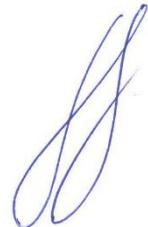


**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С. П. ТИМОШЕНКА**

**ГРИГОР'ЄВА ЛЮДМИЛА ОЛЕКСАНДРІВНА**



УДК 539.3

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ  
У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛАХ  
З УРАХУВАННЯМ ДИСИПАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ  
ТА НЕОДНОРІДНОСТІ МАТЕРІАЛУ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

**РЕФЕРАТ**

дисертації на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2025

Дисертацію є рукопис.

Дисертацію виконано в Національному технічному університеті України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”.

**Науковий консультант:** доктор фізико-математичних наук, професор  
**Янчевський Ігор Владиславович,**  
Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут  
імені Ігоря Сікорського”, професор кафедри  
динаміки і міцності машин та опору матеріалів

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико-математичних наук,  
старший науковий співробітник  
**Сенченков Ігор Костянтинович,**  
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
головний науковий співробітник  
відділу термопружності;

доктор фізико-математичних наук, професор  
**Говоруха Володимир Борисович,**  
Дніпровський державний  
аграрно-економічний університет,  
завідувач кафедри вищої математики, фізики  
та загальноінженерних дисциплін;

доктор технічних наук, доцент  
**Савченко Олена Віталіївна,**  
Національний університет “Чернігівська політехніка”,  
завідувачка кафедри архітектури та дизайну.

Захист відбудеться «30» вересня 2025 р. об 11 годині на засіданні спеціалізованої  
вченої ради Д 26.166.01 в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за  
адресою: 03057, м. Київ, вул. Петра Нестерова, 3, а.311.

З дисертацією та супровідними документами можна ознайомитись за посиланням:  
<https://inmech.kyiv.ua/l/ua/dissertations/>, а також в науковій бібліотеці Інституту ме-  
ханіки ім. С. П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Петра  
Нестерова, 3.

Про дату та місце захисту громадськість проінформовано «28» серпня 2025 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01,  
докт. фіз.-мат. наук, пров. наук. співроб.

Анатолій ХОРОШУН

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** П'єзоелектричні перетворювачі, що функціонують на основі зв'язаності електричного та механічного полів, мають широкий спектр застосувань, зокрема в сенсорах, акустичних пристроях, енергетичних перетворювачах та медичному обладнанні. При проєктуванні пристройів з підвищеними вимогами за критеріями надійності, узгодженості з навколошнім середовищем, вимогами до рівня вольтажності, все частіше використовують п'єзоелементи неоднорідної (багатошарової, композитної, функціонально-неоднорідної) структури. Широкий спектр застосування таких об'єктів вимагає побудови надійних універсальних засобів та підходів до моделювання динамічного електромеханічного стану п'єзоелементів.

Актуальність чисельного дослідження п'єзоелектричних композитних матеріалів зростає в умовах сучасних технологічних викликів і потреби у нових матеріалах з унікальними властивостями. До таких матеріалів відносяться п'єзоелектричні композити та функціонально-неоднорідні матеріали, що широко застосовуються в адаптивних системах, смарт-технологіях та мікроелектроніці. Функціонально-неоднорідні п'єзоелектирики призначені до роботи в ділянках розмежування різних середовищ та мають перевагу порівняно з багатошаровими елементами завдяки відсутності небезпеки розвитку тріщин між шарами (розшарування). В зв'язку з розвитком нанотехнологій, ще більш актуальною стає побудова ефективних чисельних методів і підходів для дослідження п'єзоелектричних функціонально-неоднорідних матеріалів та п'єзоелементів на їх основі, оскільки відкриває нові можливості для створення пристройів з підвищеною ефективністю і продуктивністю

При моделюванні переходних процесів врахування дисипативних властивостей матеріалу та контакту з зовнішнім середовищем дає змогу отримувати результати, більш наближені до реальності, та сприяти узгодженню експериментальних та аналітичних результатів при резонансних та нестационарних збуреннях. Це, у свою чергу, сприяє оптимізації їх конструкцій та підбору оптимальних компонентів для досягнення бажаних характеристик.

Математичні моделі елементів конструкцій, які експлуатуються при динамічних навантаженнях, базуються на реальних фізичних властивостях матеріалів, що визначаються експериментально. Встановлено, що п'єзоелектирики підпорядковуються властивостям спадкового середовища, для опису яких потрібно знайти пружні, діелектричні та п'єзоелектричні функції релаксації. При усталених коливаннях ці функції зводяться до т.зв. комплексних модулів. Проте наявність в науковій літературі повного набору комплексних модулів лише для окремих матеріалів значно обмежує коло застосування запропонованого підходу. Врахування дисипативних втрат в п'єзоелектричних тілах при коливаннях, відмінних від гармонічних, а також методики аналізу нестационарних коливань при врахуванні пружних,

п'єзоелектричних та діелектричних властивостей матеріалів є мало розвинутим напрямком електров'язкопружності. В зв'язку з цим виникає необхідність розвитку нових підходів до врахування дисипативних втрат при нестационарних навантаженнях, що ґрунтуються на загальноприйнятих в механіці деформівного твердого тіла методах і підходах.

Таким чином, створення нових математичних моделей та ефективних чисельних підходів дослідження динамічного стану електропружиних елементів з врахуванням дисипативних властивостей і неоднорідності матеріалу, а також прогностичні розрахунки поведінки елементів конструкцій при гармонічних та нестационарних електрических та механіческих навантаженнях, представляють актуальну наукову проблему сучасної механіки деформівного твердого тіла, вирішенню якої і присвячена дана дисертаційна робота.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, результати яких викладені в дисертаційній роботі, передбачені програмами і планами наукових досліджень з природничих наук НАН України і частково увійшли до проміжних звітів за науково-дослідними роботами Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка за темами «Коливання п'єзокерамічних перетворювачів енергії при гармонічних і нестационарних збуреннях з урахуванням електромеханічних втрат» (№ д. р. 0115U005706, 2015 – 2020 рр.) та «Динамічне деформування елементів конструкцій сучасного машинобудування та стійкість і досяжність множин траєкторій механічних систем» (№ д. р. 0117U000700, 2017 – 2021 рр.). Окремі результати роботи внесені до звіту з науково-дослідної роботи за темою «Розробка аналітично-чисельних методів розрахунку елементів конструкцій на силові, кінематичні, динамічні та температурні впливи» (№ д. р. 0118U002360, 2018 – 2023 рр.), що виконувалася на кафедрі опору матеріалів Київського національного університету будівництва і архітектури.

**Мета і задачі дослідження** — розробка та апробація ефективної чисельної методики розв'язання динамічних задач електров'язкопружності з врахуванням неоднорідності матеріалу, дослідження на їх основі переходних процесів в п'єзоелектрических однорідних, композитних та функціонально-неоднорідних елементах конструкцій.

Досягнення поставленої мети передбачає розв'язання **наступних задач**:

- постановка нового класу задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища;
- побудова ефективних чисельних підходів дослідження усталених осесиметрических коливань однорідних та композитних п'єзоелектрических тіл обертання з урахуванням дисипативних властивостей матеріалу;
- розробка узагальненого підходу розрахунку зв'язаних нестационарних осесиметрических задач для багатошарових та функціонально-неоднорідних

п'єзоелектричних тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм з урахуванням дисипативних властивостей матеріалу;

- виявлення нових закономірностей перехідних процесів в багатошарових та функціонально-неоднорідних плоских тілах, циліндрах та кулях з урахуванням електромеханічних втрат енергії та впливу зовнішнього акустичного середовища;
- розробка та реалізація алгоритму розрахунку планарних осесиметричних коливань тонких круглих та кільцевих поляризованих за товщиною п'єзоелектричних пластин при електричних та механічних нестационарних навантаженнях;
- розвиток підходу до дослідження динаміки функціонально-неоднорідних електров'язкопружних елементів конструкцій в тривимірній постановці методом скінчених елементів.

