхгофа-Лява [37, 79, 120, 123, 271]. Аналіз таких тіл при моногармонічному навантаженні проводився в

[58, 80, 196, 233] та ін. Однак ці гіпотези при аналізі згинних коливань вносять в розрахунок неусувну похибку аналогічно до пружного випадку. Крім того, вони не завжди адекватно моделюють розподіл фізичних величин поблизу розриву електричних граничних умов. Тому для розрахунку п'єзоелектричних пластин та оболонок інколи застосовуються різного роду уточнені теорії, що дають змогу врахувати механічні зсуви та особливості розподілу електричних польових величин [4, 48, 57, 89, 160, 229, 321].

Аналітичні та чисельні розв'язки задач дослідження статичного електромеханічного стану п'єзоелектричних елементів, у т.ч. з врахуванням температурних та магнітних ефектів, побудовано в роботах [4, 60, 79, 89, 251, 249, 324] та ін. Врахування впливу структурних дефектів, таких як отвори та тріщини, проводилося в роботах [52, 204, 236, 245, 273].

Дослідженнями динамічних процесів в електропружних середовищах в основному проводилися в межах припущення про гармонічність коливань [37, 89, 90, 120, 123, 156, 193, 206, 210, 225]. В цих роботах описано результати фундаментального характеру, зокрема отримано формули для визначення резонансних частот, описано методи знаходження коефіцієнтів електромеханічного зв'язку, описується вплив напрямку попередньої поляризації, електродування, способу навантаження на форми коливань. Аналітичні розв'язки граничних задач динаміки електропружних тіл на певному рівні спрощення знайдено лише для канонічних форм перетворювачів. Для тіл довільної геометрії, електродування та напрямку поляризації доводиться застосовувати чисельні методи. Окремі питання постановки задач електропружності, а саме застосування варіаційних принципів, постановка початково-крайових умов, визначення коефіцієнта електромеханічного зв'язку з енергетичних співвідношень розглянуто в [122, 246, 257].

Визначення власних частот та форм коливань круглих однорідних пластин проводилось в [10, 17, 113, 120, 298, 299], функціонально-неоднорідні пластини розглядалися в [191, 255, 262, 315]. Вільні коливання п'єзокерамічних куль та циліндрів, в тому числі функціонально-неоднорідних, досліджувались в [167, 169, 209, 210, 235, 300]. Гармонічні коливання п'єзокерамічних циліндрів та куль

розглядались в [22, 23, 27, 42, 44, 75, 77, 162]. При розв'язані двовимірних задач такого типу використовується метод розділення змінних з використанням тригонометричних або степеневих функцій. В роботі [121] проводилось визначення згенерованої на обкладках плоского п'єзоелемента при механічних навантаженнях напруги. Подібна задача стоять перед п'єзоелектричними збирачами енергії, огляд яких зроблено в [275].

Велика група робіт присвячена резонансним коливанням п'єзокерамічних елементів [11, 53, 98, 197, 234, 252, 322]. Резонатори в формі пластин, циліндрів та куль часто використовуються для випромінення звуку та передачі сигналів в акустичному середовищі та рідині. Акустоелектричним коливанням п'єзокерамічних випромінюючих та приймаючих циліндричних та сферичних оболонок з наявністю перешкод присвячені роботи [65, 66, 80, 125]. В цих роботах використовується поняття акустичного імпедансу оболонки на резонансній частоті та проводиться визначення частотозалежного коефіцієнту передачі коливань від екрану до приймача або від випромінювача до екрану. В [201] досліджувались поверхневі акустичні хвилі, щопадають на сенсор лінії затримки у формі прямокутної кварцової пластини. Вплив умов електродування на резонансні характеристики круглих однорідних пластин визначався в [10, 18, 194, 196].

Питання про гармонічні коливання електромеханічних багатошарових петрворювачів піднімаються в літературі відносно часто в зв'язку з їх широким використанням. В роботах [28, 75, 76, 210] розглядаються двовимірні усталені коливання шаруватих п'єзоелектричних циліндрів та куль. Огляд сучасного стану досліджень з коливань неоднорідних п'єзокерамічних циліндрів зроблено в [207]. В [49] оцінюється вплив дисипативного розігріву на коливання тришарової шарнірно закріпленої балки.

В більшості робіт при записі граничних умов на поверхнях спряження записуються рівняння нерозривності за механічними та електричними компонентами, нехтуючи клейовими прошарками та концентрацією напружень, а матеріальні характеристики вважаються дискретно сталими. Але навіть при такому спрощенні пошук аналітичних або навіть чисельних розв'язків задачі є досить

складними. Для їх розв'язання користуються методами і підходами, розвинутими для пружних та в'язкопружних елементів. Загальна теорія коливань анізотропних шаруватих композитних пружних структур побудована в [26, 43, 81, 124]. Ефективні матеріальні характеристики п'єзоактивних композитів визначалися в [41, 103, 108, 247]. На даний момент п'єзоелектричні композити є ефективним та надійним рішенням в ультразвуковій діагностиці, контрольно-вимірювальних приладах, зборі енергії, мікроелектроніці та ін.

ФГМ мають контролювані характеристики неднорідності, що дозволяє змінювати їх властивості (механічні, теплові, електричні) в певному напрямку. Це забезпечує більш раціональний розподіл навантаження та зменшує концентрацію напруження. В цих матеріалах різні матеріали об'єднуються без швів або меж, що знижує ризик розривів або міжфазних дефектів, які характерні для композитів. Функціональна неоднорідність матеріалу зазвичай спеціально проектується та реалізується для забезпечення особливих задач перетворення енергії, але також може виникати в процесі виготовлення внаслідок неоднорідності розподілу температурного поля та тиску.

Функціонально-неоднорідні п'єзоелементи імовірно вперше були розглянуті в роботах X.-H. Wu [144, 318], W. Q. Chen, H. J. Ding, L. Z. Wang, [166, 167, 183], C. Ying, S. Zhi-fei [324], H. L. Dai, Y. M. Fu, J. H. Yang [177] та ін. Більшість робіт присвячена вільним або вимушеним коливанням п'єзоелементів, аналітичні розв'язки розвинуті для статичних або одновимірних задач. Для тонкостінних елементів проводиться осереднення за товщиною та використовуються загально-прийняті підходи.

Усталені коливання п'єзоелементів з ФГМ досить часто розглядаються в літературі в зв'язку з актуальністю питання. Коливання функціонально-неоднорідних нанобалок з врахуванням флексоелектричного ефекту на основі узагальнених варіаційних принципів та теорії балок Ейлера-Бернуллі розглядалося в [175]. В [251] аналітично розв'язано задачу про статичне деформування круглих функціонально-неоднорідних за товщиною пластин. Аналітичний опис статичного стану функціонально-неоднорідних п'єзоелектричних оболонок

зроблено в [244]. В [192, 262, 303] проводиться дослідження вільних коливань пластин з ФГМ. В [135] розроблено уточнений підхід до аналізу ФГ оболонок та пластин. В [131] для прямокутних функціонально-неоднорідних пластин застосовується метод розділення змінних за планарними координатами. В [166] аналітично побудовано розв'язок задачі про напружено-деформований стан сферичної функціонально-неоднорідних оболонки при рівномірному обертанні. В [167] досліджуються вільні коливання радіально поляризованої функціонально-неоднорідної кулі шляхом введення функцій напружень та переміщень для розділення змінних та дискретизацією матеріальних характеристик за радіальною координатою. В [177] отримано аналітичний розв'язок статичної осесиметричної задачі для циліндра та кулі в залежності від параметра неоднорідності. В [325] розглядаються поширення збурень в магнітоелектропружних функціонально-неоднорідних п'єзокерамічних циліндрів, що складаються з п'єзоелектричного і магнітострикційного матеріалів з використуванням розвинення в ортогональний поліноміальний ряд Лежандра. В монографії [210] та супутніх роботах [28, 75-77, 208, 209] досліджуються вільні та гармонічні коливання неоднорідних в радіальному напрямку п'єзоелектричних циліндрів та куль. Вхідна крайова задача, що описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, шляхом застосування процедури представлення змінних у формі комбінацій стоячих і біжучих хвиль зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь, що розв'язується методом дискретної ортогоналізації із застосуванням покрокового пошуку.

1.3.2. Динамічні процеси з врахуванням дисипації енергії

Для отримання близьких до фізичної картини коливань елементів конструкцій результатів необхідно враховувати дисипативні властивості матеріалів. Загальні положення динаміки неідеально-пружних елементів конструкцій та механіки спадкового середовища викладено в роботах Я. Г. Пановка, Є. С. Сорокіна, Ю. Н. Работнова [98], Г. С. Писаренка та ін. [92, 93], В. В. Хільчевського,

В. Г. Дубенця [107], О. В. Савченко [102], С. F. Chazal, R. M. Pitti [164, 165] та ін. Коливання в'язкопружних елементів конструкцій досліджувалися в [56, 61, 62, 63, 64, 140, 188, 233, 234, 238, 264] та ін.

Експериментальне та теоретичне дослідження дисипативних властивостей п'єзокераміки досить активно розвивалося, починаючи з 1970-х років. Навіть для високодобротної жорсткої п'єзокераміки врахування дисипативних втрат є необхідним для отримання реалістичних розрахункових результатів. Розповсюдження п'єзоелектричних полімерів і п'єзокомпозиційних матеріалів на полімерній основі стимулювало побудову моделей в'язкопружної поведінки п'єзоелектричних матеріалів. В ряді робіт [21, 53, 55, 91, 178, 281, 310] встановлено, що п'єзоелектрики підпорядковуються закономірностям механіки спадкового середовища і мають амплітудно і частотно залежні пружні, діелектричні та п'єзоелектричні властивості.

Визначальні рівняння в'язкопружних матеріалів у межах спадкової теорії записуються у формі рівнянь Больцмана-Вольтерра, де ядра повзучості і релаксації визначаються з відповідних випробувань [98]. Але параметри ядер, одержані зі статичних випробувань, є неприйнятними для опису динамічної поведінки матеріалів. Тому при низьких рівнях напружень застосовується модель лінійного в'язкопружного матеріалу, де вважається, що властивості тіла не змінюються з часом. При гармонічних коливаннях приходимо до поняття комплексного модуля пружності, дійсна частина якого описує накопичення енергії в матеріалі, а уявна — розсіювання енергії. При динамічних випробуваннях експериментально визначаються дійсна і уявну частини комплексного модуля, які є, відповідно, синус- і косинус-перетвореннями Фур'є ядер релаксації матеріалу. Визначати ядра релаксації за отриманою залежністю комплексного модуля від частоти за допомогою зворотного перетворення Фур'є, щоб потім використовувати їх у динамічному розрахунку у вигляді прямого перетворення Фур'є, є нераціональним [102]. Найприроднішим є пряме використання частотно залежних комплексних модулів. Безпосереднє введення комплексних модулів в диференціальні рівняння руху є коректним лише при моногармонічних коливаннях. Введення комплекс-

них модулів для негармонічних динамічних процесів можливе лише після переходу в простір перетворень Фур'є.

Таким чином, врахування в'язкопружних властивостей п'єзокераміки при гармонічних збуреннях математично зводиться до введення частотно залежних комплексних матеріальних характеристик [58, 89, 120, 123]. Найбільшого розповсюдження набула концепція, згідно з якою втрати енергії в п'єзоелектричному тілі прийнято поділяти на пружні, діелектричні та п'єзоелектричні [21, 41, 54, 83, 129, 281].

Експериментальні дані динамічних випробувань реальних п'єзоелектричних матеріалів вказують на те, що їх дисипативні властивості залежать від амплітуди і частоти електромеханічного навантаження.

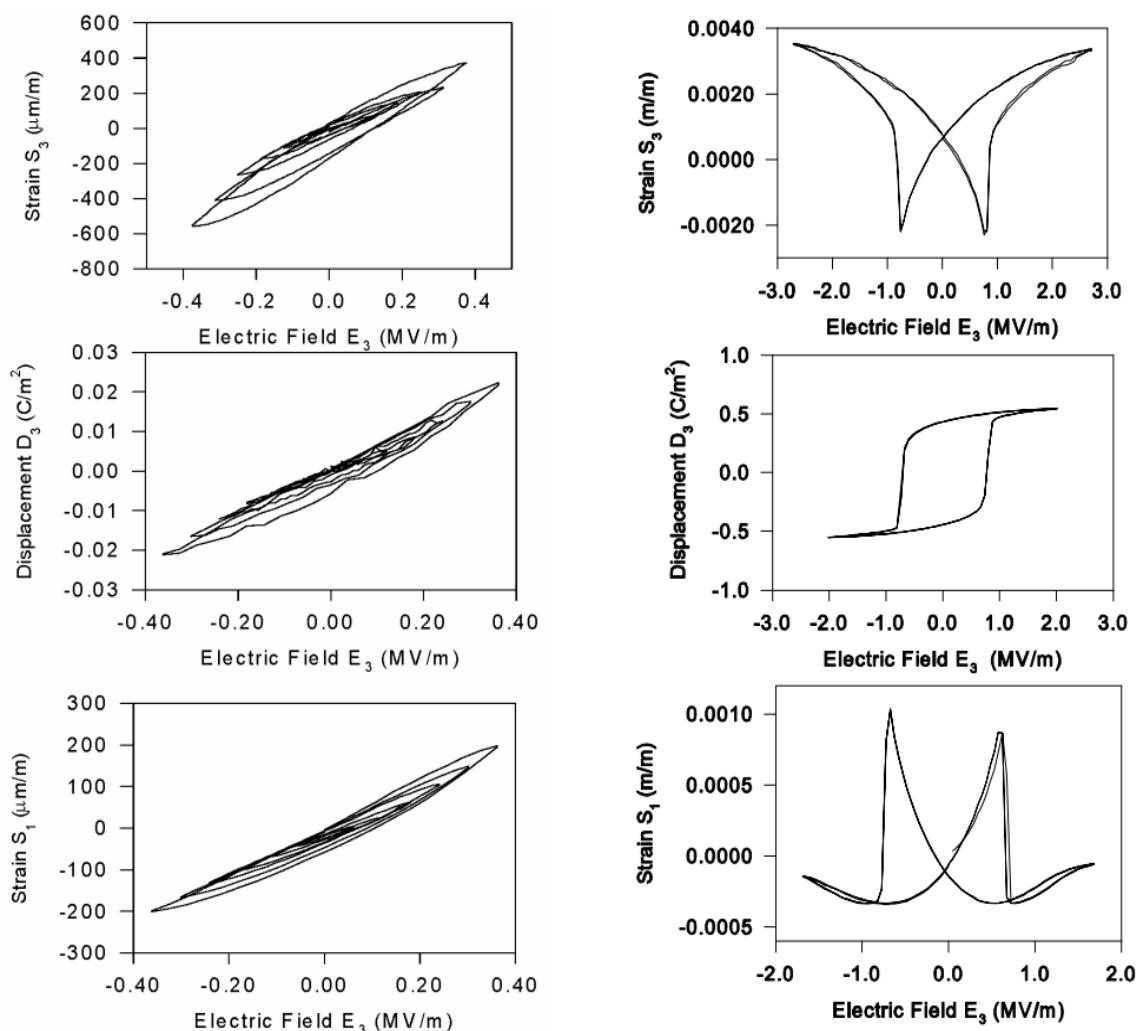


Рис. 1.8. Квазістатична польова залежність деформацій та електричної індукції у PZT в різних діапазонах зміни електричного поля [281]

Нелінійні ефекти в п'єзокераміці гарно ілюструються за допомогою результатів експериментальних досліджень п'єзоелементів при квазістатичних навантаженнях [281]. На рис. 1.8 наведено квазістатичну польову залежність деформації S_3 , електричного зміщення D_3 та деформації S_1 у PZT як функцій від напруженості електричного поля нижче коерсивного поля (рисунки зліва) та вище коерсивного поля (рисунки справа). Межа коерсивного поля складає $0,7 - 0,8 \text{ MB/m}$. Ці результати можуть бути використані для побудови скелетних кривих пружного та пластичного гістерезису в п'єзокераміці.

В полімерних матеріалах (рис. 1.9) значення тангенсів втрат досягають 10-15%. В високочастотному діапазоні також спостерігається частотна залежність матеріальних характеристик, що для полімерів може досягати 20% (рис. 1.9).

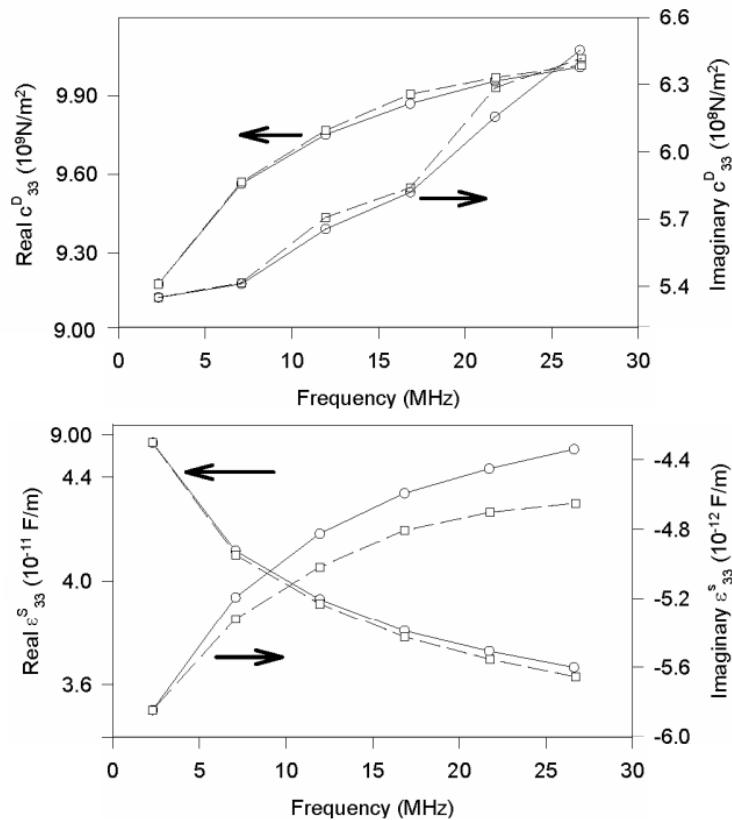


Рис. 1.9. Товщинні константи матеріалу, виміряні на двох різних зразках композитного полімеру PVDF-TRFE як функція частоти [281]

У [88] розглянуто задачу визначення релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів, в тому числі непорядкованого ПВДФ, при різних ре-

жимах нестационарного деформування. На рис. 1.10 наведено результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування полівінілхлоридного пластику при $t_j = 0,32(\circ); 1,23(\bullet); 2,74(\circ); 6,07(\bullet); 8,47(\bullet); 19,6 (\bullet)$ годин. Спостерігається близька до лінійної (порівняно з іншими пластичними матеріалами, розглянутими в роботі) залежність між напруженнями та деформаціями. На рис. 1.11 наведено експериментальні (крапки) та розрахункові (пунктирні лінії) криві релаксації напружень для полівінілхлоридного пластику. Експеримент показує падіння рівня напружень на 50% за 20 год, аналітичний розрахунок – близько 40%.

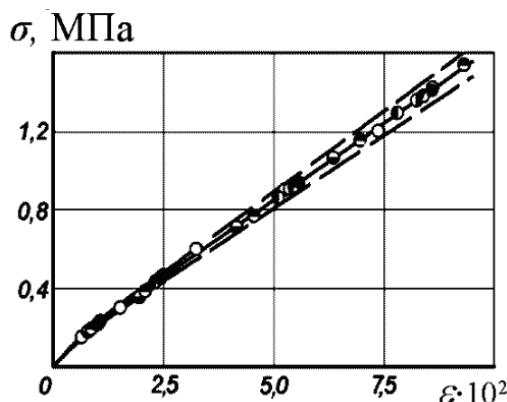


Рис. 1.10. Ізохронна діаграма деформування полівінілхлоридного пластику [88]

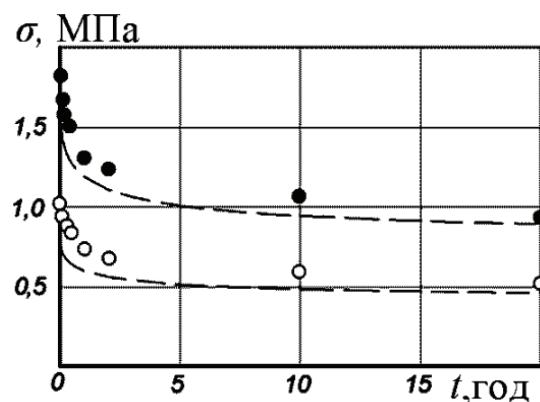


Рис. 1.11. Релаксація напружень для полівінілхлоридного пластику [88]

В роботі [264] описано експеримент на релаксацію напружень для п'єзоелектричного композиту з PZT волокнами з епоксидною матрицею при різних робочих температурах (рис. 1.12). Спостерігається нелінійна в'язкопружна поведінка та залежність кривої релаксації від рівня деформації. На основі отриманих кривих релаксації побудовано квазілінійну математичну модель в'язкопружної поведінки п'єзополімеру.

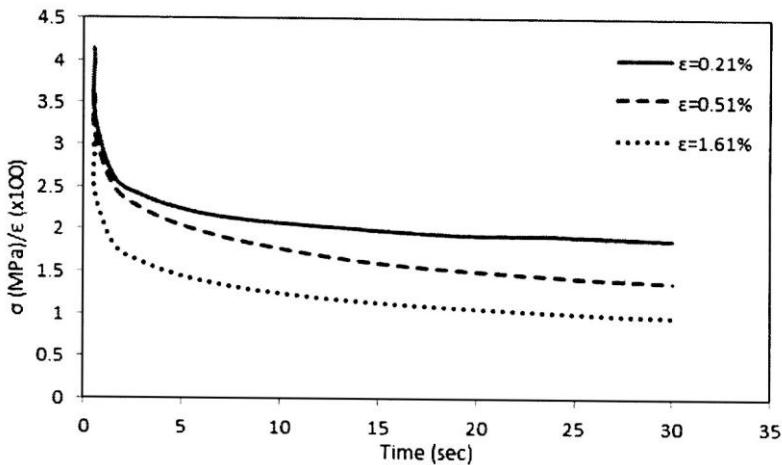


Рис. 1.12. Релаксація напруженень в п'єзоактивному композиті при різномірній рівні деформації при $T = 25^\circ C$ [264]

Питання визначення ефективних комплексних модулів композитних п'єзоелектричних матеріалів розглянуто в окремих роботах. В [108] отримано моделі волокнистих, шаруватих та з еліптичними включеннями п'єзоелектричних композитів в припущення одновісного напруженого стану та статичності навантажень. В [247] на основі підходу Морі-Танаки для шаруватого п'єзокомпозиту з епоксидною матрицею побудовано визначальні співвідношення для дійсних та уявних частин матеріальних характеристик з врахуванням дисипативних характеристик матриці та проведено порівняння з експериментом. В [41] описано математичну модель шаруватих п'єзоелектричних композитів з врахуванням електромеханічних та дисипативних характеристик складових матеріалів в просторі перетворення Фур'є.

До сучасних напрямків застосування п'єзоелементів відносяться активне керування коливаннями механічної конструкції (демпфування коливань) за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів, пов'язаних шунтувальними ланцюгами. В роботах [41, 48, 49, 57, 61, 63, 131, 157, 189, 195, 274, 327, 329] розглядаються питання взаємодії керованого елемента конструкції з елементами керування. Зазвичай в задачах такого типу аналізуються керування коливаннями елемента конструкції у формі балки або тонкостінного елемента з п'єзоелектричними накладками в межах моногармонічного наближення, де керо-

ваний елемент є пасивним, тобто пружним або в'язкопружним, а керуючий елемент є активним п'єзоелектричним актуатором, під'єднаним до електричного кола. Мета задачі полягає в розробці алгоритмів керуючого електричного сигналу в залежності від інформації, що надходить в інтегровані в об'єкт п'єзодатчики. Більш детальний огляд публікацій з цього питання зроблено в [201, 259, 270].

При тривалій роботі перетворювача на частоті, близькій до резонансної, внаслідок гістерезисних втрат і низької тепlopровідності матеріалу теплова енергія накопичується, тобто виникає дисипативний розігрів. Оскільки матеріальні характеристики п'єзокераміки функціонально залежать від температури, задача стає нелінійною, що вимагає особливих підходів та методів до розв'язання. Сучасні досягнення у вивченні коливань в'язкопружних п'єзоактивних елементів з врахуванням температурних ефектів стали можливими завдяки роботам В. Г. Ка-рнаухова, В. І. Козлова, І. Ф. Киричка, Я. О. Жука та ін. В [58, 61, 62, 150, 234, 241] застосовується метод скінчених елементів в комбінації з методом дискретної ортогоналізації. В [47, 327 – 329] проводиться лінеаризація отриманої системи рівнянь з подальшим застосуванням неявного методу Ейлера та ітеративним пошуком розв'язку.

При тривалому циклічному навантаженні п'єзоелемента відбувається старіння матеріалу, що виражається у накопиченні механічних пошкоджень на мікрорівні у частковій деполяризації (деорієнтації доменів) п'єзокераміки [95]. Математичні моделі, що описують це явище, запропоновано в [155, 164, 165]. В роботі [8] розвивається скінченноелементний підхід до аналізу деформування та руйнування елементів конструкції у формі тіл обертання при термосиловому навантаженні у лінійній та фізично і геометрично нелінійній постановці. Скінченноелементне моделювання та експериментальне дослідження нелінійних ефектів, що виникають в п'єзоелектричних збирачах енергії, розглянуто в [263]. Загалом питання залишається мало вивченим.

1.4. Коливання п'єзоелектричних тіл при нестационарних навантаженнях

Найбільш розповсюдженим режимом роботи п'єзокерамічних елементів є усталені коливання. Але навіть вихід на усталений режим вже є нестационарним режимом роботи. Крім того, прийом та випромінення імпульсного сигналу є розповсюдженими режимами роботи п'єзоелементів в гідроакустиці. В зв'язку з цим, дослідження коливань п'єзоелектричних елементів при нестационарних навантаженнях та переходні процеси (transient response), що виникають при цьому, є актуальною задачею, що потребує детального дослідження.

1.4.1. Аналітичні та чисельно-аналітичні методи досліджень

Загалом для розв'язання початково-крайових задач електропружності застосовується велике розмаїття аналітичних, чисельних та чисельно-аналітичних методів. Для побудови системи розв'язуючих рівнянь використовуються методи та підходи теорії пружності, теоретичної механіки, динаміки суцільного середовища, механіки спряжених полів, гідропружності, електродинаміки та теорії електричних кіл. Для побудови розв'язку застосовуються методи диференціального, інтегрального [69], операційного та варіаційного [7, 19] числення, теорії комплексної змінної та перетворення Фур'є [86]. Часто застосовують апарат розділення змінних, для чого застосовуються степеневі, тригонометричні або сплайні функції [50]. Потрібно відзначити, що отримання аналітичних результатів також вимагає застосування комп'ютерних методів обчислень і часто є наближеними, тобто обчисленими з певною точністю.

Врахування спряженості електричного та механічного полів в нестационарних задачах наштовхується на серйозні математичні труднощі, в зв'язку з чим аналітичні розв'язки отримано лише для обмеженого класу задач. Аналітичні методи досліджень одновимірних задач електропружності в нестационарній постановці розвивались в монографіях А. Е. Бабаєва [6], А. Ф. Улітка, О. Ю. Жарія [46], В. Г. Савіна [101], І. В. Янчевського [128], Ding H., Chen W. [182] та ін.

В акустоелектричних пристроях для прийому та випромінення акустичного сигналу, в тому числі нестационарного, найчастіше застосовуються п'єзоелементи у формі пластин, циліндрів та куль. Роботи [60, 70, 224, 242] присвячені розвитку аналітичних методів розв'язання задач нестационарної гідропружності та акустопружності оболонок та порожнистих тіл.

Для аналітичного розв'язання нестационарних одновимірних задач електропружності та пониження розмірності задачі з метою подальшого чисельного розв'язання широко використовуються інтегральне перетворення Лапласа, розклад розв'язку на квазістатичну та динамічну частину та зведення задачі до інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, метод розділення змінних, метод характеристик та ін. В [183, 184] дослідження коливань піроелектричної функціонально-неоднорідної та багатошарової сфери зводяться до розв'язання інтегрально-го рівняння типу Вольтерри другого роду, що розв'язується методом інтерполяції. В [222, 321] аналогічний підхід застосовується для неоднорідних електропружних циліндрів. В [221] розглядається нестационарне осесиметричне збурення неоднорідного магнітоелектропружного циліндра. Вводиться нова залежна змінна та застосовується розділення змінних, що приводить до двох інтегральних рівнянь типу Вольтерри. В [185, 186] нестационарні осесиметричні коливання п'єзокерамічних циліндрів та куль досліджувались методом розділення змінних та ітераційним інтегруванням за часом отриманого інтегрального рівняння.

Одним з базових чисельно-аналітичних підходів для задач електропружності є метод послідовних наближень, що дозволяє розщепити вхідну систему рівнянь електропружності на електричну та механічну задачу [116]. Дослідження товщинних коливань для плоских тіл або в умовах сферичної симетрії можливе з застосуванням методу характеристик [34, 292, 293]. В [262] досліджувалася нестационарна взаємодія сферичної оболонки з акустичним середовищем. За допомогою методу уявних зображень, методу розділення змінних і інтегрального перетворення Лапласа в часовій координаті задачу зведено до нескінченної системи інтегральних рівнянь Вольтерри з аргументами із запізненням. В роботі [152] аналізувалася реакція термоп'єзоелектричного функціонально-неоднорідного

циліндра на нестационарне збурення. Задача розв'язується в просторі перетворень Лапласа методом скінчених елементів на основі підходу Гальоркіна. Враховуються дисипативні властивості лише для температурного поля. В [312, 313] досліджуються нестационарні коливання багатошарових електропружин та неоднорідних магнітоелектропружин куль, в [311, 314] — багатошарових та функціонально-неоднорідних циліндрів.

Прийом акустичного сигналу п'єзоелектричним перетворювачем супроводжується розв'язанням оберненої задачі електропружності, що полягає в ідентифікації вхідного сигналу на основі отриманого електричного відгуку. Визначення вхідного імпульсного акустичного сигналу для біморфних балок та дисків проводились в роботах [128, 153, 154]. В цих роботах застосовувалося інтегральне перетворення Лапласа за часом, в просторі зображень розв'язувалося інтегральне рівняння типу Вольтерри та результат чисельно переводився в простір оригіналу. Для тіл канонічних форм, для яких можлива постановка задач в одновимірній формі, досить часто застосовуються аналітично-чисельні підходи, що базуються на перетвореннях Лапласа за часом або розвинення в ряди за базисними функціями. В будь-якому випадку на певному етапі розв'язання задачі застосовуються чисельні методи для розв'язання систем інтегральних або диференціальних рівнянь або переходу з простору зображень в простір оригіналів. При цьому при зміні вихідних умов (умов закріплення, навантаження, контакту з середовищем) застосовані базисні функції змінюються, що вимагає розв'язання нової задачі.

Проведений огляд показав, що у переважній більшості робіт при розв'язанні задач про нестационарні коливання п'єзоелектричних тіл використовуються математичні моделі матеріалів без врахування дисипативних властивостей, що може привести до значних похибок в оцінці прогнозованої електромеханічної поведінки п'єзоелемента.

Нестационарні коливання елементів конструкцій з врахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу на основі співвідношень лінійного спадкового середовища розглядались в [9, 63, 88, 102] та ін. Нестационарні коливання стержневих елементів з п'єзоелектричними дисипативними накладками на основі

у загальнення лінійної інтегральної залежності Больцмана-Вольтерра методом скінчених елементів досліджувались в [41, 189]. Розв'язок шукається в просторі перетворень Фур'є, що дає змогу використовувати комплексні частотно-залежні характеристики матеріалу. В [180] вищеописаний підхід застосовується для активного демпфування коливань багатошарової пластини з п'єзокерамічними на кладками.

Врахування дисипативних характеристик композитних матеріалів є актуальну задачею сучасного інженерного проєктування. Математичні моделі для дослідження динамічної поведінки шаруватих та волокнистих композитів побудовано в роботах [43, 81, 188, 199, 264] та ін. В монографії [102] запропоновано метод побудови рівнянь стану армованих волокнами та шаруватих композиційних матеріалів, що дозволяє врахувати розсіювання енергії в матеріалах – компонентах композита, в тому числі в'язкопружних. В роботі [41] даний підхід узагальнено на шаруваті п'єзоелектричні композити та досліджено ефективність перетворення енергії в залежності від масової частки п'єзокераміки та напрямку армування.

1.4.2. Чисельні методи розв'язання задач електропружності

Математична постановка двовимірних та тривимірних задач електропружності при нестационарних навантаженнях є досить складною. Розвиток аналітичних методів для таких задач є проблематичним, тому застосовуються чисельно-аналітичні або чисельні методи. В чисельно-аналітичних підходах розмірність задачі знижується за допомогою перетворення Лапласа, методом розділення змінних або шляхом розвинення за базисними функціями відносно однієї з координат. Отримане диференціальне рівняння або їх система розв'язується чисельно.

Математичні основи чисельних методів розв'язання краївих та початково-краївих задач наведено в [2, 8, 9, 29, 119]. Введення сіткових апроксимацій та основи теорії різницевих схем описано в [104, 105]. Математичні основи методу скінчених елементів описано в [200]. Напіваналітичний метод скінчених елементів у застосуванні до неоднорідних елементів конструкцій при нестацио-

нарних навантаженнях розвивався в роботі [9]. Побудова та застосування чисельних схем для задач механіки зв’язаних полів описані в [57, 58, 61, 62, 207, 210, 256, 305, 307] та ін. В [123] для дослідження гармонічних коливань п’єзокерамічних циліндрів пропонується варіаційно-різницевий метод. В роботах [84, 127, 128, 147, 240, 272] описано процедуру розрахунку електропружиних тіл методом скінченних елементів при різних типах динамічності постановки задачі.

В роботах [119, 210, 212, 285, 287, 288, 290, 294, 296] побудовано скінченнорізницеві чисельні схеми для дослідження нестационарних товщинних коливань п’єзоелектричних плоских тіл, порожнистих циліндрів та куль. В [117, 211, 287, 293] за допомогою методу скінченних різниць (MCR) розв’язано двовимірні нестационарні задачі для кулі, циліндра та призматичних тіл.

В монографії [114] для лінійних динамічних задач електропружності використовується узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень. У роботах [41, 180, 189] побудовано скінченно-елементні моделі електров’язкопружиних пластин у частотному просторі інтегральних перетворень Фур’є. На даний момент для тіл довільної геометрії найчастіше використовується метод скінченних елементів (MCE) [84, 128, 240].

Розвиток інформаційних технологій дає змогу застосовувати до задач механіки спряжених полів широке коло обчислювальних засобів, що доступні в численних існуючих на даний момент програмних комплексах. Задачі електропружності здатні розв’язувати наступні програмні комплекси на основі MCE: ACELAN, ANSYS, ATILA, COSMOS/M, Feapiezo, Flexpde, Pzflex. На даний момент світовим лідером в моделюванні та симуляції механіки деформівного твердого тіла (Structure Mechanics), спряжених полів (coupled fields), електроніки, акустики та гідроакустики є ANSYS. Застосування ПК ANSYS до задач механіки твердого тіла та електропружності описано в [40, 72, 84, 128]. В [127, 128] метод скінченних елементів застосовувався до розрахунку нестационарних коливань пакетних п’єзоелементів ускладненої форми.

Реалізація алгоритмів розв’язання задач електропружності можлива в середовищі MatLab [59, 73], Fortran, Visual Basic, MathCad, ANSYS APDL та інших

компільованих робочих середовищах. Численні вбудовані в ці програми бібліотеки математичних операцій та графічних реалізацій дають змогу застосовувати до обчислень широке коло математичних методів, спеціальних функцій, перетворень та візуалізувати отримані результати.

1.5. Задачі та структура дисертації

Широке застосування неоднорідних електров'язкопружних елементів в сучасних технічних пристроях зумовило підвищений інтерес до дослідження їх динамічного електромеханічного стану. Разом з тим, розробка та впровадження нових однорідних та неоднорідних матеріалів з п'єзоелектричними та в'язкопружними властивостями вимагає нових сучасних ефективних методів моделювання та симуляції реакції п'єзоелементів канонічних та ускладнених форм на усталені та імпульсні навантаження. Аналіз реакції п'єзоелементів на нестационарні навантаження з врахуванням неоднорідності та дисипації енергії в акустичному середовищі робить можливим розширення функціональних можливостей пристройів, що працюють на основі п'єзоэффекту, за рахунок їх роботи в переходних режимах.

З вищенаведеного огляду літератури випливає, що існуючі підходи до врахування неоднорідності та дисипативних властивостей в застосуванні до п'єзоелектричних тіл мало розвинуті та потребують певного узагальнення, реалізації та порівняння, як для усталених, так і для нестационарних коливань. Математична постановка відповідних практично орієнтованих задач, розробка ефективних аналітичних та чисельних методів та підходів, їх реалізація засобами ЕОМ, аналіз отриманих результатів з метою виявлення закономірностей та оцінки впливу додаткових факторів є важливою та актуальною проблемою сучасного стану механіки деформівного твердого тіла. Це потребує побудови нових ефективних чисельних методів та підходів до моделювання та аналізу конкретних режимів коливань.

При проектуванні пристрою, що функціонує за рахунок п'єзоэффекту, важ-

ливим є вибір оптимальної форми, розмірів, умов закріплення та навантаження елемента, що забезпечать максимально ефективне перетворення енергії, для чого раціонально застосовувати методи та підходи варіаційного числення та теорії оптимального керування. При цьому повинна бути забезпечена механічна та електрична міцність елемента, конструкція має бути технічно і економічно доступною. Наявність пасивних пружних або в'язкопружних шарів дає змогу підвищити міцність та покращити електроакустичну взаємодію перетворювачів з середовищем. Чисельне моделювання динамічних процесів дозволяє прогнозувати поведінку конструктивного елемента в проектованих робочих режимах та реакцію на зміну умов функціонування. У зв'язку з розвитком нанотехнологій і нових матеріалів, ще більш актуальним стає дослідження п'єзоелектричних функціонально-неоднорідних матеріалів та п'єзоелементів на їх основі, оскільки відкриває нові можливості для створення пристрій з підвищеною ефективністю і продуктивністю. Вищенаведений перелік задач частково розглянуто та реалізовано в публікаціях за темою дисертації. Математична постановка, реалізація та отримані результати відповідних задач повністю представлено в дисертації.

За структурою дисертація складається з п'яти розділів, літератури та додатків. В першому розділі дисертації наведено огляд стану досліджень з механіки електров'язкопружних тіл. Особливу увагу приділено існуючим методам розв'язання задач спряжених полів з врахуванням неоднорідності та в'язкопружних властивостей матеріалу. Проаналізовано найбільш поширені та актуальні методи і підходи до розв'язання стаціонарних та нестаціонарних задач електропружності. Для розв'язання задач коливань п'єзоелектричних тіл простої геометрії використовуються аналітичні підходи на основі перетворень за Лапласом та Фур'є, методу характеристик, розщеплення змінних та ін. Для тіл складнішої геометрії або способу навантаження використовуються чисельні методи (метод скінченних елементів (МСЕ), метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-сплайновий метод (ВРМ)).

В другому розділі наведено вхідні співвідношення гідроелектров'язкопружності для постановки задач дослідження динамічного електромеха-

нічного стану п'єзоелектриків. Описано термодинамічні основи матеріальних співвідношень для п'єзоелектриків, існуючі підходи до врахування дисипації енергії, визначення ефективних характеристик композитних матеріалів, умови контакту коливного тіла з акустичним середовищем.

В третьому розділі для дослідження усталених коливань п'єзоелектричних тіл обертання у просторовій постановці розвинуто варіаційно-сплайнний метод та метод на основі гамільтонового формалізму розв'язання задач електропружності. Розв'язання отриманих краївих задач виконується методом дискретної ортогоналізації. Дисипативні властивості матеріалу враховуються за допомогою комплексних модулів або за демпфуванням за Релеєм. Реалізація запропонованих підходів виконана для дослідження гармонічних осесиметричних коливань п'єзоелектричних радіально поляризованих порожнистих циліндрів скінченної довжини. Проводиться дослідження резонансних коливань для однорідних та композитних циліндрів, встановлюється залежність між електромеханічним відгуком та часткою п'єзокераміки в композиті.

Також в третьому розділі пропонується чисельний метод дослідження радіальних нестационарних коливань тонких круглих та кільцевих поляризованих за товщиною п'єзоелектричних пластин при електричних та механічних збуреннях. Визначається електрорушійна сила п'єзоелемента при різних способах механічних навантажень.

У четвертому розділі пропонується узагальнений чисельний підхід до дослідження нестационарних коливань п'єзоелектричних тіл з викривленими поверхнями. Підхід дозволяє розглядати динамічний осесиметричний електромеханічний стан п'єзоелектричних однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних плоских тіл, циліндрів та куль. Для врахування дисипації енергії пропонується чотирипараметрична модель демпфування коливань, що включає в себе демпфування за Релеєм, в'язкопружну модель Кельвіна-Фойгта, діелектричні та п'єзоелектричні коефіцієнти демпфування. Розвинутий підхід застосовано для дослідження коливань багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелектричних тіл з врахуванням дисипативних властивостей матеріалів та

впливу акустичного середовища при нестационарних збуреннях.

В п'ятому розділі описується розроблений підхід до аналізу функціонально-неоднорідних п'єзоелементів в тривимірній постановці методом скінчених елементів з врахуванням демпфування коливань. Проводиться модальний, гармонічний та нестационарний розрахунок. Дисипація енергії враховується за допомогою комплексних модулів або за допомогою демпфування за Релеєм та частотно-незалежного демпфування. Проводиться порівняння високодобротної та низькодобротної п'єзокераміки, визначаються дисипативні характеристики п'єзоелемента.

Основні результати роботи полягають у розробці загальної методики моделювання динамічних процесів в неоднорідних електров'язкопружних тілах, що включає: постановку динамічних задач електров'язкопружності для неоднорідних тіл; розробку прямих чисельних методів дослідження усталених та нестационарних коливань; розв'язок окремих задач динамічного деформування та генерації напруги п'єзоелектричними елементами, в тому числі з врахуванням впливу акустичного середовища; розширення класів розв'язаних задач на випадок функціонально-неоднорідних електров'язкопружних тіл складної форми. З застосуванням розвинутої методики досліджено динамічні електромеханічні стани п'єзоелектричних перетворювачів плоскої, циліндричної та сферичної форм при усталених та нестационарних навантаженнях, встановлено нові закономірності та особливості коливань п'єзоелементів однорідної, багатошарової, композитної та функціонально-неоднорідної структури.

РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ГІДРОЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

У розділі наводяться основні співвідношення фізико-математичної моделі усталених та нестационарних коливань п'єзоелементів, дано постановку початково-крайових задач електропружності, описується взаємодія механічного та акустичного полів. Викладені основні положення теорії зв'язаного деформування п'єзоелектриків, зокрема: теорії лінійного деформування твердих тіл, електродинамічні рівняння Максвелла для речовини і їх квазістатичні наближення для електричного поля, теорія матеріальних співвідношень. Стисло проведено термодинамічний аналіз матеріальних залежностей при гармонічних процесах, описано концепцію комплексних модулів і розсіювання енергії, виведено рівняння тепlopровідності з врахуванням дисипативних втрат.

В якості вхідних даних в роботі використовуються просторові рівняння лінійної теорії пружності та електропружності, а саме рівняння руху, квазістатичне наближення рівнянь Максвела, матеріальні співвідношення в конкретній формі, співвідношення Коши для деформацій. Використовуються рівняння електропружності та акустики в криволінійних системах координат. Описуються механізми затухання коливань та дисипації енергії. Застосовуються класичні математичні моделі, достовірність яких підтверджена розв'язками багатьох практично важливих задач динаміки конструкцій, в'язкопружності, електропружності, електров'язкопружності, гідроелектропружності однорідних і неоднорідних структур.

При написанні розділу використано наступні джерела: [79, 89, 95, 102, 120, 123, 128, 206, 210, 225, 272] та ін.

2.1. Співвідношення теорії пружності, електродинаміки та акустики

Теорія гідроелектров'язкопружності неоднорідного середовища спирається на фундаментальні положення теорії пружності, варіаційного числення, електродинаміки, термодинаміки, гідродинаміки в акустичному наближенні. Для опису дисипативних властивостей застосовується теорія коливань неконсервативних систем, механіка спадкового середовища, реологічні співвідношення.

2.1.1. Основні положення теорії пружності

Віднесемо тверде тіло до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 . Напружене-деформований стан суцільного середовища в довільній точці тіла з координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ описується симетричними тензорами напружень та

деформацій

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

В межах малих деформацій тензор деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ пов'язаний з компонентами вектора переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1, u_2, u_3)$ наступним чином:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right]. \quad (2.2)$$

Тут і надалі ∇ — векторний просторовий диференціальний оператор, який в декартовій системі координат в \mathbb{R}^3 має вигляд оператора Гамільтона

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

а символ « T » позначає операцію транспонування. В індексному записі компоненти тензора (2.2) визначаються як

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}).$$

Кома перед індексом є знаком диференціювання за відповідною координатою.

Рівняння руху має класичний для механіки суцільного середовища вигляд:

$$\nabla^T \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (2.3)$$

де $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{x},t), f_2(\mathbf{x},t), f_3(\mathbf{x},t))$ — вектор масових сил на одиницю об'єму; ρ — густота матеріалу. Об'ємні сили враховуються в ситуаціях, коли суттєві гравітаційні ефекти, температурні напруження або масові сили іншої природи, але зазвичай $\mathbf{f} = 0$. Дві крапки над літерою означають другу похідну за часом.

Фізичні залежності між компонентами тензорів $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в межах малих деформацій мають вигляд

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{C} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}},$$

де \hat{C} — тензор третього порядку ($3 \times 3 \times 3$) пружних сталих; двокрапка означає згортку тензорів.

Напруження на довільному майданчику з одиничною нормаллю \mathbf{n} визначаються як

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}.$$

На внутрішній поверхні розриву фізико-механічних характеристик при ідеальному механічному контакті виконуються умови нерозривності

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}; \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}^{(2)}. \quad (2.4)$$

Механічні граничні умови формулюються у вигляді заданих в кожній точці поверхні тіла переміщень, напружень або їх комбінації:

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{y}_S \cap \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}}|_{S_\sigma} = \mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cap (\alpha \mathbf{u} + \beta \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{n}})|_{S_{u\sigma}} = \mathbf{b}_{\mathbf{n}}, \quad (2.5)$$

де вимушене поверхневе зміщення \mathbf{y}_S і зовнішнє навантаження $\mathbf{p}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{b}_{\mathbf{n}}$ вважаються відомими функціями координат і часу.

До граничних умов (2.7) при нестационарних навантаженнях додаються початкові умови, якими задаються переміщення і швидкості переміщень в усіх точках об'єму в початковий момент часу:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{Y}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{W}_0. \quad (2.6)$$

2.1.2. Вхідні спiввiдношення мeханiки композитiв

Моделювання неоднорiдних матерiалiв базується на так званому принципi макроскопiчної гомогенностi (однорiдностi) [43, 81, 102, 108], згiдно з яким у гетерогенному середовищi можна видiлити елемент об'єму (представницький елемент), характеристики якого в середньому визначають поведiнку неоднорiдного матерiалu.

Осереднені за об'ємом напруження та деформації визначаються залежностями

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dV; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) dV. \quad (2.7)$$

Ефективні модулі в фізичних залежностях

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \quad (2.8)$$

описуються тензором C_{ijkl} , якщо визначені середні значення компонентів тензорів напружень і деформацій (2.7). Використовуються також енергетичні методи, згідно до яких ефективні модулі визначаються з рівності енергій деформації, які накопичуються в гетерогенному і еквівалентному гомогенному середовищі

$$\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} C_{ijkl} \langle \varepsilon_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle.$$

Для цього необхідно мати розв'язок відносно напружень і деформацій в ненеоднорідному середовищі, що є складною математичною задачею. На даний момент більш поширеними є наближені методи визначення ефективних модулів, котрі базуються на припущеннях щодо напруженого і деформованого стану компонентів представницького об'єму. Очевидно, що реалістичність припущень залежить від складності геометричної форми мікрооб'ємів. Найбільш простим є припущення Фойгта і Рейсса [41, 43, 71, 102, 108]. Згідно до гіпотези Фойгта, деформації по представницькому об'єму матеріалу є сталими. Згідно до гіпотези Рейсса сталими по об'єму вважаються напруження. Очевидно, що в випадку використання гіпотези Фойгта напруження не задовольняють умовам рівноваги, а при використанні гіпотези Рейсса деформації не задовольняють умовам нерозривності. Виходячи з принципу мінімуму потенціальної енергії, наближення Фойгта і Рейсса приводять, відповідно, до верхньої і нижньої границь ефективних пружних сталих для композитних матеріалів довільної структури.

При комбінуванні підходів Рейсса і Фойгта ефективні механічні характеристики двокомпонентного односпрямованого композита з ізотропними складовими

обчислюються за допомогою правила суміші [71]

$$E_1^* = cE_f + (1 - c)E_m; \quad \nu_{12}^* = c\nu_f + (1 - c)\nu_m;$$

$$E_2^* = \frac{E_f E_m}{cE_m + (1 - c)E_f}; \quad G_{12}^* = \frac{G_f G_m}{cG_m + (1 - c)G_f},$$

де $E_f, E_m, G_f, G_m, \nu_f, \nu_m$ — відповідно модулі Юнга, модулі зсуву і коефіцієнти Пуассона волокна і матриці; c — об'ємний вміст волокон в композиті.

В роботі [71] проведено порівняння механічних характеристик односпрямованого вуглепластика ЛУ-3/ЕД20, отриманих експериментальним шляхом та теоретично з використанням підходів Рейса-Фойгта, Хілла-Хашінга, Кільчинського-Хашіна-Розена, Ваніна. З цих результатів можна зробити висновок, що комбінація гіпотез Рейсса та Фойгта дає змогу знайти ефективні механічні характеристики з достатньою точністю.

Для реалізації ефективного процесу проєктування конструкцій з композиційних матеріалів потрібно застосовувати відповідні математичні моделі, що описують особливості структури, електромеханічні властивості та дисипативні характеристики композиту. До найбільш відомих і поширеніших в практичних розрахунках методів побудови математичних моделей композитів відносяться методи безпосереднього усереднення по макрооб'єму, варіаційні методи, методи регуляризації структури, методи стохастичних диференціальних рівнянь, методи віріального розкладу, самоузгодження та ін. [43, 81, 102, 108].

2.1.3. Електродинамічні співвідношення для речовини

Електромагнітні процеси в теорії макроскопічної електродинаміки описуються рівняннями Дж. К. Максвелла. Вони включають чотири рівняння, котрі формулюють інтегро-диференціальні залежності між компонентами електричного та магнітного полів [74, 85, 96, 237]. та ін.

Перші два рівняння Максвелла описують залежності між вектором напруженості електричного поля **E** і вектором магнітної індукції **B**

$$rot \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad div \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

що є узагальненням закону електромагнітної індукції Фарадея і теореми Гаусса-Остроградського для магнітного поля [74].

Інші два рівняння стосуються вектора напруженості магнітного поля \mathbf{H} та вектора індукції електричного поля \mathbf{D} . Тут використовується вектор щільності струму \mathbf{i} та щільність електричних зарядів ρ_e :

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad div \mathbf{D} = \rho_e. \quad (2.10)$$

Вони є узагальненням закону про взаємодію магнітного поля з електричними струмами та теореми Гаусса-Остроградського для електричного поля [74]. У першому з рівнянь (2.10) враховується так званий струм зміщення, який протікає в середовищі під дією електричного поля і пов'язаний з переносом електричних зарядів. Щільність струму зміщення визначається за формулою $\mathbf{i}_{zm} = \partial \mathbf{D} / \partial t$. Цей струм так само супроводжується магнітним полем, як і струм провідності. На відміну від струму провідності струм зміщення не нагріває середовище, в якому поширюється.

До повного струму, який протікає в певному середовищі, окрім струму провідності та струму зміщення, може входити ще сторонній струм. Цей струм створюється не електричним полем, а іншими чинниками, наприклад, хімічними, радіаційними, тощо. З урахуванням сторонніх струмів перше рівняння з системи (2.9) набуде вигляду

$$rot \mathbf{H} = \mathbf{i} + \mathbf{i}_{ct} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Введення стороннього струму може помітно спростити задачу, в якій відсутні повні вхідні дані електричного поля.

В індексній формі система рівнянь Максвелла (2.9), (2.10) має вигляд

$$e_{ijk} E_{k,j} = -\frac{\partial B_i}{\partial t}; \quad B_{i,i} = 0;$$

$$e_{ijk} H_{k,j} = i_i + \frac{\partial D_i}{\partial t}; \quad D_{i,i} = \rho_e; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Тут множники e_{ijk} — альтернуочі символи Леві-Чевіти, що дорівнюють нульові, коли два довільні індекси рівні між собою; дорівнюють $+1$, коли індекси i, j, k є парною перестановкою цифр 1,2,3; дорівнюють -1 , якщо індекси i, j, k є непарною перестановкою цифр 1,2,3.

Більш широку область застосування мають рівняння Максвелла в інтегральній формі запису [120]

$$\oint_L H_i dx_i = \int_S n_i i_i dS + \int_S n_i \dot{D}_i dS; \quad \oint_L E_i dx_i = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S n_i B_i dS;$$

$$\oint_S n_i D_i dS = \int_V q_e dV; \quad \oint_S n_i B_i dS = 0. \quad (2.11)$$

В рівняннях (2.11) L — замкнутий контур з правостороннім обходом, на який натягнута поверхня S ; V — об'єм середовища, обмежений замкнutoю поверхнею S . З рівнянь Максвелла в інтегральній формі випливають умови спряження на поверхні розділу середовищ 1 та 2, які відрізняються своїми електромагнітними властивостями

$$E_\tau^{(1)} = E_\tau^{(2)}; \quad D_n^{(1)} - D_n^{(2)} = q_s;$$

$$H_\tau^{(1)} - H_\tau^{(2)} = \sigma_s; \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad (2.12)$$

де $D_n = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$, $B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ — проекції векторів електричної індукції та вектора магнітної індукції на нормаль до поверхні розділу середовищ; $E_\tau = |\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}|$, $H_\tau = |\mathbf{H} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})\mathbf{n}|$ — проекції векторів напруженостей електричного та магнітного полів на поверхню спряження; q_s — щільність поверхневого заряду; σ_s — щільність поверхневого струму.

На границях розділу між діелектриками S_p , що мають високу відносну діелектричну проникність (порядку 10^3), і матеріалами з малою діелектричною проникністю, такими як повітря, вода, ізоляючі матеріали та ін., перші дві умови (2.12) зводяться до однієї [89, 120, 123]:

$$D_n|_{S_p} = q_s. \quad (2.13)$$

З першого рівняння Максвелла в інтегральній формі (2.11) випливає [120], що повний струм є сумою струмів провідності та зміщення

$$I = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{D}} dS, \quad (2.14)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S , що спирається на контур L з правогвинтовим напрямом обходу контуру.

Повна система крайових умов (2.12 – 2.14) містить умови для складових векторів напруженості та індукції електричного і магнітного полів. Але в теорії електропружності рівняння Максвелла використовуються в квазіелектростатичному наближенні для електричних складових, оскільки в випадку акустичного наближення швидкість поширення хвиль електроманітного поля на декілька порядків вища, ніж швидкість поширення механічних хвиль. Крім того, п'єзоелектрики не мають вільних електричних зарядів. В зв'язку з цим в класичній теорії електропружності магнітні ефекти не враховуються, а зміна електричного поля вважається миттєвою. Детальніше питання перетворення рівнянь Максвела для п'єзоелектриків описано в [85, 89, 120, 156, 254 та ін.].

З (2.9) отримуємо рівняння Максвела для електричного поля в квазістатичному наближенні

$$\nabla \mathbf{D} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad (2.15)$$

З другого рівняння (2.15) випливає, що напруженість електричного поля має потенціал, або

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad \text{або} \quad E_i = -\varphi_{,i}, \quad (2.15)'$$

де φ – електростатичний потенціал напруженості електричного поля.

Припущення, що магнітне поле відсутнє ($\mathbf{B}=0$), призводить до суперечності в першому рівнянні (2.9). В [210] магнітні ефекти в першому наближенні оцінюються як

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\omega r}{2c^2 \epsilon_0} \mathbf{E}_0 \approx (10^{-7} \div 10^{-4}) \mathbf{E}_0, \quad (2.16)$$

де кругова частота коливань ω лежить в межах $10 \div 500 \text{ кГц}$, розміри п'єзоелектричного тіла r в межах $0,1 \text{ м}$. Очевидно, що при оцінці (2.16) магнітні ефекти є незначними порівняно з електричними.

Формулювання електричних граничних умов залежить від способу збурення коливань п'єзокерамічного тіла. В випадку збурення коливань електричним полем від генератора напруги на під'єднаних до нього поверхневих електродах S_i ($i = 0,1$) задається відома різниця потенціалів $V(t)$ як функції часу:

$$\varphi|_{S_0} = \varphi_0(t); \quad \varphi|_{S_1} = \varphi_1(t); \quad V(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t). \quad (2.17)$$

На короткозамкнутих електродах $V(t) = 0$.

Якщо електроди підключенні до джерела струму $I(t)$, то на них виникає невідома різниця потенціалів $V(t)$. Ця ситуація описується інтегральною граничною умовою

$$I(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_I} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.18)$$

яка випливає з закону Кірхгофа для електричного кола зі струмом зсуву I .

При розімкнутих електродах (режим холостого ходу) значення різниці потенціалів на електродах визначається з умови

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_0} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 . \quad (2.19)$$

При цьому невідома різниця потенціалів між електродами $V(t) = \varphi_0 - \varphi_1$ входить в останню рівність неявно і визначається через розв'язання граничної задачі.

На неелектродованій частині поверхні п'єзокерамічного тіла з великою діелектричною проникністю при умові, що діелектрична проникність зовнішнього середовища значно менша за діелектричну проникність п'єзокераміки (тіло оточене повітрям або вакуумом), q_s – щільність вільних зарядів на поверхні, і відповідна гранична умова приймає вигляд

$$D_{\mathbf{n}}|_{S_D} = q_s . \quad (2.20)$$

За відсутності вільних зарядів $D_{\mathbf{n}}|_{S_D} = 0$.

На поверхні розділу S_m двох твердих середовищ m і $m+1$ виконується умова нерозривності електричного потенціалу та нормальної складової електричної індукції:

$$\varphi^m|_{S_m} = \varphi^{m+1}|_{S_m} ; \quad D_n^m|_{S_m} = D_n^{m+1}|_{S_m} . \quad (2.21)$$

Щільність внутрішньої електричної енергії U визначається як

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} .$$

Закон збереження електричної енергії для п'єзоелектриків без врахування втрат записується як

$$\iint_S \varphi \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ds = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV .$$

2.1.4. Поширення збурень в акустичному середовищі

Поширення звукових хвиль в газах та рідинах супроводжується локальною зміною в часі трьох характеристик стану: густини ρ середовища поширення; внутрішнього тиску p ; швидкості руху \mathbf{v} частинок або елементарних об'ємів. Загалом, змінні стану можуть бути представлені у вигляді [272]

$$\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{r},t); \quad p(\mathbf{r},t) = p_0 + \tilde{p}(\mathbf{r},t); \quad \mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t),$$

де ρ_0 , p_0 , \mathbf{v}_0 — густина, тиск і швидкість для незбуреного середовища, відповідно. Позначення $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , $\tilde{\mathbf{v}}$ вводимо для відхилень від стану рівноваги, що виникають внаслідок поширення хвилі. Ці величини позначаються як акустичні густина, тиск звуку і акустична швидкість частинки. Кожної з них достатньо, щоб повністю визначити звукове поле, тому $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , $\tilde{\mathbf{v}}$ також називаються величинами звукового поля.

Залежно від частоти коливань f , акустичний сигнал класифікується як

- інфразвуковий: $f \leq 16 \text{ Гц}$;
- акустичний діапазон: $16 \text{ Гц} < f \leq 20 \text{ кГц}$;
- ультразвуковий: $20 \text{ кГц} < f \leq 1 \text{ ГГц}$;
- гіперзвуковий: $1 \text{ ГГц} < f$.

Поширення звуку супроводжується локальною зміною густини середовища поширення. При цьому виконується закон збереження маси. Маса елементу об'єму дорівнює

$$m(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r},t) d\Omega.$$

Додатній потік маси через поверхню об'єму S на протязі інтервалу часу dt буде зменшувати масу всередині об'єму Ω . Таким чином маємо

$$\oint_S \rho(\mathbf{r},t) \mathbf{v}(\mathbf{r},t) dt \cdot dS = - \int_{\Omega} [\rho(\mathbf{r},t+dt) - \rho(\mathbf{r},t)] d\Omega.$$

Розвиваючи функцію $\rho(\mathbf{r}, t + dt)$ в ряд Тейлора та застосовуючи теорему про дивергенцію, маємо

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\Omega,$$

звідки отримуємо рівняння нерозривності

$$\nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Для вивчення збереження моменту поширення звуку, розглянемо положення $\mathbf{r}(t) = (x_1, x_2, x_3)$ нескінченно малого об'єму $d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3$ кубічної форми, що рухається з середовищем. В випадку газу або нев'язкої рідини, тиск змінюється з рухом середовища через репульсивну силу $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{r}, t), F_2(\mathbf{r}, t), F_3(\mathbf{r}, t))$. З врахуванням розвинення в ряд Тейлора з суми моментів всіх сил маємо

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\nabla p(\mathbf{r}, t) d\Omega.$$

З іншого боку, за законом Ньютона маємо

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) d\Omega,$$

де \mathbf{a} – вектор пришвидшення:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Прирівнюючи вирази, маємо рівняння Ейлера в диференціальній формі

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p,$$

Конвективне пришвидшення $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ враховує ефекти незалежного від часу пришвидшення в рідині в відношенні до простору.

Співіншенння між функціями ρ, \mathbf{v}, p не є довільним і описується

рівнянням стану. За відносно малих відхилень від стану рівноваги вважаємо, що

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}, \quad (2.22)$$

що є фундаментальним рівнянням акустики в лінійному наближенні. При великих відносних відхиленнях виникають нелінійні ефекти, описані в літературі [94].

Для ідеальних газів рівняння адіабатичного стану записується як

$$\frac{p_0 + \tilde{p}}{p_0} = \left(\frac{\rho_0 + \tilde{\rho}}{\rho_0} \right)^k, \quad (2.23)$$

де $k = C_p / C_v$ – адіабатична експонента, що є відношенням питомої теплоємності при сталому тиску до питомої теплоємності при сталому об’ємі. Поєднуючи (2.22), (2.23) та рівняння ідеального газу $\tilde{p} = \tilde{\rho} R_{\text{gas}} T$, маємо швидкість поширення звуку в ідеальному газі

$$c_0 = \sqrt{k \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{k R_{\text{gas}} T}.$$

Тут R_{gas} – універсальна газова стала, T – температура.

Динамічні процеси у в'язкій стисливій рідині описуються рівняннями лінеаризованої теорії Нав'є-Стокса [38]. Використовуються наступні позначення: v_a – кінематичний коефіцієнт в'язкості; $\rho_a = \rho_0$ – густина рідини в стані спокою; $c_a = c_0$ – швидкість поширення звуку в нев'язкій рідині; ∇^2 – оператор Лапласа. В прийнятих позначеннях маємо рівняння руху, рівняння нерозривності і рівняння стану

$$v_a \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{v_a}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho_a} \nabla p = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}; \quad -\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \rho}{\partial t}; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = c_a^2.$$

Швидкість виразимо через Ψ і \mathbf{X} – скалярний і векторний потенціали:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Psi + \nabla \times \mathbf{X}).$$

Отримуємо наступні вирази для компонент акустичного поля [128]:

$$\nu_a \nabla^2 \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}; \quad \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\nu_a}{c_a^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_a}{c_a^2} \left(\frac{4}{3} \nu_a \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}; \quad p = \rho_a \left(\frac{4}{3} \nu_a \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

На практиці часто використовується модель нев'язкої (ідеальної) стисливої рідини. В співвідношеннях (2.24) покладаємо $\nu_a = 0$, $\mathbf{X} = 0$, $\psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Тоді рівняння руху і всі шукані характеристики динамічного рідкого середовища записуються через потенціал швидкості ψ :

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}; \quad \mathbf{v} = \nabla \psi; \quad p = -\rho_a \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Рівняння (2.25) є класичними співвідношеннями моделі акустичного наближення, що є прийнятною для більшості задач гідроакустики [1, 39, 42, 44, 94, 102, 112, 265] та ін.

При акустичному контакті твердого середовища з рідким на поверхні S_a виконується умова рівності нормальних до поверхні S_a швидкостей та нормальних напружень з гідродинамічним тиском:

$$\left. \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right) \right|_{S_a} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Big|_{S_a}; \quad \sigma_n \Big|_{S_a} = \rho_a \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{S_a}. \quad (2.26)$$

Для хвиль, що поширяються в необмеженому просторі, виконується умова згасання розв'язку на нескінченості. Для збіжних хвиль у скінчених об'ємах розв'язок повинен бути обмеженим.

Користуючись акустичними величинами $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , $\tilde{\mathbf{v}}$, введемо акустичну інтенсивність I_{ac} як векторну величину (вимірюється в $\text{Вт}/m^2$), та акустичну

потужність P_{ac} джерела звуку (вимірюється в Вт):

$$\mathbf{I}_{\text{ac}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{p}(\mathbf{r}, t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t); \quad P_{\text{ac}}(t) = \oint_A \mathbf{I}_{\text{ac}}(\mathbf{r}, t) dA,$$

де поверхня A оточує джерело звуку.

2.2. Основи теорії електропружності

Рівняння руху в лінійній теорії електропружності співпадають з рівнянням руху (2.3) теорії пружності в класичній постановці. Електричне поле підпорядковується рівнянням Максвелла в квазістатичній постановці (2.9) та (2.10). Деформації виражаються через переміщення за допомогою співвідношень Коші (2.2). Для замикання системи диференціальних рівнянь електропружності потрібно встановити матеріальні співвідношення, що описують зв'язок між компонентами механічного та електричного полів. Скористаємося для цього енергетичними залежностями та термодинамічними потенціалами.

2.2.1. Матеріальні співвідношення для п'єзокераміки на основі термодинамічних потенціалів

В певних межах температур та навантажень прямий та обернений п'єзоefекти є зворотними та взаємно оберненими. Зв'язок електричного та механічного полів описується через рівняння стану, що випливають з енергетичних співвідношень та термодинамічних потенціалів для п'єзоелектриків [89, 120, 123, 206, 210].

Розглянемо енергетичні співвідношення для п'єзоелектриків. Відправними рівняннями будуть механічні рівняння руху (2.3) і основні рівняння Максвелла для діелектриків (2.9) та (2.10) при $i_i = \rho_e = 0$. Розглянемо тіло з об'ємом V , обмежене поверхнею S . Домножуємо рівняння (2.3) на \dot{u}_i , (2.9) та (2.10) на H_i, E_i , відповідно, та отримуємо тотожність

$$\int_V \left(\rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij,j} - f_i \right) \dot{u}_i dV + \int_V \left[E_i \left(\dot{D}_i - e_{ijk} H_{k,j} \right) + H_i \left(\dot{B}_i + e_{ijk} E_{k,j} \right) \right] dV \equiv 0.$$

Застосовуючи теорему Остроградського-Гауса, граничні умови (2.5), і тодіжність $H_i e_{ijk} E_{k,j} - E_i e_{ijk} H_{k,j} = e_{ijk} (E_i H_k)_{,j}$, перетворимо отриманий вираз до вигляду

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right) + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i + H_i \dot{B}_i \right) dV = \int_V f_i \dot{u}_i dV + \oint_S p_i \dot{u}_i dS - \oint_S n_j h_j dS. \quad (2.27)$$

Тут вектор $h_j = e_{ijk} E_i H_k$ називається вектором Умова-Пойтінга, а другий поверхневий інтеграл у правій частині виразу (2.27) визначає потік електромагнітної енергії через поверхню тіла. Вираз $\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i$ є щільністю кінетичної енергії, тоді як приріст щільності внутрішньої енергії без врахування теплофізичних явищ визначається як $\delta W_{\text{вн}} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + E_i \delta D_i + H_i \delta B_i$. Вираз (2.27) перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + W_{\text{вн}} \right) dV = \int_V f_i \dot{u}_i dV + \oint_S p_i \dot{u}_i dS - \oint_S n_j h_j dS.$$

Представимо рівняння енергії в електростатичному наближенні. Для цього в лівій частині рівняння (2.27) покладаємо $H_i \approx 0$ і перетворимо вектор Умова-Пойтинга, враховуючи квазістатичні рівняння (2.15) і перше рівняння Максвела (2.9) за відсутності струмів провідності

$$h_{i,i} = (e_{ijk} E_j H_k)_{,i} = -e_{ijk} E_j H_{k,i} = -E_j \dot{D}_j = (\varphi \dot{D}_i)_{,i},$$

звідки

$$h_i = \varphi \dot{D}_i.$$

Отримуємо рівняння енергії для п'єзоелектричного середовища в електро-статичному наближенні [89, 123, 210]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i + W_{\text{вн}} \right) dV = \int_V f_i \dot{u}_i dV + \oint_S p_i \dot{u}_i dS - \oint_S n_j \varphi \dot{D}_j dS, \quad (2.28)$$

де

$$\dot{W}_{\text{вн}}(\varepsilon_{ij}, D_i) = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + E_i \dot{D}_i.$$

Поверхневий інтеграл $\oint_S n_j \varphi \dot{D}_j dS$ в (2.28) визначає ту частину потужності, яка віддається струмами зміщення в зовнішнє електричне коло.

Для опису фізико-механічних властивостей п'єзоелектричного матеріалу в межах лінійної теорії, побудуємо для $W_{\text{вн}}$ однорідну квадратичну форму, вважаючи, що густина внутрішньої енергії $W_{\text{вн}}$ є функцією деформації ε_{ij} і електричної індукції D_i [120]:

$$W_{\text{вн}}(\varepsilon, D) = \frac{1}{2} c_{ijkl}^D \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - h_{kij} D_k \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \beta_{ij}^S D_i D_j. \quad (2.29)$$

На основі (2.29) можна представити визначальні співвідношення для п'єзоелектриків у вигляді

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} - h_{kij} D_k; \quad E_i = -h_{ikl} \varepsilon_{kl} + \beta_{ik}^S D_k. \quad (2.30)$$

Тут c_{ijkl}^D – компоненти тензора модулів пружності, вимірюваних при постійній індукції; h_{kij} – компоненти тензора п'єзоелектричних коефіцієнтів; β_{ik}^S – компоненти тензора діелектричної непроникності, вимірювані при постійних деформаціях. Наведені в (2.30) тензори є симетричними: $c_{ijkl}^D = c_{ijlk}^D = c_{jikl}^D = c_{klji}^D$; $h_{ikl} = h_{ilk}$; $\beta_{ik}^S = \beta_{ki}^S$.

Приймаючи як незалежні величини різні пари $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, E_i, D_i$, можна сконструювати ще три форми визначальних рівнянь. Термодинамічним потенціалам електричної енталпії

$$H_{\text{ел}}(\varepsilon_{ij}, E_i) = W_{\text{вн}} - E_i D_i; \quad \delta H_{\text{ел}} = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i$$

відповідають матеріальні залежності при сталих напруженості електричного поля \mathbf{E} та деформації ε :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k; \quad D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik}^S E_k. \quad (2.31)$$

Механічній ентальпії

$$H_{\text{мех}} = W_{\text{вн}} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad \delta H_{\text{мех}} = -\varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} + E_i \delta D_i$$

відповідають матеріальні залежності

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^D \sigma_{kl} + g_{kij} D_k; \quad E_i = -g_{ikl} \sigma_{kl} + \beta_{ik}^T D_k, \quad (2.32)$$

які отримуються при стаих електричній індукції \mathbf{D} та механічних напруженнях σ . Нарешті, термодинамічним потенціалам ентальпії

$$H = W_{\text{вн}} - E_i D_i - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad \delta H = -\varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} - D_i \delta E_i$$

відповідають матеріальні залежності, одержані при стаих напруженості електричного поля \mathbf{E} та механічних напруженнях σ

$$\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^E \sigma_{kl} + d_{kij} E_k; \quad D_i = d_{ikl} \sigma_{kl} + \epsilon_{ik}^T E_k. \quad (2.33)$$

В співвідношеннях (2.30) – (2.33) матеріальні характеристики описуються симетричними тензорами другого, третього та четвертого порядку з досить великою кількістю нульових компонент. Для спрощення постановки задачі частіше використовується запис рівнянь стану в системі запису Фойгта, де тензори напружень та деформацій (2.1) записуються в вигляді векторів

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T; \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T. \quad (2.34)$$

Тоді співвідношення Коші (2.2) записуються у вигляді

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\Xi} \mathbf{u}, \quad (2.35)$$

де введено диференціальний оператор

$$\Xi = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Замінимо подвійні індекси в тензорах напружень σ_{ij} і деформацій ε_{ij} однічними індексами λ і μ за схемою [123]

$$\begin{array}{lcl} ij,kl & = & 11 \ 22 \ 33 \ 23,32 \ 13,31 \ 12,21 \\ \lambda,\mu & = & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \end{array} .$$

Перехід від повної форми запису фізичних співвідношень до скороченої виконується наступним чином:

$$\begin{aligned} c_{\lambda\mu}^{D(E)} &= c_{ijkl}^{D(E)}; \quad h_{k\lambda} = h_{kij}, \quad \lambda = 1, \dots, 6, \quad k, l = 1, 2, 3; \\ s_{\lambda\mu}^{D(E)} &= s_{ijkl}^{D(E)}, \quad \text{якщо } i = j, \quad k = l, \quad \lambda, \mu = 1, 2, 3; \\ s_{\lambda\mu}^{D(E)} &= 2s_{ijkl}^{D(E)}, \quad \text{якщо } i \neq j, \quad k = l, \quad \lambda = 4, 5, 6, \quad \mu = 1, 2, 3; \\ s_{\lambda\mu}^{D(E)} &= 4s_{ijkl}^{D(E)}, \quad \text{якщо } i \neq j, \quad k \neq l, \quad \lambda, \mu = 4, 5, 6; \\ g_{k\lambda} &= g_{kij}; \quad d_{k\lambda} = d_{kij}, \quad \text{якщо } i = j, \quad \lambda = 1, 2, 3; \\ g_{k\lambda} &= 2g_{kij}; \quad d_{k\lambda} = 2d_{kij}, \quad \text{якщо } i \neq j, \quad \lambda = 4, 5, 6. \end{aligned}$$

У матричній формі запису чотири типи визначальних співвідношень (2.30) – (2.33) мають вигляд

$$\sigma_\lambda = c_{\lambda\mu}^D \varepsilon_\mu - h_{k\lambda} D_k; \quad E_i = -h_{i\mu} \varepsilon_\mu + \beta_{ik}^S D_k; \quad (2.30)'$$

$$\sigma_\lambda = c_{\lambda\mu}^E \varepsilon_\mu - e_{k\lambda} E_k; \quad D_i = e_{i\mu} \varepsilon_\mu + \epsilon_{ik}^S E_k; \quad (2.31)'$$

$$\varepsilon_\lambda = s_{\lambda\mu}^D \sigma_\mu - g_{k\lambda} D_k; \quad E_i = g_{i\mu} \sigma_\mu + \beta_{ik}^T D_k; \quad (2.32)'$$

$$\varepsilon_\lambda = s_{\lambda\mu}^E \sigma_\mu + d_{k\lambda} E_k; \quad D_i = d_{i\mu} \sigma_\mu + \epsilon_{ik}^T E_k. \quad (2.33)'$$

Перехід від однієї системи матеріальних параметрів у співвідношеннях (2.30)' – (2.33)' до іншої виконується шляхом обертання відповідних матриць. Вибір робочої системи матеріальних співвідношень пов'язаний з типом задачі, що розглядається. Наприклад, система (2.30)' дозволяє досліджувати високочастотні п'єзожорсткі моди, а саме поздовжні та зсувні коливання за товщиною тонких пластин. Система (2.31)' використовується при дослідженні високочастотних п'єзом'яких мод, а саме товщинних коливань пластин в електричному полі, перпендикулярному до товщини. Вирази (2.32)' використовуються при низькочастотних п'єзожорстких модах, наприклад, при поздовжніх коливаннях стержня в полі, паралельному його довжині. Рівняння (2.33)' застосовується при дослідженні низькочастотних п'єзом'яких мод, до яких відносяться коливання кілець з аксіальною поляризацією, сферично симетричні коливання тонкої п'єзокерамічної оболонки, поздовжні коливання стержня в полі, перпендикулярному до довжини, та радіальні коливання круглих дисків.

Зупинимося на дослідженні високочастотних товщинних коливань п'єзоелементів. В матричному вигляді рівняння (2.31)' набувають форми [128]

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c}^E \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{e}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (2.31)''$$

де $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$, $\bar{\mathbf{D}} = (D_1, D_2, D_3)^T$ — вектори напруженості електричного поля та електричної індукції; \mathbf{c}^E — симетрична (6×6) матриця модулів пружності, визначених при нульовій напруженості електричного поля; \mathbf{e}^T — транспонована (6×3) матриця п'єзоелектричних модулів; $\boldsymbol{\epsilon}^S$ — (3×3) матриця коефіцієнтів діелектричної проникності при постійних деформаціях. Аналогічно запишемо рівняння стану (2.33)':

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{s}^E \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}' \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{E}. \quad (2.32)''$$

Між системами матеріальних сталих \mathbf{c}^E , \mathbf{e} , $\boldsymbol{\epsilon}^S$ та \mathbf{s}^E , \mathbf{d} , $\boldsymbol{\epsilon}^T$ існують наступні залежності:

$$\mathbf{c}^E = (\mathbf{s}^E)^{-1}; \quad \boldsymbol{\epsilon}^S = \boldsymbol{\epsilon}^T - \mathbf{d}^T (\mathbf{s}^E)^{-1} \mathbf{d}; \quad \mathbf{e} = (\mathbf{s}^E)^{-1} \mathbf{d}. \quad (2.37)$$

Для кристалів гексагонального класу симетрії 6mm, до яких відноситься п'єзокераміка типу PZT, при поляризації в напрямку осі Ox_3 , ці матриці мають вигляд

$$\mathbf{c}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E \\ & c_{44}^E & \\ 0 & c_{55}^E & \\ & & \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} & e_{31} \\ 0 & e_{31} \\ & e_{33} \\ & e_{15} \\ e_{15} & \\ & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\epsilon}^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & \epsilon_{11}^S \\ 0 & \epsilon_{33}^S \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

а рівняння стану (2.31)', (2.31)'' записуються як

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}^E \varepsilon_{11} + c_{12}^E \varepsilon_{22} + c_{13}^E \varepsilon_{33} - e_{31} E_3; \\ \sigma_{22} &= c_{12}^E \varepsilon_{11} + c_{11}^E \varepsilon_{22} + c_{13}^E \varepsilon_{33} - e_{31} E_3; \\ \sigma_{33} &= c_{13}^E \varepsilon_{11} + c_{13}^E \varepsilon_{22} + c_{33}^E \varepsilon_{33} - e_{33} E_3; \\ \sigma_{23} &= c_{44}^E \varepsilon_{23} - e_{15} E_2; \quad \sigma_{13} = c_{44}^E \varepsilon_{13} - e_{15} E_1; \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{12}; \\ D_1 &= e_{15} \varepsilon_{13} + \epsilon_{11}^S E_1; \quad D_2 = e_{15} \varepsilon_{23} + \epsilon_{11}^S E_2; \quad D_3 = e_{31} \varepsilon_{11} + e_{31} \varepsilon_{22} + e_{33} \varepsilon_{33} + \epsilon_{33}^S E_3. \end{aligned} \quad (2.31)'''$$

Значення компонент матриць матеріальних констант $\mathbf{c}^E = \{c_{ij}^E\}$, $\mathbf{e} = \{e_{ij}\}$, $\mathbf{\epsilon}^S = \{\epsilon_{ij}^S\}$ та $\mathbf{s}^E = \{s_{ij}^E\}$, $\mathbf{d} = \{d_{ij}\}$, $\mathbf{\epsilon}^T = \{e_{ij}^T\}$ для різних п'єзокерамічних матеріалів можна знайти в [37, 97, 281] та на сайтах виробників [145, 168, 266, 267] та ін. Матеріальні характеристики для матеріалів, що використовувалися в роботі, наведено в Додатках Б – Д.

Рівняння руху (2.4) та матеріальні співвідношення (2.31)''' можуть бути використані для пружних п'єзоелектрично пасивних ізотропних матеріалів. Для цього покладаємо $e_{ij} = d_{ij} = \epsilon_{ij}^S = \epsilon_{ij}^T = 0$, а для пружних сталіх використовуємо

співвідношення [128]

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu; \quad c_{12} = c_{13} = \lambda; \quad c_{44} = \mu, \quad (2.39)$$

де $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — параметри Ламе для матеріалу; E, ν — модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу. При цьому рівняння руху має вигляд

$$\mu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}.$$

Для сталих стану (2.32) маємо

$$s_{11} = s_{33} = \frac{1}{E}; \quad s_{12} = s_{13} = -\frac{\nu}{E}; \quad s_{44} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

Лінійні матеріальні залежності (2.30) – (2.33) та їм еквівалентні записи (2.30)' – (2.33)' є прийнятними лише при невисоких статичних збуреннях, оскільки не враховують дисипативних властивостей матеріалів. У динамічних задачах вони застосовні у випадках дії недовготривалих збурень, для визначення частот резонансів і антирезонансів, для аналізу електромеханічного деформованого стану при гармонічних вимушених коливаннях, виключаючи з розгляду частотні інтервали в околі самих резонансів.

Розрахунок повного електромеханічного стану п'єзоелектричного конструктивного елемента на резонансній частоті, що є типовим експлуатаційним режимом, на основі визначальних співвідношень теорії електропружності (2.30) – (2.33) неможливий, оскільки резонансні частоти є власними числами матриці системи, що описує усталені коливання п'єзоелемента. Оцінка механічної та електричної міцності в такому випадку вимагає встановити матеріальні залежності, що враховують дисипацію енергії при циклічному деформуванні п'єзоелектриків.

2.2.2. Варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського. Постановка початково-крайових задач електропружності

Сформулюємо математичну постановку початково-крайових задач електропружності виходячи з інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. В математичній фізиці вивчаються динамічні початково-крайові задачі для рівнянь гіперболічного і параболічного типів [68]. Задачі електропружності відносяться до систем рівнянь негіперболічного типу, що ускладнює побудову загального розв'язку початково-крайових задач. Згідно до принципу Гамільтона-Остроградського, електромеханічний динамічний стан досліджуваного тіла визначається функціями, на яких відповідний функціонал досягає стаціонарного значення (перша варіація $\delta J=0$). Щоб визначити, чи є отримане значення мінімумом чи максимумом, потрібно досліджувати поведінку другої варіації, але досить часто в цьому немає потреби.

Загальноприйнята система рівнянь електропружності в декартовій системі координат x_1, x_2, x_3 складається [89, 120, 123, 206, 210] з рівнянь механічних коливань суцільного середовища (2.3), квазістатичного наближення рівняння Максвела для середовища (2.15) та матеріальними співвідношеннями для поляризованої вздовж осі x_3 п'єзокераміки гексагональної системи класу *6mm* з віссю симетрії шостого порядку (2.31)''' з врахуванням співвідношень Коші (2.2) і виразу для напруженості електричного поля через потенціал (2.15)'. При цьому рівняння (2.3), (2.15) зводяться до чотирьох рівнянь типу Ламе відносно компонент вектора механічних переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = (u_1, u_2, u_3)$ і електричного потенціалу $\varphi(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{L}_u(\mathbf{u}, \varphi); \quad 0 = L_\varphi(\mathbf{u}, \varphi). \quad (2.40)$$

Система (2.40) трактується як гіперболо-еліптична система, хоча математичний аналіз її типу відсутній. Такий висновок ґрунтуються на тому, що відповідні (2.40) системи незв'язаних рівнянь (при $e_{ij} = 0$) теорії пружності

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{L}_u(\mathbf{u}, 0)$$

і електростатики

$$0 = L_\varphi((0, 0, 0), \varphi)$$

будуть відповідно рівняннями гіперболічного і еліптичного типу.

Нехай в точках тіла переміщення і потенціал набули нескінченно малих пристрів $\delta \mathbf{u} = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)$, $\delta \varphi$, сумісні з кінематичними граничними умовами та умовами на потенціал

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{S_u} = \mathbf{y}(\mathbf{x}_{S_u}, t); \quad \varphi(\mathbf{x}, t)|_{S_\varphi} = V(\mathbf{x}_{S_\varphi}, t). \quad (2.41)$$

В силу рівнянь (2.3), (2.15) та граничних умов (2.5), (2.13) виконується тотожність

$$\begin{aligned} -\int_V [(\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{u}] dV - \int_V \nabla \mathbf{D} \delta \varphi dV + \oint_S [(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) \delta \mathbf{u}] dS + \\ + \oint_S [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} + q_s) \delta \varphi] dS = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Інтегральна тотожність (2.42) виконується за будь-яких можливих варіаціях $\delta \mathbf{u}$, $\delta \varphi$. Скориставшись теоремою Остроградського-Гауса, (2.42) з врахуванням (2.36) перетворюється до вигляду

$$\int_V [\bar{\sigma} \cdot \delta \bar{\epsilon} - \mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{E} + \frac{1}{2} \rho \delta (\mathbf{u}^2)] dV + \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \oint_S [(\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u})] dS + \int_S q_s \delta \varphi dS = 0, \quad (2.43)$$

де

$$\delta \bar{\epsilon} = \Xi \delta \mathbf{u}; \quad \delta \mathbf{E} = \nabla \delta \varphi.$$

Співвідношення (2.43) відображає принцип можливих переміщень для коливань п'єзоелектрика.