**Об'єктом дослідження** є нестационарні та усталені коливання однорідних та неоднорідних електров'язкопружних тіл.

**Предметом дослідження** є чисельні методи розв'язання широкого класу динамічних задач електропружності для п'єзоелектричних конструктивних елементів з урахуванням неоднорідності матеріалу та дисипативних втрат.

**Методологія досліджень** будується на класичних співвідношеннях лінійної теорії електропружності, теорії спадкового середовища та теорії коливань суцільного середовища. Для розв'язання сформульованих в роботі задач використовувалися скінченно-різницеві апроксимації; неявна та явна різницева схема за часовою координатою; методи Ньюмарка та Рунге-Кутта; основи гамільтонового формалізму; варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського; спайн-апроксимації; метод дискретної ортогоналізації; метод скінчених елементів; інтегральне перетворення Лапласа за часом. Врахування дисипативних властивостей матеріалу реалізується за допомогою комплексних модулів; моделі демпфування коливань за Релеєм, що включає в себе альфа-демпфування та бета-демпфування; модель демпфування Фойгта-Кельвіна; частотно-незалежного демпфування; тангенса діелектричних втрат; чотирипараметричної математичної моделі електров'язкопружного демпфування коливань.

**Наукова новизна** роботи полягає у створенні нових чисельних методик та підходів, що дозволяють описати коливні процеси в однорідних та неоднорідних п'єзокерамічних перетворювачах при усталених та нестационарних навантаженнях, а саме:

- дано постановки нового класу задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища;
- побудовано методику розв'язання динамічних віссесиметричних задач електропружності на основі варіаційно-спайнового методу; виконано її чисельну реалізацію за допомогою методу дискретної ортогоналізації;
- розвинуто підхід до дослідження гармонічних коливань п'єзоелектричних тіл обертання на основі гамільтонового формалізму; підхід адаптовано до

дослідження коливань електров'язкопружних однорідних та композитних циліндрів скінченої довжини;

- систематизовано підходи до врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм, діелектричних та п'єзоелектричних втрат;
- запропоновано та досліджено нову чотирипараметричну модель електров'язкопружності врахування дисипативних властивостей матеріалів при нестационарних навантаженнях;
- розроблено узагальнений чисельний підхід для дослідження нестационарних пульсуючих коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форм з урахуванням дисипативних властивостей матеріалу; розвинуто спосіб визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при нестационарних механічних навантаженнях;
- запропоновано підхід до аналізу динаміки функціонально-неоднорідних п'єзоелементів складної форми за допомогою методу скінчених елементів; ефективність підходу апробовано на задачах дослідження електромеханічного стану секторіонованих циліндрів.

**Достовірність** отриманих в дисертації результатів визначається коректністю постановки задач, контролюваною точністю числових розрахунків, перевіркою практичної збіжності для конкретних задач, узгодженістю окремих результатів роботи з відомими в літературі та побудованими точними і чисельними розв'язками одновимірних задач електропружності, відповідністю встановлених закономірностей загальним властивостям поширення електропружних коливань в п'єзоелектричних тілах.

**Практичне значення** отриманих наукових результатів полягає в можливості їх застосування в інженерній практиці при проектуванні конкретних композиційних і п'єзоелектричних елементів конструкцій, що перебувають під дією динамічних механічних і електричних збурень; в безпосередньому використанні отриманих результатів для розробки, модернізації та раціональної експлуатації п'єзокерамічних елементів конструкцій.

Реалізовані в роботі підходи можуть бути застосовані для моделювання поведінки неоднорідних п'єзокерамічних елементів конструкцій при усталених та нестационарних навантаженнях, а також оптимізації матеріальних і геометричних параметрів та умов навантаження п'єзоелементів. Описані в роботі закономірності коливань п'єзоелементів з функціонально-неоднорідних матеріалів на основі сегнетотвердої та сегнетом'якої п'єзокераміки, а також композиту п'єзокераміки з п'єзополімерами можуть бути безпосереднього використані при проектуванні елементів конструкцій плоскої, циліндричної та сферичної форм. Запропонований спосіб врахування дисипативних властивостей матеріалів та взаємодії з акустичним середовищем дозволяють знайти резонансні та антирезонансні частоти, коефіцієнти електромеханічного зв'язку, акустичну потужність перетворювача,

логарифмічний декремент затухання нестационарних збурень. На основі отриманих розрахункових співвідношень розроблено програмне забезпечення, що дозволяє проводити чисельний аналіз електромеханічних процесів у п'єзокерамічних тілах. окремі розроблені в дисертації підходи, програми і досліджені закономірності коливного процесу з демпфуванням коливань були використані в ДП «КНДІ Гідроприладів» для розрахунку гіроакустичних перетворювачів циліндричної форми та в навчальному процесі Київського національного університету будівництва і архітектури при створенні навчального курсу «Інженерні задачі теорії пружності» та відповідної методичної літератури.

**Апробація результатів досліджень.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на 15 наукових конференціях, зокрема на Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки» (Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2014, 2015, 2016 рр.; Дніпро, Кам'янське, 2021 р.); Міжнародній конференції ім. академіка М. Кравчука (Київ, НТУУ «КПІ», 2012, 2017 рр.); Акустичному симпозіумі «Консонанс–2015» (Київ, Інститут гідромеханіки НАНУ, 2015 р.); Міжнародній науково-практичній інтернет-конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, ОДАБА, 2017, 2019 рр.); International scientific-practical conference “International scientific integration – 2020” (Сіетл, Вашингтон, США, 2020 р.); International Scientific and Practical Conference «Transfer of Innovative technologies – 2021» (Київ, КНУБА, 2021 р.); International scientific and practical conference «Modern directions of scientific research development» (Чикаго, США, 2022 р.); Міжнародній науково-технічній конференції «Вібрації в техніці та технологіях» (Київ, КНУБА, 2023 р.); Міжнародній науковій конференції «Актуальні проблеми механіки» (Київ, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 2023 р.); Міжнародній науковій конференції «Механіка: сучасність і перспективи – 2024» (Київ, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка, 2024 р.).

Результати дисертаційної роботи в повному обсязі доповідались і обговорювались на засіданні кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” (керівник — д.т.н., проф. Пискунов С. О.), на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівник — чл.-кор. НАН України Жук Я. О.), науковому семінарі відділу теорії коливань Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Кубенко В. Д.), секції «Динаміка та стійкість руху механічних систем» Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Мартинюк А. А.), а також загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка (керівник — акад. НАН України Назаренко В. М.), і одержали позитивні оцінки.