Після стандартних перетворень [123] надамо виразу (2.43) вигляду

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \right) + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} \right) dV - \oint_S ((\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \dot{\varphi}) dS = 0, \quad (2.44)$$

що описує інтегральний варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського. Тут $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{E}} = \dot{H}_{el}$ — зміна електричної енталпії; n_i — напрямні косинуси зовнішньої одиничної нормалі n до поверхні S тіла V .

Відповідний до (2.44) функціонал при ідеальних двосторонніх стаціонарних в'язях має вигляд

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - H_{el} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right) dV + \oint_S (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - q_s \varphi) dS \right) dt, \quad (2.45)$$

де $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ — вектор зовнішніх поверхневих сил на одиницю площини (N/m^2); q_s — щільність поверхневого заряду (C/m^2); $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — густота заданих об'ємних сил на одиницю об'єму (N/m^3).

Електрична енталпія

$$H_{el} = \frac{1}{2} \Xi \mathbf{u} \cdot \mathbf{c}^E \cdot (\Xi \mathbf{u})^T + \Xi \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\epsilon}^S \cdot (\nabla \varphi)^T.$$

Принцип Гамільтона-Остроградського полягає в тому, що на ізохронних варіаціях $\delta \mathbf{u}$, $\delta \varphi$ функціонал (2.45) набуває стаціонарного значення.

З принципу Гамільтона-Остроградського випливає [117, 122], що початкові умови в початково-крайових задачах електропружності необхідно формулювати тільки для механічних переміщень у формі (2.6). Початкові значення електричного потенціалу $\varphi(\mathbf{x}, t=0)$ узгоджуються з початковими значеннями механічних переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0)$ через інтегрування рівняння $0 = L_\varphi(\mathbf{u}, \varphi)$ системи (2.40) при $t=0$.

2.2.3. Співвідношення лінійної теорії електропружності в криволінійних координатах

Диференціальні рівняння лінійної теорії електропружності в криволінійній системі координат мають вигляд [123]

$$\begin{aligned} \sigma_{,i}^{ij} + f^j - \rho \ddot{u}^j &= 0; \quad D_{,j}^i = 0; \\ \sigma^{ij} &= (c^{ijkl})^E \varepsilon_{kl} - e^{kij} E_k; \quad D^i = e^{ikl} \varepsilon_{kl} + (\varepsilon^{ik})^T E_k; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad E_i = -\varphi_{,i}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

де $u_i = g_{ij} u^j$. Компоненти тензорів в рівняннях (2.46) визначені в локальному базисі з використанням коваріантного диференціювання. Для запису компонент системи рівнянь (2.46) визначаються компоненти метричного тензора $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ та

обчислюються символи Кристофеля $\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial \xi_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi_s} \right)$ [123, 210].

В ортогональній криволінійній системі координат в метричному тензорі не нульовими є лише три діагональні компоненти. Введемо параметри Ламе $H_i = \sqrt{g_{ii}}$, що значно спрощують перетворення. Тепер рівняння руху за відсутності масових сил в ортогональній криволінійній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ приймають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 H_3 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_3 H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (H_1 H_2 \sigma_{31}) + \right. \\ \left. + H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} \sigma_{31} - H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} - H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} \sigma_{33} \right] &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ curl (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (2.47)$$

де $H_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – параметри Ламе, символ $curl (1, 2, 3)$ означає, що наступні залежності одержуються з наведеної круговою перестановкою індексів.

Формули Коші для деформацій $\varepsilon_{ik}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$ такі:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u_3; \\ 2\varepsilon_{23} &= \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_3}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \left(\frac{u_2}{H_2} \right), \quad \text{curl}(1, 2, 3).\end{aligned}\quad (2.48)$$

Для вектора переміщень і тензорів деформацій і напружень використовуються їх фізичні компоненти $u_{\phi i 3}^i = H_i u^i$; $\sigma_{\phi i 3}^{ij} = H_i H_j \sigma^{ij}$; $\varepsilon_{\phi i 3}^{ij} = H_i H_j \varepsilon^{ij}$.

Квазістатичні рівняння Максвела (2.15) зводяться до рівняння відносно електричної індукції (рівняння Гауса)

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (D_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (D_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (D_3 H_1 H_2) \right] = 0 \quad (2.49)$$

і рівності нулеві компонент ротора напруженості електричного поля

$$\frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (E_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3} (E_2 H_2) \right] = 0, \quad \text{curl}(1, 2, 3). \quad (2.50)$$

З (2.50) випливає вираз для електричного потенціалу функції φ у формі

$$E_i = -\frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.51)$$

При цьому рівняння (2.50) виконуються тотожно.

Співвідношення (2.47)–(2.51) замикаються матеріальними залежностями, структура яких для п'єзокераміки залежить від напрямку попередньої поляризації. Поляризація п'єзокераміки проводиться в напрямку найменшої товщини (порядку декількох міліметрів), якій може відповідати якась із координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. При поляризації в напрямку α_3 вирази (2.31)" залишаються дійсними. При поляризації в іншому напрямку (α_1 або α_2) порядок компонент в матрицях (2.38) змінюється у відповідності з правосторонньою орієнтацією координатних осей.

Значення параметрів Ламе для канонічних форм набувають наступних

значень:

- в прямокутних координатах $\alpha_1 = x_1; \alpha_2 = x_2; \alpha_3 = x_3; H_1 = H_2 = H_3 = 1;$
- в циліндричних координатах $\alpha_1 = r; \alpha_2 = \theta; \alpha_3 = z; H_1 = 1; H_2 = r; H_3 = 1;$
- в сферичних координатах $\alpha_1 = r; \alpha_2 = \alpha; \alpha_3 = \beta; H_1 = 1; H_2 = r; H_3 = r \sin \alpha.$

Таким чином, вхідні рівняння електропружності в циліндричній системі координат в фізичних компонентах набувають вигляду [123]:

рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2.52)$$

рівняння електростатики

$$\begin{aligned} E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (2.53)$$

геометричні співвідношення

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right); \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}; \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Система рівнянь електропружності (2.47)–(2.50) в сферичній системі координат r, α, β при поляризації вздовж координати r складається з рівняння руху

$$\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta} + \sigma_{r\alpha} \operatorname{ctg} \alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{r\beta}}{\partial \beta};$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{r\alpha}}{\partial r} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\alpha} + (\sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\beta\beta})\operatorname{ctg}\alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \beta}; \\ \rho \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{r\beta}}{\partial r} + \frac{1}{r}(3\sigma_{r\beta} + 2\sigma_{\alpha\beta}\operatorname{ctg}\alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}}{\partial \beta};\end{aligned}\quad (2.55)$$

квазістатичних наближень рівнянь Максвела

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{2D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{r} D_\alpha + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial D_\beta}{\partial \beta} &= 0; \\ \frac{\partial E_\beta \sin \alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} &= 0; \quad \frac{\partial E_r}{\partial \beta} - \frac{\partial r \sin \alpha E_\beta}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial r E_\alpha}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} = 0;\end{aligned}\quad (2.56)$$

рівнянь стану радіально поляризованого тіла

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{13}(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) - e_{11}E_r; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{33}\varepsilon_{\alpha\alpha} + c_{23}\varepsilon_{\beta\beta} - e_{31}E_r; \\ \sigma_{\beta\beta} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{23}\varepsilon_{\alpha\alpha} + c_{33}\varepsilon_{\beta\beta} - e_{31}E_r; \\ \sigma_{\alpha\beta} &= 2c_{44}\varepsilon_{\alpha\beta}; \quad \sigma_{r\beta} = 2c_{55}\varepsilon_{r\beta} - e_{53}E_\beta; \quad \sigma_{r\alpha} = 2c_{55}\varepsilon_{r\alpha} - e_{53}E_\alpha; \quad (2.57) \\ D_r &= e_{11}\varepsilon_{rr} + e_{31}(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta}) + \varepsilon_{11}E_r; \\ D_\alpha &= 2e_{53}\varepsilon_{\alpha r} + \varepsilon_{33}^S E_\alpha, \quad D_\beta = 2e_{53}\varepsilon_{\beta r} + \varepsilon_{33}^S E_\beta.\end{aligned}$$

Компоненти вектора електричної напруженості E_r , E_α , E_β виражуються через скалярний електричний потенціал φ наступним чином:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \quad E_\beta = -\frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}. \quad (2.58)$$

Рівняння Коші для деформацій мають вигляд

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_\alpha}{r} \operatorname{ctg}\alpha + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} - \frac{u_\beta}{r} \operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \beta};\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{r\beta} = \frac{1}{r \sin \alpha} \frac{\partial u_r}{\partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r} - \frac{u_\beta}{r}; \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} - \frac{u_\alpha}{r}. \quad (2.59)$$

Система (2.55) – (2.59) складається з 22 рівнянь з 22 невідомими. При розв'язанні задачі виникає необхідність перейти до певної системи розв'язуючих функцій. Набір функцій проекцій вектора переміщень u_r , u_α , u_β та електричного потенціалу φ відповідає постановці Ламе (в переміщеннях) в теорії пружності. Набір функцій σ_{rr} , $\sigma_{r\beta}$, $\sigma_{r\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\beta\alpha}$, $\sigma_{\alpha\alpha}$ та D_r , D_β , D_α відповідає постановці задачі Бельтрамі-Мітчела (в напруженнях). Надалі за розв'язуючі функції вибираємо механічні переміщення та електричний потенціал.

2.2.4. Математична модель п'єзоелектричних композитів

Якщо макрооб'єм композитного п'єзоелектрика знаходиться в умовах однорідних макроскопічних деформацій $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ і напруженостей електричного поля $\langle E_n \rangle$, то рівняння стану будуть пов'язуватись макроскопічними параметрами

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= c_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle - e_{nij}^* \langle E_n \rangle; \\ \langle D_k \rangle &= e_{k\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + \epsilon_{kn}^* \langle E_n \rangle, \end{aligned} \quad (2.60)$$

де $c_{ij\alpha\beta}^*$, e_{nij}^* , ϵ_{kn}^* — відповідно тензори ефективних модулів пружності, п'єзоелектричних і діелектричних сталих. В статичному наближенні ефективні сталі визначаються з рівнянь механічної та електричної рівноваги

$$\sigma_{ij,i} = 0; \quad D_{k,k} = 0. \quad (2.61)$$

Підставляючи (2.60) в (2.61), отримуємо диференціальні рівняння відносно переміщень і потенціалу електричного поля

$$\begin{aligned} \left(c_{ij\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} \right)_{,j} + \left(e_{nij}^* \varphi_{,n} \right)_{,j} &= 0; \\ \left(e_{k\alpha\beta}^* u_{\alpha,\beta} \right)_{,k} - \left(\epsilon_{kn}^* \varphi_{,n} \right)_{,k} &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

з граничними умовами на поверхні макрооб'єму в вигляді

$$u_i|_{S_u} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j, \quad \varphi|_{S_\varphi} = -\langle E_k \rangle x_k. \quad (2.63)$$

Розв'язання задачі (2.62), (2.63) дає розподіл по координатах деформацій і напруженостей електричного поля

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(x) &= A_{ij\alpha\beta}(x) \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + B_{ijn}(x) \langle E_n \rangle; \\ E_k(x) &= F_{k\alpha\beta}(x) \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + H_{kn}(x) \langle E_n \rangle. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Підставляємо (2.64) в рівняння стану і проводимо осереднення з врахуванням (2.63). Отримуємо вирази ефективних сталих

$$\begin{aligned} c_{ij\alpha\beta}^* &= \langle c_{ij\alpha\beta}(x) A_{pq\alpha\beta}(x) \rangle - \langle e_{pij}(x) F_{p\alpha\beta}(x) \rangle; \\ e_{nij}^* &= -\langle c_{ijpq}(x) B_{pqn}(x) \rangle + \langle e_{pij}(x) H_{pn}(x) \rangle = \langle \epsilon_{np}(x) F_{pij}(x) \rangle + \langle e_{npq}(x) A_{pqij}(x) \rangle; \\ \epsilon_{kn}^* &= \langle \epsilon_{kp}(x) H_{pn}(x) \rangle + \langle e_{kpq}(x) B_{pqn}(x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Способи отримання виразів (2.65) можуть бути різними та ґрунтуються на різних розрахункових моделях макроелементу та застосуваних математичних інструментах та засобах.

У випадку, коли шаруватий п'єзоелектричний матеріал є двокомпонентним композитом, математичне очікування від характеристики A визначається як

$$\langle A \rangle = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

де A_1 і A_2 — значення A в першому та другому компонентах; p_1 і p_2 — їх об'ємні концентрації. Тоді ефективні пружні, діелектричні та п'єзоелектричні сталі шаруватих п'єзоелектричних композитів з трансверсально-ізотропними шарами, вісь симетрії яких співпадає з віссю x_3 визначаються наступними формулами [108]:

$$c_{11}^* = \langle c_{11} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} (\tilde{c}_{13}^2 \hat{\epsilon}_{33} + 2\tilde{c}_{13} \tilde{e}_{31} \hat{\epsilon}_{33} - \tilde{e}_{31}^2 \hat{\epsilon}_{33});$$

$$\begin{aligned}
c_{12}^* &= \langle c_{12} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left(\tilde{c}_{13}^2 \hat{e}_{33} + 2\tilde{c}_{13}\tilde{e}_{31}\hat{e}_{33} - \tilde{e}_{31}^2 \hat{c}_{33} \right); \\
c_{44}^* &= \langle c_{44} \rangle - p_1 p_2 \frac{\tilde{c}_{44}^2}{\hat{c}_{44}}; \quad c_{13}^* = \langle c_{13} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left[\tilde{c}_{13} (\tilde{c}_{33} \hat{e}_{33} + \tilde{e}_{33} \hat{e}_{33}) - \tilde{e}_{31} (\tilde{e}_{33} \hat{c}_{33} - \tilde{c}_{33} \hat{e}_{33}) \right]; \\
c_{33}^* &= \langle c_{33} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left(\tilde{c}_{33}^2 \hat{e}_{33} + 2\tilde{c}_{33}\tilde{e}_{33}\hat{e}_{33} - \tilde{e}_{33}^2 \hat{c}_{33} \right); \\
c_{44}^* &= \langle c_{44} \rangle - p_1 p_2 \frac{\tilde{c}_{44}^2}{\hat{c}_{44}}; \quad \epsilon_{11}^* = \langle \epsilon_{11} \rangle + p_1 p_2 \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\hat{c}_{44}}; \\
\epsilon_{33}^* &= \langle \epsilon_{33} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left(\tilde{e}_{33}^2 \hat{c}_{33} + 2\tilde{e}_{33}\tilde{e}_{33}\hat{e}_{33} - \tilde{e}_{33}^2 \hat{e}_{33} \right); \\
e_{31}^* &= \langle e_{31} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left[\tilde{e}_{33} (\tilde{c}_{33} \hat{e}_{33} + \tilde{e}_{31} \hat{e}_{33}) + \tilde{e}_{33} (\tilde{e}_{31} \hat{c}_{33} - \tilde{c}_{33} \hat{e}_{33}) \right]; \\
e_{33}^* &= \langle e_{33} \rangle - \frac{p_1 p_2}{\Delta} \left[\tilde{e}_{33} (\tilde{c}_{33} \hat{e}_{33} + \tilde{e}_{33} \hat{e}_{33}) + \hat{e}_{33} (\tilde{e}_{33} \hat{c}_{33} - \tilde{c}_{33} \hat{e}_{33}) \right]; \\
e_{15}^* &= \langle \epsilon_{15} \rangle - p_1 p_2 \frac{\tilde{e}_{15} \tilde{c}_{44}}{\hat{c}_{44}}. \tag{2.66}
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
\Delta &= \hat{c}_{33} \hat{e}_{33} + \tilde{e}_{33}^2; \quad \tilde{c} = c_1 - c_2; \quad \tilde{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_2; \quad \tilde{e} = e_1 - e_2; \\
\hat{c} &= p_2 c_2 + p_1 c_1; \quad \hat{\epsilon} = p_2 \epsilon_2 + p_1 \epsilon_1; \quad \hat{e} = p_2 e_2 + p_1 e_1.
\end{aligned}$$

Формули (2.66) є лише одним з варіантів опису ефективних характеристик шаруватих п'єзоелектричних композитів. Інші варіанти наведено в роботах [41, 247] та ін. Порівняння різних представлень ефективних характеристик зроблено в п. 3.2.3.

2.2.5. Електричний резонанс та антирезонанс

Для практичного застосування одними з найважливіших характеристик п'єзоелектричних пристройів є частоти їх електричних резонансів та антирезонансів [84]. На цих частотах п'єзоелектричні пристрої демонструють резонансні властивості при електричних навантаженнях.

Розглянемо п'єзоелектричний пристрій, що працює в режимі усталених

коливань з частотою $f = \omega / (2\pi)$. Позначимо різницю потенціалів між електродами за $\Delta V = \Delta V^a e^{i\omega t}$, а струм в електричному колі – за $I = I^a e^{i\omega t}$. Тоді співвідношення

$$Y = \frac{I}{\Delta V} = \frac{I^a}{\Delta V^a} \quad (2.67)$$

називається комплексною провідністю або електричним адмітансом. Обернена величина Z носить назву електричного імпедансу або комплексного опору. При усталених коливаннях з різними круговими частотами ω вважатимемо Y та Z функціями від частоти: $Y = Y(\omega)$, $Z = Z(\omega)$.

Частотами електричних резонансів f_{ri} називаються такі частоти, для яких при фіксованій різниці потенціалів ΔV^a амплітуда струму $|I^a|$ максимальна. І на впаки, частотами електричних антирезонансів f_{ai} називаються такі частоти, для яких при фіксованій амплітуді струму I^a різниця потенціалів $|\Delta V^a|$ максимальна.

За відсутності втрат на частотах електричних резонансів спостерігається класичне явище резонансу для струму, тобто

$$|I^a| \rightarrow \infty, \quad |Y(\omega)| \rightarrow \infty, \quad |Z(\omega)| \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow \omega_{ri},$$

а на частотах електричних антирезонансів маємо

$$|\Delta V^a| \rightarrow \infty, \quad |Y(\omega)| \rightarrow 0, \quad |Z(\omega)| \rightarrow \infty, \quad \omega \rightarrow \omega_{ai}.$$

Частоти електричного резонансу визначаються з задачі на власні значення для п'єзоелемента з короткозамкнутими електродами, тобто покладаємо $\Delta V = 0$. Електричний антирезонанс визначається з задачі на власні значення для п'єзоелемента з розімкнутими електродами, тобто на одному з електродів покладаємо $\varphi = 0$, на іншому $D_n|_S = 0$.

На практиці втрати присутні, і на частотах електричних резонансів ω_{ri}

амплітуда струму $|I^a|$ і електричний адмітанс $|Y(\omega)|$ мають локальні максимуми, а електричний імпеданс $|Z(\omega)|$ має локальний мінімум. Навпаки, на частотах електричних антирезонансів ω_{ai} амплітуда різниці потенціалів $|\Delta V^a|$ і електричний імпеданс $|Z(\omega)|$ мають локальні максимуми, а електричний адмітанс $|Y(\omega)|$ має локальний мінімум.

Далеко не всі знайдені власні частоти, що визначаються з розв'язку вищеописаних задач на власні значення, є частотами електричних резонансів або антирезонансів. Частина цих частот відповідає пружим коливанням, що не реалізуються при електричних збуреннях. Тому з множини знайдених значень потрібно відкинути частоти, спільні для обох наборів або ті, що мало відрізняються і в результаті дають малий коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

2.3. Врахування дисипативних властивостей матеріалу

Дисипація енергії (розсіювання енергії) найбільш ілюстративно проявляється у таких явищах, як утворення петлі гістерезису при циклічному деформуванні матеріалу за рахунок його неідеальної пружності; затухання вільних коливань; обмеження амплітуди резонансних коливань. Для отримання реалістичної математичної моделі дослідження коливань конструкції потрібно враховувати ряд наступних понять, що описують це явище.

2.3.1. Розсіювання енергії в механічних системах

Механічні коливання складної коливальної системи можна представити в вигляді суми елементів, кожен з яких описує коливання елементарного осцилятора. Тому способи опису дисипативних характеристик простих систем застосовані до будь-якої складної системи, в тому числі континуальної.

Основним типом механічної коливальної системи є система з зосередженою масою та пружністю (елементарний осцилятор) [97]. Рівняння руху елементарного

осцилятора має вигляд

$$M \frac{d^2u}{dt^2} + R \frac{du}{dt} + Cu = F, \quad (2.68)$$

де M — маса осцилятора; u — переміщення; R — опір механічних втрат; C — жорсткість системи, F — вектор зовнішніх сил.

Перетворюємо (2.68) до вигляду

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\delta \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{M} F, \quad (2.69)$$

де $\delta = R/(2M)$; $\omega_0^2 = C/M$.

У випадку гармонічних коливань (2.69) зводиться до алгебраїчного рівняння

$$\left(i\omega M + R + \frac{C}{i\omega} \right) u = F,$$

розв'язок якого має вигляд

$$u = \frac{F}{i\omega M + R + C/i\omega} = \frac{F}{Z},$$

де $F = F_0 e^{i\omega t + \gamma}$, $Z = i\omega M + R + C/i\omega$ — механічний імпеданс елементарного осцилятора, який можна перетворити до вигляду

$$Z = R + i\omega_0 M v = R + iQ R v = R(1 + iQv),$$

де

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{M}}; \quad v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}; \quad Q = \frac{\omega_0 M}{R}.$$

Звідси випливає, що при великих Q роль втрат поза областю резонансу мала. Тоді $Z \approx i\omega_0 M v$. При малих Q втрати суттєві в усьому діапазоні частот.

Величина Q називається добротністю коливальної системи. Вона дорівнює відношенню інерційного (або пружного) реактивного опору на резонансній частоті до опору втрат.

Величину η , обернену добротності, називають коефіцієнтом втрат: $\eta = \operatorname{tg} \delta_m$, де δ_m — кут між вектором імпедансу Z і уявною віссю.

Добротність пов'язана з шириною піка резонансної кривої на рівні $\sqrt{2}/2$ висоти піка

$$B_{0,7} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_0^2} \approx \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

і коефіцієнтом затухання амплітуди коливань (декрементом)

$$\delta = \frac{R}{2M} = \frac{\omega_0 \eta}{2} = \frac{\omega_0}{2Q}.$$

В твердому тілі внутрішнє тертя може бути гістерезисного або релаксаційного типу. Гістерезис проявляється в ефекті запізнення, залежності дисипативних характеристик від амплітуди і незалежності від частоти. За наявності залежності декременту та жорсткості системи від частоти має місце релаксація.

Незалежно від природи джерел енергетичних втрат за характеристику дисипативних властивостей механічної системи прийнято вважати відносне розсіювання енергії (коєфіцієнт поглинання) ψ , під яким розуміють відношення розсіяної енергії ΔW за цикл усталених коливань до амплітудного значення пружної енергії деформації W :

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}.$$

Відносне розсіювання енергії ψ може бути визначено по петлі гістерезису, побудованій в координатах деяка узагальнена сила — відповідне переміщення або в координатах напруження — відносна деформація [92, 93, 107, 126]. В цьому випадку розсіяна за цикл коливань енергія ΔW характеризується площею петлі гістерезису (рис. 2.1).

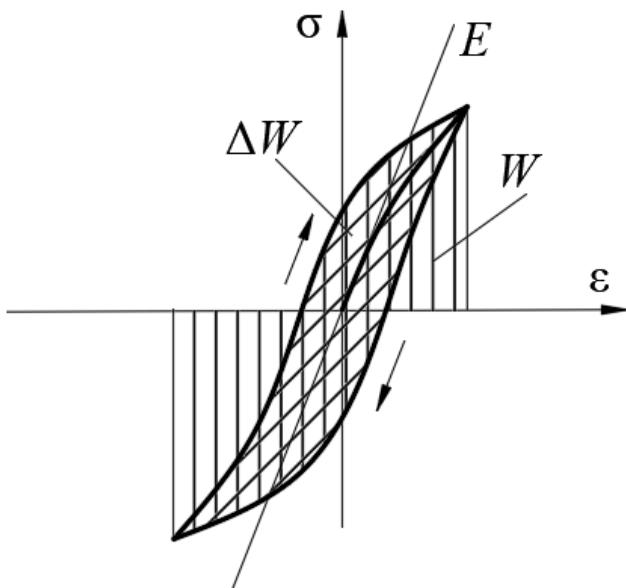


Рис. 2.1. Петля гістерезису в осях σ - ε

Відносне розсіювання енергії ψ може бути також визначене через затухання вільних коливань системи. Якщо представити обвідну коливань, що затухають, в вигляді монотонно спадної функції часу $a(t)$, то енергія коливальної системи в якийсь момент часу t може характеризуватися квадратичною функцією амплітуди переміщень $a(t)$:

$$W(t) = C \frac{a^2(t)}{2},$$

де C — жорсткість системи. Відповідний приріст енергії $\Delta W = \frac{dW}{dt}T$, де T — період коливань. Тоді розсіювання енергії за період коливань визначається як

$$\bar{\psi} = -\frac{dW}{dt} \frac{T}{W} = -\frac{2T}{a} \frac{da}{dt} = -2T \frac{d \ln a}{dt}.$$

При малих затуханнях ($\bar{\psi} < 0,5$) з достатньою точністю можна написати

$$\bar{\psi} = - \int_{W(t)}^{W(t+T)} \frac{dW}{W} = - \int_{a_i}^{a_{i+1}} 2 \frac{da}{a} = 2 \ln \frac{a_i}{a_{i+1}},$$

де a_i та a_{i+1} — амплітуди коливань на початку та в кінці i -го циклу коливань.

Надалі будемо використовувати поняття логарифмічного декремента коливань

$$\delta = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}} \quad \text{або} \quad \delta = \frac{1}{n} \ln \frac{a_i}{a_{i+n}}. \quad (2.70)$$

При резонансних коливаннях по параметрах резонансної кривої (піку амплітудно-частотної залежності) визначається добротність системи Q або обернена до неї величина Q^{-1} , що називається коефіцієнтом затухання ψ . Інші його назви — коефіцієнт внутрішнього тертя або просто внутрішнє тертя. В якості характеристики розсіювання енергії також використовується поняття тангенса кута зсуву фаз γ_0 між напруженням і деформацією в пружному елементі, який часто називають тангенсом кута втрат.

Між вказаними характеристиками встановлюються наступні наближені співвідношення:

$$\psi = 2\delta = 2\pi Q^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} B_{0,5} = 2\pi B_{0,7} = 2\pi \operatorname{tg} \gamma_0, \quad (2.71)$$

де $B_{0,5}$, $B_{0,7}$ — ширина резонансного піку на відповідній висоті.

Відоме також визначення відносного розсіювання при частотах, що відрізняються від резонансних:

$$\psi = 2\pi \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \right) \operatorname{tg} \gamma,$$

де ω , ω_r — частоти вимушених та вільних коливань відповідно; γ — кут зсуву фази між зовнішньою гармонічною силою збурення та переміщенням (деформацією) пружного елемента.

Для систем з розподіленими параметрами в теорії коливань для врахування недосконалості пружності середовища квадрат швидкості поширення хвилі доможається на оператор Кельвіна-Фойгта $1 + \beta \frac{\partial}{\partial t}$ або оператор Бока-Шліппе-Колара

$1 + \frac{\xi}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}$ (коли неідеальна пружність залежить або, відповідно, не залежить від ку-

тової частоти). У випадку коливань пружного стержня хвильове рівняння набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \left(1 + \frac{\xi}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де ξ — безрозмірнісний коефіцієнт гістерезисного відхилення від закону Гука при частотно-незалежному терпі, який пов'язаний з логарифмічним декрементом коливань співвідношенням $\delta = \pi \xi$.

Всі вищезазначені залежності для визначення характеристик демпфування коливань діють для лінійних систем в припущені непружного опору, пропорційного до першого степеня швидкості деформування, тобто для випадку амплітудно-незалежного відносного розсіювання енергії [92, 93, 107, 126]. Їх використання при оцінці дисипативних властивостей реальних гістерезисно-нелінійних систем вимагає уточнених підходів, що враховують залежність демпфувальних властивостей від амплітуди коливань. В п'єзоелектричних системах потрібно також враховувати гістерезисну залежність електромеханічних характеристик від напруженості електричного поля (рис. 1.8).

Експериментальному дослідженню дисипативних властивостей матеріалів присвячено досить велику кількість робіт. Фундаментальні результати цих досліджень описано в [92, 93, 126] та ін. Показано, що характеристики дисипативних властивостей конструктивних матеріалів значною мірою і, як правило, нелінійно залежать від амплітуди циклічного деформування і практично (в області інженерної практики) не залежать від частоти в досить широкому діапазоні її зміни. Розсіювання енергії також залежить від виду напруженого стану, форми коливань, геометричних параметрів зразків (абсолютний розмір в тому числі). Крім того, дисипативні властивості залежать від структури матеріалу, особливостями в процесі виготовлення (термообробка, попередня пластична деформація, шліфування). Тривалі циклічні навантаження також призводять до зміни демпфувальних

властивостей матеріалів.

З підвищенням температури дисипативні властивості, як правило, зростають. Ця закономірність може порушитись, якщо під дією температури в матеріалі відбуваються які-небудь структурні перетворення.

Існуючі способи аналітичного опису розсіювання енергії мають під собою феноменологічну основу і по формі запису можуть бути розділені наступним чином:

1) *Функціональні*, в яких залежності між напруженнями та деформаціями мають вигляд

$$\sigma = f(\varepsilon),$$

де $f(\varepsilon)$ — деяка аналітична функція. До таких підходів відносяться нелінійні співвідношення, що описують рівняння контуру петлі гістерезису [92]. Це залежності Я.Г. Пановка

$$\vec{\sigma}(\varepsilon) = E \left[\varepsilon \mp a\varepsilon_2^n \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_2^2}} \right];$$

Сорокіна Е.С.

$$\vec{\sigma}(\varepsilon) = E \left[\varepsilon \mp \frac{\bar{\psi}\varepsilon_2}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_2^2}} \right];$$

Н.Н. Давиденко

$$\vec{\sigma}(\varepsilon) = E \left[\varepsilon \mp \frac{\eta}{n} \left((\varepsilon_2 \pm \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_2^n \right) \right];$$

та Г.С. Писаренка

$$\vec{\sigma}(\varepsilon) = E \left[\varepsilon \pm \frac{3}{8} \delta(\varepsilon_2) \left(\varepsilon_2 \mp \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_2} \right) \right].$$

Тут стрілки вправо відносяться до зростаючої гілки гістерезису, вліво — до спадної; E — модуль пружності при розтягу; ε — поточна координата відносної деформації; ε_2 — відповідна амплітуда деформації; $\delta = f(\varepsilon_2)$ — декремент як функція від ε_2 ; $m, n, a, \eta, \bar{\psi} \approx 2\delta$ — параметри, що визначаються з експериментально

отриманих кривих залежностей декремента від амплітуди циклічних деформацій ε_2 . Підходи наведені в порядку появи.

Функціональні залежності між напруженнями та деформаціями досить широко використовувалися до усталених одночастотних коливань, але не враховують швидкості деформацій, що робить їх непридатними у випадку нестационарних коливань. Застосування цих підходів пов'язане з досить великим числом параметрів, визначення яких вимагає складної експериментальної бази. В роботах [92, 93, 126] можна знайти опис експериментальних установок, результати експериментів над конструктивними однорідними та неоднорідними матеріалами, табличні та довідкові дані для подальших обчислень.

2) *Диференціальні залежності* $\sigma \sim \varepsilon$ в загальному випадку записуються у формі

$$A_1\sigma = A_2\varepsilon,$$

де A_1, A_2 — деякі диференціальні (лінійні або нелінійні) оператори.

Диференціальні залежності більш універсальні, ніж функціональні, і дозволяють розглядати коливання, відмінні від гармонічних. Ці співвідношення лежать в основі лінійної теорії в'язкопружності. Диференціальні залежності відповідають моделям з пружин та демпферів (лінійних або нелінійних), певним чином пов'язаних між собою (рис. 2.2).

До цих методів відносяться реологічні моделі Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt};$$

Кельвіна-Фойгта

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \beta \frac{d\varepsilon}{dt} \right);$$

стандартного лінійного тіла Зінера

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{E_2}{\zeta} \left(\frac{\zeta}{E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma - E_1 \varepsilon \right) \Big/ (E_1 + E_2)$$

та інші.

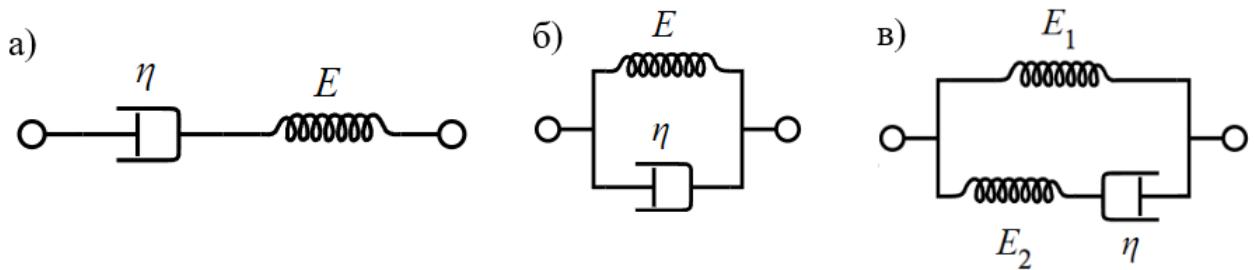


Рис. 2.2. Реологічні моделі а) Максвелла; б) Кельвіна-Фойгта;
в) стандартного лінійного тіла Зінера

З описаних моделей для механіки деформівного твердого тіла найбільш вживаною є модель Кельвіна-Фойгта. До недоліків цього підходу відноситься те, що вона відображає повзучість, але не відображає релаксацію, що властива багатьом пластичним матеріалам. Для врахування релаксації більш придатна модель Максвела.

3) *Інтегральні залежності* $\sigma \sim \varepsilon$ мають загальний запис

$$\sigma = A * \varepsilon,$$

де $A *$ — інтегральний оператор. Лінійні інтегральні рівняння спадкової теорії в'язкопружності записуються у формі рівнянь Больцмана-Вольтерра з використанням оператора згортки $A * f = \int_{-\infty}^t A(t-\tau)f(\tau)d\tau$:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}(1 + K *)\sigma \quad \text{або} \quad \sigma = E(1 + \Gamma *)\varepsilon,$$

де $K(t)$ та $\Gamma(t)$ — ядра повзучості та релаксації, що визначаються з експерименту. В [98] описано перехід від реологічних моделей до рівнянь стану спадкової теорії. Вони дають можливість отримати коректні розв'язки задач про коливання дисипативних систем, у тому числі не гармонічних. До недоліків спадкової теорії відноситься складність розв'язувальних рівнянь, неможливість врахувати амплітудну залежність та сильна частотна залежність розсіювання енергії, яка по факту не спостерігається в більшості матеріалів.

Ефективним засобом для отримання та розв'язання диференціальних рівнянь коливань дисипативних систем може слугувати *інтегральний принцип*

Гамільтона-Остроградського, який для механічних систем має вигляд

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i + \delta A \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} d \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right)$$

або

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta W + \delta A) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (2.72)$$

де T — кінетична енергія; W — робота пружних та дисипативних сил; A — робота зовнішніх сил; Q_i , q_i — узагальнені сили та переміщення. Якщо система консервативна і варіація роботи пружних сил може бути записана як варіація деякої потенціальної функції, то інтегральний принцип Гамільтона-Остроградського перетворюється в варіаційний принцип

$$\delta L = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0.$$

Тут враховано, що на кінцях інтервалу варіації узагальнених координат перетворюються в нуль, в зв'язку з чим доданок в правій частині (2.72) також дорівнює нулеві. Отже, (2.72) не є варіаційним принципом у тому сенсі, що умова екстремуму відповідного функціоналу не приводить до рівняння Ейлера—Лагранжа, оскільки сума узагальнених і зовнішніх робіт не є точним диференціалом і знак варіації не виносиється з інтегралу.

З (2.72) у припущені ізохронних варіацій випливають диференціальні рівняння руху у формі Лагранжа 2-го роду для дисипативних систем:

$$Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Точний розв'язок відповідних нелінійних диференціальних рівнянь отримано лише у випадку системи з одним ступенем свободи. В інших випадках отримують наближені розв'язки. В зв'язку з цим в багатьох випадках виявляється

більш зручно напряму використовувати інтегральний принцип Гамільтона-Остроградського для отримання наближеного розв'язку задачі. При цьому з'являється можливість врахувати вплив граничних умов, які в звичайних наближених розв'язках вважаються недисипативними.

З описаних відомостей випливає, що прикладна теорія розсіювання енергії при нестационарних коливаннях може бути побудована на рівняннях, що узагальнюють в'язке і гістерезисне розсіювання енергії на базі лінійної спадкової теорії в'язкопружності та інтегрального принципу Гамільтона-Остроградського.

2.3.2. Комплексні модулі для п'єзоелектриків

Аналіз дисипації енергії в п'єзоматеріалі, якому властивий електромеханічний зв'язок, являє собою складну задачу, розв'язок якої ускладнюється амплітудною залежністю коефіцієнтів, що описують дисипацію. Будь який п'єзоелектричний матеріал має механічні та діелектричні втрати, макроскопічний опис яких наведено в монографіях [95, 96, 198, 202, 272] та ін. Пружні властивості п'єзокераміки описуються п'ятьма незалежними пружними константами. Відповідно, в ній можливі п'ять незалежних видів внутрішнього тертя, для кожного з яких потрібно визначити дисипативні характеристики. Діелектричні втрати пов'язані в першу чергу з поляризаційними процесами. Для сегнетоелектриків характерні релаксаційні механізми поляризації, що призводить до частотної залежності дисипативних характеристик діелектричної проникності. П'єзоелектричні втрати, що виникають в процесі перетворення енергії, розглядаються в роботах [21, 97, 123].

Властивості лінійного спадкового середовища у п'єзоелектричних матеріалів в області малих деформацій і напруженостей електричного поля експериментально підтверджуються в роботах [53, 54, 120, 129, 136, 148, 181, 283, 310]. Моделі спадкових п'єзоелектричних матеріалів розглядалися в роботах [155, 164, 165] та ін. Лінійні співвідношення спадкової теорії між компонентами векторів $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$, \mathbf{D} та \mathbf{E} з врахуванням функціональної залежності матеріальних характеристик від просторових координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ мають вигляд [41, 120, 189, 239, 247]

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t C_{ij}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_j(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e_{ik}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial E_k(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad (2.73)$$

$$D_k(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t e_{kj}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_j(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{-\infty}^t \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t - \tau) \frac{\partial E_k(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.74)$$

Функції релаксації пружних сталих $C_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$, п'єзоелектричних модулів $e_{ik}(\mathbf{x}, \tau)$, діелектричних проникностей $\epsilon_{kk}(\mathbf{x}, \tau)$ характеризують фізико-механічні властивості матеріалу. Зазвичай їх беруть у формі певних зручних для обчислення функцій, параметри яких треба визначати експериментально. Методи визначення спадкових функціоналів достатньо складні навіть для ізотропних матеріалів без п'єзоefекту. Врахування анізотропії фізико-механічних властивостей п'єзоелектричних матеріалів та зв'язаність механічного та електричного полів значно ускладнюють розробку експериментальних підходів.

Типовим режимом роботи п'єзоелементів є гармонічні резонансні коливання з малими амплітудами. Характер навантаження конструктивних зразків, а також можливість використовувати експериментальні зразки в якості об'єкта і датчика вимірю привели до переважного розвитку частотних резонансних методів визначення комплексних матеріальних констант на відміну від хронометричних методів визначення спадкових функціоналів. Для визначення дійсних та уявних компонент розроблено низку експериментальних адміттансних методів [53, 54, 129, 136, 148, 181, 278, 283, 310].

При гармонічних коливаннях з циклічною частотою ω покладемо

$$[\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] = \operatorname{Re} [\bar{\boldsymbol{\sigma}}^a(\mathbf{x}), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a(\mathbf{x}), \mathbf{D}^a(\mathbf{x}), \mathbf{E}^a(\mathbf{x})] e^{i\omega t}, \quad (2.75)$$

де $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^a(\mathbf{x}), \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a(\mathbf{x}), \mathbf{D}^a(\mathbf{x}), \mathbf{E}^a(\mathbf{x})$ – комплексні амплітуди.

Співвідношення (2.73), (2.74) після підстановки (2.75) зводяться до вигляду [120]

$$\begin{aligned}
\sigma_i^a(\mathbf{x})e^{i\omega t} &= \int_{-\infty}^t C_{ij}(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial (\varepsilon_j^a(\mathbf{x})e^{i\omega\tau})}{\partial \tau} d\tau - \int_{-\infty}^t e_{ik}(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial (E_k^a(\mathbf{x})e^{i\omega\tau})}{\partial \tau} d\tau; \\
D_k^a(\mathbf{x})e^{i\omega t} &= \int_{-\infty}^t e_{kj}(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial (\varepsilon_j^a(\mathbf{x})e^{i\omega\tau})}{\partial \tau} d\tau + \\
&\quad \int_{-\infty}^t \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t-\tau) \frac{\partial (E_k^a(\mathbf{x})e^{i\omega\tau})}{\partial \tau} d\tau. \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Після заміни змінної інтегрування $t - \tau = p$ формули (2.76) записуються так

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^a = \tilde{\mathbf{c}}^E \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a - \tilde{\mathbf{e}} \mathbf{E}^a, \quad \mathbf{D}^a = \tilde{\mathbf{e}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^a + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^S \mathbf{E}^a, \tag{2.77}$$

де $\tilde{\mathbf{c}}^E = \{\tilde{c}_{ij}^E\}$, $\tilde{\mathbf{e}} = \{\tilde{e}_{kj}\}$, $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^S = \{\tilde{\epsilon}_{kk}^S\}$ — тензори комплексних матеріальних характеристик.

В формулах (2.77) вводяться комплексні частотно-залежні матеріальні характеристики, що виражаються через Фур'є-зображення невідомих функцій впливу

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{ij}^E(\mathbf{x}) &= i\omega \int_0^\infty C_{ij}(\mathbf{x}, p) e^{-i\omega p} dp; \quad \tilde{e}_{kj}(\mathbf{x}) = i\omega \int_0^\infty e_{kj}(\mathbf{x}, p) e^{-i\omega p} dp; \\
\tilde{\epsilon}_{kk}(\mathbf{x}) &= i\omega \int_0^\infty \tilde{\epsilon}_{kk}(\mathbf{x}, p) e^{-i\omega p} dp. \tag{2.78}
\end{aligned}$$

Функції впливу і комплексні модулі пов'язані між собою наступним чином:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{\tilde{c}_{ij}^E; \tilde{e}_{kj}; \tilde{\epsilon}_{kk}\} &= \omega \int_{-\infty}^t \{C_{ij}(\mathbf{x}, t-\tau); e_{kj}(\mathbf{x}, t-\tau); \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t-\tau)\} \sin \omega \tau d\tau; \\
\operatorname{Im}\{\tilde{c}_{ij}^E; \tilde{e}_{kj}; \tilde{\epsilon}_{kk}\} &= \omega \int_{-\infty}^t \{C_{ij}(\mathbf{x}, t-\tau); e_{kj}(\mathbf{x}, t-\tau); \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t-\tau)\} \cos \omega \tau d\tau.
\end{aligned}$$

Обернене перетворення

$$\{C_{ij}(\mathbf{x}, t); e_{kj}(\mathbf{x}, t); \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, t)\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^t \omega^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{c}_{ij}^E(\mathbf{x}, t-\tau); \tilde{e}_{kj}(\mathbf{x}, t-\tau); \tilde{\epsilon}_{kk}(\mathbf{x}, t-\tau) \right\} \sin \omega \tau d\tau = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^t \omega^{-1} \operatorname{Im} \left\{ \tilde{c}_{ij}^E(\mathbf{x}, t-\tau); \tilde{e}_{kj}(\mathbf{x}, t-\tau); \tilde{\epsilon}_{kk}(\mathbf{x}, t-\tau) \right\} \cos \omega \tau d\tau .
\end{aligned}$$

Елементи механічного та електричного полів визначаються як дійсна компонента формул для гармонічних процесів (2.73) – (2.78)

Матеріальні залежності в матричній формі запису (2.30)' – (2.33)' через комплексні модулі записуються наступним чином

$$\begin{aligned}
\sigma_i^a &= \tilde{c}_{ij}^D \varepsilon_j^a - \tilde{h}_{kl} D_k^a; \quad E_k^a = -\tilde{h}_{kj} \varepsilon_j^a + \tilde{\beta}_{kk}^S D_k^a; \\
\sigma_i^a &= \tilde{c}_{ij}^E \varepsilon_j^a - \tilde{e}_{ki} E_k^a; \quad D_k^a = \tilde{e}_{kj} \varepsilon_j^a + \tilde{\epsilon}_{kk}^S E_k^a; \\
\varepsilon_i^a &= \tilde{s}_{ij}^D \sigma_j^a - \tilde{g}_{ki} D_k^a; \quad E_k^a = \tilde{g}_{kj} \sigma_j^a + \tilde{\beta}_{kk}^\sigma E_k^a; \\
\varepsilon_i^a &= \tilde{s}_{ij}^E \sigma_j^a + \tilde{d}_{ki} E_k^a; \quad D_k^a = \tilde{d}_{kj} \sigma_j^a + \tilde{\epsilon}_{kk}^\sigma E_k^a .
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Індекс “*a*” відповідає амплітудним значенням складових польових величин. Для визначення дійсних та уявних компонент матеріальних сталих може використовуватися весь набір співвідношень (2.79) з врахуванням формул перетворень між матрицями різних функцій стану.

Рівняння балансу енергії без врахування втрат

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_{j,j} = 0 ,$$

де повна енергія *W* визначається як сума механічної, п'єзоелектричної та електричної енергії

$$W = W_m + W_{pe} + W_e = \frac{1}{2} \left(\rho u_i u_i + c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon_{ik}^S E_i E_k , \tag{2.80}$$

а компоненти вектора потоку електропружної енергії $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ визначаються як $P_j = -\sigma_{ij} \dot{u}_i + \varphi \dot{D}_j$.

У першому законі термодинаміки для дисипативних матеріалів враховується потік тепла до системи, тому рівняння балансу енергії приймає форму

$$\frac{\partial W}{\partial t} + P_{j,j} = \delta Q,$$

де δQ – приріст теплової енергії в системі.

Визначимо потужність втрат $P_{\text{вт}}$ як середній за період приріст тепла δQ . Очевидно, що при осередненні за період коливань зміна енергії $\partial W/\partial t$ дорівнює нулеві, тоді $\langle \delta Q \rangle = \langle P_{j,j} \rangle$ і для потужності втрат отримуємо:

$$P_{\text{вт}} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left(-\sigma_{ij} \dot{u}_i^* + \varphi \dot{D}_j \right)_{,j} dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\left(-\sigma_{ij}^a \dot{u}_i^{a*} + \varphi^a \dot{D}_j^a \right)_{,j} \right],$$

де * означає комплексне спряження, індекс a — амплітудні значення характеристик.

Виконаємо операцію дивергенції в цьому співвідношенні. Маємо

$$P_{\text{вт}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \dot{u}_i^a \dot{u}_i^{a*} - f_i^a u_i^{a*} + \sigma_{ij}^a \varepsilon_{ij}^{a*} + E_i^a D_i^{a*} \right]. \quad (2.81)$$

При гармонічній залежності $\chi = \chi e^{i\omega t}$ всіх величин, що характеризують електропружний стан тіла, співвідношення (2.81) приймає вигляд

$$P_{\text{вт}} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[-i\rho\omega^3 u_i^a u_i^{a*} + i\omega f_i^a u_i^{a*} - i\omega \sigma_{ij}^a \varepsilon_{ij}^{a*} - i\omega E_i^a D_i^{a*} \right].$$

Оскільки перший доданок завжди уявний, в термінах амплітудних значень одержуємо [120, 123]

$$P_{\text{вт}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \left(\sigma_{ij}^a \varepsilon_{ij}^{a*} + E_j^a D_j^{a*} - f_i^a u_i^{a*} \right). \quad (2.82)$$

Дисипативні втрати $P_{\text{вт}}$ повинні бути додатньою величиною при ненульових функціях стану, оскільки будь-який матеріал є поглиначем, а не джерелом енергії.

Перейдемо в (2.82) до матричних позначень за відсутності масових сил

$$P_{\text{вт}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \left(\varepsilon_{\lambda}^a \tilde{c}_{\lambda\mu}^* \varepsilon_{\mu}^{a*} + \varepsilon_{\lambda}^a \tilde{e}_{\lambda k} E_k^{a*} + E_k^a \tilde{d}_{k\mu}^* \sigma_{\mu}^{a*} + E_k^a \tilde{e}_{ki}^{a*} E_i^{a*} \right) > 0,$$

де $\lambda, \mu = 1, \dots, 9$; $i, k = 1, 2, 3$. Тут і далі верхні індекси у позначеннях величин $\tilde{c}_{\lambda\mu}^E$ і \tilde{e}_{ik}^σ опущені.

Природні п'єзоелектричні кристали в мегагерцовому діапазоні частот зазвичай мають відносно невеликі тангенси втрат енергії (відношення уявної частини комплексних модулів до їхньої дійсної частини). В п'єзоелектричних матеріалах електромеханічні втрати значно вищі, ніж втрати в п'єзокристалах, і суттєво впливають на електромеханічний стан п'єзокерамічних елементів конструкцій.

Для попередньо поляризованої в напрямку осі x_3 водимо комплексні вектор-стовпчики узагальнених деформацій та напружень $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left[\varepsilon_1^a, \varepsilon_2^a, \varepsilon_3^a, \varepsilon_4^a, \varepsilon_5^a, \varepsilon_6^a, E_1^a, E_2^a, E_3^a \right]; \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \left[\sigma_1^a, \sigma_2^a, \sigma_3^a, \sigma_4^a, \sigma_5^a, \sigma_6^a, D_1^a, D_2^a, D_3^a \right]^T, \end{aligned} \quad (2.83)$$

і симетричну комплексну матрицю \mathbf{M}

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{13} \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{13} \\ \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{13} & \tilde{c}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{e}_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} & 0 & \tilde{\varepsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{24} & 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_{11} & 0 \\ \tilde{e}_{13} & \tilde{e}_{13} & \tilde{e}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

та запишемо в матричній формі п'єзокераміки матеріальні залежності (2.79)₂

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.85)$$

Комплексні матеріальні сталі, які входять до виразів (2.84) і (2.85), представляються через дійсну і уявну частини

$$\tilde{c}_{ij} = c'_{ij} - i c''_{ij}, \quad \tilde{e}_{ij} = e'_{ij} - i e''_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon'_{ij} - i \varepsilon''_{ij}. \quad (2.86)$$

Механічна добротність при цьому визначається як [247]

$$Q_m = \frac{\operatorname{Re}(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{33})}{\operatorname{Im}(\tilde{c}_{11} - \tilde{c}_{13}/\tilde{c}_{33})}. \quad (2.87)$$

Тепер формулу (2.82) можна переписати в нових позначеннях

$$P_{\text{BT}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} V_p M_{pq}^* V_q^* > 0, \quad p, q = 1, \dots, 9.$$

Комплексна симетрична матриця \mathbf{M} представляється сумою двох симетричних дійсних матриць

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{H}_1 + i\mathbf{H}_2$$

так, що

$$2\mathbf{H}_1 = \mathbf{M} + \mathbf{M}^*, \quad 2\mathbf{H}_2 = i(\mathbf{M} - \mathbf{M}^*).$$

Тоді

$$P_{\text{BT}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \mathbf{V}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{V}^* + \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \mathbf{V}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{V}^* > 0. \quad (2.88)$$

Враховуючи, що ермітова форма для дійсної симетричної позитивно визначеної матриці є додатньою, з (2.88) маємо

$$P_{\text{BT}} = \frac{\omega}{2} \operatorname{Re} \mathbf{V}^T \mathbf{H}_2 \mathbf{V}^* > 0. \quad (2.89)$$

Ермітова форма (2.89) приймає додатні значення, коли дійсна симетрична матриця \mathbf{H}_2 є додатньо визначеною. За умови Сильвестра у додатньо визначеної матриці головні мінори є більшими від нуля. Звідси отримуємо наступні нерівності для уявних частин комплексних модулів [120]

$$\begin{aligned} & \left\{ c_{11}''; c_{33}''; c_{55}''; c_{66}''; c_{11}''; c_{33}'' \right\} > 0; \quad c_{11}'' > |c_{12}'|, \quad c_{11}'' c_{33}'' > (c_{13}'')^2; \\ & c_{11}'' c_{33}'' > (e_{31}'')^2; \quad c_{33}'' c_{33}'' > (e_{33}'')^2; \quad c_{55}'' \varepsilon_{11}'' > (e_{15}'')^2; \\ & c_{33}'' (c_{11}'' + c_{12}'') > 2(c_{13}'')^2; \quad \varepsilon_{33}'' (c_{11}'' + c_{12}'') > 2(e_{31}'')^2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Вибір від'ємного знаку в показнику експоненти в залежностях фізичних величин від часу змінить знак нерівностей (2.90) на протилежний. При експериментальному визначення комплексних модулів вибір знаку шуканої величини вибирається так, щоб виконувались нерівності (2.90). При використанні формул (2.86) також необхідно звертати увагу на вибір знаку, особливо використовуючи дані з різних джерел.

Методи визначення комплексних модулів, які розроблені до цього часу, можна розділити умовно на дві групи: методи, в яких необхідно вимірювати вектор іммітансу (його дійсну і уявну частини) [120, 123, 279], і методи, в яких необхідно вимірювати тільки абсолютні значення іммітансу [21, 123, 278]. В роботах [136, 148, 129, 283] розвиваються ітераційні та неітераційні підходи до визначення дійсних та уявних складових комплексних модулів на окремих модах коливань.

2.3.2. Демпфування коливань за Релеєм в п'єзоелектричному середовищі

Для динамічних задач в'язкоелектропружності в визначальних співвідношеннях потрібно враховувати демпфування (дисипацію енергії, внутрішнє тертя або затухання). Математичний опис демпфування є однією з найбільш складних проблем при підготовці розрахункової моделі в п'єзоелектричному аналізі. З одного боку, на резонансних режимах демпфування може бути зведене до комплексних модулів. Але процедура експериментального визначення уявних складових комплексних модулів є досить складною та неоднозначною, оскільки в загальному випадку вони залежать від робочої температури п'єзоелемента, від частоти навантаження та тривалості роботи, що в сукупності призводить до дисипативного розігріву. Але, з іншого боку, адекватні моделі демпфування з чітко визначуваними константами до цього часу не знайдені [84].

Одна з найбільш поширеніх моделей затухання коливань описується моделлю в'язкопружності Кельвіна-Фойгта. Вона отримується при додаванні в праву частину матеріальних співвідношень доданку, пропорційного до швидкості деформації з коефіцієнтом β_d . Тоді визначальні співвідношення мають вигляд

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^E (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \beta_d \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}) - \mathbf{e}^T \mathbf{E}; \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}. \quad (2.91)$$

Рівняння руху в лінійному наближенні і при врахуванні демпфування за Релеєм [84] мають вигляд

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}} - \nabla^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}, \quad (2.92)$$

де α_d — коефіцієнт масового демпфування; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — вектор щільності об'ємних сил. Враховуючи, що процеси демпфування, пов'язані зі швидкістю переміщень, більш характерні для в'язких матеріалів або для руху зосереджених мас в рідині, рівняння руху у формі (2.82) будемо використовувати за наявності в'язких сил опору. Об'ємні сили враховуються в ситуаціях, коли суттєві гравітаційні ефекти, температурні напруження або масові сили іншої природи, але в більшості випадків $\mathbf{f} = 0$. В позначеннях (2.34) вирази (2.92) мають вигляд

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\Xi}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}.$$

При переході до системи розв'язувальних функцій \mathbf{u} і φ (2.92) і рівняння Максвела (2.15) перетворюється наступним чином:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\Xi}^T \cdot [\mathbf{c}^E \cdot \boldsymbol{\Xi}(\mathbf{u} + \beta_d \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{e}^T \cdot \nabla \varphi] = \mathbf{f}; \quad (2.93)$$

$$\nabla^T \cdot [\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\Xi} \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \nabla \varphi] = \rho_e, \quad (2.94)$$

де ρ_e — об'ємна щільність електричних зарядів, при чому для більшості задач $\rho_e = 0$.

Зв'язана система диференціальних рівнянь (2.93), (2.94) відносно компонент

вектора переміщень \mathbf{u} і скалярної функції електричного потенціалу φ містить чотири рівняння. Всі ці рівняння є диференціальними рівняннями другого порядку за просторовими змінними, при чому похідні за часом першого і другого порядку містяться лише в рівняннях (2.93), тоді як в рівнянні квазіелектростатики (2.94) похідних за часом немає. Ця обставина є особливістю рівнянь електропружності в наближеннях квазіелектростатики при врахуванні способу демпфування за Релеєм. При інших способах врахування затухання або поширення електричних збурень в рівнянні електростатики (2.94) можуть з'являтися похідні за часом.

При переході до чисельних методів (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, варіаційно-сплайновий метод) система рівнянь (2.93), (2.94) перетворюється до системи диференціальних рівнянь за часом відносно векторів \mathbf{U} та Φ , що складаються з компонент векторів переміщень та значень електричного потенціалу відповідно у всіх вузлових точках дискретного розбиття тіла:

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u; \quad (2.95)$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi}^T \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = -\mathbf{F}_\varphi, \quad (2.96)$$

де \mathbf{M}_{uu} , \mathbf{C}_{uu} , \mathbf{K}_{uu} – матриці мас, демпфування та жорсткостей; $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ – матриці коефіцієнтів при електричному потенціалі; \mathbf{F}_u , \mathbf{F}_φ – вектори механічних та електричних навантажень відповідно.

Надалі вважаємо, що вектор Φ виключається з рівнянь (2.95), (2.96) та отримана система рівнянь залежить лише від переміщень:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (2.97)$$

Очевидно, що для правильного представлення процесу затухання потрібно створити адекватну модель матриці демпфування \mathbf{C} . Багато скінченно-елементних підходів для її формування використовують модель затухання Релея, ідея якої полягає в представленні матриці \mathbf{C} у вигляді лінійної комбінації матриць \mathbf{M} та \mathbf{K} із масовим коефіцієнтом демпфування α_d та жорсткісним коефіцієнтом демпфування β_d [84, 176, 250, 272, 302]:

$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K}. \quad (2.98)$$

З врахуванням інших моделей демпфування матриця \mathbf{C}_j може мати інші доданки. При усталених коливаннях компоненти матриці \mathbf{C}_j мають комплексний множник і часто трактуються як уявна частина комплексних модулів.

Для підбору коефіцієнтів α_d та β_d в (2.98) скористаємося методом розкладання за модами. Розглянемо задачу про усталені коливання $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} e^{i\omega t}$ для пружного тіла, яке можна вважати частинним випадком п'єзоелектричного тіла. Тоді з (2.97) маємо:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}}. \quad (2.99)$$

Приймаємо спосіб демпфування за Релеєм (2.98) та вважаємо, що відомі власні частоти ω_k та власні вектори $\mathbf{W}_k = \tilde{\mathbf{U}}_k$, ортонормовані за матрицею мас \mathbf{M} та ортогональні за матрицею жорсткостей \mathbf{K} :

$$\mathbf{W}_k^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{W}_m = \delta_{km}; \quad \mathbf{W}_k^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{W}_m = \omega_k^2 \delta_{km}.$$

Будемо шукати розв'язок задачі (2.99) вигляді розвинення за власними векторами:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_m z_m \mathbf{W}_m. \quad (2.100)$$

Підставляємо (2.100) в (2.99), домножуємо отриманий вираз скалярно на \mathbf{W}_k^T і отримуємо вираз для визначення z_k :

$$\left(\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\xi_k \omega \omega_k \right) \cdot z_k = P_k, \quad (2.101)$$

де підсумовування за k не відбувається, і

$$\xi_k = \frac{\alpha_d}{2\omega_k} + \frac{\beta_d \omega_k}{2}; \quad P_k = \mathbf{W}_k^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_u. \quad (2.102)$$

Коефіцієнт демпфування ξ_k визначається через логарифмічний декремент коливань та пов'язаний з добротністю Q_{dk} формулою

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} = \frac{1}{2Q_{dk}}. \quad (2.103)$$

Добротність є однією з найважливіших характеристик осцилятора з врахуванням демпфування і може бути вимірювана експериментально. А саме, добротність Q_{dk} та інші дисипативні характеристики визначаються з амплітудно-частотних характеристик осцилятора за (2.71).

Частинними випадками демпфування за Релеєм є альфа-демпфування (масове демпфування) та бета-демпфування (жорсткісне демпфування). При альфа-демпфуванні маємо

$$\alpha_d = \frac{\omega_k}{Q_{dk}} \text{ } \$ \quad \beta_d = 0. \quad (2.104)$$

При бета-демпфуванні

$$\alpha_d = 0; \quad \beta_d = \frac{1}{\omega_k Q_{dk}}. \quad (2.105)$$

Якщо для частот f_i, f_j відомі добротності Q_{di}, Q_{dj} або коефіцієнти демпфування ξ_i, ξ_j , то коефіцієнти демпфування в діапазоні $[f_i, f_j]$ визначаються з (2.102):

$$\alpha_d = 4\pi \left(f_i \xi_i - \frac{f_i \xi_i - f_j \xi_j}{1 - (f_j/f_i)^2} \right); \quad \beta_d = \frac{f_i \xi_i - f_j \xi_j}{\pi (f_i^2 - f_j^2)}. \quad (2.106)$$

Якщо вважати добротність сталою $Q_{dk} = Q_d$ на інтервалі частот $[f_b, f_e]$, то з (2.102), (2.103) маємо вирази для визначення констант демпфування α_d та β_d :

$$\alpha_d = \frac{2\pi f_b f_e}{(f_b + f_e) Q_d}; \quad \beta_d = \frac{1}{2\pi (f_b + f_e) Q_d}. \quad (2.107)$$

Вирази (2.107) можуть бути використані для визначення констант

демпфування за Релеєм, виходячи зі значення добротності.

На рис. 2.5 проводиться порівняння залежності коефіцієнта демпфування ξ від частоти для моделей (2.105)-(2.107).

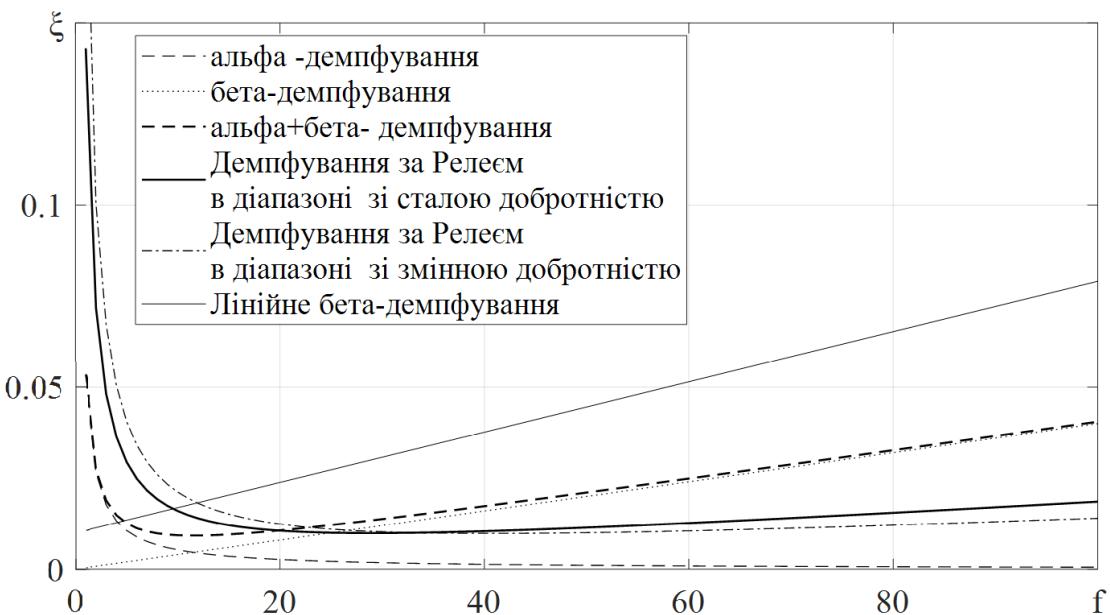


Рис. 2.3. Частотна залежність коефіцієнта демпфування при демпфуванні за Релеєм

З (2.102) та рис. 2.5 випливає, що альфа-демпфування найбільш виражене в низькочастотній області. При бета-демпфуванні для коефіцієнта демпфування маємо лінійну частотну залежність. Їх комбінація може забезпечити близьку до горизонтальної ділянку ξ , що моделює частотну незалежність коефіцієнта демпфування, що часто спостерігається в експерименті. В роботі [175] проводилося дослідження відповідності моделі демпфування за Релеєм експериментальним даним на прикладі реакції на сейсмічне навантаження багатоповерхової будівлі та було запропоновано лінійну модель бета-демпфування $\xi_k = \beta_0 + \beta_d \pi f_k$, що наведена на рис. 2.3 останньою кривою. Розширені моделі демпфування за Релеєм побудовано в роботах [250, 302].

Таким чином, не дивлячись на те, що масове демпфування (альфа-демпфування) більш виражене для в'язких матеріалів, його комбінація з жорсткісним (бета-) демпфуванням дає можливість змоделювати процеси зі сталим або заданим на конкретних частотах коефіцієнтом демпфування.

РОЗДІЛ 3.

УСТАЛЕНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ОДНОРІДНИХ ТА КОМПОЗИТНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ЦИЛІНДРІВ

Побудовано чисельну методику дослідження усталених осесиметричних коливань п'єзокерамічних та композитних п'єзоелектричних циліндрів скінченної довжини з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу. Описано постановку краївих задач для радіально поляризованих п'єзокерамічних циліндрів. Розвинуто варіаційно-сплайновий чисельний метод розв'язання поставленої задачі, що базується на принципі Гамільтона-Остроградського та сплайн-апроксимаціях за просторовою координатою. Паралельно розвивається підхід, в якому система розв'язувальних рівнянь електропружності зводиться до системи рівнянь типу Гамільтона відносно радіальної координати з застосуванням скінчених різниць в осьовому напрямку. Для розв'язання сформульованих краївих задач використовується метод дискретної ортогоналізації. Проводиться верифікація отриманих розв'язків та аналіз результатів.

Побудовано амплітудно-частотні залежності коливань однорідних та композитних циліндрів без врахування та з врахуванням дисипації енергії. Врахування дисипативних властивостей матеріалів виконується шляхом введення комплексних модулів та порівнюється з частотно-незалежним демпфуванням та демпфуванням за Релеєм. Аналізуються три різні моделі шаруватих композитних матеріалів та порівнюються коливання циліндрів з різною часткою активного компоненту. Визначаються резонансні частоти, форми та амплітуди резонансних коливань циліндрів, встановлюється їх залежність від геометричних параметрів.

Наведені в розділі результати висвітлено в публікаціях: [12, 14 – 17, 30, 158, 159, 291] та ін.

3.1. Чисельна методика розв'язання

Для дослідження усталених осесиметричних коливань п'єзокерамічних та композитних п'єзоелектричних циліндрів скінченої довжини з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу розвинуто два суттєво різних чисельних підходів: варіаційно-сплайновий метод, що базується на принципі Гамільтона-Остроградського та сплайн-апроксимаціях за просторовою координатою, та підхід на основі гамільтонового формалізму.

3.1.1. Варіаційно-сплайновий метод розв'язання задач електропружності

При дослідженні усталених коливань вважатимемо, що будь-яку з функцій, що описують динамічний електромеханічний стан тіла в циліндричній системі

координат, можна представити у вигляді

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \operatorname{Re}(\Phi^a(r, \theta, z)e^{-i\omega t}), \quad (3.1)$$

де ω — кругова частота. Надалі множник $e^{-i\omega t}$ та індекс a , що відповідає амплітудним значенням функцій, будемо опускати.

При розв'язанні осесиметричних задач електропружності скористаємося варіаційним принципом Гамільтона-Остроградського (2.44)

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \right) + \sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{ik} - D_k \dot{E}_k - f_k \dot{u}_k \right) dV - \oint_S (\sigma_{ik} n_i \dot{u}_k + D_i n_i \dot{\varphi}) dS = 0, \quad (3.2)$$

де $\sigma_{ik} \dot{\varepsilon}_{ik} - D_i \dot{E}_i = \dot{H}_{el}$ — зміна електричної ентальпії; n — нормаль до поверхні S об'єму V ; D — електрична індукція; E — електричне поле; φ — різниця потенціалів; f — питома об'ємна сила. У цьому принципі допустимі функції вибираються так, щоб виконувались визначальні співвідношення, співвідношення Коші, градієнтні співвідношення для електричного потенціалу, а також країові умови, що задаються на переміщення і потенціал електричного поля.

Для дослідження осесиметричних коливань циліндрів потрібно врахувати умови симетрії

$$u_\theta = 0; \quad \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = \frac{\partial u_{rz}}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad (3.3)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (3.4)$$

та рівняння електростатики

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Умова стаціонарності функціоналу (3.2) з врахуванням (3.1), (3.3) – (3.5) за

відсутності механічних навантажень набуде вигляду:

$$\delta A = \delta_{u_r, u_z, \varphi} \int_V [\sigma_{rr}\varepsilon_{rr} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{rz}\varepsilon_{rz} - E_r D_r - E_z D_z - \rho\omega^2(u_r^2 + u_z^2)] dV = 0. \quad (3.6)$$

В функціонал (3.6) входять тільки перші похідні від шуканих функцій, в силу чого його стаціонарне значення можна шукати на лінійно-шматкових функціях. При використанні таких функцій незалежними змінними функціоналу стають ординати вершин ламаної, які утворюють дискретний і скінчений набір шуканих параметрів. Суть такого методу, таким чином, полягає в знаходженні такого набору параметрів $u_i(r, z_i), \varphi(r, z_i), i = 1, 2, \dots, N-1$, при якому функціонал $A(u_r, u_z, \varphi)$ набуває стаціонарного значення.

Перевага цього методу над звичайним різницевим методом забезпечується більш низьким порядком похідних, які апроксимуються. При побудові рівнянь за допомогою цього методу вдається уникнути протиріч в кутових точках області. У порівнянні з варіаційними методами, в яких використовується одна для всього тіла система базисних функцій, такий метод має перевагу через відсутність проблеми вибору цих функцій. Перевагою такого методу в порівнянні з методами, в яких використовуються кускові базисні функції, наприклад в методі скінчених елементів, є простота побудови вирішальних систем для геометрично простих областей і крайових умов в переміщеннях, а також відсутність процесу асамблювання. Матриця вирішальні системи має симетричну стрічкову структуру. На відміну від інших методів, схема такого методу дозволяє досить просто представити систему рівнянь розв'язання для будь-яких крайових умов.

Спосіб розв'язання. Для отримання дискретних рівнянь розіб'ємо область в напрямку осі симетрії $n-1$ прямими лініями, паралельними осі r , з інтервалом $h_i = z_{i+1} - z_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Представимо шукані функції на прямих у вигляді сплайна першого порядку [50], який є кусково-неперервною функцією

$$f(r, z) = f_i + (f_{i+1} - f_i)\xi_i = f_i(1 - \xi_i) + f_{i+1}\xi_i, \\ \xi_i = (z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

Відповідні похідні

$$dz = h_i d\xi, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f_i}{\partial r}(1 - \xi_i) + \frac{\partial f_{i+1}}{\partial r}\xi_i, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{h_i}(f_{i+1} - f_i).$$

Функціонал (3.6) з врахуванням (3.7) перетворюється до вигляду

$$A = \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{i=0}^{n-1} F_i dr \quad (3.8)$$

Тут J_i — дискретні функціонали на стрічках (z_i, z_{i+1}) , отримані при застосуванні запропонованої сплайн-апроксимації.

Умова стаціонарності (3.6) відносно дійсних переміщень і потенціалів в точках розбиття приймає вигляд

$$\delta A = \delta \int_{r_0}^{r_r} \int_0^L J dr dz = \int_{r_0}^{r_r} \delta \sum_{i=0}^{n-1} F_i(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i, u'_{ri}, u'_{zi}, \varphi'_i) dr = \\ = \int_{r_0}^{r_r} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial F_i}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dr = 0. \quad (3.9)$$

Тут $y_1 = u_{ri}$, $y_2 = u_{zi}$, $y_3 = \varphi_i$.

Якщо провести інтегрування по z і задовольнити умови стаціонарності функціоналу згідно до (3.9), отримаємо систему рівнянь для знаходження переміщень і електричного потенціалу

$$\frac{\partial J}{\partial u_{ri}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{ri}} = F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = 0; \quad \frac{\partial J}{\partial u_{zi}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial u'_{zi}} = F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial \varphi'_i} = F_{\varphi i}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = 0. \quad (3.10)$$

Систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (3.10) з відповідними краївими умовами розв'язуємо чисельно за допомогою методу дискретної ортогоналізації.

На зовнішніх поверхнях циліндра задаються переміщення або напруження згідно матеріальних співвідношень для попередньо поляризованої кераміки. До електродованих поверхонь циліндра прикладається різниця потенціалів, яка при закороченні електродів дорівнює нулю. На неелектродованих поверхнях електрична індукція $D_n = 0$. Таким чином, в загальному випадку на зовнішніх поверхнях $z=0$, $z=L$, $r=r_0$, $r=r_r$ циліндра маємо змішані граничні умови у вигляді лінійних комбінацій переміщень, електричного потенціалу та їх похідних

$$\begin{aligned} U_{z0}(u_{r0}, u_{z0}, \varphi_0, u_{r1}, u_{z1}, \varphi_1, u'_{r0}, u'_{z0}, \varphi'_0) &= G_{z0}; \\ U_{zL}(u_{rN}, u_{zN}, \varphi_N, u_{rN-1}, u_{zN-1}, \varphi_{N-1}, u'_{rN}, u'_{zN}, \varphi'_N) &= G_{zL}; \\ U_{r0}(u_{rj}, u_{zj}, \varphi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \varphi'_i) \Big|_{r=r_0} &= G_{r0}, \\ U_{rr}(u_{rj}, u_{zj}, \varphi_j, u'_{ri}, u'_{zi}, \varphi'_i) \Big|_{r=r_r} &= G_{rr}, \quad j = i-1, i, i+1, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Коливання п'єзокерамічного циліндра з радіальною поляризацією. Матеріальні співвідношення для попередньо поляризованої кераміки в радіальному напрямку з урахуванням осьової симетрії мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} + c_{33}^E \varepsilon_{rr} - e_{33} E_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} + c_{13}^E \varepsilon_{rr} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{zz} + c_{13}^E \varepsilon_{rr} - e_{13} E_r; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ D_z &= 2e_{15} S_{rz} + \varepsilon^S_{11} E_z; \quad D_z = e_{13} (S_{zz} + S_{\theta\theta}) + e_{33} S_{rr} + \varepsilon^S_{33} E_r. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Функціонал (4.1) при підстановці матеріальних залежностей (3.12) та співвідношень Коші приймає вигляд

$$\begin{aligned}
J = \int_{r_0}^{r_f} \int_0^L J dr dz = & \int_{r_0}^{r_f} \int_0^L \left(2c_{13}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{33}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{u_r}{r} + \right. \\
& + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 - e_{33}^S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + 2c_{12}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{11}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + c_{55}^E \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \\
& + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial z} - e_{11}^S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + 2c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2c_{55}^E \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\
& \left. + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) + c_{11}^E \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right) dr dz. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Тут r_0 і r_f — внутрішній і зовнішній радіуси відповідно, L — довжина циліндра.

Система вирішальних рівнянь (3.13) з врахуванням рівномірного розбиття ($h_i = h$, $i = 0, 1, \dots, N-1$) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & rc_{33}^E D_1 + re_{33} D_3 + c_{33}^E A_1 + (e_{33} - e_{13}) A_3 + \frac{r}{2h} (c_{55}^E + c_{13}) A_5 + \\
& + \left(\rho \omega^2 r - \frac{c_{11}^E}{r} \right) B_1 + \frac{1}{2h} (c_{13}^E - c_{12}^E) B_5 + \frac{rc_{55}^E}{h^2} B_7 + \frac{re_{15}}{h^2} B_9 = 0; \\
F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & rc_{55}^E D_2 + c_{55}^E A_2 + \frac{r}{2h} (c_{13}^E + c_{55}) A_4 + \\
& + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_6 + \rho \omega^2 r B_2 + \frac{1}{2h} (c_{12} + c_{55}^E) B_4 + \frac{rc_{11}^E}{h^2} B_8 + \frac{e_{15}}{2h} B_6 = 0; \\
F_{\varphi i}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & e_{33} r D_1 - e_{33}^S r D_3 + (e_{33} + e_{13}) A_1 - e_{33}^S A_3 + \frac{r}{2h} (e_{13} + e_{15}) A_5 + \\
& + \frac{e_{13}}{2h} B_5 - \frac{r}{h^2} e_{11}^S B_9 + \frac{re_{15}}{h^2} B_7 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned}
D_1 = & \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{ri}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{ri-1}}{dr^2} \right); \quad D_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 u_{zi}}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 u_{zi-1}}{dr^2} \right); \\
D_3 = & \left(\frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i+1}}{dr^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 \varphi_i}{dr^2} + \frac{1}{6} \frac{d^2 \varphi_{i-1}}{dr^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left(\frac{1}{6} \frac{du_{ri+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{ri}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{ri-1}}{dr} \right); \quad A_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{du_{zi+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{du_{zi}}{dr} + \frac{1}{6} \frac{du_{zi-1}}{dr} \right); \\
A_3 &= \left(\frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i+1}}{dr} + \frac{2}{3} \frac{d\varphi_i}{dr} + \frac{1}{6} \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right); \quad A_4 = \left(\frac{du_{ri+1}}{dr} - \frac{du_{ri-1}}{dr} \right); \\
A_5 &= \left(\frac{du_{zi+1}}{dr} - \frac{du_{zi-1}}{dr} \right); \quad A_6 = \left(\frac{d\varphi_{i+1}}{dr} - \frac{d\varphi_{i-1}}{dr} \right); \\
B_1 &= \left(\frac{1}{6} u_{ri+1} + \frac{2}{3} u_{ri} + \frac{1}{6} u_{ri-1} \right); \quad B_2 = \left(\frac{1}{6} u_{zi+1} + \frac{2}{3} u_{zi} + \frac{1}{6} u_{zi-1} \right); \\
B_3 &= \left(\frac{1}{6} \varphi_{i+1} + \frac{2}{3} \varphi_i + \frac{1}{6} \varphi_{i-1} \right); \quad B_4 = (u_{ri+1} - u_{ri-1}); \quad B_5 = (u_{zi+1} - u_{zi-1}); \\
B_6 &= (\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}); \quad B_7 = (u_{ri+1} - 2u_{ri} + u_{ri-1}); \quad B_8 = (u_{zi+1} - 2u_{zi} + u_{zi-1}).
\end{aligned}$$

Обчислення проводяться в нормованих величинах

$$\begin{aligned}
\bar{r} &= \frac{r}{R}; \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{R \sqrt{\frac{\epsilon_{00}}{c_{00}}}}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}; \\
\bar{e}_{ij} &= \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00}\epsilon_{00}}}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}; \quad \bar{\epsilon}_{ii} = \frac{\epsilon_{ii}^S}{\epsilon_{00}}; \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{00}}},
\end{aligned} \quad (3.15)$$

де $c_{00} = c_{33}^E$, $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$, $\rho_{00} = \rho$, $R = R_1$ — нормуючі величини. При цьому загальний вигляд рівнянь не зміниться. Надалі знаки нормування (верхні риски) будемо опускати.

Чисельний метод розв'язання. Будемо шукати розв'язок у вигляді вектора ($n = N - 1$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \{u_{r1}, \dots, u_{rn}, u_{z1}, \dots, u_{zn}, \varphi_1, \dots, \varphi_n, u'_{r1}, \dots, u'_{rn}, u'_{z1}, \dots, u'_{zn}, \varphi'_1, \dots, \varphi'_n\} = \\
&= \{y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}, y_{2n+1}, \dots, y_{3n}, y_{3n+1}, \dots, y_{4n}, y_{4n+1}, \dots, y_{5n}, y_{5n+1}, \dots, y_{6n}\}.
\end{aligned}$$

Тоді систему рівнянь (3.14) можна представити у вигляді

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \begin{cases} \frac{dy_i}{dr} = y_{3n+i}, \\ \frac{dy_{3n+i}}{dr} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial r} - \mathbf{B} \mathbf{Y}), \quad i=1,\dots,3n. \end{cases} \quad (3.16)$$

Тут \mathbf{B} — матриця коефіцієнтів системи (3.14) при переміщеннях та електричному потенціалі, \mathbf{A} — при їх перших похідних, \mathbf{M} — при других похідних. Матриці мають стрічкову форму, що спрощує знаходження чисельного розв'язку.

Розглянемо циліндр з закороченими торцями, мембранине закріплення

$$u_r(r,0) = \sigma_{zz}(r,0) = 0, \quad u_r(r,l) = \sigma_{zz}(r,l) = 0, \quad \varphi(r,0) = \varphi(r,l) = 0.$$

Нехай циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(R_0, z) = \sigma_{rz}(R_0, z) = 0, \quad \sigma_{rr}(R_1, z) = \sigma_{rz}(R_1, z) = 0.$$

До електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів, яка змінюється за гармонійним законом з частотою ω і амплітудою $2V_0$:

$$\varphi(r_0, z, t) = -V_0 \sin \omega t, \quad \varphi(r_r, z, t) = V_0 \sin \omega t.$$

При переході до вектора змінних \mathbf{Y} граничні умови на циліндричних поверхнях перетворяться до вигляду ($i=1,\dots,n$)

$$\begin{aligned} \frac{c_{13}^E}{r_0} y_i(r_0) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_0) - y_{n+i-1}(r_0)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_0) + e_{33} y_{5n+i}(r_0) &= 0, \\ c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_0) + \frac{y_{i+1}(r_0) - y_{i-1}(r_0)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_0) - y_{2n+i-1}(r_0)}{2h} &= 0, \\ y_{2n+i}(r_0) &= -1; \\ \frac{c_{13}^E}{r_r} y_i(r_r) + c_{13}^E \frac{y_{n+i+1}(r_r) - y_{n+i-1}(r_r)}{2h} + c_{33}^E y_{3n+i}(r_r) + e_{33} y_{5n+i}(r_r) &= 0; \\ c_{44}^E \left(y_{4n+i}(r_r) + \frac{y_{i+1}(r_r) - y_{i-1}(r_r)}{2h} \right) + e_{42} \frac{y_{2n+i+1}(r_r) - y_{2n+i}(r_r)}{h} &= 0; \\ y_{2n+i}(r_r) &= 1. \end{aligned}$$

Система рівнянь (3.16) вирішується за допомогою методу дискретної

ортогоналізації. На сітці 50x30 результати відрізняються не більше ніж на 2%. При подальшому збільшенні точок розбиття похибка зменшується, але помітно збільшується час розрахунку, що істотно в задачах на визначення резонансних частот перетворювача.

3.1.2. Підхід на основі гамільтонового формалізму

Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань (виконується припущення (3.1)) в циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань відносно амплітудних значень напружень та переміщень

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zz}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r D_r^a}{\partial r} = 0, \quad (3.18)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^a &= c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}; \\ \sigma_{zz}^a &= c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}; \\ \sigma_{rr}^a &= c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}; \\ \sigma_{zr}^a &= c_{44}^E \left(\frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{42} \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}; \quad D_z^a = e_{42} \left(\frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}; \\ D_r^a &= e_{31} \left(\frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Система рівнянь (3.17)-(3.19) доповнюється граничними умовами для механічних та електричних величин на граничній поверхні S

$$u_S = \overset{o}{u}_S \text{ або } \sigma_n = \overset{o}{\sigma}_n; \quad (3.20)$$

$$\varphi = \overset{o}{\varphi} \text{ або } D_n = \overset{o}{D}_n. \quad (3.21)$$

Застосуємо нормування (3.15). Далі верхні індекси « a » будемо опускати.