**Публікації та особистий внесок здобувача.** Результати дисертаційної роботи опубліковано в 39 наукових працях. Основні публікації за темою дисертації [1–24] видано у фахових виданнях, затверджених ДАК України, з яких 11 робіт

проіндексовані в наукометричних базах Scopus та Web of Science. Роботи [25–39] – матеріали і тези доповідей на Міжнародних конференціях, симпозіумах і семінарах. 15 робіт опубліковано самостійно. В роботах, виконаних у в співавторстві з М. О. Шульгою, І. В. Янчевським, О. І. Безверхим, співавторам належать постановка задач, запропоновані підходи до їх розв’язання, а автору належить розробка алгоритмів, реалізація чисельних підходів на ЕОМ та аналіз отриманих результатів. В роботах з іншими співавторами автору належить постановки задач, запропоновані підходи до їх розв’язання, розробка чисельних алгоритмів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків, переліку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи складає 340 сторінок, включаючи анотацію, бібліографічний список із 329 позицій та 6 додатків. Обсяг основного тексту дисертації становить 276 сторінок.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подано загальну характеристику роботи, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та задачі дослідження, викладені основні результати роботи, визначено новизну отриманих результатів, їх теоретичне та практичне значення, кількість публікацій за темою дисертації із зазначенням особистого внеску автора, а також короткий опис структури дисертації.

**Перший розділ** присвячено аналізу сучасного стану механіки електропружиних тіл, зосередженому на дослідженні динамічної поведінки п’єзоелектричних перетворювачів. Особлива увага приділена роботам з дослідження динаміки в’язкоелектропружиних неоднорідних тіл та способам розв’язання прикладних задач електропружності.

Зв’язаність електричного та механічного полів вимагає спільного розгляду співвідношень механіки деформівного твердого тіла та електродинаміки в квазістатичній постановці. Побудова розрахункових моделей динамічних процесів механіки деформівного твердого тіла виконана в фундаментальних роботах О. М. Гузя, В. Т. Грінченка, Я. М. Григоренка, В. Д. Кубенка, Я. Г. Пановка, Г. С. Писаренка та ін. Вагомий внесок у формування та розвиток теорії електров’язкопружності зробили В. Г. Карнаухов, А. Ф. Улітко, Л. П. Хорошун, М. О. Шульга, D. A. Berlincourt, W. G. Cady, W. P. Mason, H. F. Tiersten, T. Ikeda, та ін.

Широке розповсюдження на практиці п’єзоелектричних елементів конструкцій сприяє підвищенню інтересу до розробки ефективних методик розв’язання прикладних задач електропружності. Сучасний стан теоретичного та експериментального дослідження, проектування та використання п’єзоелектричних перетворювачів описано в ґрунтовних монографіях В. Г. Карнаухова та В. В. Михайленка (2005 р.), J. S. Yang (2006 р.), A. J. Fleming , S. O. Moheimani (2006 р.), М. О. Шульги, В. Л. Карлаша (2008 р.), A. Erturk , D. J. Inman (2011 р.), I. J. Busch-Vishniac (2012 р.), В. Г. Савіна та ін. (2013 р.), В. М. Шарапова та ін. (2013 р.), В. Б. Говорухи (2017 р.), K. Uchino at al. (2017 р.), О. І. Дрозденка, О. Г. Лейка

(2018 р.), S. J. Rupitsch (2019 р.), A. Y. Grigorenko , W. H. Müller , I. A. Loza (2021 р.), I. В. Янчевського (2023 р.) та ін. Розвинуті в розглянутих роботах аналітичні та чисельно-аналітичні підходи ґрунтуються на розділенні змінних, розвиненні в ряди за базисними функціями, широко використовуються інтегральні перетворення та спеціальні функції. Врахування зв'язаності полів, анізотропія п'єзокераміки, неоднорідність матеріалу, наявність пружних шарів, складна форма п'єзоелемента, неоднорідні граничні умови та інші особливості п'єзоелемента та його умов функціонування часто вимагають застосування чисельних методів та підходів. Найчастіше використовуються методи скінченних елементів, скінченних різниць, граничних елементів, сплайн-апроксимації, чисельні методики розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь, ітераційні методи та ін.

Ефективні методи розв'язання задач нестационарної електропружності та гідроелектропружності для однорідних та неоднорідних конструкцій розвинуті в роботах А. Е. Бабаєва, О. Ю. Жарія, В. Г. Савіна, А. Ф. Улітка, І. В. Янчевського, W. Chen, H. Ding, D. Fang, J. Li, H. Wang та ін. Описані аналітичні підходи базуються на пошуку розв'язку в просторі перетворень Лапласа та Фур'є, методі характеристик, розвиненні в ряди за власними функціями, варіаційних методах, методі усереднення та ін. Врахування спряженості електричного та механічного полів наштовхується на серйозні математичні труднощі, в зв'язку з чим основна маса практичних задач розв'язується чисельно.

Загальні підходи до розв'язання задач динаміки композитних та багатошарових в'язкопружних та електров'язкопружних елементів конструкцій побудовано в роботах О. Е. Богініча, В. Г. Дубенця, Я. О. Жука, В. Г. Карнаухова, В. І. Козлова, Г. С. Писаренка, О. В. Савченко, І. К. Сенченкова, В. В. Хільчевського, А. П. Яковлєва, S. C. Stanton, V. Tajeddini та ін. Врахування дисипативних властивостей матеріалу виконується за допомогою співвідношень механіки спадкового середовища, лінійних диференціальних реологічних моделей або нелінійних гістерезисних співвідношень. Експериментальним дослідженням матеріальних та дисипативних властивостей п'єзоелектриків займалися А. М. Болкісєв, В. Л. Карлаш, Г. Г. Писаренко, D. Damjanovich, B. K. Mukherjee, S. Sherrit, K. Uchino та ін. Встановлено, що п'єзоелектрики підпорядковуються закономірностям механіки спадкового середовища і мають амплітудно- і частотнозалежні пружні, діелектричні та п'єзоелектричні властивості.

На даний момент активно розвивається новий напрямок матеріалознавства, пов'язаний зі створенням та умовами експлуатування функціонально-неоднорідних матеріалів. Поява нового класу матеріалів вимагає розвитку нових методик та підходів для дослідження їх функціонування. Електропружні функціонально-неоднорідні елементи конструкцій розглядалися в роботах О. Я. Григоренка, І. А. Лози, M. H. Babaеi, Z. T. Chen, W. Q. Chen , H. J. Ding, J. Li, Thi H. Nguyen, H. M. Wang , X.-H. Wu та ін. В більшості розглянутих робіт описуються вільні або усталені коливання тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм. Нестационарним задачам

присвячено окремі роботи. Дослідження нестационарних коливань функціонально-неоднорідних тіл з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу в літературі не знайдено.

З проведеного огляду можна зробити висновок, що в пристроях, що функціонують за рахунок п'єзоefекту, все частіше застосовуються перетворювачі з неоднорідних матеріалів. Існуючі підходи до врахування неоднорідності та дисипативних властивостей в застосуванні до п'єзoeлектричних тіл розвинуті недостатньо та потребують певного узагальнення, реалізації та порівняння, при чому для усталених та нестационарних коливань вони суттєво відрізняються.

**У другому розділі** викладено математичні основи розроблених і описаних у наступних розділах методик та підходів до дослідження динамічного стану п'єзoeлектриків. Застосовуються класичні математичні моделі пружності, електродинаміки, акустики, електропружності, електров'язкопружності однорідних і неоднорідних структур, достовірність яких підтверджена розв'язками багатьох практично важливих задач динаміки конструкцій.

Як вхідні дані в роботі використовуються просторові рівняння лінійної теорії пружності та електропружності, а саме рівняння руху в класичній формі  $\nabla^T \hat{\sigma} + f = \rho \ddot{u}$  та рівняння Максвела в квазістатичному наближенні  $\nabla D = 0$ ;  $\text{rot } E = 0$ . Тут  $\hat{\sigma}$  — тензор напружень;  $u$ ,  $D$ ,  $E$  — вектори переміщень, електричної індукції та напруженості електричного поля.