Зведемо систему рівнянь (3.17) – (3.19) до операторної системи диференціальних рівнянь за радіальною координатою відносно функцій $\hat{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\hat{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$, $\hat{D}_r = rD_r$, u_r , u_z , φ [300]. Після необхідних перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} \left(c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) - \rho\omega^2 r \right) u_r + \left(c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} + \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\hat{\sigma}_{rz}}{rc_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \hat{D}_r}{\partial r} = - \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^g r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r}; \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial r} &= - \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\ &\quad + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\partial \hat{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho\omega^2 r u_z; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Тут використані позначення

$$c_{j3}^g = c_{j3}^E + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S}; \quad e_{j3}^g = e_{j3} - c_{j3}^E \frac{e_{33}}{c_{33}^E}; \quad j = 1, 3;$$

$$\varepsilon_{11}^g = \varepsilon_{11}^S + \frac{e_{42}^2}{c_{44}^E}; \quad \varepsilon_{33}^g = \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E}.$$

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , D_z , які не увійшли до системи (3.22), визначаються через основні функції σ_{rr} , u_z , D_r , u_r , σ_{rz} , φ за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \sigma_{rr} + \left(c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + e_{13} \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} D_r + \left(c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + e_{13} \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{u_r}{r}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \sigma_{rr} + \left(c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + e_{13} \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} D_r + \left(c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + e_{13} \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{u_r}{r}; \\ D_z &= \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \sigma_{rz} - \varepsilon_{11}^g \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних (3.22) не може бути розв'язана аналітично, в зв'язку з чим виникає необхідність застосування певних загальноприйнятих методів зниження розмірності задачі з подальшим застосуванням чисельних методів: розклад в ряди по звичайних просторових змінних (степеневі, тригонометричні), застосування методів операційного числення (перетворення Лапласа, Фур'є) з застосуванням чисельних обернених перетворень, апроксимації похідних наближеними виразами. Всі ці методи призводять до значного зростання кількості змінних за рахунок кількості членів ряду, що розглядаються, або кількості точок розбиття, і потребують дослідження збіжності та стійкості розв'язку.

В нашому випадку приведемо розв'язуючу систему (3.22) до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою різницевих апроксимацій за осьовою координатою.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < L$. Введемо розбиття відрізу $(0, L)$ в напрямку осі z на інтервали точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ і в формулах (3.22), (3.23) апроксимуємо похідні по z скінченними різницями. В результаті одержимо систему $6n$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\sigma}_{rr,i}}{dr} &= \left(\frac{1}{r} \left(c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) - \rho\omega^2 r \right) u_{r,i} + \left(c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\hat{D}_{r,i}}{r} + \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{\hat{\sigma}_{rz,i+1} - \hat{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z}; \\
\frac{du_{z,i}}{dr} &= \frac{\hat{\sigma}_{rz,i}}{rc_{44}^E} - \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta z}; \\
\frac{d\hat{D}_{r,i}}{dr} &= -\frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\hat{\sigma}_{rz,i+1} - \hat{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z} + \varepsilon_{11}^g r \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta z^2}, \\
\frac{du_{r,i}}{dr} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{u_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + \frac{1}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr,i}}{r}, \\
\frac{d\hat{\sigma}_{rz,i}}{dr} &= -(c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}) \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} - (c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}) r \times \\
&\quad \times \frac{u_{z,i+1} - 2u_{z,i} + u_{z,i-1}}{\Delta z^2} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\hat{D}_{r,i+1} - \hat{D}_{r,i-1}}{2\Delta z} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr,i+1} - \hat{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta z} - \rho\omega^2 r u_{z,i}; \\
\frac{d\varphi_i}{dr} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{u_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z},
\end{aligned}$$

(3.24)

Для зведення системи (3.24) до вигляду канонічних рівнянь типу Гамільтона необхідно розділити змінні на групи p_i, q_i та звести систему до вигляду

$$q'_i = R_{ik}(\xi)q_k + Q_{ik}(\xi)p_k; \quad p'_i = -P_{ik}(\xi)q_k - R_{ki}(\xi)p_k \quad (3.25)$$

При цьому функція Гамільтона матиме вигляд

$$H = \frac{1}{2}(P_{ik}q_iq_k + 2R_{ik}p_iq_k + Q_{ik}p_ip_k). \quad (3.26)$$

Нехай

$$\begin{aligned}
q_i &= -\hat{\sigma}_{rr,i}; \quad q_{n+i} = u_{z,i}; \quad q_{2n+i} = -D_{r,i}; \\
p_i &= u_{r,i}; \quad p_{n+i} = \sigma_{zr,i}; \quad p_{2n+i} = \varphi_i; \\
i &= 1, 2, \dots, n-1, n.
\end{aligned}$$

(3.27)

Тоді з (3.24) маємо матриці R , Q , P , що відповідають (3.26), (3.27):

$$\begin{aligned}
Q_{ii} &= -\left(\frac{1}{r}(c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}) - \rho\omega^2 r\right); \quad Q_{i,n+i\pm 1} = \pm \frac{1}{2\Delta z}; \quad Q_{n+i,n+i} = \frac{1}{rc_{44}^E}; \\
Q_{n+i,i\pm 1} &= \mp \frac{1}{2\Delta z}; \quad Q_{n+i,2n+i\pm 1} = \mp \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}^E}; \quad Q_{2n+i,n+i\pm 1} = \pm \frac{e_{42}}{2\Delta z c_{44}^E}; \\
Q_{2n+i,2n+i\pm 1} &= -\frac{\varepsilon_{11}^g r}{\Delta z^2}; \quad Q_{2n+i,2n+i} = 2\frac{\varepsilon_{11}^g r}{\Delta z^2}; \quad R_{i,i} = \frac{c_{13}^g}{rc_{33}^g}; \quad R_{i,2n+i} = R_{2n+i,i} = -\frac{e_{13}^g}{r\varepsilon_{33}^g}; \\
R_{i,n+i\pm 1} &= \mp \frac{1}{2\Delta z}(c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}); \quad R_{n+i,i\pm 1} = \pm \frac{1}{2\Delta z}(c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}); \\
P_{i,i} &= -\frac{1}{rc_{33}^g}; \quad P_{i,n+i\pm 1} = \pm \frac{c_{13}^g}{2\Delta z c_{33}^g}; \quad P_{i,2n+i} = P_{2n+i,i} = \frac{e_{33}}{r\varepsilon_{33} c_{33}^g}; \\
P_{n+i,n+i} &= -2(c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}) \frac{r}{\Delta z^2} + \rho\omega^2 r; \quad P_{n+i,2n+i\pm 1} = \pm \frac{e_{13}^g}{2\Delta z \varepsilon_{33}^g}; \\
P_{n+i,n+i\pm 1} &= (c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31}e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g}) \frac{r}{\Delta z^2}; \quad P_{n+i,i\pm 1} = \mp \frac{c_{13}^g}{2\Delta z c_{33}^g}; \\
P_{2n+i,2n+i} &= \frac{-c_{33}^E}{r\varepsilon_{33}^S c_{33}^g}; \quad P_{2n+i,n+i\pm 1} = \mp \frac{e_{13}^g}{2\Delta z \varepsilon_{33}^g}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Матриці (3.28) мають симетричну блочну структуру, зручну для обчислювального процесу.

Таким чином отримано канонічну систему рівнянь типу Гамільтона, що описує електромеханічний стан п'єзокерамічних циліндрів зі змінними q_i , p_i (3.27) та характеристичною функцією $H(r, q_i, p_i)$, $i = 1, \dots, 3n$ (3.26).

Канонічні рівняння Гамільтона завдяки їх особливій формі отримали широке застосування в механіці, зокрема завдяки розвитку методу Якобі інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку.

У задачі щодо двох точок канонічні рівняння Гамільтона можуть бути вирішені аналітично. У більшості інших задач вирішити рівняння аналітично не

вдається. Однак, використовуючи методи загальної теорії збурень, можна будувати рішення у вигляді рядів. Знайдені таким чином рішення будуть справедливі на деякому інтервалі. При побудові повного рішення методом послідовних наближень можна, проводячи відповідні перетворення, на кожному етапі отримувати диференціальні рівняння, що є за формою, як і попередні, канонічними і мають в якості змінних так звані постійні інтегрування, отримані в попередньому наближенні. Описана процедура може повторюватися стільки разів, скільки буде потрібно.

Враховуючи постановку граничних умов та порядок системи, завдяки сучасному рівню обчислювальних засобів зручніше застосовувати чисельне інтегрування системи. Користуючись формулами (3.23) і апроксимаціями необхідних величин з матеріальних залежностей (3.19), з граничних умов знаходяться невідомі значення основних функцій на торцях $z = z_0 = 0$ і $z = z_{n+1} = L$. Граничні умови на циліндричних поверхнях записуємо в матричному вигляді, що дає змогу для інтегрування отриманої краєвої задачі застосувати метод дискретної ортогоналізації. Порівняння результатів обчислень, отриманих за допомогою запропонованої методики та за допомогою варіаційних методів та сплайн апроксимацій, показало відхилення в межах 3%. Порівняння розв'язків на різних сітках розбиття дозволило зупинитися на значеннях $n = 30 \div 100$ в залежності від довжини циліндра, кількість ділянок ортогоналізації $k = 10$, на кожній з них бралося 5 точок для методу Рунге-Кутта.

Тестування наведених методик. Достовірність отриманих результатів перевірялася шляхом порівняння розв'язків, отриманих на різних сітках розбиття за пропонованими підходами, отриманих іншими методами та знайденими в літературі. Криві розподілу амплітудних значень переміщень, отриманих вараційно-сплайновим методом (ВСМ) та за допомогою підходу на основі гамільтонового формалізму (системи рівнянь типу Гамільтона, СРТГ), візуально не відрізняються між собою [159]. Обчислення одночасно двома суттєво різними методами гарантують достовірність отриманих результатів, тому існує необхідність в розвитку

обох методів. Порівняння результатів обчислень, отриманих за допомогою запропонованої методики та представлених в роботі [83], де аналогічна задача розв'язувалася за допомогою степеневих рядів, показало відхилення по резонансних частотах в межах 3%. Результати обчислень при різних граничних умовах сильно відрізняються, тому при зміні граничних умов необхідно добиватися подібних (відхилення <5%) результатів. Проведемо детальне порівняння отриманих результатів.

Розглядається циліндр з кераміки PZT-4 з внутрішнім радіусом циліндра R_0 , зовнішнім R_l , $R = R_l$, довжиною L , з закріпленими закороченими торцями та вільними циліндричними поверхнями з заданою різницею потенціалів на них. При обчисленнях взято $R_0 / R_l = 0,6$, $L = 2R$, різниця потенціалів $2V_0 = 2$, $\bar{\omega} = 1$.

В таблиці 3.1 наведено результати, отримані для циліндра $l_z = 2$ на сітці $m = 30$, кількості точок ортогоналізації $c = 10$, кількості точок Рунге-Кутта $d = 5$ при $\omega = 1$. При збільшенні кількості точок розбиття результати візуально не відрізняються від наведених.

Таблиця 3.1.

ω		Варіаційно-сплайнний метод	Підхід на основі гамільтонового формалізму	$\Delta, \%$
1	$u_{r\max}$	57,2	56,3	1,6
	$u_{z\max}$	40,2	39,3	1,6
1,1	$u_{r\max}$	14,4	13,7	2
	$u_{z\max}$	16,1	15,9	1,3
1,5	$u_{r\max}$	19,4	18,8	3,1
	$u_{z\max}$	22,2	22,9	3

На рис. 3.1 наведено криві розподілу по висоті радіальних та поздовжніх переміщень внутрішньої поверхні циліндра. Результати отримано обома методами при $m = 30$, $c = 5$, $d = 10$, де $m + 2$ — кількість точок розбиття по z , d — кількість

точок ортогоналізації, c — кількість точок інтегрування методом Рунге-Кутта на інтервалі ортогоналізації. Бачимо повне візуальне співпадання кривих, що відповідає відхиленню між розв'язками в межах 0.5%, звідки можна зробити висновок про достовірність результатів та необхідну кількість точок розбиття.

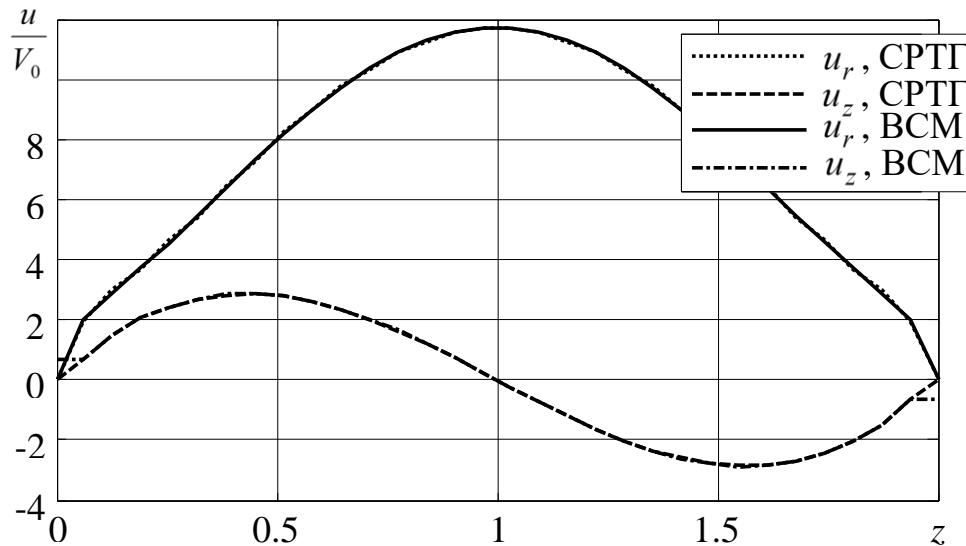


Рис. 3.1. Радіальні та поздовжні амплітудні значення переміщень внутрішньої поверхні циліндра з защемленими торцями

На рис. 3.2 наведено залежність безрозмірних амплітудних значень радіальних переміщень u_r в точці $(R_1, l_z / 2)$ та поздовжніх переміщень u_z в точці $(R_1, l_z / 4)$ від частоти ω , отримані двома методами.

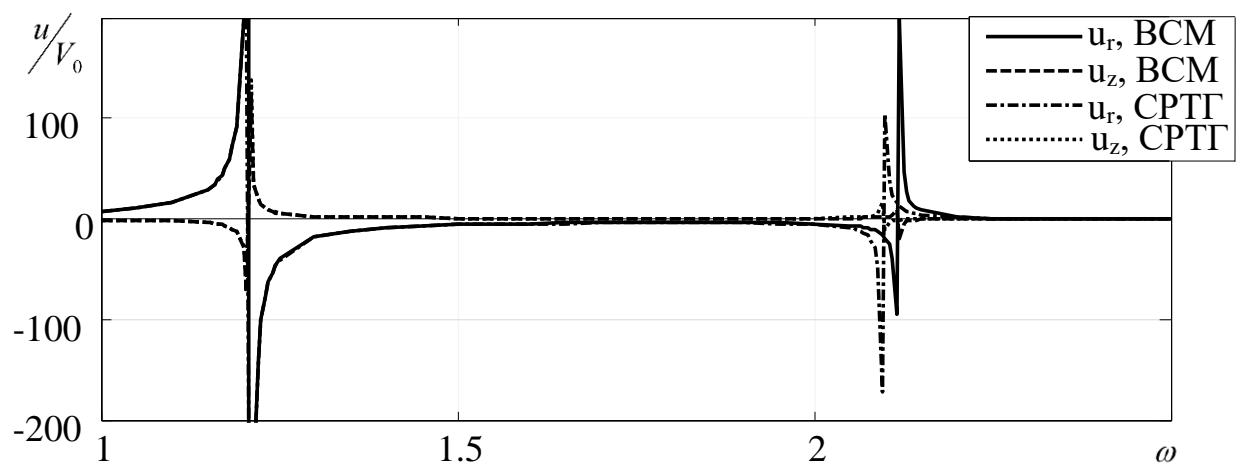


Рис. 3.2. АЧХ переміщень циліндра з защемленими торцями

В міжрезонансному діапазоні спостерігається візуальне співпадіння результатів аж до другої власної частоти. З системи типу Гамільтона маємо $\omega_1 = 1,207$, $\omega_2 = 2,097$. ВСМ видає $\omega_1 = 1,207$, $\omega_2 = 2,108$. Відхилення між значеннями другої резонансної частоти складає 0.5%, що є допустимим. На першому резонансі виникають радіально-поздовжні коливання, на другому переважно радіальні коливання.

Результати обчислень двома методами при інших граничних умовах продемонстровано на рис. 3.3, де наведено амплітудні значення переміщень для циліндра з шарнірно закріпленими закороченими торцями

$$u_r(r,0) = u_r(r,L) = 0; \quad \sigma_z(r,0) = \sigma_z(r,L) = 0; \quad \varphi(r,0) = \varphi(r,L) = 0.$$

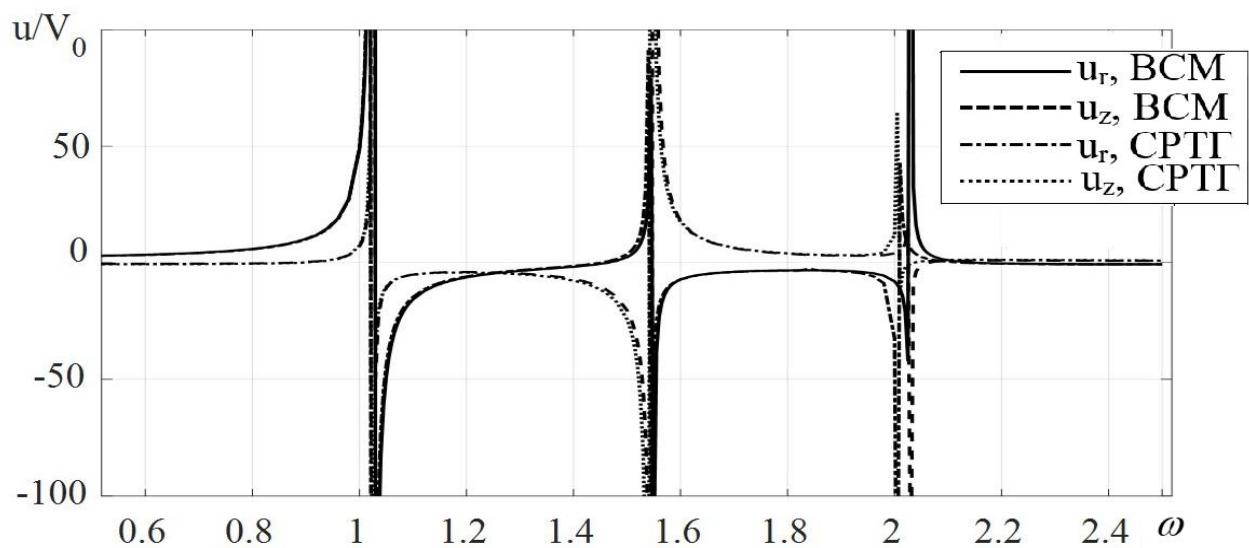


Рис. 3.3. АЧХ радіальних та поздовжніх переміщень циліндра з мембрально закріпленими торцями

В таблиці 3.2 наведено значення розмірних резонансних частот $f_i = \frac{\Omega_i}{2\pi R} \sqrt{\frac{c_{00}}{\rho_{00}}}$, отриманих з рис. 3.3 та за допомогою методу скінченних елементів.

Таблиця 3.2.

Резонансна частота, кГц	Варіаційно-сплайновий метод	Система рівнянь типу Гамільтона	Метод скінченних елементів	Різниця
f_1	63,93	63,75	62,57	2%
f_2	95,6	94,37	93,64	2%
f_3	126,9	125,6	125,05	1,5%

Відхилення між розв'язками, отриманими різними методами, знаходиться в межах 2%.

В роботі [210, с.70] визначалися власні частоти для радіально поляризованих циліндрів з PZT-4 з защемленими закороченими торцями різної довжини з зовнішніми радіусами $R_0 = 3$, $R_1 = 5$. Розглянемо циліндр розмірами $R_0 = 0,6\text{cm}$, $R_1 = 1\text{cm}$, $L = 2R_1 = 10h = 2\text{cm}$. В таблиці 3.3 наведено порівняння розмірних результатів для трьох перших власних кругових частот, отриманих різними методами.

Таблиця 3.3

Кругова частота, $\text{kГц}\times\text{рад}$	Варіаційно-сплайновий підхід	Система рівнянь типу Гамільтона	Метод скінченних елементів	Метод сплайн-колокаций [210]	Різниця
Ω_1	477,4	475	472,5	461,9	3,3%
Ω_2	810,7	815	828	820	2%
Ω_3	1116	1110	1107,7	1160	4,5%

Таким чином, запропоновані методи розв'язання осесиметричних задач для циліндричних п'єзоелектричних тіл демонструють гарну збіжність та відповідність результатів розв'язкам тестових задач.

3.2. Гармонічні коливання п'єзоелектричних циліндрів

3.2.1. Коливання однорідних п'єзокерамічних циліндрів при моногармонічних навантаженнях

Досліжується радіально поляризований порожністий циліндр з кераміки PZT-4. Внутрішній радіус циліндра R_1 , зовнішній R_2 , $R = R_2$, довжина L . При обчисленнях взято $R_1 = 0,6R_2$, $l_z = L/R$.

Розглянемо циліндр з защемленим торцем $z = 0$ та жорсткою мембраною на торці $z = L$

$$u_r(r, 0) = u_z(r, 0) = 0; \quad u_r(r, L) = \sigma_{zz}(r, L) = 0.$$

Дане закріплення моделюється жорсткими закороченими електропровідними накладками на торцях, впливом зовнішнього середовища нехтуємо. Торці електродовані та закорочені

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, L) = 0.$$

Нехай до електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів, що змінюється за гармонічним законом

$$\varphi(R_1, z, t) = -V_0 \sin \omega t; \quad \varphi(R_2, z, t) = V_0 \sin \omega t.$$

Вважаємо, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\sigma_{rr}(R_1, z) = \sigma_{rz}(R_1, z) = 0; \quad \sigma_{rr}(R_2, z) = \sigma_{rz}(R_2, z) = 0.$$

На рис. 3.4 наведено амплітудно-частотні залежності переміщень для циліндрів різної довжини при заданих ГУ. Зі зростанням довжини циліндра зменшуються значення резонансних частот та зростає їх кількість на розглянутому інтервалі, що відповідає фізичним закономірностям і пояснюється зміною резонансного розміру. В циліндрі $l_z = 1$ на першому резонансі радіальні переміщення знаходяться в протифазі з поздовжнimi. Така поведінка характерна для другого резонансу рис. б), в) та третього г).

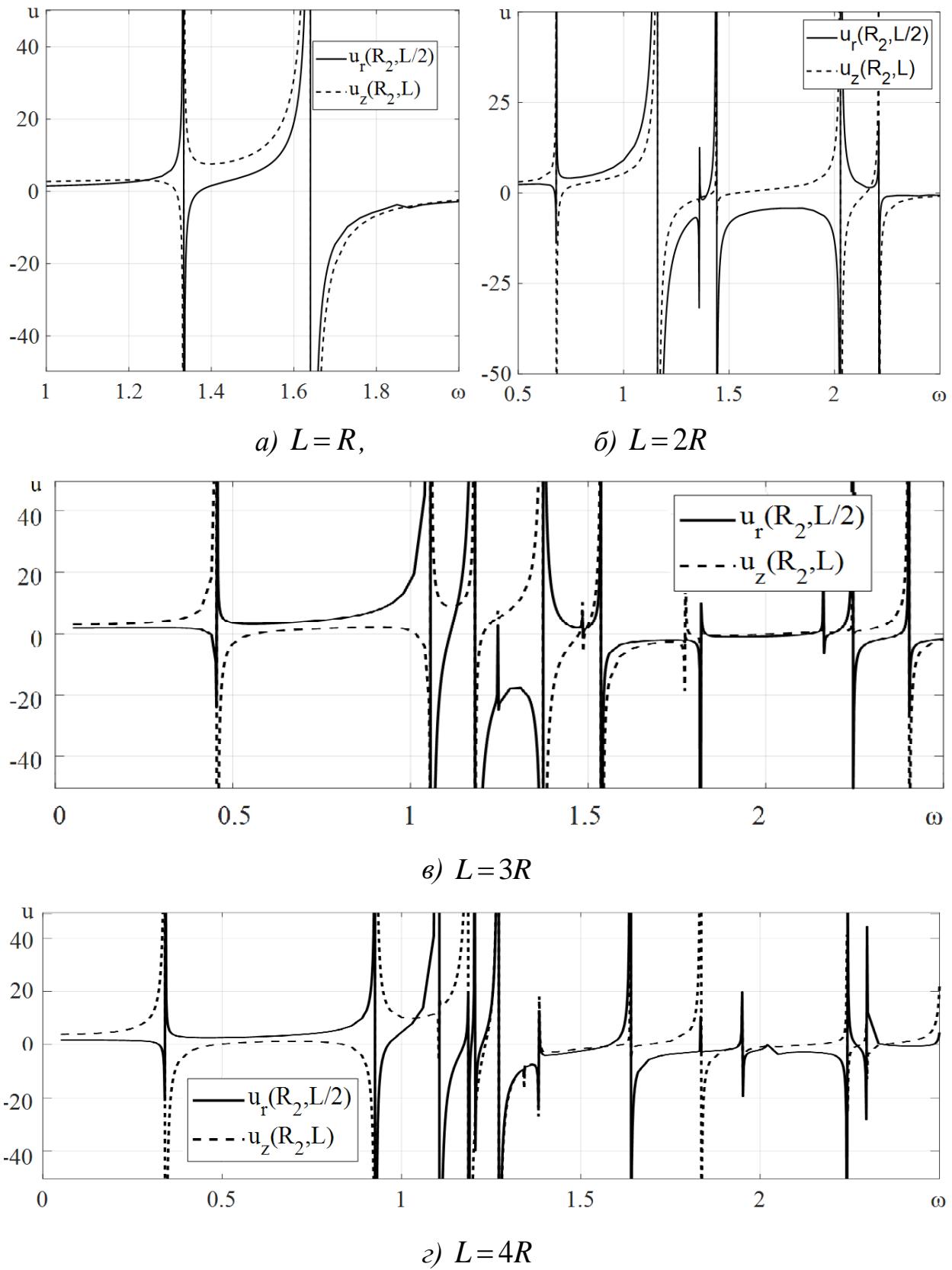


Рис. 3.4. Амплітудно-частотні залежності для радіальних та поздовжніх переміщень для циліндрів різної довжини:

Власні частоти розглянутих циліндрів на розглянутому інтервалі ω :

при $L = R$

$$\Omega = (1.33; 1.64);$$

при $L = 2R$

$$\Omega = (0.68; 1.16; 1.36; 1.44; 2.03; 2.21);$$

при $L = 3R$

$$\Omega = (0.45; 1.06; 1.25; 1.37; 1.48; 1.54; 1.76; 1.82; 2.16; 2.246; 2.44);$$

при $L = 4R$

$$\Omega = (0.34; 0.925; 1.111; 1.187; 1.205; 1.27; 1.346; 1.383; 1.64; 1.835;$$

$$1.95; 2.03; 2.243; 2.296).$$

Розмірні значення частот f_i при $R = 0,01m$ знаходимо з виразу

$$f_i = \frac{\Omega_i}{2\pi R} \sqrt{\frac{c_{00}}{\rho_{00}}} = \frac{\Omega_i}{16 \cdot 10^6}.$$

Зі зростанням довжини циліндра власні частоти понижуються. Частота першого резонансу при цьому зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра. Друга частота зменшується також, але закономірність зміни не настільки очевидна. Завдяки рис. 3.4 можна виділити сильні та слабкі моди по радіальних та поздовжніх переміщеннях.

Для аналізу форм коливань на першому та другому резонансі розглянемо рис.3.5 та 3.6, на яких наведено криві переміщень, нормовані за максимальними значеннями відповідної характеристики.

З рис. 3.5 а) видно, що максимум радіальних переміщень на зовнішній поверхні з зростанням довжини зміщується до закріплення. Поздовжні переміщення для циліндра $L = R$ змінюються з значно більшою кривизною, ніж для інших циліндрів, криві для яких мало відрізняються між собою. Потрібно відмітити, що на внутрішній поверхні на кривих поздовжніх переміщень на першому резонансі з'являється точка перегину, але з зростанням довжини переміщення на зовнішній та внутрішній поверхнях прямують до однакових значень.

З рис. 3.6 а) бачимо, що максимум по радіальних переміщеннях на другому резонансі знаходиться більше від мембрально закріпленого торця, а саме в точках $z=0.58R$, $z=1.23R$, $z=2.03R$, $z=2.7R$ для циліндрів $L=R$, $L=2R$, $L=3R$, $L=4R$, відповідно, що співпадає з результатами на внутрішній поверхні. Зміна форми і по радіальних, і по поздовжніх переміщеннях більш суттєва для циліндрів більшої довжини, тоді як для циліндрів $L=R$, $L=2R$ криві практично не мають другого екстремуму, що пояснюється накладанням хвиль в радіальному та поздовжньому напрямку та їх співмірністю з розмірами п'єзоелемента.

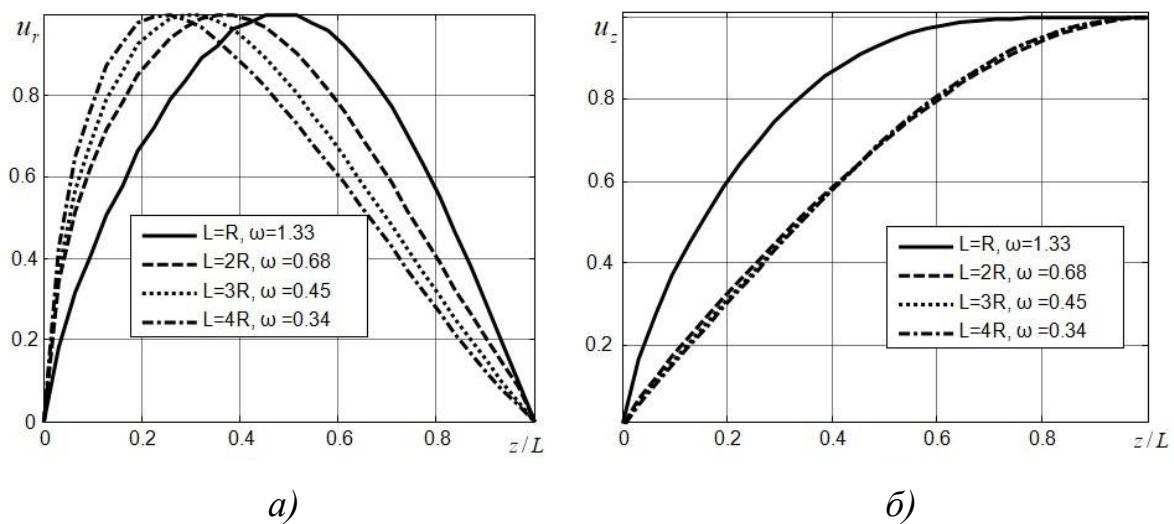


Рис. 3.5. Форми а) радіальних та б) поздовжніх переміщень на першому резонансі на зовнішній поверхні циліндрів різної довжини

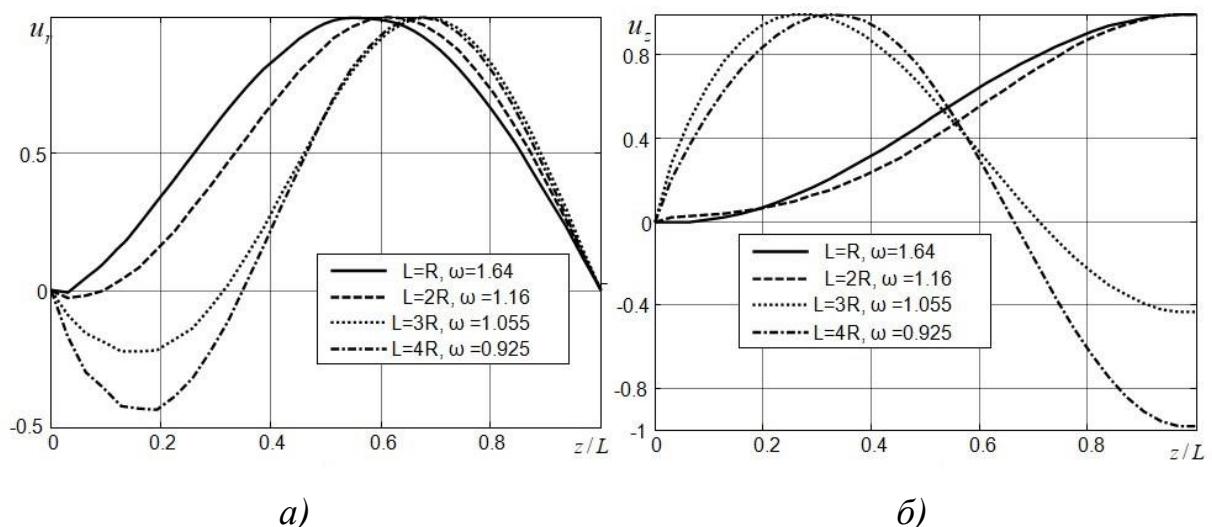


Рис. 3.6. Форми а) радіальних та б) поздовжніх переміщень на другому резонансі на зовнішній поверхні циліндрів різної довжини

Аналіз АЧХ радіальних переміщень зовнішньої поверхні для мембрально закріплених циліндрів з різними внутрішніми радіусами проведено за допомогою рис. 3.7. Перша резонансна частота для розглянутих циліндрів довжиною $l_z = 5R$ відповідає поздовжній моді, друга товщинній. Зменшення товщини підвищує частоту резонансу пропорційно до зміни товщини.

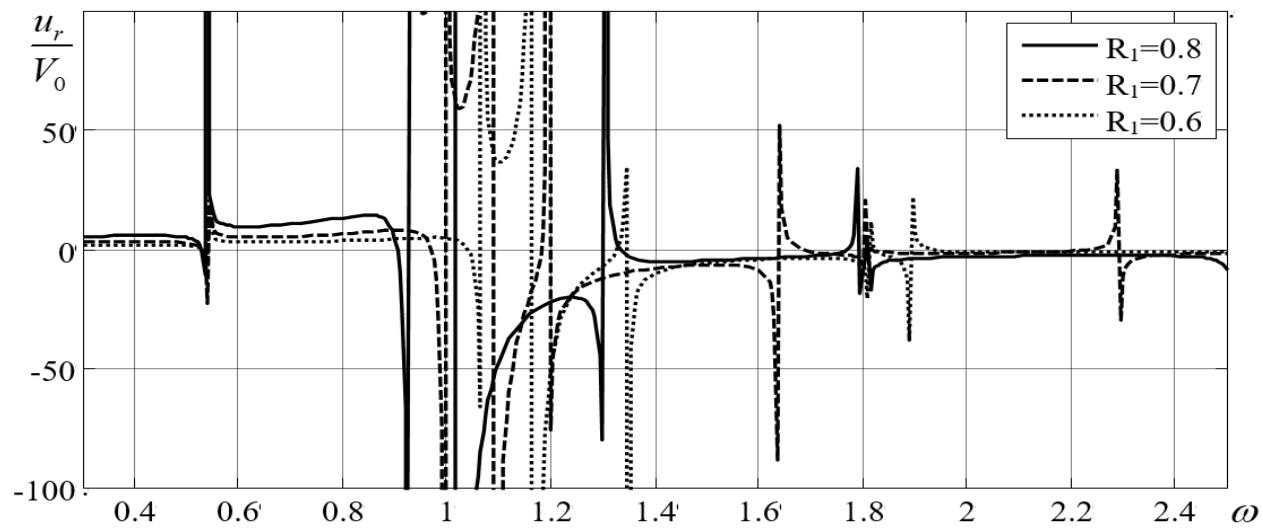


Рис. 3.7. Радіальні переміщення зовнішньої поверхні циліндрів довжиною $l_z = 5R$ з мембрально закріпленими торцями

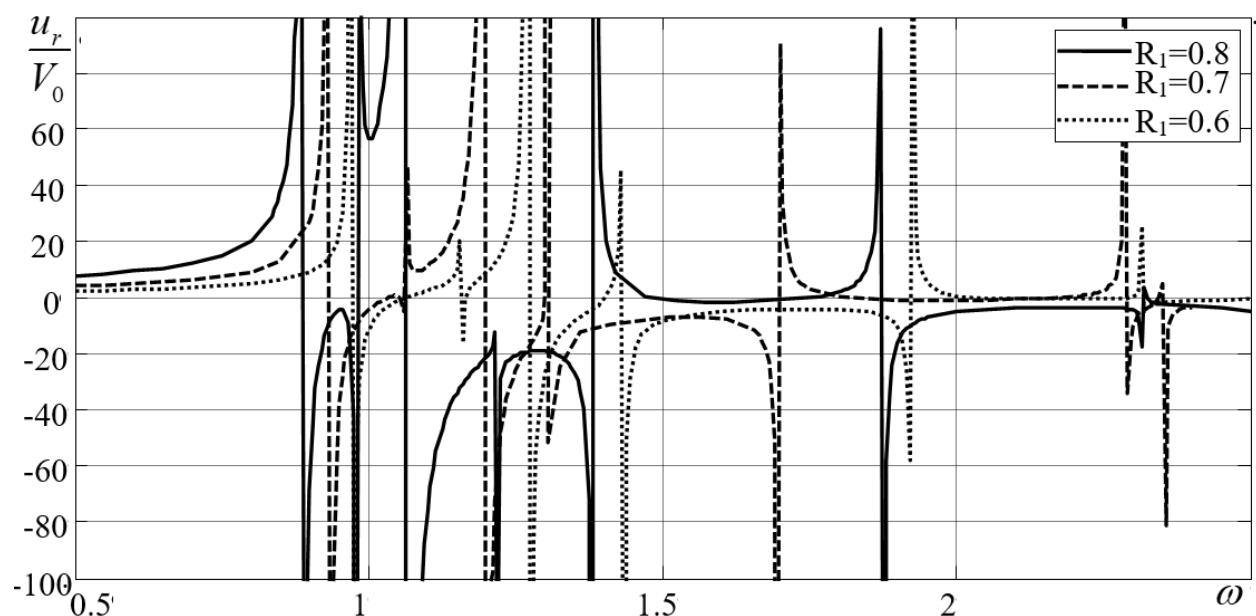


Рис. 3.8. Радіальні переміщення зовнішньої поверхні циліндрів довжиною $L = 5R$ з жорстко защемленими торцями

На рис. 3.8 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних переміщень для циліндрів довжиною $l_z = 5R$ з защемленими торцями.

Тут перша резонансна частота відповідає товщинній моді, друга поздовжній. Частота поздовжнього резонансу вдвічі вища за попередній випадок (рис. 3.7), що пов'язано зі зменшенням вдвічі відстані пробігу хвилі. При зменшенні товщини стінки перша резонансна частота зростає обернено пропорційно до часу пробігу хвилі по товщині стінки. В розглянутому вузькому частотному діапазоні маємо сім власних частот, що підвищують діапазон робочих частот елемента.

3.2.2. Резонансні коливання з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу

Без врахування дисипативних властивостей матеріалу переміщення та напруження на резонансних частотах стають необмеженими, що не відповідає експериментальним даним. Для одержання фізично обґрунтованих результатів при резонансних коливаннях необхідно враховувати розсіювання енергії в матеріалі, або так зване внутрішнє тертя. При гармонічних коливаннях цього можна досягти, користуючись концепцією комплексних модулів.

Дисипація енергії в рамках в'язкопружної моделі в моногармонічному наближенні враховується введенням комплексних матеріальних стала в фізичні співвідношення (1.3). Введемо комплексні модулі (2.76) у формі :

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}^E (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_{c_{ij}}), \quad \tilde{e}_{kj} = e_{kj} (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_{e_{kj}}), \quad \tilde{\epsilon}_{kk} = \epsilon_{kk}^S (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{kk}}),$$

де c_{ij}^E , e_{kj} , ϵ_{kk}^S — дійсні частини матеріальних характеристик; $\operatorname{tg} \delta_{c_{ij}}$, $\operatorname{tg} \delta_{e_{kj}}$, $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{kk}}$ — тангенси кутів механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат.

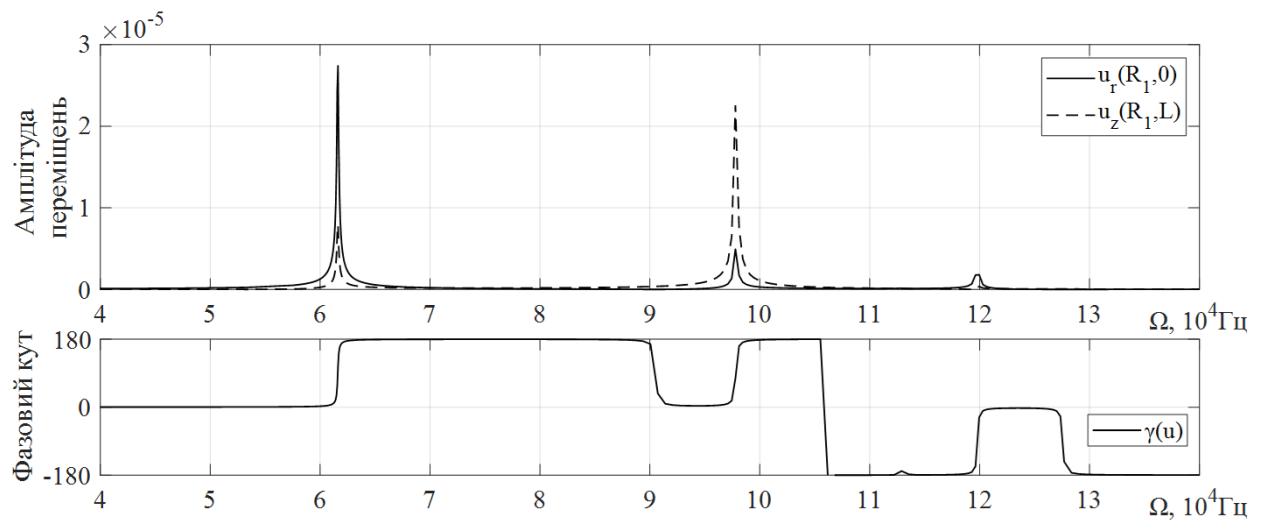
Порівняємо розмірні амплітудно-частотні характеристики для радіально-поляризованих циліндрів з геометричними характеристиками $R_1 = 0,6\text{cm}$, $R_2 = 1\text{cm}$, $L = 2R_2$, виготовлені з різних п'єзокерамічних матеріалів. Циліндричні поверхні циліндрів електродовані та навантажені різницею потенціалів $V_0 \sin \omega t$, торці

мембрально закріплені та закорочені. Оскільки комплексні модулі є частотно залежними і визначаються на основній моді коливань, розглянемо вузький частотний діапазон 40-140 кГц так, щоб захопити перші три резонанси перетворювача. Проаналізуємо матеріали ЦТСтБС-2 [21], Ferroperm PZ27 та Motorola 3203HD [281], для яких відомі повні набори комплексних модулів. Дійсні та уявні складові матеріальних характеристик для розглянутих матеріалів наведено в дод. В, С. Амплітудно-частотні залежності для переміщень в розмірних змінних та графіки відповідних фазових кутів в діапазоні трьох перших резонансних частот наведено на рис. 3.9.

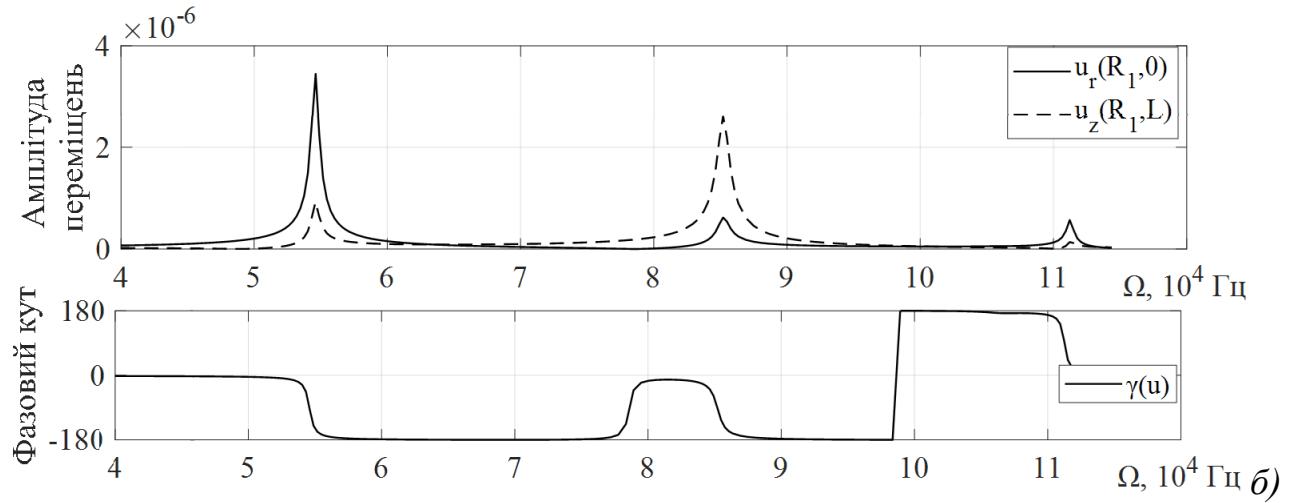
Порівнюючи отримані результати, бачимо, що для суцільної п'єзокераміки перша резонансна частота f_1 лежить в діапазоні 5,5-6,5 кГц, друга — 8-10 кГц. Дійсні частини матеріальних сталих для ЦТСтБС2 та Motorola 3203HD досить близькі між собою, але добродільність для ЦТСтБС2 $Q_m = 475$, а для Motorola 3203HD $Q_m = 39$. У Ferroperm PZ27 $Q_m = 94$. Від добродільності матеріалу залежить ширина резонансного піку: в високодобротних матеріалів пік вужчий, в низькодобротних — ширший.

Амплітуди переміщень на резонансі також майже пропорційні до Q_m . Ще одною важливою характеристикою втрат служить кут нахилу фазової кривої на резонансі, що в наборах матеріальних характеристик від виробників п'єзокераміки позначається як $\operatorname{tg}\delta$ і обернено пропорційний до добродільності Q_m . Втрати виражуються також в згладжуванні зломів кривої фазового кута.

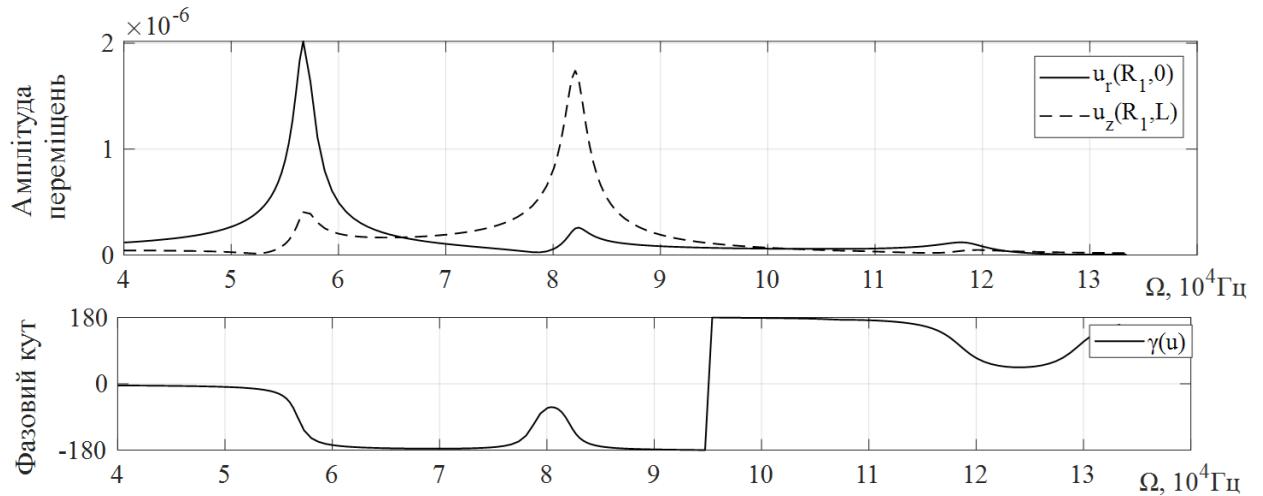
На рис. 3.8 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних переміщень для циліндрів довжиною $l_z = 5R$ з защемленими торцями.



A) ЦТСмБС2



Ferroperm PZ27



ε) Motorola 3203HD

Рис. 3.9. Амплітудно- та фазо-частотні залежності для циліндров з різних п'єзо-керамічних матеріалів

Проведемо порівняння гармонічних коливань низькодобротної п'єзокераміки Motorola 3203HD з врахуванням втрат різними способами в околі першого резонансу. Окрім комплексних молулів, проводиться розрахунок методом скінченних елементів з врахуванням демпфування коливань за Релеєм, частотно-незалежного демпфування, альфа-демпфування та бета-демпфування. На рис. 3.10 наводяться радіальні переміщення точки ($R_2, 0, 0$) циліндра з вище описаними розмірами, обчислені за допомогою системи рівнянь типу Гамільтона та методом скінченних елементів. Перші п'ять кривих відповідають розрахункам за СРТГ. Розглядаються випадки комплексних модулів за всіма матеріальними характеристиками, врахування механічних та діелектричних втрат, лише механічних втрат, розрахунок без втрат, комплексні модулі через доботність.

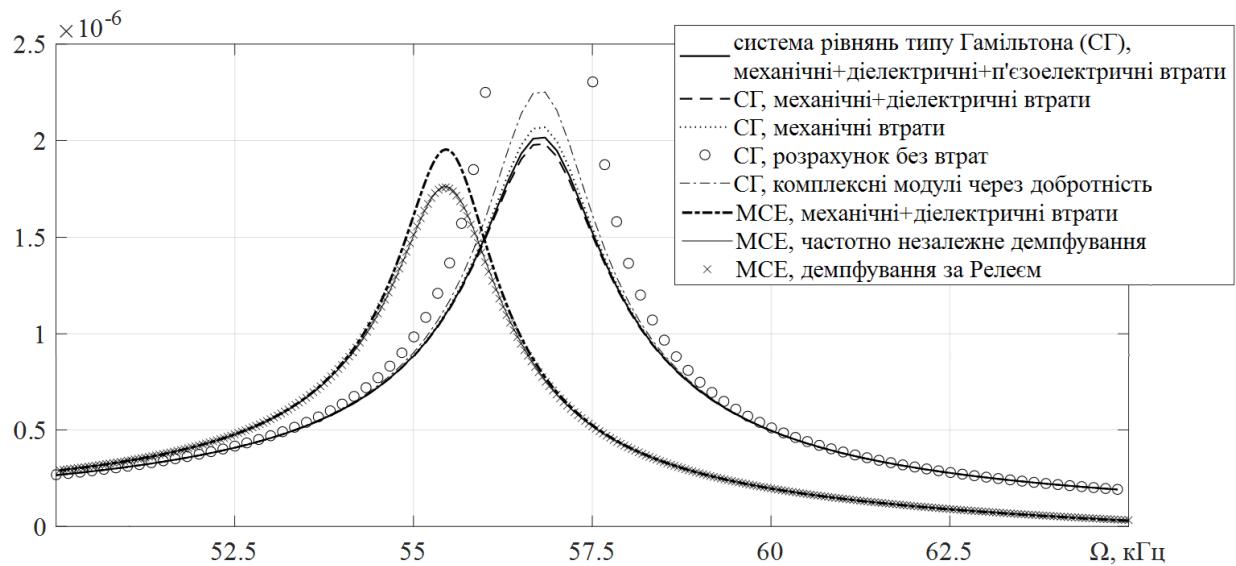


Рис. 3.10. Радіальні переміщення в околі першого резонансу з врахуванням дисипації енергії різними методами

Бачимо, що врахування п'єзоелектричних та діелектричних втрат дає різницю в результатах в межах 2,5%, при чому врахування п'єзоелектричних втрат підвищує значення екстремуму. Цей ефект спостерігається і в інших задачах такого типу. Резонанс виникає при 56,7 кГц. В розглянутому діапазоні спостерігається зростання амплітуди переміщень в 10 разів, крива майже симетрична відносно резонансного піку. Добротність отриманих АЧХ складає $Q_m = 28$.

При відсутності повного набору комплексних модулів тангенси втрат для механічних матеріальних характеристик вводяться як $\operatorname{tg} \delta_{c_{ij}} = 1/Q_m$. На рис. 3.10 цим результатам відповідає п'ята (штрих-пунктирна) крива. В цьому розрахунку п'зоелектричні втрати не враховуються, діелектричні втрати $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{ii}} = \operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{33}}$. Ці результати відрізняються від повного набору комплексних модулів (перша крива) на 12% в сторону зростання. Добротність п'ятої кривої більш близька до заданої $Q_m = 39$.

При розрахунку методом скінченних елементів резонанс виникає при 55,5 кГц, що відрізняється від попередніх обчислень на 2%. При розрахунку з введенням матриць тангенсів механічних та діелектричних втрат амплітуда переміщень на резонансі майже співпадає з попередніми результатами (відхилення в межах 1%). Відповідна добротність кривих $Q_m = 46$. При застосуванні частотно-незалежного демпфування з коефіцієнтом $\xi = 1/(2Q_m)$ та при врахуванні демпфування за Релеєм (2.107) амплітуда зменшується на 10%. Для цих кривих добротність складає $Q_m = 40$, що найбільш точно відповідає вхідній добротності. Проведені розрахунки для альфа-демпфування, бета-демпфування на першій резонансній частоті та демпфування за Релеєм в діапазоні 50-65 кГц показали повне співпадіння результатів, що пояснюється математичною еквівалентністю постановок цих задач в навколорезонансному діапазоні.

На рис. 3.11 наведено розподіл в площині перерізу амплітуд а) радіальних і б) циліндричних переміщень для описаного вище циліндра на першій резонансній частоті $f_r = 56,7$ кГц при $V_0 = 100B$. Врахування дисипативних характеристик матеріалу дозволяє прогнозувати, що на першій резонансній частоті розмірні амплітуди переміщень набуватимуть форми і значень, наведеній на рис. 3.11.

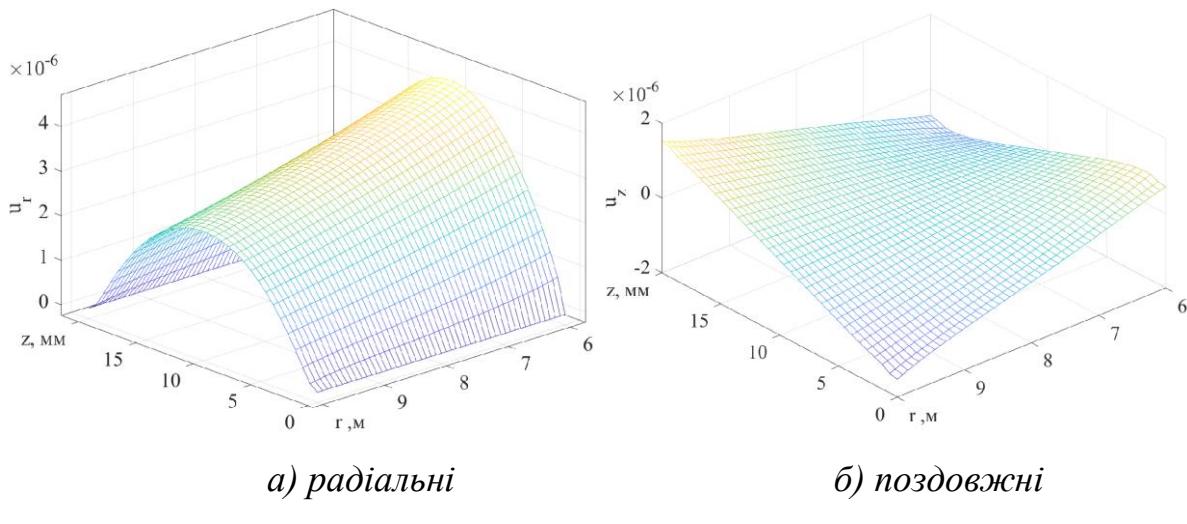


Рис. 3.11. Амплітуди переміщень на першій резонансній частоті

Таким чином, при гармонічному аналізі демпфування за Релеєм, так само як більш застосоване в зв'язку з простотою визначення коефіцієнтів та фізичною відповідністю частотно-незалежне демпфування, відрізняються від результатів, отриманих з врахуванням тангенсів втрат або еквівалентних їм комплексних модулів, на 10%. При малих електричних напруженостях врахування п'єзоелектричних та діелектричних втрат дає відхилення від врахування лише механічних втрат в межах 2%. Робимо висновок, що при відсутності повного набору комплексних модулів можна приймати $\operatorname{tg}(\delta_{c_{ij}}) = 1/Q_m$, але точність отриманих результатів буде в межах 10-15%. Порівняння з розрахунком без втрат показує, що в міжрезонансному діапазоні обчислення можна проводити без врахування втрат енергії. В навколорезонасній області врахування дисипативних характеристик матеріалу обов'язкове.

3.3. Усталені коливання композитних п'єзоелектричних циліндрів

Для визначення осереднених матеріальний характеристики для п'єзоелектричних композитів застосовуються знайдені в літературі математичні моделі для шаруватих двокомпонентних поляризованих в напрямку осьової симетрії композитних матеріалів. Отримані ефективні матеріальні характеристики використовуються для дослідження гармонічних коливань п'єзоелектричних композитних циліндрів.

3.3.1. Математичні моделі визначення ефективних матеріальних характеристик композитних матеріалів

Композиційні матеріали є основою для створення конструкцій з оптимальними параметрами завдяки можливості варіювання властивостей за рахунок широкого вибору складових матеріалів, зміни концентрації та взаємного розміщення складових композиту. При цьому з'являється можливість компонування в композитному матеріалі властивостей, які для більшості однорідних матеріалів є несумісними. Зокрема, п'єзополімери мають високі характеристики гнучкості та в'язкості, але низькі п'єзоелектричні та міцнісні властивості, тоді як суцільна п'єзокераміка має високі п'єзоелектричні та діелектричні властивості, але низькі дисипативні характеристики та механічну міцність при циклічних навантаженнях. Для отримання оптимального матеріалу, що забезпечуватиме якісне перетворення енергії при значних деформаціях, виконується компонування цих матеріалів, що може бути реалізовано різними способами в залежності від режиму експлуатації, сфери призначення, проектних технічних характеристик.

Для реалізації ефективного процесу проєктування конструкцій з композиційних матеріалів потрібно застосовувати відповідні математичні моделі, що описують особливості структури, електромеханічні властивості та дисипативні характеристики композиту на базі гіпотез про однорідність відповідних напружень та деформацій для деякого представницького об'єму. Розглянемо різні методи визначення ефективних сталих п'єзоелектричних шаруватих композиційних матеріалів з паралельними шарами (рис.3.12). Для таких матеріалів комбінація підходів Фойгта і Рейсса дає точний розв'язок.

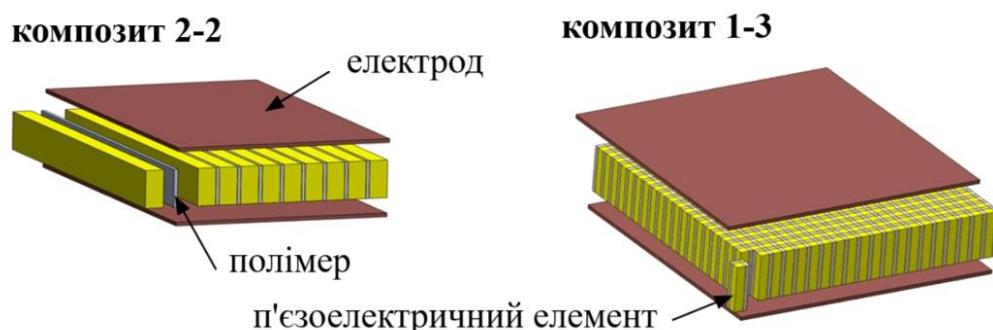


Рис. 3.12. Шаруваті та волокнисті п'єзокомпозити

Розглянемо кілька знайдених в літературі моделей шаруватих п'єзоелектричних композитів з повним набором пружних, діелектричних та п'єзоелектричних ефективних характеристик. Моделі відрізняються принципово різними підходами до запису ефективних характеристик та отримані в припущені про різний динамічний стан композиту. Нумерацію моделей вводимо в порядку їх опублікування.

Модель 1. У монографії [108] отримано точний розв'язок задачі про визначення ефективних сталих для композитів з довільною анізотропією складових шарів. В умовах однорідного напруженого стану компоненти механічного та електричного полів макрооб'єму такого композиту задовольняють умові ергодичності, що дозволяє замінити усереднення за об'ємом усередненням за ансамблем реалізацій. В цьому випадку між макроскопічними напруженнями $\langle \sigma_{ij} \rangle$, деформаціями $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$, індукціями $\langle D_k \rangle$ та напруженостями $\langle E_n \rangle$ мають місце співвідношення (2.60), де кутові дужки означають усереднення за ансамблем реалізацій та вводяться тензори ефективних модулів пружності, п'єзоелектричних і діелектричних сталих $c_{ij\alpha\beta}^*$, e_{nij}^* , ϵ_{kn}^* відповідно, $i, j, \alpha, \beta = 1 \dots 3$. У випадку шаруватих композитів з шарами, перпендикулярними до осі x_3 , випадкові поля деформацій і напруженостей представляються в вигляді суми математичного очікування і флюктуацій. З рівнянь статичної рівноваги з врахуванням залежності напружень та електричної індукції лише від однієї координати отримано диференціальні рівняння рівноваги, що легко інтегруються. Сталі інтегрування, що з'явилися при цьому, визначаються з умови рівності нулю математичного очікування від флюктуацій. Після сталіх інтегрування знаходяться похідні флюктуацій переміщень і електричного потенціалу. Ці похідні використовуються для запису формул локальних деформацій і напружень композиту. Локальні напруження і індукція визначаються підстановкою формул локальних деформацій і напружень в рівняння стану. Для визначення ефективних характеристик отримані співвідношення осереднюються. В результаті приходимо до співвідношень (2.66), де тензори ефективних сталих $c_{ij\gamma\rho}^*$, $e_{k\gamma\rho}^*$, ϵ_{kn}^* виражаются через усереднення за ансамблем реалізацій відповідних сталих складових матеріалів та їх добутків на матриці перетворення матеріальних

характеристик. Виконується перехід до матричних позначень $ij = n$, $\alpha\beta = m$, $n, m = 1 \dots 6$. Для шаруватого п'єзоелектричного двокомпонентного композиту з трансверсально-ізотропними шарами, вісь симетрії яких співпадає з віссю x_3 , ефективні пружні, діелектричні та п'єзоелектричні сталі c_{nm}^* , e_{in}^* , ϵ_{ii}^* визначаються формулами (2.67) [108]. Описаний підхід вирізняється чіткою структуризацією рівнянь відносно узагальнених параметрів.

Модель 2. В роботі [247] вивчається в'язкоелектропружна поведінка п'єзоелектричних волокнистих та шаруватих композитів з метою опису зв'язку між неоднорідністю та пов'язаними механічними та електричними релаксаціями. Підхід ґрунтуються на існуванні відповідності між квазістатичною в'язкоелектропружністю та статикою п'єзоелектрика. Використовується принцип відповідності з моделями мікромеханіки для прогнозування загальної поведінки гетерогенних п'єзоелектричних твердих тіл умови мікроструктурних деталей разом із підходом до усереднення Морі-Танаки. Основна концепція підходу Морі-Танаки полягає в апроксимації фактичних середніх електропружинних полів в волокнах (шарах) електропружиними полями, які існують в одному волокні, вміщенному у нескінченну матрицю, що навантажується на поверхні однорідним електропружинним полем, що дорівнює поки невідомому середньому полю в матриці. Середнє поле в одному волокні можна отримати за допомогою концепції еквівалентного включення Ешелбі. Розглядаються двофазні матеріали, що складаються з п'єзоелектричної фази без втрат, вбудованої в матрицю, що має механічні та електричні втрати. Отримано вирази закритої форми для ефективних комплексних модулів композитів при одновісному та просторовому напруженому стані. Отримані залежності записуються в вигляді алгебраїчних виразів відносно матеріальних характеристик складових компонент без чіткої структури.

Модель 3. В роботі [102] запропоновано метод побудови рівнянь стану армованих волокнами та шаруватих композиційних матеріалів, що дозволяє врахувати розсіювання енергії в матеріалах — компонентах композита, в тому числі в'язкопружиних. Розглядаються матеріали довільної анізотропної структури. Записуються фізичні залежності в просторі інтегральних перетворень Фур'є, запропоновано математичні моделі коливань композитних конструкцій для аналізу

пасивного демпування. В [41] даний підхід узагальнено на шаруваті п'єзоелектричні композити та досліджено ефективність перетворення енергії в залежності від масової частки п'єзокераміки та напрямку армування. Порядок виведення ефективних характеристик супроводжується специфічними матричними представленнями та операціями, що випливають з перестановки компонент та розщеплення матриць матеріальних характеристик складових матеріалів, запису та прирівнювання енергетичних виразів.

Проведемо порівняння матеріальних характеристик композитів, обчисленими за цими трьома моделями. При цьому комплексні ефективні характеристики представляємо у формі

$$c_{nm}^* = c_{nm} \left(1 + i \operatorname{tg} \delta_{c_{nm}} \right); \quad e_{in}^* = e_{in} \left(1 + i \operatorname{tg} \delta_{e_{in}} \right); \quad \epsilon_{ii}^* = \epsilon_{ii} \left(1 + i \operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{ii}} \right).$$

На рис. 3.13, 3.14 наведено графіки залежності модулів та тангенсів втрат комплексних матеріальних характеристик для шаруватих п'єзоелектричних композитів, що складаються з трансверсально-ізотропних шарів, осі симетрії яких співпадають з віссю x_3 , відносно об'ємної частки п'єзокераміки p_2 . Розглядається комбінація п'єзополімеру ПВДФ (фаза 1, об'ємна частка $p_1 = 1 - p_2$) та м'якої п'єзокераміки PZT-5A (фаза 2, об'ємна частка p_2) [247], матеріальні характеристики яких наведено в дод. С, D.

Результати, представлені на рис. 3.13, ілюструють досить непогане співпадіння дійсних частин комплексних модулів. Для c_{11} , c_{12} залежність від об'ємної частки близька до лінійної. Для пружних модулів c_{13} , c_{33} за другою моделлю спостерігається відхилення від моделей 1, 2 в межах 5-10% з максимумом на ділянці $0,8 < p_2 < 1$.

Для c_{44} , п'єзоелектричних модулів та діелектричних проникностей спостерігається досить гарне візуальне співпадіння результатів.

Робимо висновок, що всі три розглянуті моделі при описі дійсних складових комплексних модулів дають співмірні результати.

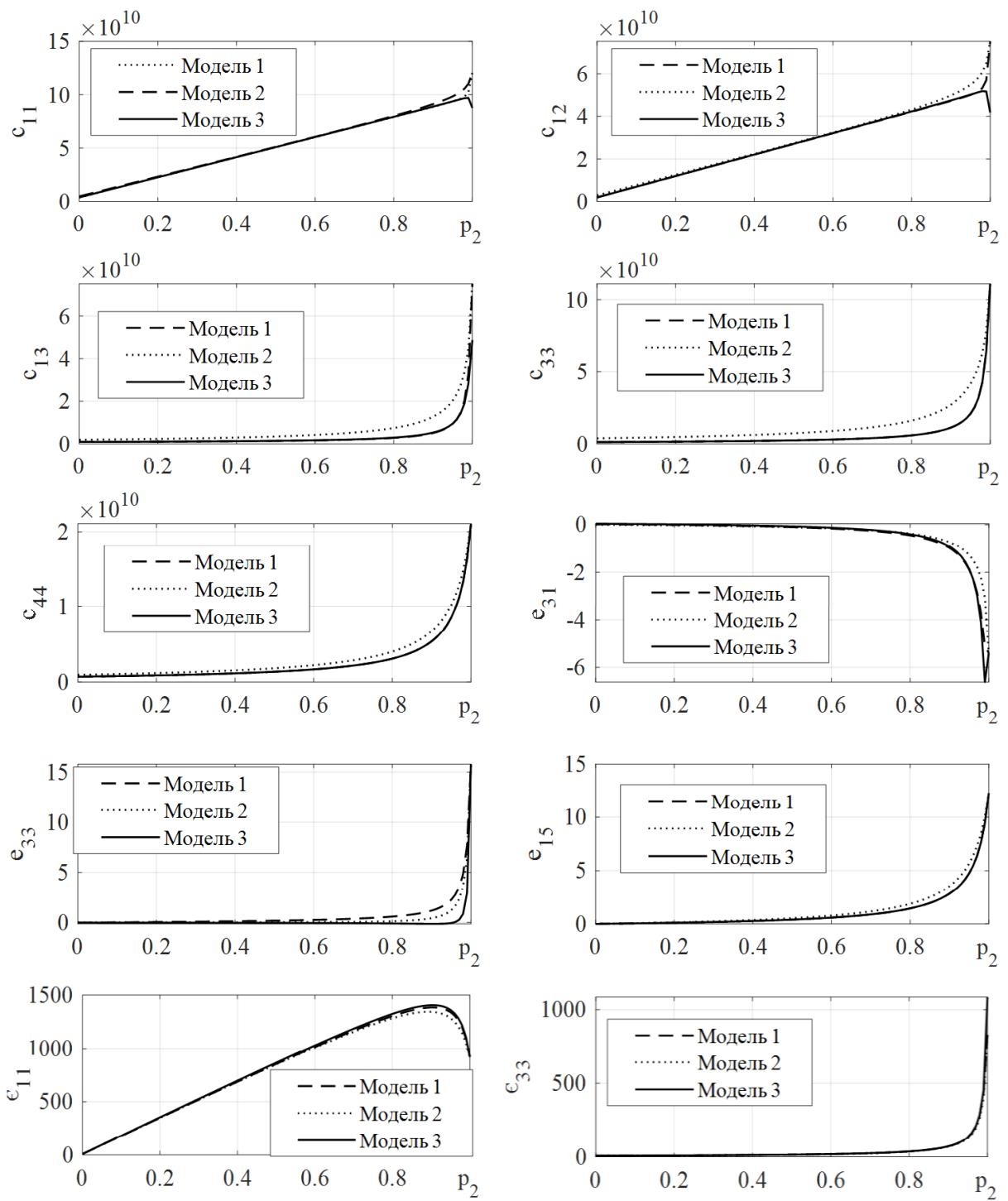


Рис. 3.13. Дійсні частини ефективних комплексних модулів шаруватих п'єзоелектрических композитів

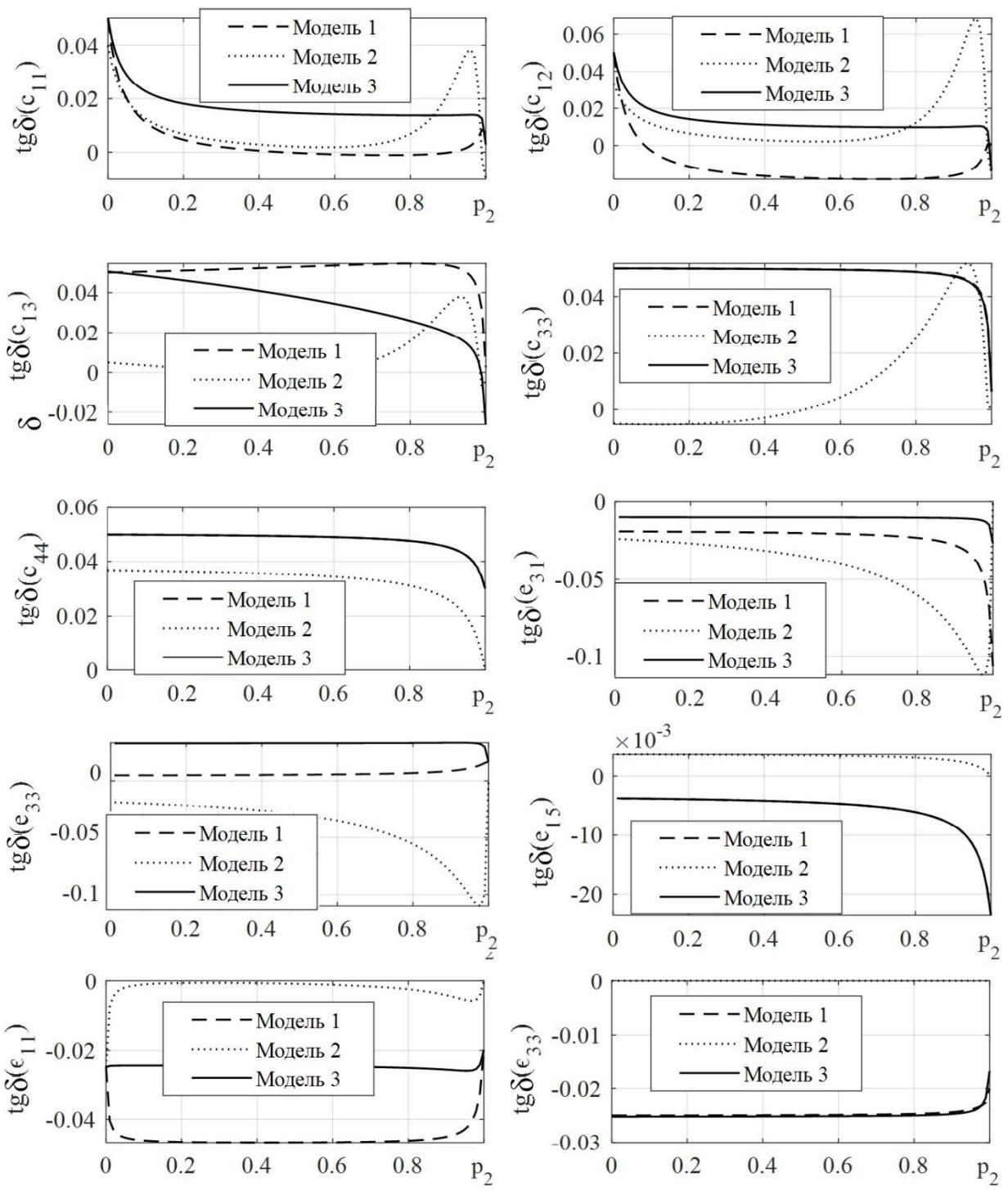


Рис. 3.14. Тангенси механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат в шаруватих п'єзоелектричних композитах

На рис. 3.14 наведено графіки залежностей тангенсів механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат від об'ємної частки п'єзокераміки, пораховані за наведеними моделями. Тут потрібно враховувати, що перша модель отримана в умовах припущення про статичність навантаження, друга — в припущені про подібність динамічного та статичного стану і не враховує втрати енергії в п'єзоелектричних шарах, третя отримана з енергетичних співвідношень при циклічних навантаженнях. Друга модель видає практично нульові п'єзоелектричні та діелектричні втрати, тоді як в пружних тангенсах втрат спостерігається екстремум при $c_2 = 0,95$, що не відповідає фізичній стороні задачі.

Зосередимося на аналізі першої та третьої моделей. Проблема обчислень тангенсів втрат за цими моделями полягає в тому, що вони визначаються як відношення уявної до дійсної частини ефективних комплексних модулів, і при співпадінні дійсних частин матеріальних характеристик, порахованих за наведеними моделями, не підлягають корекції.

Всі тангенси втрат знаходяться в межах до 2,5%. Спостерігається повне співпадіння результатів по $\operatorname{tg}\delta_{c_{44}}$, $\operatorname{tg}\delta_{e_{15}}$, $\operatorname{tg}\delta_{e_{33}}$. Але по інших параметрах маємо серйозну розбіжність в результатах. Величини $\operatorname{tg}\delta_{e_{31}}$, $\operatorname{tg}\delta_{e_{33}}$, $\operatorname{tg}\delta_{e_{33}}$ можна вважати сталими аж до $c_2 = 0,85$.

Однією з основних переваг п'єзоелектричних композитів порівняно з суцільною п'єзокерамікою є зменшення хвильового опору середовища та його узгодження з акустичним опором середовища. На рис. 3.15 наведено залежність дійсної частини хвильового опору середовища Z_c від об'ємної частки п'єзокераміки в різних напрямках поширення хвилі. В напрямку осі x_3 питомий хвильовий опір визначався як $Z_{c3} = \rho_c v_3 = \sqrt{\rho_c (c_{33}^* + e_{33}^{*2}/\epsilon_{33}^*)}$, в напрямку осі x_2 $Z_{c2} = \rho_c v_2 = \sqrt{\rho_c (c_{11}^* + e_{13}^{*2}/\epsilon_{11}^*)}$.

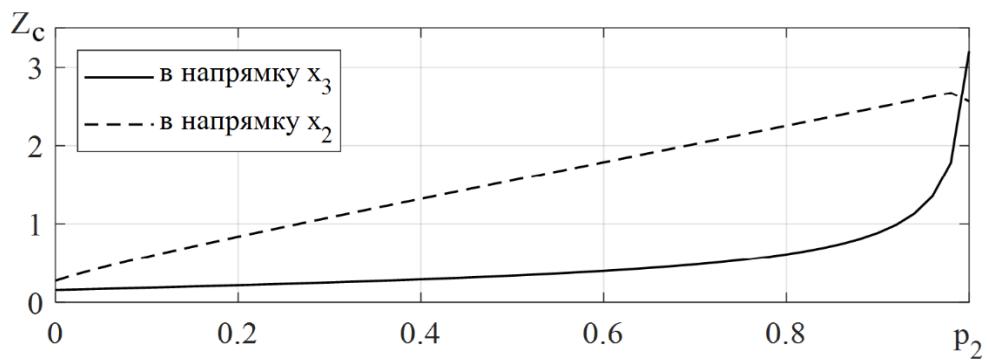


Рис. 3.15. Дійсна частина питомого хвильового опору композиту

Спостерігається практично лінійна зміна хвильового опору в напрямку осі x_2 з $2,7 \cdot 10^6 H \cdot c/m^3$ для фази 1 ($p_2 = 0$) до $2,6 \cdot 10^7 H \cdot c/m^3$ для фази 2 ($p_2 = 1$). В напрямку осі x_3 хвильовий опір значно нижчий і при $p_2 < 0,6$ є близьким до акустичного опору води $Z_a = 1,4 \cdot 10^6 H \cdot c/m^3$.

3.3.2. Гармонічні коливання композитних п'єзоелектричних циліндрів

Проаналізуємо гармонічні осесиметричні коливання циліндра шаруватого композитного п'єзоелектричного циліндра з ефективними характеристиками, порахованими за третьою моделлю. Оскільки електромеханічні характеристики матеріалу в напрямку осі x_2 значно вищі, ніж відносно осі x_3 , то вважатимемо, що циліндр має шарувату структуру в напрямку вісі z , шари поляризовані в цьому ж напрямку, циліндричні поверхні електродовані, як зображено на рисунку 3.16.

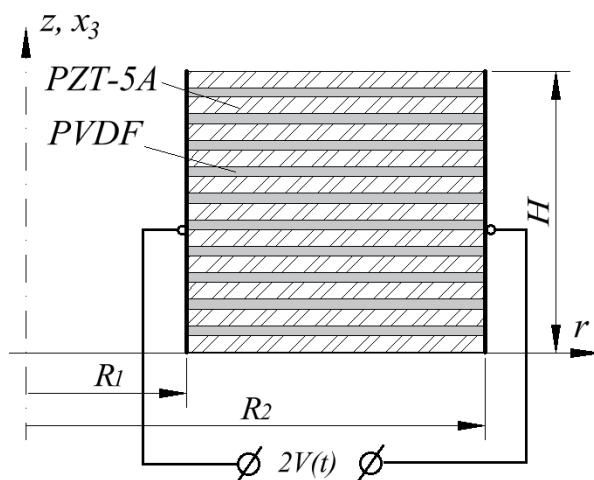


Рис. 3.16. Схема шаруватого композитного циліндра

Числові обчислення проводилися для композитного порожнистого циліндра з радіусами циліндричних поверхонь $R_1 = 0,6 \text{ см}$, $R_2 = 1 \text{ см}$, та висотою $H = 2R_2$. Циліндричні поверхні електродовані та навантажені різницею потенціалів $V_0 \sin \omega t$, $V_0 = 100 \text{ В}$, для торців граничні умови мають вигляд:

$$u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0; \quad u_r(r, H) = \sigma_{zz}(r, H) = 0.$$

На рис. 3.17 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних переміщень $u_r(R_2, H/2)$ (а) та поздовжніх переміщень $u_z(R_2, H)$ (б) для композитних та суцільного циліндрів. Розрахунок проводився методом скінченних елементів.

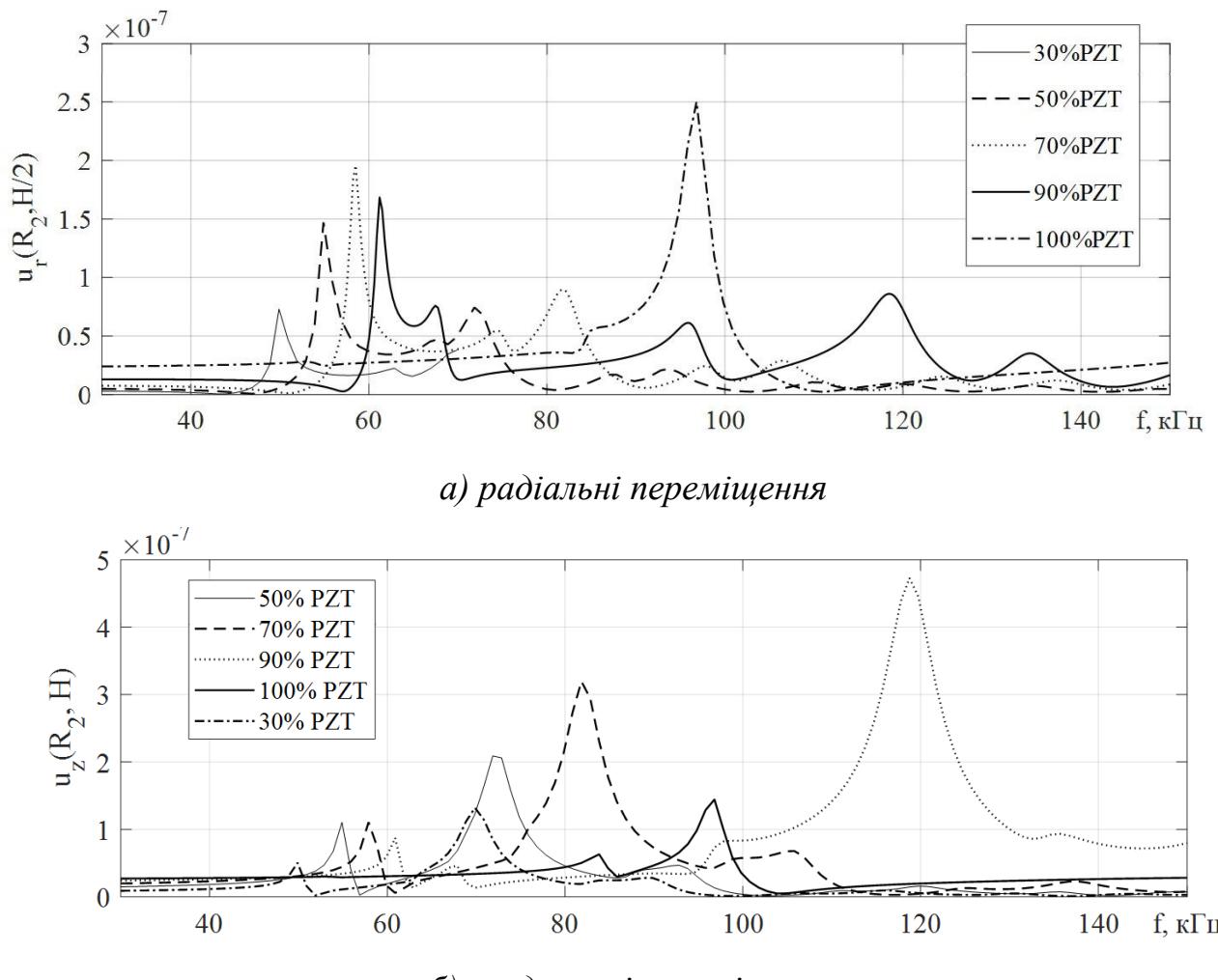
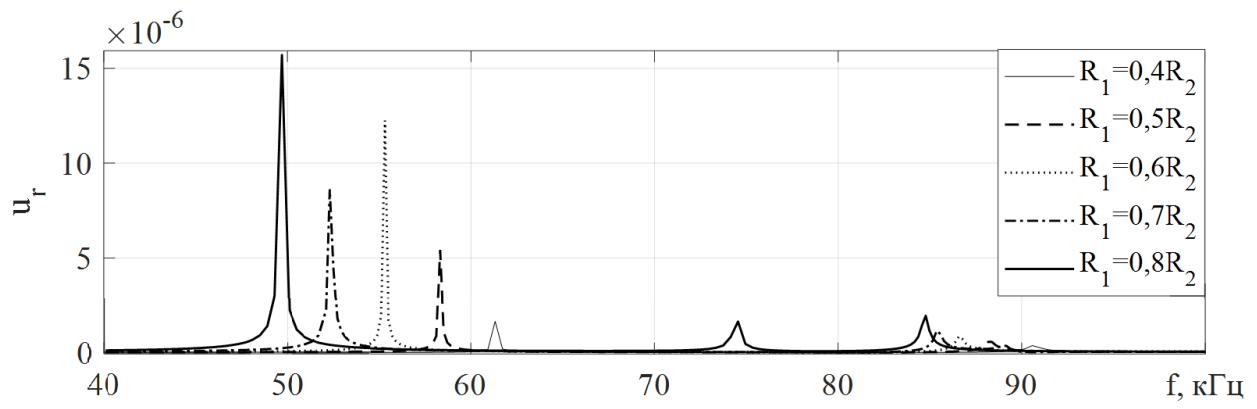


Рис. 3.17. Амплітудно-частотні залежності переміщень шаруватого композитного циліндра

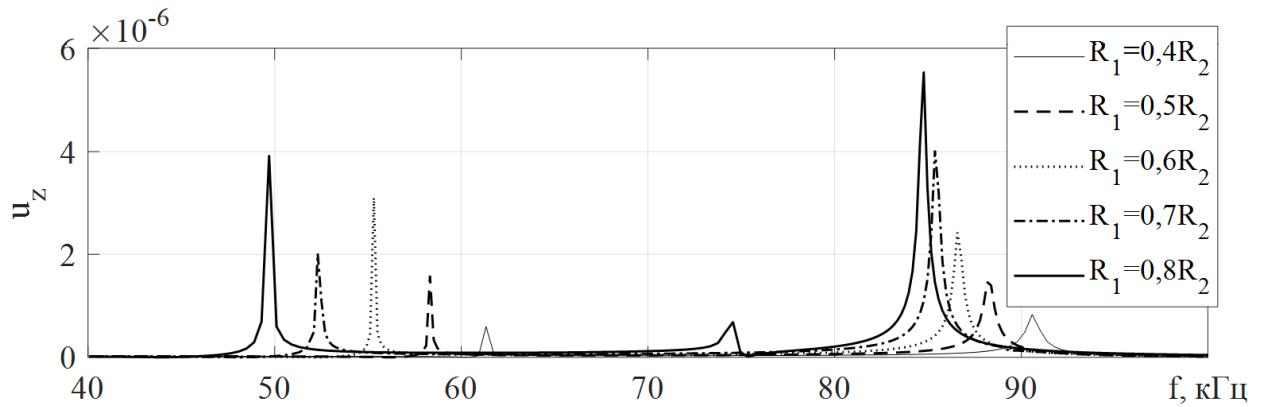
Зі зростанням частки PZT-5A спостерігається зростання резонансної частоти та амплітуди коливань. В дорезонансному діапазоні частот амплітуди мало змінюються. Максимальні радіальні переміщення виникають в композитному циліндрі з часткою п'єзокераміки 70% на частоті 58 кГц і складають 80% від переміщень в суцільному циліндрі, максимальні поздовжні переміщення виникають в циліндрі з часткою п'єзокераміки 90% на частоті 119 кГц. Поздовжні переміщення в суцільному циліндрі значно нижчі, ніж в композитному, за рахунок більшої жорсткості матеріалу в цьому напрямку.