Надалі напруження та деформації шукаються у формі псевдовекторів  $\bar{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$ ;  $\bar{\epsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T$ . Тоді співвідношення Коші записуються у формі  $\bar{\epsilon} = \Xi u$ , де  $\Xi$  — диференціальний оператор. Визначальні співвідношення, що випливають з термодинамічного потенціалу електричної енталпії, записуються у формі  $\bar{\sigma} = c^E \bar{\epsilon} - e E$ ;  $D = e^T \bar{\epsilon} + \epsilon^S E$ , де  $c^E$  — матриця  $(6 \times 6)$  пружних модулів при сталій напруженості електричного поля;  $\epsilon^S$  — матриця  $(3 \times 3)$  діелектричних проникностей при сташих деформаціях;  $e$  — матриця  $(6 \times 3)$  п'єзoeлектричних модулів; індекс  $T$  — знак транспонування. Термодинамічним потенціалам енталпії відповідають матеріальні залежності, одержані при сташих напруженості електричного поля та механічних напруженнях:  $\bar{\epsilon} = s^E \bar{\sigma} + d E$ ;  $D = d^T \bar{\epsilon} + \epsilon^\sigma E$ . Між системами матеріальних стаих  $c^E$ ,  $e$ ,  $\epsilon^S$  та  $s^E$ ,  $d$ ,  $\epsilon^\sigma$  існують наступні залежності:  $c^E = (s^E)^{-1}$ ;  $\epsilon^S = \epsilon^\sigma - d^\sigma (s^E)^{-1} d$ ;  $e = (s^E)^{-1} d$ .

Для пружних п'єзoeлектрично пасивних ізотропних матеріалів покладаємо  $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$ ,  $c_{12} = c_{13} = \lambda$ ,  $c_{44} = \mu$ ,  $e_{ij} = d_{ij} = \epsilon_{ij}^S = \epsilon_{ij}^T = 0$ , де  $\lambda$ ,  $\mu$  — параметри Ламе для матеріалу.

Постановка початково-крайової задачі виконується через переміщення  $u$  та електричний потенціал  $\varphi$ , який вводиться як  $E = -\nabla \varphi$ .

Механічні граничні умови накладаються на переміщення  $\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{y}$ , напруження  $\sigma_n|_{S_\sigma} = \mathbf{p}_n$  або їх комбінацією  $(\alpha\mathbf{u} + \beta\sigma_n)|_{S_{u\sigma}} = \mathbf{b}_n$ . За відомої різниці потенціалів на електродах електрична гранична умова має вигляд  $\varphi|_{S_\varphi} = V$ , на неелектродованих поверхнях  $D_n|_{S_D} = q_s$ , а при генерації струму  $I(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_I} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) dS$ .

Варіаційно-інтегральний принцип Гамільтона-Остроградського для п'єзоелектричних тіл без врахування дисипації енергії записується у вигляді

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 \right) + \bar{\boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{f} \dot{\mathbf{u}} \right) dV - \oint_S ((\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \dot{\varphi}) dS = 0. \quad (1)$$

При дослідженні коливань п'єзоелемента в акустичному середовищі вважаємо, що акустичне середовище є ідеально стисливим, а його модель підпорядковується співвідношенням  $\nabla^2 \psi = \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ;  $\mathbf{v} = \nabla \psi$ ;  $p = -\rho_a \frac{\partial \psi}{\partial t}$ , де  $\psi$  — потенціальна функція акустичного поля;  $\mathbf{v}$  — вектор швидкості;  $p$  — гідродинамічний тиск. Умови на поверхні контакту  $S_a$  випромінювача з середовищем мають вигляд

$$\left. \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right) \right|_{S_a} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_a}; \quad \sigma_n|_{S_a} = \rho_a \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{S_a}.$$

Моделювання математичних моделей композиційних матеріалів з в'язкопружних та електров'язкопружних компонент випливає з узагальненої на випадок електропружності системи гіпотез Фойгта-Рейсса. Рівняння стану п'єзоелектричних композитів записується в формі  $\langle \sigma_{ij} \rangle = c_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle - e_{nij}^* \langle E_n \rangle$ ;  $\langle D_k \rangle = e_{k\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + \epsilon_{kn}^* \langle E_n \rangle$ , де кутові дужки означають осереднення за макрооб'ємом. Розв'язується квазистатична задача рівноваги представницького об'єму  $\sigma_{ij,i} = 0$ ;  $D_{k,k} = 0$  при граничних умовах на поверхні макрооб'єму  $u_i|_S = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j$ ;  $\varphi|_S = -\langle E_k \rangle x_k$ . Розв'язання задачі дає розподіл за координатами деформацій і напруженостей електричного поля

$$\varepsilon_{ij}(x) = A_{ij\alpha\beta}(x) \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + B_{ijn}(x) \langle E_n \rangle; \quad E_k(x) = F_{k\alpha\beta}(x) \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + H_{kn}(x) \langle E_n \rangle.$$

Відповідні вирази для ефективних сталих

$$c_{ij\alpha\beta}^* = \langle c_{ij\alpha\beta}(x) A_{pq\alpha\beta}(x) \rangle - \langle e_{pij}(x) F_{p\alpha\beta}(x) \rangle; \quad \epsilon_{kn}^* = \langle \epsilon_{kp}(x) H_{pn}(x) \rangle + \langle e_{kpq}(x) B_{pqn}(x) \rangle;$$

$$e_{nij}^* = -\langle c_{ijpq}(x) B_{pqn}(x) \rangle + \langle e_{pij}(x) H_{pn}(x) \rangle = \langle \epsilon_{np}(x) F_{pij}(x) \rangle + \langle e_{npq}(x) A_{pqij}(x) \rangle.$$

Існуючі способи аналітичного опису розсіювання енергії мають під собою феноменологічну основу і розглядаються в різних галузях механіки. В реологічних моделях Максвелла, Кельвіна-Фойгта, стандартного лінійного тіла Зінера та ін. вводяться певні диференціальні оператори у формі  $A_1\sigma = A_2\varepsilon$ . Ці співвідношення лежать в основі лінійної теорії в'язкопружності і дають змогу розглядати коливання, відмінні від гармонічних.

У межах теорії спадкового середовища визначальні рівняння для п'єзоелектриків записуються у формі рівнянь Больцмана-Вольтерри  $\sigma_i(\mathbf{x}, t) = C_{ij} * \dot{\varepsilon}_j - e_{ik} * \dot{E}_k$ ;  $D_k(\mathbf{x}, t) = e_{kj} * \dot{\varepsilon}_j + \epsilon_{kk} * \dot{E}_k$ , де використовується інтегральний оператор згортки  $A * f = \int_{-\infty}^t A(t - \tau) f(\tau) d\tau$ , а ядра операторів визначаються з відповідних випробувань. У випадку гармонічних коливань з циклічною частотою  $\omega$  отримуємо комплексні частотно залежні матеріальні характеристики<sup>1</sup>, які надалі будемо називати комплексними модулями:

$$\{\tilde{c}_{ij}^E(\mathbf{x}), \tilde{e}_{kj}(\mathbf{x}), \tilde{\epsilon}_{kk}(\mathbf{x})\} = i\omega \int_0^\infty \{C_{ij}(\mathbf{x}, p), e_{kj}(\mathbf{x}, p), \epsilon_{kk}(\mathbf{x}, p)\} e^{-i\omega p} dp. \quad (2)$$

Незалежно від природи джерел енергетичних втрат за характеристику дисипативних властивостей коливної системи прийнято вважати відносне розсіювання енергії (коєфіцієнт поглинання)  $\chi$ , під яким розуміють відношення розсіяної енергії  $\Delta W$  за цикл усталених коливань до амплітудного значення повної енергії деформації  $W$ :  $\chi = \Delta W/W$ . Зв'язок коєфіцієнта поглинання з іншими дисипативними характеристиками описується співвідношеннями  $\chi = 2\Lambda = 2\pi Q_d^{-1} = 2\pi B_{0,7}$ , де  $\Lambda$  — логарифмічний декремент коливань;  $Q_d$  — механічна добротність системи;  $B_{0,7}$  — ширина резонансного піку на відповідній висоті.