Отже, всі три розглянуті моделі визначення ефективних матеріальних характеристик при розрахунку усталених коливань п'єзоелектричних шаруватих композитів можуть бути використані в міжрезонансному діапазоні. В резонансній зоні врахування дисипації енергії є можливим за допомогою моделі 3. Компонування п'єзокераміки з п'єзополімером понижує резонасну частоту в 1,5-2 рази порівняно з суцільною п'єзокерамікою.

Розглянемо амплітудно-частотні залежності для ціліндрів з різною товщиною стінки з пористої п'єзокераміки Ultrashape Porous PZT [281], яка відноситься до композитів типу 3-0 з порожнистими включеннями. На рис. 3.18 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних та поздовжніх переміщень для радіально поляризованих циліндрів з геометричними параметрами $R_2 = 10\text{мм}$, $H = 2R_2$, внутрішній радіус R_1 змінюється від $0,4R_2$ до $0,8R_2$. Границі умови співпадають з вище описаними. При цьому спостерігається майже пропорційне до зміни внутрішнього радіусу зменшення резонансної частоти, амплітуда коливань зростає внаслідок зменшення жорсткості конструкції. Максимальний відгук спостерігається в радіальному напрямку для циліндра $R_1 = 0,8R_2$ на частоті 49,9 кГц і складає 15 мкм. В поздовжньому напрямку максимальні переміщення виникають в цьому ж циліндрі на частоті 85 кГц. Радіальні переміщення на цій частоті майже не виражені.



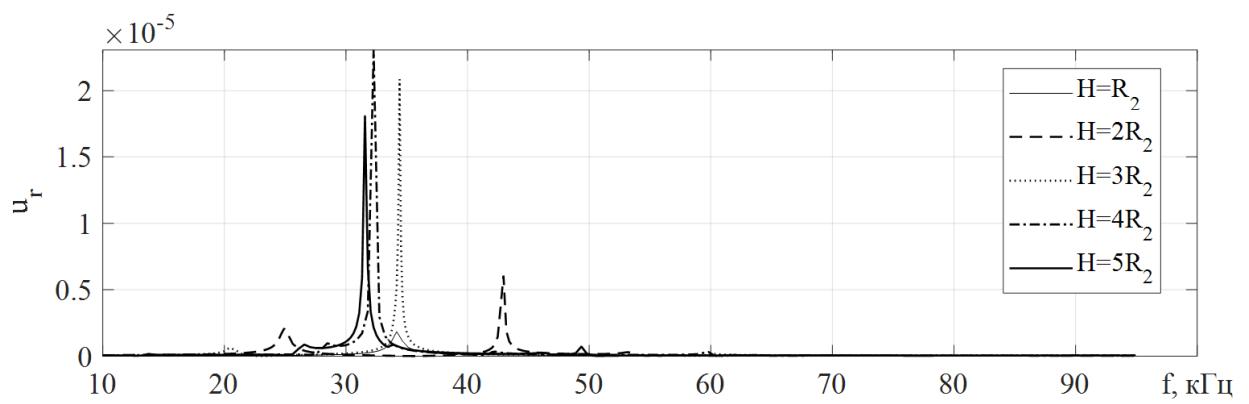
a) радіальні переміщення в точці ($R_2, H/2$)



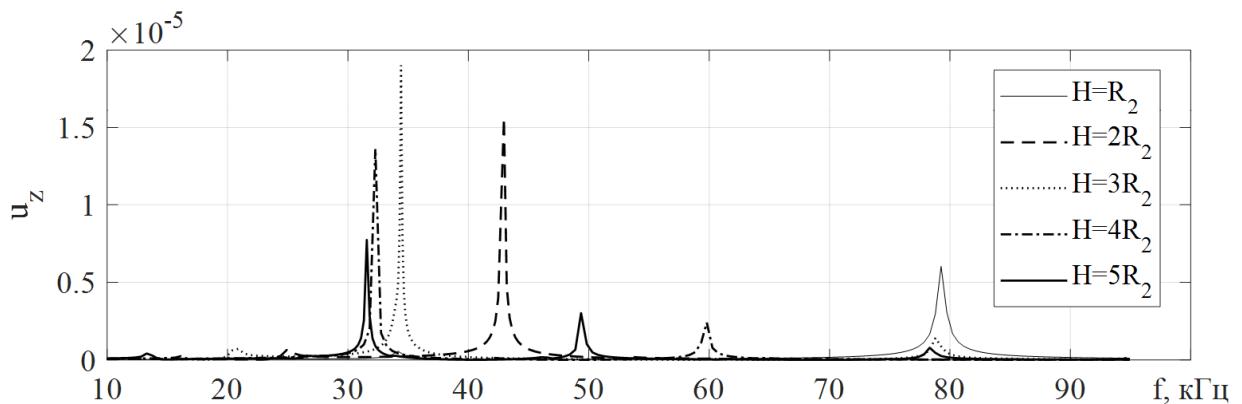
б) поздовжні переміщення в точці (R_2, H)

Рис. 3.18. Амплітудно-частотні залежності для циліндрів з
Ultrashape Porous PZT

Дослідимо залежність амплітудно-частотних характеристик для ціліндрів різної довжини з волокнистого композиту MSI 1-3 PZT-Polymer (30%PZT) [281]. На рис. 3.19 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних та поздовжніх переміщень для радіально поляризованих циліндрів з розмірами $R_1 = 6\text{мм}$ $R_2 = 10\text{мм}$, довжина H змінюється від R_2 до $5R_2$. Умови закріплення описані вище. Чіткої закономірності в залежності резонансних частот від довжини циліндра в розглянутому діапазоні не спостерігається. Максимальні радіальні переміщення виникають в циліндрі довжиною $H = 4R_2$ на частоті 32 кГц . Відгук досягає 20 мкм. Максимальний відгук в поздовжньому напрямку отримується в циліндрі $H = 3R_2$ на частоті 34 кГц та складає 19 мкм.



a) радіальні переміщення в точці $(R_2, H/2)$



б) поздовжні переміщення в точці (R_2, H)

Rис. 3.19. Амплітудно-частотні залежності для циліндрів з MSI 1-3 PZT-Polymer Composite (30%PZT)

Відгук циліндрів $H = R_2$ та $H = 2R_2$ в поздовжньому напрямку більше виражений, ніж в радіальному напрямку. Для інших циліндрів переміщення в радіальному напрямку набувають вищих значень, ніж в поздовжньому. При $H \geq 3R_2$ спостерігається зростання резонансних амплітуд поздовжніх коливань, візуально пропорційне до зміни довжини. Максимальні переміщення досягають 15-20 мкм, що є досить гарним показником порівняно з іншими розглянутими матеріалами.

3.4. Висновки до розділу 3

- 1.** Розвинуто варіаційно-сплайновий метод розв'язання віссесиметричних динамічних задач електропружності на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського та сплайн-апроксимації за просторовою координатою. Запропонована методика передбачає отримання системи звичайних диференціальних рівнянь з умови мінімуму функціонала Гамільтона-Остроградського та є зручною для розв'язання методом дискретної ортогоналізації. Розвинутий підхід дозволяє ефективно досліджувати усталені коливання п'єзокерамічних циліндричних тіл при довільних граничних умовах та електричних або механічних навантаженнях. При досліженні коливань конкретних електромеханічних перетворювачів при моногармонічних навантаженнях запропонований підхід дає змогу визначати резонансні частоти, форми коливань, електромеханічний стан тіла.
- 2.** Запропоновано новий спосіб редукції рівнянь гармонічних електропружних осесиметричних коливань п'єзоелектричних циліндрів до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на основі гамільтонового формалізму відносно радіальної координати. В напрямку поздовжньої координати застосовуються скінченно-різницеві вирази. Отримана система диференціальних рівнянь розв'язується методом дискретної ортогоналізації. Запропонований підхід дозволяє аналізувати динамічний осесиметричний напруженій стан п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів і рекомендується до застосування при заданих на зовнішніх поверхнях напруженнях та електричній індукції. Розвинутий підхід легко поширюється на випадок врахування дисипації енергії п'єзоелемента за допомогою комплексних модулів.
- 3.** Виконано чисельну реалізацію запропонованих підходів у випадку радіальної поляризації циліндричного п'єзоелемента. Верифікація отриманих результатів реалізована наявністю практичної збіжності обчислювальних процесів, порівнянням результатів тестових задач з наявними в літературі розв'язками,

порівнянням розв'язків, отриманих різними чисельними методами, відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям поширення електропружиних коливань в п'єзокерамічних тілах. Аналіз отриманих результатів свідчить, що запропоновані підходи дозволяють ефективно досліджувати гармонічні та резонансні коливання п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів.

4. Встановлено нові закономірності коливань циліндрів з різними граничними умовами при електричних моногармонічних навантаженнях. Визначено резонансні частоти, описано форми, досліджено залежність коливного процесу від довжини циліндра та радіусу серединної поверхні. Встановлено, що з зростанням довжини циліндра кількість резонансів на розглянутому інтервалі зміни частот зростає, причому перший резонанс зменшується обернено пропорційно до довжини циліндра.

5. Досліджено резонансні коливання п'єзокерамічних циліндрів з різних матеріалів з врахуванням дисипації енергії. Проведено порівняння результатів, отриманих за допомогою підходу на основі Гамільтонового формалізму та методом скінчених елементів з врахуванням комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм. Встановлено, що врахування п'єзоелектричних та діелектричних втрат в межах лінійної теорії дає відхилення від врахування лише механічних втрат в межах одного відсотка. В МСЕ частотно-незалежне демпфування та демпфування за Релеєм в околі резонансу дають ідентичні результати. При відсутності повного набору комплексних модулів тангенси механічних втрат можна брати як $1/Q_m$.

6. Реалізовано обчислення комплексних модулів для шаруватих п'єзоелектричних композитів типу 2-2 за трьома різними математичними моделями. Проаналізовано залежність комплексних модулів від частки п'єзокераміки в композитах, що складаються з шарів з РЗТ-5А та ПВДФ з віссю симетрії та поляризації x_3 . Визначено, що в трансверсальному напрямку пружні модулі змінюються за близькою до лінійної залежністю та набувають значно вищих значень порівняно модулями в напрямку осі x_3 . Таким чином, електродування потрібно накладати на

поверхні, паралельні до осі x_3 . При розрахунку усталених коливань в міжрезонансному діапазоні всі три розглянуті моделі дають співмірні результати. В резонансній зоні врахування дисипації енергії є можливим за допомогою моделі 3. Також встановлено, що при поширенні хвилі в напрямку осі x_3 хвильовий опір композиту близький до акустичного опору води.

7. Проведено порівняння амплітудно-частотних залежностей для шаруватих в напрямку поздовжньої координати п'єзоелектричних циліндрів з електродованими циліндричними поверхнями з різною об'ємною часткою PZT. Поздовжні переміщення в суцільному циліндрі значно нижчі, ніж в композитному, за рахунок більшої жорсткості матеріалу в цьому напрямку. Компонування п'єзокераміки з п'єзополімером понижує резонансну частоту в 1,5-2 рази порівняно з суцільною п'єзокерамікою.

8. Досліджено амплітудно-частотні характеристики для радіально поляризованих циліндрів з Ultrashape porous PZT та MSI 1-3 PZT-Polymer Composite (30%PZT) з різними геометричними параметрами. При збільшенні радіусу внутрішнього отвору резонансна частота зменшується пропорційно до зміни радіусу внаслідок зростання радіусу серединної поверхні циліндра. Максимальні переміщення досягають 15-20 мкм.

РОЗДІЛ 4.

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ

ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ТІЛ

Дано нові постановки задач гідроелектров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища. Розвинуто узагальнений підхід до розрахунку коливань п'єзоелектричних однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних тіл плоскої, циліндричної та сферичної форми. Реалізовано чисельний метод розв'язання поставлених задач при електричних та механічних збуреннях за допомогою методу скінченних різниць. Розвиток запропонованого підходу висвітлено в публікаціях: [117, 211, 213, 285, 287, 288, 290, 294, 296] та ін.

Для врахування дисипативних властивостей матеріалу пропонується нова розширенна на випадок п'єзоелектричних тіл чотирипараметрична узагальнена модель, що включає в себе модель дисипації за Релеєм, модель Кельвіна-Фойгта, п'єзоелектричні та діелектричні втрати. Проводиться послідовне дослідження нестационарних коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів вказаної геометрії. Зроблено оцінку впливу зовнішнього пружного шару та акустичного середовища на коливання п'єзоелемента. Проводиться аналіз динамічного електромеханічного стану п'єзоелемента в режимі випромінення коливань та генерації різниці потенціалів. Визначено логарифмічні декременти для чисельної схеми та альфа- та бета- демпфування. Проводиться порівняння впливу механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат енергії з впливом акустичного середовища. Описані результати увійшли до статей [33, 36, 213, 215, 224].

Проведено дослідження планарних віссиметричних коливань круглих та кільцевих пластин при електричних та механічних збуреннях. Визначено електрорушійну силу п'єзоелементів при планарних та осьових механічних навантаженнях. Отримані результати опубліковано в роботах [13, 32, 286].

4.1. Дослідження пульсуючих коливань тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм

4.1.1. Узагальнений підхід до дослідження коливань тіл різної геометрії

Система осесиметричних рівнянь електропружності для плоских ($N = 0$), порожнистих циліндричних ($N = 1$) та сферичних ($N = 2$) тіл складається з рівняння руху у відповідній системі координат

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

та квазістатичного рівняння Максвелла для електричних змінних

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + N \frac{D_r}{r} = 0. \quad (4.2)$$

Система (4.1), (4.2) доповнюється матеріальними співвідношеннями для поляризованих за товщиною тіл

$$\begin{aligned}\sigma_r &= c_{33}^E \varepsilon_{rr} + N c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} - e_{33} E_r; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E \varepsilon_{rr} + N [c_{11}^E - \frac{1}{2}(N-1)(c_{11}^E - c_{23}^E)] \varepsilon_{\theta\theta} - e_{31} E_r; \\ D_r &= e_{33} \varepsilon_{rr} + N e_{31} \varepsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{kk}^S E_r.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Вирази (4.3) доповнюються співвідношеннями Коші та виразом для напруженості електричного поля через електричну індукцію

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (4.4)$$

В виразах (4.1)-(4.4) вводимо нормування змінних і параметрів:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{r_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{r_0}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{r_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00}}}; \quad \bar{\sigma}_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{c_{00}}; \quad \bar{D}_x = \frac{D_x}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_{00}}; \quad \bar{c}_{33} = \frac{c_{33}^E}{c_{00}}; \quad \bar{e}_{33} = \frac{e_{33}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}; \quad \bar{\epsilon}_{33} = \frac{\epsilon_{kk}^S}{\varepsilon_{00}}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Для однорідних матеріалів

$$c_{00} = c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}^S}; \quad \varepsilon_{00} = \epsilon_{33}^S; \quad \rho_{00} = \rho; \quad t_h = h_0 \sqrt{\frac{\rho_{00}}{c_{00}}}.$$

Для неоднорідних нормуючі величини вибираємо аналогічно за параметрами п'єзокерамічної складової. Запропоноване нормування не змінює форми вхідних рівнянь та дає змогу вирівняти порядок розрахункових величин та таким чином підвищити точність та покращити збіжність розв'язку. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Всі матеріальні характеристики будемо вважати функціонально залежними від просторової координати:

$$c_{ij} = c_{ij}(r); \quad e_{ik} = e_{ik}(r); \quad \epsilon_{kk}^S = \epsilon_{kk}^S(r); \quad \rho = \rho(r). \quad (4.6)$$

Підставляємо (4.3), (4.4) в (4.1), (4.2) з врахуванням (4.6). Вводимо коефіцієнт $c_{11}^N(r) = c_{11}(r) - \frac{1}{2}(N-1)(c_{11}(r) - c_{23}(r))$ та маємо систему рівнянь електропружності у формі

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{dc_{33}}{dr} + \frac{N}{r} c_{33} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{N}{r} \frac{dc_{13}}{dr} - \frac{Nc_{13}}{r^2} + \frac{N^2}{r^2} (c_{13} - c_{11}^N) \right) u + \\ &+ e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{de_{33}}{dr} + \frac{N}{r} (e_{33} - e_{31}) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} e_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &+ \left(\frac{de_{33}}{dr} + \frac{N(e_{31} + e_{33})}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{N}{r} \frac{de_{31}}{dr} + \frac{(N^2 - N)e_{31}}{r^2} \right) u - \\ &- \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \left(\frac{d\epsilon_{33}^S}{dr} + \frac{N}{r} \epsilon_{33}^S \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Границі умови. Систему рівнянь (4.7), (4.8) доповнюємо механічними границіми умовами (R_1 , R_2 – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра):

$$u(R_i, t) = U_i(t) \text{ або } \sigma_{rr}(R_i, t) = P_i(t), \quad i = 1, 2; \quad (4.9)$$

границіми умовами для електричних польових величин

$$\varphi(R_1) = 0; \quad \varphi(R_2) = V(t) \quad (4.10)$$

та початковими умовами

$$u|_{t=0} = U_0(r); \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = W_0(r). \quad (4.11)$$

Для багатошарових тіл на поверхнях спряження $r = r_k$ записуються умови повного контакту

$$u(r_k - 0, t) = u(r_k + 0, t); \quad \sigma_{rr}(r_k - 0, t) = \sigma_{rr}(r_k + 0, t). \quad (4.12)$$

На електродованих поверхнях спряження задається значення електричного потенціалу

$$\varphi(r_k, t) = V_k(t), \quad (4.13)$$

на неелектродованих поверхнях виконується умова неперервності електричної індукції

$$D_r(r_k - 0, t) = D_r(r_k + 0, t). \quad (4.14)$$

Для пружних шарів рівняння механічних коливань записуються у формі (4.7) при пружних модулях (2.39) та нульових п'езомодулях $e_{ij} = 0$. Для збереження структури матриць покладаємо $\epsilon_{ii}^S = 1$.

При роботі п'езоелектрика в режимі прямого п'езоefекту різниця потенціалів на його розімкнених електродах визначається через переміщення шляхом наступних математичних перетворень рівняння Максвела [154]:

$$\begin{aligned} rD_r &= r \left(e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + Ne_{31} \frac{u}{r} - \epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = const = 0; \\ Ne_{31} \frac{u}{r} &= \epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_{33} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad Ne_{31} \int_{R_1}^{R_2} \frac{u}{r} dr = \int_{R_1}^{R_2} \left(\epsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r} - e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr; \\ Ne_{31} \int_{R_1}^{R_2} \frac{u}{r} dr &= \epsilon_{33}^S \left(\varphi|_{r=R_2} - \varphi|_{r=R_1} \right) - e_{33} \left(u|_{r=R_2} - u|_{r=R_1} \right). \end{aligned}$$

При переході від континуальних до дискретних виразів маємо

$$V = \varphi_{m+1} - \varphi_1 = \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^S} (u_{m+1} - u_1) + \frac{Ne_{31}}{\epsilon_{33}^S} \sum_{i=1}^m \frac{u_i}{r_i} \Delta. \quad (4.15)$$

При врахуванні функціональної неоднорідності матеріалу (4.15) перетворюється до вигляду

$$e_{33}(R_2)u_{m+1} - e_{33}(R_1)u_1 - \left[\epsilon_{33}^S(R_2)\varphi_{m+1} - \epsilon_{33}^S(R_1)\varphi_1 \right] +$$

$$+\sum_{i=1}^m \left(-e'_{33}(r_i)u_i + \varepsilon'_{33}(r_i)\varphi_i + Ne_{31}(r_i)\frac{u_i}{r_i} \right) \Delta = 0. \quad (4.16)$$

Штрих біля матеріальної характеристики означає похідну за координатою r . Рівняння (4.15) або (4.16) використовується в якості електричної граничної умови при механічному навантаженні елемента і описує залежність між згенерованою напругою та переміщеннями елемента.

Взаємодія з акустичним середовищем. Рівняння руху ідеальної стисливої рідини має вигляд

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (4.17)$$

де тиск і швидкість визначаються через потенціал акустичного поля наступним чином:

$$p = -\rho_a \frac{\partial \psi}{\partial t}; \quad v = \nabla \psi. \quad (4.18)$$

В режимі випромінення коливань в зовнішнє акустичне середовище в наближенні ідеальної нестисливої рідини на зовнішній поверхні виконуються умови нерозривності середовища

$$\dot{u}_n|_{r=R_2} = v_n|_{r=R_2}; \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = -p|_{r=R_2}. \quad (4.19)$$

Акустичну інтенсивність I_{ac} та акустичну потужність P_{ac} джерела звуку визначаємо як:

$$I_{ac}(r,t) = (\sigma_r \dot{u})|_{r=R_2}; \quad P_{ac}(t) = A I_{ac}.$$

Розглянемо випадок *плоского шару*. Вводимо товщину координату $x = r - R_0$, в акустичному середовищі $y = x - h$, де $h = R_1 - R_0$ — товщина п'єзoelementa. Рівняння руху (4.17) приймає вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

В просторі перетворень Лапласа рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi^L}{\partial y^2} = \frac{s^2}{c_a^2} \psi^L. \quad (4.20)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.20)

$$\psi^L(y, s) = f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a} y},$$

де функція $f(\cdot)$ – довільна функція. Відповідно, тиск і нормальна швидкість рідини (4.18) у просторі зображень запишуться наступним чином:

$$p^L(r, s) = -\rho_a s f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a} y}; \quad v_r^L(y, s) = -\frac{s}{c_a} f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a} y}.$$

Умови (4.19) перетворюються до вигляду

$$\sigma_x^L|_{x=h} = \rho_a s \psi^L|_{y=0} = \rho_a s f^L(s),$$

$$(\dot{u})^L|_{x=h} = s u^L|_{x=h} = \left. \frac{\partial \psi^L}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{s}{c_a} f^L(s).$$

Визначаємо функцію $f^L(s)$ та виключаємо її з рівнянь:

$$f^L(s) = \frac{1}{\rho_a s} \sigma_x^L|_{x=h}, \quad s u^L|_{x=h} = -\frac{1}{\rho_a c_a} \sigma_x^L|_{x=h}. \quad (4.21)$$

При переході в простір оригіналів з (4.21) отримуємо імпедансну граничну умову

$$\sigma_x|_{x=h} + z_a v|_{x=h} = 0, \quad (4.22)$$

де $z_a = \rho_a c_a$ — питомий акустичний опір середовища випромінення.

Імпедансна гранична умова в даній постановці також дає визначення питомого акустичного опору як відношення амплітуди звукового тиску в середовищі коливальної швидкості її частинок при проходженні через середовище звукової хвилі.

Для циліндричного тіла в умовах плоскої деформації п'єзоелемент займає область $R_1 \leq r \leq R_2$, акустичне середовище $r > R_2$. Рівняння руху акустичного середовища має вигляд

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

В просторі перетворень Лапласа рівняння руху набуває вигляду модифікованого рівняння Бесселя

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi^L}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi^L}{\partial r} - r^2 \frac{s^2}{c_a^2} \psi^L = 0 \quad (4.23)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.23) [128]:

$$\psi^L(r, s) = \frac{1}{s} f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)} g_{00}^L(r, s), \quad r \in [R_2, \infty], \quad s \in [0, \infty] \quad (4.24)$$

де $f^L(s)$ — довільна функція від аргументу s , $g_{mn}^L(s, r) = \frac{1}{s^m} e^{rs} K_n(sr)$, а $K_n(z)$ — модифікована функція Бесселя другого роду (функція Макдональда).

Тиск і швидкість визначаються з (4.19), (4.24) як

$$p^L(r, s) = -\rho_a f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)} g_{00}^L(r, s),$$

$$v^L(r, s) = -f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)} g_{01}^L(r, s).$$

На поверхні контакту з п'єзоперетворювачем $r = R_1$

$$p^L(R_1, s) = -\rho_a f^L(s) g_{00}^L(R_1, s), \quad v^L(R_1, s) = -f^L(s) g_{01}^L(R_1, s).$$

Виключаємо функцію $f^L(s)$:

$$f^L(s) = -\frac{p^L(R_2, s)}{\rho_a g_{00}^L(R_2, s)}; \quad v^L(R_2, s) = \frac{g_{01}^L(R_2, s)}{\rho_a g_{00}^L(R_2, s)} p^L(R_2, s).$$

З (4.19) отримуємо граничну умову для п'єзоелемента при контакті з акустичним середовищем

$$\rho_a s u^L(R_2, s) g_{00}^L(R_2, s) = -\sigma_{rr}^L(R_2, s) g_{01}^L(R_2, s).$$

При переході в простір оригіналів використовуємо теорему про згортку та отримуємо інтегральні рівняння Вольтерри із запізнілими аргументами

$$\rho_a \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(R_2, \tau) g_{00}(R_2, t - \tau) d\tau = - \int_0^t \sigma_{rr}(R_2, \tau) g_{01}(R_2, t - \tau) d\tau,$$

або

$$\int_0^t \left(\rho_a \frac{\partial u}{\partial t}(R_2, \tau) g_{00}(R_2, t - \tau) + \sigma_{rr}(R_2, \tau) g_{01}(R_2, t - \tau) \right) d\tau = 0, \quad (4.25)$$

де оригінали функцій g_{00} , g_{01} визначаються як [128]:

$$g_{0n}(r, t) = \frac{ch(n \cdot \arccos((t+r)/r))}{r \sqrt{((t+r)/r)^2 - 1}}.$$

Інтегральне рівняння (4.25) виступає як гранична умова для системи (4.7), (4.8).

В умовах *сферичної симетрії* просторовою є координата r , в якій п'єзоелемент займає область $R_1 \leq r \leq R_2$, акустичне середовище $r > R_2$. Рівняння руху має вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

загальний розв'язок якого у просторі перетворення за Лапласом з урахуванням

загасання збурень на нескінченності («зовнішня задача», $r \geq R_2$) може бути записаний через невідому функцію $f^L(s)$ параметра перетворення s [128]:

$$\psi^L(r,s) = \frac{1}{rs} f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)}. \quad (4.26)$$

Відповідно, тиск і радіальна швидкість рідини у просторі зображень

$$p^L(r,s) = -\frac{\rho_a}{r} f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)}; \\ v_r^L(r,t) = -\left(\frac{1}{r^2 s} + \frac{1}{rc_a}\right) f^L(s) e^{-\frac{s}{c_a}(r-R_2)}.$$

З умов (4.17) маємо

$$\sigma_{rr}^L(R_2,t) = -p^L(R_2,s) = \frac{\rho_a}{R_2} f^L(s), \\ su^L(R_2,s) = -\left(\frac{1}{sR_2} + \frac{1}{c_a}\right) \frac{f^L(s)}{R_2} = -\left(\frac{1}{sR_2} + \frac{1}{c_a}\right) \frac{\sigma_{rr}^L(R_2,s)}{\rho_a}.$$

Наступний перехід у простір оригіналів здійснюється аналітично з використанням загальновідомих правил операційного числення [68]. В результаті отримаємо співвідношення між радіальними переміщеннями сферичного п'єзовипромінювача на зовнішній його поверхні ($r = R_2$) з нормальними напруженнями на цій поверхні:

$$u(R_2,t) = -\frac{1}{c_a \rho_a} \int_0^t \sigma_{rr}(R_2,\tau) \left(1 + \frac{c_a}{R_2}(t-\tau)\right) d\tau.$$

Отримана умова також може бути записана через швидкість

$$\dot{u}|_{r=R_2} = -\frac{1}{c_a \rho_a} \sigma_{rr}|_{r=R_2} - \frac{1}{R_2 \rho_a} \int_0^t \sigma_{rr}(R_2,\tau) d\tau$$

або прискорення

$$\ddot{u}|_{r=R_2} = -\frac{1}{c_a \rho_a} \dot{\sigma}_{rr}|_{r=R_2} - \frac{1}{R_2 \rho_a} \sigma_{rr}|_{r=R_2}. \quad (4.27)$$

Тиск і швидкість в акустичному середовищі з використанням формул (4.27) можуть бути виражені через напруження на зовнішній поверхні п'єзоелемента $\sigma_{rr}(R_2, t)$:

$$p(r, t) = -\frac{R_2}{r} H\left(t - \frac{r - R_2}{c_a}\right) \sigma_{rr}\left(R_2, t - \frac{r - R_2}{c_a}\right);$$

$$v_r(r, t) = \frac{1}{\rho_a c_a} p(r, t) - \frac{R_2}{r^2 \rho_a} H\left(t - \frac{r - R_2}{c_a}\right) \int_0^{t - (r - R_2)/c_a} \sigma_{rr}(R_2, \tau) d\tau. \quad (4.28)$$

Тут $H(t)$ — одинична функція Гевісайда.

4.1.2. Чотирипараметрична модель електров'язкопружного демпфування коливань

Розглянемо модель в'язкопружного тіла Кельвіна-Фойгта. Вона може бути отримана з рівнянь механіки спадкового середовища (2.73), (2.74) при $C_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = c_{ij}^E(\mathbf{x})(1 + \beta_d \delta(\tau))$, де $\delta(\tau)$ — дельта-функція Дірака. Оскільки при установлених коливаннях всі константи матеріальних залежностей мають уявні компоненти, при нестационарних навантаженнях розширюємо математичне представлення моделі Кельвіна-Фойгта на діелектричні та п'єзоелектричні втрати енергії.

Вводячи для пружних модулів, п'єзоелектричних модулів та діелектричних проникностей функції релаксації у формі

$$C_{ij}(r, \tau) = c_{ij}^E(r)(1 + \beta_d \delta(\tau)); \quad e_{ik}(r, \tau) = e_{ik}(r)(1 + \lambda_d \delta(\tau));$$

$$\epsilon_{kk}(r, \tau) = \epsilon_{kk}^S(r)(1 + \gamma_d \delta(\tau)),$$

з (2.73), (2.74), (4.3) матимемо

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{33}^E (\varepsilon_{rr} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N c_{13}^E (\varepsilon_{\theta\theta} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) - e_{33} (E_r + \lambda_d \dot{E}_r); \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E (\varepsilon_{rr} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N c_{11}^* (\varepsilon_{\theta\theta} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) - e_{13} (E_r + \lambda_d \dot{E}_r); \\ D_r &= e_{33} (\varepsilon_{rr} + \lambda_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N e_{31} (\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) + e_{33}^S (E_r + \gamma_d \dot{E}_r).\end{aligned}\quad (4.29)$$

Тут і надалі коефіцієнти β_d , γ_d , λ_d — коефіцієнти механічних, діелектричних та п'єзоелектричних втрат, відповідно.

Внутрішнє в'язке тертя в матеріалі вводиться в рівняння руху (4.1) доданком, пропорційним до швидкості переміщень:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_d \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}). \quad (4.30)$$

В чисельних реалізаціях МСЕ для врахування механічних втрат широко використовується демпфування за Релеєм (2.98), що представляється як комбінація альфа- (масового) та бета- (жорсткісного) демпфування. Альфа-демпфування відповідає моделі в'язкого тертя (4.30). Відповідний демпфувальний доданок пропорційний до маси (густини) та швидкості переміщень з коефіцієнтом α_d . Бета-демпфування відповідає моделі в'язкопружності Фойгта та вводиться в рівняннях (4.29) коефіцієнтом β_d .

Коефіцієнт п'єзоелектричного демпфування λ_d в виразах для напружень є коефіцієнтом при швидкості зміни напруженості електричного поля, в виразах для електричної індукції — коефіцієнт при швидкості зміни деформацій. Він вводиться для врахування втрат, що виникають при перетворенні електричної енергії в механічну та навпаки.

Коефіцієнт діелектричного демпфування γ_d є пропорційним до швидкості зміни напруженості електричного поля. Він вводиться для врахування діелектричних втрат.

Для функціонально-неоднорідних тіл, що є композитами матеріалів з різними в'язкопружними властивостями, коефіцієнти демпфування функціонально залежні від просторової координати: $\beta_d = \beta_d(r)$, $\gamma_d = \gamma_d(r)$, $\lambda_d = \lambda_d(r)$.

4.1.3. Чисельний метод розв'язання

Для дослідження нестационарних коливань з врахуванням дисипації енергії підставляємо (4.29) в (4.30), (4.2) з урахуванням (4.4). Всі матеріальні характеристики, у т.ч. коефіцієнти демпфування, вважаються функціонально залежними від товщинної координати. Тоді система вирішальних рівнянь набуває вигляду

$$\left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[c_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{dc_{33}}{dr} + N \frac{c_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{N}{r} \frac{dc_{13}}{dr} - N \frac{c_{13}}{r^2} + N^2 \frac{c_{13} - a}{r^2} \right) u \right] + \\ + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{de_{33}}{dr} + N \frac{e_{33} - e_{31}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_d \frac{\partial u}{\partial t}; \quad (4.31)$$

$$\left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[e_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{de_{33}}{dr} + N \frac{e_{13} + e_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{N}{r} \frac{de_{31}}{dr} + N(N-1) \frac{e_{13}}{r^2} \right) u \right] - \\ - \left(1 + \gamma_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{de_{33}}{dr} + N \frac{e_{33}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0. \quad (4.32)$$

Переходимо від континуальної до дискретної постановки за просторовою координатою з використанням скінченно-різницевих виразів другого порядку точності. Вводимо розбиття $r_i = R_1 + (i-1)\Delta$, де $\Delta = h/m$, $i = 1, \dots, m+1$ та будемо шукати розв'язок відносно $U(t) = \{u(r_i)\}$ і $\Phi(t) = \{\varphi(r_i)\}$. Рівняння (4.31), (4.32) перетворяться до вигляду:

$$\left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\frac{c_{33}}{\Delta_r^2} + \frac{c'_{33}}{2\Delta_r} + N \frac{c_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) u_{i+1} + \left(N \frac{c'_{13}}{r_i} + \frac{N}{r_i^2} (N c_{13} - N c_{11}^* - c_{13}) - 2 \frac{c_{33}}{\Delta_r^2} \right) u_i + \right. \\ \left. + \left(\frac{c_{33}}{\Delta_r^2} - \frac{c'_{33}}{2\Delta_r} - N \frac{c_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) u_{i-1} \right] + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\frac{e_{33}}{\Delta_r^2} + \frac{e'_{33}}{2\Delta_r} + N \frac{e_{33} - e_{31}}{2\Delta_r r_i} \right) \varphi_{i+1} + \right. \\ \left. - 2 \frac{e_{33}}{\Delta_r^2} \varphi_i + \left(\frac{e_{33}}{\Delta_r^2} - \frac{e'_{33}}{2\Delta_r} - N \frac{e_{33} - e_{31}}{2\Delta_r r_i} \right) \varphi_{i-1} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \alpha_d \frac{\partial u_i}{\partial t}; \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\frac{e_{33}}{\Delta_r^2} + \frac{e'_{33}}{2\Delta_r} + N \frac{e_{13} + e_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) u_{i+1} + \left(N \frac{e'_{31}}{r_i} + N(N-1) \frac{e_{13}}{r_i^2} - 2 \frac{e_{33}}{\Delta_r^2} \right) u_i + \right. \\
& \left. \left(\frac{e_{33}}{\Delta_r^2} - \frac{e'_{33}}{2\Delta_r} - N \frac{e_{13} + e_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) u_{i-1} \right] - \left(1 + \gamma_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\frac{\varepsilon_{33}}{\Delta_r^2} - \frac{\varepsilon'_{33}}{2\Delta_r} - N \frac{\varepsilon_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) \varphi_{i-1} + \right. \\
& \left. - 2 \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta_r^2} \varphi_i + \left(\frac{\varepsilon_{33}}{\Delta_r^2} + \frac{\varepsilon'_{33}}{2\Delta_r} + N \frac{\varepsilon_{33}}{2\Delta_r r_i} \right) \varphi_{i+1} \right] = 0. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

В (4.33), (4.34) всі матеріальні характеристики записані в т. $r = r_i$.

Отримуємо систему рівнянь, яка в матричній формі може бути записана наступним чином:

$$\mathbf{AU} + \mathbf{B}\Phi + (\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \boldsymbol{\rho}) \dot{\mathbf{U}} + \lambda_d \mathbf{B}\dot{\Phi} = \boldsymbol{\rho}\ddot{\mathbf{U}}; \quad (4.35)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{U} - \mathbf{M}\Phi + \lambda_d \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}} - \gamma_d \mathbf{M}\dot{\Phi} = 0. \quad (4.36)$$

Тут α_d , β_d , λ_d , γ_d , $\boldsymbol{\rho}$ — діагональні матриці $(m-1) \times (m-1)$ зі значеннями коефіцієнтів демпфування та густини у внутрішніх точках розбиття.

Границні умовами в напруженнях (4.9) на циліндричних поверхнях набувають вигляду ($i = 1, 2$):

$$\sigma_{rr}|_{r=R_i} = \left[\left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + N c_{13}^E \frac{u}{r} \right) + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right]_{r=R_i} = P_i(t). \quad (4.37)$$

Скористаємося односторонніми різницевими виразами другого порядку точності для похідних першого порядку:

$$\frac{du}{dr}\Big|_i = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta}; \quad \frac{du}{dr}\Big|_i = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta}. \quad (4.38)$$

Вирази (4.37) в різницевій формі з врахуванням (4.38):

$$\sigma_{rr}|_{r=R_0} = \left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{c_{33}^E}{2\Delta_r} (-3u_1 + 4u_2 - u_3) + \frac{N c_{13}^E}{R_0} u_1 \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{e_{33}}{2\Delta_r} (-3\varphi_1 + 4\varphi_2 - \varphi_3) \right) = P_0(t); \\
\sigma_{rr} \Big|_{r=R_1} &= \left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{c_{33}^E}{2\Delta_r} (3u_{m+1} - 4u_m + u_{m-1}) + \frac{Nc_{13}^E}{R_1} u_{m+1} \right) + \\
& + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{e_{33}}{2\Delta_r} (3\varphi_{m+1} - 4\varphi_m + \varphi_{m-1}) \right) = P_1(t). \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Доповнююємо (4.33), (4.34) різницевою формою (4.39), (4.10) та отримуємо систему з $2(m+1)$ рівнянь.

Інтегрування за часом. Неявна чисельна схема. Для інтегрування за часом неявним чисельним методом використовуємо однопараметричну схему Ньюмарка з параметром ξ ($0,5 < \xi < 1$) (крапкою позначені похідні за часом):

$$\begin{aligned}
\dot{f}_i^{k+1} &= \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\xi\Delta_t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{f}_i^k; \\
\ddot{f}^{k+1} &= \frac{f^{k+1} - f^k}{\xi^2\Delta_t^2} - \frac{1}{\xi^2\Delta_t} \dot{f}^k - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{f}^k. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Система (4.35), (4.36) з врахуванням (4.40) записується у вигляді

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{A} + \frac{\boldsymbol{\beta}_d \mathbf{A} - \boldsymbol{\alpha}_d \boldsymbol{\rho}}{\xi\Delta_t} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\xi^2\Delta_t^2} \right) \mathbf{U}^{k+1} + \left(\mathbf{B} + \frac{\boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}}{\xi\Delta_t} \right) \boldsymbol{\Phi}^{k+1} = \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_d \mathbf{A} - \boldsymbol{\alpha}_d \boldsymbol{\rho}}{\xi\Delta_t} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\xi^2\Delta_t^2} \right) \mathbf{U}^k + \\
& + \left(\frac{1-\xi}{\xi} (\boldsymbol{\beta}_d \mathbf{A} - \boldsymbol{\alpha}_d \boldsymbol{\rho}) - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\xi^2\Delta_t} \right) \dot{\mathbf{U}}^k + \boldsymbol{\rho} \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{\mathbf{U}}^k + \frac{\boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}}{\xi\Delta_t} \boldsymbol{\Phi}^k + \boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B} \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\boldsymbol{\Phi}}^k; \\
& \left(\mathbf{B}^T + \frac{\boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}^T}{\xi\Delta_t} \right) \mathbf{U}^{k+1} - \left(\mathbf{M} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_d \mathbf{M}}{\xi\Delta_t} \right) \boldsymbol{\Phi}^{k+1} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}^T}{\xi\Delta_t} \mathbf{U}^k + \\
& + \boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}^T \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\mathbf{U}}^k - \frac{\boldsymbol{\gamma}_d \mathbf{M}}{\xi\Delta_t} \boldsymbol{\Phi}^k - \boldsymbol{\gamma}_d \mathbf{M} \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\boldsymbol{\Phi}}^k. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді вектора

$$\mathbf{Y} = \{u_1, \dots, u_{m+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}\}, \quad (4.42)$$

Тоді система (4.41) має вигляд

$$\mathbf{M}\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}^k, \dot{\mathbf{Y}}^k, \ddot{\mathbf{Y}}^k). \quad (4.43)$$

Систему диференціальних рівнянь (4.43) розв'язуємо при початкових умовах

$$\mathbf{U}|_{t=0} = U_0(\mathbf{r}); \quad \dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = W_0(\mathbf{r}); \quad \Phi|_{t=0} = \Psi_0(\mathbf{r}); \quad \dot{\Phi}|_{t=0} = \Psi_1(\mathbf{r}), \quad (4.44)$$

де $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{m+1})$ — вектор просторової координати в точках розбиття. Пришвидшення в нульовий момент часу визначається з (4.35) при $t = 0$.

Явна чисельна схема. Розв'язок задачі будемо шукати в моменти часу t^k з кроком за часом Δ_t . З початкових умов отримуємо дискретизований розподіл шуканих величин в нульовий ($t^0 = 0$) та перший моменти часу ($t^1 = \Delta_t$):

$$\mathbf{U}^0 = U_0(\mathbf{r}); \quad \Phi^0 = \Psi_0(\mathbf{r}); \quad \mathbf{U}^1 = \Delta_t W_0(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}). \quad (4.45)$$

Розподіл електричного потенціалу при $t = t^1$ визначається з рівняння (4.36) після підстановки (4.45):

$$\Phi^1 = (\gamma_d \mathbf{M})^{-1} \Delta_t \left[\mathbf{B}^T U_0(\mathbf{r}) - \left(\mathbf{M} - \frac{\gamma_d \mathbf{M}}{\Delta_t} \right) \Psi_0(\mathbf{r}) + \lambda_d \mathbf{B}^T W_0(\mathbf{r}) \right].$$

В наступні моменти часу ($t^{k+1} = k\Delta_t$, $k = 2, 3, \dots$) переміщення у внутрішніх точках знаходимо через переміщення та електричний потенціал в попередні моменти часу. З (4.35, 4.36) маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho}{\Delta_t^2} - \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \rho}{\Delta_t} \right) \mathbf{U}^{k+1} - \frac{\lambda_d}{\Delta_t} \mathbf{B} \Phi^{k+1} &= \left(\mathbf{A} + \frac{2\rho}{\Delta_t^2} - \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \rho}{\Delta_t} \right) \mathbf{U}^k - \frac{\rho}{\Delta_t^2} \mathbf{U}^{k-1} + \left(\mathbf{B} - \frac{\lambda_d \mathbf{B}}{\Delta_t} \right) \Phi^k; \\ -\frac{\lambda_d}{\Delta_t} \mathbf{B}^T \mathbf{U}^{k+1} + \frac{\gamma_d}{\Delta_t} \mathbf{M} \Phi^{k+1} &= \left(1 - \frac{\lambda_d}{\Delta_t} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{U}^k - \left(1 - \frac{\gamma_d}{\Delta_t} \right) \mathbf{M} \Phi^k, \end{aligned}$$

яка з введенням вектора \mathbf{Y} (4.42) приймає вигляд

$$\mathbf{N}\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}^k, \mathbf{Y}^{k-1}). \quad (4.46)$$

Матриця \mathbf{N} складається з чотирьох діагональних матриць, що спрощує обчислення в порівнянні з неявною схемою. Значення переміщень та електричного потенціалу в контурних точках виключаються з системи (4.46). При нульових або частково нульових коефіцієнтах демпфування з першого рівняння визначаються переміщення в внутрішніх точках в момент часу t^{k+1} , потім переміщення на контурі, потім електричний потенціал з системи

$$\mathbf{M}\Phi^{k+1} = \mathbf{B}^T \mathbf{U}^{k+1}.$$

Оскільки явна схема є умовно збіжною, при обчисленні беремо $\Delta_t \approx 0,1\Delta_r$. Такого відношення зазвичай достатньо для отримання стійких результатів.

Метод Рунге-Кутта. Для інтегрування за часом за допомогою процедури Рунге-Кутта систему рівнянь потрібно представити у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього вводимо змінну швидкості переміщень та перетворюємо (4.35), (4.36) до форми

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{V}; \\ \dot{\mathbf{V}} &= \boldsymbol{\rho}^{-1} \left(\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}\Phi + (\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \boldsymbol{\rho})\mathbf{V} + \lambda_d \mathbf{B}\dot{\Phi} \right); \\ \dot{\Phi} &= (\gamma_d \mathbf{M})^{-1} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{U} - \mathbf{M}\Phi + \lambda_d \mathbf{B}^T \mathbf{V} \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Система (4.47) записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}\mathbf{Y}, \quad (4.48)$$

де $\mathbf{Y} = \{u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}\}$.

При малих коефіцієнтах демпфування система (4.47) втрачає стійкість. В такому випадку потрібно збільшувати кількість кроків розбиття. При нульових γ_d та λ_d третє рівняння (4.47) записується у формі

$$\dot{\Phi} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{V}.$$

Аналогічні перетворення проводяться з граничними умовами. При відсутності похідних за часом в граничних умовах проводиться диференціювання всього рівняння, включаючи функції навантаження, за часом.

4.2. Коливання багатошарових п'єзоелементах із зустрічною поляризацією шарів

Досліджуються товщинні (радіальні) коливання багатошарових порожнис-тих пластин, циліндрів та куль, що складаються з n п'єзокерамічних поляризованих за товщиною з зустрічним напрямком поляризації шарів з поверхнями розділу $R_0 < \dots < r_k < \dots < R_n$, де R_n — радіус зовнішньої, R_0 — внутрішньої поверхні тіла. На контактних поверхнях сусідніх шарів виконуються умови нерозривності (4.12). Зовнішні поверхні та поверхні контакту шарів електродовані та навантажені різницею потенціалів, що підводиться через зовнішні електроди (Рис. 4.1):

$$\varphi(r_k, t) = (-1)^{k-1} V(t), \quad k = 1 \dots n. \quad (4.49)$$

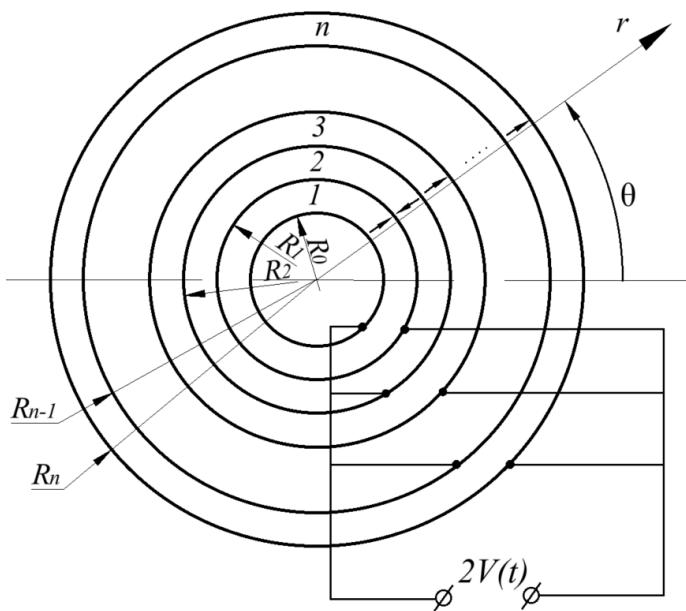


Рис. 4.1. Схема поперечного перерізу багатошарового циліндра та кулі з зустрічною поляризацією шарів

Матеріальні характеристики задаються у вигляді шматково-однорідних функцій. У шарах з протилежним до координати r напрямком поляризації п'єзомодулі змінюють знак. Для пружних шарів матеріальні характеристики, що відповідають анізотропній структурі визначальних рівнянь, знаходяться через модуль Юнга E та коефіцієнт Пуассона ν [128]:

$$c_{11} = c_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_{12} = c_{13} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\ c_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ii}^S = 0. \quad (4.50)$$

Запропонований в роботі підхід до дослідження нестационарних коливань п'єзокерамічних електромеханічних перетворювачів реалізується в середовищі програмування Matlab.

4.2.1. Поширення збурень в багатошарових тілах плоскої, циліндричної та сферичної форм.

Описаний вище чисельний підхід дозволяє паралельно досліджувати коливання тіл різної геометрії, лише змінюючи значення параметри N . Почнемо з $N=0$ (плоский шар). Результати наводяться в безрозмірних змінних (4.5).

Плоский шар. Проведемо аналіз коливань плоского шару товщиною 2 см з різною кількістю шарів. Матеріал PZT-4. На рис. 4.2 наведено коливання зовнішньої поверхні плоского шару з вільними від навантажень зовнішніми поверхнями при підведеній різниці потенціалів до кожного шару в 100 В. В такому випадку переміщення серединної поверхні шару дорівнює нулю.

Спостерігається чітка пропорційність між кількістю шарів та максимальними переміщеннями зовнішньої поверхні. Таким чином, чим більше шарів, тим вищі переміщення ми можемо отримати при меншій підведеній різниці потенціалів. Основним обмеженням для такої конструкції є електрична міцність, яка для твердих діелектриків складає $E_m = 10^4 \dots 10^6 \text{ В/мм}$.

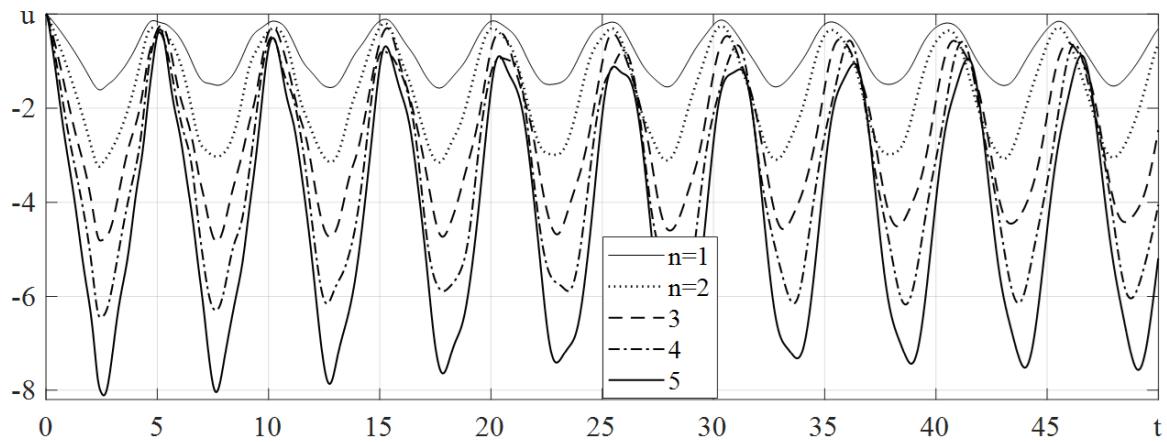


Рис. 4.2. Коливання зовнішньої поверхні плоских п'єзоелементів

При збільшенні кількості шарів елемента з часом спостерігається деяке зменшення екстремальних значень переміщень та згладжування піків амплітуди за рахунок накладання прямої та відбитої хвилі. Цей ефект спостерігається і при розрахунку методом скінчених елементів.

Закономірності поширення електропружної хвилі в трьохшаровому елементі прослідкуємо за допомогою рис.4.3.

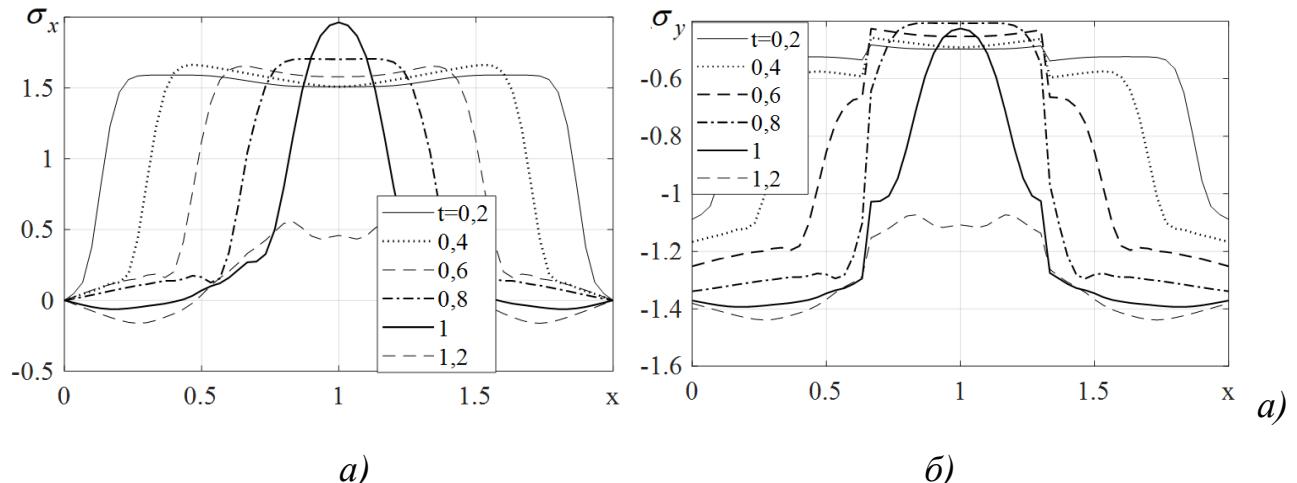


Рис.4.3. Поширення хвилі в багатошаровому п'єзоелементі

На рис. 4.3 наведено напруження σ_x (а) та σ_y (б) в різні моменти часу. При прикладанні різниці потенціалів напруження виникають в поперечному перерізі миттєво, потім з поширенням фронту хвилі всередину області напруження стають близькими до нуля. Товщинні напруження є неперервними на поверхнях спряження шарів, трансверсальні мають значні скачки. Такі скачки в значеннях

напружень призводять до концентрації напружень в площині спряження шарів, що при динамічних навантаженнях призводить до появи мікротріщин та знижує міцність п'єзоелемента. Товщинні і трансверсалльні напруження набувають приблизно однакових значень, але мають різні знаки. Максимальні товщинні напруження виникають на серединній поверхні, тоді як трансверсалльні максимальні на зовнішніх поверхнях.

Радіальні коливання порожністих циліндрів. Проведено аналіз коливань багатошарового циліндра $R_0 \leq r \leq R_n$ з PZT-4 з різною кількістю шарів. На рис. 4.4 наведено переміщення зовнішньої поверхні циліндрів з радіусами $R_0 = 2$, $R_n = 4$ та різною кількістю шарів з вільними від навантажень зовнішніми поверхнями при підведеній різниці потенціалів до кожного шару в $100 B$.

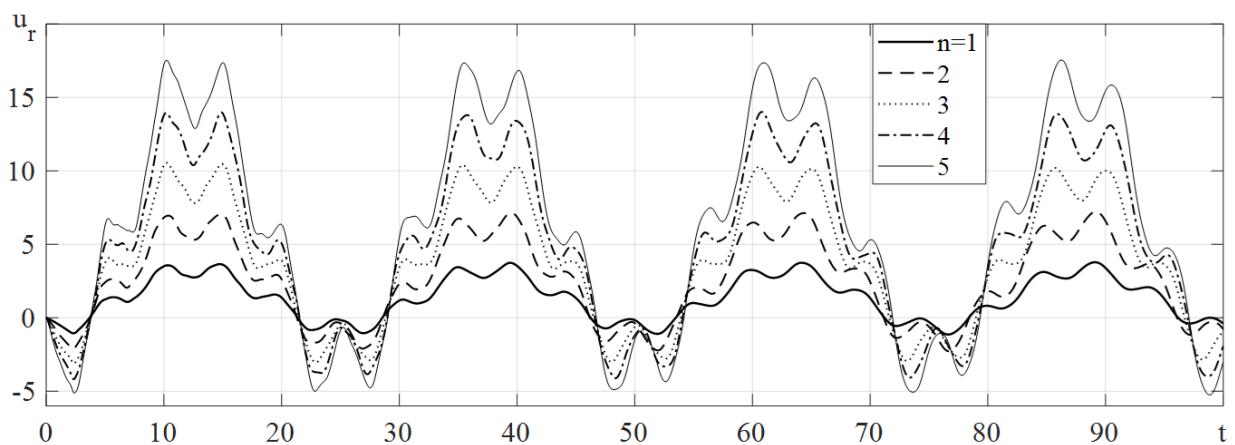


Рис. 4.4. Коливання зовнішньої поверхні багатошарових циліндрів

Знову прослідковується чітка пропорційність між кількістю шарів та максимальними переміщеннями зовнішньої поверхні. Переміщення можна описати як комбінацію низькочастотних коливань з періодом $T_1 \approx 25$, що зумовлюються радіусом серединної поверхні, та високочастотних з періодом $T_2 \approx 5$, що не залежать від кількості шарів елемента.

Проаналізуємо вплив геометричних характеристик п'єзоелемента на його коливання. На рис. 4.5 наведено переміщення зовнішньої поверхні циліндрів при $n=5$ товщиною $h=2$ з різними радіусами зовнішньої поверхні.

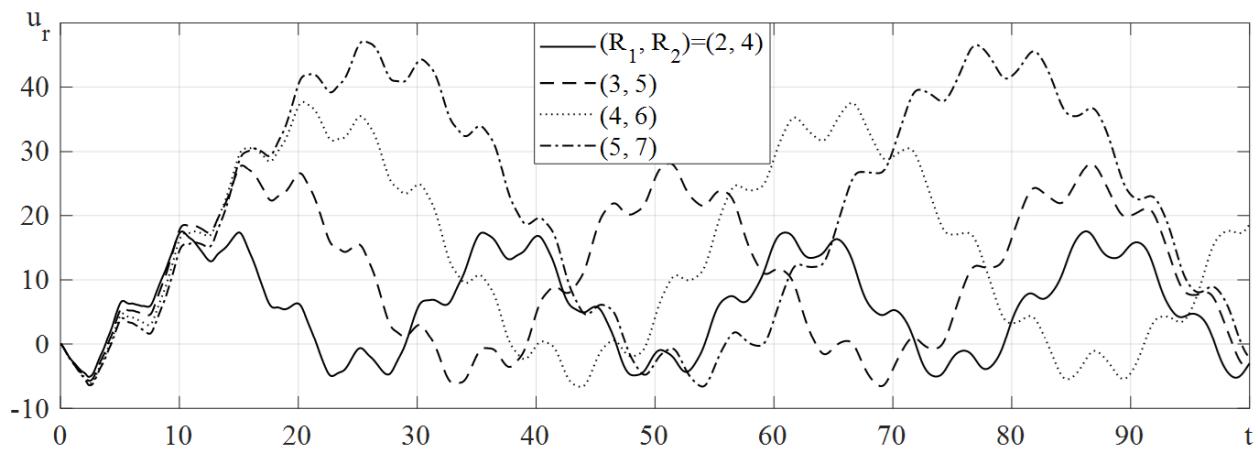


Рис. 4.5. Коливання зовнішньої поверхні циліндрів

з різними геометричними пропорціями

Спостерігається чітка лінійна залежність низькочастотних коливань від радіусу зовнішньої поверхні: при $R_n = 4$ $T_1 \approx 25$, при $R_n = 5$ $T_1 \approx 34$, при $R_n = 6$ $T_1 \approx 44$, при $R_n = 7$ $T_1 \approx 54$. Період високочастотних коливань візуально не змінюється.

Додатковий аналіз точності отриманих результатів проведено за допомогою рис. 4.6, де наведені розмірні криві переміщень внутрішньої поверхні п'ятишарового циліндра з розмірами $R_n = 4\text{ см}$, $h = 2\text{ см}$ при $V_0 = 100B$, отримані за допомогою запропонованого методу та в скінченноелементному розрахунковому комплексі.

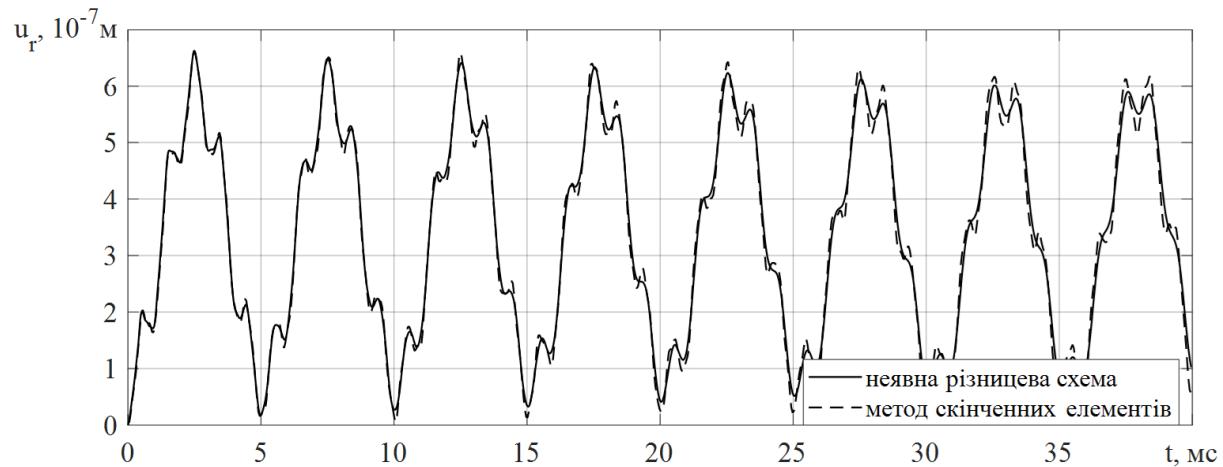


Рис. 4.6. Порівняння результатів, отриманих різними методами

При $t < 15\text{ мс}$ криві майже повністю співпадають. З часом відхилення нарощують, але не перевищують 5%. Додатково можна відмітити, що розмірна періодичність коливань складає $T_1 = 5\text{ мс}$, максимальні значення переміщень

$$u_{r \max} = 6,5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Максимальні радіальні напруження виникають на серединній поверхні циліндра. Проаналізуємо їх закономірності за допомогою рис. 4.7. Періодичність їх зміни відповідає високочастотним коливанням, описаним раніше. При збільшенні радіусу серединної поверхні спостерігається зміна періодичності коливань з $T_2 \approx 5$ при $R_n = 4$ до $T_2 \approx 5,13$ при $R_n = 7$. Криві напружень при $R_n = 6$ та $R_n = 7$ майже повністю співпадають, з чого робимо висновок, що при подальшому збільшенні радіуса циліндра радіальні напруження не зміняться.

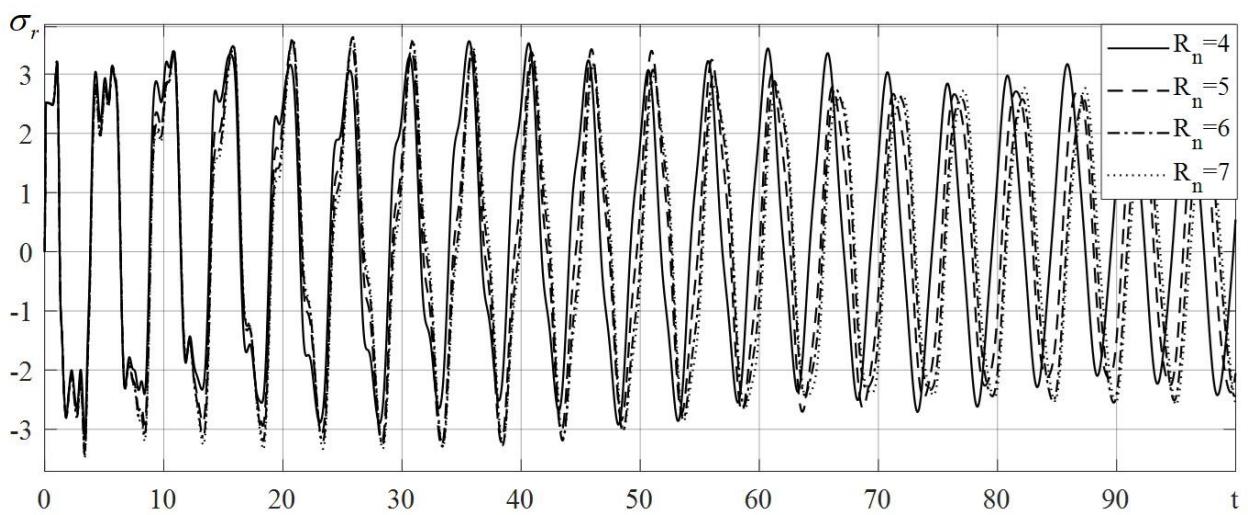


Рис. 4.7. Радіальні напруження

На рис. 4.8 наводяться криві зміни в часі колових напруженень для циліндрів різної геометрії при $r = R_0$.

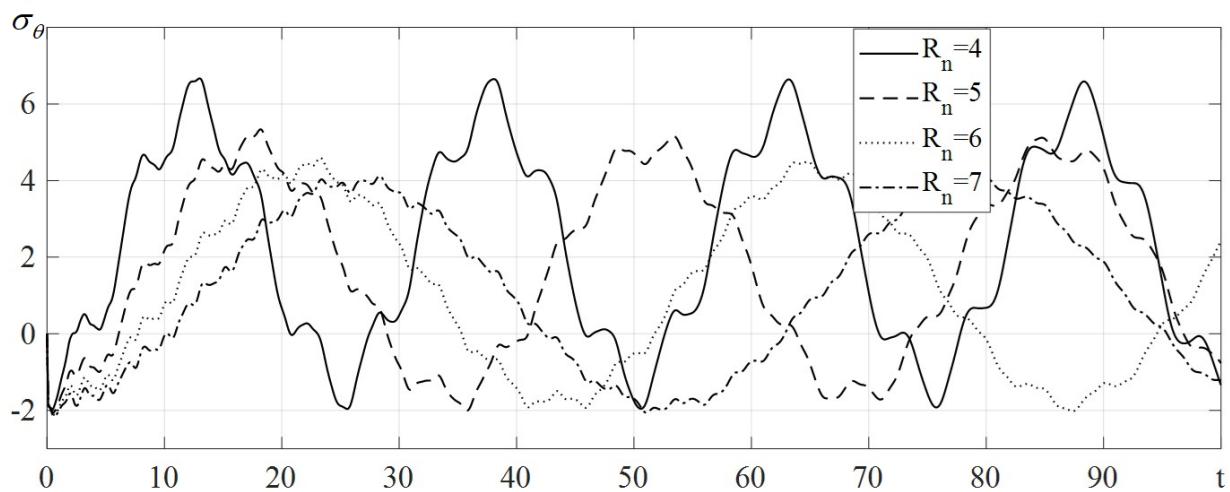


Рис. 4.8. Колові напруження в циліндрах

Максимальні колові напруження виникають на внутрішній поверхні циліндра. Періодичність зміни напружень співпадає з описаною вище періодичністю коливань. При зменшенні кривизни стінки циліндра колові напруження зменшуються.

Описані закономірності дозволяють зробити висновок, що багатошарові циліндричні випромінювачі з зустрічною поляризацією шарів є ефективним рішенням для низьковольтажних актуаторів.

Пульсуючі коливання порожністих куль. Розглядається багатошаровий сферичний п'єзоелемент з радіусами $R_0 \leq r \leq R_n$, матеріал PZT-4. Сфера має n шарів з зустрічною поляризацією. На рис. 4.9 наведено переміщення зовнішніх поверхонь п'єзоелементів з радіусами $R_0 = 3$, $R_n = 5$ з різною кількістю шарів. Навантаження аналогічне до попереднього випадку. Знову прослідковується пропорційність між кількістю шарів та максимальними переміщеннями зовнішньої поверхні. Так само, як і в циліндрах, присутні незначні зміщення екстремумів кривих (до 2% між розглянутими варіантами). Спостерігаються коливання з періодичністю $T_1 \approx 15$, на які накладаються високочастотні коливання з періодичністю $T_2 \approx 5$, що не залежать від кількості шарів елемента.

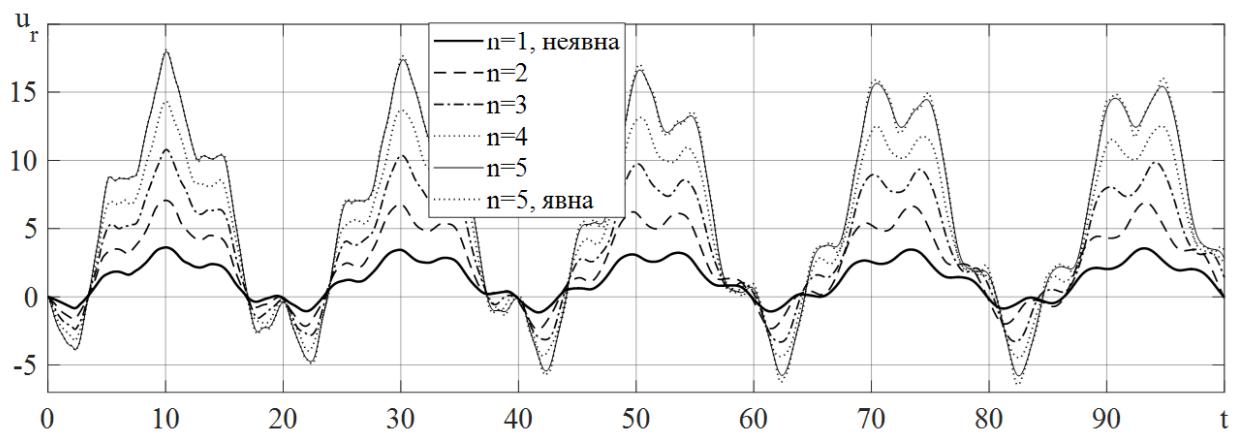
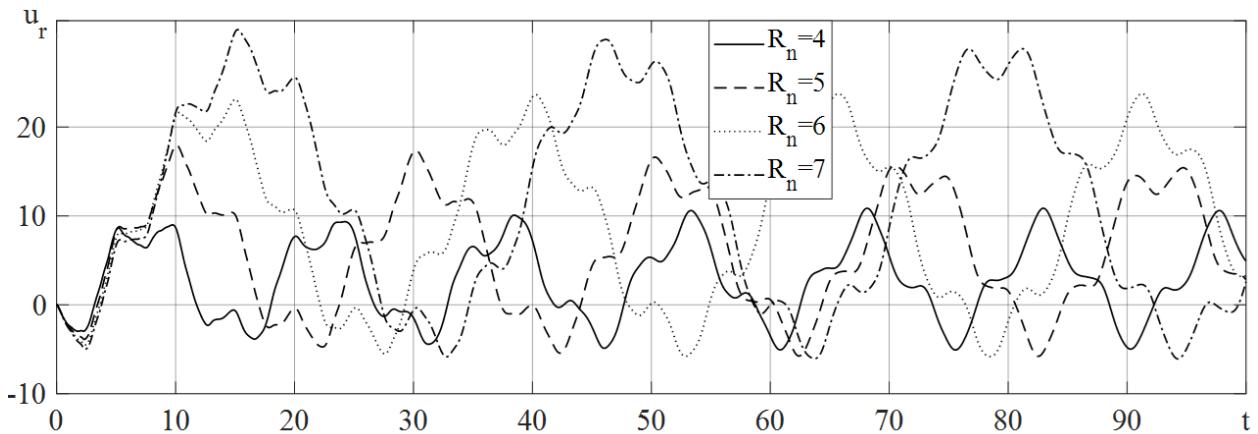


Рис. 4.9. Коливання зовнішньої поверхні багатошарових сфер

Аналіз залежності коливань зовнішньої поверхні від розмірів кулі проведено за допомогою рис. 4.10. Порівнюються коливання п'ятишарових куль з товщиною стінки $h=2$ та різними зовнішніми радіусами. Як і для циліндра,

спостерігається кореляція між розмірами кулі, амплітудою та періодичністю коливань. При зростанні радіусу серединної поверхні періодичність та екстремуми коливань пропорційні до зміни радіусу серединної поверхні сфери. Періодичність високочастотних коливань практично не змінюється.



*Рис. 4.10. Коливання багатошарових куль
з різними геометричними пропорціями*

Потрібно відмітити, що очевидна перевага в амплітуді коливань для сфери та циліндра втрачається на відстані від елемента, оскільки інтенсивність випромінюваного сигналу знижується обернено пропорційно до відстані. Але завдяки всеобщій направленості сигналу імовірність знаходження дефектів або інших перешкод значно зростає.

На рис. 4.11 наведено криві, що описують залежність максимальних значень переміщень (а); середньою періодичністю низькочастотних коливань T_1 (б); максимальних значень радіальних напружень (в); максимальних значень окружніх напружень від пропорції тіла (відношення зовнішнього радіусу до товщини стінки) (г).

Для переміщень спостерігається чітка лінійна залежність від параметру R_n/h та пропорційність відносно кількості шарів. Періодичність T_1 від кількості шарів не залежить, а від параметру R_n/h залежить лінійно. Радіальні напруження при $R_n/h \geq 2,5$ не залежать від кривизни циліндра, але при збільшенні кількості шарів кількості зростають.

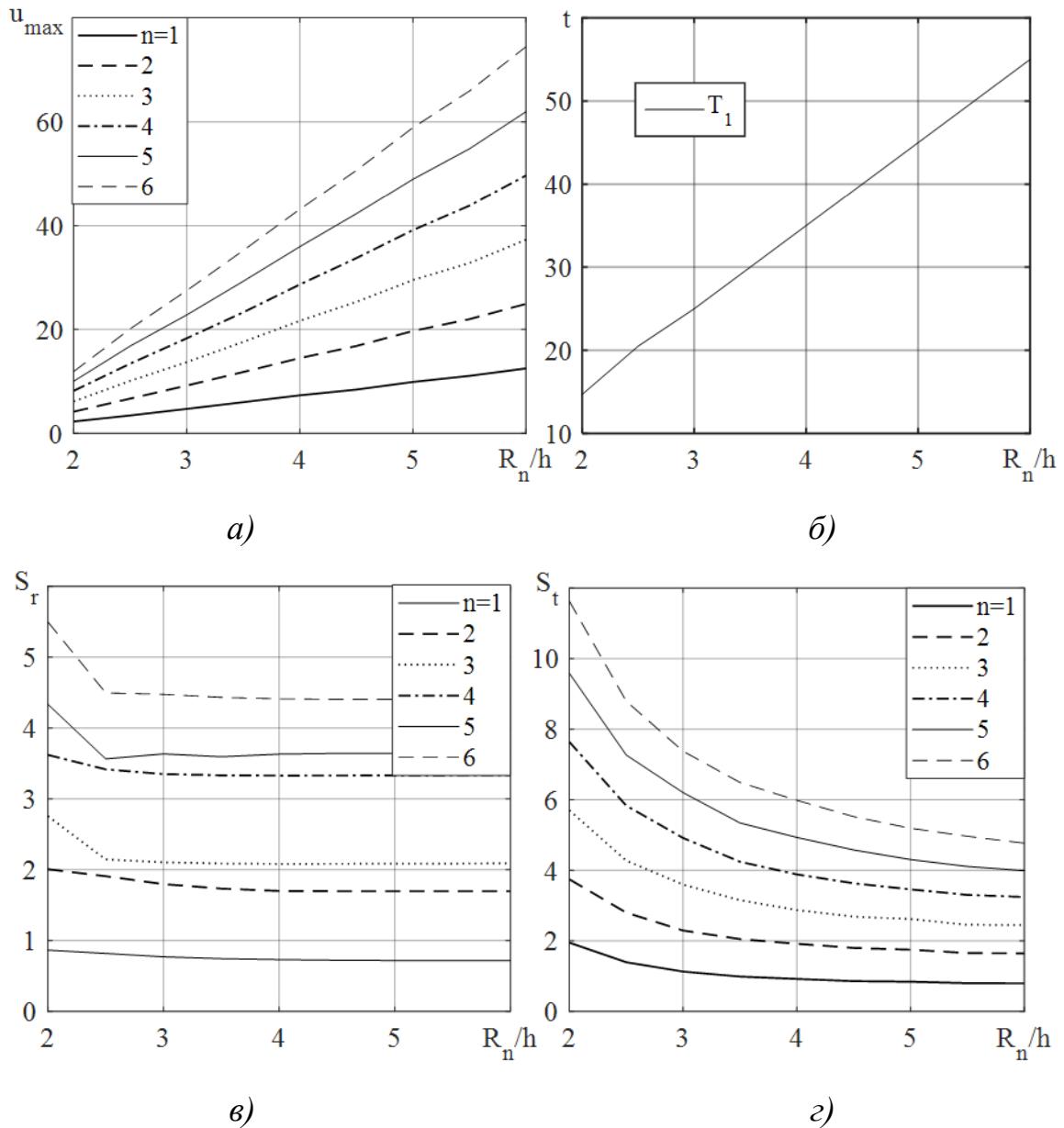


Рис. 4.11. Залежність екстремумів характеристик механічного поля від розмірів п'єзоелемента

Пропорційність чітко не прослідковується, оскільки при зміні кроку сітки розбиття максимальні радіальні напруження можуть змінюватися в межах 20%, але з аналізу отриманих результатів можемо зробити висновок про її наявність. Колові напруження нелінійно залежать від параметру R_n/h та пропорційні до кількості шарів.

З проведеного аналізу робимо висновок, що використання багатошарових елементів з зустрічною поляризацією шарів дає змогу збільшити механічний відгук п'єзоелемента на електричне навантаження. Відгук при сталій підведеній

напрузі пропорційний до кількості шарів. Ця властивість є корисною для низьковольтажних конструкцій і широко застосовується на практиці. Недоліком даної конструкції є концентрація напружень між шарами, що негативно впливає на механічну міцність конструкції.

4.2.2. Коливання багатошарових п'єзоелементів з зовнішнім в'язкопружним шаром

Оскільки п'єзоелементи для захисту від механічних пошкоджень часто вкладаються в корпус та доповнюються узгоджувальними шарами, виникає необхідність аналізу їх впливу на коливання елемента.

Досліджуються нестационарні коливання елементів з кераміки PZT-4 при нульових початкових умовах. Радіуси $R_0 = 2\text{ см}$, $R_n = 3\text{ см}$. Розглянемо випадок $n=5$, тобто п'єзоелементи складаються з п'яти шарів зустрічно поляризованої кераміки PZT-4. Товщина шарів однакова $h_i = (R_n - R_0) / n = 2\text{ мм}$, де n — кількість шарів. Порівнямо коливання елементів без зовнішнього шару та з врахуванням зовнішнього пружного шару товщиною $h=2\text{ мм}$. Для в'язкопружного матеріалу беремо $E = 1,1 \cdot 10^{11} \text{ МПа}$, $\mu = 0,25$ (алюміній). Демпфування коливань в в'язкопружному шарі враховується за моделлю Кельвіна-Фойгта. Результати наводяться в безрозмірному вигляді.

Одним з базових режимів роботи таких елементів є імпульсне навантаження, що дозволяє відправляти сигнал в досліджуване середовище та отримувати відповідь після затухання коливань в елементі. Електричне збурення задамо у вигляді півхвилі синусоїди

$$V(t) = \begin{cases} V_0 \sin \omega t, & 0 < t < \pi / \omega; \\ 0, & t \geq \pi / \omega. \end{cases}$$

Візьмемо $\omega = 1$, $V_0 = 100 \text{ В}$. Одниця безрозмірного часу приблизно відповідає 1 мкс , одниця безрозмірного переміщення відповідає 55 мкм . Визначення

коефіцієнта демпфування b_d є складною практичною задачею, оскільки він залежить не лише від матеріалу, а і від форми конструкції і типу збурення. В зв'язку з вищепередум розглянемо випадки з довільними значеннями b_d , що дозволяє встановити залежність часу затухання коливань в елементі від значення b_d . Відмітимо, що для імпульсного режиму роботи швидке затухання збурень є корисною властивістю, тому для пружних узгоджувальних шарів підбираються матеріали з вираженими в'язкопружними характеристиками.

Розглянемо плоский п'єзоелемент товщиною 1 см з вільними зовнішніми поверхнями. При такій геометрії коливання виникають лише внаслідок пробігу хвилі по товщині елемента. На рис. 4.12 представлена коливання зовнішньої поверхні плоского п'єзоелемента ($N = 0$) без зовнішнього шару та з зовнішнім пружним шаром з різними коефіцієнтами затухання.

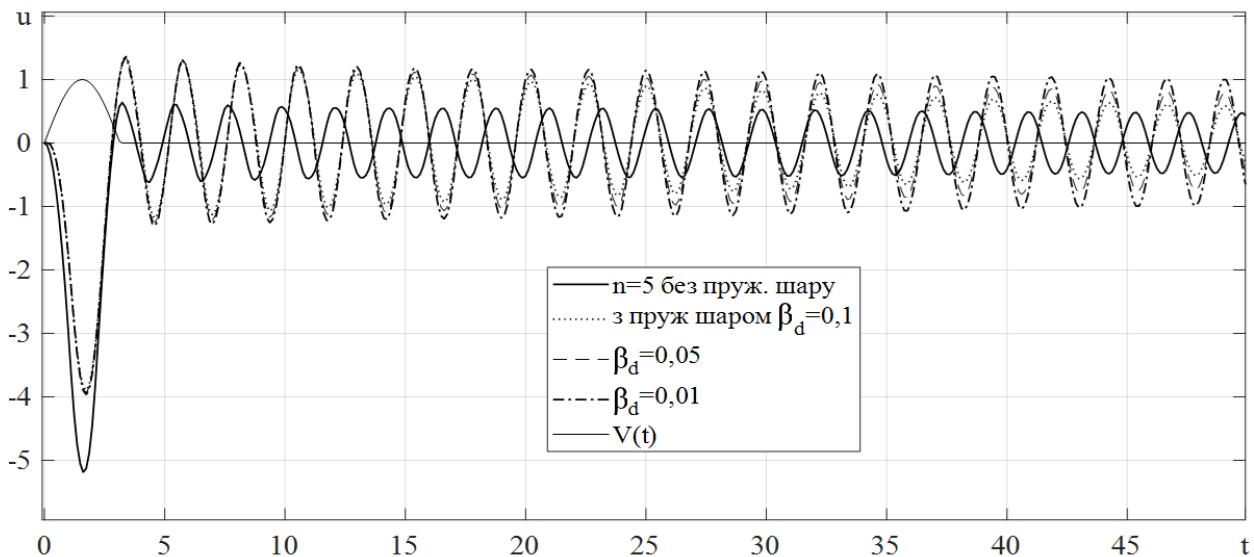


Рис. 4.12. Коливання плоского п'єзоелемента при імпульсному навантаженні

Аналізуючи результати, робимо висновок, що наявність пружного шару підвищує амплітуду вільних коливань, що виникають після зняття зовнішнього навантаження, майже в два рази (для інших навантажень зростання менше). Період вільних коливань зростає на 20%. Внаслідок демпфувальних властивостей пружного шару амплітуда коливань зменшується відповідно до зміни b_d . За $\bar{t} = 300$

(300 мкс) при $\bar{b}_d = 0,1$ коливання повністю зникають, при $\bar{b}_d = 0,05$ — зменшилися на 96%, при $\bar{b}_d = 0,01$ — на 82% відносно максимальної абсолютної амплітуди 77 мкм. Потрібно відмітити, що амплітуда коливань одношарового елемента складає 16-20% від амплітуди коливань п'ятишарового елемента, тобто перетворення електричної енергії в механічну в багатошарових елементах відбувається значно ефективніше.

Коливання циліндричного елемента наводиться на рис. 4.13. Наявність пружного шару зменшує максимальну амплітуду і частоту коливань, оскільки жорсткість елемента зросла. Період коливань змінився з 19 до 17 мкс. Коливання являють собою комбінацію товщинних і радіальних коливань, внаслідок чого амплітуда зросла в 10 разів порівняно з плоским елементом. Бачимо, що за $\bar{t} = 300$ при $\bar{b}_d = 0,01$ амплітуда зменшилася на 30%, при $\bar{b}_d = 0,05$ — на 73%, при $\bar{b}_d = 0,1$ — на 92%. Максимальна амплітуда коливань склала 0,55 мм.