В чисельних методах однією з найбільш поширених моделей врахування затухання коливань в механічних системах є демпфування за Релеєм. В застосуванні цього підходу до електропружинних тіл рівняння руху записується у вигляді  $\rho\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d\rho\dot{\mathbf{u}} - \nabla^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{f}$ . В матеріальних співвідношеннях вводиться дисипативний доданок з коєфіцієнтом  $\beta_d$ , що відповідає моделі в'язкопружності Кельвіна-Фойгта:  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^E(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \beta_d \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}) - \mathbf{e}^T \mathbf{E}$ ;  $\mathbf{D} = \mathbf{e}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{e}^S \mathbf{E}$ . Система рівнянь електропружності відносно переміщень та електричного потенціалу приймає вигляд  $\rho\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_d\rho\dot{\mathbf{u}} - \Xi^T [\mathbf{c}^E \Xi (\mathbf{u} + \beta_d \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{e}^T \nabla \varphi] = \mathbf{f}$ ;  $\nabla^T [\mathbf{e} \Xi \mathbf{u} - \mathbf{e}^S \nabla \varphi] = \rho_e$ . При переході до дискретного представлення отримуємо систему рівнянь  $\mathbf{M}_{uu} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \Phi = \mathbf{F}_u$ ;  $\mathbf{K}_{u\varphi}^T \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \Phi = -\mathbf{F}_\varphi$ , де  $\mathbf{C}_{uu} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu} + \beta_d \mathbf{K}_{uu}$ .

---

<sup>1</sup> Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезокерамических тел. Київ: Наук. думка, 1990. 228 с.

При усталених коливаннях з частотою  $\omega_k$  вводиться частотно незалежний коефіцієнт демпфування  $\xi_{dk} = \alpha_d / (2\omega_k) + \beta_d \omega_k / 2 = 1/(2Q_{dk})$ . Частинними випадками демпфування за Релеєм є альфа-демпфування  $\alpha_d = \omega_k / Q_{dk}$ ,  $\beta_d = 0$  та бета-демпфування  $\alpha_d = 0$ ,  $\beta_d = 1/(\omega_k Q_{dk})$ . На інтервалі частот  $[f_b, f_e]$  зі сталою добротністю  $Q_d$  коефіцієнти демпфування за Релеєм визначаються як

$$\alpha_d = \frac{2\pi f_b f_e}{(f_b + f_e) Q_d}; \quad \beta_d = \frac{1}{2\pi(f_b + f_e) Q_d}. \quad (3)$$

**В третьому розділі** для дослідження усталених осесиметричних коливань однорідних та композитних п'єзоелектричних тіл розвинуто два суттєво різних чисельних підходи: варіаційно-сплайновий метод та підхід на основі гамільтонового формалізму. Для розв'язання сформульованих крайових задач використовується метод дискретної ортогоналізації. Проводиться верифікація отриманих розв'язків та аналіз результатів. Досліджуються усталені осесиметричні коливання п'єзокерамічних та композитних п'єзоелектричних циліндрів скінченної довжини з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу.

*Варіаційно-сплайновий метод* (ВСМ) розв'язання задач електропружності будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського (1) в припущені про усталений режим коливань  $\Phi(r, \theta, z, t) = \text{Re}(\Phi^a(r, \theta, z)e^{-i\omega t})$ . В напрямку однієї з просторових координат вводиться розбиття на  $n$  ділянок з кроком  $\Delta$ . Апроксимуємо шукані функції за допомогою сплайнів першого порядку

$$f(r, z) = f_i(1 - \xi_i) + f_{i+1}\xi_i; \quad \xi_i = (z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Функціонал (1) записується в дискретній формі

$$A = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L J dr dz = \int_{R_1}^{R_2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{z_i}^{z_{i+1}} J dr dz = \int_{R_1}^{R_2} \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_0^1 J_i d\xi dr = \int_{R_1}^{R_2} \sum_{i=0}^{n-1} Q_i dr.$$

Умова стаціонарності функціонала при  $y_1 = u_{ri}$ ,  $y_2 = u_{zi}$ ,  $y_3 = \varphi_i$ :

$$\delta A = \delta \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L J dr dz = \int_{R_1}^{R_2} \delta \sum_{i=0}^{n-1} Q_i (y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3) dr = \int_{R_1}^{R_2} \sum_{k=1}^3 \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial Q_i}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dr = 0.$$

Система розв'язувальних рівнянь отримується наступним чином:

$$\frac{\partial J}{\partial y_{ki}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial y'_{ki}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial y_{ki}} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial Q_i}{\partial y'_{ki}} \right) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

При досліджені осесиметричних коливань поляризованих в радіальному напрямку тіл циліндричної форми функціонал (1) записується як

$$\begin{aligned}
J = \int_{r_0}^{r_L} \int_0^L J dr dz = & \int_{r_0}^{r_L} \int_0^L \left( c_{33}^E \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + 2c_{13}^E \frac{u_r}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11}^E \left( \frac{u_r}{r} \right)^2 + 2 \left( e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{13} \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \right. \\
& + 2 \left( c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + c_{12}^E \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} c_{11}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{55}^E \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left( 2e_{15} \frac{\partial u_r}{\partial z} - e_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \\
& \left. + \left( 2c_{55}^E \frac{\partial u_r}{\partial z} + 2e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + c_{55}^E \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r} - \rho \omega^2 (u_r^2 + u_z^2) - e_{33}^S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right) r dr dz.
\end{aligned}$$

Відповідна система розв'язувальних рівнянь (4) складається з диференціальних рівнянь другого порядку відносно  $r$ :

$$\begin{aligned}
F_{ri}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & rc_{33}^E D_1 + re_{33} D_3 + c_{33}^E A_1 + (e_{33} - e_{13}) A_3 + \frac{r}{2\Delta} (c_{55}^E + c_{13}) C_2 + \\
& + \left( \rho \omega^2 r - \frac{c_{11}^E}{r} \right) B_1 + \frac{1}{2\Delta} (c_{13}^E - c_{12}^E) E_2 + \frac{rc_{55}^E}{\Delta^2} F_1 + \frac{re_{15}}{\Delta^2} F_3 = 0; \\
F_{zi}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & rc_{55}^E D_2 + c_{55}^E A_2 + \frac{r}{2\Delta} (c_{13}^E + c_{55}) C_1 + \frac{r}{2\Delta} (e_{13} + e_{15}) C_3 + \\
& + \rho \omega^2 r B_2 + \frac{1}{2\Delta} (c_{12} + c_{55}^E) E_1 + \frac{rc_{11}^E}{\Delta^2} F_2 + \frac{e_{15}}{2\Delta} E_3 = 0; \\
F_{\varphi i}(u_{ri}, u_{zi}, \varphi_i) = & e_{33} r D_1 - e_{33}^S (r D_3 + A_3) + (e_{33} + e_{13}) A_1 + \frac{r}{2\Delta} (e_{13} + e_{15}) C_2 + \\
& + \frac{e_{13}}{2\Delta} E_2 - \frac{r}{\Delta^2} e_{11}^S F_3 + \frac{re_{15}}{\Delta^2} F_1 = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення ( $y_1 = u_{ri}$ ;  $y_2 = u_{zi}$ ;  $y_3 = \varphi_i$ ,  $k = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
A_k = & \frac{1}{6} \left( \frac{dy_{ki+1}}{dr} + 4 \frac{dy_{ki}}{dr} + \frac{dy_{ki-1}}{dr} \right); \quad C_k = \left( \frac{dy_{ki+1}}{dr} - \frac{dy_{ki-1}}{dr} \right); \quad B_k = \frac{1}{6} (y_{ki+1} + 4y_{ki} + y_{ki-1}); \\
D_k = & \frac{1}{6} \left( \frac{d^2 y_{ki+1}}{dr^2} + 4 \frac{d^2 y_{ki}}{dr^2} + \frac{d^2 y_{ki-1}}{dr^2} \right); \quad F_k = (y_{ki+1} - 2y_{ki} + y_{ki-1}); \quad E_k = (y_{ki+1} - y_{ki-1}).
\end{aligned}$$

Перетворюємо (5) до системи рівнянь першого порядку, яку розв'язуємо методом дискретної ортогоналізації при відповідних граничних умовах.

В задачі вводиться нормування при  $c_{00} = c_{33}^E$ ;  $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$ ;  $\rho_{00} = \rho$ ;  $R = R_1$ :

$$\bar{r} = \frac{r}{R}; \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{R \sqrt{c_{00}}}; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}; \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \epsilon_{00}}}; \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}; \quad \bar{\epsilon}_{ii} = \frac{\epsilon_{ii}^S}{\epsilon_{00}}. \quad (6)$$

*Підхід на основі гамільтонового формалізму* дозволяє звести систему рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань до системи рівнянь типу Гамільтона (СРТГ). Система рівнянь електропружності для поляризованих в радіальному напрямку циліндрів складається з рівнянь руху

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a = 0; \quad (7)$$

рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r D_r^a}{\partial r} = 0; \quad (8)$$

та матеріальних спiввiдношень

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} + c_{33}^E \varepsilon_{rr} - e_{33} E_r; \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} + c_{13}^E \varepsilon_{rr} - e_{13} E_r; \\ \sigma_{zz} &= c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{11}^E \varepsilon_{zz} + c_{13}^E \varepsilon_{rr} - e_{13} E_r; \quad \sigma_{rz} = 2c_{55}^E \varepsilon_{rz} - e_{15} E_z; \\ D_r &= e_{13} (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + e_{33} \varepsilon_{rr} + e_{33}^S E_r; \quad D_z = 2e_{15} \varepsilon_{rz} + e_{11}^S E_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Шляхом математичних перетворень система рівнянь електропружності (7) – (9) зводиться до операторної системи диференціальних рівнянь відносно функцій  $\hat{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$ ;  $\hat{D}_r = rD_r$ ;  $u_r$ ;  $u_z$ ;  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \left( \frac{1}{r} \left( c_{11}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31} e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) - \rho \omega^2 r \right) u_r + \left( c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31} e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} + \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial z}; \\ \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial r} &= -\left( c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31} e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left( c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^g}{c_{33}^g} + \frac{e_{31} e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\partial \hat{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho \omega^2 r u_z; \\ \frac{\partial \hat{D}_r}{\partial r} &= -\frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\partial \hat{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^S r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}^g}{c_{33}^g} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{\hat{\sigma}_{rz}}{r c_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}^E}{\varepsilon_{33}^S c_{33}^g} \frac{\hat{D}_r}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}^g}{\varepsilon_{33}^g} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Вводимо розбиття уздовж осі  $z$  на  $n$  ділянок з кроком  $\Delta$  і апроксимуємо похідні за  $z$  в системі (10) скiнченими рiзницями. Одержано систему  $6n$  звичайних диференцiальних рiвнянь. Для переходу до гамiльтонового формалiзму введемо наступнi позначення ( $i=1, 2, \dots, n-1, n$ ):

$$q_i = -\hat{\sigma}_{rr,i}; \quad q_{n+i} = u_{z,i}; \quad q_{2n+i} = -D_{r,i}; \quad p_i = u_{r,i}; \quad p_{n+i} = \sigma_{rz,i}; \quad p_{2n+i} = \varphi_i. \quad (11)$$

З використанням (11) система рiвнянь (10) перетворюється до системи канонiчних рiвнянь Гамiльтона

$$q'_i = R_{ik}(\xi) q_k + Q_{ik}(\xi) p_k; \quad p'_i = -P_{ik}(\xi) q_k - R_{ki}(\xi) p_k. \quad (12)$$

Вiдповiдна функцiя Гамiльтона

$$H = (P_{ik} q_i q_k + 2R_{ik} p_i q_k + Q_{ik} p_i p_k)/2.$$

Компоненти матриць  $R$ ,  $Q$ ,  $P$  наведено в роботах [8, 13] переліку публікацій автора. Отримані матриці мають симетричну блочну структуру, зручну для обчислювального процесу. Обчислення проводяться в нормованих змінних (6). Підхід відрізняється зручністю постановки граничних умов як в переміщеннях, так і в напруженнях, оскільки серед розв'язувальних функцій є напруження та електрична індукція. Реалізація підходу потребує визначення значень розрахункових функцій на торцях елемента, що виконується шляхом дискретизації матеріальних співвідношень (9) за допомогою односторонніх скінченно-різницевих виразів для похідних другого порядку точності. Чисельне інтегрування системи (12) виконується методом дискретної ортогоналізації. Запропонований підхід дозволяє враховувати дисипативні характеристики матеріалів у формі комплексних модулів.

*Перевірка достовірності розвинутих підходів.* На рис. 1 проілюстровано розподіл переміщень за довжиною циліндра з защемленими торцями при  $\bar{\omega}=1$ , на рис. 2 — амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для переміщень циліндра з мембрально закріпленими торцями, які отримані вищеперечисленими методами. Відхилення між результатами, наведеними на рис. 2, з методом скінчених елементів лежить в межах 2%, що свідчать про гарну збіжність результатів.

В таблиці 1 порівнюються результати, які отримані розвинутими методами, методом скінчених елементів та обчислені методом сплайн-колокацій (МСК) в роботі<sup>2</sup>.