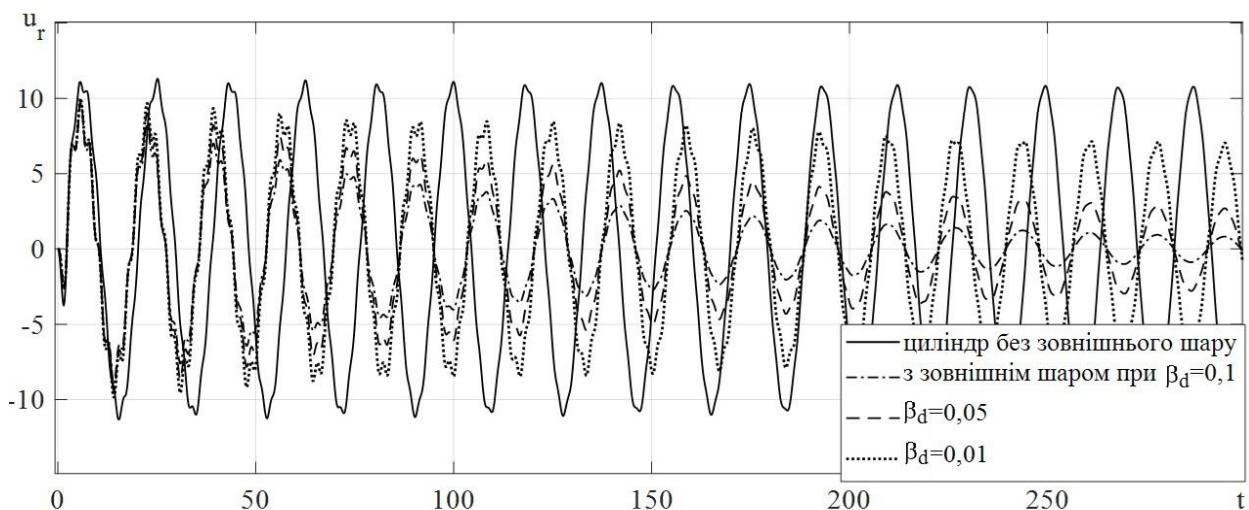


Рис. 4.13. Коливання зовнішньої поверхні циліндра

Розглянемо коливання багатошарової п'єзокерамічної кулі (рис. 4.14). Період коливань з врахуванням пружного шару змінився з 11,1 до 10,5 мкс. Максимальна амплітуда коливань склала 0,5 мм. За $\bar{t} = 300$ при $\bar{b}_d = 0,01$ амплітуда зменшилася на 22%, при $\bar{b}_d = 0,05$ — на 59%, при $\bar{b}_d = 0,1$ — на 89%.

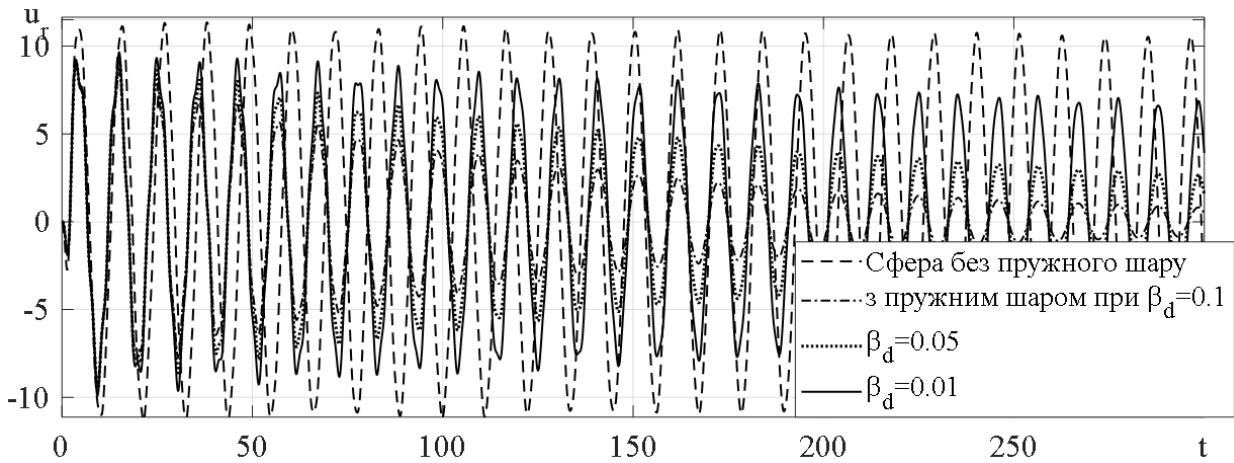


Рис. 4.14. Коливання зовнішньої поверхні кулі

Таким чином, вплив на коливання багатошарового елемента зовнішнього в'язкопружного шару є суттєвим, і нехтувати ним не бажано. Для зменшення впливу потрібно зменшувати товщину корпуса порівняно з товщиною елемента. Правильний підбір товщини зовнішнього шару дозволяє за потреби збільшити або зменшити амплітуду коливань п'єзоелемента після зняття навантаження.

4.3. Переходні процеси в функціонально-неоднорідних п'єзоелектричних тілах

4.3.1. Нестаціонарні коливання п'єзоелементів різної геометрії, що комбінують тверду та м'яку п'єзокераміку

Одношарові та двошарові п'єзоелементи. Для вибору оптимальних характеристик ФНМ розглянемо п'єзокерамічні плоскі тіла, виготовлені з м'якої PZT-5h або твердої PZT-8 п'єзокераміки (Дод. С), а також двошарові елементи з цих матеріалів. М'яка п'єзокераміка характеризується високими амплітудами коливань, але має нижчу електричну міцність, ніж тверда п'єзокераміка. Товщина шарів однакова, електроди нанесені на зовнішні поверхні елемента, напрямок поляризації шарів одинаковий. З'єднання шарів – повний контакт без проміжного електроду. Нижня поверхня елемента закріплена, верхня вільна від механічних. Навантаження задається різницею потенціалів у вигляді функції Хевісайда

$V(t) = H(t)$. При $N=0$ в постановці задачі замість радіальної координати r використовуємо товщину координату x . Результати наведено в безрозмірному вигляді, нормування (4.5) введено за параметрами PZT-5h.

На рис. 4.15 наведено переміщення зовнішньої поверхні для вищеописаних тіл. Як і очікувалося, в м'якій п'єзокераміці PZT-5h відгук на збурення помітно вищий, ніж в інших тілах. Це пояснюється високими значеннями п'єзомодулів та коефіцієнтів перетворення такого матеріалу. В твердій кераміці PZT-8 амплітуда коливань майже вдвічі нижча, а період коливань на 4% нижчий. В двошарових матеріалах амплітуда мало відрізняється, хоча в PZT-8+PZT-5h вона дещо вища, тоді як частота коливань в PZT-8+PZT-5h вища, ніж в PZT-5h+PZT-8, на 5%. Видно, що порядок шарів має суттєвий вплив на акустичні властивості перетворювача, і для підвищення частоти нижнім повинен бути шар з м'якої п'єзокераміки.

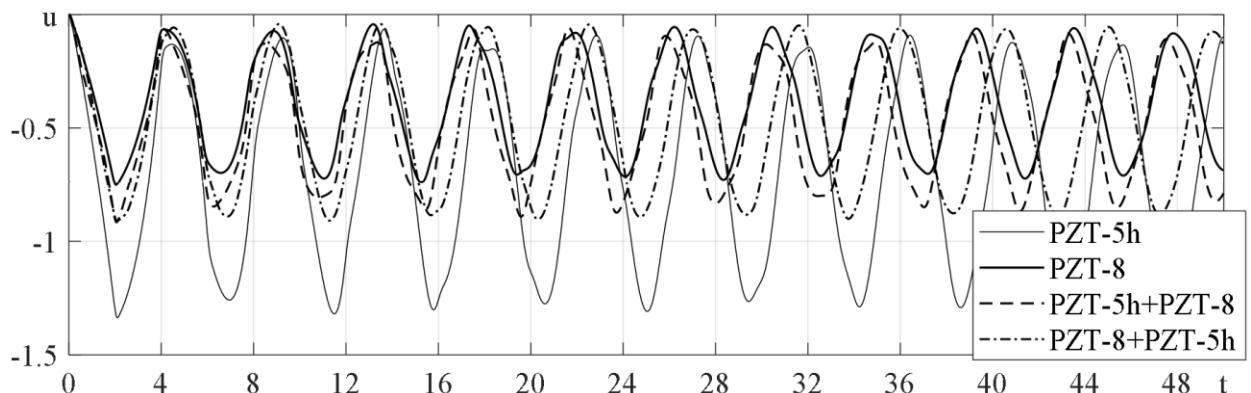


Рис. 4.15. Переміщення зовнішньої поверхні плоских перетворювачів

Рис. 4.16 ілюструє напруження на закріплений поверхні тіла. Бачимо, що максимальні нормальні напруження σ_{xx} виникають в м'якій п'єзокераміці та з часом зменшуються. Напруження в твердій п'єзокераміці нижчі, ніж в м'якій, на 30%. В елементі з PZT-8 та двошарових тілах σ_{xx} (рис. 4.16, а) змінюється в діапазоні від -0,5 до 0,5, тобто періодично виникає розтяг-стиск, хоча зовнішня поверхня коливається в стиснутій зоні. В трансверсальному напрямку (рис. 4.16, б) шар постійно знаходиться в стані стиску. Частота коливань відповідає швидкості поширення електропружної хвилі. Напруження σ_{yy} мінімальні в м'якій п'єзокераміці,

максимальні (до 0,75) в двошаровому елементі PZT-8+PZT-5h, що підтверджує необхідність розміщувати м'яку п'єзокераміку біля закріплення. Без жорсткого закріплення такі п'єзоелементи зазнаватимуть згину.

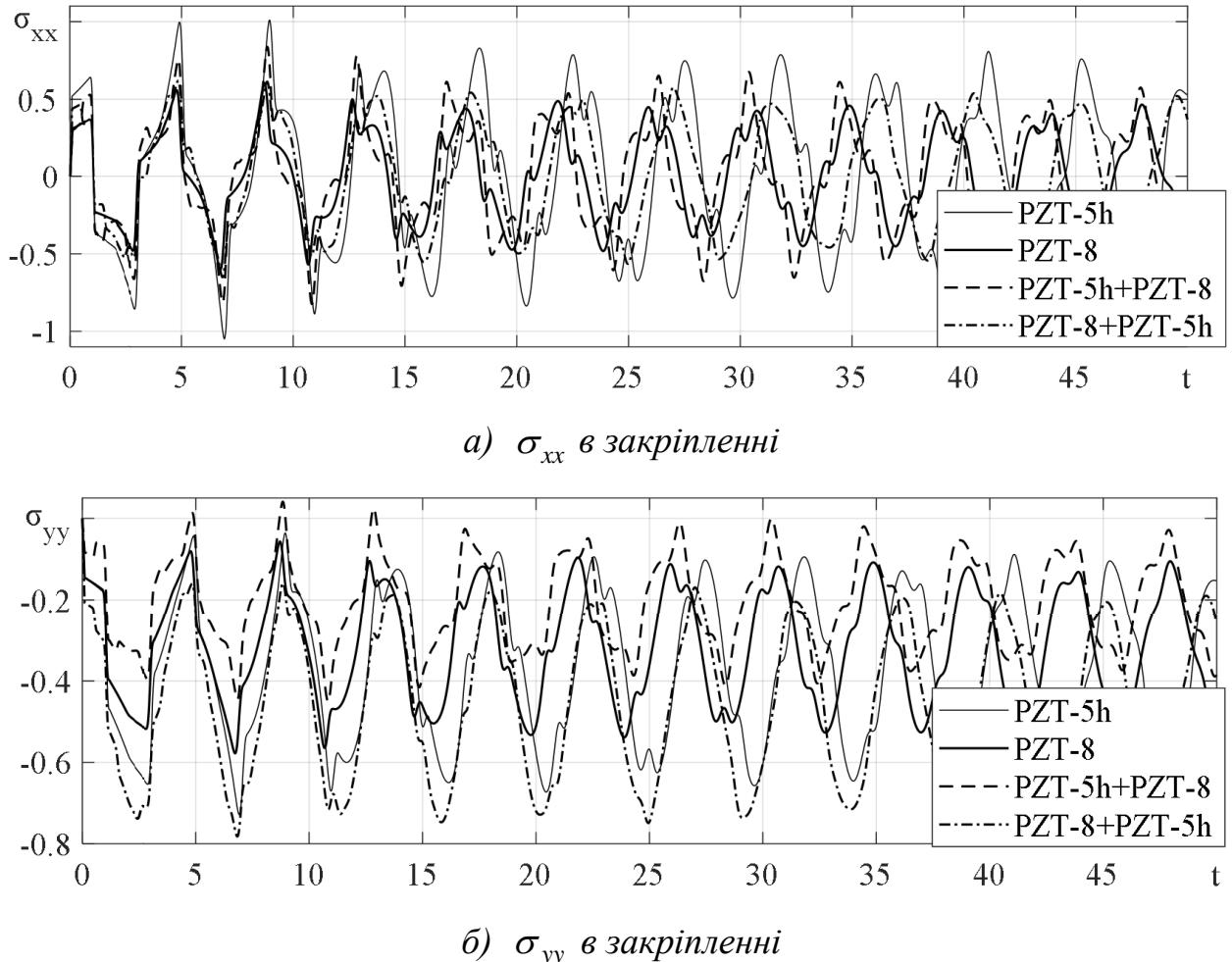


Рис. 4.16. Напруження в одношарових та двошарових п'єзоелементах

Дослідимо, як поверхня розділу впливає на електромеханічний стан п'єзоелемента. На рис. 4.17 наведено розподіл трансверсальних напружень σ_{yy} за товщиною двошарового елемента PZT-5h+PZT-8 в різні моменти часу. Напруження σ_{yy} біля закріплення набувають значно вищих значень, ніж на зовнішній поверхні, і змінюються стрибкоподібно на поверхні розділу матеріалів. Похилі ділянки відповідають біжучим хвилям. Біжучі хвилі виникають одночасно в обох шарах та рухаються до закріплення.

Рис. 4.18 ілюструє розподіл електричного потенціалу для двошарових тіл

за товщиною при $t=1$. Напруженість електричного поля $E = \partial\varphi/\partial x$ є тангенсом кута нахилу ділянок. Робимо висновок, що в м'якій п'єзокераміці напруженість електричного поля вища більше ніж в два рази, ніж в твердій.

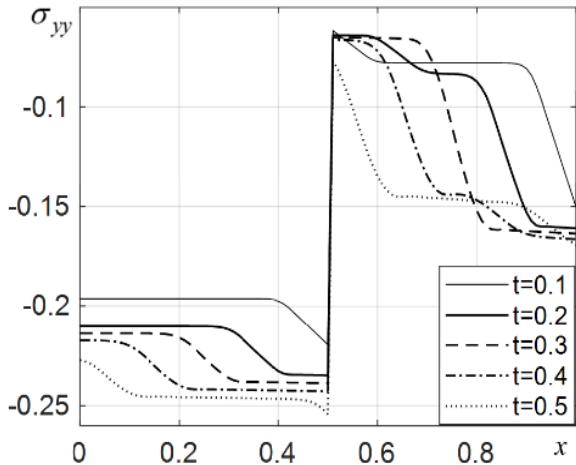


Рис. 4.17. Напруження σ_{yy} в різні моменти часу

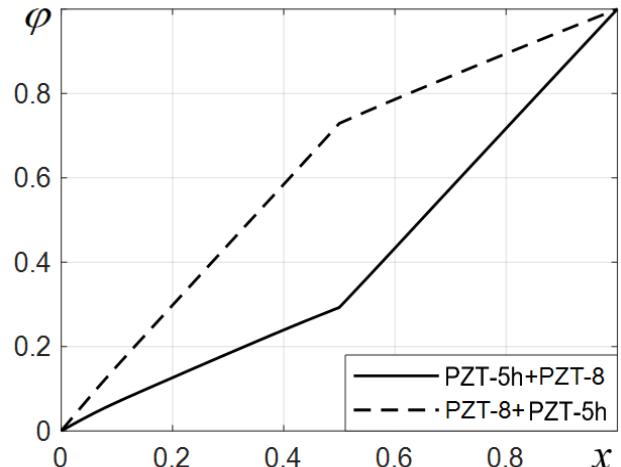


Рис. 4.18. Розподіл електричного потенціалу в двошарових елементах

П'єзоелемент з ФНМ. Розглянемо п'єзокерамічний плоский шар, циліндр та кулю, виконані з функціонально-неоднорідного матеріалу, з закріпленою внутрішньою поверхнею та вільною від механічних навантажень зовнішньою поверхнею $P_2 = 0$. Електричне навантаження описане вище.

В ФНМ комбінується м'яка PZT-5h та тверда PZT-8 п'єзокераміка. Функція зміни матеріальних характеристик за товщиною задається у вигляді квадратичної функції

$$p(x) = 2b \frac{p_1 + p_2}{h} x(x-h) + \frac{p_2 - p_1}{h} x + p_1, \quad (4.51)$$

де $x = r - R_1$; p_1, p_2 – табличні значення матеріальних характеристик для першого та другого матеріалів відповідно; b – параметр відхилення від лінійного розподілу. При $b=0$ отримуємо лінійний розподіл.

Важливо також проаналізувати тіло, що біля закріплення має шар м'якої п'єзокераміки товщиною h_1 , а зовні шар твердої п'єзокераміки товщиною h_2 з

функціональним переходом між ними. Для неперервності похідних формулу ФН шару зручно вибирати в вигляді полінома третього ступеня

$$p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D. \quad (4.52)$$

Коефіцієнти в (4.52) визначаються з умов

$$p(h_1) = p_1, \quad p(h-h_2) = p_2, \quad p'(h_1) = 0, \quad p'(h-h_2) = 0.$$

Розглянуті варіанти розподілу матеріальних характеристик за товщиною на прикладі діелектричної проникності ϵ_{33} проілюстровані на рис. 4.19 та описують перехід від PZT-5h біля закріплення до PZT-8 зовні.

Оцінимо вплив функціональної неоднорідності матеріалу за допомогою рис. 4.20, на якому наведені переміщення зовнішньої поверхні для двошарового тіла, тришарового з внутрішнім ФН шаром та товщиною зовнішніх шарів $h_1 = h_2 = 0,3$, та ФН тіла з лінійним та параболічним розподілом при $y = 0,3$. З рисунку видно, що переміщення в двошаровому та тришаровому тілі мало відрізняються, тоді як в ФНМ отримуємо підвищення амплітуди коливань на 10%. Частота коливань в лінійному ФНМ нижча порівняно з двошаровим на 2,5%, для параболічного ФН розподілу – на 5%.

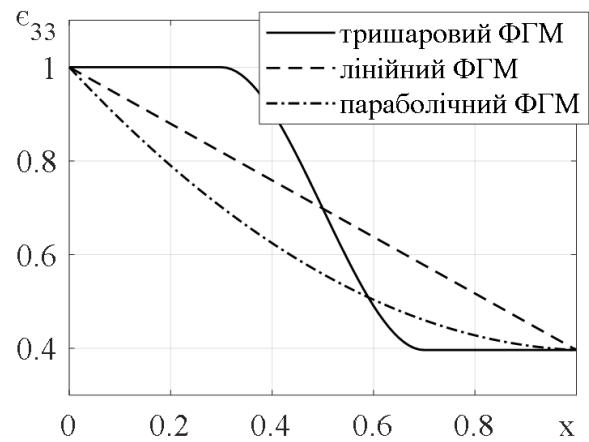


Рис. 4.19. Розглянуті варіанти ФНМ

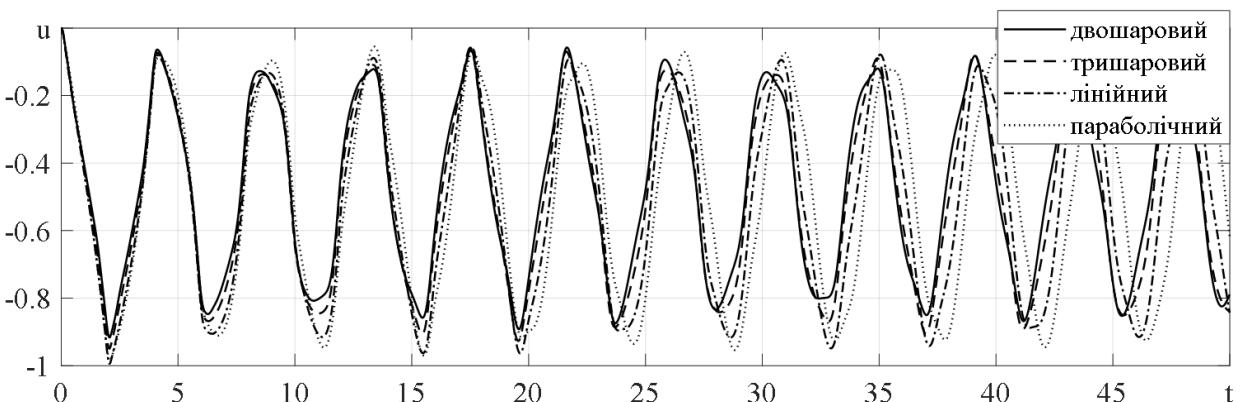


Рис. 4.20. Переміщення зовнішньої поверхні шару з ФНМ

Проаналізуємо поширення електропружної хвилі в ФН матеріалі з розподілом (4.51) при $b = 0,3$ (рис. 4.21). В момент прикладання імпульсного електричного навантаження в тілі виникають статичні напруження від п'єзоефекту, а від вільної поверхні починає поширюватися хвиля нульових напружень σ_{xx} . На графіку σ_{yy} спостерігається суттєва нелінійність внаслідок неоднорідності матеріалу.

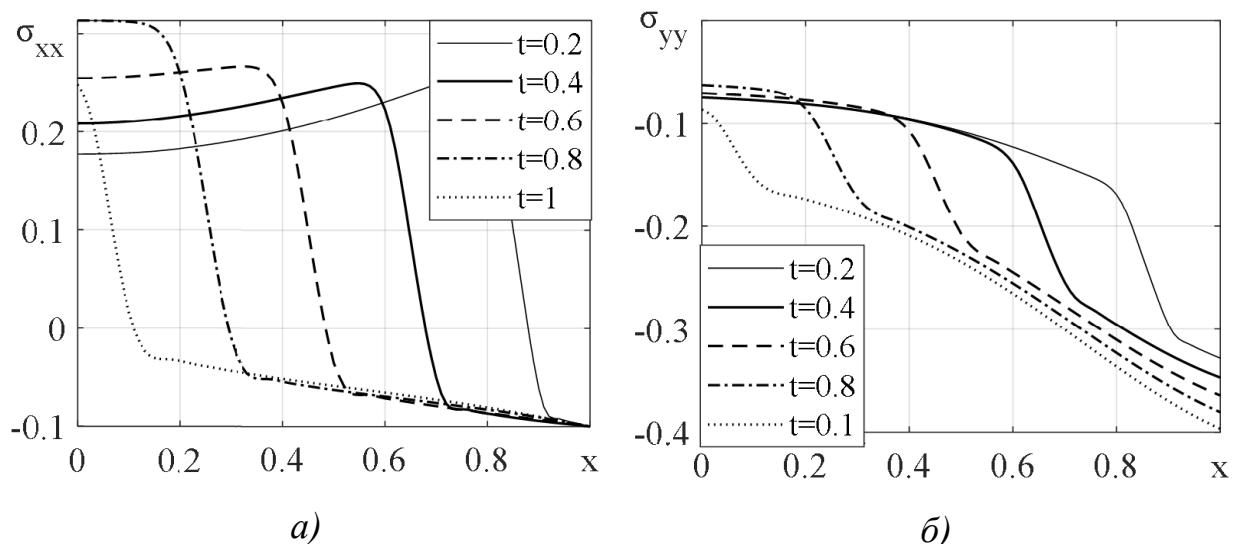


Рис. 4.21. Поширення збурень в ФН шарі

Дослідимо коливання порожністих радіально поляризованих циліндрів ($N = 1$) та сфер ($N = 2$) з безрозмірними радіусами $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, виготовлених з описаних вище функціонально неоднорідних матеріалів. Внутрішня поверхня тіл закріплена, а зовнішня — вільна. Електричне навантаження $V(t) = H(t)$.

Переміщення зовнішніх поверхонь циліндрів наведено на рис. 4.22. З рисунку робимо висновок, що функціональна неоднорідність підвищує амплітуду коливань до 30%. Розглянутий циліндр має досить малий внутрішній радіус, для циліндрів з більшим внутрішнім радіусом вплив описаного ефекту буде меншим і прямуватиме до плоского шару (рис. 4.20). Найбільші переміщення виникають при лінійному розподілі. При параболічному розподілі спостерігається подальше зменшення швидкості поширення та амплітуди коливань.

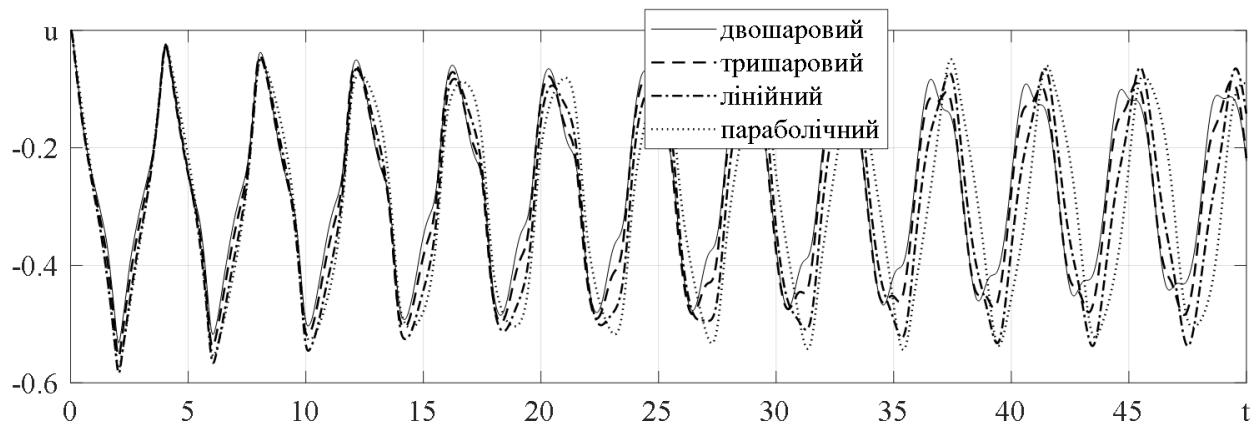


Рис. 4.22. Переміщення зовнішньої поверхні ФН циліндрів

Для сфери (рис. 4.23) таких результатів не спостерігається. Амплітуда коливань найвища для параболічного та лінійного розподілу, маємо перевагу в 12% відносно двошарового елемента. Швидкість поширення хвилі змінюється так само, як і для плоского тіла та циліндра.

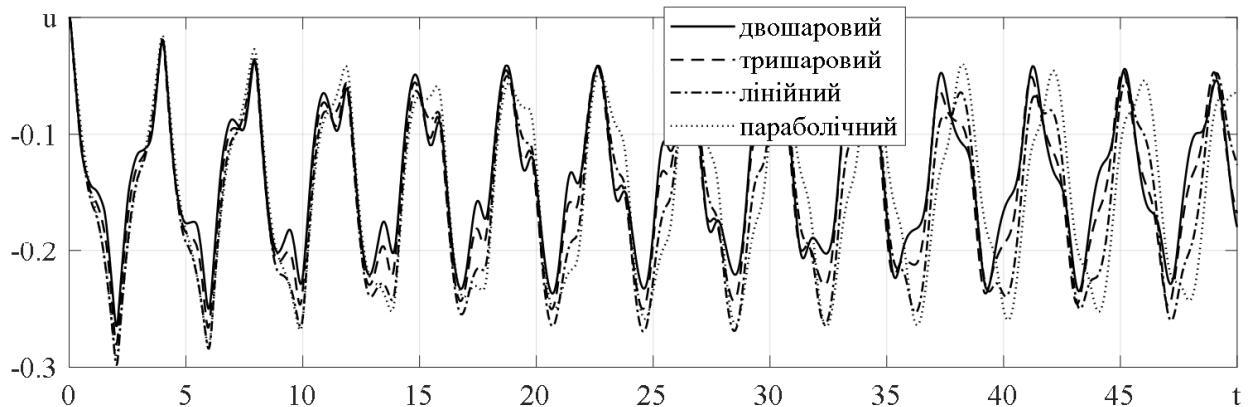


Рис. 4.23. Переміщення зовнішньої поверхні ФН сфери

З розглянутих варіантів функціональної неоднорідності матеріалу найкращий результат показав параболічний розподіл за товщиною: для плоского шару отримуємо підвищення амплітуди коливань на 10%, для циліндра 30%, для кулі 12% порівняно з двошаровим тілом.

Запропонована методика може бути застосована для дослідження коливань тіл різної геометрії з суттєво неоднорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, включаючи багатошарові тіла з активних, пасивних та функціонально-неоднорідних матеріалів.

4.3.2. Порівняння альфа- та бета-демпфувань неоднорідних тіл при електричних та механічних збуреннях

Розглянемо п'єзокерамічні порожнисті радіально поляризовані циліндри ($N = 1$), які виготовлені з п'єзокераміки PZT-4 або функціонально-неоднорідного матеріалу на основі PZT-4 (Додаток Б). Застосована у виразах функція моделює неоднорідність заповнення форми порошковою сумішшю складових цирконат-титанат свинцю на етапі виготовлення елемента конструкції з розрахунком на відхилення його вихідних параметрів від табличних в межах 20% за рахунок неоднорідного пресування. При цьому при усередненні за об'ємом матеріальні характеристики дорівнюють табличним. Розподіл може бути обраний у вигляді іншої функції та описувати комбінацію різних матеріалів, що буде відповідати технічним вимогам конкретного конструктивного елементу та технологічним можливостям його виробника.

Вважається, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень ($P_1 = P_2 = 0$), а до струмопровідних покрівель п'єзоелементів підводиться ступінчатий одиничний електричний сигнал ($V(t) = H(t)$, $H(t)$ – функція Гевісайда). Геометрія п'єзоелементів визначається безрозмірними параметрами R_1 і R_2 .

При моделюванні функціональної неоднорідності матеріальних характеристик вважалося, що їх розподіл за товщиною відбувається за параболічним законом з множником

$$f(r) = \frac{4b}{h^2} \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 + 1 - b, \quad (4.53)$$

де b – відхилення матеріальної характеристики від табличного значення на центральних волокнах в відсотках; $x = r - R_1$ – товщинна координата.

На рис. 4.24 наведено криві коливань зовнішніх поверхонь циліндра з радіусами $R_1 = 1$ і $R_2 = 2$. При $b = 0$ маємо однорідний матеріал циліндра, а при $b = 10\%$ та 20% всі матеріальні характеристики з таблиці змінюються за законом (4.53) відносно табличного значення.

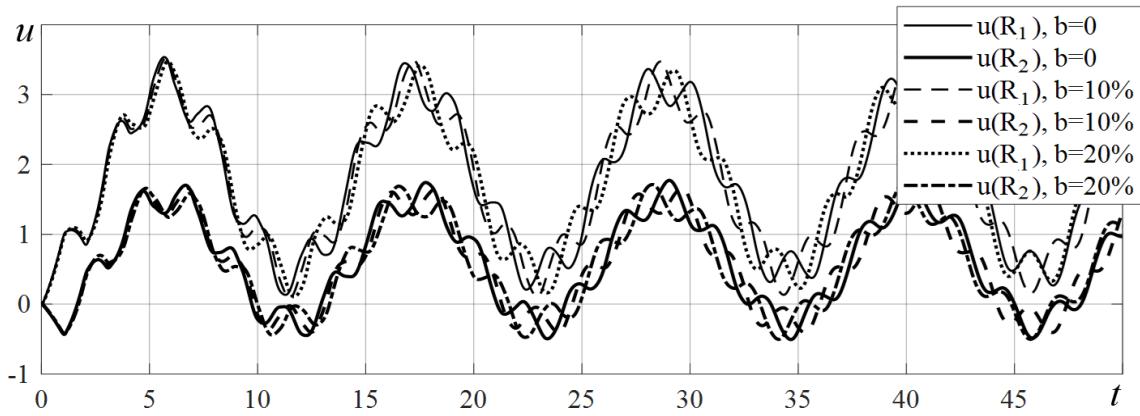


Рис. 4.24. Коливання зовнішніх поверхонь ФН циліндра

З рис. 4.24 бачимо, що функціональна неоднорідність впливає лише на швидкість поширення товщинних коливань. В даному випадку в зв'язку зі зменшенням значень матеріальних характеристик відносно однорідного тіла швидкість поширення зменшується. Амплітуда коливань серединної поверхні циліндра не залежить від b , а період зростає на 0,4% на кожні 10% відхилення.

Порівняння розглянутих вище моделей затухання проведемо за допомогою рис. 4.25, а наведено нестационарні коливання зовнішньої поверхні однорідного циліндра з радіусами $R_1 = 3$ і $R_2 = 4$ з врахуванням альфа-демпфування за Релеєм при різних значеннях коефіцієнта затухання α_d . Бачимо, що при $\alpha_d = 0,02$ практично повне затухання відбувається при $t_3 = 500$; при $\alpha_d = 0,01$ – $t_3 = 900$, а при $\alpha_d = 0,005$ – $t_3 = 1200$. Безрозмірна одиниця часу для тіла з товщиною стінки 1 см відповідає $2,2 \cdot 10^{-6}$ с, тобто час затухання, відповідно, складає 1,1 мс, 1,98 мс і 3,3 мс. Коливання в'язкопружного тіла прямують до розв'язку відповідної статичної задачі (рис. 4.26) $u(R_2) = 2,4$, при цьому зменшення амплітуди відбувається за експоненціальним законом.

На рис. 4.25, б зображені коливання зовнішньої поверхні того ж циліндра з врахуванням бета-демпфування за Релеєм (в'язкопружної моделі Фойгта) при різних значеннях коефіцієнта затухання β_d . Бачимо, що на дослідженному інтервалі часу амплітуда зменшилася і прямує до розв'язку задачі у статичній постановці. За час спостереження (2,64 мс) при $\beta_d = 0,01$ амплітуда коливань зменшилася на

30%; при $\beta_d = 0,02$ – на 53 %, а при $\beta_d = 0,03$ – на 67 %. На розглянутому інтервалі маємо 42 цикла коливань. Тобто можна спрогнозувати, що для $k_{33} = 0,03$ з моменту часу $t_3 = 2200$ відхилення відносно статичного значення не буде перевищувати 3%. Період коливань в розмірних величинах склав $61,6 \cdot 10^{-6}$ с, частота – 16,2 кГц . Амплітуди коливань без врахування дисипативних властивостей також зменшилися, що свідчить про в'язкість чисельної схеми.

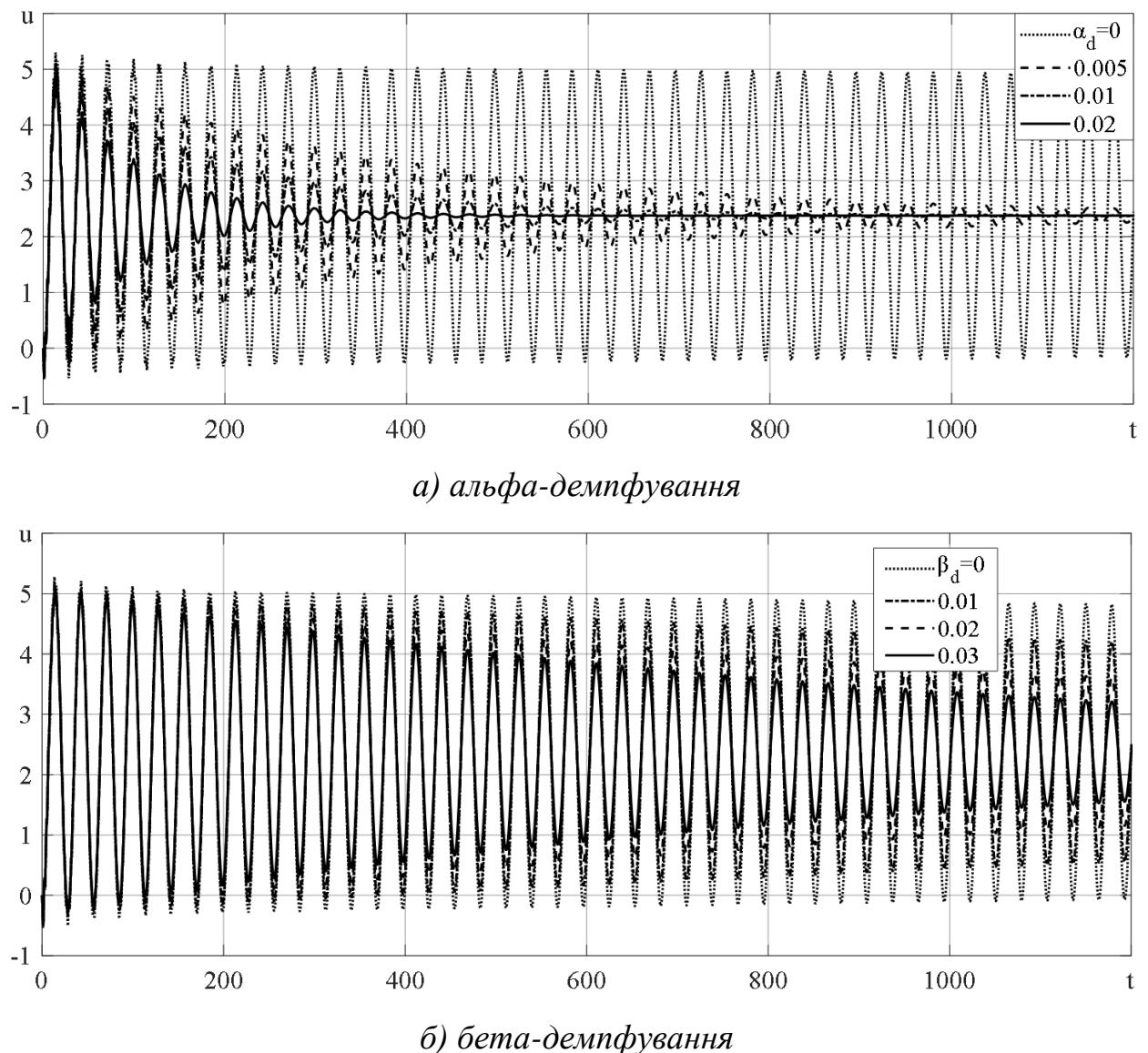


Рис. 4.25. Коливання ФН циліндра з врахуванням демпфування коливань

На рис. 4.26 наведено результати статичного розрахунку для описаного вище циліндра при навантаженні одиничною різницею потенціалів.

Маємо на внутрішній поверхні $u(R_1) = 3,6$, а на зовнішній поверхні $u(R_2) = 2,37$. Порівнюючи рис. 4.25 та рис. 4.26, можна зробити висновок, що при затуханні електропружні коливання прямують до статичного розв'язку, що повністю узгоджується з класичними визначеннями з теорії коливань і свідчить про коректність отриманих результатів.

Проведемо аналіз стандартних характеристик затухання для результатів, наведених на рис. 4.25. Логарифмічний декремент визначаємо за формулою (2.70). Рис. 4.27 ілюструє залежність логарифмічних декрементів від часу при альфа-демпфуванні (а) та бета-демпфуванні (б).

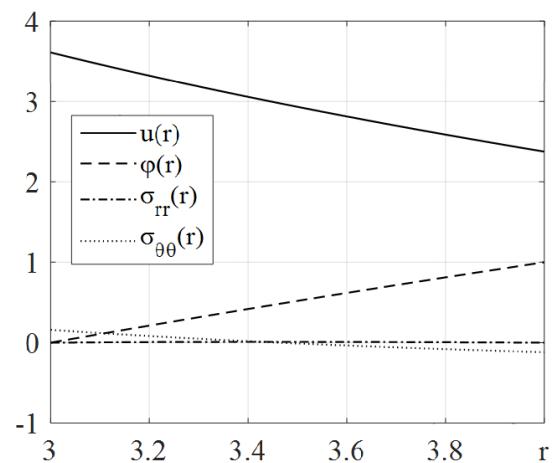


Рис. 4.26. Статичний розв'язок при електричному навантаженні

уздожується з класичними визначеннями з теорії коливань і свідчить про коректність отриманих результатів.

Проведемо аналіз стандартних характеристик затухання для результатів, наведених на рис. 4.25. Логарифмічний декремент визначаємо за формулою (2.70). Рис. 4.27 ілюструє залежність логарифмічних декрементів від часу при альфа-демпфуванні (а) та бета-демпфуванні (б).

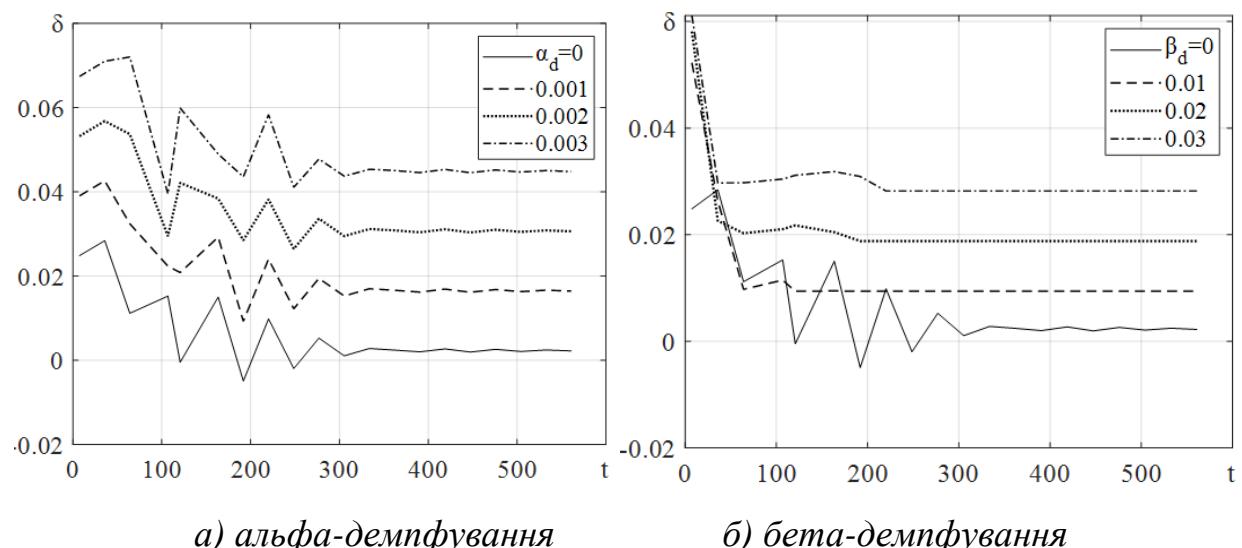


Рис. 4.27. Логарифмічні декременти коливань

У випадку альфа-демпфування маємо нестационарні флюктуації кривих на інтервалі часу до $t = 300$ внаслідок високочастотних коливань, далі криві коливань

згладжуються (враховуючи подібність кривих при $\alpha_d = 0$, згладжування відбувається через в'язкість схеми) і маємо сталій декремент, пропорційний до коефіцієнта демпфування. Таким чином, можемо стверджувати, що при $t > 300$ маємо усталений режим затухання коливань.

Також на цьому рисунку суцільною лінією наведено декремент коливань без врахування демпфування коливань, що описує в'язкість чисельної схеми. Крива декременту чисельної схеми при $t < 300$ має флюктуації, що пов'язані з пробігом товщиної хвилі. При $t > 300$ декремент чисельної схеми є сталою величиною $\delta_c = 0,0028$. При бета-демпфуванні (модель затухання Фойгта) лінійна ділянка нестационарних збурень обмежується $t = 100$, що свідчить про демпфування високочастотних коливань. При $t > 200$ маємо сталі декременти коливань, пропорційні до коефіцієнта затухання.

Проаналізуємо залежність декрементів коливань від розмірів п'єзоелемента. Розглядаються циліндричні п'єзоелементи з однаковою товщиною стінки $h = 1$ та різними радіусами серединної поверхні. Рис. 4.28 ілюструє залежність логарифмічних декрементів коливань від радіусу серединної поверхні при альфа-демпфуванні (а) та бета-демпфуванні (б).

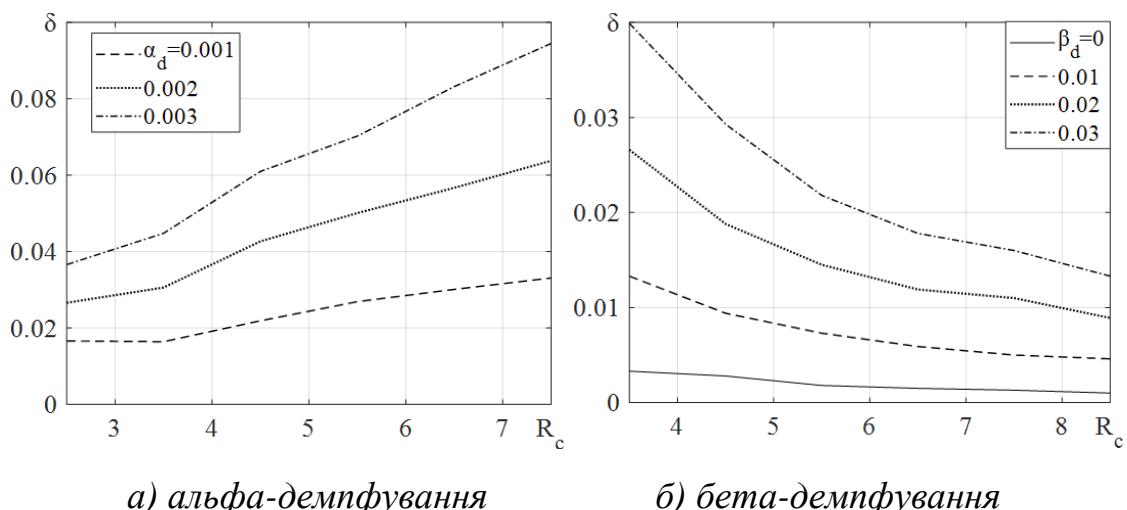


Рис. 4.28. Логарифмічні декременти коливань для циліндрів різної геометрії

В обох випадках спостерігається пропорційність декременту до коефіцієнта демпфування та незначна нелінійність в залежності від радіусу циліндра. Бачимо, що зі зростанням розмірів і товщини стінки при бета-демпфуванні декременти зменшуються, при альфа-демпфуванні — збільшуються. Це пов'язано з тим, що при зростанні радіусу циліндра власна частота коливань його стінки зменшується, тобто рис. 4.28 демонструє частотну залежність логарифмічного декремента при сталому коефіцієнти демпфування.

Генерація напруги при механічному навантаженні п'єзокерамічного циліндра ілюструє собою пряний п'єзоэффект. Результати статичного розрахунку при навантаженні одиничним зовнішнім тиском $P_2 = 1$ наведено на рис. 4.29. Маємо переміщення на зовнішніх поверхнях $u(R_1) = 17,74$, $u(R_2) = 16,42$. Різниця електричного потенціалу на електродах $V = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = -1,53$.

Динамічні криві переміщень зовнішньої поверхні циліндра (а) та згенерованої напруги між його розімкненими електродами (б) наводяться на рис. 4.30. В даних розрахунках реалізована модель альфа-демпфування при значеннях зовнішнього тиску $P_1 = 0$, $P_2 = H(t)$ та електричній граничній умові (4.16).

На рис. 4.30 а) спостерігаються пульсуючі коливання зовнішньої поверхні. Характер затухання при розглянутих значеннях коефіцієнта демпфування α_d повністю співпадає з рис. 4.25, а. Переміщення прямує до значення $u(R_2) = 16,4$, а електричний потенціал до $\varphi(R_2) = -1,52$, що повністю відповідає результатам, наведеним на рис. 4.28.

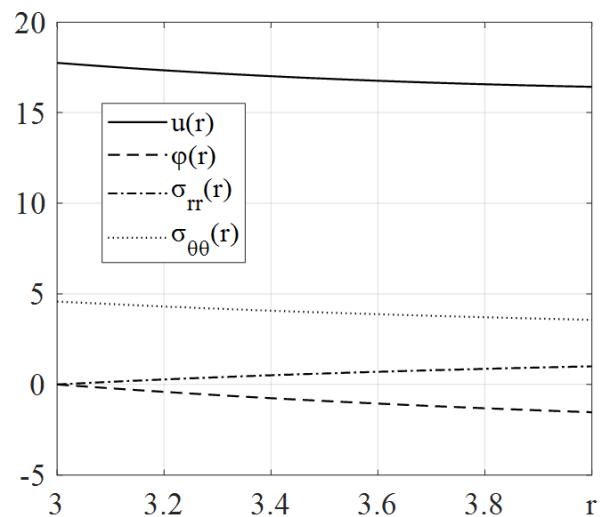
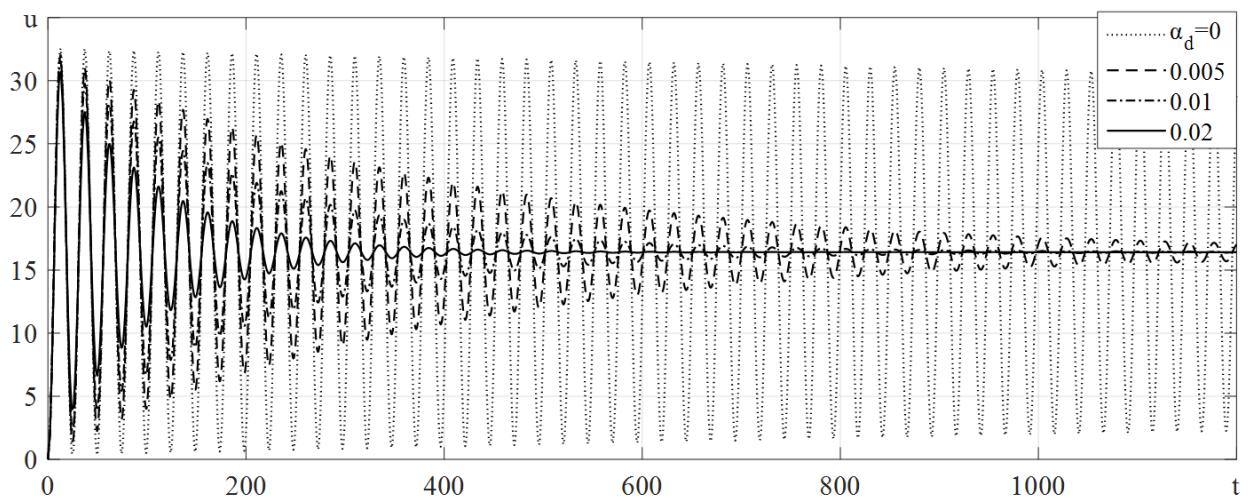


Рис. 4.29. Статичний розв'язок при механічному навантаженні

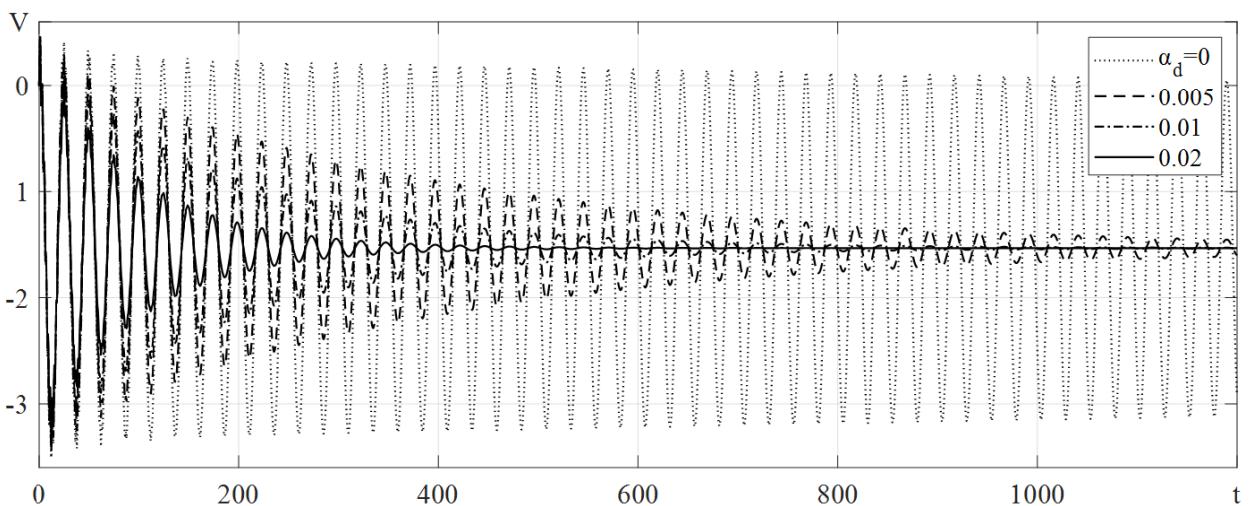
Маємо переміщення на

зовнішніх поверхнях $u(R_1) = 17,74$, $u(R_2) = 16,42$. Різниця електричного потенціалу на електродах $V = \varphi(R_2) - \varphi(R_1) = -1,53$.

На рис. 4.30 а) спостерігаються пульсуючі коливання зовнішньої поверхні. Характер затухання при розглянутих значеннях коефіцієнта демпфування α_d повністю співпадає з рис. 4.25, а. Переміщення прямує до значення $u(R_2) = 16,4$, а електричний потенціал до $\varphi(R_2) = -1,52$, що повністю відповідає результатам, наведеним на рис. 4.28.



a)



б)

Рис. 4.30. Коливання ФН циліндра з врахуванням демпфування за Релеєм при механічному збуренні

Період механічно обумовлених коливань менший, ніж при електричному навантаженні, приблизно на 12%. Частота коливань 18,5 кГц. Зменшення амплітуди відбувається за нелінійною залежністю. Максимальні переміщення, що виникають при описаному ступінчатому навантаженні, вдвічі вищі за значення при статичному розв'язку. Те саме можна сказати і про механічні напруження. При дослідженні декрементів маємо подібні до описаних вище властивості.

4.3.3. Нестаціонарні коливання функціонально-неоднорідних циліндрів з врахуванням чотирипараметричної моделі втрат та впливу акустичного середовища

Розглянемо п'єзокерамічні порожнисті циліндри ($N = 1$), які виготовлені з функціонально-неоднорідного матеріалу, що є композитом радіально поляризованої п'єзокераміки PZT-4 та полімеру вініліденфториду (PVDF). Позначимо за p_1 набір матеріальних характеристик для п'єзокераміки, p_2 — відповідні матеріальні характеристики для полімеру. Матеріальні характеристики матеріалів, що використовуються, наведено в Додатку В та Г дисертації.

Механічні, електричні та п'єзоелектричні коефіцієнти демпфування для п'єзокераміки позначимо за β_{d1} , γ_{d1} , λ_{d1} . Оскільки полімер є більш в'язким матеріалом, ніж п'єзокераміка, та має відносно низькі діелектричні та п'єзоелектричні характеристики, вважаємо, що $\beta_{d2} = 5\beta_{d1}$; $\gamma_{d2} = 5\gamma_{d1}$; $\lambda_{d2} = 5\lambda_{d1}$.

Закон зміни матеріальних характеристик за товщиною приймемо у вигляді

$$p(x) = p_1(1 - b(x)) + p_2b(x), \quad (4.54)$$

де $b(x)$ — об'ємна частка полімеру, що визначається степеневою функцією $b(x) = a_0 + b_f (x/h)^{k_f}$; $x = r - R_1$ — товщинна координата; $h = R_2 - R_1$ — товщина стінки п'єзоелемента; a_0 — об'ємна частка полімеру на поверхні $x = 0$; b_f — коефіцієнт неоднорідності; k_f — ступінь неоднорідності. При $a_0 = 0$, $b_f = 0,5$ функція (4.54) описує перехід від 100% п'єзокераміки на внутрішній поверхні циліндра до 50% п'єзокераміки, 50% полімеру на зовнішній поверхні. Функціональний розподіл (4.54) застосовується до всіх матеріальних характеристик композиту, включаючи густину та коефіцієнти демпфування.

Вважається, що циліндричні поверхні тіла вільні від механічних навантажень, а до струмопровідних покрівель п'єзоелементів раптово прикладається напруга $V_0 = 100B$. Проводяться обчислення за допомогою явної та неявної чисельної схем, а також методом скінченних елементів з врахуванням матеріально

залежного бета-демпфування. Результати наводяться в розмірному вигляді.

На рис. 4.31 наведено залежність від товщини координати основних нормованих матеріальних характеристик при $a_0 = 0$, $b_f = 0,5$, $k_f = 2$.

Вплив різних механізмів дисипації енергії проаналізуємо за допомогою рис. 4.32, на якому наводяться переміщення зовнішньої поверхні циліндра з радіусами $R_1 = 2 \text{ см}$, $R_2 = 2,5 \text{ см}$. Коефіцієнти демпфування $\bar{\beta}_{d1}$, $\bar{\gamma}_{d1}$, $\bar{\lambda}_{d1}$ для першого матеріалу в нормованих змінних (4.5) приймемо рівними 0,01, що в розмірних величинах відповідає значенню $2,2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Перша (пунктирна) крива відповідає недемпфованому аналізу. Суцільною лінією (друга крива) на рис. 4.33 відображені результати, отримані методом скінченних різниць (МСР) за допомогою неявної чисельної схеми з врахуванням механічних втрат при $\bar{\beta}_{d1} = 0,01$. Штрихова крива (третя крива) на цьому рисунку отримана при $\bar{\beta}_{d1} = 0,01$, $\bar{\gamma}_{d1} = 0,01$, $\bar{\lambda}_{d1} = 0$, штрих-пунктирна (четверта крива) — при $\bar{\beta}_{d1} = 0,01$, $\bar{\gamma}_{d1} = 0,01$, $\bar{\lambda}_{d1} = 0,01$. Друга і третя криві практично повністю співпадають між собою (маємо відхилення в межах 0,5%). Тонка суцільна крива відповідає розв'язку, отриманому МСЕ для функціонально-неоднорідного циліндра при $\beta_{d1} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Слід зауважити, що врахування коефіцієнтів електричних та п'єзоелектричних демпфувань в сучасних програмних продуктах, які реалізують МСЕ для розв'язання задач нестационарної електропружності, не впроваджено.

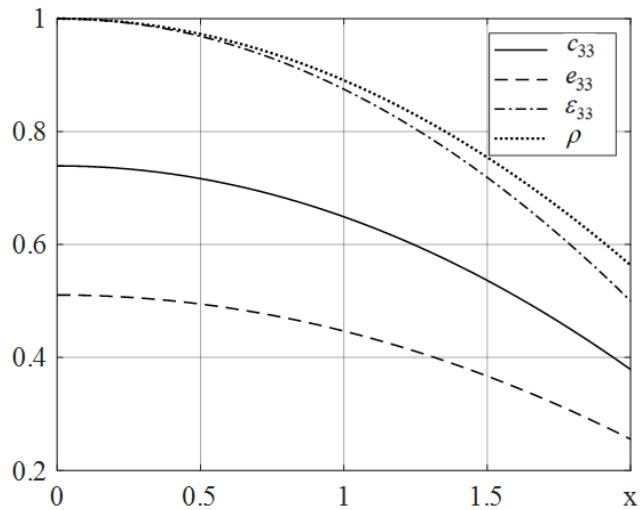


Рис. 4.31. Розподіл ФН характеристик за товщиною

218

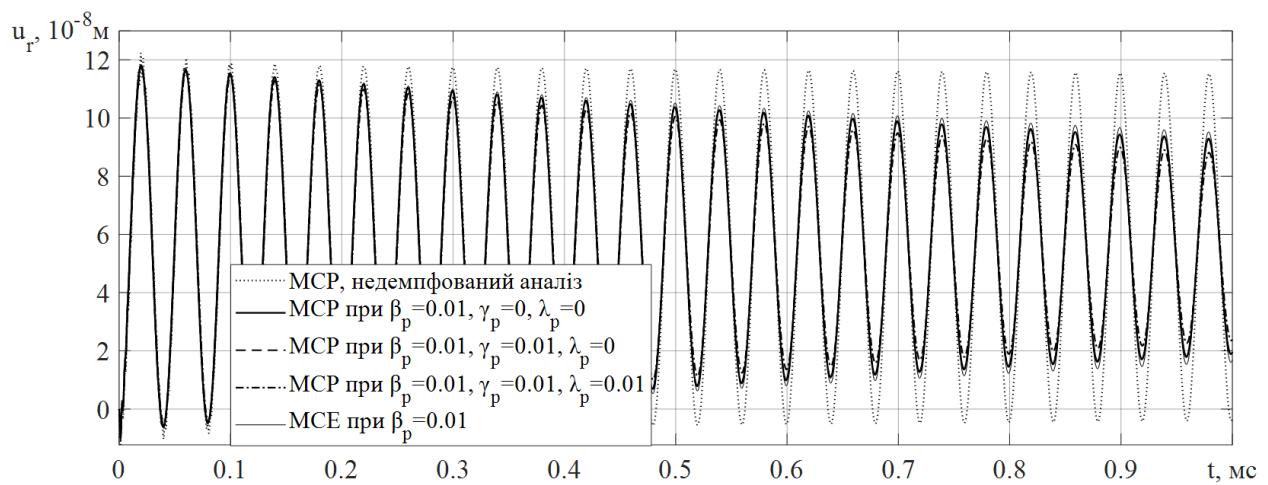


Рис. 4.32. Коливання ФН циліндра з врахуванням втрат енергії

Наведені на рис. 4.32 криві мають сталі логарифмічні декременти коливань. Для чисельної схеми маємо декремент $\delta_c = 0,0022$, при бета-демпфуванні $\delta_\beta = 0,0219$, з врахуванням діелектричних втрат $\delta_{\beta\gamma} = 0,0217$, при наявності п'єзоелектричних втрат $\delta_{\beta\lambda} = 0,0271$. Робимо висновок, що механізм впливу електричних втрат в п'єзоелементах аналогічний до механічних втрат: спостерігається зниження екстремальних значень переміщень без їх зміщення в часі. Таким чином, модель Кельвіна-Фойгта при обґрунтованому підборі коефіцієнта демпфування надає адекватні результати та є достатнім механізмом опису затухання коливань в п'єзоелементах при нестационарних навантаженнях.

Проведено дослідження коливань п'єзоелемента в залежності від вмісту полімеру, який задається параметром b_f . На рис. 4.33 наведено криві коливань зовнішніх поверхонь циліндрів з розмірами $R_1 = 3 \text{ см}$, $R_2 = 4 \text{ см}$ при різних значеннях параметра b_f . Враховується механічне затухання при $\bar{\beta}_{dl} = 0,01$. Перша крива при $b_f = 0$ описує коливання однорідного циліндра з PZT-4. Наступні криві відповідають ФНМ (4.54), в якому поступово зростає частка полімеру на зовнішній поверхні і досягає 100% для останньої кривої. При цьому максимальні переміщення зменшуються на 30%, швидкість пробігу хвилі зростає на 10%.

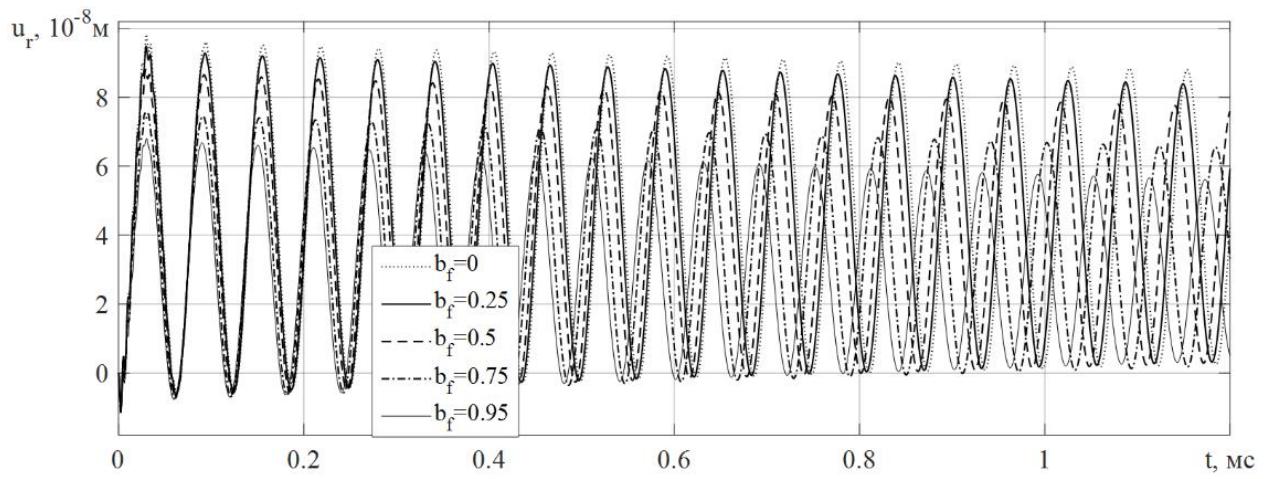


Рис. 4.33. Коливання зовнішньої поверхні ФН циліндра

Проаналізуємо залежність логарифмічного декремента коливань від розмірів п'єзоелемента. Порівнюються коливання циліндрів з різним коефіцієнтом неподнорідності b_f . Спостерігається зростання декрементів зі зростанням частки полімеру, що задається коефіцієнтом b_f , та зменшення декремента коливань зі зростанням розмірів п'єзоелемента. Це пов'язано з тим, що при зростанні радіусу циліндра власна частота коливань його стінки зменшується, тобто рис. 4.34 демонструє частотну залежність логарифмічного декремента при сталому коефіцієнті демпфування.

Вплив в'язкопружних властивостей матеріалу та акустичного середовища на коливання п'єзоелемента оцінимо на прикладі п'єзокерамічної кулі з ФНМ (4.54) при $b_f = 0.5$, $k_f = 2$. Параметри акустичного середовища становлять $\rho_a = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c_a = 1500 \text{ м}/\text{с}$ (вода). На рис. 4.35 наведено криві переміщень точки $r = R_2$ кулі з вільною від механічних навантажень зовнішньою поверхнею при різних значеннях коефіцієнта $\bar{\beta}_d$, а також з врахуванням взаємодії з акустичним

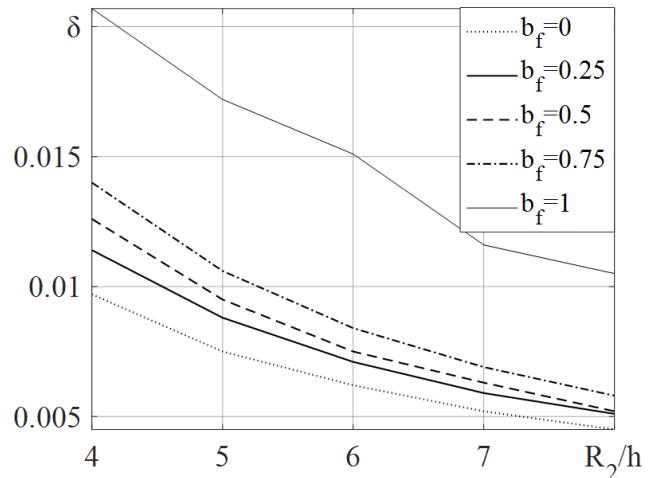


Рис. 4.34. Логарифмічний декремент коливань

середовищем без врахування механічних втрат.

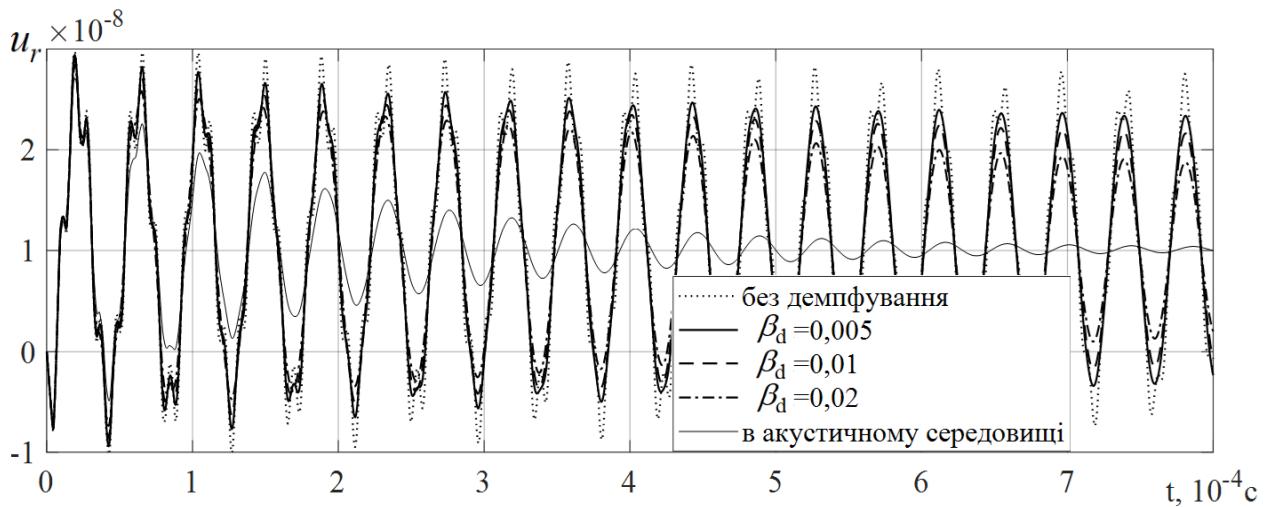


Рис. 4.35. Затухання коливань при врахуванні механічних втрат та акустичного середовища

Якщо за критерій повного затухання коливань при дії електричного навантаження східчастого профілю прийняти зменшення амплітуди коливань до 5% від початкового значення, то для сферичного п'єзоперетворювача у воді таке затухання відбулося за 0,8 мс (рис. 4.35). В газоподібному акустичному середовищі результати розрахунку переміщень фактично не відрізняються від результатів для п'єзоелемента з вільними від механічних навантажень поверхнями. При $\bar{\beta}_d = 0,01$ на зазначеному вище інтервалі часу амплітуда коливань зовнішньої поверхні сферичного п'єзоперетворювача при $P_i(t) = 0$ зменшилася лише на 25% (штрихова крива на рис. 4.35). Відповідний логарифмічний декремент коливань $\delta_\beta = 0,0209$, в акустичному середовищі без врахування механічних втрат $\delta_a = 0,4$. Відповідний час затухання (1.14) $\tau_\beta = 1,84 \text{ мс}$, $\tau_a = 0,096 \text{ мс}$. Отже, при заданих параметрах затухання за рахунок механічних втрат потребує майже у 20 разів більше часу у порівнянні з впливом акустичного середовища.

Можемо зробити висновок, що вплив електричних та п'єзоелектричних втрат на коливання малий в порівнянні з механічними, тому врахування останніх за в'язкопружною моделлю Кельвіна-Фойгта при експериментально обґрунтованих коефіцієнтах демпфування дозволяє моделювати коливання з достатньою

точністю. Затухання коливань зануреного у рідину п'єзовипромінювача при дії електричного навантаження східчастого профілю відбувається на порядок швидше, ніж у випадку вільних від механічних навантажень поверхонь з врахуванням механічних втрат.

4.4. Нестаціонарні коливання тонких круглих та кільцевих в плані п'єзоелектричних пластин

П'єзоелектричні елементи пластинчастої форми є найбільш поширеними електромеханічними перетворювачами в широкому частотному діапазоні і при імпульсних електричних і механічних збуреннях [37, 56, 123, 182, 271, 307 та ін.]. Експериментальним і теоретичним дослідженням їх динамічних характеристик присвячені численні наукові роботи. Основна увага в цих дослідженнях приділяється усталеним гармонійним коливанням і визначенню резонансних частот [18, 120, 194, 252, 274, 298, 299, 315 та ін]. Питання нестаціонарних коливань круглих дисків без урахування пов'язаності полів розглядалися в [140, 138]. Коливання плоских поляризованих за товщиною п'єзокерамічних тіл при нестаціонарних навантаженнях вивчалися в [6, 34, 46, 116, 128 та ін.]. Вплив конфігурації перетворювачів у площині на протікання хвильових процесів при цьому, природно, не враховувався. У разі тонких перетворювачів це упущення можна усунути, якщо обмежитися теорією їх механічного деформування в наближенні плоского напруженого стану і лінійним розподілом електричного потенціалу за товщиною. У такій постановці розглянуто динамічний осесиметричний електромеханічний стан поляризованих за товщиною п'єзокерамічних тонких круглих та кільцевих пластин при електричному збуренні. При механічному збуренні напруження σ_{zz} вважаються сталими.

4.4.1. Планарні коливання пластини при електричному збуренні

Розглянемо поляризовану за товщиною тонку п'єзокерамічну пластину з електродованими площинами $z = \pm h/2$. Механічні напруження σ_r , σ_θ , при осесиметричній деформації визначаються [120, 123] через переміщення u_r та напруженість електричного поля E_z за формулами

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E) d_{31} E_z \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E) d_{31} E_z \right),\end{aligned}\quad (4.55)$$

де s_{11}^E , s_{12}^E — обернені до модулів пружності матеріальні константи при постійній напруженості електричного поля, $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

Рівняння коливань

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

після підстановки до нього формул (4.55) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (4.56)$$

де $a = 1 / \sqrt{(1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho}$ — швидкість хвилі у пластині.

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини та їх швидкості

$$u_r|_{t=0}^0 = u(r), \quad \partial_t u_r|_{t=0}^1 = u'(r). \quad (4.57)$$

Для кільцевої пластини $R_0 < r < R_1$ можливі граничні умови на контурах $r = R_0$ і $r = R_1$ вибираємо по одній з двох альтернативних пар

$$u_r(R_0, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_0, t) = 0;$$

$$u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0. \quad (4.58)$$

У разі суцільної пластини на зовнішньому контурі

$$u_r(R_1, t) = 0 \quad \vee \quad \sigma_r(R_1, t) = 0, \quad (4.59)$$

а при $r = R_0 = 0$ за умови симетрії переміщення $u_r(0, t) = 0$.

Після переходу до безрозмірних (нормованих) величин

$$\begin{aligned} \bar{r}R &= r; \quad \bar{t} = ta / R; \quad \bar{u}_r R = u_r; \\ \bar{\sigma}_{r,\theta} &= \sigma_{r,\theta} s_{11}^E (1 - \nu_E^2); \quad \bar{V}(t) = \frac{d_{13}}{h} V(t) \end{aligned} \quad (4.60)$$

формули (4.55) для механічних напружень мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z; \\ \bar{\sigma}_\theta &= \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z, \end{aligned} \quad (4.61)$$

а рівняння коливань (4.56) перетворюється на

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \bar{t}^2}. \quad (4.62)$$

Границні умови (4.58) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) &= 0 \quad \text{або} \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_0, \bar{t}) = 0; \\ \bar{u}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) &= 0 \quad \text{або} \quad \bar{\sigma}_r(\bar{R}_1, \bar{t}) = 0; \end{aligned} \quad (4.63)$$

а початкові умови (4.57) мають такий вигляд:

$$\bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = R^{-1} {}^0 u(\bar{r}); \quad \partial_{\bar{t}} \bar{u}_r(\bar{r}, \bar{t} = 0) = a^{-1} {}^1 u(\bar{r}). \quad (4.64)$$

Далі знаки безрозмірності опускатимуться.

Для тонких пластин електричний потенціал усередині пластини змінюється за лінійним законом $\varphi = V(t)z / h$, і тоді напруженість електричного поля

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow E_z(t) = -\frac{V(t)}{h} \quad (4.65)$$

залежить лише від часу.

Побудова різницевої схеми. Для чисельного розв'язання задачі (4.61), (4.62) за початкових умов (4.64) та граничних умов (4.63) вводиться розбиття відрізка $R_0 < r < R_1$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + i\Delta_r; \Delta_r = (R_1 - R_0) / n \quad (i = 0, \dots, n)\}.$$

При заміні похідних за просторовою координатою центрально-різностними виразами рівняння руху (4.62) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta_r^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2r_i \Delta_r} - \frac{u_i}{r_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (4.66)$$

Оскільки різницеві рівняння (4.65) справедливі для внутрішніх точок $i = 1, \dots, n-1$, а них входять переміщення на контурі $u_0(t)$ і $u_n(t)$, ці останні мають бути визначені з граничних умов (4.63).

При заданих на межах $r = R_0$ або $r = R_1$ переміщеннях $u_r(R_0, t) = 0$, $u_r(R_1, t) = 0$ значення $u_0(t)$ або $u_n(t)$ відомі.

У випадку заданих на межах напружень $\sigma_r(R_0, t) = 0$ або $\sigma_r(R_1, t) = 0$ записуємо односторонні різницеві апроксимації напружень (4.61) в точках $i = 0$ і $i = n$:

$$\sigma_{r,0} \cong \frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2\Delta_r} + \nu_E \frac{u_0}{r_0} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z = 0;$$

$$\sigma_{r,n} \cong \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2\Delta_r} + \nu_E \frac{u_n}{r_n} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z = 0,$$

звідки визначаються контурні значення переміщень:

$$u_0 = \left(\frac{4u_1 - u_2}{2\Delta_r} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right) \Bigg/ \left(\frac{3}{2\Delta_r} - \frac{\nu_E}{R_0} \right);$$

$$u_n = \left(\frac{4u_{n-1} - u_{n-2}}{2\Delta_r} + (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right) \Bigg/ \left(\frac{3}{2\Delta_r} + \frac{\nu_E}{R_n} \right). \quad (4.67)$$

Зазначимо, що побудована різницева схема має порядок Δ_r^2 .

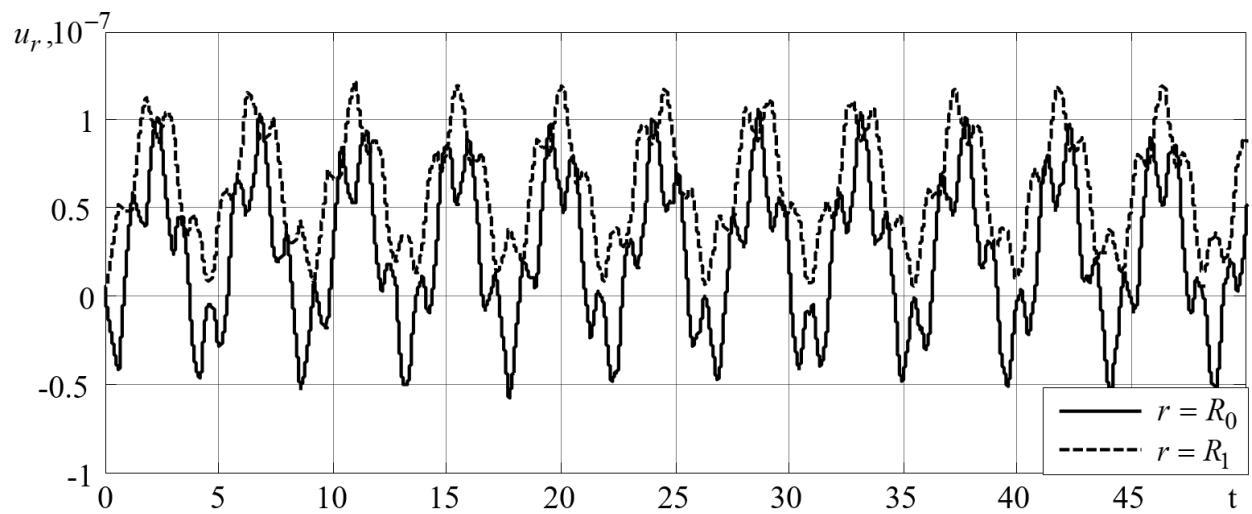
Для інтегрування за часом рівнянь (4.66) з врахуванням (4.67) розбиваємо досліджувану часову ділянку на інтервали довжиною Δ_t , і застосовуємо загальноприйняті методи, наприклад, явну чисельну схему, неявну чисельну схему, метод Рунге-Кутта.

Аналіз отриманих результатів. Проведемо аналіз коливань кільцевої пластини при електричних збуреннях. Контури пластини $r = R_0$ і $r = R_1$ приймемо вільними від напружень. Матеріал пластини – п'єзокераміка ЦТС-19, для якої матеріальної параметри наведено в Дод. В. Товщина пластини $h = 2$ мм, внутрішній радіус $R_0 = 2$ см, зовнішній $R_1 = 5$ см. При розрахунках прийнято $R = R_1$. Збурення задається миттєво прикладеною при $t = 0$ різниці потенціалів $V(t) = V_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда, V_0 – коефіцієнт навантаження.

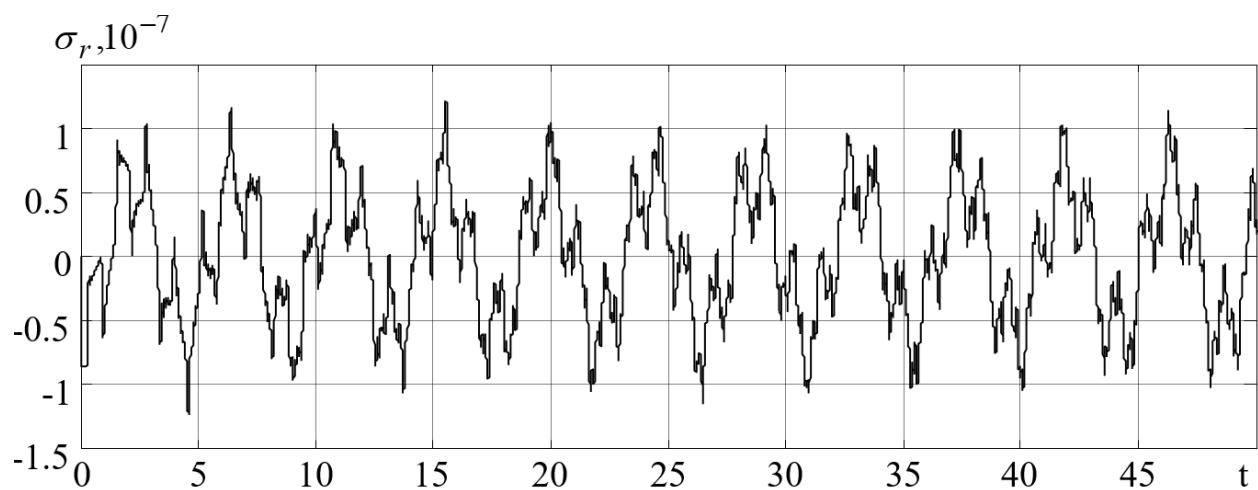
Для даного матеріалу швидкість поширення збурень в радіальному напрямку $a = 3144 \text{ м/с}$, в напрямку поляризації $a_z = 3996 \text{ м/с}$. Звідси визначаємо відношення часу пробігу хвилі вздовж радіусу до часу пробігу хвилі по товщині для круглої пластини $\frac{T_r}{T_h} = \frac{Ra_z}{ha} = 25$, для кільцевої пластини $R_1 = 0,6R_0$ маємо

$\frac{T_r}{T_h} = \frac{(R_0 - R_1)a_z}{ha} = 10$. Таким чином, для дослідження планарних коливань пластини ми можемо не враховувати товщинні коливання. При невеликих відношеннях R/h матимемо часи пробігу одного порядку, і тоді виникає необхідність в розв'язанні двовимірної зв'язаної задачі.

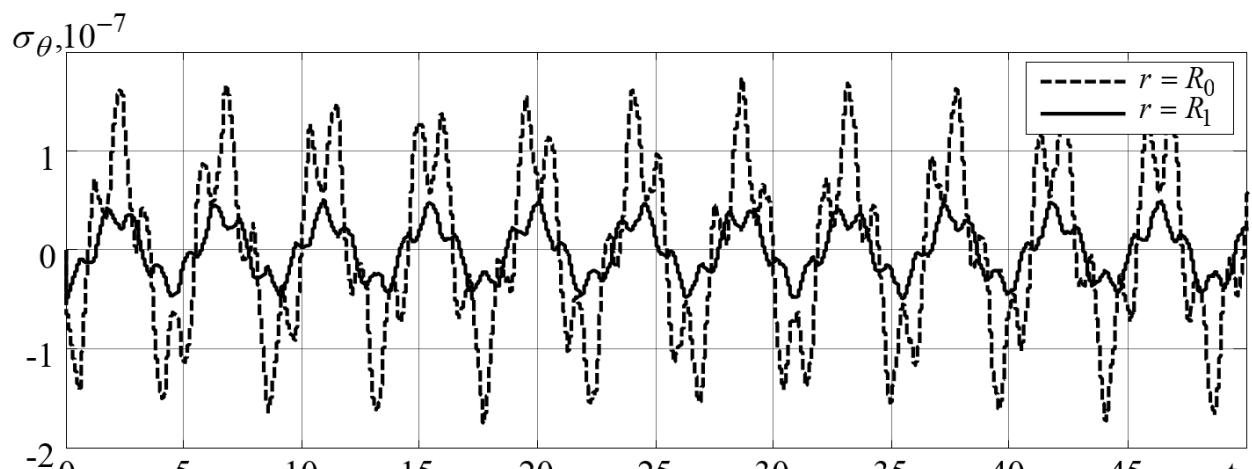
На рис. 4.34 наводяться переміщення та напруження в кільцевій пластині.



a) Планарні коливання кільцевої пластини



б) радіальні напруження при $r = (R_0 + R_1) / 2$



в) колові напруження на циліндричних поверхнях

Рис. 4.34. Переміщення та напруження в кільцевій пластині

Рис. 4.34 а) ілюструє динаміку коливань торцевих поверхонь пластини в безрозмірних величинах. Зовнішня поверхня $x = R_1$ зміщується лише в позитивній ділянці в діапазоні 10^{-7} . Поверхня $x = R_0$ коливається з діапазоном $1,5 \cdot 10^{-7}$, при цьому спостерігається зменшення внутрішнього отвору на $0,5 \cdot 10^{-7}$. Розглянуто інтервал часу $\bar{t} < 50$, що відповідає $0 \leq t \leq 8 \cdot 10^{-4} c$. Зміна радіальних напружень σ_r на кривій $r = (R_0 + R_1) / 2$ наведено на рис. 4.34 б). Динамічні криві для колових напружень σ_θ на торцевих поверхнях представлені на рис. 4.34 в). Максимальні значення колових напружень на поверхні внутрішнього отвору в три рази вищі, ніж на зовнішній торцевій поверхні. Максимальні радіальні напруги на 20% менші, ніж максимальні напруження в окружному напрямку.