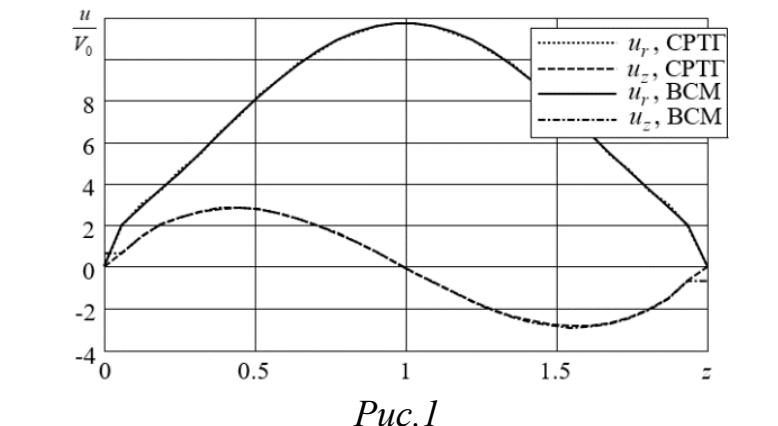


Рис.1

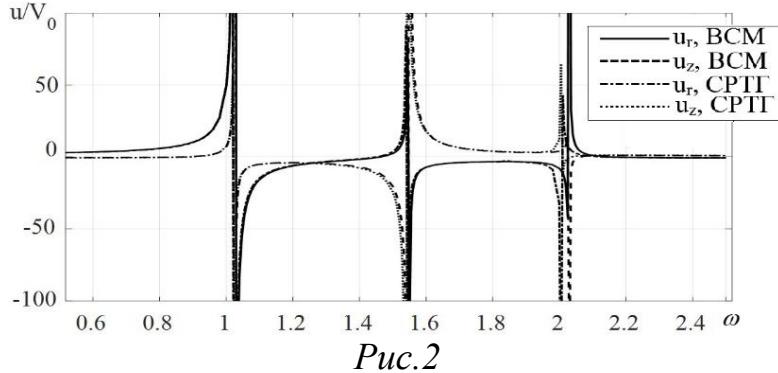


Рис.2

Таблиця 1

Кругова частота	BCM	CPTГ	MCE	МСК	Різниця
$\Omega_1$ , кГц×рад	477,4	475	472,5	461,9	3,3%
$\Omega_2$ , кГц×рад	810,7	815	828	820	2%
$\Omega_3$ , кГц×рад	1116	1110	1107,7	1160	4,5%

<sup>2</sup> Grigorenko A. Y., Müller W. H., Loza I. A. Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies. Cham: Springer International Publishing, 2021.

Робимо висновок, що запропоновані підходи демонструють гарну збіжність та відповідність результатам розв'язків тестових задач.

Розвинуті підходи застосовуються для дослідження гармонічних коливань однорідних п'єзокерамічних циліндрів без врахування дисипації енергії. Побудовано АЧХ циліндрів з PZT-4 на частотному проміжку, що включає 3–5 перших резонансних частот. Досліджено залежність резонансних частот від розмірів п'єзоелемента та умов закріплення. Описано форми коливань п'єзоелемента.

Для дослідження резонансних коливань п'єзоелектричних радіально-поляризованих циліндрів з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу у фізичні співвідношення (9) вводяться комплексні модулі (2) у формі:

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}^E (1 + i \operatorname{tg} \delta_{c_{ij}}); \quad \tilde{e}_{kj} = e_{kj} (1 + i \operatorname{tg} \delta_{e_{kj}}); \quad \tilde{\epsilon}_{kk} = \epsilon_{kk}^S (1 + i \operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{kk}}), \quad (13)$$

де  $c_{ij}^E$ ,  $e_{kj}$ ,  $\epsilon_{kk}^S$  — дійсні частини матеріальних характеристик;  $\operatorname{tg} \delta_{c_{ij}}$ ,  $\operatorname{tg} \delta_{e_{kj}}$ ,  $\operatorname{tg} \delta_{\epsilon_{kk}}$  — тангенси кутів механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат. Досліджуються АЧХ для циліндрів з ЦТСтБС2, Ferroperm PZ27, Motorola 3203HD, Ultrashape Porous PZT, MSI 1-3 PZT-Polymer Composite (30% PZT), для яких відомі повні набори комплексних модулів<sup>3</sup>. Порівнюються розмірні амплітудно-частотні характеристики для радіально-поляризованих циліндрів з геометричними характеристиками  $R_1 = 0,6\text{cm}$ ,  $R_2 = 1\text{cm}$ ,  $L = 2R_2$ , виготовлені з різних п'єзокерамічних матеріалів. Циліндричні поверхні циліндрів електродовані та навантажені різницею потенціалів  $V_0 \sin \omega t$ , торці мембрально закріплені  $u_r(r,0) = \sigma_{zz}(r,0) = 0$ ;  $u_r(r,L) = \sigma_{zz}(r,L) = 0$  та закорочені  $\varphi(r,0) = \varphi(r,L) = 0$ . Досліжується вузький частотний діапазон, в якому частотна залежність комплексних модулів не враховується, але чисельна схема дозволяє це зробити.

На рис. 4 наводяться АЧХ для п'єзокераміки Motorola 3203HD. З отриманих результатів визначаються такі дисипативні характеристики, як ширина та амплітуда резонансного піку, а також кут нахилу фазової кривої при резонансі.

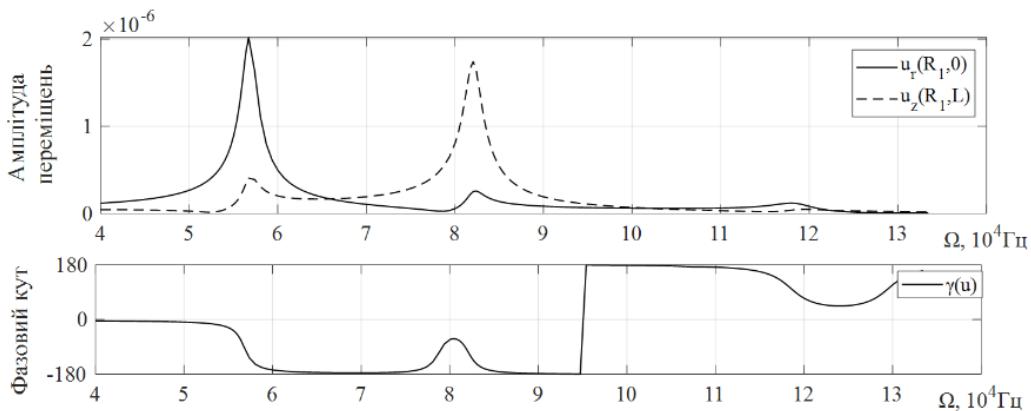


Рис. 4

<sup>3</sup> Sherrit S., Mukherjee B. K. Characterization of Piezoelectric Materials for Transducers. SPIE : Proc, 25 January 2007.

На прикладі низькодобротної п'єзокераміки Motorola 3203HD проведемо порівняння різних способів врахування втрат (рис. 5). Розрахунок проводиться за допомогою підходу на основі гамільтонового формалізму та МСЕ.

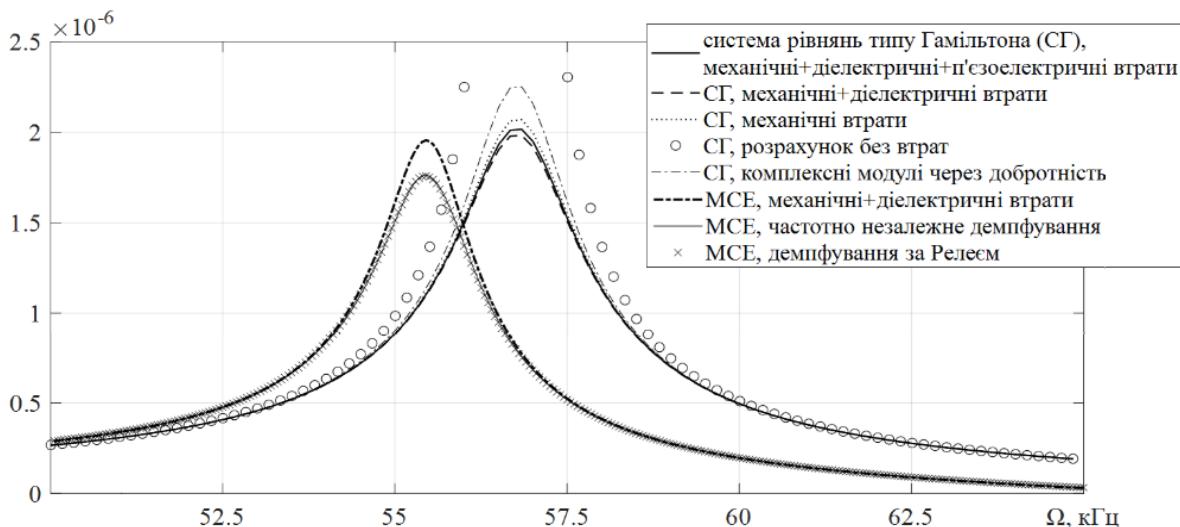


Рис. 5

Отримані результати дають можливість зробити висновок, що вплив п'єзоелектричних та діелектричних втрат не перевищує 1% відносно врахування лише механічних втрат. Для наведених кривих визначається добротність як відношення ширини резонансного піку до частоти резонансу. Результати найкраще відповідають заданій добротності при введенні обернено пропорційних до добротності тангенсів втрат.