Залежність коливань від розмірів кільцевої пластини досліджуємо з урахуванням рис. 4.35, де наведені криві безрозмірних переміщень внутрішньої циліндричної поверхні при різних значеннях внутрішнього радіусу. Наведені криві відповідають пластинам із зовнішнім радіусом $R_1 = R$ та внутрішніми радіусами $R_0 = 0,2R$; $R_0 = 0,4R$; $R_0 = 0,6R$, відповідно. Як випливає з рис. 4.35, при заданому навантаженні максимальні переміщення для різних пластин мало відрізняються. Періодичність руху відповідає зміні ширини кільцевих пластин, що розглядаються, і часу пробігу електропружної хвилі. Отримані результати обернено пропорційно залежать від товщини пластини h згідно (4.61), (4.65).

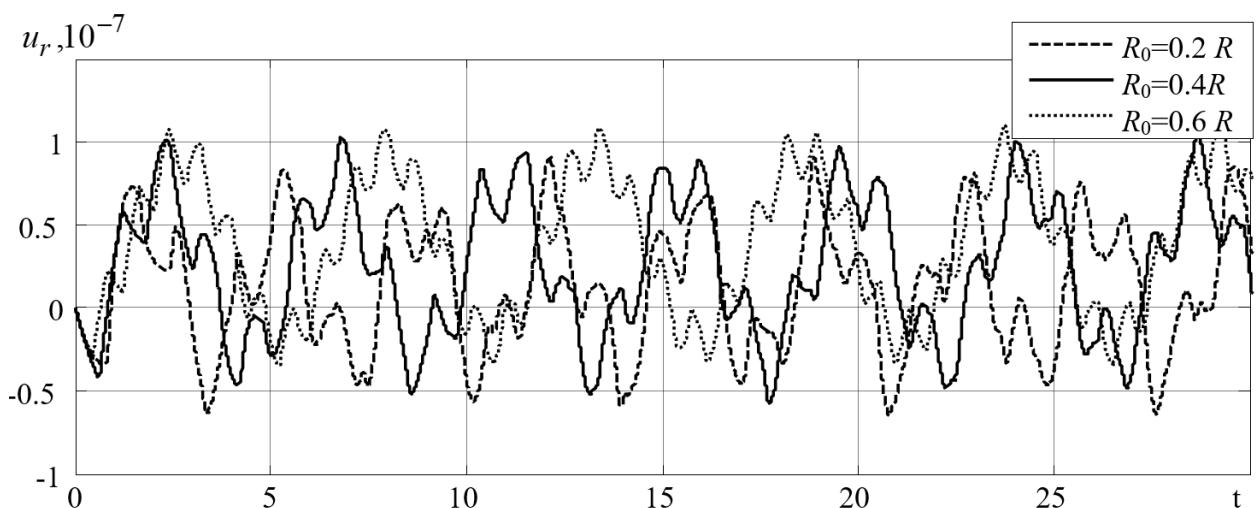


Рис. 4.35. Коливання поверхні $r = R_0$ для пластин різних розмірів

Запропонований підхід та описані закономірності коливань дозволяють ефективно прогнозувати поведінку кільцевих пластин при нестационарному електричному навантаженні.

4.4.2. Визначення електрорушійної сили пластини при планарному механічному збуренні

П'єзокерамічні датчики та збірники енергії перетворюють механічне навантаження в пропорційний електричний сигнал. В умовах активного впровадження комп'ютерної техніки, автономних моніторингових систем, низьковольтажних елементів живлення, датчики (сенсори) є незамінними пристроями, що дозволяють узгоджувати механічні системи з електронними системами контролю і керування. Типовим елементом таких систем є електромеханічний перетворювач у формі тарілки (cymbal) (рис. 4.36), що слугує як збирач енергії, сенсор механічного тиску або генератор електричної енергії.

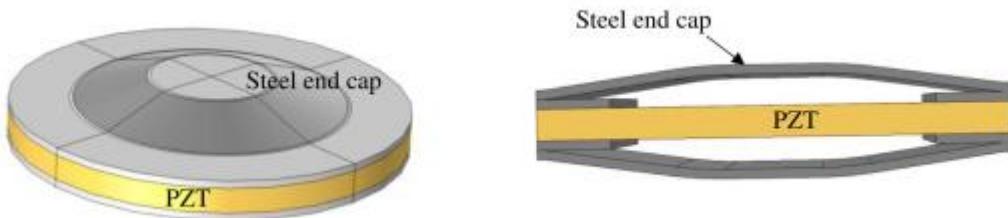


Рис. 4.36. Перетворювач енергії у формі тарілки

При механічному навантаженні п'єзоелектричні перетворювачі працюють в режимі прямого п'єзоefекту і є джерелом електричного струму. Електрична напруга на розімкнутих електродах п'єзоелектричного елементу є електрорушійною силою (ЕРС) джерела струму. Визначення ЕРС п'єзоелементів при гармонійних навантаженнях проводились в роботах [22, 121, 123]. Підхід до визначення електрорушійної сили для пластинчастих елементів в нестационарному випадку запропоновано в [115] за допомогою інтегрального рівняння Вольтерра. В даному підрозділі розроблено та реалізовано чисельний спосіб знаходження ЕРС та дослідження динамічного електромеханічного стану поляризованих за товщиною

п'єзокерамічних тонких круглих та кільцевих пластин при нестационарному осесиметричному планарному механічному навантаженні.

При такому навантаженні рівняння руху (4.62) та матеріальні співвідношення (4.61) залишаються в силі. Електрична індукція в загальному випадку визначається за формулою

$$D_z = d_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33}\sigma_z + \varepsilon_{33}^T E_z. \quad (4.68)$$

З (4.61) маємо

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - 2d_{31}E_z \right). \quad (4.69)$$

Для тонких пластин вважаємо, що напруженість електричного поля визначається як

$$E_z = -\frac{U(t)}{h}. \quad (4.70)$$

Тут $U(t)$ — шукана електрорушійна сила перетворювача, яка визначається з умови рівності нулеві струму при розімкнутих електродах

$$I = \frac{dQ}{dt} = - \iint_{A^\pm} \frac{dD_z}{dt} dA^\pm = 0, \quad (4.71)$$

де A^\pm — поверхня пластини, покрита електродами, Q — заряд на електродах. З (4.71) випливає

$$Q = - \iint_{A^\pm} D_z dA^\pm = const. \quad (4.72)$$

З (4.68), (4.69), (4.70) при відсутності навантажень вздовж вісі z маємо

$$D_z = \frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h}. \quad (4.73)$$

Якщо плоскі поверхні пластини повністю покриті електродами, то $A^\pm = A_{nl} = \pi(R_1^2 - R_0^2)$. Інтегруємо (4.72) з врахуванням (4.73) :

$$Q = - \iint_{A^\pm} \left[\frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} - (\varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)}) \frac{U(t)}{h} \right] r dr d\theta ,$$

$$-Q = \frac{2\pi d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) - (\varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)}) \frac{U(t)}{h} A_{n\pi}. \quad (4.74)$$

Якщо при $t=0$ заряд $Q(0)=0$, то $Q(t)=0$. З (4.74) отримуємо вираз для знаходження електрорушійної сили

$$U(t) = \frac{\pi h k_p^2}{d_{13} A_{n\pi} (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)). \quad (4.75)$$

Тут $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)\varepsilon_{33}^T}$ — планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Перетворимо вираз для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} + \frac{\pi(1+\nu_E)}{A_{n\pi}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) \right). \quad (4.76)$$

Збурення в пластині виникають шляхом прикладання механічного тиску (або зусиль розтягу) до циліндричних поверхонь. При цьому друга циліндрична поверхня може бути жорстко защемлена або вільна від навантажень:

$$\sigma_r(R_i, t) = P_i(t) \vee u_r(R_i, t) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (4.77)$$

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини і їх швидкості у вигляді (4.57). Вводиться обезрозмірення (4.60).

Рівняння для напружень (4.62) з врахуванням обезрозмірення набувають вигляду:

$$\bar{\sigma}_r = \sigma_r s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t),$$

$$\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \nu_E \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{u}_r}{\bar{r}} + (1 + \nu_E) \bar{U}(t), \quad (4.78)$$

де електрорушійна сила знаходиться із спiввiдношення

$$\bar{U}(t) = \frac{d_{13}}{h} U(t) = \frac{\pi k_p^2}{A_{nl}(1-k_p^2)} (\bar{R}_l \bar{u}_r(\bar{R}_l, t) - \bar{R}_0 \bar{u}_r(\bar{R}_0, t)). \quad (4.79)$$

Надалі всi формули наводяться в безрозмiрному виглядi.

Чисельний метод розв'язання. Для чисельного розв'язку задачi (4.61), (4.62) при початкових умовах (4.64) i граничних умовах (4.77) вводиться розбиття вiдрiзка $R_0 < r < R_l$

$$\Omega = \{r_i = R_0 + (i - 0.5)\Delta_r \mid \Delta_r = (R_l - R_0) / (n - 1), i = 0, \dots, n\}.$$

При замiнi похiдних по просторовiй координатi центрально-рiзницевими вiразами рiвняння руху (2.62) перетвориться до виду (4.66).

У випадку заданих на границях напруженiй $\sigma_r(R_0, t) = P_0(t)$ та $\sigma_r(R_l, t) = P_l(t)$ значення $u_0(t)$ i $u_n(t)$ можна вiзнати, використовуючи наступнi апроксимацiї напруженiй

$$\begin{aligned} \sigma_{r,0} &= \frac{u_1 - u_0}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_0 + u_1)}{2R_0} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{nl}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_l(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_0(t), \\ \sigma_{r,n} &= \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta r} + \nu_E \frac{(u_n + u_{n-1})}{2R_l} + \frac{\pi(1 + \nu_E)}{2A_{nl}} \frac{k_p^2}{(1 - k_p^2)} (R_l(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)) = P_l(t). \end{aligned}$$

Звiдси отримуємо систему для знаходження законiтурних значень $u_0(t)$ i $u_n(t)$ при вiдомих значеннях перемiщенiй в внутрiшнiх точках:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu_E}{2R_0} - \frac{1}{\Delta r} - A_l R_0 \right) u_0 + A_l R_l u_n &= P_0(t) - \left(\frac{1}{\Delta r} + \frac{\nu_E}{2R_0} + A_l R_0 \right) u_1 - A_l R_l u_{n-1}, \\ -A_l R_0 u_0 + \left(\frac{\nu_E}{2R_l} + \frac{1}{\Delta r} + A_l R_l \right) u_n &= P_l(t) + A_l R_0 u_1 - \left(-\frac{1}{\Delta r} + \frac{\nu_E}{2R_l} + A_l R_l \right) u_{n-1}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

де $A_l = \frac{\pi(1+\nu_E)}{2A_{nl}} \frac{k_p^2}{(1-k_p^2)}$. При заданих переміщеннях на одній з границь залишається лише одне з рівнянь (4.80), і обчислення помітно спрощуються.

Електрорушійна сила знаходиться відповідно до співвідношення (4.79)

$$U(t) = \frac{A_l}{(1+\nu_E)} (R_l(u_n + u_{n-1}) - R_0(u_0 + u_1)).$$

Для інтегрування за часом розбиваємо досліджувану часову ділянку на інтервали довжиною Δ_t і застосовуємо загальноприйняті методи, наприклад, явну чисельну схему. У явній схемі переміщення на $(k+1)$ -му шарі знаходяться по відому розподілу переміщень на k -му і $(k-1)$ -му часових шарах наступним чином

$$u_i^{k+1} = \Delta_t^2 \left[\left(\frac{1}{\Delta_r^2} + \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i+1}^k - \left(\frac{2}{\Delta_r^2} + \frac{1}{r_i^2} \right) u_i^k + \left(\frac{1}{\Delta_r^2} - \frac{1}{2r_i \Delta_r} \right) u_{i-1}^k \right] + 2u_i^k - u_i^{k-1}. \quad (4.81)$$

Внаслідок умовної стійкості явної чисельної схеми крок за часом у рекурентних формулах (4.81), (4.80) повинен бути в кілька разів менше кроку по просторовій координаті. Зазвичай при прийнятому обезрозміренні достатньо взяти $\Delta_t \approx 0.1\Delta_r$. Значення переміщень на тимчасових шарах $t_0 = 0$ і $t_1 = \Delta_t$ визначаються з початкових умов.

Аналіз отриманих результатів. Проведено аналіз коливань кільцевої пластини під дією механічного планарного навантаження. Товщина пластини $h = 2\text{мм}$, зовнішній радіус $R_l = 5\text{см}$, внутрішній $R_0 = 3\text{см}$. Матеріал пластини — п'єзокераміка ЦТС-19.

Розглянемо реакцію пластини на миттєво прикладене при $t=0$ збурення $\sigma_r(R_l, t) = P_l(t) = P \sin \omega t$, $\sigma_r(R_0, t) = 0$. Для обчислень візьмемо $P = 1$, безрозмірна частота навантаження $\bar{\omega} = \omega R / a = 1$, який відповідає частота в герцах $\omega = 6.31 \cdot 10^4 \text{рад/с}$.

На рис. 4.36 наведено безрозмірні динамічні криві для переміщень зовнішніх

поверхонь та електрорушійної сили при описаному вище збуренні.

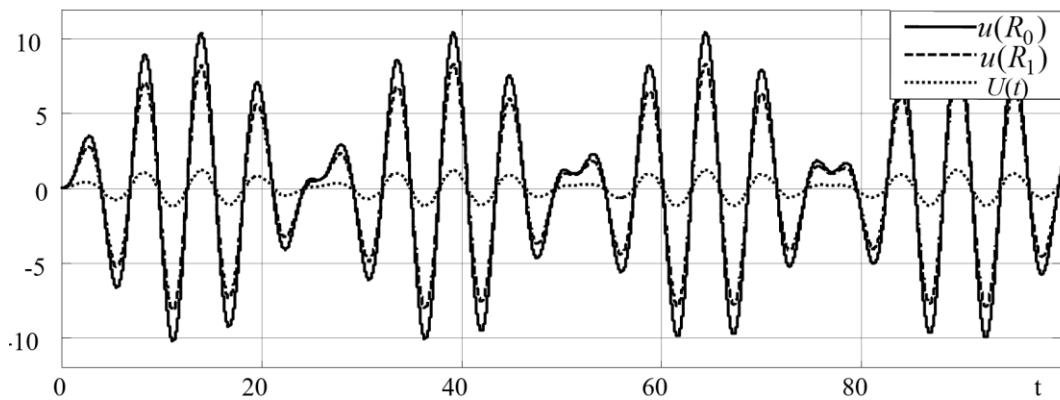


Рис. 4.36. Переміщення та електрорушійна сила

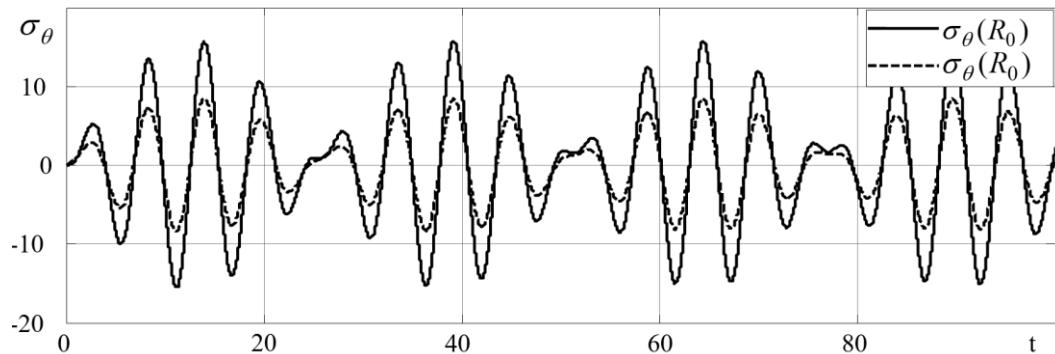


Рис. 4.37. Колові напруження

Рис. 4.37 описує динаміку зміни окружніх напруженень σ_θ на зовнішніх поверхнях кільцевої пластиини. Виявилося, що окружні напруження на поверхні $r = R_1$ вищі за радіальні в 8 разів згідно до граничних умов, а максимальні напруження $\sigma_{\theta \max} = 15$ виникають на внутрішній поверхні $r = R_0$.

На рис. 4.38 наведено криві ЕРС при різних значеннях частоти збурення ω . Бачимо, що максимальних значень електрорушійна сила набуває при $\bar{\omega} = 1$. Найменшу область зміни різниці потенціалів маємо при $\bar{\omega} = 2$.

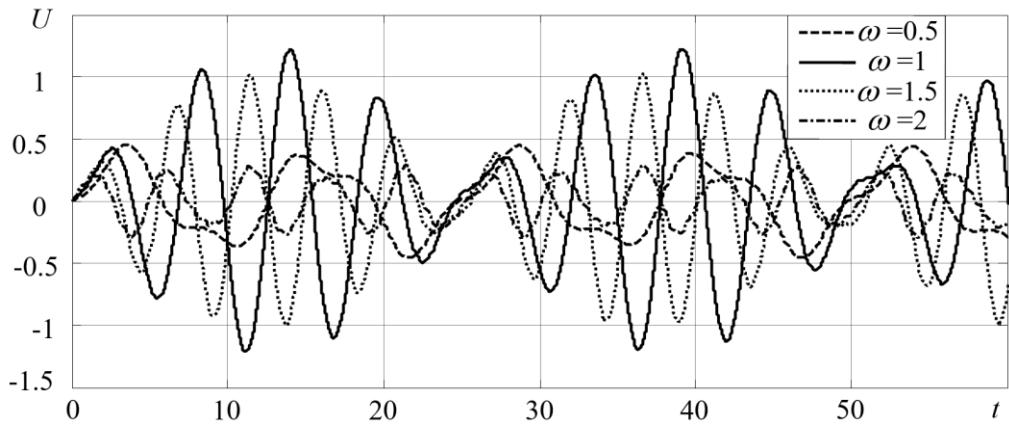


Рис. 4.38. ЕРС при різних частотах збурення

Рис. 4.39 ілюструє динаміку зміни електрорушійної сили для пластин з різними радіусами внутрішнього отвору, отримані при $\bar{\omega}=1$. Максимальна різниця потенціалів виникає при $\bar{R}_0 = 0.6$. Таким чином, з усіх розглянутих випадків максимальна ЕРС виникає при $\bar{\omega}=1$, $\bar{R}_0 = 0.6$ і досягає значення $\bar{U}_{\max} = 1.22$.

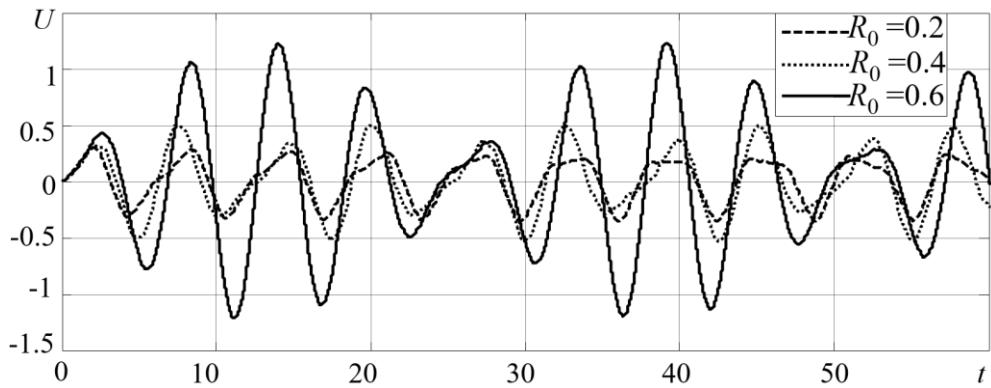


Рис. 4.38. ЕРС при різних внутрішніх радіусах пластини

Таким чином, запропонований чисельний метод знаходження електрорушійної сили п'єзоелемента при нестационарних механічних навантаженнях дає змогу ефективно визначати ЕРС для кільцевих п'єзокерамічних пластин з різними умовами закріплення та навантаження. Дослідження динамічного електромеханічного стану пластини, що стає відомим при цьому, може бути використано при проектуванні та виборі оптимальних умов функціонування п'єзокерамічного перетворювача.

4.4.3. Електромеханічна чутливість пластини при осьовому механічному навантаженні

Одним з основних типів п'єзокерамічних датчиків є осьові датчики, в яких механічне навантаження діє вздовж осі поляризації. В якості п'єзоелементів в цих датчиках виступають поляризовані за товщиною диски, кільця, циліндри і пластини, які при імпульсних механічних навантаженнях можуть використовуватися як датчики акустичної емісії. Осьові датчики працюють в режимі прямого п'єзо-фекту і є джерелом електричного струму.

Вивчається динамічний осесиметричний електромеханічний стан поляризованих за товщиною п'єзокерамічних тонких круглих і кільцевих пластин. Розглядається пластина на жорсткій основі під дією тиску $P(r,t)$, прикладеного до плоскої поверхні. Силою тертя між пластиною та основою нехтуємо. Очевидно, що при такому навантаженні перш за все виникають товщинні коливання. Товщинні коливання при нестационарних механічних (ударних) навантаженнях виникають в усіх типах тонкостінних (оболонкових) структур, але загальноприйнятий підхід до розв'язання задач теорії пластин та оболонок [38, 56] та ін. базується на нехтуванні ними внаслідок тонкостінності тіла та відносно малого часу виходу на установлений режим, а навантаження умовно прикладається до серединної поверхні. В нашему випадку відношення часу пробігу хвилі вздовж радіусу до часу пробігу хвилі по товщині пропорційне до відношення $R/h \gg 10$. Враховуючи це, робимо припущення про сталість напружень $\sigma_{zz} = P(r,t)$ по товщині пластини, тобто нехтуємо часом виходу на стационарний режим товщинних коливань. При цьому параметри електромеханічного стану незалежні від координати z , тобто мають місце планарні коливання пластини (вздовж координати r). Зауважимо, що така постановка задачі можлива лише в межах теорії електропружності.

Основні залежності. Координата r змінюється в межах $R_0 \leq r \leq R_1$, товщина пластини h . Коливання тіла в загальному випадку описуються рівнянням руху (4.1)

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (4.82)$$

Вирази для напружень відповідають тривимірному напруженому стану

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} \right) - \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu_E)} P_z - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} E_z; \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{s_{13}^E}{s_{11}^E(1-\nu_E)} P_z - \frac{d_{31}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} E_z. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Рівняння коливань (4.82) при підстановці (4.83) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - s_{13}^E (1 + \nu_E) \frac{\partial P_z}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}. \quad (4.84)$$

Як і раніше, швидкість поширення електропружної хвилі

$$a^2 = \frac{1}{(1-\nu_E^2) s_{11}^E \rho}.$$

З (4.83) маємо

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - 2d_{31}E_z - 2s_{13}^E P_z \right). \quad (4.85)$$

Електрична індукція в загальному випадку визначається за формулою (4.68) при $\sigma_z = P_z$. Напруженість електричного поля знаходимо за (4.70), де $U(t)$ — шукана електрорушійна сила перетворювача, яка визначається з умови (4.71). З (4.68), (4.70), (4.85) маємо

$$\begin{aligned} D_z &= \frac{d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \left(d_{33} - \frac{2d_{13}s_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) P_z(r,t) - \\ &- \left(\epsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Якщо плоскі поверхні пластини повністю покриті електродами, то

$A^\pm = A_{n\pi} = \pi(R_1^2 - R_0^2)$. Інтегруємо (4.72) з врахуванням (4.86) :

$$-Q = \frac{2\pi d_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) + \left(d_{33} - \frac{2d_{13}s_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \times \\ \times \int_A P_z(r, t) dA - \left(\varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \frac{U(t)}{h} A_{n\pi}. \quad (4.87)$$

Якщо при $t=0$ заряд $Q(0)=0$, то $Q(t)=0$. З (4.87) отримуємо вираз для знаходження електрорушійної сили

$$U(t) = \frac{\pi h k_p^2}{d_{13} A^\pm (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) + \\ + \frac{h}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) A^\pm} \left(d_{33} - \frac{2d_{13}s_{13}}{s_{11}^E(1-\nu_E)} \right) \int_A P_z(r, t) dA. \quad (4.88)$$

Тут $k_p^2 = \frac{2d_{13}^2}{s_{11}^E(1-\nu_E)\varepsilon_{33}^T}$ — планарний коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Формула (4.88) дійсна як для кільцевих, так і для круглих пластин при $R_0=0$.

Перетворимо вираз для σ_r :

$$\sigma_r = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} - s_{13}^E (1 + \nu_E) P_z + \frac{\pi k_p^2 (1 + \nu_E)}{A_{n\pi} (1 - k_p^2)} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) + \frac{(1 + \nu_E) d_{31} d_{33}}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2) A^\pm} \int_A P_z dA \right). \quad (4.89)$$

Циліндричні поверхні пластини можуть бути закріплені або вільні від навантаження:

$$\sigma_r(R_i, t) = 0 \text{ або } u_r(R_i, t) = 0, \quad i = 0, 1. \quad (4.90)$$

У початковий момент часу задаються переміщення точок пластини і їх швидкості у формі (4.57). Для загальності розв'язку перейдемо до безрозмірних

величин (4.60)

При незалежності зовнішнього навантаження від координати r рівняння коливань (4.84) в безрозмірних змінних приймає форму (4.62).

Рівняння для напружень (4.89) нормуються наступним чином:

$$\bar{\sigma}_r = \sigma_r s_{11}^E (1 - \nu_E^2) = \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \nu_E \frac{\bar{u}_r}{r} - \frac{s_{13}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} \bar{P}_z + (1 + \nu_E) \bar{U}(t).$$

Рівняння руху (4.62) при початкових мовах (4.57) інтегруються за допомогою різницевих виразів, описаних в п. 4.4.1. Значення переміщень в законтурних точках визначаються з системи рівнянь, що випливає з граничних умов (4.90):

$$\begin{aligned} \frac{aR_1}{2} u_{n+1} + \left(-\frac{aR_0}{2} + \frac{\nu}{2R_0} - \frac{1}{\Delta} \right) u_0 &= bP_z - \left(-\frac{aR_0}{2} + \frac{\nu}{2R_0} + \frac{1}{\Delta} \right) u_1 - \frac{aR_1}{2} u_n; \\ \left(\frac{aR_1}{2} + \frac{\nu}{2R_1} + \frac{1}{\Delta} \right) u_{n+1} - \frac{aR_0}{2} u_0 &= bP_z - \left(\frac{aR_1}{2} + \frac{\nu}{2R_1} - \frac{1}{\Delta} \right) u_n + \frac{aR_0}{2} u_1, \end{aligned}$$

де

$$a = \frac{\pi k_p^2 (1 + \nu_E)}{A^\pm (1 - k_p^2)}, \quad b = (1 + \nu_E) \left(\frac{d_{13}}{\varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2)} \left(\frac{2d_{13}s_{13}}{s_{11}^E (1 - \nu_E)} - d_{33} \right) + s_{13}^E \right).$$

Аналіз отриманих результатів. Проведемо аналіз реакції п'єзокерамічної пластини на механічний тиск, прикладений до поверхні сенсора. Зовнішній радіус R_1 , інші пропорції $R_1/h = 20$, $R_0/R_1 = 0; 0,2; 0,4; 0,6$. Матеріал пластини — п'єзокераміка ЦТС-19.

Розглянемо реакцію пластини на миттєво прикладений при $t = 0$ по всій

площі пластини тиск $P(t) = \begin{cases} P \sin \frac{t_1}{\pi} t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$ при вільних бічних поверхнях

$\sigma_r(R_0, t) = 0$, $\sigma_r(R_1, t) = 0$. Для обчислень візьмемо $\bar{P} = 1$, час навантаження $\bar{t}_1 = \pi$, що відповідає інтервалу $0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-5} c$. Перехід до розмірних значень виконується за допомогою співвідношень (4.60).

На рис. 4.39 наведені безрозмірні динамічні криві переміщень зовнішньої

$r = R_1$ та внутрішньої $r = R_0$ поверхні для пластин з різними внутрішніми отворами.

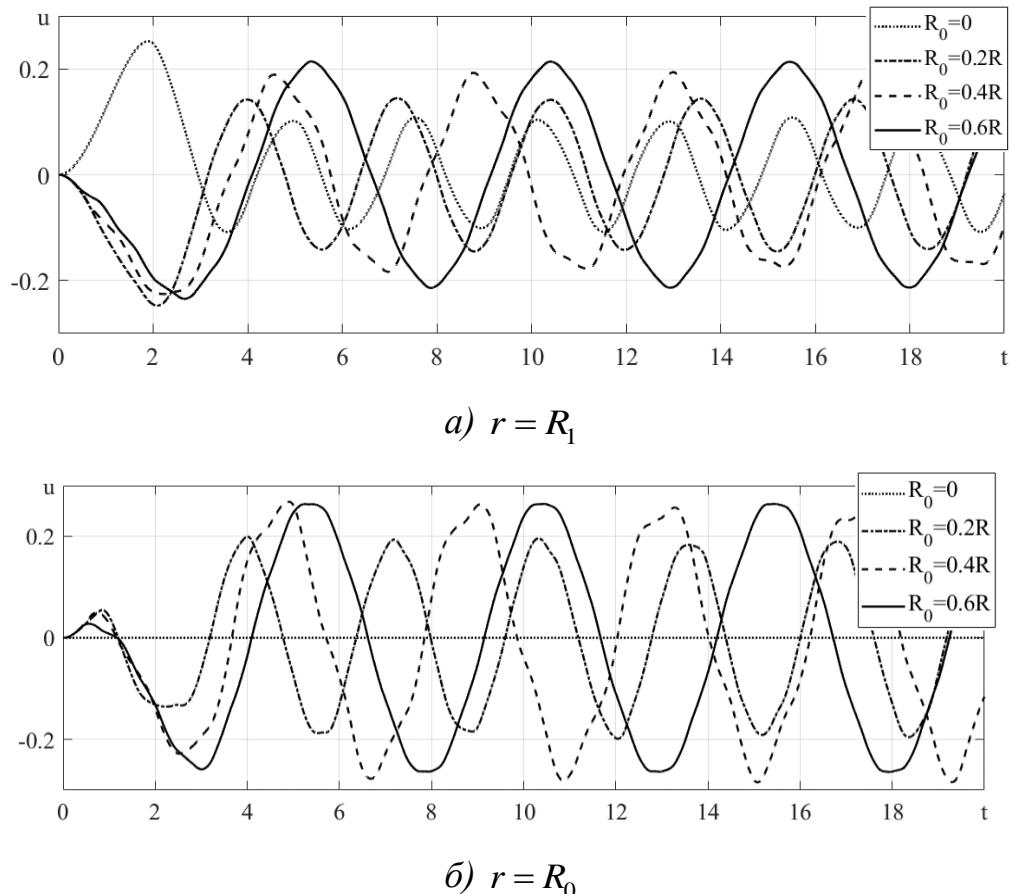


Рис. 4.39. Переміщення зовнішніх поверхонь для пластин з різними отворами

Бачимо, що максимальні переміщення внутрішнього контуру для пластин з $R_0 = 0.4$ і $R_0 = 0.6$ практично однакові, тоді як при $R_0 = 0.2$ отримуємо на 30% менші переміщення. Періодичність коливань після зняття навантаження відповідає часу пробігу прямої і зворотної електропружної хвилі вздовж радіуса пластини.

Зі зростанням внутрішнього радіусу максимальні переміщення зростають і періодичність коливань в різних точках пластини однаакова.

Напруженний стан пластини вивчимо за допомогою рис. 4.40, 4.41. На рис. 4.40 бачимо динамічні криві радіальних напружень в перерізі $r = (R_0 + R_1) / 2$ пластин. Із зростанням внутрішнього радіусу радіальні напруження зменшуються. Аналіз отриманих результатів показує, що в круглій пластині максимальні радіальні напруження в точці $r = 0$ нижчі за напруження в розглянутому перерізі на 7%.

Колові напруження в пластині досягають максимальних значень при $r = R_0$

(рис. 4.41). Бачимо, що при зростанні внутрішнього радіусу максимальні окружні напруження зменшуються, але все одно помітно вищі за максимальні радіальні напруження в кільцевих пластинах.

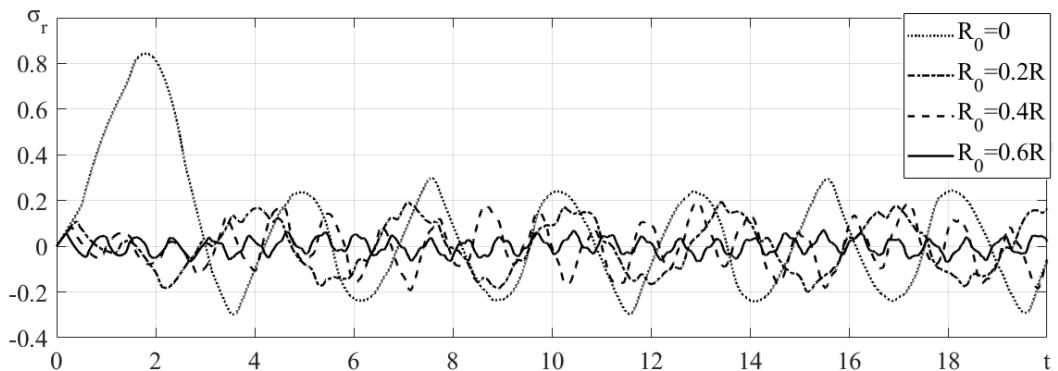


Рис. 4.40. Радіальні напруження в перерізі $r = (R_0 + R_1) / 2$

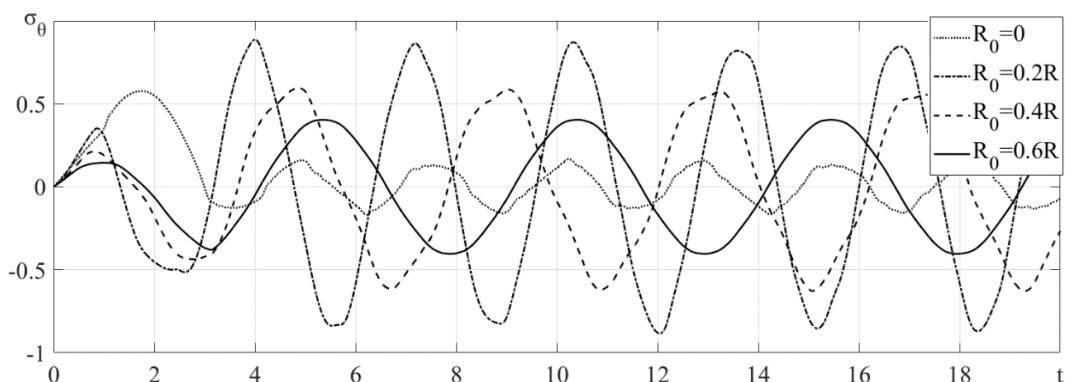


Рис. 4.41. Колові напруження в перерізі $r = R_0$.

Результати визначення електрорушійної сили наведено на рис. 4.42. Механічне навантаження в формі гілки синусоїди знято в момент $t = \pi$, що чітко відобразилося на графіку. Після цього моменту для всіх розглянутих пластин спостерігаються коливальні зміни ЕРС з амплітудою одного порядку, але різною частотою, яка залежить від ширини пластини. Для суцільної пластиини пік ЕРС виявився більше ніж в два рази нижчим за ЕРС пластин з отвором.

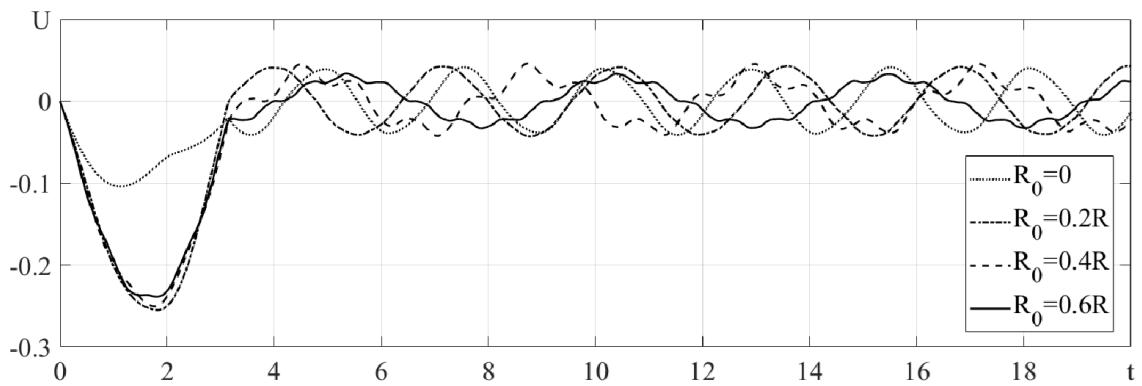


Рис. 4.42. ЕРС пластин з різними радіусами

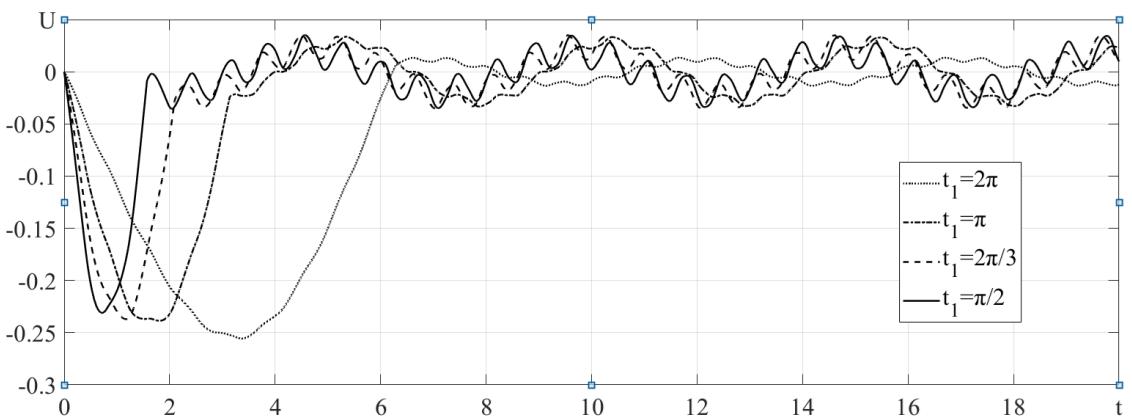


Рис. 4.43. ЕРС пластини $R_0 = 0.6$ при різних інтервалах збурення

З рис. 4.43 бачимо, що з збільшенням часу контакту амплітуда першого піку ЕРС дещо збільшується. Після зняття навантаження зміна ЕРС описується комбінацією радіальних та товщинних коливань з майже однаковою амплітудою, за виключенням випадку $t_1 = 2\pi$. Амплітуда цих коливань не перевищує 10% від ЕРС під час навантаження. Цим самим ілюструється необхідність дослідження реакції електромеханічних перетворювачів на імпульсне навантаження саме в початковий інтервал часу.

Проведене дослідження динамічного електромеханічного стану пластини може бути використано при проектуванні та виборі оптимальних умов функціонування п'єзокерамічного перетворювача.

4.5. Висновки до розділу 4

1. Розвинутий узагальнений чисельний метод дозволяє ефективно досліджувати нестационарні пульсуючі коливання однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форми з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу. Реалізовано інтегрування за часом за допомогою явної схеми та неявної схеми Ньюмарка, а також методом Рунге-Кутта. Верифікація отриманих результатів проводилася шляхом зміни кількості точок розбиття, застосування різних методів інтегрування за часом, порівняння з результатами, отриманими за допомогою МСЕ.

2. Досліжено поширення збурень в багатошарових тілах плоскої, циліндричної та сферичної форм з зустрічним напрямком поляризації шарів та проміжними електродами при електричних навантаженнях. Встановлено, що використання багатошарових елементів з зустрічною поляризацією шарів дає змогу збільшити механічний відгук п'єзоелемента на електричне навантаження. Відгук при сталій підведеній напрузі пропорційний до кількості шарів. Ця властивість є корисною для низьковольтажних конструкцій і широко застосовується на практиці. Недоліком даної конструкції є концентрація напружень між шарами, що негативно впливає на механічну міцність конструкції.

3. При дослідженні переходних процесів в багатошарових елементах з зовнішнім в'язкопружним шаром при імпульсних навантаженнях встановлено, що наявність в'язкопружного шару в плоскому елементі підвищує амплітуду та період вільних коливань п'єзоелемента, а в циліндричному та сферичному понижує їх, оскільки для циліндра і сфери перша власна частота відповідає радіальній моді коливань, а товщинні коливання менш виражені на фоні радіальних.

4. Проведено дослідження однорідних, двошарових та функціонально-неоднорідних плоских тіл, циліндрів та куль з закріпленою внутрішньою поверхнею, виготовлених з твердої та м'якої п'єзокераміки. Встановлено, що для підвищення електромеханічного відгуку та зменшення напружень в закріпленні неоднорідних тіл біля закріплення потрібно розміщувати м'яку п'єзокераміку. З

розглянутих варіантів функціональної неоднорідності матеріалу найкращий результат показав параболічний розподіл за товщиною: для плоского шару отримуємо підвищення амплітуди коливань на 10%, для циліндра 30%, для кулі 12% порівняно з двохшаровим тілом. Запропонована методика може бути застосована для дослідження коливань тіл різної геометрії з суттєво неоднорідного трансверсально-ізотропного матеріалу, включаючи багатошарові тіла з активних, пасивних та функціонально-неоднорідних матеріалів.

5. При аналізі результатів обчислень для задачі про нестационарні коливання радіально поляризованого в'язкопружного п'єзокерамічного циліндра з функціонально-неоднорідного композиту на основі PZT-4 встановлено, що вплив функціональної неоднорідності матеріалу виражається в зміні швидкості поширення збурень уздовж товщинної координати та зменшенні амплітуди коливань. Показано, що при вільних затухаючих коливаннях з врахуванням альфа- та бета-демпфування логарифмічний декремент коливань сталій та пропорційний до коефіцієнта демпфування. При зростанні радіуса серединної поверхні декремент коливань при альфа-демпфуванні зростає, при бета-демпфуванні спадає. Товщині коливання при альфа-демпфування загасають за рахунок в'язкості чисельної схеми. Декремент чисельної схеми після загасання товщинних коливань є сталою величиною.

6. Досліджено реакцію на нестационарне збурення елементів циліндричної та сферичної форм з функціонально-неоднорідного матеріалу, що складається з поляризованої за товщиною п'єзокераміки PZT-4 та п'єзополімеру PVDF. Аналіз числових результатів показав, що вплив функціональної неоднорідності матеріалу проявляється у зміні швидкості поширення збурень та зменшенні амплітуди коливань. При порівнянні розглянутих у роботі моделей врахування механічних та електричних втрат встановлено, що при введенні діелектричних та п'єзоелектричних коефіцієнтів демпфування криві коливань практично не змінюються порівняно з врахуванням лише механічних втрат. Отже, врахування лише механічних втрат при експериментально обґрутованих коефіцієнтах демпфування дозволяє моделювати коливання з достатньою точністю. Вплив рідкого акустичного середовища

на затухання коливань значно вищий, ніж затухання коливань через втрати механічної енергії.

7. Розвинуто чисельний підхід до аналізу планарних нестационарних осесиметричних коливань п'єзокерамічних поляризованих за товщиною круглих пластин при електричному збуренні. Досліджена зміна динамічних характеристик електромеханічного стану кільцевої пластини, встановлено залежність характеру нестационарних коливань від частоти при миттєвому прикладанні електричного потенціалу та відношення зовнішнього і внутрішнього радіусів пластини.

8. Визначено електрорушійну силу круглих та кільцевих плоских п'єзоелементів при планарних віссиметричних механічних збуреннях. При раптово прикладеному гармонічному навантаженні максимальний ЕРС виникає при близьких до резонансних частотах навантаження.

9. Реалізовано спосіб визначення ЕРС для робочих елементів осьових п'єзодатчиків в формі круглих та кільцевих п'єзокерамічних пластин. Встановлено, що наявність отвору в пластині зменшує механічні напруження та підвищує значення ЕРС в момент піку імпульсного навантаження. Вільні коливання ЕРС, що виникають після зняття навантаження, мають приблизно однакову амплітуду та період, що залежить від ширини пластини.

РОЗДІЛ 5.

ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ В ТРИВИМІРНІЙ ПОСТАНОВЦІ

У розділі описується застосування методу скінчених елементів до розв'язання динамічних задач електропружності з врахуванням неоднорідності матеріалу та дисипації енергії. Для представленої в розділі 2 фізико-математичної моделі, зведеній до початково-крайової задачі електропружності, записано функціонал принципу Гамільтона з врахуванням дисипації енергії та встановлено умови його стаціонарності. Виконано перехід від континуальної задачі до дискретної і сформовано систему розв'язуючих рівнянь методу скінчених елементів для окремого елемента та дискретної моделі тіла в цілому.

Описано принципи та особливості програмування задач аналізу динаміки функціонально-неоднорідних п'єзоперетворювачів складної форми в МСЕ. Функціональна неоднорідність матеріалу реалізується пошаровою модифікацією матеріальних характеристик скінчених елементів. Застосовуються програмно реалізовані механізми дисипації механічної та електричної енергії. Розглядаються статичний, модальний, гармонічний та нестаціонарний режими коливань. Визначаються частоти електричних резонансів та антирезонансів та відповідні КЕМЗ. Досліджується вплив функціональної неоднорідності та дисипації енергії на динамічні процеси в п'єзокерамічному неоднорідному секціонованому циліндрі скінченної довжини з жорсткою та м'якою п'єзокерамік.

Отримані в розділі результати висвітлено в публікації [35].

5.1. Метод скінчених елементів в задачах електров'язкопружності

Для переважної більшості задач електропружності, особливо в нестаціонарній постановці, застосування аналітичних підходів вимагає математичних засобів високого рівня, що призводить до значного ускладнення процесу пошуку розв'язку та оцінки його достовірності. Для таких задач розробляються чисельні підходи, одним з найбільш поширеніших серед яких є метод скінчених елементів (МСЕ, FEM). Широке розповсюдження цього методу пояснюється універсальністю, простотою реалізації на обчислювальній машині, широким колом фізичних станів та математичних моделей, до яких він може бути застосований, легкою зміною вхідних параметрів та навантажень, чітка фізична інтерпретація отриманих результатів. МСЕ для крайових задач електропружності був сформульований і реалізований на початку 1970-х років [123, 128, 240].

5.1.1. Побудова рівнянь МСЕ на основі інтегрального принципу Гамільтона-Остроградського

МСЕ як досить розвинутий і широко застосовуваний метод має досить багато модифікацій та способів виведення розв'язуючих рівнянь залежно від математичної моделі досліджуваного середовища [200]. Для п'єзоелектричних тіл використовуються підходи, що базуються на варіаційному принципі Гамільтона-Остроградського [123, 128], варіаційному рівнянні Лагранжа у згортках [41, 189], варіаційному принципі ЕрНісса [240], варіації методу Бубнова-Гальоркіна [84] та ін.

Застосуємо варіаційний підхід до побудови рівнянь МСЕ для електропружиних тіл. Розглянемо п'єзоелектричне тіло об'ємом Ω_p , обмежене замкнутою поверхнею S_p . На частині поверхні $S_\sigma \subseteq S_p$ тіло навантажене поверхневими силами \mathbf{p} ; на частині поверхні $S_u \subseteq S_p$, $S_p = S_\sigma \cup S_u$ задаються кінематичні умови $\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{Y}_S$. На частині поверхні S_q відома поверхнева щільність електричних зарядів q , а на електродованій частині поверхні S_φ відомий електричний потенціал φ . Оскільки електричний потенціал визначається з точністю до аддитивної сталої, виділимо на частині електродованої поверхні S_φ^0 електрод, на якому $\varphi=0$. Тоді значення електричного потенціалу $\varphi=V_0$ на інших електродах $S_V = S_\varphi \cap S_\varphi^0$ є різницею потенціалів, що збуджують коливання.

Зв'язаний електропружиний стан п'єзоелектричного тіла характеризується вектором переміщень \mathbf{u} , векторами напруженів та деформацій в системі позначені Фойгта $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$, вектором напруженості електричного поля \mathbf{D} та вектором електричної індукції \mathbf{E} .

Функціонал інтегрального принципу Гамільтона-Остроградського можна представити у вигляді [107, 128]:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L_p dt . \quad (5.1)$$

В п'єзоелектричному середовищі (індекс p) вхідний під знак інтегралу (5.1) лагранжіан L_p визначається як сума кінетичної енергії K , внутрішньої енергії U , роботи зовнішніх сил та електричного поля A і енергії дисипації Φ :

$$L_p = K + U + A + \Phi. \quad (5.2)$$

Введені в (5.2) компоненти енергії тіла визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_p} \rho_p \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega; \quad U = \int_{\Omega_p} W d\Omega = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_p} (\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{E}^T \mathbf{D}) d\Omega; \\ A &= \int_{S_p} (\mathbf{u}^T \mathbf{p} - \varphi q) dS; \quad \Phi = \int_{\Omega_p} \int_0^t \Phi_p^* \Big|_{t=\tau} d\tau d\Omega, \end{aligned}$$

де Φ_p^* — дисипативна функція. Питома потенціальна енергія W з врахуванням матеріальних співвідношень (2.31)' може бути представлена як сума механічної, п'єзоелектричної та електричної енергії

$$W = W_{\text{mec}} + W_{\text{pe}} + W_{\text{el}} = -\left(\frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{c}^E \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{E} \mathbf{e} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E} \right). \quad (5.3)$$

Введемо дисипативну функцію, що відповідає гістерезисному демпфуванню з коефіцієнтами механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат $\beta_d, \lambda_d, \gamma_d$ відповідно до (5.3) та (4.29):

$$\Phi_p^* = \frac{1}{2} \left(\beta_d \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \mathbf{c}^E \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} + 2\lambda_d \dot{\mathbf{E}} \mathbf{e} \dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} + \gamma_d \dot{\mathbf{E}} \boldsymbol{\epsilon}^S \dot{\mathbf{E}} \right). \quad (5.4)$$

Введемо ще один дисипативний доданок, що описує в'язкопластичне демпфування. Він входить в модель демпфування за Релеєм як альфа-демпфування та широко застосовується в МСЕ завдяки простоті реалізації та збереженні лінійності постановки задачі. Відповідний дисипативний член являє собою квадратичну форму відносно швидкості переміщень та пропорційний до густини (питомої маси) матеріалу:

$$\Phi_p^{**} = \alpha_d \dot{\mathbf{u}}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} / 2.$$

Припускаємо, що при нескінченно малих деформаціях рівновага зберігається, а варіація від переміщень у крайні фіксовані моменти часу дорівнює нuleві: $\delta \mathbf{u}|_{t_0} = \delta \mathbf{u}|_{t_1} = 0$. Тоді $\delta K = -\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}}$ і перша варіація функціонала (5.1) може бути записана як

$$\begin{aligned} \delta L_p = & - \int_{\Omega_p} \left(\delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} + \delta \bar{\epsilon} \mathbf{c}^E \ddot{\bar{\epsilon}} + 2 \delta \mathbf{E} \mathbf{e} \bar{\epsilon} + \delta \mathbf{E} \epsilon^S \dot{\mathbf{E}} \right) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega_p} \int_0^t \left(\alpha_d \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}} + \beta_d \delta \bar{\epsilon} \mathbf{c}^E \ddot{\bar{\epsilon}} + \lambda_d \delta \mathbf{E} \mathbf{e} \ddot{\bar{\epsilon}} + \gamma_d \delta \mathbf{E} \epsilon^S \ddot{\dot{\mathbf{E}}} \right) \Big|_{t=\tau} d\tau d\Omega + \int_{S_p} \left(\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} - q_s \delta \varphi \right) dS. \end{aligned} \quad (5.4)$$

З врахуванням (2.15)', (2.35), теореми Гауса-Остроградського і правила диференціювання добутку функцій випливає, що

$$\begin{aligned} \delta L_p = & - \int_{\Omega_p} \left(\delta \mathbf{u}^T \left(\Xi^T \left(\mathbf{c}^E \left(\bar{\epsilon} + \beta_d \dot{\bar{\epsilon}} \right)^T + \mathbf{e} \left(\mathbf{E} + \lambda_d \dot{\mathbf{E}} \right) \right) - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}} \right) + \delta \varphi \nabla \left(\mathbf{e} \left(\bar{\epsilon}^T + \lambda_d \dot{\bar{\epsilon}}^T \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \epsilon^S \left(\mathbf{E} + \gamma_d \dot{\mathbf{E}} \right) \right) \right) d\Omega + \int_{S_p} \left(\delta \mathbf{u}^T (\hat{\mathbf{n}} \bar{\sigma} - \mathbf{p}) + \delta \varphi (\mathbf{n} \mathbf{D} + q_s) \right) dS, \end{aligned}$$

де \mathbf{n} — вектор напрямних косинусів нормалі до поверхні розмірністю 3×1 ; $\hat{\mathbf{n}}$ — матриця напрямних косинусів розмірністю 3×6 .

З умови $\delta L = 0$ та довільноті віртуальних переміщень $\delta \mathbf{u}$ і $\delta \varphi$ випливають рівняння руху середовища та рівняння Максвела для дисипативних матеріалів, що математично співпадають з запропонованою в другому розділі чотирипараметричною моделлю затухання коливань

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \rho \dot{\mathbf{u}} &= \Xi^T \left(\mathbf{c}^E \left(\bar{\epsilon} + \beta_d \dot{\bar{\epsilon}} \right)^T - \mathbf{e} \nabla (\varphi + \lambda_d \dot{\varphi}) \right); \\ \nabla \left(\mathbf{e} \left(\bar{\epsilon}^T + \lambda_d \dot{\bar{\epsilon}}^T \right) - \epsilon^S \nabla (\varphi + \gamma_d \dot{\varphi}) \right) &= 0, \end{aligned}$$

а також природні граничні умови

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{U}_S; \quad \mathbf{n}\bar{\boldsymbol{\sigma}}|_{S_\sigma} = \mathbf{p}; \quad \varphi|_{S_\varphi} = V_0; \quad \mathbf{n}\mathbf{D}|_{S_q} = -q_s.$$

Для пружного тіла варіація функціонала (5.4) визначається як

$$\delta L_e = - \int_{\Omega_e} \left(\delta \mathbf{u}^T \rho (\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d \dot{\mathbf{u}}) + \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\beta_d}{2} \delta \int_0^t \left(\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^T \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)_{t=\tau} d\tau \right) d\Omega + \int_{S_e} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{p}) dS. \quad (5.5)$$

У рідкому середовищі варіація від функціонала записується як добуток хвильового рівняння $c_a^2 \ddot{p} = \nabla^2 p$ на віртуальний приріст надлишкового тиску δp в середовищі [128]:

$$\delta L_a = - \int_{\Omega_a} \delta p (c_a^2 \ddot{p} - \nabla^2 p) d\Omega,$$

яка з врахуванням теореми Гауса-Остроградського і інтегрування частинами набуває вигляду

$$\delta L_a = - \int_{\Omega_a} (\delta p^T c_a^2 \ddot{p} + \bar{\nabla} \delta p^T \bar{\nabla} p) d\Omega + \int_{S_a} \delta p^T \rho_a \bar{n}^T \ddot{\mathbf{u}} dS. \quad (5.6)$$

В методі скінчених елементів прийнято вводити узагальнені вектори та матриці [123], що складаються з компонент механічного та електричного полів:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T; \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T; \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, D_1, D_2, D_3\}^T; \quad \bar{\mathbf{p}} = \{p_1, p_2, p_3, -q_s\}^T; \\ \mathbf{p} &= \rho \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^E & -\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & \mathbf{e}^S \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

де матриці $\mathbf{c}^E = \{c_{ij}^E\}$, $\mathbf{e} = \{e_{ik}\}$, $\mathbf{e}^S = \{e_{kk}^S\}$ при поляризації в напрямку осі x_3 мають вигляд (2.38). В (5.7) використовується скорочене позначення для частинної похідної $\varphi_i = \partial \varphi / \partial x_i$. Скінчені елементи, що відповідають рідкому середовищу,

мають один ступінь свободи — тиск p .

Введемо розширений відносно Ξ диференціальний оператор

$$\Theta = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Незалежні польові величини в межах одного окремо взятого скінченного елемента апроксимуються у вигляді лінійної комбінації вузлових значень цих величин:

$$\bar{u}_j(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_{uj}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_j(t), \quad (5.9)$$

де $\mathbf{U}_j(t) = [\bar{u}_j^{(1)} \ \bar{u}_j^{(2)} \ \bar{u}_j^{(3)} \dots \bar{u}_j^{(n_j)}]$ — матриця-вектор узагальнених переміщень у вузлах елемента розміром $1 \times 4n_j$; $\bar{u}_j^{(i)} = [u_{xj}^{(i)}, u_{yj}^{(i)}, u_{zj}^{(i)}, \varphi_j^{(i)}]$ — узагальнене переміщення i -го вузла j -го елемента; n_j — кількість вузлів j -го елемента; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — координати довільної точки елемента. В формулі (5.9) введена прямокутна матриця $\mathbf{N}_{uj} = [\mathbf{I} N_{uj}^{(1)} \ \mathbf{I} N_{uj}^{(2)} \ \dots \mathbf{I} N_{uj}^{(n_j)}]^T$ [128], де \mathbf{I} — одинична матриця 4×4 , а за $N_{uj}^{(i)}$ позначено функції форми для i -го вузла. Зазвичай функції форми обираються у формі полінома першого або другого порядку, які дорівнюють одиниці в одній з вершин елемента i та нулеві в інших точках: $N_{uj}^{(i)}(\mathbf{x}_i) = 1$, $N_{uj}^{(i)}(\mathbf{x}_j) = 0$, \mathbf{x}_i — координата i -го вузла ($i \neq j$). При лінійній інтерполяції маємо скінченні елементи першого порядку, що мають виключно кутові вузли. Елемен-

ти другого порядку (квадратичні елементи) мають проміжні вузли між кутовими та реалізують параболічну апроксимацію, яку називають квадратичною інтерполяцією.

Тоді узагальнений вектор деформацій у вузлі i елемента j визначається за формулою

$$\check{\boldsymbol{\varepsilon}}_j(\mathbf{x}, t) = \Theta \mathbf{N}_{uj}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_j(t). \quad (5.10)$$

Матеріальні співвідношення з врахуванням механічних та діелектричних втрат представляються в вигляді

$$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \left(\check{\boldsymbol{\varepsilon}} + \Psi_d \dot{\check{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \right), \quad (5.11)$$

де $\Psi_d = \{\psi_{dij}\} = \begin{cases} \beta_d, & i=j=1\dots6; \\ \gamma_d, & i=j=4\dots9; \end{cases}$ — матриця (9×9) , що формується з скалярних ко-

ефіцієнтів демпфування. Врахування п'єзоелектричних втрат на даний момент в промислових МСЕ пакетах не реалізовано.

В узагальнених змінних (5.7) реалізована аналогія між механічними та електричними змінними, що дозволяє записувати функціонал (5.1) у формі

$$J_p = \int_{t_0}^{t_1} L_p dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\Omega_p} \frac{1}{2} \left(\check{\boldsymbol{\sigma}}^T \check{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\check{\mathbf{u}}}^T \rho \dot{\check{\mathbf{u}}} \right) d\Omega - \int_{S_p} (\check{\mathbf{u}}^T \check{\mathbf{p}}) dS \right] dt, \quad (5.12)$$

що співпадає з виразом функціоналу для чисто пружного тіла (5.5). З умови стаціонарності функціонала (5.12) $\delta J(\check{\mathbf{u}}) = 0$ після підстановки (5.10) та (5.11) маємо систему рівнянь

$$\frac{\partial L(\check{\mathbf{u}})}{\partial \check{\mathbf{u}}_i} = 0, \quad i=1\dots4. \quad (5.13)$$

Наступним етапом є дискретизація розрахункової області. Розбиваємо розрахункову область $\Omega = \Omega_p \cup \Omega_e \cup \Omega_a$ на окремі елементи Ω^j ($\Omega = \sum \Omega^j$, $j=1\dots k$, k — кількість елементів), що не перетинаються та взаємодіють в вер-

шинах-вузлах, тобто суцільне тіло замінюються на тіло зі скінченною кількістю ступенів свободи. Неперервні поля механічних та електричних змінних всередині елементів визначаються деякою попередньо заданою сукупністю апроксимуючих функцій за їх вузловими значеннями. Сили взаємодії, розподілені на границях елементів, а також об'ємні сили замінюються на еквівалентні в енергетичному сенсі зосереджені вузлові сили. Апроксимація шуканих величин проводиться окремо на геометрично простих елементах, при чому апроксимуючі функції дорівнюють нулеві в усіх точках, окрім елемента, що розглядається. В залежності від типу аналізу, типу елемента конструкції та способу генерації сітки використовуються одновимірні елементи (для стержневих тіл та конструкцій), трикутні та прямокутні плоскі елементи, об'ємні елементи у формі тетраедра, гексаедра, призми, піраміди.

Користуючись властивістю аддитивності інтегралу, інтегрування по всій розрахунковій області Ω замінюється скінченною сумою інтегралів по малих підобластих Ω^j з поверхнями S^j . Функціонал (5.9) записується як

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^k L^j dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^k \left[\int_{\Omega^j} \frac{1}{2} \left(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{B} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\psi}_d \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T) + \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \alpha_d \int_0^t \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}} d\tau \right) d\Omega - \int_{S^j} (\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}}) dS \right] dt. \quad (5.14)$$

З врахуванням співвідношень (5.9), (5.10), (5.13) лагранжіан L^j в об'ємі Ω^j відносно узагальненого вектора переміщень має вигляд

$$\begin{aligned} L^j = & \int_{\Omega^j} \frac{1}{2} \left((\Theta \mathbf{N}_{\mathbf{u}_j} \cdot \mathbf{U}_j)^T \cdot \mathbf{K} \cdot (\Theta \mathbf{N}_{\mathbf{u}_j} \cdot (\mathbf{U}_j + \boldsymbol{\beta}_d \dot{\mathbf{U}}_j)) + (\mathbf{N}_{\mathbf{u}_j} \cdot \dot{\mathbf{U}}_j)^T \boldsymbol{\rho} (\mathbf{N}_{\mathbf{u}_j} \cdot \dot{\mathbf{U}}_j) \right) d\Omega - \\ & - \int_{S^j} \left((\mathbf{N}_{\mathbf{u}_j} \cdot \mathbf{U}_j)^T \bar{p} \right) dS. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Задача знаходження нуля першої варіації лагранжіана δL^j в п'єзоелектричній області Ω^j зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь за часом

$$\frac{\partial L^j}{\partial U_j^k} = 0, \quad k=1\dots 4n_j, \quad (5.16)$$

де U_j^k — компоненти вектора \mathbf{U}_j . В диференціалах (5.16) враховується наступне перетворення похідних:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} (\dot{u}^2) = \dot{u} \frac{d\dot{u}}{du} = \frac{d\dot{u}}{du} \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{u}(u(t))) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \ddot{u}.$$

Система (5.16) може бути записана у матричній формі

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j + \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{U}}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j, \quad (5.17)$$

де структура елементних матриць мас, демпфування і жорсткості та матриць-ствопців узагальнених переміщень і зовнішніх навантажень для j -того елемента має вигляд

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu}^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu}^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu}^j & \mathbf{K}_{u\varphi}^j \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^j & \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^j \\ \mathbf{\Phi}^j \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^j \\ \mathbf{F}_{\Phi}^j \end{bmatrix}.$$

У тривимірній постановці система (5.17) містить $4n_j$ алгебраїчних рівнянь для елемента j .

Компоненти системи розв'язуючих рівнянь (5.17) визначаються як

$$\mathbf{M}_j = \int_{\Omega^j} \mathbf{N}_{\mathbf{u}^j}^T \boldsymbol{\rho} \mathbf{N}_{\mathbf{u}^j} d\Omega; \quad \mathbf{K}_j = \int_{\Omega^j} (\Theta \mathbf{N}_{\mathbf{u}^j})^T \mathbf{C} (\Theta \mathbf{N}_{\mathbf{u}^j}) d\Omega; \quad \mathbf{F}_j = \int_{S^j} \mathbf{N}_{\mathbf{u}^j}^T \tilde{\mathbf{p}} dS. \quad (5.18)$$

Елементна матриця механічного демпфування \mathbf{C}_{uu}^j згідно до моделі демпфування за Релеєм записується як лінійна комбінація матриць \mathbf{M}_j , \mathbf{K}_j (2.98):

$$\mathbf{C}_{uu}^j = \alpha_d \mathbf{M}_{uu}^j + \beta_d \mathbf{K}_{uu}^j.$$

Матриці \mathbf{M}_j , \mathbf{C}_j , \mathbf{K}_j та вектор \mathbf{F}_j розробляються для конкретних скінченних елементів канонічної форми (правильний куб, піраміда, прямокутник, трикутник). При розбитті тіла на скінченні елементи складові в основному відрі-

зняються від канонічних форм, і для запису системи (5.17) для конкретного елемента потрібно враховувати функції його трансформації до канонічної форми.

Наступим етапом є ансамблювання, тобто генерація в циклі загальних матриць системи шляхом додавання всіх елементних матриць (5.18) з врахуванням зміни нумерації вузлів при переході від локального $\mathbf{U}_j(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_j^{(1)} & \tilde{\mathbf{u}}_j^{(2)} & \dots & \tilde{\mathbf{u}}_j^{(n_j)} \end{bmatrix}$ до глобального вектора узагальнених переміщень $\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)} & \tilde{\mathbf{u}}^{(2)} & \dots & \tilde{\mathbf{u}}^{(m)} \end{bmatrix}$, де $\tilde{\mathbf{u}}^{(i)} = [u_1(\mathbf{x}_i), u_2(\mathbf{x}_i), u_3(\mathbf{x}_i), \varphi(\mathbf{x}_i)]$, \mathbf{x}_i — координата i -го вузла в глобальній нумерації вузлів тіла, m — загальна кількість вузлів дискретної моделі. Оскільки відбувається підсумовування рівнянь (5.17), отримана система має форму, аналогічну до (5.17):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (5.19)$$

де матриця мас, матриця жорсткостей, вектор навантажень визначаються як

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j^T \mathbf{M}_j \mathbf{L}_j; \quad \mathbf{C} = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j^T \mathbf{C}_j \mathbf{L}_j; \quad \mathbf{K} = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j^T \mathbf{K}_j \mathbf{L}_j; \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^k \mathbf{L}_j^T \mathbf{F}_j. \quad (5.20)$$

В (5.20) введено \mathbf{L}_j — матриці перетворення, за допомогою яких здійснюється перебудова елементних рівнянь (5.18) до глобальної системи координат з врахуванням глобальної нумерації вузлів. Матриці (5.20) при коректному підході до глобальної нумерації вузлів мають блочно-діагональну форму, що значно спрощує процедуру розв'язання системи (5.19).

Для інтегрування системи (5.19) за часом вводиться розбиття часового інтервалу з кроком Δt . Для запуску процедури інтегрування початкові умови (2.6) записуються в дискретній формі

$$\mathbf{u}_i^0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, 0) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{x}_i); \quad \mathbf{v}_i^0 = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, 0) = \mathbf{W}_0(\mathbf{x}_i) \quad (i=1..m). \quad (5.21)$$

Початкові значення електричного потенціалу та його швидкості узгоджуються з початковими значеннями механічних переміщень (5.21) способом, опи-

саним в розділі 4. При інтегруванні враховуються граничні умови $\varphi|_{S_\varphi} = V_0(0)$.

При потребі диференціальні рівняння записуються в дискретній формі та зводяться до системи алгебраїчних рівнянь. Початкові умови для узагальнених переміщень мають вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_i^0 &= \left(Y_{01}(\mathbf{x}_i), Y_{02}(\mathbf{x}_i), Y_{03}(\mathbf{x}_i), \varphi_i^0 \right); \\ \tilde{\mathbf{v}}_i^0 &= \left(W_{01}(\mathbf{x}_i), W_{02}(\mathbf{x}_i), W_{03}(\mathbf{x}_i), \dot{\varphi}_i^0 \right), \quad (i=1\dots m).\end{aligned}\quad (5.22)$$

За (5.22) формується глобальний вектор початкових умов $\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0$. При $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{W}_0 = 0$ та $V_0(0) = \dot{V}_0(0) = 0$ початкові умови є нульовими.

Для інтегрування за часом використовуються явні або неявні різницеві схеми та їх комбінації. Найчастіше використовується двопараметрична чисельна схема Ньюмарка у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}}^k &= \dot{\mathbf{U}}^{k-1} + \left[(1-b)\ddot{\mathbf{U}}^{k-1} + b\ddot{\mathbf{U}}^k \right] \Delta t; \\ \mathbf{U}^k &= \mathbf{U}^{k-1} + \dot{\mathbf{U}}^{k-1} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - a \right) \ddot{\mathbf{U}}^{k-1} + a \ddot{\mathbf{U}}^k \right] \Delta t^2,\end{aligned}\quad (5.23)$$

де a, b — параметри схеми Ньюмарка, що забезпечують стійкість обчислювального процесу.

При застосуванні (5.23) система диференціальних рівнянь (5.19) в момент часу $t_k = k\Delta t$ зводиться до системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K}'\mathbf{U}^k = \mathbf{F}'^k, \quad (5.24)$$

де

$$\mathbf{K}' = \frac{1}{a\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}; \quad \mathbf{F}'^k = \mathbf{F}^k + \mathbf{M} \left(\frac{1}{a\Delta t^2} \mathbf{U}^{k-1} + \frac{1}{a\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{k-1} + \left(\frac{1}{2a} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}^{k-1} \right).$$

Систему (5.24) розв'язується на кожному часовому шарі доступними алгебраїчними засобами. Вектор \mathbf{U}^k розбирається на компоненти і формуються ма-

сиви \mathbf{U}_1^k , \mathbf{U}_2^k , \mathbf{U}_3^k , Φ^k , що описують поле переміщень та електричного потенціалу в кожен момент часу. За цими значеннями на кожному часовому шарі обчислюються деформації і напруження за формулами (5.10), (5.11).

5.1.2. Особливості побудови програм розрахунку неоднорідних п'єзоелектричних тіл з врахуванням демпфування коливань

За понад 50 років існування метод скінченних елементів проявив себе як універсальний та легко налаштовуваний надійний підхід до задач стаціонарної та нестаціонарної механіки деформівного твердого тіла, механіки спряжених полів, акустики, гідродинаміки, електромагнетизму та ін. На основі МСЕ (FEA, FEM) працює переважна більшість призначених для моделювання різноманітних фізичних процесів САЕ-систем (Computer-Aided Engineering). Розрахунок п'єзоелектричних тіл реалізований в пакетних програмних комплексах ACELAN, ANSYS, ATILA, COSMOS/M, Feapiezo, Flexpde, Pzflex, тощо. Протягом останніх 40 років світовим лідером серед САЕ-систем став скінченноелементний розрахунковий комплекс ПК ANSYS. В комплексі ANSYS Multiphysics реалізовані моделі скінченних елементів та засоби розв'язання задач теорії пружності, електродинаміки, гідродинаміки, акустики, зв'язані задачі термоелектропружності, гідропружності та ін. при гармонічних та нестаціонарних навантаженнях. Він проявив себе як потужна надійна багатофункціональна обчислювальна система з розвинутим користувачським інтерфейсом та широкими розрахунковими можливостями. Розширені налаштування можливі завдяки інтеграції програмних елементів та складання програм командною мовою APDL (ANSYS Parametric Design Language).

Процедура виконання скінченноелементних розрахунків (і, відповідно, програма APDL) включає п'ять основних етапів [40, 72, 84, 128, 305]. На першому етапі вибираються одиниці вимірювання, вводяться основні параметри, що визначають розмір елемента, геометричні характеристики, матеріальні константи, параметри чисельної схеми, коефіцієнти, що використовуються в подальших

обчисленнях. Формування такого блоку на початку програми робить зручним зміну вхідних параметрів та контроль розрахункових даних. Введення числової змінної ANTPR, що відповідає за тип аналізу (STATIC, MODAL, HARM, TRANS), дає змогу переключати тип аналізу в готовій програмі і таким чином будувати уніфікований підхід до динамічних задач.

Другий етап виконується в модулі препроцесора комплексу «/PREP7» і включає вибір типів скінченних елементів, завдання матеріальних властивостей і створення скінченноелементної сітки. За типом апроксимуючих функцій $N_u(x)$ в (5.9) скінченні елементи можуть бути лінійними та квадратичними. Лінійні елементи містять вузли лише в вершинах, тоді як квадратичні мають додаткові точки на ребрах та апроксимують шукані величини поліномом другого порядку, тому кількість вузлів в квадратичного елемента вдвічі більша, ніж у лінійного. Квадратичне наближення, як правило, показує вищу точність порівняно з лінійним наближенням при тій самій кількості точок розбиття.

Для тривимірного динамічного аналізу електропружин тіл найчастіше використовуються лінійний елемент SOLID5 або квадратичні елементи SOLID226, SOLID227 з відповідним набором параметрів. Інші скінченні елементи, що використовуються в розрахунку спряжених полів, наведено в додатку 5.1. Введені в програмний комплекс процедури колапсу вершин дозволяють перетворювати гексагональні елементи в тетрагональні, чотирикутні в трикутні, квадратичні в лінійні. Скінченні елементи, що використовуються в розрахунку спряжених полів, наведено в [144]. Тип елемента задається через оператор ET :

ET, ITYPE, Ename, KOP1, KOP2, KOP3, KOP4, KOP5, KOP6, INOPR

де ITYPE – номер типу елементу в проєкті, нумерація починається з 1; Ename – назва скінченного елементу; KOP1, KOP2, KOP3, . . . , KOP6 – параметри скінченно-го елементу відповідно до [144]; INOPR – керування виведенням результатів для цього елемента.

Код для підключення в проєкт, наприклад, елемента SOLID226 з чотирма ступенями свободи UX, UY, UZ, VOLT має вигляд

ET, 1, SOLID226, 1001

! Скінчений елемент для електропружного тіла

Аналогічно підключаємо пружний елемент зі ступенями свободи UX, UY,

UZ:

ET, 2, SOLID5, 2

! Скінчений елемент для пружного тіла

Цифри «1» і «2» є ідентифікаторами введеного типу скінчених елементів в програмі і використовуються для подальшого підключення їх до конкретних скінчених об'ємів. Ці ж ідентифікатори відповідають типу матеріалу. Знак оклику «!» є командою для коментарів.

Для введення лінійних матеріальних характеристик використовується команда MP:

MP, EX, MAT, E_m

! Модуль Юнга, Н/м²

MP, NUXY, MAT, NU_m

! Коефіцієнт Пуассона

MP, DENS, MAT, RO_m

! Густина, кг/м³

Крім EX, NUXY, DENS, ми будемо використовувати наступні ідентифікатори команди MP: ALPD — коефіцієнт демпфування для матриці мас; BETD — коефіцієнт демпфування для матриці жорсткостей; DMPR — сталий структурний коефіцієнт демпфування в гармонічному аналізі. Параметр MAT є ідентифікатором матеріалу, E_m, NU_m, RO_m — визначені раніше відповідні константи в розмірnostях CI.

Для введення таблиць матеріальних характеристик використовуємо команди

TB, Lab, MAT, , ,TBOPT

TBDA, STLOC, C1,C2,...

Матриця модулів пружності при сталому електричному полі \mathbf{c}^E вводиться при Lab=ANEL. При цьому утворюється матриця (6×6), в якій в силу симетрії потрібно заповнити верхню частину. Отримується масив з 21 компонентом, які нумеруються послідовно: компоненти 1-6 — перший рядок матриці \mathbf{c}^E , 7-11 —

другий, починаючи з значення c_{22}^E , і т.д. При Lab=PIEZ вводимо (3×6) матрицю п'єзоелектричних модулів \mathbf{e} , нумерація компонент задається параметром STLOC починаючи з 1 до 18, C1,C2... — значення констант. Матриці діелектричних проникностей при сталих деформаціях $\boldsymbol{\epsilon}^S$ відповідає Lab=DPER, що має 3 діагональні елементи. Не введені компоненти автоматично вважаються нульовими. За замовчуванням діелектричні проникності вводяться як відносні щодо діелектричної проникності вакууму ϵ_0 величини, але для деяких типів елементів при $\epsilon_{ii}^S < 1$ можуть сприйматися як абсолютної. При введенні цих матриць беремо TBOPT=0. Альтернативному набору сталих (матриці \mathbf{s}^E ; \mathbf{d} ; $\boldsymbol{\epsilon}^T$) відповідає TBOPT=1. При обчисленнях система конвертує матриці \mathbf{s}^E ; \mathbf{d} ; $\boldsymbol{\epsilon}^T$ в \mathbf{c}^E ; \mathbf{e} ; $\boldsymbol{\epsilon}^S$ за формулами (2.37).

При введенні матриць констант потрібно врахувати, що порядок компонент в векторах (2.32) $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ в програмному комплексі відрізняється від загально-прийнятого, а саме виконана циклічна перестановка зсувних компонент:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{AN} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})^T; \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{AN} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{12}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13})^T. \quad (5.25)$$

При поляризації, наприклад, в напрямку осі y , як у наступній задачі, матриці матеріальних характеристик, які потрібно ввести в програму, матимуть вигляд

$$\mathbf{c}_{yAN}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_{yAN} = \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon}_{yAN}^S = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & \epsilon_{33}^S \\ 0 & 0 & \epsilon_{11}^S \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Для призначення матеріальних характеристик п'єзоелемента, напрямок поляризації якого не співпадає з глобальною системою координат, необхідно ввести локальну систему координат командою LOCAL або CSYS та узгоджувати елеме-

нту систему координат з локальною. Команда **CSYS,0** задає декартову систему координат, **CSYS,1** — циліндричну систему координат. При заданні властивостей неоднорідно поляризованих тіл для тривимірного розрахунку використовується команда **VATT**, для двовимірного **AATT**:

LOCAL, 11, 0, , , -90	! creates CS11, rotated on -90
CSYC,0	! Activates Cartesian CS
ASEL, S, AREA, ,1	! Select Area1
AATT,1, ,1	! Area1 has type1
ASEL, S, AREA, ,2	! Select Area2
AATT,1, ,1,11	! Area2 has type1 and is associated with CS11

В п'єзоелектричному аналізі методом скінченних елементів демпфування враховується швидше на якісному рівні, хоча моделі демпфування в МСЕ постійно модернізуються. Загалом матриця демпфування \mathbf{C}_u для механічних полів визначається наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_u = & \alpha_d \mathbf{M}_u + \left(\beta_d + \frac{\xi_d}{2\pi\Omega} \right) \mathbf{K}_u + \sum_{j=1}^{n_m} \left(\alpha_{dj} \mathbf{M}_{uj} + \left(\beta_{dj} + \frac{\xi_{dj}}{2\pi\Omega} \right) \mathbf{K}_{uj} \right) + \\ & + \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{k=1}^{n_s} \left(\alpha_p [\mathbf{M}_{uk}]_i + \beta_p [\mathbf{K}_{uj}]_i \right) + \sum_{k=1}^{n_e} (\mathbf{C}_k + \mathbf{G}_k). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Тут α_d , β_d — глобальні параметри класичного способу врахування демпфування за Релеєм (2.107), що визначаються командами **ALPHAD** і **BETAD** відповідно. Матеріально залежне демпфування описується коефіцієнтом альфа-демпфування α_{dj} або бета-демпфування β_{dj} (j — номер матеріалу, n_m — кількість матеріалів), що задаються як властивість матеріалу командами **MP,ALPD,MAT,VALUE**, **MP,DAMP,MAT,VALUE**, або **TB,SDAMP,,,ALPD**, **TB,SDAMP,,,BETD**. Ці команди описують властивості лінійного матеріалу і можуть бути використані для визначення демпфування тіла в цілому. Щоб задати унікальне демпфування за Релеєм для частини матеріалу (α_p , β_p), можна скористатися командами для таблиць даних (**TBFIELD**). Команди таблиць даних можуть залежати від частоти, температури або

часу. Частотно-залежні властивості підтримуються лише для повного гармонічного аналізу. Частотно-незалежний коефіцієнт демпфування ξ_d представляє відношення фактичного демпфування до критичного та вказується як десяткове число за допомогою команди DMPRAT. Матеріальний коефіцієнт демпфування ξ_{dj} задається командою **MP**, DMPR, MAT, VALUE,. \mathbf{C}_k – елементна матриця демпфування, \mathbf{G}_k – елементна матриця гіроскопічного демпфування (демпфування сил Коріоліса).

Потрібно відмітити, що альфа-демпфування (коефіцієнт α_d) може призвести до небажаних результатів, якщо в модель була введена штучно велика маса. Одним із поширених прикладів є додавання штучно великої маси до основи конструкції для полегшення введення спектру прискорення. Коефіцієнт альфа-демпфування, який помножено на матрицю маси, створюватиме штучно великі сили демпфування в такій системі, що призведе до неточностей у вхідному спектрі, а також у реакції системи. Бета-демпфування (коефіцієнт β_d) та матеріальне демпфування (α_{dj} , β_{dj}) можуть призвести до небажаних результатів у нелінійному аналізі. Ці коефіцієнти множаться на матрицю жорсткості, яка в нелінійному аналізі постійно змінюється. Бета-демпфування не застосовується до матриць жорсткості, створених контактними елементами. Результатуюча зміна демпфування іноді може бути протилежною фактічній зміні демпфування, яка може відбуватися у фізичних структурах. Наприклад, у той час як фізичні системи, в яких зменшується жорсткість через пластичні деформації, зазвичай відчувають відповідне збільшення демпфування, механічна модель APDL, для якої прописане бета-демпфування, при розвитку пластичних деформацій ілюструє зменшення демпфування.

Рівняння Максвела з врахуванням діелектричних втрат в скінченноелементному аналізі має вигляд

$$-\mathbf{C}_{\varphi\varphi} \cdot \dot{\Phi} + \mathbf{K}_{u\varphi}^T \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = -\mathbf{F}_\varphi,$$

де $\mathbf{C}_{\varphi\varphi}$ — матриця діелектричних втрат, пропорційна матриці $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$, з множником, що містить тангенс кута діелектричних втрат γ_d , який вводиться командою **MP,LSST**. Врахування п'єзоелектричних втрат в сучасних MCE комплексах не проводиться.

Геометрична модель досліджуваного об'єкта може бути імпортована з графічного файлу або шляхом створення геометричних примітивів за допомогою команд **AL** (відрізок), **BLC4** (прямокутник), **BLOCK** (паралелепіпед), **CONE** (кононус), **CYL4** (циліндр), **PRISM** (призма), **SPH5** (сфера) та ін. Набір параметрів для цих та інших команд наведено в [253]. Створення паралелепіпеда, наприклад, можна описати трьома способами:

BLOCK, X1, X2, Y1, Y2, Z1, Z2

або

BLC4, XCORNER, YCORNER, WIDTH, HEIGHT, DEPTH

або

BLC5, XCENTER, YCENTER, WIDTH, HEIGHT, ! Creates rectangular

VEXT,ALL,,0,0,H !Extrudes rectangular on height H

В двовимірних задачах використовуються елементи **PLANE13** і **PLANE223**. При створенні геометричної моделі та моделей матеріалів потрібно врахувати, що поперечний переріз лежить в площині ХОY. Для **PLANE13** при **KEYOPT(3)=0** розв'язується задача про плоску деформацію (plane strain); при **KEYOPT(3)=1** підключається віссиметричний розрахунок (axysymmetrical), при чому вісь Y є віссю обертання; при **KEYOPT(3)=2** розв'язується задача про плоский напружений стан.

Подальший принцип роботи пов'язаний з виділенням окремих об'єктів для їх модифікації, призначення матеріалів, навантажень, граничних умов. Для виділення окремих об'ємів (volumes) використовується команда **VSEL**, площ (areas) **ASEL**, ліній (lines) **LSEL**, ключових точок (key points) **KSEL**, елементів (elements) **ESEL**, вузлових точок (nodes) **NSEL**. Для виділення всіх об'єктів використовується команда **ALLSEL**, ALL. Подібний спосіб генерації команд, коли перша літера вказує на тип об'єкта, з яким відбувається робота, є широковживаним в APDL.

Призначення розміру елементів, матеріалу та типу елемента, а також розбиття виконується за допомогою команд

ESIZE,SIZEL	! element size
VSEL,S,,,1	! New subset of volumes, volume1
TYPE,1	! Element type for selected objects
MAT,1	! Material type for selected objects
VMESH,ALL	! Meshing for selected volumes
NROTAT, ALL	! Rotates element CS to global CS

Для генерації сітки методом sweep використовується команда **VSWEEP,ALL**. Після створення сітки узгоджуємо елементні системи координат з глобальною.

Наступним кроком є задання граничних умов. Для задання, наприклад, електричного потенціалу на електроді вибираємо конкретний об'єм, всі вузли в ньому, з них вибираємо вузли, що мають певні координати, зв'язуємо їх ступінь вільності VOLT командою **CP**, вибираємо довільний вузол виборки, наприклад, вузол з найменшим номером, та присвоюємо відповідне значення потенціалу:

VSEL,S,,,1	! Select volume 1
NSLV,S,1	! Select nodes of volume 1
NSEL,R,LOC,Y,0	! Reselect nodes at Y=0
CP,NEXT,VOLT,ALL	! Set next degree of freedom VOLT
*GET,NDN,NODE,0,NUM,MIN number of selected nodes	! Creates variable NDN with mimimum
D,NDN,VOLT,V0	! Sets Volt=V0 for NDN node

Щоб задати на електроді заряд, для елементів PLANE13, SOLID5, SOLID98 після команди **CP** вводимо рядок

F,NODE,AMPS,VALUE	! Current flow
--------------------------	----------------

Для елементів PLANE223, SOLID226, SOLID227 використовується CHRG

F,NODE, CHRG,VALUE	! Electric charge
---------------------------	-------------------

Команда **D, Node, Lab, VALUE**, визначає обмеження на ступені свободи для

вузлів і може бути використана для задання кінематичних граничних умов при Lab=UX, UY або UZ. Для задання умов симетрії відносно, наприклад, координати Z в виділяємо відповідні вузли і вводимо **DSYM,SYMM,Z,1**, де 1 — номер координатної системи. Силове навантаження для виділених вузлів задається командою **F, ALL, Lab, VALUE**, де Lab=FX, FY, або FZ (сили); MX, MY, або MZ (моменти).

Третій етап розрахунку виконується в модулі процесора **/SOLU**. На цьому етапі вказується тип аналізу, вибираються розрахункові опції, задаються значення параметрів чисельної схеми. Для нестационарного аналізу маємо наступний блок команд:

ANTYPE,TRANS	! Transient analysis
TRNOPT,FULL	! Full analysis
OUTRES,BASIC,ALL	! Results recording into file
TINTP, , ALPHA, DELTA, THETA,	!Parameters of numerical scheme
TIME,TINV	! Time interval

Тут ALPHA, DELTA — параметри нестационарного аналізу 2-го порядку (схема інтегрування Ньюмарка (5.23)), THETA — параметри нестационарного аналізу 1-го порядку (наприклад, для рівняння тепlopровідності). За замовчуванням ALPHA=0.2525, DELTA=0.505, THETA=0. Схема інтегрування Ньюмарка (5.23) є абсолютно стійкою, тому питання вибору інтервалу часу DT важливе перш за все для достовірності результатів. Питання вибору розміру елемента та кроку по часу пов'язане з розмірами тіла та швидкістю поширення електропружної хвилі в ньому. На практиці для неявних схем для початку достатньо брати крок по часу DT в 10 разів меншим за максимальний розмір елемента SIZEL, розмір елемента — в 5-10 разів менший за мінімальні лінійні розміри тіла. Для верифікації результатів бажано проводити кілька розрахунків з різними розмірами елемента і кроком по часу. Важливо також дослідити реакцію системи на зміну типу елемента та типу аналізу. Численні дослідження показали, що при використанні скінченних елементів більш високого порядку швидкість збіжності розв'язку зростає порівняно з збільшенням порядку системи рівнянь за рахунок зменшення розміру елементів.

На цьому ж етапі формулюються початкові умови та динамічні граничні умови. Поштовхові умови (5.22) за замовчуванням вважаються нульовими. Як і раніше, електричний потенціал в вузлах сітки задається командою **CP** або **D**, кінематичні граничні умови командою **D**, силові навантаження — командою **F**. При цьому лінійну зміну навантаження від нульового до кінцевого значення (ramped) в кінцевий момент часу **TINV** задаємо командою **KBC**, 0, ступінчасте (stepped) навантаження маємо при **KBC**, 1. Запуск розрахунку виконується командою **SOLVE**. При інших функціях навантаження команда **SOLVE** виконується в циклі зі зміною навантаження та часового інтервалу:

*DIM,V,ARRAY,TINV/DT	! Creating of array V(i)
*DO,i,1,TINV/DT	! DT - time step
V(i)=V0*SIN(W*i*DT)	
D,NUP,Volt,V(i)	! fi(ti)=V(i) in node NUP
TIME,i*DT	! New time interval
KBC, 1	! Stepped load
SOLVE	! Runs SOLVE procedure
*ENDDO	! End of cycle

Масив $V(i)$ може бути створений в окремому циклі на початковому етапі програми, відразу прописуватися функцією в команду **D** або завантажуватися з зовнішнього файла.

Аналіз отриманих результатів проводиться в блоці постпроцесора. Ілюстрація колірних або графічних розподілів характеристик електромеханічного стану на моделі тіла в заданий момент часу реалізована в модулі **/POST1**. Графічне і табличне відображення основних величин як функцій від часу в окремому вузлі або елементі виконується в модулі постпроцесорної обробки **/POST26**.

Вірогідність отриманих результатів перевіряється шляхом розв'язання тестових задач, що мають верифіковані розв'язки, відповідність отриманих розподілів фізичній стороні задачі, апробацією розрахункової програми на задачах, розв'язки до яких знайдені аналітично або чисельно з застосуванням інших підходів, порівнянням окремих результатів з натурними експериментами.

5.2. Аналіз динаміки функціонально-неоднорідного секціонованого циліндра з коловою поляризацією

Проведемо модальний, гармонічний та нестаціонарний розрахунок п'єзоелектричного секціонованого циліндра з функціональною зміною матеріальних характеристик в окружному напрямку. Переключення типу динамічного аналізу вводиться за допомогою параметра ANTYPPR. При ANTYPPR=0 викликаємо статичний аналіз, ANTYPPR=1 – модальний, ANTYPPR=2 – гармонічний аналіз, при ANTYPPR=3.1 – нестаціонарне навантаження функцією типу Хевісайда, ANTYPPR=3.2 відповідає нестаціонарному навантаженню функцією $V(t)$.

5.2.1. Скінченно-елементна модель секціонованого циліндра

Розглядається функціонально-неоднорідний секціонований циліндр з окружною поляризацією (рис. 5.1). Циліндр складається з N поляризованих в окружному напрямку секцій, при чому сусідні секції зустрічно поляризовані. Внутрішній радіус циліндра R_1 , зовнішній радіус R_2 , висота $2H$ при /UNITS,SI, матеріал – поляризована в напрямку колової координати п'єзокераміка. Задаємо тип скінченного елементу командою

ET,1,SOLID226,1001

! 20 nodes-FE for electroelastic element

Для реалізації функціональної неоднорідності в блоці /PREP7 створюємо в циклі М матеріалів, характеристики яких пропорційні до коефіцієнта b_i , що лінійно змінюється від 0.8 до 1.2. Для кожного матеріалу вводимо таблиці матеріальних характеристик відповідно до (5.21) :



Рис. 5.1. Секціонований циліндр з окружною поляризацією

***DO,i,1,M**
bi=0.4*i/M+0.8 ! FGM coefficient
TB,DPER,i,,,0 ! Matrix of Epsijs for SOLID226
TBDA,1,EPS11S*bi,EPS33S*bi,EPS11S*bi
TB,ANEL,i,,,0 ! Piezoceramics with polarization in Y direction
TBDA,1,C11E*bi, C13E*bi, C12E*bi ! Matrix of CijE
TBDA,7,C33E*bi, C13E*bi
TBDA,12,C11E*bi
TBDA,16,C44E*bi
TBDA,19,C44E*bi
TBDA,21,C66E*bi
TB,PIEZ,i,,,0 ! Matrix of eij
TBDA,2,EP31*bi
TBDA,5,EP33*bi
TBDA,8,EP31*bi
TBDA,10,EP15*bi
TBDA,15,EP15*bi
MP,DENS,i,RO_P*bi ! Density
MP,DMPR,i,RATIO ! Structural damping
MP,DAMP,i,BETA_C ! Stiffness coefficient
MP,ALPD,i,ALFA_M ! Matrix coefficient

***ENDDO**

Віднесена до полярної системи координат секція циліндра створюється командами

CSYS,1 ! Cylindrical CS
CYL4,0,0,R1,0,R2,ALFA ! Creating of plane cylindrical section
VEXT,ALL,,,0,0,H ! Extruding of cylindrical section
LSEL,S,RADIUS,,R1 !Selection of lines, located at X=R1
LSEL,A,RADIUS,,R2 !Also select lines, located at X=R2
LESIZE,ALL, , ,M, , , ,1 !Divide them on M parts
ALLSEL,ALL

де $\text{Alfa}=360/N$ – кут, що відповідає секції, $d\text{Alfa}=\text{Alfa}/M$ – кут, що відповідає матеріалу. Розбиття виконується за допомогою команди **VMESH,ALL** при **TYPE,1** **MAT,1**. Зміна типу матеріалу для окремих наборів елементів виконується за допомогою циклу

<code>*DO,i,1,M</code> <code> ESEL,S,CENT,Y,(i-1)*dALFA,i*dALFA</code> <code> EMODIF,ALL,MAT,i</code> <code> NROTAT,ALL</code> <code>*ENDDO</code>	! Cycle by number of materials ! Selecting of elements by location ! appoint i MAT to selected elements ! Rotating of element CS to CSYS,1
---	---

На вузли поверхонь $Y=0$, $Y=\text{Alfa}$, $Z=0$ накладаються умови симетрії вздовж відповідної вісі. На поверхні $Y=0$ задається нульовий потенціал $\text{VOLT}=0$, при $Y=\text{Alfa}$ задається потенціал $\text{VOLT}=V_0$.

В блоці **/SOLU** за допомогою умовного оператора ***IF** вибираємо значення **ANTYPE** відповідно до параметра **ANTYPFR** та задаємо необхідні для вираного типу аналізу параметри. Виконавши розрахунок, аналіз результатів проводиться за допомогою команд блоків **/POST1** і **/POST26**. Віображення повного циліндра з врахуванням симетрії виконується командою

/EXPAND,N,POLAR,HALF,,ALFA

Розглянемо циліндр, що складається з $N=12$ секцій, $H=0,2 \text{ м}$, $R_1=0,03 \text{ м}$, $R_2=0,05 \text{ м}$, $M=5$. Розглядається функціонально-неоднорідний матеріал на основі м'якої п'єзокераміки PZT-5A або жорсткої PZT-4 (Дод. В, С). Вважаємо, що матеріальні характеристики ФГМ змінюються лінійно в коловому напрямку пропорційно до функції

$$b(\theta)=0,8+0,4\theta/\alpha_N, \quad \theta \in [0, \alpha_N], \quad \alpha_N = 2\pi/N. \quad (5.24)$$

Функція $b(\theta)$ моделює неоднорідність заповнення форми порошковою сумішшю складових цирконат-титанат свинцю на етапі виготовлення елемента конструкції з розрахунком на відхилення його вихідних параметрів від табличних в межах 20% за рахунок неоднорідного пресування. При цьому при осеред-

ненні за об'ємом матеріальні характеристики дорівнюють табличним. Розподіл може бути обраний у вигляді іншої функції та описувати комбінацію різних матеріалів, що повинна відповідати технічним вимогам щодо конкретного конструктивного елементу та технологічним можливостям виробника.

5.2.2. Аналіз статичного електромеханічного стану

Напружене-деформований стан циліндра з ФГМ з PZT-5A при статичному навантаженні різницею потенціалів $V_0=100V$ проілюстровано на рис. 5.2, 5.3. На рис. 5.2 наведено радіальні поздовжні переміщення точок циліндра в порівнянні з недеформованою сіткою. Розглядається половина циліндра з площею симетрії $z=0$. Сітка містить $5\times4\times10$ елементів. Бачимо, що циліндр зменшився в діаметрі, що відповідає додатній різниці потенціалів, та подовжився, що відповідає очікуваній фізичній картині. Максимальні радіальні переміщення (за модулем) виникають на внутрішній поверхні поблизу площини симетрії $z=0$.

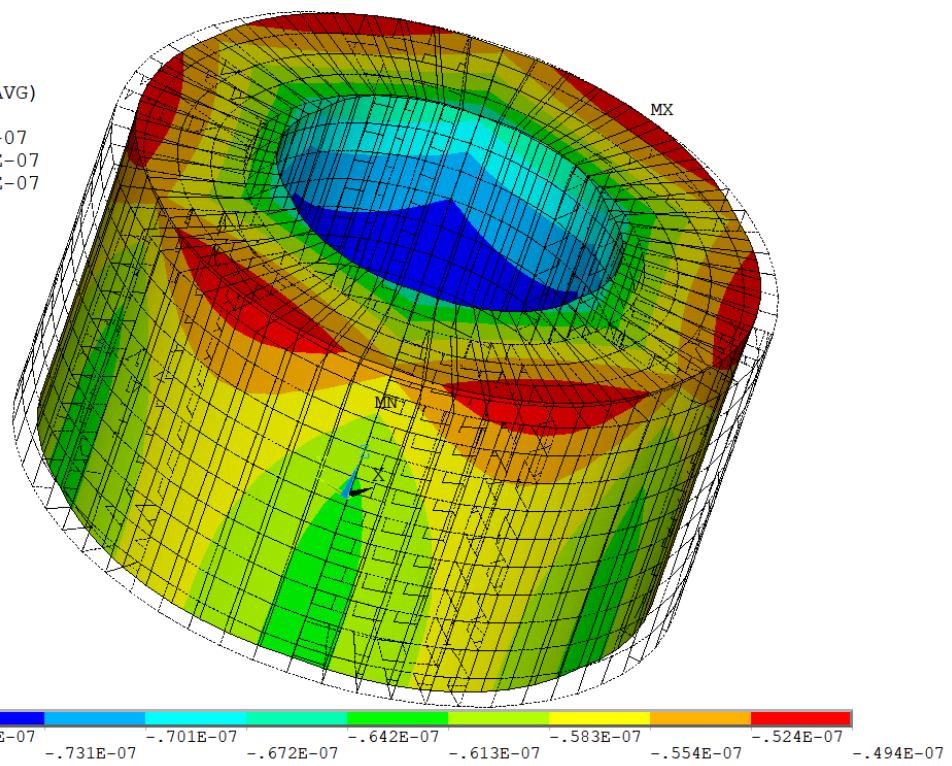
Поздовжні переміщення поблизу площини симетрії $z=0$ мають паралельні до вісі z лінії рівня, що відповідає принципу Сен-Венана та свідчать про те, що для досить довгих циліндрів можна переходити до задачі про плоску деформацію. Для подальшого аналізу випишемо переміщення точок зовнішнього контуру циліндра:

Таблиця 5.1

Координати точки	PZT-5A		PZT-4	
	$u_r, 10^{-7} \text{ м}$	$u_z, 10^{-7} \text{ м}$	$u_r, 10^{-7} \text{ м}$	$u_z, 10^{-7} \text{ м}$
($R_2, 0, 0$)	-0,58	0	-0,44	0
($R_2, \alpha, 0$)	-0,63	0	-0,49	0
($R_2, 0, H$)	-0,49	0,34	-0,39	0,26
(R_2, α, H)	-0,55	0,33	-0,43	0,22

NODAL SOLUTION

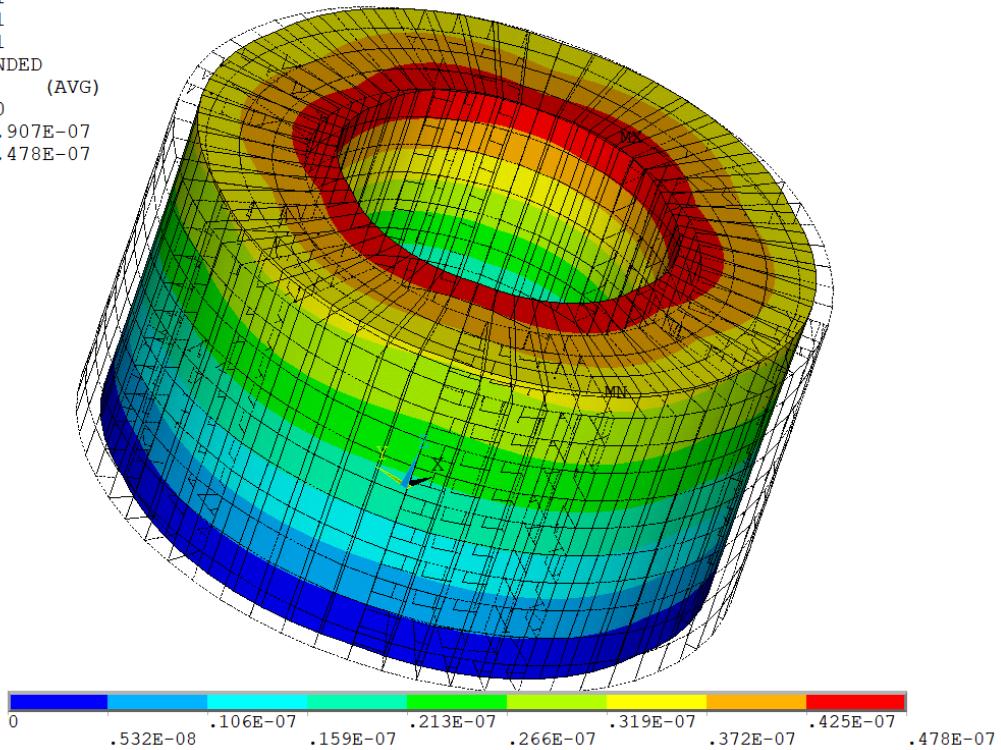
```
STEP=1
SUB =1
TIME=1
/EXPANDED
UX      (AVG)
RSYS=0
DMX =.907E-07
SMN =-.760E-07
SMX =-.494E-07
```



a) радіальні переміщення

NODAL SOLUTION

```
STEP=1
SUB =1
TIME=1
/EXPANDED
UZ      (AVG)
RSYS=0
DMX =.907E-07
SMX =.478E-07
```



б) поздовжні переміщення

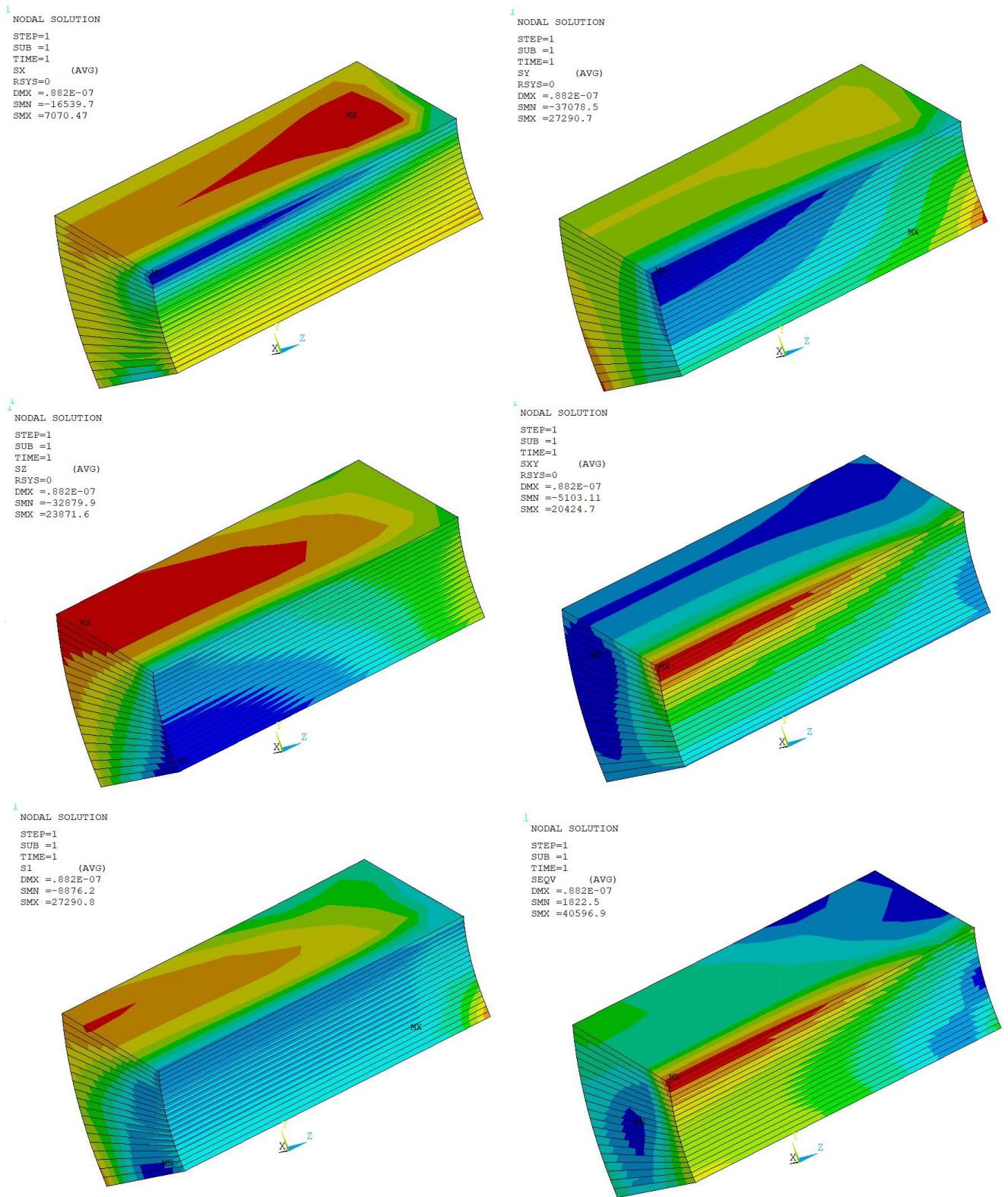
Рис.5.2. Розподіл переміщень в ФГ циліндрі на основі PZT-5A

Порівняння результатів, наведених в таблиці 5.1, дозволяє зробити висновок, що п'єзоелектричний ефект в циліндрі з м'якої п'єзокераміки PZT-5A на 20-25% більше виражений, ніж в PZT-4.

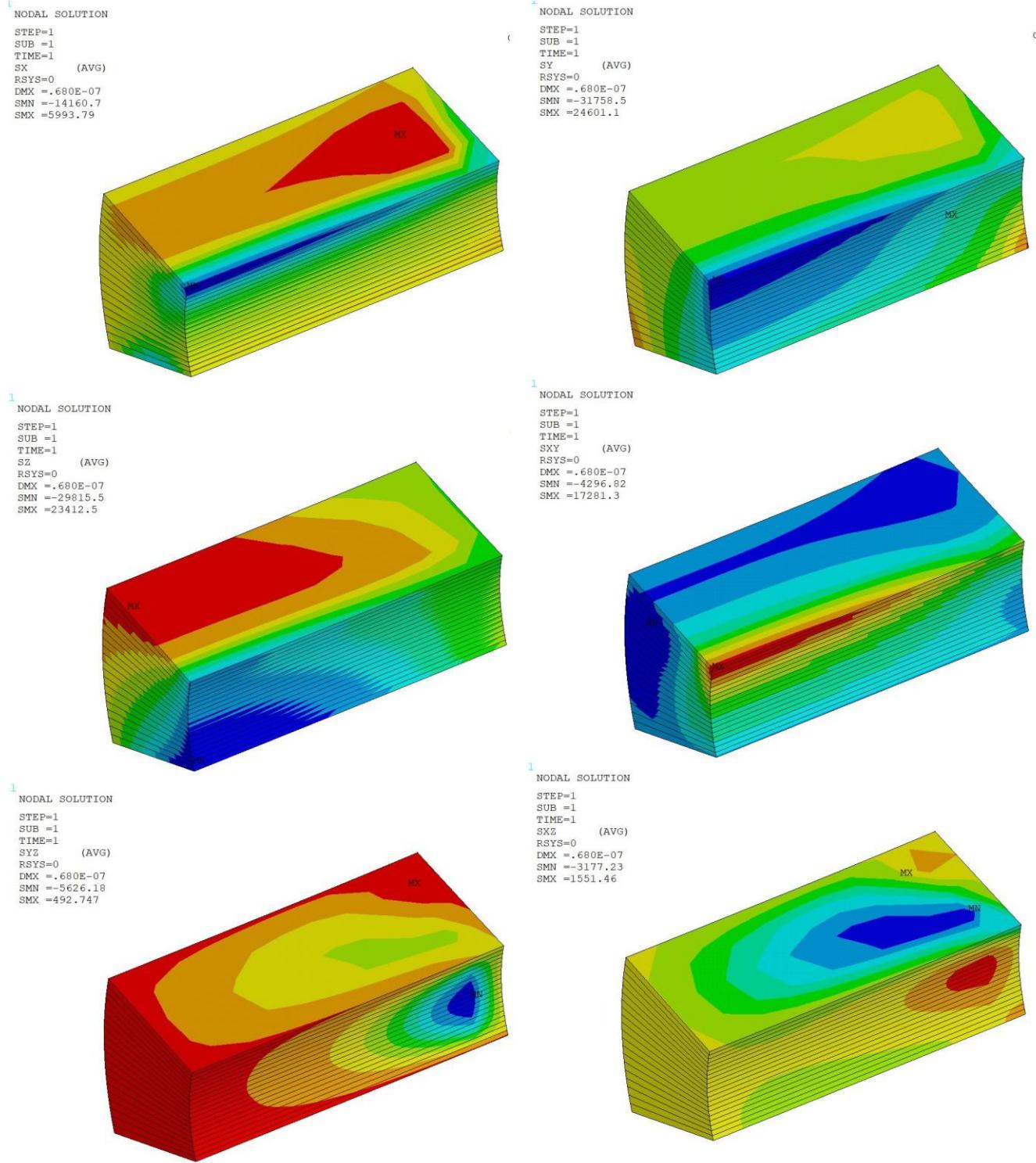
Таблиця 5.2

Напруження	PZT-5A		PZT-4	
	<i>max</i>	<i>min</i>	<i>max</i>	<i>min</i>
σ_r , кПа	7	-16,5	6	-14
σ_θ , кПа	27	-37	24,6	-31,7
σ_z , кПа	23	-33	23,4	-29,8
$\sigma_{r\theta}$, кПа	20	-5,1	17,3	-4,3
σ_{xz} , кПа	0,6	-6,6	0,5	-5,6
$\sigma_{\theta z}$, кПа	1,6	-3,36	1,5	-3,2
σ_1 , кПа	27	-8,8	24,6	-7,6
σ_{eqv} , кПа	40,6	1,8	33,3	1,3

Рисунок 5.3 а) ілюструє розподіл напружень в секції циліндра на основі PZT-5A, б) в секції циліндра на основі PZT-4. Наведені результати відповідають циліндуру, що складається з $M=20$ матеріальних шарів. Порівняння компонент напруженого стану для цих матеріалів наведено в таблиці 5.2. Як і очікувалось, максимальних значень набувають колові напруження, σ_z менші на 20-30%, σ_r досягають 50% від максимальних колових напружень. Серед дотичних напружень максимальних значень набуває $\sigma_{r\theta}$. Перше головне напруження досягає максимального значення в площині симетрії, максимальні еквівалентні напруження за Мізесом виникають на внутрішній поверхні циліндра. На поверхнях спряження спостерігаються розриви, що є типовим для багатошарових розрахункових моделей. В неоднорідному циліндрі з PZT-5A напруження загалом на 10-15% вищі, ніж у циліндрі з PZT-4.



a) неоднорідний матеріал на основі PZT-5A



б) неоднорідний матеріал на основі PZT-4

Рис. 5.3. Розподіл напружень в секції циліндра

5.2.3. Визначення резонансних та антирезонансних частот

Визначення частот електричних резонансів та антирезонансів п'зоелемента проводиться у модальному аналізі [84]. Оскільки для частот електричних резонансів f_{ri} зовнішнім впливом є підведенна різниця потенціалів ΔV , то в модальному аналізі задаємо нульову різницю потенціалів на електродах:

D,NUP,VOLT,0

D,NDN,VOLT,0

Для частот електричних антирезонансів f_{ai} зовнішнім впливом є електричний струм $I=\pm\dot{Q}$. Тому в модальному аналізі для пошуку частот електричних антирезонансів на одному з електродів, наприклад, NUP, покладаємо $\varphi=0$, а інший електрод вважаємо вільним, тобто для нього $Q=0$:

DDELE,NDN,VOLT

! Deletes degree-of-freedom constraint

Ця команда перетворює заземлений електрод в пасивний розімкнутий електрод.

Далеко не всі знайдені власні частоти, що визначаються з розв'язку вищеописаних задач на власні значення, є частотами електричних резонансів або антирезонансів. Частина цих частот відповідає пружим коливанням, що не реалізуються при електричних збуреннях. Тому з множини знайдених значень відкидаємо частоти, спільні для обох наборів або ті, що мало відрізняються і в результаті дають малий коефіцієнт електромеханічного зв'язку. Порядок частот в наборах при цьому може не співпадати.

В таблиці 5.3 наводяться резонансні, антирезонансні частоти та коефіцієнт електромеханічного зв'язку $k_{di}=\sqrt{\left(f_{ai}^2-f_{ri}^2\right)} / f_{ai}$ для ФГ циліндрів з PZT-5A. Наведені результати порівнювалися з результатами, отриманими за допомогою методу електромеханічних аналогій (МЕМА) [42, 97]. МЕМА призначений для визначення електроакустичних характеристик перетворювача на першій, в даному

Таблиця 5.3.

Номер моди	ФГМ на основі PZT-5A		
	$f_r, \text{Гц}$	$f_a, \text{Гц}$	k_{di}
1.	10085	11253	0,4950
2.	11536	13656	0,6335
3.	17031	17745	0,2926
4.	23259	23260	0,0093
5.	30323	30376	0,0592
6.	32642	32687	0,0525
7.	37652	37655	0,0126
8.	39242	39242	0
9.	42936	42937	0,0068
10.	44610	44610	0

Таблиця 5.4.

Номер моди	$f_r, \text{Гц}$		$f_a, \text{Гц}$		k_{di}	
	ФГМ з PZT-4	PZT-4	ФГМ з PZT-4	PZT-4	ФГМ з PZT-4	PZT-4
1.	11227	11300	12501	12582	0.4897	0.4897
2.	12726	12822	15205	15249	0.6539	0.6437
3.	18986	19063	19490	19576	0.2319	0.2336
4.	26374	26429	26374	26430	0	0.0087
5.	33496	33241	33532	33356	0.0464	0.0833
6.	36042	35776	36070	35843	0.0394	0.0612
7.	41822	41662	41825	41665	0.0120	0.0120
8.	44809	44819	44810	44819	0.0067	0
9.	47935	47785	47935	47786	0	0.0065
10.	50863	50955	50863	50955	0	0

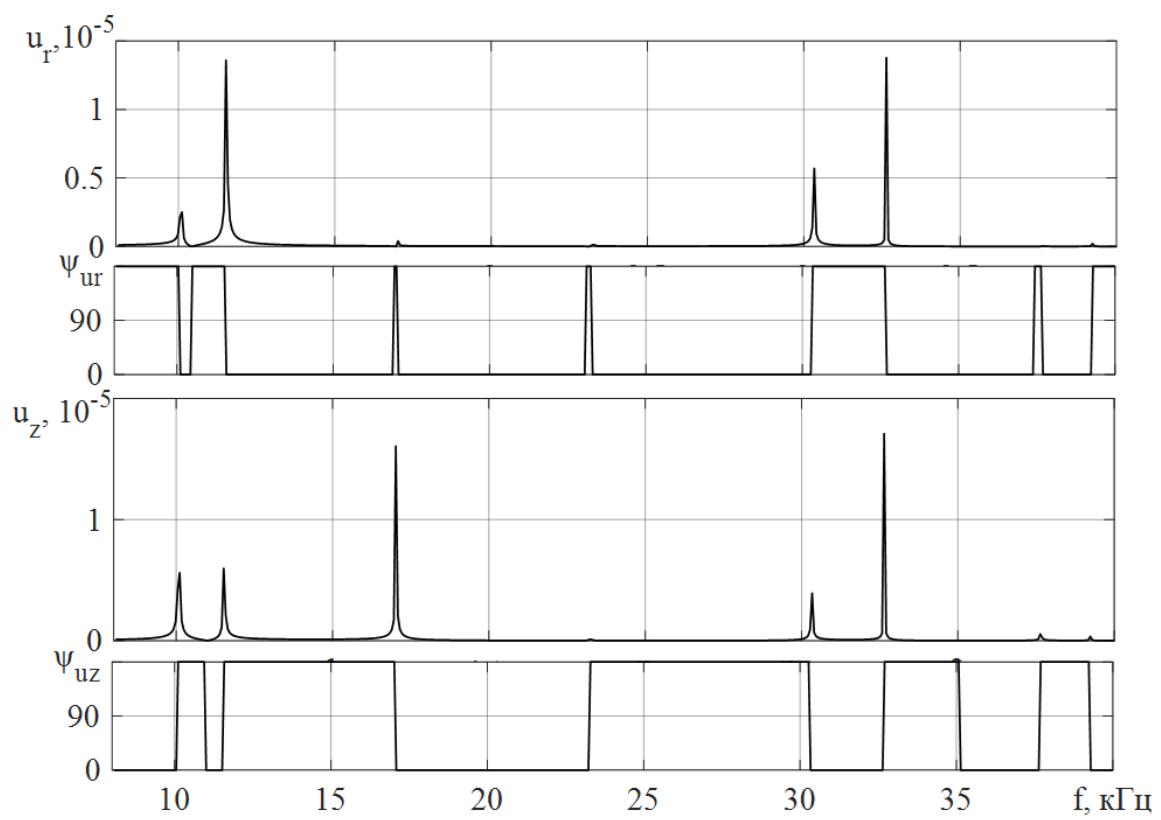
випадку пульсуючій, моді. Для однорідного циліндра з PZT-5A описаної конфігурації за допомогою МСЕ маємо першу резонансну частоту $f_{r1}^{MCE} = 10144 \text{ Гц}$, з методу електромеханічних аналогій $f_{r1}^{MEMA} = 10370 \text{ Гц}$, тобто відхилення лежить в межах 2%.

В таблиці 5.4 наводяться власні частоти та коефіцієнт електромеханічного зв'язку для неоднорідних та однорідних циліндрів з PZT-4. Можемо зробити висновок, що розглянута неоднорідність матеріалу призводить до пониження резонансної частоти на 0,5-1%, але максимальний КЕМЗ вищий у ФН циліндра. В ФН кераміці на основі PZT-5a резонансні частоти на 10-15% нижчі, ніж в ФН кераміці на основі PZT-4.

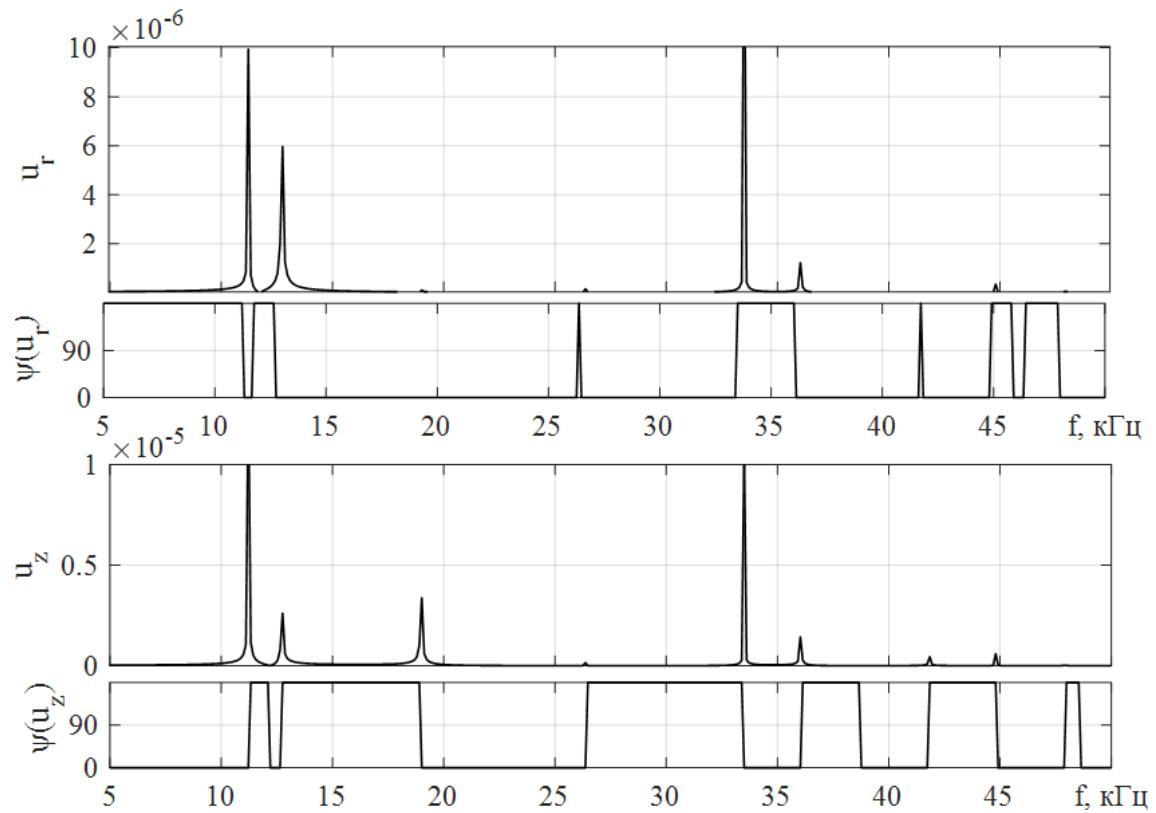
З результатів, наведених в таблицях 5.3 та 5.4, бачимо, що найбільший КЕМЗ мають перші два набори частот.

5.2.4. Аналіз гармонічних коливань

Дослідження гармонічних коливань описаних вище циліндрів почнемо з недемпфованого аналізу. Визначимо амплітудно-частотні характеристики п'зоелемента при моногармонічному навантаженні з амплітудою різниці потенціалів $V^a = 100 \text{ В}$. На рис. 5.4 наведено криві переміщень точки 1 з координатами $(R_2, 0, H)$ та їх фазових кутів для ФН циліндра на основі PZT-5A (а) та PZT-4 (б). Бачимо, що в ФН циліндрі на основі PZT-5A найбільше виражені радіальні переміщення на другій та сьомій власній частоті (табл. 5.3). Максимальні поздовжні переміщення виникають на третій та сьомій частоті. В ФН циліндрі на основі PZT-4 максимальні переміщення виникають на першій та шостій моді коливань. Отримані АЧХ можуть бути використані для кількісних оцінок електромеханічного стану лише в міжрезонансному діапазоні. Для дослідження коливань на частотах, близьких до резонансних, потрібно провести розрахунок з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу.



a) ΦH на основі PZT-5A



б) ΦH на основі PZT-4

Рис. 5.4. Амплітудно- та фазово- частотні характеристики
для секціонованих циліндрів з ΦH кераміки

Дисипація механічної та електричної енергії може бути включена в гармонічний і демпфований модальний п'єзоелектричний аналіз через демпфування за Релеєм або у формі матриць тангенсів втрат. У такому випадку програмна реалізація формує матеріальні співвідношення у вигляді

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{c}^E (1 + i\beta_d) + i\boldsymbol{\Psi} \circ \mathbf{c}^E \right) \bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{e}^T \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} - \left(\boldsymbol{\epsilon}^S - i \operatorname{tg} \delta \boldsymbol{\epsilon}^S - i \boldsymbol{\zeta} \circ \boldsymbol{\epsilon}^S \right) \mathbf{E}, \quad (5.25)$$

де $\boldsymbol{\Psi}$ — симетрична матриця пружних тангенсів втрат; $\boldsymbol{\zeta}$ — діагональна матриця діелектричних тангенсів втрат; $\operatorname{tg} \delta = \gamma_d \omega$ — тангенс діелектричних втрат; \circ — оператор поелементного множення матриць. Тангенс діелектричних втрат наводиться в технічних таблицях матеріальних сталих для п'єзокераміки або визначається через електричну добродійність як $\operatorname{tg} \delta = 1/Q_e$.

В околі резонансної частоти f_k альфа-демпфування, бета-демпфування, демпфування за формулами (2.105) та демпфування зі сталим коефіцієнтом ξ_d (гістерезисне структурне демпфування) еквівалентні між собою, що підтверджується математичними перетвореннями та проведеними чисельними експериментами. Ці способи демпфування задаються командами

MP,DAMP,MAT,BETA_C

! Beta coefficient in Reley damping

MP,ALPD,MAT,Alfa_M

! Alfa coefficient in Reley damping

або

MP,DMPR,MAT,XDAMP

! Frequency-independent coefficient

Тангенс діелектричних втрат задається командою

MP,LSST,MAT,TAN_D

! Electric loss tangent

Матриці тангенсів механічних та діелектричних втрат при поляризації в коловому напрямку вводяться командами

TB,DLST,i,,,0

! Matrix of Epsijs for SOLID226

TBDA,1,tgEPS11,tgEPS33,tgEPS11

TB,ELST,i,,,0

! Elastic loss tangent matrix

TBDA,1,tgC11, tgC13, tgC12

TBDA,7,tgC33, tgC13

TBDA,12,tgC11

TBDA,16,tgC44

TBDA,19,tgC44

TBDA,21,tgC66

Адмітанс Y визначається через заряд, знятий з електрода NDN командою

RFORCE,NVAR,NDN,CHRG,, q

Поелементні математичні обчислення з масивами виконуються за допомогою команд

PROD ,11,6,1,,Y2,,,2*pi/V0	! Admittance $Y=Q*f*pi*2/V0=I/V0$
QUOT ,12,4,6,,Z2,,, 2*pi/V0	! $Z=V0/I$ impedance
ABS ,13,11	! Absolute value of a variable
CLOG ,13,13,,lg Y2	!Forms the common log of a variable

Проведено порівняння різних способів врахування втрат на прикладі ФН циліндра на основі низькодобротної п'єзокераміки PZT-5A, для якої відомий повний набір комплексних модулів (дод. С). Через комплексні модулі механічна добротність визначається за формулою (2.87). Для вибраного матеріалу $Q_m = 75$.

На рис. 5.5 зображено амплітудно-частотні криві радіальних переміщень в діапазоні від 9,5 кГц до 12 кГц, що включає в себе перші два резонанси. Перша крива відповідає результатам, отриманим з врахуванням комплексних модулів; друга крива — альфа-демпфування (2.104) на другій резонансній частоті $f_{r2} = 11536 \text{ Гц}$ при $Q_d = Q_m = 75$; третя крива — бета-демпфування (2.105) при $f_{r2} = 11536 \text{ Гц}$; четверта крива — демпфування за Релеєм з коефіцієнтами (2.107) в діапазоні $f_b = 9 \text{ кГц}$, $f_e = 12 \text{ кГц}$; п'ята — демпфування за Релеєм в сукупності з тангенсом діелектричних втрат $\operatorname{tg}\delta = 0,02$; шоста — частотно-незалежне демпфування коливань при $\zeta_d = 1/(2Q_d)$.

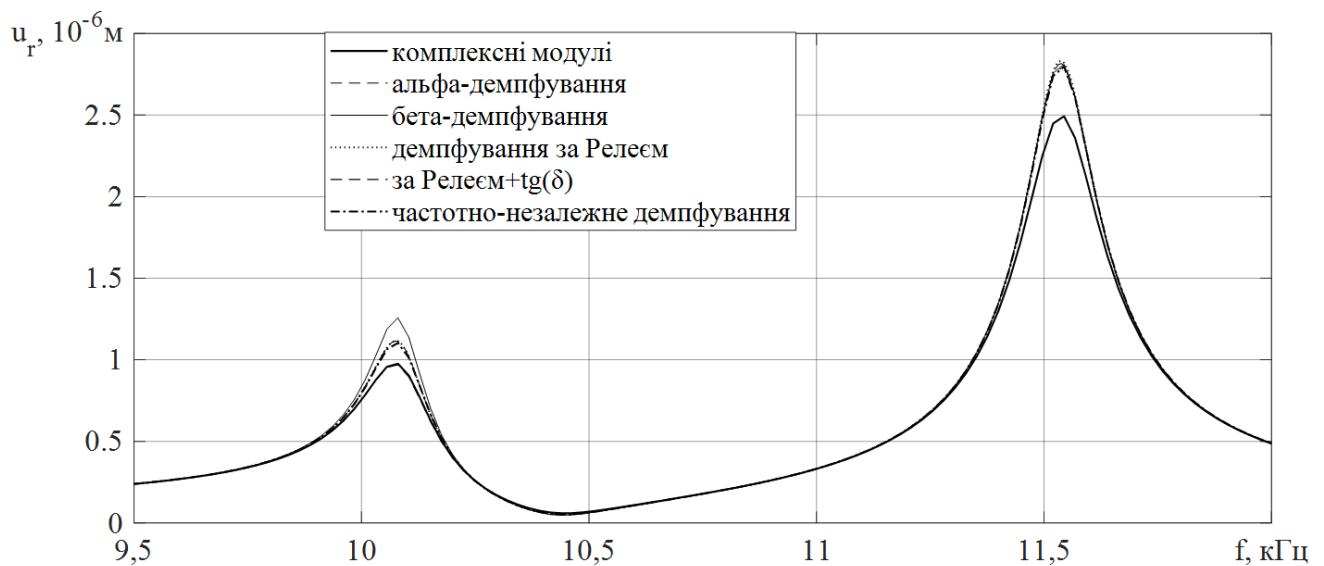


Рис. 5.5. АЧХ для різних методів врахування затухання.

При порівнянні результатів виявилося, що на першому резонансі переміщення, тримані за допомогою комплексних модулів та альфа-демпфування повністю співпали: $u_r^a(f_1) = 0,98 \text{мкм}$; криві демпфування за Релеєм без врахування та з врахуванням тангенсу діелектричних втрат та частотно незалежне демпфування набули значення $u_r^a(f_1) = 1,1 \text{мкм}$ і при застосуванні бета-демпфування $u_r^a(f_1) = 1,26 \text{мкм}$. Маємо відхилення між результатами в 12%. На другому резонансі з врахуванням комплексних модулів маємо $u_r^a(f_2) = 2,5 \text{мкм}$, всі інші методи видали $u_r^a(f_2) = 2,8 \text{мкм}$. Співпадіння результатів пояснюється тим, що в околі конкретної резонансної частоти частотно-незалежний коефіцієнт демпфування, альфа-демпфування, бета-демпфування, демпфування за Релеєм зводяться до еквівалентної математичної постановки та відповідають заданій механічній добротності п'єзоелемента. Визначена з графіка добротність для цих кривих на обох резонансах дорівнює заданому значенню $Q_d = 75$. Для графіка комплексних модулів маємо $Q_d = 65$.

Четверта і п'ята крива повністю співпали, що свідчить про те, що врахування тангенса діелектричних втрат при заданому навантаженні не є суттєвим. Відмінність між кривими з'являється при $\operatorname{tg} \delta \geq 0,1$. П'єзоелектричні втрати не

враховуються, оскільки можливість їх враховувати в МСЕ програмах поки що не реалізована.

Надалі зупинимось на демпфуванні за Релеєм в діапазоні $f_b = 8 \text{ кГц}$, $f_e = 18 \text{ кГц}$. Тоді коефіцієнти демпфування (2.107) дорівнюють

$$\alpha_d = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 18 \cdot 10^6}{(8+18) \cdot 10^3 \cdot 75} = 464; \quad \beta_d = \frac{1}{2\pi(8+18) \cdot 10^3 \cdot 75} = 8,17 \cdot 10^{-8}.$$

Відповідні амплітудно-частотні залежності для переміщень точки 0 з координатами $(R_2, 0, 0)$ та точки 1 з координатами $(R_2, 0, H)$ функціонально-неоднорідного та однорідного циліндра наведені на рис. 5.6. При заданому навантаженні максимальні радіальні переміщення зовнішньої поверхні для ФН циліндра виникають в площині симетрії на частоті $f_{r1} = 10085 \text{ Гц}$. В поздовжньому напрямку перший резонанс також більше виражений, ніж другий, що суперечить результатам, наведеним на рис. 5.4. Це пояснюється тим, що на рис. 5.6 крок за частотою значно менший, ніж на рис. 5.5. В однорідному циліндрі резонансні частоти вищі, ніж в функціонально-неоднорідному, приблизно на 90 Гц , а амплітудні значення переміщень відрізняються на 1-2%.

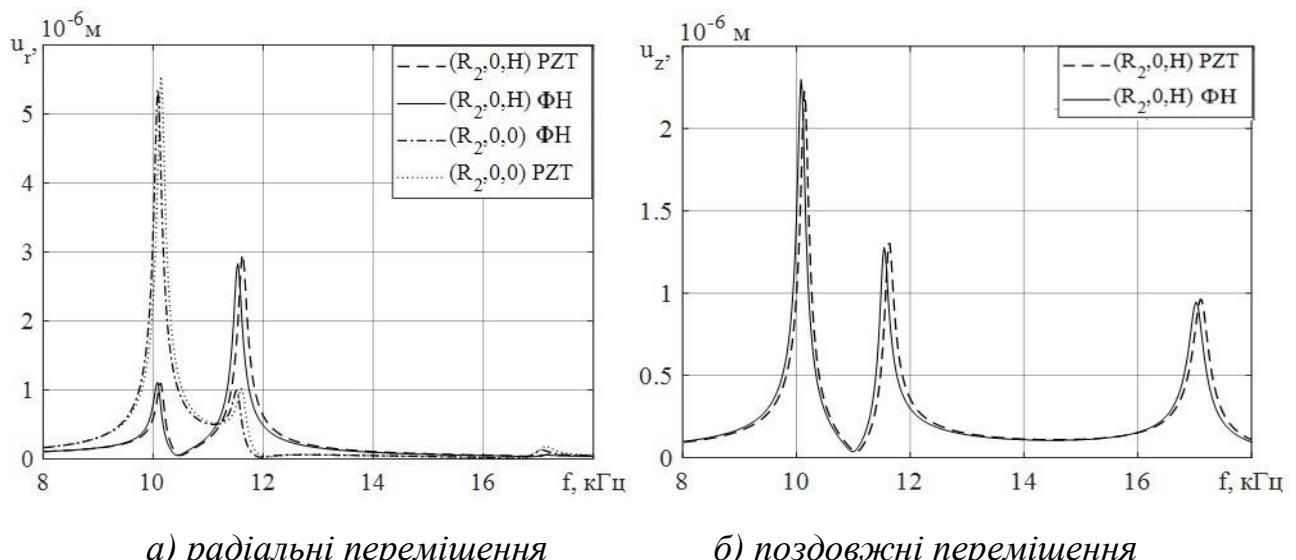


Рис. 5.6. АЧХ для функціонально-неоднорідного та однорідного циліндрів

Амплітудно-частотні характеристики комплексного адмітансу, обчисленого за формулою (2.67), його фазового кута та логарифма для функціонально-неоднорідного та однорідного циліндра наведені на рис. 5.7.

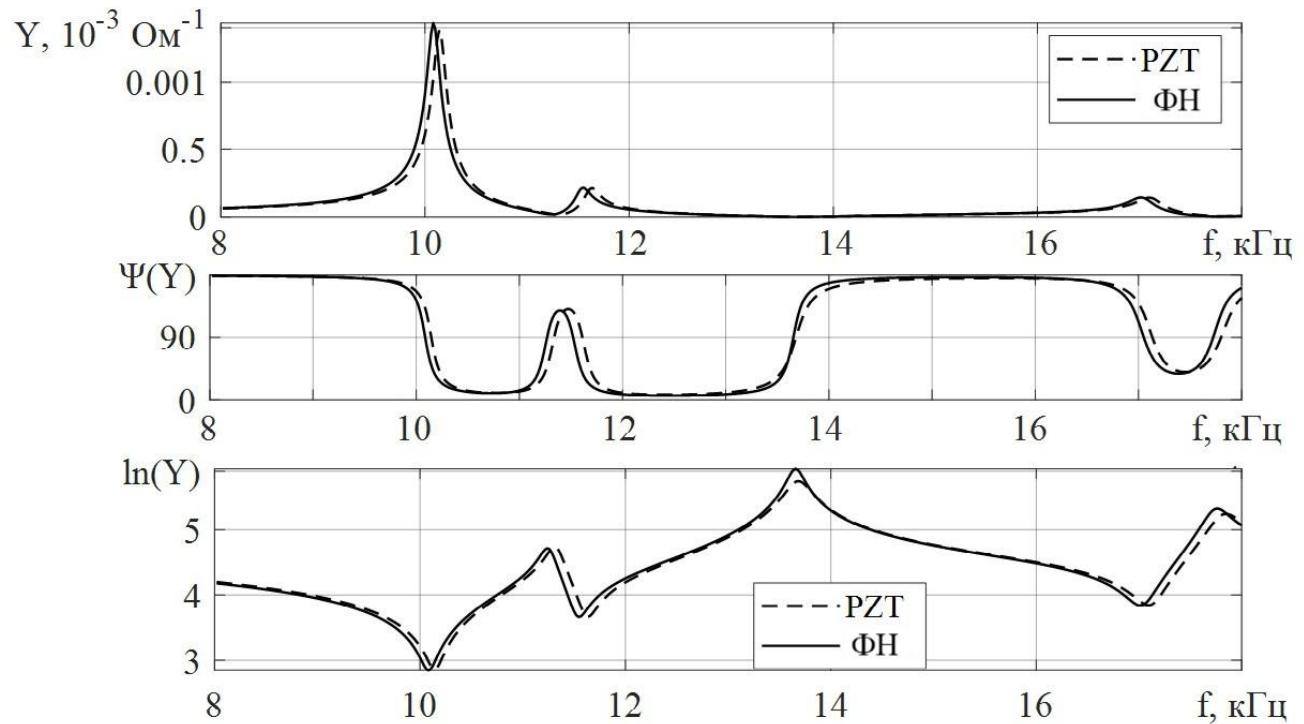
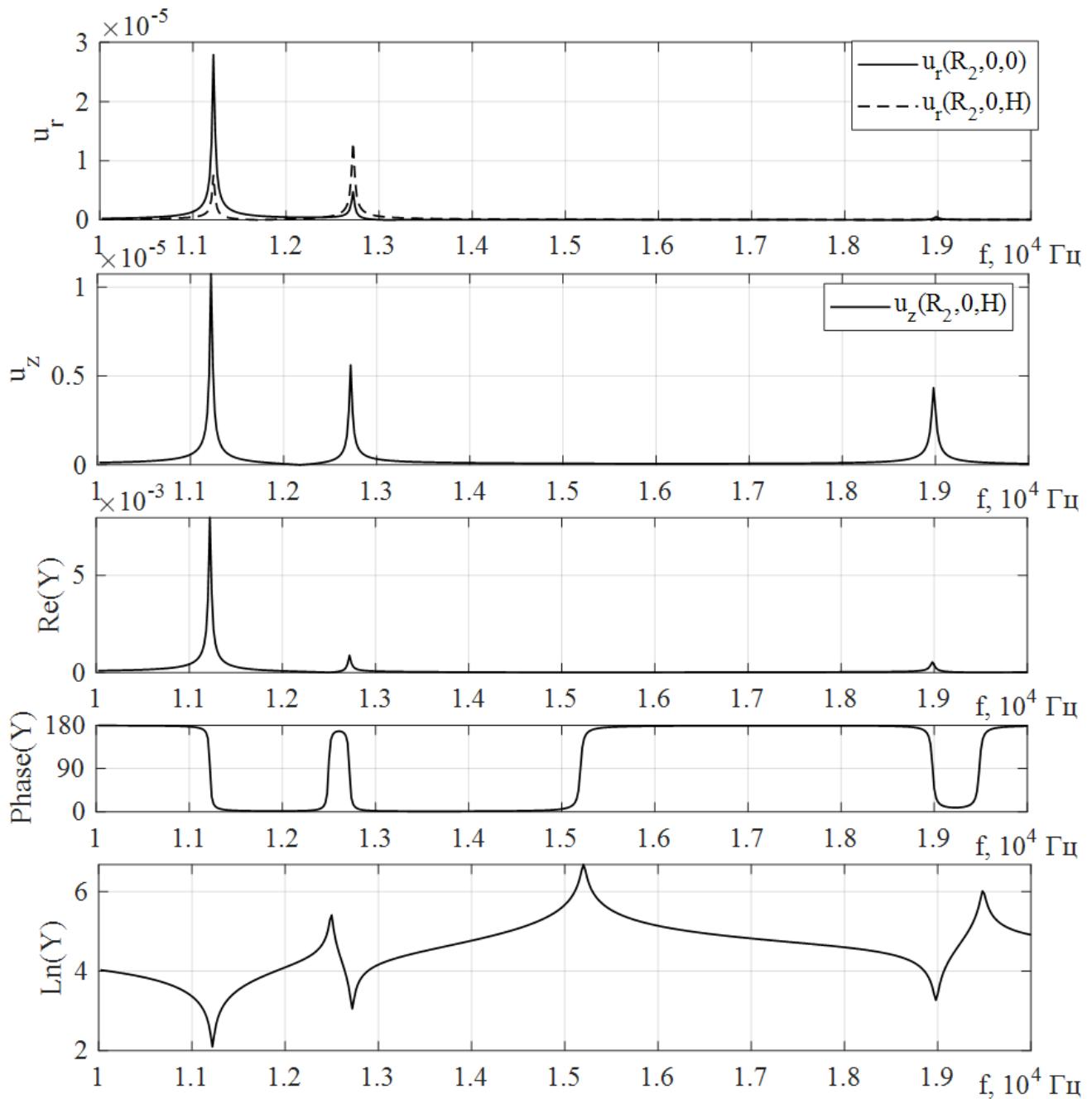


Рис. 5.7. АЧХ адмітансу п'єзоелемента

Графіки для дійсної частини адмітансу Y , його фазового кута та логарифма $\log(Y)$ відповідають наведеним в Табл. 5.3 резонансним та антирезонансним частотам п'єзоелемента. На резонансних частотах адмітанс набуває локальних максимумів, на антирезонансних — локальних мінімумів. Локальні максимуми логарифма провідності відповідають антирезонансним частотам. Врахування дисипативних властивостей згладжує криву фазового кута. Нахил кривої фазового кута на резонансі відповідає тангенсу втрат. Значення КЕМЗ для однорідного циліндра $k_d = \{0,494; 0,619; 0,295 \dots\}$, тобто на перших двох резонансах КЕМЗ для ФН циліндра вищі. Додаткові обчислення показують, що врахування діелектричних втрат зменшує піки кривих логарифму адмітансу на антирезонансних частотах на 2-3%.

На рис. 5.8 наведено амплітудно-частотні характеристики для ФН циліндра на основі PZT-4 при $Q_d = 500$ з врахуванням частотно незалежного демпфуван-

ня. Бачимо, на частота $f_{r1}=11227\text{ Гц}$ відповідає пульсуючій моді коливань. Максимальні переміщення значно вищі, ніж у циліндра з PZT-5A, що пов'язано з високою добротністю PZT-4. Добротність для отриманих кривих складає $Q_d \approx 500$. Максимальна провідність виникає на першому резонансі, екстремуми кривої логарифма провідності відповідають наведеним в таблиці 5.4 резонансним та антирезонансним частотам п'єзоелемента.



*Рис. 5.8. АЧХ для ФН циліндра на основі PZT-4
з врахуванням механічних втрат*

5.2.5. Нестаціонарні коливання п'єзоелемента з врахуванням демпфування коливань

Нестаціонарний розрахунок (ANTYPE=TRANS) проводимо при навантаженні п'єзоелемента різницею потенціалів у вигляді функції типу Гевісайда (KBS,1). З усіх описаних вище способів задання матриці демпфування (5.27) в нестаціонарному режимі реалізовано лише демпфування за Релеєм, що включає в себе масове (альфа-) демпфування та жорсткісне (бета-) демпфування. Комбінація альфа-демпфування та бета-демпфування дає змогу враховувати демпфування низькочастотних та високочастотних коливань одночасно, що неможливо при їх врахуванні окремо (рис. 2.3).

Проведено дослідження затухання коливань в ФН циліндрі на основі низькодобротної ($Q_m = 75$) кераміки PZT-5A. На рис. 5.9 проводиться порівняння коливань в ФН циліндрі на основі PZT-5A при відсутності демпфування та з врахуванням демпфування за Релеєм. На рисунку наведено радіальні u_r та поздовжні u_z переміщення точок зовнішньої поверхні з координатами $(R_2, 0, 0)$ та $(R_2, 0, H)$ при описаних параметрах демпфування. При затуханні значення переміщень прямують до розв'язку статичної задачі, при чому максимальні переміщення приблизно в два рази вищі, ніж при статичних навантаженнях (таблиця 5.1). На розглянутому інтервалі часу 10 мс спостерігається повне затухання коливань, при чому амплітуда коливань складає менше 5% від початкової при $t_3 = 7 \text{ мс}$. Середнє значення логарифмічного декременту коливань при затуханні за Релеєм складає $\delta_R^c \approx 0,039$, для чисельної схеми $\delta_c^c \approx 0,002$. Відповідна механічна добротність дорівнює заданій для PZT-5A $Q_m = 75$.

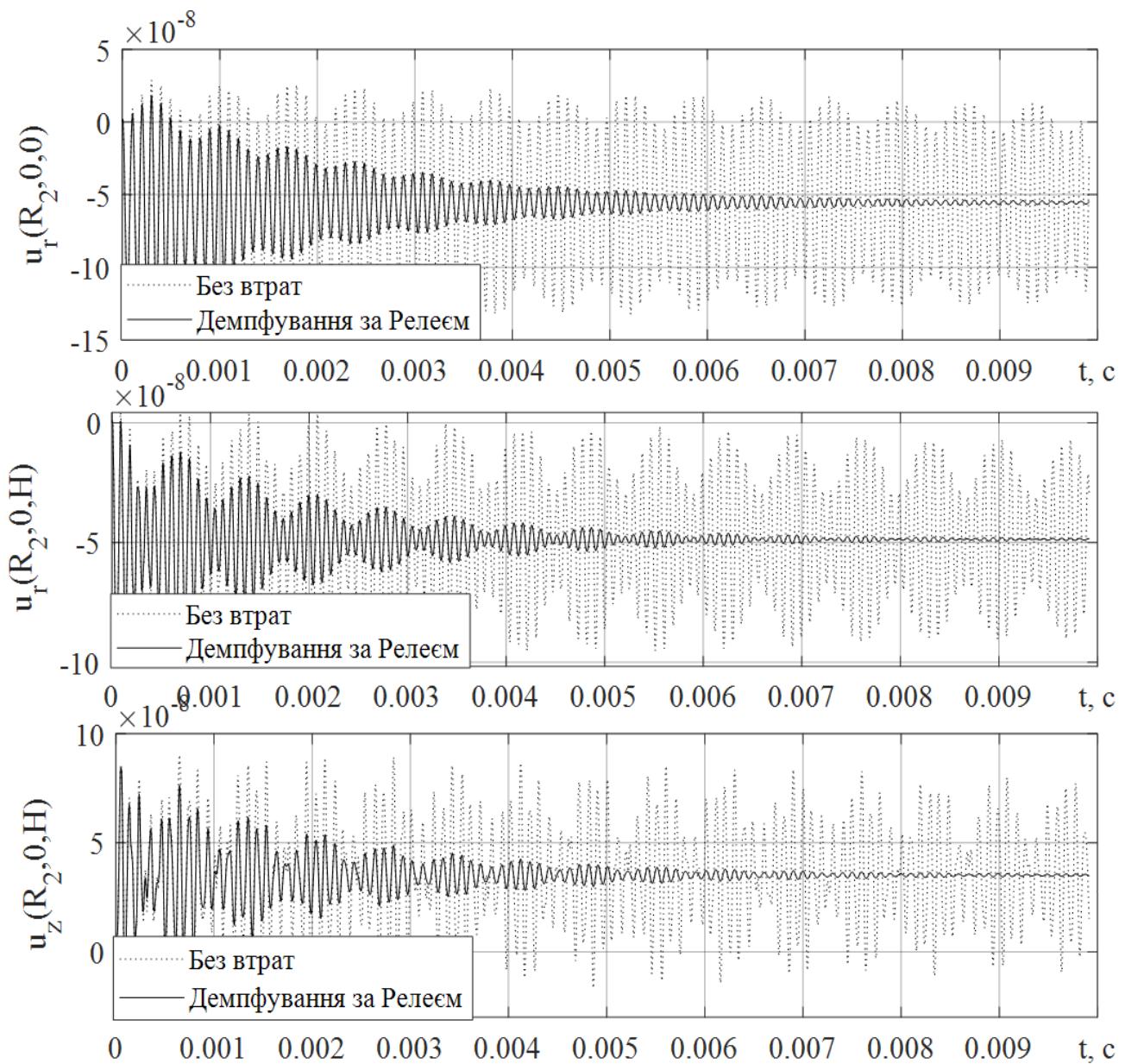


Рис. 5.9. Переміщення в ФН циліндрі на основі PZT-5A

Питання експериментального визначення часу затухання коливань вимагає високоточних вимірювальних пристройів, що здатні працювати на високих частотах з чутливістю в нанометрах. При відсутності достатньо точних приладів вимірювання механічних коливань застосовуються прилади, що вимірюють струм або заряд, графік якого при вищеведених параметрах затухання наведено на рис. 5.10.

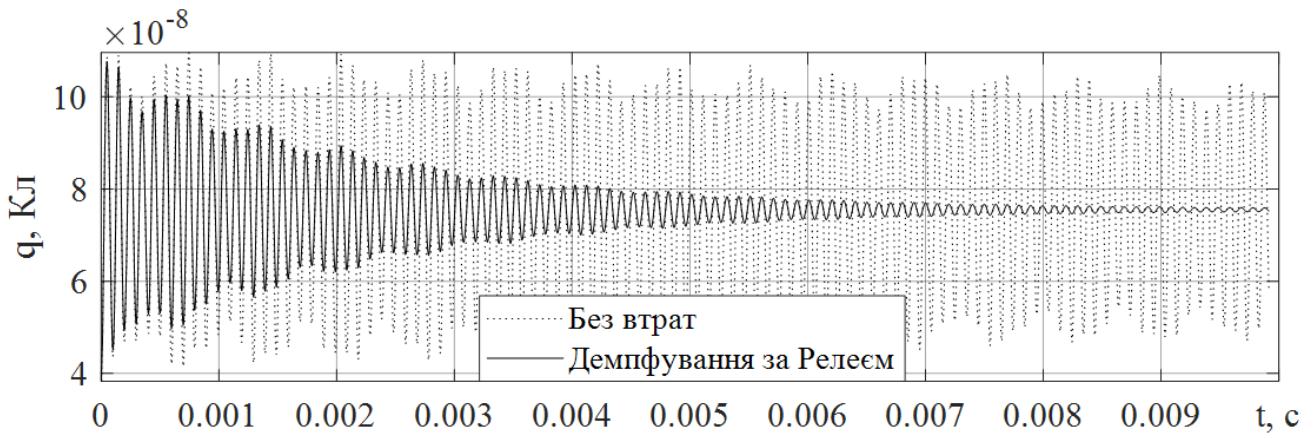


Рис. 5.10. Заряд на електродах ФН циліндра на основі PZT-5A

Рис. 5.10 описує результати чисельного експерименту по визначенням заряду на електродах. В тілі без демпфування заряд на електродах змінюється в діапазоні від $4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ до $12 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$. При затуханні крива екстремумів згладжується і прямує до значення $7,4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$, що є результатом для статичної задачі.

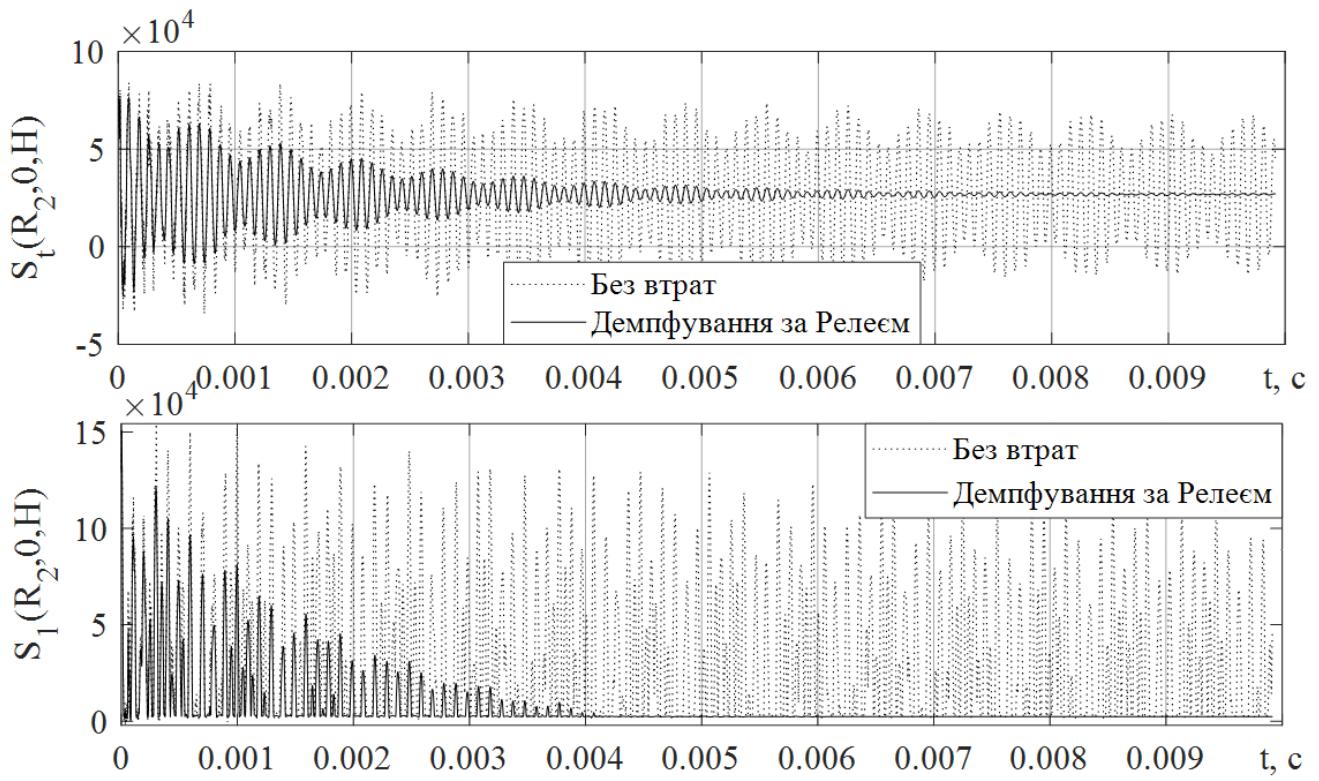


Рис. 5.11. Напруження в ФН циліндрі на основі PZT-5A

Оскільки п'єзокераміка є крихким матеріалом, напруження на розтяг є для неї небезпечними. З розв'язку статичної задачі бачимо, що максимальні додатні

нормальні напруження будуть $\sigma_y(R_2,0,H)$. Графіки цих напружень при різних параметрах затухання наведено на рис. 5.11. Бачимо, що коливні закономірності напружень відповідають переміщенням, але потрібно відмітити, що максимальні напруження в нестационарному режимі перевищують відповідні статичні значення в 3 рази.

Проведемо аналогічний аналіз для високодобротної п'єзокераміки PZT-4 з врахуванням демпфування за Релеєм (2.107) в діапазоні від 10 до 12 Гц. В кривих переміщень (рис.5.12) можна візуально виділити коливання з періодом $T_{min} \approx 0,078\text{ms}$ (тоді як для першої власної частоти $T_1 = 1/f_1 = 0,089\text{ms}$), та коливань з періодом $T_{max} \approx 8,65T_{min} \approx 0,675\text{ms}$.

На розглянутому інтервалі часу 9 мс спостерігається зменшення амплітуди максимальних переміщень, яке для недемпфованої схеми складає 15%, з врахуванням демпфування за Релеєм 54%. Час повного затухання складає приблизно $T_{n3} = 40\text{ms}$. Середнє значення логарифмічного декременту коливань при затуханні за Релеєм складає $\delta_R \approx 0,0083$, для чисельної схеми $\delta_n \approx 0,0021$, тобто швидкість затухання завищена за рахунок в'язкості чисельної схеми. Якщо вважати, що декремент затухання для конструкції наближено дорівнює $\delta = \delta_R^c - \delta_c^c$, то механічна добротність для п'єзоелемента $Q_m = \pi/\delta$ дорівнює заданій для PZT-4 $Q_m = 500$.

Рис. 5.13 описує зміну в часі заряду на електродах. В тілі без демпфування заряд на електродах змінюється в діапазоні від $3 \cdot 10^{-8}\text{Кл}$ до $8 \cdot 10^{-8}\text{Кл}$. Екстремуми коливної кривої змінюються в межах 7.5% з умовним періодом T_{max} , при чому в'язкість чисельної схеми спричиняє на розглянутому інтервалі часу затухання коливань на 15%.

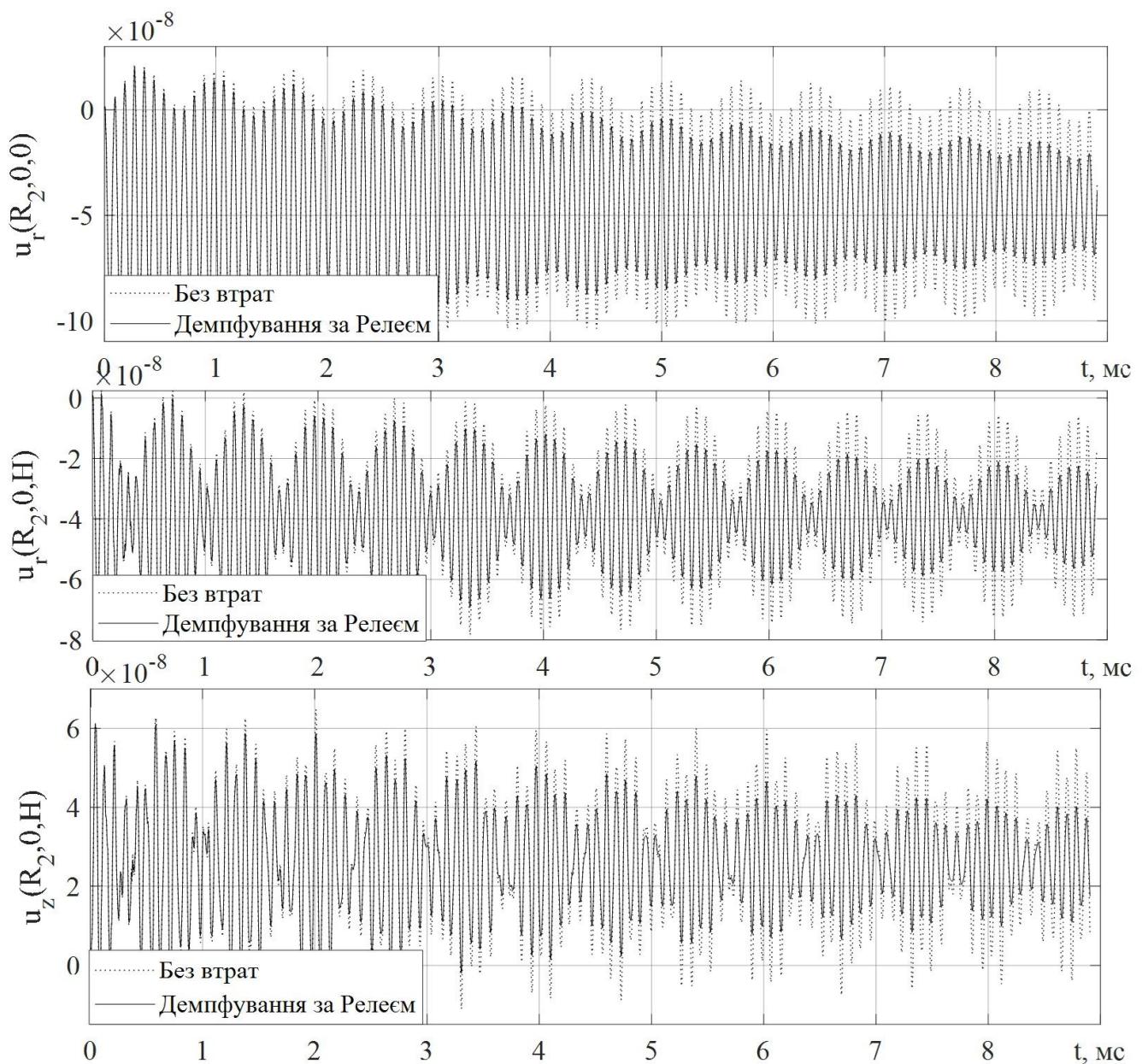


Рис. 5.12. Переміщення в ФН циліндрі на основі PZT-4

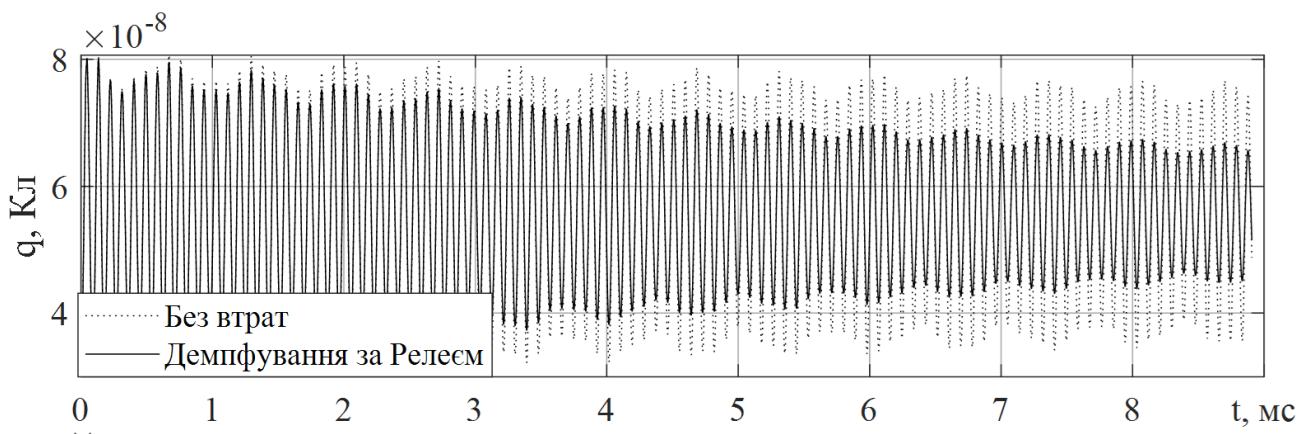


Рис. 5.13. Заряд на електродах ФН циліндра на основі PZT-4

При аналізі напруженого стану порівняємо результати, представлені на рис. 5.11 та 5.14, 5.15. Колові напруження $\sigma_{y\max}(R_2,0,H) \approx 13kH$, що майже вдвічі вище, ніж для кераміки PZT-5A, та втрічі вищі за розв'язок статичної задачі.

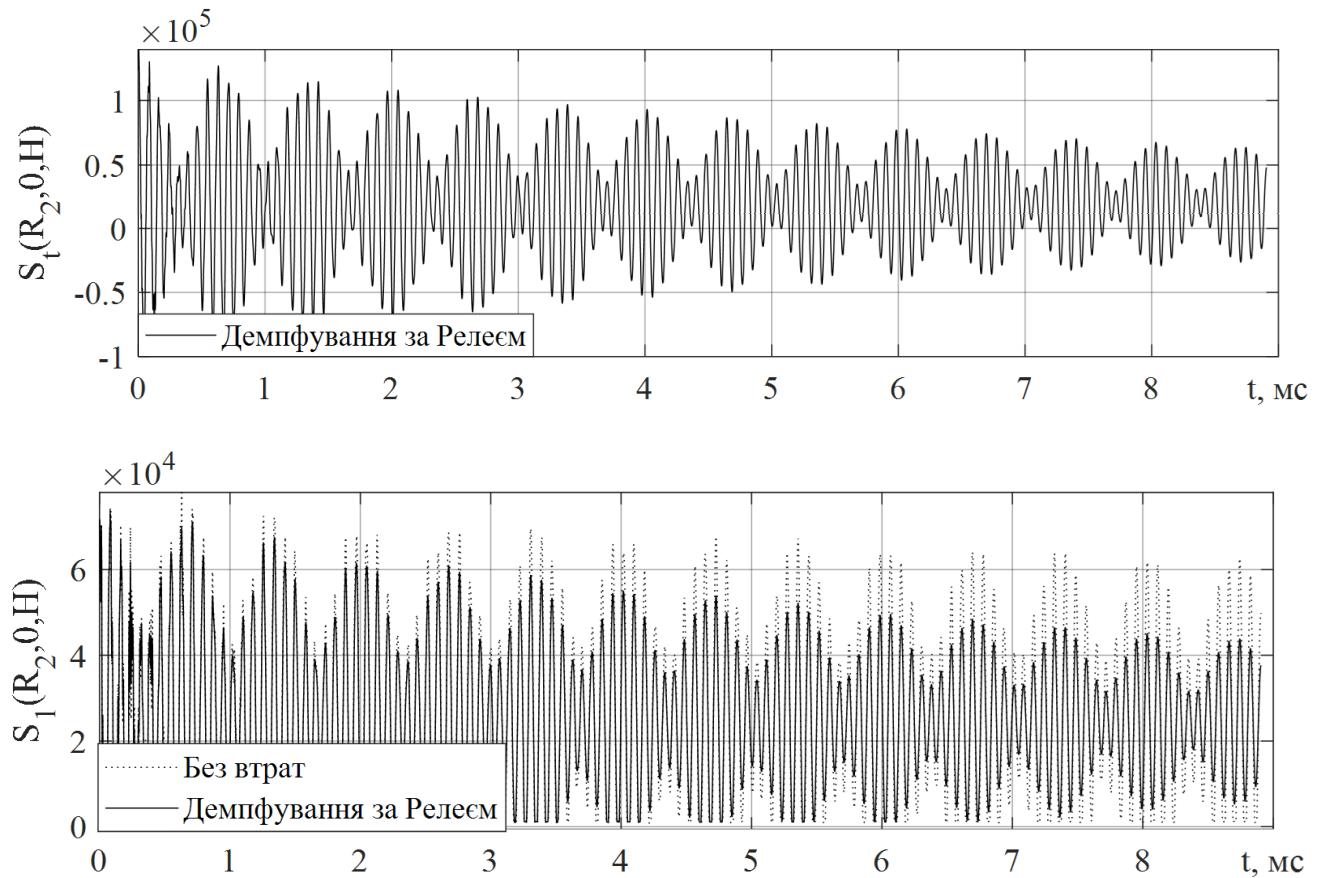


Рис. 5.14. Напруження в ФН циліндрі на основі PZT-4

Характер динаміки головних напружень в точці $(R_2,0,H)$ представлено на рис. 5.15. Максимальне напруження $\sigma_{1\max} \approx 75kH$, спостерігається періодичність коливань, на відміну від аналогічних кривих для PZT-5A (рис. 5.11) в точці $(R_2,0,0)$.

Таким чином, в м'якій п'єзокераміці згенеровані переміщення та заряд вищі, а напруження нижчі, ніж в жорсткій п'єзокераміці, що відповідає очікуваній фізичній картині. Час затухання коливань визначається добротністю матеріалу. Добротність отриманих кривих з поправкою на в'язкість чисельної схеми співпадає з добротністю, введеною при визначенні коефіцієнтів демпфування за Релеєм в гармонічному аналізі.

5.3. Висновки до розділу 5

1. Моделювання функціонально-неоднорідних та функціонально-неоднорідних тіл за допомогою методу скінченних елементів можливе шляхом створення дискретного набору матеріалів з матеріальними сталими, що апроксимують функціональну залежність, та модифікації скінченних елементів, що полягає у пошаровому присвоєнні цих матеріалів елементам.

2. Врахування механічного демпфування коливань при гармонічному аналізі у середовищі МСЕ можливе шляхом врахування демпфування за Релеєм, частотно-незалежного демпфування, а також шляхом введенням анізотропних матриць тангенсів механічних втрат. Діелектричні втрати враховуються за допомогою тангенса діелектричних втрат або матриці анізотропних тангенсів діелектричних втрат. В нестационарному аналізі реалізовано лише механізм демпфування за Релеєм.

3. Частоти електричних резонансів визначаються в модальному аналізі при короткозамкнутих електродах, антирезонансів - на розімкнутих електродах. В гармонічному аналізі на кривих логарифму провідності на цих частотах маємо локальні мінімуми та максимуми відповідно. Максимальний КЕМЗ виникає на першій або другій резонансній частоті в залежності від геометричних параметрів елемента. Резонансна частота на пульсуючій моді з достатньою точністю співпадає з резонансною частотою, знайденою методом електромеханічних аналогій.

4. При аналізі гармонічних коливань в околі резонансу демпфування за Релеєм, альфа- та бета- демпфування, частотно-незалежне демпфування дають тотожні результати в зв'язку з математичною еквівалентністю постановки задачі. При цьому добротність отриманих резонансних кривих приблизно співпадає з використаною при обчисленні коефіцієнтів демпфування добротністю для матеріалів. Врахування дисипації енергії через комплексні модулі шляхом введення тангенсів механічних та діелектричних втрат дає відхилення в межах 12%, що може бути пов'язане з якістю вхідних комплексних матеріальних характеристик. В ширшому діапазоні частот при сталому коефіцієнті затухання (добротності)

рекомендується застосовувати частотно-незалежне демпфування. Встановлено, що при лінійному аналізі при низьковольтажних навантаженнях вплив врахування діелектричних та механічних втрат відрізняється від врахування лише механічних втрат менше ніж на 1%.

5. При аналізі гармонічного електромеханічного стану розглянутого ФН циліндра встановлено, що функціональна неоднорідність понижує резонансні частоти відносно однорідного тіла. В ФН циліндрах на основі м'якої п'єзокераміки PZT-5A переміщення та заряд на електродах вищий, а напруження нижчі, ніж в ФН циліндрах на основі жорсткої п'єзокераміки PZT-4.

6. При нестационарному аналізі врахування демпфування за Релеєм як комбінації альфа- та бета- демпфування дає змогу врахувати втрати як в низькочастотному, так і в високочастотному діапазоні. Коефіцієнти демпфування за Релеєм можуть бути визначені за (2.107) на основних резонансних частотах. В ФН циліндрах на основі м'якої п'єзокераміки PZT-5A час затухання в 7 разів менший, ніж в ФН циліндрах на основі жорсткої п'єзокераміки PZT-4, що відповідає співвідношенню між їх добротністю.

7. Визначена для отриманих динамічних кривих добротність з поправкою на в'язкість чисельної схеми співпадає з добротністю матеріалу, що була використана для визначення коефіцієнтів демпфування за Релеєм. В низькодобротних матеріалах декремент коливань схеми малий порівняно з декрементом при затуханні за Релеєм. В високодобротних матеріалах декремент коливань схеми та декремент матеріалу співмірні, що потрібно враховувати при аналізі результатів чисельного експерименту.

ЗАГАЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної наукової проблеми, що полягає в побудові ефективних чисельних підходів до дослідження усталених та перехідних процесів деформування неоднорідних електроп'язкопружних конструктивних елементів, апробації цих підходів на низці конкретних модельних прикладів, аналізі результатів і виявленні особливостей динамічної поведінки таких елементів, у тому числі в режимі генерації напруги та з урахуванням взаємодії з акустичним середовищем. Проведено дослідження коливань електромеханічних перетворювачів однорідної, композитної, багатошарової та функціонально-неоднорідної структури плоскої, циліндричної та сферичної форм при електричних та механічних навантаженнях. Для п'єзоелементів складної форми розроблено підхід до моделювання неоднорідних електромеханічних та дисипативних властивостей матеріалу на основі методу скінченних елементів.

Основні результати дисертації полягають у наступному:

1. На основі співвідношень теорії електропружності, механіки спадкового середовища, реологічних співвідношень, механіки композитів, акустики та ін. дано постановки нового класу динамічних задач електропружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища.

2. У межах моногармонічного наближення розвинуто варіаційно-сплайновий метод розв'язання динамічних задач електропружності з застосуванням сплай-апроксимацій та варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Також реалізовано підхід до дослідження гармонічних коливань п'єзоелектричних циліндрів на основі гамільтонового формалізму. Виконано чисельну реалізацію розвинутих підходів за допомогою методу дискретної ортого-

налізації. Розвинуті підходи адаптовано до розрахунку вісесиметричних коливань однорідних та композитних циліндрів.

3. Систематизовано підходи до врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм, врахування діелектричних та п'єзоелектричних втрат, що випливають із залежностей механіки спадкового середовища для п'єзоелектриків. Запропоновано та досліджено нову чотирипараметричну модель врахування дисипативних властивостей матеріалів для електров'язкопружних тіл при нестационарних навантаженнях. Розвинуто підхід до оцінки дисипативних характеристик п'єзоелемента на основі розвинутих чисельних методик та теорії коливань дисипативних систем.

4. Розроблено узагальнений чисельний метод дослідження нестационарних пульсуючих коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форм з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу на основі скінченно-різницевих виразів другого порядку точності та запропонованої чотирипараметричної моделі дисипації енергії. В межах запропонованого підходу розвинуто спосіб визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при механічних нестационарних навантаженнях.

5. Запропоновано підхід до аналізу динаміки функціонально-неоднорідних та багатошарових п'єзоелементів складної форми за допомогою методу скінчених елементів з врахуванням дисипації енергії. При модальному аналізі розвинутого підходу визначаються основні електромеханічні характеристики п'єзоелементів (резонансні та антрезонансні частоти, КЕМЗ), при демпфованому гармонічному аналізі — амплітудні значення переміщень та дисипативні характеристики п'єзоелемента, при нестационарному аналізі — логарифмічний декремент та час затухання коливань для п'єзоелемента.

Таким чином, у роботі створено методику розрахунку динамічних процесів в електров'язкопружних тілах, що включає: постановку динамічних задач електров'язкопружності для неоднорідних тіл; розробку прямих чисельних методів

дослідження усталених та нестационарних коливань; розв'язок окремих задач динамічного деформування та генерації напруги п'єзоелектричними елементами, в тому числі з врахуванням впливу акустичного середовища; розширення класів розв'язаних задач на випадок функціонально-неоднорідних електроп'язкопружних тіл складної форми.

Виконані чисельні експерименти і аналіз отриманих результатів дозволили виявити низку особливостей динамічної електромеханічної поведінки неоднорідних електроп'язкопружних елементів конструкцій. Виявлені фізичні ефекти поширення збурень можуть бути використані для ефективних інженерних рішень при проєктуванні та підборі режиму експлуатації п'єзоелектричних перетворювачів. Зазначені **висновки прикладного характеру** можуть бути сформовані наступним чином:

1. Розвинuto методику дослідження динамічних процесів в композитних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементах дозволяє прогнозувати їх реакцію на електричні та механічні збурення, що дає змогу суттєво підвищити ефективність електромеханічних процесів та розширити область практичного застосування проектованих пристройів.
2. Отримана методика чисельного моделювання дозволяє коригувати комбінацію активних п'єзокерамічних та пасивних в'язкопружних матеріалів для оптимізації електромеханічного відгуку п'єзоелемента, узгодження хвильового опору середовища з опором акустичного середовища, забезпечення пасивного демпфування коливань. Оптимізація елементів конструкції з шаруватих п'єзоелектричних композитів за резонансною частотою, відгуком, електромеханічною чутливістю, дисипативними властивостями може бути реалізована шляхом зміни частки п'єзокераміки в композиті.
3. Врахування дисипативних властивостей матеріалів при моделюванні переходних процесів в неоднорідних п'єзоелементах можливе за новою чотирипараметричною моделлю електроп'язкопружності.
4. В межах лінійної моделі електроп'язкопружності, що спирається на теорію спадкових середовищ або розширену модель Кельвіна-Фойгта, впливом діє-

лектричних та п'єзоелектричних втрат можна нехтувати. Вплив рідкого акустичного середовища на демпфування коливань значно вищий, ніж затухання коливань через механічні втрати.

5. Встановлена залежність логарифмічного декремента коливань та інших дисипативних характеристик п'єзоелемента від коефіцієнтів демпфування, форми та розмірів п'єзоелемента може бути використана для прогнозування його поведінки при нестационарних процесах.

6. В розвинутій методиці на основі МСР п'єзоелектричні функціонально-неоднорідні матеріали моделюються як матеріали з неперервно-диференційованими характеристиками. В МСЕ вони задаються як шаруватий матеріал з дискретною зміною характеристик. Запропоновані підходи демонструють хорошу збіжність результатів.

Отримані результати можуть бути використані для модернізації існуючих та проєктування нових однорідних та неоднорідних п'єзоперетворювачів. Розвинута методика є корисною при виборі матеріалів та їх комбінацій для п'єзоелектричних елементів конструкцій з метою задоволення необхідним експлуатаційним показникам; при оптимізації геометричних параметрів п'єзоелемента, їх умов навантаження і закріplення для максимального ефективного перетворення енергії; визначенням конфігурації згенерованого електричного сигналу при механічних навантаженнях; врахуванні дисипативних процесів для коректного моделювання та керування коливаннями п'єзоелемента.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акустичні властивості циліндричної п'єзокерамічної гідроакустичної антени з плоским екраном в діаметральній площині / А. Г. Лейко та ін. *Электроника и связь*. 2015. Т. 20, № 2. С. 71–78.
2. Алгоритмы и программы решения задач механики твердого деформируемого тела / ред. Я. М. Григоренко. Київ : Наук. думка, 1976. 196 с.
3. Александров К. С., Сорокин Б. П., Бурков С. И. Эффективные пьезоэлектрические кристаллы для акустоэлектроники, пьезотехники и сенсоров. в 2 т. Новосибирск : Наука, 2007. 351 с.
4. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван : Изд-во ЕГУ, 1991. 143 с.
5. Аронов Б. С. Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. Ленинград : Энергоатомиздат, 1990. 272 с.
6. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. Киев : Наук. думка, 1990. 176 с.
7. Баженов В. А. Варіаційні основи будівельної механіки : підручник. Київ : Каравела, 2014. 876 с.
8. Баженов В., Пискунов С., Максим'юк Ю. Метод скінчених елементів у задачах деформування та руйнування тіл обертання при термосиловому навантаженні. Київ : Каравела, 2018. 316 с.
9. Баженов В., Пискунов С., Солодей І. Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл. Київ : Каравела, 2017. 308 с.
10. Базіло К. Теорія побудови дискових п'єзоелектричних перетворювачів з розділеними електродами для комп'ютерних систем критичного застосування : Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Черкаси, 2020. 433 с.

11. Безверхий О., Зінчук Л., Карлаш В. Вплив режиму електричного навантаження на характеристики коливань п'єзокерамічних резонаторів. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2013. № 18. С. 9–20.
12. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Варіаційно–сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Onip матеріалів і теорія споруд*. 2017. № 98. С. 149–161.
13. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Електромеханічна чутливість круглих та кільцевих п'єзоелектричних тонких пластин при механічному збуренні. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2017. Т. 22, № 5. С. 40–46.
14. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Застосування гамільтонового формалізму для дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2017. Т. 38, № 2. С. 23–28.
15. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2015. № 24. С. 5–17.
16. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Підхід до розрахунку гармонічних коливань електропружних циліндрів. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2018. Т. 23, № 1. С. 39–45.
17. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Чисельний метод дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних тіл обертання на основі варіаційних принципів і сплайн апроксимацій. "Актуальні проблеми інженерної механіки": 2-я Міжнар. науково-практ. інтернет-конф., м. Одеса. 2015. С. 22–31.
18. Безверхий О. І., Левченко В. В., Макієвський О. І. Гармонічні коливання п'єзокерамічної круглої пластини з азимутальними розрізами електродів. *Onip матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 92. С. 114–120.
19. Бердичевский В. Вариационные методы механики сплошной среды. Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1983. 448 с.

20. Богорош О., Воронов С., Котовський В. Нові речовини. Частина 2. П'єзоелектричні та сегнетоелектричні матеріали : Навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 274 с.
21. Болкисев А. М. Диссиpация энергии при гармоническом нагружении вязкоупругого пьезокерамического материала. *Прикладная механика*. 1987. Т. 23, № 3. С. 48–53.
22. Болкисев А. М., Рудницкий С. И., Шульга Н. А. Электроакустическая чувствительность пьезокерамического цилиндра при гармоническом нагружении. *Прикл. механика*. 1989. Т. 25, № 12. С. 68–73.
23. Болкисев А. М., Шульга Н. А. Вынужденные колебания пьезокерамического полого цилиндра (радиальная поляризация). *Прикладная механика*. 1985. Т. 21, № 5. С. 118–121.
24. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка : Підруч.: у 2 ч. К : Знання, 2004. Т. 2 : Динаміка. 590 с.
25. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань та стійкість руху. К : Вища шк., 2004. 525 с.
26. Головчан В. Т., Кубенко В. Д., Шульга Н. А. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: в 6 т. К : Наук. думка, 1986. Т. 5 : Динамика упругих тел. 286 с.
27. Григоренко А. Я., Ефимова Т. Л., Лоза И. А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины. *Доп. НАН України*. 2009. № 6. С. 61–67.
28. Григоренко А. Я., Лоза И. А. Осесимметричные волны в слоистых полых цилиндрах с пьезокерамическими радиально поляризованными слоями. *Проблеми обчислювальної математики і міцності конструкцій*. 2011. № 17. С. 87–95.
29. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної механіки : навч. посіб. Київ : Либідь, 1995. 280 с.

30. Григор'єва Л. О., Безверхий О. І. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Проблеми обчислюваної механіки та міцності конструкцій*. 2020. № 31. С. 44–54.
31. Григор'єва Л. О., Григор'єв С. А. Моделювання режимів роботи консольних п'єзоелектричних збірників енергії. *Проблеми обчислюваної механіки та міцності конструкцій*. 2022. № 34. С. 36–47.
32. Григор'єва Л. О., Кириченко А. А., Бабкова Н. О. Визначення електрорушійної сили поляризованої по товщині кільцевої пластини при механічному збуренні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 47–55.
33. Григор'єва Л. О. Нестаціонарні коливання плоского багатошарового п'єзоелемента з урахуванням пружного підкріплюючого шару і акустичного середовища. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 103–109.
34. Григор'єва Л. О. Про застосування методу характеристик при дослідженні електромеханічних нестаціонарних коливань п'єзокерамічного шару при електричному навантаженні. *Системні технології*. 2008. Т. 4, № 57. С. 77–81.
35. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Гармонічні коливання п'єзокерамічних секціонованих функціонально-градієнтних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Mech. Adv. Technol.* 2024. Т. 8, № 1. С. 98–107.
36. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання п'єзоелектричних перетворювачів з функціонально-градієнтних матеріалів. *Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій*. 2022. № 35. С. 29–41.
37. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций / ред. А. Н. Гузь. К : Наук. думка, 1989. Т. 5 : Электроупругость. 280 с.
38. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Бабаев А. Э. Гидроупругость систем оболочек. К : Вища шк., 1984. 206 с.

39. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г. Механика связанных полей в элементах конструкций: [в 5 т.] / ред. А. Н. Гузь. Київ : Наук. думка, 1988. Т. 3 : Акустоэлектромагнитоупругость. 288 с.
40. Дащенко А. Ф., Лазарева Д. В., Сурьянинов Н. Г. Ansys в задачах инженерной механики. Харьков : Бурун и К, 2011. 504 с.
41. Деркач О. Л. Демпфірування нестационарних коливань електров'язкопружних елементів композитних конструкцій : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.09. Київ, 2019. 278 с.
42. Дицковський В. С., Лейко А. Г., Савин В. Г. Електроакустичні перетворювачі : навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2006. 448 с.
43. Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов / А. Н. Гузь та ін. Киев : Наук. Думка, 1991. 368 с.
44. Дрозденко О. І., Дрозденко К. С., Лейко О. Г. Конструювання п'єзокерамічних електроакустичних перетворювачів. Урахування експлуатаційних навантажень. LAP LAMBERT Academic publisher, 2018. 157 с.
45. Д'елесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М. : Наука, 1982. 424 с.
46. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К. : Вища шк., 1989. 184 с.
47. Жук Я. А. Влияние диссиpативного виборазогрева на работоспособность трехслойной шарнирно опертой балки с пьезоактивными слоями. *Теоретическая и прикладная механика*. 2010. Т. 47, № 1. С. 86–94.
48. Жук Я. А. Застосування методу моногармонічного наближення до розв'язування задач про коливання гнучких тонкостінних елементів конструкцій з п'єзоактивними шарами. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2011. № 17. С. 137–144.
49. Жук Я. А. Решение задачи о колебаниях балки с пьезоактивными слоями при механическом или электрическом нагружении. *Теор. и прикл. механика*. 2009. № 45. С. 131–138.

50. Зав'ялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М. : Наука, 1980. 420 с.
51. Заїка В. М. Методи та засоби проектування п'єзокерамічних перетворювачів для комп'ютерних акустичних вимірювальних систем : Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Черкаси, 2016. 203 с.
52. Калоеров С. А., Петренко А. В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. Донецк : Юго-Восток, 2011. 232 с.
53. Карлаш В. Л. Експериментально-теоретичний аналіз електромеханічних резонансних коливань і ефективності перетворення енергії в п'єзокерамічних тонкостінних елементах конструкцій : Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Київ, 2004. 335 с.
54. Карлаш В. Л. Ще раз про втрати енергії в п'єзокерамічних резонаторах. *Акустичний вісник*. 2015. Т. 17, № 1. С. 34–47.
55. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций: [в 5 т.] / ред. А. Н. Гузь. Киев : Наук. думка, 1988. Т. 4 : Электротермовязкоупругость. 320 с.
56. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. Киев : Наук. думка, 1986. 223 с.
57. Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2015. № 94. С. 75–95.
58. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. Житомир : ЖГТУ, 2005. 428 с.
59. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MatLab 7: программирование, численные методы. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. 752 с.

60. Кирилюк В. С. Тривимірні змішані задачі статики термоелектропружності для півпростору : Дис. на здоб. наук. ступ. док. фіз.-мат. наук. Київ, 2011. 331 с.
61. Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругой замкнутой сферической оболочки и их демпфирование пьезоэлектрическими сенсором и актуатором. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2015. № 1. С. 59–65.
62. Киричок I. F., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Демпфування резонансних осесиметричних коливань нескінченно довгої в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсором і актуатором при врахуванні вібророзігріву. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2015. № 1. С. 35–40.
63. Козлов В. І., Зінчук Л. П., Шевченко О. Ю. Чисельне моделювання нестационарних коливань шаруватих тіл обертання з в'язкопружного матеріалу. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки.* 2019. № 1. С. 58–67.
64. Коливання неконсервативних механічних систем : Монографія / А. Є. Бабенко та ін. Київ : Нац.техн.ун-т України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2020. 153 с.
65. Коржик А. В., Куроедова Т. С., Филиппова Н. Ю. Исследование электромеханических характеристик излучающего цилиндрического пьезокерамического преобразователя с полностью электродированной поверхностью, расположенного в замкнутом кольцевом слое. *Электроника и связь.* 2013. № 1. С. 102–109.
66. Коржик О. В., Петріщев О. М., Богданова Н. В. Прийом звуку сферичним електропружним перетворювачем з розрізними електродами (частина 3). *Электроника и связь.* 2015. Т. 20, № 2. С. 66–70.

67. Коржик О. В. До визначення граничних умов в постановках задач прийому звуку сферичним електропружним перетворювачем з розрізними електродами. *Електроника и связь*. 2013. № 2. С. 97–103.
68. Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. К : Либідь, 2004. 408 с.
69. Кубенко В. Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. К : Наук. думка, 1979. 184 с.
70. Кубенко В. Д., Янчевський І. В. Дифракція акустичних хвиль на системах неоднотипних тіл. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка»,, 2024. 265 с.
71. Кучер М. К., Заразовський М. М. Оцінка мікромеханічних моделей прогнозування ефективних констант пружності волокнистих композитів. *Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія Машинобудування*. 2010. № 58. С. 24–29.
72. Лазарева Д. В., Сорока М. М., Шиляєв О. С. Прийоми роботи з ПК Ansys при розв'язанні задач механіки. Одеса : ОДАБА, 2020. 432 с.
73. Лазарев Ю. Ф. Довідник з MATLAB : Електрон. навч. посіб. К : НТУУ "КПІ", 2013. 132 с.
74. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М : Наука, 1982. 624 с.
75. Лоза И. А. Кинематический анализ распространения осесимметричных электроупругих волн в полом слоистом цилиндре при механическом способе возбуждения. *Доповіді НАН України*. 2015. № 7. С. 55–61.
76. Лоза И. А. Неосесимметричные колебания полого неоднородного шара с пьезокерамическими слоями. *Доп. НАН України*. 2011. № 11. С. 76–83.
77. Лоза И. А. О распространении осесимметричных электроупругих волн в полом цилиндре из функционально градиентного пьезокерамического материала. *Доп. НАН України*. 2015. № 3. С. 50–56.
78. Малов В. Пьезорезонансные датчики. Москва : Энергоатомиздат, 1989. 272 с.

79. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей / Д. Бардзокас та ін. Москва : Едиториал УРСС, 2005. Т. 2 : Статические и динамические задачи электроупругости для составных многосвязных тел. 315 с.
80. Меленко Ю. Я. Свойства цилиндрического пьезокерамического излучателя с упругой цилиндрической оболочкой во внутренней полости. *Электроника и связь*. 2013. № 1. С. 59–64.
81. Механика композитов: в 12-и т. / Под общ. ред. Гузя А. Н. К : ПТОО "А.С.К.", 1999. Т. 9 : Динамика элементов конструкций / Под ред. Кубенко В. Д. 379 с.
82. Моргун И. О. Динамика цилиндрического пьезотрансформатора с разночастотным электрическим воздействием на возбудительные электроды. *Электроника и связь*. 2010. № 3. С. 148–151.
83. Мотовиловец А. И., Болкисев А. М., Шульга Н. А. Вязкоупругие колебания пьезокерамического цилиндра при электрическом возбуждении. *Прикладная механика*. 1989. Т. 25, № 10. С. 32–36.
84. Наседкин А. В. Моделирование пьезоэлектрических преобразователей в ANSYS : учебное пособие. Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2015. 176 с.
85. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах : пер. с польск. Москва : Мир, 1986. 159 с.
86. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Москва : Мир, 1982. 428 с.
87. Павловський М. А. Теоретична механіка : підручник. К. : Техніка, 2002. 512 с.
88. Павлюк Я. В. До розрахунку релаксації напруженъ нелінійнов'язкопружних матеріалів при нестационарному одновісному деформуванні. *Вісник НТУ «ХПІ»*. 2014. Т. 57, № 1099. С. 16.
89. Партон В. З., Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М : Наука, 1988. 472 с.

90. Петрищев А. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса-антирезонанса. Київ : АВЕРС, 2012. 299 с.
91. Писаренко Г. Г. Прочность пьезокерамики. К. : Наук. думка, 1987. 229 с.
92. Писаренко Г. С., Богинич О. Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. Київ : Наук. думка, 1981. 219 с.
93. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов : Справочник. Киев : Наук. думка, 1971. 375 с.
94. Поляков П. Ф., Хорунжий В. А., Поляков В. П. Акустоэлектроника. Физико-технологические основы и применение: в 2 т. Харьков : Компания СМИТ, 2007. 552 с.
95. Поплавко Ю. М., Якименко Ю. І. П'єзоелектрики : Навч. посіб. К : НТУУ «КПІ», 2013. 328 с.
96. Поплавко Ю. Фізика діелектриків. К : НТУУ "КПІ", 2015. 572 с.
97. Пьезокерамические преобразователи / В. В. Ганопольский та ін.; ред. И. Пугачев. Ленинград : Судостроение, 1984. 256 с.
98. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва : Наука, 1977. 381 с.
99. Резонансные колебания пьезокерамических цилиндров / В. А. Андрушченко та ін. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2011. № 15. С. 18–25.
100. Ремез Н. С., Лучко І. А., Мейш В. Ф. Чисельні методи розв'язання навчальних і науково-технічних задач. Київ : НТУУ "КПІ", 2011. 248 с.
101. Савин В. Г., Збруцкий А. В., Моргун И. О. Нестационарная гидроэлектроупругость сферических пьезоэлектрических преобразователей : монографія / ред. О. Н. Петрищев. К : НТУУ «КПІ», 2013. 241 с.

102. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. Нежин : "Вид-во "Аспект-Поліграф", 2006. 232 с.
103. Савченко О. В., Деркач О. Л., Ющенко С. М. Визначення ефективних динамічних характеристик електров'язкопружних композиційних матеріалів. *Технічні науки та технології*. 2015. № 1. С. 14–24.
104. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. Москва : Наука, 1989. 432 с.
105. Самарский А. А. Теория разностных схем. Москва : Наука, 1983. 616 с.
106. Тимошенко С. П., Гудьєр Дж. Теория упругости. М : Наука, 1975. 575 с.
107. Хильчевский В. В., Дубенец В. Г. Рассеяние энергии при циклическом деформировании материалов в сложном напряженном состоянии. Київ : Вища шк., 1981. 168 с.
108. Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Київ : Наук. думка, 1989. 208 с.
109. Чабан А. В., Дубецький С. А. Застосування принципу Гамільтона-Остроградського з урахуванням дисипації для одержання рівняння поперечних коливань лінійного ізотропного середовища. *Вісн. Нац. ун-ту "Львів. політехніка"*. 2007. № 588. С. 97–100.
110. Чисельні методи в комп'ютерних науках / В. А. Андруник та ін. ; ред. В. В. Пасічник. Львів : Вид-во «Новий Світ – 2000», 2020. Т. 2. 536 с.
111. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин / Н. А. Шульга та ін. *Теоретич. и прикладная механика*. 2011. Т. 48, № 2. С. 98–104.
112. Шарапов В. М., Мусиенко М. В., Шарапова Е. В. Пьезоэлектрические датчики / ред. В. В. Шарапов. Москва : Техносфера, 2006. 632 с.
113. Шарапов В. М., Сотула Ж. В., Куницкая Л. Г. Электроакустические преобразователи. М : Техносфера, 2013. 296 с.

114. Шляхин Д. А. Нестационарная механика электроупругих полей в элементах конструкций. Самара : СГАСУ, 2012. 190 с.
115. Шульга М. О. Визначення електрорушійної сили п'єзоелектричних перетворювачів при механічних навантаженнях. *Доп. НАН України*. 2009. № 1. С. 70–74.
116. Шульга М. О., Григор'єва Л. О. Застосування методу послідовних наближень для аналізу електромеханічних нестационарних коливань п'єзоелектричного шару при електричних збуреннях. *Системні технології*. 2009. Т. 3, № 62. С. 56–59.
117. Шульга М. О., Григор'єва Л. О. Про коливання пружних шарів з викривленими границями. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2010. Т. 84. С. 120–126.
118. Шульга М. О., Григор'єв С. А. Пружноелектричні коливання радіально поляризованої п'єзокерамічної кулі з розрізними електродами. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2008. № 82. С. 55–64.
119. Шульга М. О., Григор'єв С. А. Радіальні пружноелектричні нестационарні коливання п'єзокерамічної порожнистої кулі. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2007. № 81. С. 159–166.
120. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. К : Наук. думка, 2008. 270 с.
121. Шульга М. О. Определение электродвижущей силы пластинчатых пьезоэлектрических преобразователей при динамических механических нагрузках. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012. № 18. С. 227–234.
122. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності. *Доп. НАН України*. 2008. № 7. С. 76–81.
123. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезокерамических тел. К : Наук. думка, 1990. 228 с.

124. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. К : Наук. думка, 1981. 200 с.
125. Электромеханические характеристики приемного цилиндрического электроупругого преобразователя размещенного в кольцевом слое / А. В. Коржик та ін. *Электроника и связь*. 2013. № 2. С. 109–114.
126. Яковлев А. П. Диссипативные свойства неоднородных материалов и систем. Київ : Наук. думка, 1985. 248 с.
127. Янчевский И. В. Моделирование нестационарных деформаций пакетного пьезоэлектрического излучателя методом конечных элементов. *Динамика и прочность машин*. 2013. Т. 16, № 2. С. 51–57.
128. Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання бімorfних електропружних тіл. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 448 с.
129. Accurate evaluation of the real and imaginary material constants for a piezoelectric resonator in the radial mode / S. Sherrit et al. *Ferroelectrics*. 1991. Vol. 119, no. 1. P. 17–32.
130. Acoustic Radiation Pressure on a Solid Sphere in a Compliant Cylindrical Tube Filled with a Fluid / O. P. Zhuk et al. *International Applied Mechanics*. 2022.
131. Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate / J. Li et al. *Composite Structures*. 2019. Vol. 207. P. 509–518.
132. Additive manufacturing of functionally graded materials: A review / C. Zhang et al. *Materials Science and Engineering: A*. 2019. Vol. 764. P. 138209.
133. Advanced Piezoelectric Materials / ed. by K. Uchino. Elsevier, 2017. 830 p.
134. Advances in Developing Electromechanically Coupled Computational Methods for Piezoelectrics/Ferroelectrics at Multiscale / D. Fang et al. *Applied Mechanics Reviews*. 2013. Vol. 65, no. 6.
135. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells / X.-H. Wu et al. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39, no. 20. P. 5325–5344.

136. Amarande L. Evaluation of the complex material constants of piezoelectric ceramics in the thickness vibration mode. *Journal of the European Ceramic Society*. 2014. Vol. 34, no. 6. P. 1547–1552.
137. A Methodological Review of Piezoelectric Based Acoustic Wave Generation and Detection Techniques for Structural Health Monitoring / Z. Sun et al. *International Journal of Aerospace Engineering*. 2013. Vol. 2013. P. 1–22.
138. Analysis and testing of plates with piezoelectric sensors and actuators / ed. by L. R. Center. Hampton, Va : National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 1998.
139. Analysis of cylindrical piezoelectric actuator used in flow control device / R. Bansevičius et al. *Mechanika*. 2011. Vol. 17, no. 4.
140. Andrushko N. F., Senchenkov I. K., Boichuk E. V. Nonstationary waves in an inelastic disk under impulsive radial loading. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, no. 11. P. 1299–1305.
141. An energy harvester using piezoelectric cantilever beams undergoing coupled bending–torsion vibrations / A. Abdelkefi et al. *Smart Materials and Structures*. 2011. Vol. 20, no. 11. P. 115007.
142. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers / R. B. Williams et al. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* :. 2002. Vol. 4753, no. 1. P. 421–427.
143. ANSI/IEEE Std 176-1987. IEEE Standard on Piezoelectricity. Effective from 1987-09-07. Official edition. New York, N.Y., 1987. 74 p.
144. ANSYS element reference. *Home* / *BME-MM*. URL: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_elem/Hlp_E_CH3_Classifications.html.
145. APC International. *Piezo Products & Materials Supplier* / *APC International*. URL: <https://www.americanpiezo.com>.
146. Application of piezoelectric transducer in energy harvesting in pavement / X. Xu et al. *International Journal of Pavement Research and Technology*. 2018. Vol. 11, no. 4. P. 388–395.

147. Aslam M., Nagarajan P., Remanan M. Analysis of Piezoelectric Solids using Finite Element Method. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 330 (2018) 012009, 31 January 2018.
148. Automatic iterative evaluation of complex material constants in piezoelectric ceramics / C. Alemany et al. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 1994. Vol. 27, no. 1. P. 148–155.
149. Axisymmetric Resonant Vibrations and Vibration Heating of an Inelastic Cylindrical Shell Compliant to Shear with Piezoelectric Actuators and Rigidly Fixed End Faces / I. F. Kyrychok et al. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023.
150. Axisymmetric Resonant Vibrations and Vibration Heating of an Inelastic Cylindrical Shell Compliant to Shear with Piezoelectric Actuators and Rigidly Fixed End Faces / I. F. Kyrychok et al. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023.
151. Babaei M. H., Akhras G. Temperature-Dependent response of radially polarized piezoceramic cylinders to harmonic loadings. *Journal of intelligent material systems and structures*. 2011. Vol. 22, no. 7. P. 645–654.
152. Babaei M. H., Chen Z. T. The transient coupled thermo-piezoelectric response of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder to dynamic loadings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2009. Vol. 466, no. 2116. P. 1077–1091.
153. Babaev A. E., Yanchevskii I. V. Determining the shock load on an electroelastic bimorph beam with split conductive coatings. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 46, no. 9. P. 1019–1026.
154. Babaev A. E., Yanchevskii I. V. Identification of the shock load on an electroelastic bimorph disk. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 5. P. 560–566.
155. Babich D., Bezverkhyi O., Dorodnykh T. Structural probabilistic modeling of fatigue fracture for piezoceramic materials under cyclic loading. *Springer proceedings in mathematics & statistics*. Cham, 2016. P. 11–26.
156. Bardzokas D. I., Kudryavtsev V. A., Senik N. A. Wave Propagation in Electromagnetoelastic Media : монографія. Едиториал УРСС, 2005.

157. Batko W., Kozupa M. Active vibration control of rectangular plate with piezoceramic elements. *Archives of acoustics*. 2008. Vol. 33, no. 4. P. 195–200.
158. Bezverhyi O. I., Grigoryeva L. O., Grigoryev S. A. Resonance radial oscillations of a piezoceramic cylinders and spheres taking into account electromechanical losses // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2016. Vol. 81, no. 1. P. 41–48.
159. Bezverkhyi O. I., Grigoryeva L. O. Comparative analysis of two methods used for the investigation of harmonic vibrations of piezoceramic cylinders. *Journal of mathematical sciences*. 2019. Vol. 240, no. 2. P. 129–140.
160. Bisegna P., Caruso G. Evaluation of higher-order theories of piezoelectric plates in bending and in stretching. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38, no. 48-49. P. 8805–8830.
161. Bisegna P., Luciano R. On methods for bounding the overall properties of periodic piezoelectric fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1997. Vol. 45, no. 8. P. 1329–1356.
162. Bolkisev A. M., Rudnitskii S. I., Shul'ga N. A. Electroacoustic sensitivity of a piezoceramic cylinder subjected to a harmonic load. *Soviet Applied Mechanics*. 1989. Vol. 25, no. 12. P. 1227–1232.
163. Busch-Vishniac I. J. Electromechanical sensors and actuators. Springer, 2012. 364 p.
164. Chazal C. F., Moutou Pitti R. An incremental constitutive law for ageing viscoelastic materials: a three-dimensional approach. *Comptes Rendus Mécanique*. 2009. Vol. 337, no. 1. P. 30–33.
165. Chazal C., Pitti R. M. Modelling of ageing viscoelastic materials in three dimensional finite element approach. *Meccanica*. 2009. Vol. 45, no. 3. P. 439–441.
166. Chen W. Q., Ding H. J., Liang J. The exact elasto-electric field of a rotating piezoceramic spherical shell with a functionally graded property. *International journal of solids and structures*. 2001. Vol. 38, no. 38-39. P. 7015–7027.

167. Chen W. Q., Wang L. Z., Lu Y. Free vibrations of functionally graded piezoceramic hollow spheres with radial polarization. *Journal of sound and vibration*. 2002. Vol. 251, no. 1. P. 103–114.
168. China PZT, Piezo Crystal, Piezo Transducer, PZT Ceramic Manufacturer and Supplier. *Zibo Yuhai Electronic Ceramic Co., Ltd.* URL: <https://www.yhpiezo.com/>.
169. Chiroiu V., Munteanu L. On the free vibrations of a piezoceramic hollow sphere. *Mechanics Research Communications*. 2007. Vol. 34, no. 2. P. 123–129.
170. Choi S.-B., Han Y.-M. Piezoelectric Actuators: Control Applications of Smart Materials. Taylor & Francis Group, 2016. 280 p.
171. Clough R. W., Penzien J. Dynamics of structures. 3rd ed. University Ave. Berkeley, CA 94704 USA : Computers & Structures, Inc., 1995. 750 p.
172. Comparative study of the hard and soft PZT-based ceramics sintered by various methods / M. A. Marakhovsky et al. *Ferroelectrics*. 2021. Vol. 575, no. 1. P. 43–49.
173. Contribution of piezoelectric effect, electrostriction and ferroelectric/ferroelastic switching to strain-electric field response of dielectrics / G. Viola et al. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2013. Vol. 03, no. 01. P. 1350007.
174. Coondoo I., Panwar N., Kholkin A. Lead-free piezoelectrics: Current status and perspectives. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2013. Vol. 03, no. 02. P. 1330002.
175. Coupling analysis of flexoelectric effect on functionally graded piezoelectric cantilever nanobeams / Y. Chen et al. *Micromachines*. 2021. Vol. 12, no. 6. P. 595.
176. Cruz C., Miranda E. A Critical Review of the Rayleigh Damping Model. *16th World Conference on Earthquake EngineeringAt:*, Santiago, 17 January 2025.
177. Dai H. L., Fu Y. M., Yang J. H. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere. *Acta Mechanica Sinica*. 2007. Vol. 23, no. 1. P. 55–63.

178. Damjanovic D. Hysteresis in Piezoelectric and Ferroelectric Materials. *The Science of Hysteresis*. 2006. P. 337–465.
179. Data of piezoelectric vibration energy harvesting of a bridge undergoing vibration testing and train passage / P. Cahill et al. *Data in Brief*. 2018. Vol. 17. P. 261–266.
180. Derkach O. L., Zinkovskyi A. P., Savchenko O. V. Active Damping of Nonstationary Vibrations of a Three-Layer Electro-Viscoelastic Composite Plate. *Strength of Materials*. 2020. Vol. 52, no. 6. P. 876–888.
181. Determination of the reduced matrix of the piezoelectric, dielectric, and elastic material constants for a piezoelectric material with C_∞ symmetry / S. Sherrit et al. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 2011. Vol. 58, no. 9. P. 1714–1720.
182. Ding H., Chen W. Three dimensional problems of piezoelasticity. Huntington, N.Y : Nova Science Publishers, 2001. 532 p.
183. Ding H. J., Wang H. M., Chen W. Q. Dynamic responses of a functionally graded pyroelectric hollow sphere for spherically symmetric problems. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003. Vol. 45, no. 6-7. P. 1029–1051.
184. Ding H. J., Wang H. M., Chen W. Q. Elastodynamic solution for spherically symmetric problems of a multilayered hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*. 2004. Vol. 73, no. 11-12. P. 753–768.
185. Ding H. J., Wang H. M., Chen W. Q. The general solution of spherically isotropic piezoelectric media and its applications. *Mechanics Research Communications*. 2001. Vol. 28, no. 4. P. 389–396.
186. Ding H. J., Wang H. M., Chen W. Q. Transient responses in a piezoelectric spherically isotropic hollow sphere for symmetric problems. *Journal of Applied Mechanics*. 2003. Vol. 70, no. 3. P. 436–445.
187. Dong S. Review on piezoelectric, ultrasonic, and magnetoelectric actuators. *Journal of advanced dielectrics*. 2012. Vol. 02, no. 01. P. 1230001.

188. Dubenets V. G., Yakovenko O. A. Determination of effective damping characteristics of fiber-reinforced viscoelastic composites. *Strength of Materials*. 2009. Vol. 41, no. 4. P. 436–443.
189. Dubenets V., Savchenko O., Derkach O. Active damping of nonstationary vibrations in a beam with electro-viscoelastic patches. *Вісник Чернігівського державного технологічного університету*. 2014. Vol. 71, no. 1. P. 43–49.
190. Dynamics and control in distributed systems / ed. by H. S. Tsou, L. A. Bergman. Cambridge University Press, 1998. 374 p.
191. Dynamics of Smart Systems and Structures / ed. by V. Lopes Junior, V. Steffen, M. A. Savi. Cham : Springer International Publishing, 2016.
192. Ebrahimi F. Free vibration of smart circular thin FGM plate. *Advances in vibration analysis research*. 2011.
193. Effect of Electrical Boundary Conditions and Direction of Polarization of Piezoceramics on Spectral Characteristics of Axisymmetric Acoustoelectric Waves in Hollow Cylinder / O. Y. Grigorenko et al. *International Applied Mechanics*. 2024.
194. Electrode size and dimensional ratio effect on the resonant characteristics of piezoelectric ceramic disk / L. Wu et al. *Ceramic materials - progress in modern ceramics*. 2012.
195. Electronic System for Calculation-Experimental Determination of the Modal and Damping Characteristics of Active Viscoelastic Beams / R. D. Yershov et al. *2020 IEEE 40th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*, Kyiv, Ukraine, 22–24 April 2020. 2020.
196. Erhart J. Parameters and design optimization of the ring piezoelectric ceramic transformer. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2015. Vol. 05, no. 03. P. 1550022.
197. Erhart J., Tutu S. Effective electromechanical coupling for the partially electrode ceramic resonators of different geometries. *The Annals of “Dunarea de Jos” University of Galati Fascicle ix. Metallurgy and materials science*. 2015. No. 2. P. 7–16.

198. Erturk A., Inman D. J. *Piezoelectric Energy Harvesting*. Chichester, UK : John Wiley & Sons, Ltd, 2011.
199. Evaluation of the Effective Characteristics of Energy Dissipation in Layered Composites / O. L. Derkach et al. *Materials Science*. 2022.
200. Felippa C. A. *Introduction to finite element methods*. University of Colorado, 2004. 791 p.
201. Filipiak J., Solarz L., Steczko G. Surface Acoustic Wave (SAW) Vibration Sensors. *Sensors*. 2011. Vol. 11, no. 12. P. 11809–11832.
202. Fleming A. J., Moheimani S. O. R. *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*. Springer, 2006.
203. Fracture analysis in continuously nonhomogeneous magneto-electro-elastic solids under a thermal load by the MLPG / J. Sladek et al. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47, no. 10. P. 1381–1391.
204. Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks / V. Govorukha et al. Cham : Springer International Publishing, 2017. 235 p.
205. Functionally graded materials: Design, processing, and applications / ed. by M. Yoshinari. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1999. 330 p.
206. Fundamentals of Piezoelectric Sensorics / J. Tichý et al. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010.
207. Grigorenko A. Y., Grigorenko Y. M., Loza I. A. Numerical Analysis of Dynamical Processes in Inhomogeneous Piezoceramic Cylinders (Review)*. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 5. P. 523–571.
208. Grigorenko A. Y., Loza I. A. Forced Axisymmetric Vibrations of an Electrically Excited Hollow Sphere Made of a Continuously Inhomogeneous Piezoceramic Material*. *International Applied Mechanics*. 2021.
209. Grigorenko A. Y., Loza I. A., Yaremchenko S. N. Numerical Analysis of Free Vibrations of Piezoelectric Cylinders. *Advanced Structured Materials*. Cham, 2019. P. 187–196.

210. Grigorenko A. Y., Müller W. H., Loza I. A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. Cham : Springer International Publishing, 2021.
211. Grigor'eva L. O. Electromechanical nonstationary thickness vibrations of a piezoceramic layer. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46, no. 2. P. 159–164.
212. Grigor'eva L. O. Vibrations of a piezoceramic cylinder subject to nonstationary electric excitation. *International Applied Mechanics*. 2007. Vol. 43, no. 3. P. 303–308.
213. Grigoryeva L. O. Calculation of Cylindrical Multilayer Electromechanical Transducer at Different Polarization Types in Non-stationary Modes. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2018. Vol. 54, no. 1. P. 5–11.
214. Grigoryeva L., Ivanenko P., Korbakov O. Generation of energy in console piezoelectric energy harvesters. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022. No. 108. P. 337–348.
215. Grigoryeva L. Transient responses in piezoceramic multilayer actuators taking into account external viscoelastic layer. *Strength of materials and theory of structures*. 2020. No. 105. P. 255–266.
216. Gupta K. M. Engineering Materials: Research, Applications and Advances. Taylor & Francis Group, 2014. 636 p.
217. Hao X. A review on the dielectric materials for high energy-storage application. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2013. Vol. 03, no. 01. P. 1330001.
218. Hibbeler R. C. Engineering Mechanics - Dynamics. Pearson Education Limited, 2016. 790 p.
219. High Power Characterization of Piezoelectric Materials. / K. Uchino et al. *Journal of Electroceramics*. 1998. Vol. 2, no. 1. P. 33–40.
220. High Temperature, High Power Piezoelectric Composite Transducers / H. Lee et al. *Sensors*. 2014. Vol. 14, no. 8. P. 14526–14552.

221. Hou P. F., Ding H. J., Leung A. Y. T. The transient responses of a special non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinder for axisymmetric plane strain problem. *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 291, no. 1-2. P. 19–47.
222. Hou P. F., Wang H. M., Ding H. J. Analytical solution for the axisymmetric plane strain electroelastic dynamics of a special non-homogeneous piezoelectric hollow cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 2003. Vol. 41, no. 16. P. 1849–1868.
223. Hryhorieva L., Yanchevskyi I. Influence of material functional heterogeneity on non-stationar oscillations of piezoceramic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures*. 2022. No. 109. P. 359–368.
224. Hydrodynamic Characteristics of Interaction of the Plane Wave with a Spherical Body in the Filled by Compressive Liquid Semi-infinite Circular Cylindrical Cavity / V. D. Kubenko et al. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 58, no. 2.
225. Ikeda T. Fundamentals of piezoelectricity. Oxford : Oxford University Press, 1996. 263 p.
226. Integrated PiezoMEMS actuators and sensors / R. G. Polcawich et al. 2010 Ninth IEEE Sensors Conference (SENSORS 2010), Kona, HI, 1–4 November 2010. 2010.
227. Investigation on MEMS-based Piezoelectric Energy Harvester Design with Aspect of Autonomous Automobile Sensors / M. S. Bhuyan et al. *Asian Journal of Scientific Research*. 2012. Vol. 6, no. 1. P. 1–15.
228. Irschik H. A review on static and dynamic shape control of structures by piezoelectric actuation. *Engineering Structures*. 2002. Vol. 24, no. 1. P. 5–11.
229. Irschik H., Krommer M., Vetyukov Y. On the Use of Piezoelectric Sensors in Structural Mechanics: Some Novel Strategies. *Sensors*. 2010. Vol. 10, no. 6. P. 5626–5641.
230. Jaffe B., Cook Jr W. R., Jaffe H. Piezoelectric Ceramics. London and New York : Academic Press, 2012. 328 p.
231. Jalili N. Piezoelectric-Based Vibration Control. Boston, MA : Springer US, 2010.

232. Karlash V. L. Revisiting the modeling of the vibrations of high-power piezoceramic resonators using an equivalent circuit. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 2. P. 176–185.
233. Karnaughova T. V., Pyatetskaya E. V. Basic relations of the theory of thermoviscoelastic plates with distributed sensors. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 6. P. 660–669.
234. Karnaughov V. G., Kirichok I. F. Forced harmonic vibrations and dissipative heating-up of viscoelastic thin-walled elements (Review). *International Applied Mechanics*. 2000. Vol. 36, no. 2. P. 174–195.
235. Kharouf N., Heyliger P. R. Axisymmetric Free Vibrations Of Homogeneous And Laminated Piezoelectric Cylinders. *Journal of Sound and Vibration*. 1994. Vol. 174, no. 4. P. 539–561.
236. Khoroshev K. G., Glushchenko Y. A. Electroelastic State of a Piezoelectric Half-Space with Holes and Cracks Under an Electric Field. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, no. 4. P. 477–489.
237. Khoroshun L. P. The Triple-Continuum Mechanics of Conductors as the Basis for the Theory of Electromagnetic Waves and Conduction. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 2. P. 127–140.
238. Kirichok I. F., Cherniushok O. A. Forced Vibration and Self-Heating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shear Compliant Shell with Piezoelectric Actuators and Sensors*. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 6. P. 723–731.
239. Kirichok I. F., Chernyushok O. A. Thermomechanical Behavior and Life of a Flexible Inelastic Cylindrical Shell with Piezoactuators Under Axisymmetric Resonant Vibrations*. *International Applied Mechanics*. 2022.
240. Kocabach J. Finite Element Modeling of Ultrasonic Piezoelectric Transducers : a dr. scient. project. Bergen, 2000. 214 p.
241. Kozlov V. I., Zinchuk L. P., Karnaughova T. V. Nonlinear Vibrations and Dissipative Heating of Laminated Shells of Piezoelectric Viscoelastic Materials with Shear Strains*. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, no. 6. P. 669–686.

242. Kubenko V. D. Nonstationary Deformation of an Elastic Layer with Mixed Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*. 2016. Vol. 52, no. 6. P. 563–580.
243. Kubenko V. D., Yanchevskii I. V. Abnormal Frequencies in a Semi-Infinite Cylindrical Vessel Filled with a Fluid and Dynamically Excited by a Spherical Oscillator. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 2. P. 141–155.
244. Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Exact electroelastic analysis of functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51, no. 1. P. 13–25.
245. Kyryliuk V. S., Levchuk O. I. Stress State of an Orthotropic Electroelastic Medium with an Arbitrarily Oriented Elliptic Crack Under Uniaxial Tension. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, no. 1. P. 53–62.
246. Lagrangians for electromechanical systems / W. Manhãesa et al. *Mecánica Computacional Vol XXXVI*, San Miguel de Tucumán, 6–9 November 2018.
247. Li J., Dunn M. L. Viscoelectroelastic behavior of heterogeneous piezoelectric solids. *Journal of Applied Physics*. 2001. Vol. 89, no. 5. P. 2893–2903.
248. Lin Y.-C., Tseng K.-S., Ma C.-C. Investigation of resonant and energy harvesting characteristics of piezoelectric fiber composite bimorphs. *Materials & Design*. 2021. Vol. 197. P. 109267.
249. Li P., Jin F., Ma J. One-dimensional dynamic equations of a piezoelectric semiconductor beam with a rectangular cross section and their application in static and dynamic characteristic analysis. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 39, no. 5. P. 685–702.
250. Liu M., Gorman D. G. Formulation of Rayleigh damping and its extensions. *Computers & Structures*. 1995. Vol. 57, no. 2. P. 277–285.
251. Li X., Ding H., Chen W. Three-dimensional analytical solution for a transversely isotropic functionally graded piezoelectric circular plate subject to a uniform electric potential difference. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2008. Vol. 51, no. 8. P. 1116–1125.

252. Mančić D., Dimić V., Radmanović M. Resonance Frequencies of PZT Piezoceramic Disks: A Numerical Approach. *Facta Universitatis Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 2002. Vol. 3, no. 12. P. 431–442.
253. Mechanical APDL Command Reference. *Home / BME-MM*. URL: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_cmd/Hlp_C_CmdTOC.html.
254. Mechanics of Electromagnetic Solids / ed. by J. S. Yang, G. A. Maugin. Boston, MA : Springer US, 2003. 287 p.
255. Mehrabadi J. S., Kargarnovin M. H., Najafizadeh M. M. Free vibration analysis of functionally graded coupled circular plate with piezoelectric layers. *Journal of mechanical science and technology*. 2009. Vol. 23, no. 8. P. 2008–2021.
256. Melnik R. V. N., Melnik K. N. Modelling dynamics of piezoelectric solids in the two-dimensional case. *Applied Mathematical Modelling*. 2000. Vol. 24, no. 3. P. 147–163.
257. Mikhailenko V. V., Karnaukhova T. V. On the Energy Theory of the Electromechanical Coupling Coefficient for Vibrations of Piezoelectric Bodies. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, no. 2. P. 231–239.
258. MIL-STD-1376B. Military standard: piezoelectric ceramic material and measurements guidelines for sonar transducers. Replaces MIL-STD-1376A ; effective from 1995-02-24. Official edition. Washington : DC 20362.
259. Moheimani S. J., Kargarnovin M. H., Najafizadeh M. M. A survey of recent innovations in vibration damping and control using shunted piezoelectric transducers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2003. Vol. 11, no. 4. P. 482–494.
260. Nehru E. S. Axisymmetric Vibration of Piezo-Lemv Composite Hollow Multilayer Cylinder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 2012. P. 1–12.
261. Neubauer M., M. S., H X. Shunted Piezoceramics for Vibration Damping – Modeling, Applications and New Trends. *Smart Actuation and Sensing Systems - Recent Advances and Future Challenges*. 2012.

262. Nguyen Thi H. Free Vibration and Static Bending Analysis of Piezoelectric Functionally Graded Material Plates Resting on One Area of Two-Parameter Elastic Foundation. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020. Vol. 2020. P. 1–18.
263. Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: Modeling and experimental identification / S. C. Stanton et al. *Journal of Applied Physics*. 2010. Vol. 108, no. 7. P. 074903.
264. Nonlinear Viscoelastic Behavior of Active Fiber Composites / V. Tajeddini et al. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2014. Vol. 136, no. 2.
265. Perfectly Matched Layers for Acoustic and Elastic Waves. Denver, Colorado : U.S. Department of the Interior Bureau of Reclamation Technical Service Center, 2008. 114 p.
266. PI Ceramic GmbH. *Piezokeramiken, Piezoaktoren & Piezokomponenten von PI Ceramic*. URL: <http://www.piceramic.de/de/>
267. Piezoelectric Products & Piezo Integration Experts | PIEZO. *PIEZO.COM*. URL: <https://piezo.com/>.
268. Piezoelectric transformers / K. Uchino et al. *Ferroelectrics*. 2001. Vol. 263, no. 1. P. 91–100.
269. Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*. Springer, 2013. 436 p.
270. Rathod V. T. A review of electric impedance matching techniques for piezoelectric sensors, actuators and transducers. *Electronics*. 2019. Vol. 8, no. 2. P. 169.
271. Rogacheva N. N. *The theory of piezoelectric shells and plates*. CRC Press, 1994. 272 p.
272. Rupitsch S. J. *Piezoelectric sensors and actuators*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2019. 559 p.

273. Sapsathiarn Y., Senjuntichai T., Rajapakse R. K. N. D. Cylindrical interface cracks in 1-3 piezocomposites. *Composites Part B: Engineering*. 2012. Vol. 43, no. 5. P. 2257–2264.
274. Sekouri E. M., Hu Y.-R., Ngo A. D. Modeling of a circular plate with piezoelectric actuators. *Mechatronics*. 2004. Vol. 14, no. 9. P. 1007–1020.
275. Sezer N., Koç M. A comprehensive review on the state-of-the-art of piezoelectric energy harvesting. *Nano Energy*. 2021. Vol. 80. P. 105567.
276. Shahab S., Zhao S., Erturk A. Soft and hard piezoelectric ceramics and single crystals for random vibration energy harvesting. *Energy technology*. 2018. Vol. 6, no. 5. P. 935–942.
277. Shashank R., Harisha S. K., Abhishek M. C. Modelling and analysis of piezoelectric cantilever energy harvester for different proof mass and material proportion. *International Conference on Advances in Materials and Manufacturing Applications (IConAMMA-2017)* : IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Bengaluru, 17 July 2023.
278. Shekhani H. N. Characterization of the high power properties of piezoelectric ceramics using the burst method: methodology, analysis, and experimental approach : A Dissertation in Electrical Engineering for the Degree of Doctor of Philosophy. 2016. 166 p.
279. Shekhani H. Ultrasonic Transducer Product Development Consulting. *ultrasonicadvisors.com*. URL: <http://ultrasonicadvisors.com>.
280. Shen D. K. D. J. Piezoelectric energy harvesting devices for low frequency vibration applications. 2009.
281. Sherrit S., Mukherjee B. K. Characterization of Piezoelectric Materials for Transducers. *SPIE* : Proc, 25 January 2007. 2007.
282. Sherrit S., Wiederick H. D., Mukherjee B. K. Complete characterization of the piezoelectric, dielectric, and elastic properties of Motorola PZT 3203 HD, including losses and dispersion. *Medical Imaging 1997*, Newport Beach, CA / ed. by K. K. Shung. 1997.

283. Sherrit S., Wiederick H. D., Mukherjee B. K. PdP135. Non-iterative evaluation of the real and imaginary material constants of piezoelectric resonators. *Ferroelectrics*. 1992. Vol. 134, no. 1. P. 111–119.
284. Shields J., Konefat E. Modeling of Piezoceramic Actuators for Control. *Piezoelectric Actuators - Principles, Design, Experiments and Applications*. 2021. URL: <https://doi.org/10.5772/intechopen.96727>.
285. Shulga M. O., Grigoryeva L. O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical vibrations: types, testing, and analysis*. N.Y, 2011. P. 179–204.
286. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Babkova N. O. Electrically Excited Nonstationary Vibrations of Thin Circular Piezoelectric Plates. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 406–411.
287. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 2. P. 177–185.
288. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Electroelastic nonstationary vibration of a piezoceramic layer. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 3. P. 282–289.
289. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Electroelastic two-dimensional nonstationary vibrations of a piezoceramic prismatic body under mechanical loading. *International Applied Mechanics*. 2010. Vol. 46, no. 5. P. 493–498.
290. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kirichenko A. A. Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 274–280.
291. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kornienko V. F. Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 1. P. 62–69.
292. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Method of characteristics in analysis of the propagation of electroelastic thickness oscillations in a piezoceramic layer under

electric excitation. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44, no. 10. P. 1093–1097.

293. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Method of characteristics in electroelastic analysis of a layer subject to dynamic mechanical loading. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 1. P. 66–72.

294. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Nonstationary radial electroelastic vibrations of a piezoceramic cylinder under mechanical loading. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 4. P. 401–405.

295. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Propagation of two-dimensional nonstationary vibrations in an electrically excited piezoceramic prismatic body. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44, no. 11. P. 1258–1264.

296. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Radial electroelastic nonstationary vibration of a hollow piezoceramic cylinder subject to electric excitation. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 2. P. 134–138.

297. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Solution of initial-boundary-value problems of electroelasticity revisited. *International Applied Mechanics*. 2008. Vol. 44, no. 12. P. 1371–1377.

298. Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Makievskii O. I. Influence of boundary conditions on the natural frequencies of nonaxisymmetric electroelastic vibrations of piezoceramic plates. *International Applied Mechanics*. 2012. Vol. 48, no. 5. P. 592–601.

299. Shul'ga N. A., Levchenko V. V., Makievskii O. I. Nonaxisymmetric electroelastic vibrations of piezoceramic ring plates with radially cut electrodes. *International Applied Mechanics*. 2012. Vol. 48, no. 4. P. 438–446.

300. Shul'ga V. M. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of a Hollow Cylinder with Radial Axis of Physicomechanical Symmetry. *International Applied Mechanics*. 2005. Vol. 41, no. 7. P. 766–769.

301. Soft and Hard Piezoelectric Ceramics for Vibration Energy Harvesting / X. Yan et al. *Crystals*. 2020. Vol. 10, no. 10. P. 907.

302. Spears R. E., Jensen S. R. Approach for Selection of Rayleigh Damping Parameters Used for Time History Analysis. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2012. Vol. 134, no. 6.
303. Su Z., Jin G., Ye T. Electro-mechanical vibration characteristics of functionally graded piezoelectric plates with general boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018. Vol. 138-139. P. 42–53.
304. Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics / R. Georges Sabat et al. *Journal of Applied Physics*. 2007. Vol. 101, no. 6. P. 064111.
305. Thompson M. K., Thompson J. M. ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis. Elsevier Science & Technology Books, 2017. 466 p.
306. Tzou H. S., Lee H. J., Arnold S. M. Smart materials, precision sensors/actuators, smart structures, and structronic systems. *Mechanics of advanced materials and structures*. 2004. Vol. 11, no. 4-5. P. 367–393.
307. Tzou H. S., Ye R. Piezothermoelasticity and Precision Control of Piezoelectric Systems: Theory and Finite Element Analysis. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1994. Vol. 116, no. 4. P. 489–495.
308. Uchino K. Introduction to piezoelectric actuators and transducers. Penn State University University Park, PA 16802, 2003. 40 p.
309. Uchino K. Piezoelectric ultrasonic motors: overview. *Smart Materials and Structures*. 1998. Vol. 7, no. 3. P. 273–285.
310. Uchino K., Zhuang Y., Ural S. O. Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals. *Journal of advanced dielectrics*. 2011. Vol. 01, no. 01. P. 17–31.
311. Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M. Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42, no. 1. P. 85–102.
312. Wang H. M., Ding H. J., Chen Y. M. Transient responses of a multilayered spherically isotropic piezoelectric hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 74, no. 9. P. 581–599.

313. Wang H. M., Ding H. J. Spherically symmetric transient responses of functionally graded magneto-electro-elastic hollow sphere. *Structural Engineering and Mechanics*. 2006. Vol. 23, no. 5. P. 525–542.
314. Wang H. M., Ding H. J. Transient responses of a special non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinder for a fully coupled axisymmetric plane strain problem. *Acta Mechanica*. 2006. Vol. 184, no. 1-4. P. 137–157.
315. Wang Y., Xu R.-q., Ding H.-j. Free axisymmetric vibration of FGM circular plates. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2009. Vol. 30, no. 9. P. 1077–1082.
316. Wang Z., Maruyama K., Narita F. A novel manufacturing method and structural design of functionally graded piezoelectric composites for energy-harvesting. *Materials & design*. 2022. Vol. 214. P. 110371.
317. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd ed. Oxford : Pergamon, 1982. 630 p.
318. Wu C. C. M., Kahn M., Moy W. Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design. *Journal of the American Ceramic Society*. 1996. Vol. 79, no. 3. P. 809–812.
319. Yanchevskii I. V., Kirichenko V. V. Nonstationary Vibrations of an Electroelastic Spherical Shell in an Acoustic Layer. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. P. 732-740.
320. Yanchevskyi I. V., Hryhorieva L. O. Nonstationary Vibrations of a Viscoelastic Functionally Graded Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2023. Vol. 59. P. 708–717.
321. Yang J. Analysis of piezoelectric devices. World Scientific Publishing Company, 2006. 520 p.
322. Yang J., Yang Z. Analytical and numerical modeling of resonant piezoelectric devices in China - A review. *Science in China Series G: Physics, Mechanics and Astronomy*. 2008. Vol. 51, no. 12. P. 1775–1807.

323. Yan N. X., Basari A. A., Nawir N. A. A. Piezoelectric ceramic for energy harvesting system: a review. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. Vol. 13, no. 22. P. 8755–8775.
324. Ying C., Zhi-fei S. Analysis of a functionally graded piezothermoelastic hollow cylinder. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*. 2005. Vol. 6, no. 9. P. 956–961.
325. Yu J., Ma Q., Su S. Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinders. *Ultrasonics*. 2008. Vol. 48, no. 8. P. 664–677.
326. Zhang T. Y., Gao C. F. Fracture behaviors of piezoelectric materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2004. Vol. 41, no. 1-3. P. 339–379.
327. Zhuk Y. A., Guz I. A. Active damping of the forced vibration of a hinged beam with piezoelectric layers, geometrical and physical nonlinearities taken into account. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45, no. 1. P. 94–108.
328. Zhuk Y. A., Senchenkov I. K. Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, no. 5. P. 546–556.
329. Zhuk Y., Tarasov A. Damping of the axisymmetric resonant vibration and dissipative heating of the fixed shear compliant inelastic cylindrical shell with piezoactuator. *Bulletin Taras Shevchenko National University of Kyiv. Mathematics mechanics*. 2020. No. 1 (41). P. 42–46.

ДОДАТКИ

Додаток А

Список публікацій здобувача

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Гармонічні коливання п'єзокерамічних секціонованих функціонально-градієнтних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Mech. Adv. Technol.* 2024. Т. 8, № 1. С. 98–107.
2. Yanchevskyi I. V., Hryhorieva L. O. Nonstationary Vibrations of a Viscoelastic Functionally Graded Cylinder. *International Applied Mechanics.* 2023. Vol. 59. P. 708–717. (Scopus)
3. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання п'єзо-електричних перетворювачів з функціонально-градієнтних матеріалів. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2022. № 35. С. 29–41.
4. Grigoryeva L., Ivanenko P., Korbakov O. Generation of energy in console piezoelectric energy harvesters. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 108. P. 337–348. (Web of Science)
5. Hryhorieva L., Yanchevskyi I. Influence of material functional heterogeneity on non-stationar oscillations of piezoceramic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 109. P. 359–368. (Web of Science)
6. Григор'єва Л. О., Безверхий О. І. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій.* 2020. № 31. С. 44–54.
7. Grigoryeva L.O. Transient responses in piezoceramic multilayer actuators taking into account external viscoelastic layer. *Strength of materials and theory of structures.* 2020. No. 105. P. 255–266. (Web of Science)

8. *Bezverkhyi O. I., Grigoryeva L. O.* Comparative analysis of two methods used for the investigation of harmonic vibrations of piezoceramic cylinders. *Journal of mathematical sciences*. 2019. Vol. 240, no. 2. P. 129–140. (Scopus)
9. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Підхід до розрахунку гармонічних коливань електропружних циліндрів. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2018. Т. 23, № 1. С. 39–45.
10. *Grigoryeva L. O.* Calculation of Cylindrical Multilayer Electromechanical Transducer at Different Polarization Types in Non-stationary Modes. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2018. Vol. 54, no. 1. P. 5–11.
11. *Григор'єва Л. О.* Нестаціонарні коливання плоского багатошарового п'єзоелемента з урахуванням пружного підкріплюючого шару і акустичного середовища. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 103–109.
12. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Варіаційно–сплайновий метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2017. № 98. С. 149–161. (Web of Science)
13. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Електромеханічна чутливість круглих та кільцевих п'єзоелектричних тонких пластин при механічному збуренні. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2017. Т. 22, № 5. С. 40–46.
14. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Застосування гамільтонового формалізму для дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2017. Т. 38, № 2. С. 23–28.
15. *Bezverhyi O. I., Grigoryeva L. O., Grigoryev S. A.* Resonance radial oscillations of a piezoceramic cylinders and spheres taking into account electromechanical losses // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2016. Vol. 81, no. 1. P. 41–48.
16. *Безверхий О. І., Григор'єва Л. О.* Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Проблеми обчислювальної механіки i міцності конструкцій*. 2015. № 24. С. 5–17.

17. Григор'єва Л. О., Кириченко А. А., Бабкова Н. О. Визначення електрорушійної сили поляризованої по товщині кільцевої пластини при механічному збуренні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 47–55.
18. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Babkova N. O. Electrically Excited Nonstationary Vibrations of Thin Circular Piezoelectric Plates. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 406–411. (Scopus)
19. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kirichenko A. A. Nonstationary Electroelastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 274–280. (Scopus)
20. Шульга Н. А., Григорьева Л. О., Ластивка И. О., Бабкова Н. О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин. *Теоретич. и прикладная механика*. 2011. Т. 48, № 2. С. 98–104.
21. Shulga M. O., Grigoryeva L. O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical vibrations: types, testing, and analysis*. N.Y, 2011. P. 179–204. (Scopus)
22. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 2. P. 177–185. (Scopus)
23. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kornienko V. F. Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 1. P. 62–69. (Scopus)
24. Шульга М. О., Григор'єва Л. О. Про коливання пружних шарів з викривленими границями. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2010. № 84. С. 120–126.

Наукові праці за доповідями на міжнародних і вітчизняних конференціях:

25. Григор'єва Л. О. Усталені коливання електров'язкопружного композитного циліндра. *Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність i*

перспективи – 2024» : Матеріали доп., м. Київ, 8–10 жовт. 2024 р. 2024. С. 24–26.

26. Григор'єва Л. О. М'яка та тверда п'єзокераміка в функціонально-градієнтних п'єзокерамічних перетворювачах. *XIX міжнародна науково-технічна конференція “Вібрації в техніці та технологіях” : Матеріали конф.*, м. Київ, 23–25 трав. 2023 р. Київ, 2023. С. 30–32.
27. Янчевський І. В., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних коливань електро-в'язко-пружних функціонально-градієнтних тіл. *Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки»*, м. Київ. Київ, 2023. С. 123–124.
28. Hryhorieva L. O. CAE Simulation of console piezoelectric energy harvesters. *Modern directions of scientific research development: Proceedings of the 15th International scientific and practical conference*, Chicago. Chicago, 2022. С. 148–153.
29. Григор'єва Л. О. Узагальнений підхід до розрахунку нестационарних коливань багатошарових п'єзокерамічних перетворювачів. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2021» : матеріали конф.*, м. Дніпро, Кам'янське. Дніпро, 2021. С. 20–21.
30. Grigoryeva L. O. Piezoelectric devices for Energy harvesting in building structures. *VI International Scientific and Practical Conference «Transfer of Innovative technologies – 2021» : Conference proceedings*. Kyiv, 2021. P. 22–24.
31. Grigoryeva L. O. Vibrations of Piezoceramic Multilayer Actuators with Elastic Matching Layers. *International scientific-practical conference “International scientific integration–2020” : Conference proceedings, 9–10 November 2020*. Kyiv, 2020. P. 58–62.
32. Григор'єва Л. О. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів з врахуванням втрат енергії. *Матеріали IV Міжнародної науково–практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки».*, м. Одеса. Одеса, 2019. С. 345–348.

33. *Grigoryeva L. O.* Piezoelectric multilayer actuators in acoustic control devices for building structures. BMC-2018 : International Scientific-Practical Conference of young scientists "Build-Master-Class-2018", Kyiv, November 2018. P. 198–199.
34. *Григор'єва Л. О.* Поширення нестационарних збурень в багатошаровому п'єзокерамічному циліндрі при електричному навантаженні. *Тези доповідей IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*. Одеса, 2017. С. 185–186.
35. *Grigoryeva L. O.* Numerical investigation method of vibrations of piezoceramic transformers. *Матеріали XVIII міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука, 7–10 жовтня 2017 року, Київ*. Т. 1. Київ, 2017. Р. 87–90.
36. *Григор'єва Л. О.* Застосування варіаційних принципів та сплайн апроксимацій при вивченні товщинних нестационарних коливань п'єзокерамічних тіл. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2016» : матеріали конф*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2016. С. 48.
37. *Безверхий А. И., Григорьева Л. О.* Нестационарные электроупругие колебания сферического пьезокерамического преобразователя с импедансными граничными условиями // *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2015» : матеріали конф*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2015.
38. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних електропружних коливань п'єзокерамічної кулі в акустичному середовищі. Акустичний симпозіум «Консонанс–2015», м. Київ. Київ, 2015. С. 20–25.
39. *Григор'єва Л. О.* Нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних та механічних збуреннях. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2014» : матеріали конф.*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. Дніпродзержинськ, 2014.

Додаток Б
Матеріальні константи для п'єзокерамічних матеріалів
різних кристалічних структур

Величина	Розмірність	Матеріал						
		Гексагональна система (клас 6mm)						
c_{11}^E	10^{10} Pa	13,9	10,3	12,6	13,7	10,3	13,9	27,5
c_{12}^E		7,78	5,8	5,5	6,97	5,80	7,8	17,9
c_{13}^E		7,43	5,9	5,3	7,16	5,90	7,4	15,2
c_{33}^E		11,5	10,2	11,7	12,4	10,2	11,5	16,5
c_{44}^E		2,56	2,5	3,53	3,14	2,5	2,56	5,43
c_{22}^E		c_{11}^E	c_{11}^E	c_{11}^E	c_{11}^E	c_{11}^E	c_{11}^E	24,7
c_{23}^E		c_{13}^E	c_{13}^E	c_{13}^E	c_{13}^E	c_{13}^E	c_{13}^E	5,2
c_{55}^E		c_{44}^E	c_{44}^E	c_{44}^E	c_{44}^E	c_{44}^E	c_{44}^E	6,6
c_{66}^E		c_{66}^*	c_{66}^*	c_{66}^*	c_{66}^*	c_{66}^*	c_{66}^*	11,3
ϵ_{11}^S		646	1008	1706	898	892	650	174 4
ϵ_{22}^S	$10^{-11} \frac{\Phi}{M}$	ϵ_{11}^S	ϵ_{11}^S	ϵ_{11}^S	ϵ_{11}^S	ϵ_{11}^S	ϵ_{11}^S	201
ϵ_{33}^S		562	893	1470	582	790,3	560	97
e_{31}	$\frac{K\pi}{M^2}$	-5,2	-7,78	-6,5	-4	-7,78	-5,2	-2,7
e_{32}		e_{31}	e_{31}	e_{31}	e_{31}	e_{31}	e_{31}	-0,3
e_{33}		15,1	15,2	23,3	13,8	15,2	15,1	3,64
e_{42}		e_{15}	e_{15}	e_{15}	e_{15}	e_{15}	e_{15}	3,4
e_{15}		12,7	12,9	17	10,4	12,9	12,7	21,3
ρ	$\kappa \text{g}/\text{m}^3$	7500	7600	7870	7600	7600	7500	602
$* c_{66}^* = (c_{11}^E - c_{12}^E) / 2$								

Додаток В
Комплексні модулі
для різних п'єзокерамічних матеріалів

Величина	Розмірність	ЦТСтБС-2 [16,50]	ЦТС-19 [97]	PZT-5A [230, https://www.heshuai.com/pzt-5h-and-pzt-5a]	PZT-7A [41]
c_{11}^E	10^{10} Pa	15,7(1+0,0064i)	10,9(1+0,0132i)	12,1(1+0,0111i)	148(1+0,015i)
c_{12}^E		9,9(1+0,0088i)	6,1(1+0,0152i)	7,52(1-0,0062i)	76,2(1+0,015i)
c_{13}^E		9,3(1+0,0098i)	5,4(1+0,0182i)	7,52(1-0,0012i)	74,2(1+0,015i)
c_{33}^E		13,6(1+0,0069i)	9,3(1+0,0162i)	11,1(1+0,0067i)	131(1+0,015i)
c_{44}^E		2,52(1+0,0014i)	2,4(1+0,0157i)	2,11(1+0,0332i)	25,4(1+0,015i)
c_{66}^E		2,9(1+0,0023i)	2,4(1+0,0107i)	2,29(1+0,0395i)	35,9(1+0,015i)
ϵ_{11}^S	$\epsilon^S / \epsilon_0 *$	1270(1-0,0047i)	820(1-0,031i)	916(1-0,02i)	460(1-0,025i)
ϵ_{33}^S		1180(1-0,0012i)	840(1-0,0215i)	830(1-0,02i)	235(1-0,025i)
e_{31}	$K\text{л} / m^2$	-10(1-0,0083i)	-4,9(1-0,0073i)	-5,4(1-0,106i)	-2,1(1-0,002i)
e_{33}		15,0(1+0,0006i)	14,9(1-0,034i)	15,8(1+0,017i)	9,5(1-0,003i)
e_{51}		11,3(1-0,0021i)	10,6(1-0,0093i)	12,3(1-0,0236i)	9,2(1-0,002i)
s_{11}^E	$10^{-12} \frac{m^2}{H}$	12,5(1+0,0016i)	15,2(1-0,0103i)	15...15,4	10,7
s_{12}^E		-4,62(1+0,0014i)	-5,8(1-0,0113i)	-4,8	-3,58
s_{13}^E		-5,42(1-0,0015i)	-5,3(1-0,0077i)	-8,4	-4,6
s_{33}^E		14,8(1+0,00125i)	16,9(1-0,012i)	18,8 ... 21,2	13,9
s_{44}^E		39,7(1+0,0014i)	42,6(1-0,0157i)	47,8	34
s_{66}^E		34,2(1+0,0015i)	42(1-0,0106i)	39,6	28,6
ϵ_{11}^T	$\epsilon^T / \epsilon_0 *$	1850(1+0,005i)	1360(1-0,0317i)	1730...1780	930
ϵ_{33}^T		2100(1+0,0035i)	1490(1-0,0247i)	1700...1950	425
d_{31}	$10^{-12} \frac{K\text{л}}{H}$	-160(1+0,004i)	-125(1-0,023i)	-171 ... -191	-60
d_{33}		330(1+0,003i)	304(1-0,0223i)	374 ... 430	153
d_{51}		450(1+0,0035i)	450(1-0,025i)	585 ... 590	360
ρ	$\kappa\sigma / m^3$	7800	7740	7500	7700

* $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/m$ - електрична стала

Додаток Г
Комплексні модулі
для п'єзоелектричних полімерів та наповнювачів композитів

Величина	Розмірність	PVDF [41]	PVF [ХорПрог89]	Епоксидна смола [247]	Графіт-епоксид [41]
c_{11}^E	$\Gamma \Pi a$	$2,18(1+0,05 i)$	8,6	$6,37+0,034i$	$183(1+0,015 i)$
c_{12}^E		$0,633(1+0,05 i)$	5,6	$3,58-0,012i$	$4,36(1+0,015 i)$
c_{13}^E		$0,633(1+0,05 i)$	5,4	$3,58-0,012i$	$13,6(1+0,015 i)$
c_{33}^E		$2,18(1+0,05 i)$	7,1	$6,37+0,034i$	$11,62(1+0,015 i)$
c_{44}^E		$0,775(1+0,05 i)$	1	1,4	$2,87(1+0,015 i)$
c_{66}^E		$0,775(1+0,05 i)$		1,4	$2,87(1+0,015 i)$
e_{31}	Kl / m^2	$0,046(1-0,05 i)$	-1,1	0	0
e_{32}		$0,046(1-0,05 i)$	2,9	0	0
e_{33}		$0,046(1-0,05 i)$	2,9	0	0
e_{51}		0	2,3	0	0
ϵ_{11}^S	ϵ^S / ϵ_0	$12(1-0,025 i)$	14,7	$4,43-0,059i$	$1729(1+0,05 i)$
ϵ_{22}^S		$12(1-0,025 i)$	14,7	$4,43-0,059i$	$1729(1+0,05 i)$
ϵ_{33}^S		$12(1-0,025 i)$	12,4	$4,43-0,059i$	$1729(1+0,05 i)$
ρ	$\kappa \sigma / m^3$	2000	1450	1200	1580

* $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/m$ — електрична стала

Додаток Д

Комплексні модулі для промислових РЗТ та композитів на їх основі [281], (2.35)

Величина	Розмір-ність	Motorola 3203HD	Ferroperm PZ27	PZT Channel 5804	EDO EC-65 (soft)	EDO EC-69 (hard)	Ultrashape Porous PZT	MSI 1-3 PZT-Polymer Composite (30%PZT)
ρ	$\text{кг} / \text{м}^3$	7800	7700	7550	7500	7500	6250	3190
s_{11}^E	$10^{-11} \frac{\text{м}^2}{\text{Н}}$	1,55 – 0,043i	1.61 – 0.017i	1.21 – 0.0045i	1.71 – 0.02i	1,12 – 0,01i	1.96 – 0.0031i	17,5 – 0.39i
s_{12}^E		-0.446 + 0.018i	-0.59 + 0.006i	-0.374 + 0.0038i	-0.58 + 0.01i	-0.33 + 0.01i	-0.637 + 0.0023i	-8.10 + 0.39i
s_{13}^E		-0.819 + 0.025i	-0.62 + 0.013i	-0.541 + 0.0039i	-0.91 + 0.02i	-0.70 + 0.02i	-0.542 + 0.024i	-2.80 + 0.021i
s_{33}^E		1.94 – 0.046i	1.76 – 0.026i	1.38 – 0.011i	1.84 – 0.04i	1.25 – 0.04i	3.03 – 0.0013i	5.19 – 0.13i
s_{55}^E		3.92 – 0.13i	4.08 – 0.18i	3.70 – 0.010i	4.6 – 0.56i	3.25 – 0.16i	6.25 – 0.23i	18 – 0.48i
s_{66}^E		3.99 – 0.12i	4.40 – 0.046i	3.17 – 0.016i	4.58 – 0.06i	2.9 – 0.04i	5.19 – 0.011i	51.2 – 1.6i
d_{13}	$10^{-12} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	-294 + 12i	-160 + 3.1i	-108 + 0.37i	-190 – 4.8i	-94.8 – 0.3i	-59.2 + 0.052i	-168 + 4.6i
d_{33}		584 – 18i	336 – 7.2i	219 – 1.3i	357 – 15i	201 – 2.2i	254 – 1.4i	406 – 15i
d_{15}		600 – 30i	396 – 26i	415 – 1.1i	609 – 253i	422 – 21i	469 – 26i	3.5 – 0.15i
ϵ_{11}^T	$10^{-8} \frac{\Phi}{\text{м}}$	2.14 – 0.13i	1.01 – 0.052i	1.06 – 0.0091i	2.05 – 1.1i	1.43 – 0.086i	1.13 – 0.029i	0.0095 – 0.0003i
ϵ_{33}^T		3.01 – 0.081i	1.37 – 0.027i	0.977 – 0.0040i	1.48 – 0.034i	0.859 – 0.0024i	0.644 – 0.00031i	0.898 – 0.042i
c_{11}^E	10^{10}Па	14,623 + 0,052i	10,85 + 0,011i	15,297 – 0,043i	23,8 – 1,67i	74,20 – 2,32i	6.415 – 0.064i	0.979 + 0.0097i
c_{12}^E		9,618 – 0,101i	6,3 – 0,036i	8,984 – 0,077i	19,434 – 1,713i	67,30 – 232,13i	2.5648 – 0.0717i	0.5886 – 0.0022i
c_{13}^E		10,235 – 0,09i	6,041 – 0,046i	9,519 – 0,040i	21,382 – 1,68i	80,12 – 259,63i	1.739 – 0.095i	0.845 + 0.0188i
c_{33}^E		13,8 – 0,013i	9,94 + 0,025i	14,709 + 0,032i	26,58 – 1,55i	98,71 – 290,19i	3.964 – 0.061i	2.837 + 0.0846i

		Motorola 3203HD	Ferroperm PZ27	PZT Channel 5804	EDO EC-65	EDO EC-69	Ultrashape Porous PZT	MSI 1-3 PZT-Polymer Composite (30%PZT)
c_{44}^E	$K\pi / \text{m}^2$	$2,55 + 0,085i$	$2,446 + 0,108i$	$2,701 + 0,073i$	$2,142 + 0,261i$	$3,07 + 0,15i$	$1.598 + 0.059i$	$0.555 + 0.0148i$
c_{66}^E		$2,504 + 0,075i$	$2,27 + 0,024i$	$3,154 + 0,016i$	$2,183 + 0,029i$	$3,45 + 0,05i$	$1.927 + 0.0041i$	$0.195 + 0.0061i$
e_{13}	$10^{-8} \frac{\Phi}{\text{m}}$	$-11.5 + 0.68i$	$-7.1402 - 0.0185i$	$-5.3774 + 0.0085i$	$-6.226 - 4.846i$	$19.8 - 84.03i$	$-0.9001 - 0.181i$	$0.8007 + 0.0093i$
e_{33}		$20.4 + 0.43i$	$14.0617 - 0.1089i$	$11.6531 + 0.036i$	$13.25 - 5.185i$	$38.56 - 93.7i$	$8.147 - 0.096i$	$8.6884 - 0.0678i$
e_{15}		$15.3 - 0.26i$	$9.7151 - 0.2086i$	$11.209 + 0.27i$	$13.706 - 3.83i$	$13.27 - 5.81i$	$7.509 - 0.14i$	$0.0195 - 0.0003i$
ϵ_{11}^S	$10^{-8} \frac{\Phi}{\text{m}}$	$1,22 - 0,16i$	$0.6247 - 0.0690i$	$0.595 - 0.0217i$	$1,118 - 1,213i$	$0.748 - 0.89i$	$0.778 - 0.042i$	$0.0095 - 0.0003i$
ϵ_{33}^S		$1,14 - 0,129i$	$0.6690 - 0.0385i$	$0.6056 - 0.0065i$	$0,758 - 0,047i$	$0.434+ 0.278i$	$0.429 - 0.0011i$	$0.5720 - 0.0512i$
Q_m		39	94	424	229	206	722	122

Додаток Е
Акт впровадження дисертації

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

Ректор Київського національного
університету будівництва і архітектури
д.ю.н. Олексій ДНІПРОВ



впровадження в навчальний процес
Київського національного університету будівництва і архітектури
результатів дисертаційної роботи
Григор'євої Людмили Олександровни на тему:
**«Чисельне моделювання динамічних процесів в п'єзоелектричних тілах з
урахуванням дисипативних властивостей та неоднорідності матеріалу»**

Результати дисертаційної роботи Григор'євої Л.О. на тему: "Чисельне моделювання динамічних процесів в п'єзоелектричних тілах з урахуванням дисипативних властивостей та неоднорідності матеріалу" на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла використані у навчальному процесі на кафедрі опору матеріалів Київського національного університету будівництва і архітектури.

Основні результати дисертаційного дослідження Григор'євої Л.О. впроваджені в навчальний процес при викладанні лекцій, проведенні практичних та лабораторних занять, при виконанні розрахунково-графічних робіт при викладанні курсу «Опір матеріалів», «Опір матеріалів з основами теорії пружності» для першого (бакалаврського) рівня вищої освіти та «Інженерні задачі теорії пружності» для другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія», а також для підготовки здобувачів освітньо-наукового ступеня «доктор філософії» з спеціальністі 131 «Прикладна механіка».

Науковий внесок Григор'євої Л.О. полягає у створенні методики розрахунку неоднорідних анізотропних елементів конструкцій з врахуванням дисипативних властивостей матеріалів, за якою проводиться дослідження динамічного напруженого-деформованого стану електромеханічних перетворювачів, що використовуються в пристроях неруйнівного контролю та збору енергії та може бути використаний для моделювання динамічного стану неоднорідних (анізотропних, багатошарових, функціонально-неоднорідних) елементів будівельних конструкцій.

Запропоновані в роботі чисельні методи та підходи дозволяють

досліджувати динамічний стан неоднорідних конструктивних елементів та є корисними для прийняття оптимальних проектних рішень. Розвинута методика дозволяє керувати електромеханічними та дисипативними характеристиками елементів конструкцій шляхом комбінування активних та пасивних матеріалів. Зокрема при викладанні перелічених курсів використовуються наступні результати дисертаційної роботи:

- Методи та принципи побудови систем розв'язувальних рівнянь статики та динаміки для анізотропних, композитних та функціонально-неоднорідних елементів конструкцій;
- Способи врахування дисипативних характеристик матеріалів, їх математичне моделювання та реалізація алгоритму чисельного розрахунку;
- Чисельне дослідження та аналіз динамічного стану елементів конструкцій при усталених та нестационарних навантаженнях.

Крім цього, Григор'єва Л.О. є автором наступних навчальних посібників, що широко використовуються в навчальному процесі:

1. О.П. Кошевий, Григор'єва Л.О., Д.В. Левківський. Опір матеріалів в лекціях і задачах: навчальний посібник. Київ: КНУБЛ; –Кам'янець-Подільський: ТОВ «Друкарня «Рута», 2019. – 340с.
2. Л. О. Григор'єва, Д. В. Левківський, О. П. Кошевий. Опір матеріалів з основами теорії пружності: Курс лекцій. Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 270 с.
3. Збірник задач з опору матеріалів: навч. посіб. / П. О. Іваненко, Л. О. Григор'єва, О. П. Кошевий та ін. За ред. П. О. Іваненка – Київ: Видавництво Ліра-К, 2021. – 400 с.

Використання результатів дисертаційної роботи Григор'євої Л.О. дозволяє студентам та здобувачам освітньо-наукового ступеня «доктор філософії» засвоювати навчальний матеріал та проводити наукові дослідження на більш високому науково-технічному рівні.

Проректор з навчально-методичної роботи
д.е.н., проф.



Андрій ШПАКОВ

Декан будівельного факультету
д.т.н., проф.



Григорій ІВАНЧЕНКО

Завідувач кафедри опору матеріалів
к.т.н., доц.



Олександр КОШЕВИЙ