В розділі також досліджуються усталені коливання композитних п'єзоелектричних циліндрів. Для вибору розрахункової моделі визначення ефективних характеристик композитних матеріалів проводиться порівняння трьох знайдених в літературі моделей шаруватих п'єзоелектричних композитів. Перша модель<sup>4</sup> отримана в припущені про статичність навантажень, друга<sup>5</sup> ґрунтуючись на відповідності між квазистатичною в'язкоелектропружністю та статикою п'єзоелектрика та враховує дисипативні характеристики лише для матриці, а третя<sup>6</sup> визначає ефективні характеристики електров'язкопружних композитних матеріалів у частотному просторі інтегральних перетворень Фур'є через комплексні модулі складових матеріалів.

Порівняння проводиться на прикладі шаруватого композиту, що складається з п'єзополімеру PVDF та м'якої п'єзокераміки PZT-5A. За дійсними частинами матеріальних характеристик за всіма трьома моделями отримуємо подібні результати

<sup>4</sup> Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Київ: Наук. думка, 1989. 208 с.

<sup>5</sup> Li J., Dunn M. L. Viscoelectroelastic behavior of heterogeneous piezoelectric solids. Journal of Applied Physics. 2001. Vol. 89, no. 5. P. 2893–2903.

<sup>6</sup> Савченко О. В., Деркач О. Л., Ющенко С. М. Визначення ефективних динамічних характеристик електров'язкопружних композиційних матеріалів. Технічні науки та технології. 2015. № 1. С. 14–24.

(рис. 6), тоді як тангенси втрат (рис. 7) досить сильно відрізняються в зв'язку з різними типами динамічності постановок моделей. Надалі зупинимося на моделі 3, оскільки вона враховує дисипативні характеристики обох складових матеріалів.

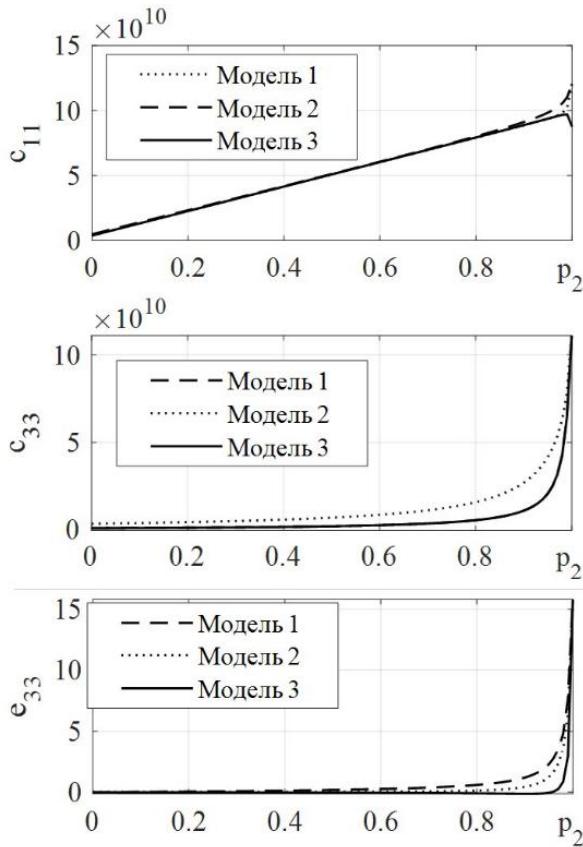


Рис. 6

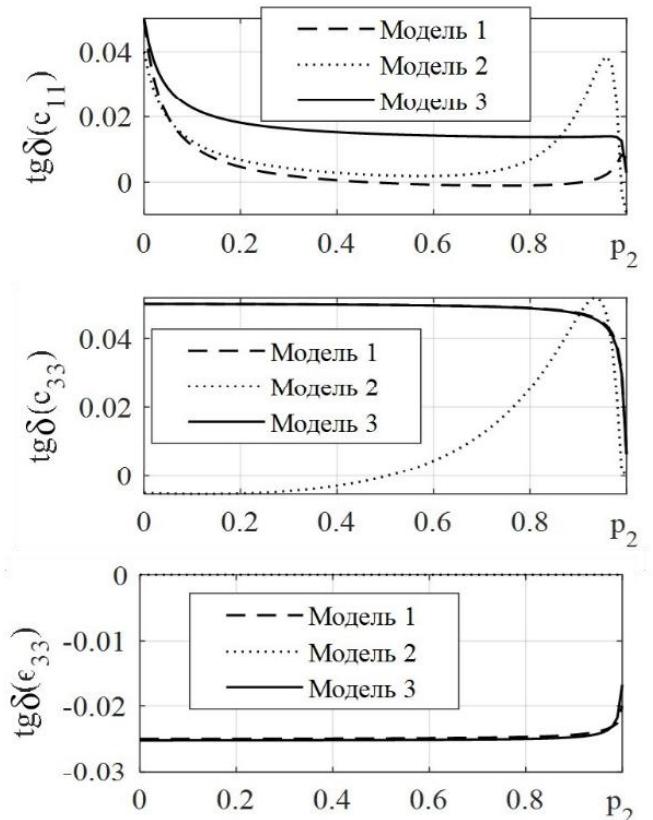


Рис. 7

Отримані ефективні матеріальні характеристики використовуються для дослідження коливань п'єзоелектричного композитного циліндра, схема якого наведена на рис. 8. Розглядаються композитні порожнисті циліндри з радіусами циліндричних поверхонь  $R_1 = 0,6 \text{ см}$ ,  $R_2 = 1 \text{ см}$  та висотою  $H = 2R_2$ . Циліндричні поверхні електродовані та навантажені різницею потенціалів  $V_0 \sin \omega t$ ,  $V_0 = 100 \text{ В}$ , для торців механічні граничні умови мають вигляд  $u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0$ ;  $u_r(r, H) = \sigma_{zz}(r, H) = 0$ . Обчислення проводяться за допомогою підходу на основі гамільтонового формалізму.

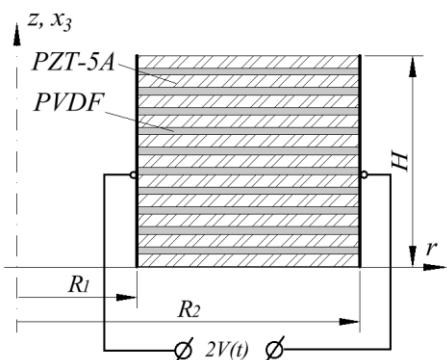


Рис. 8

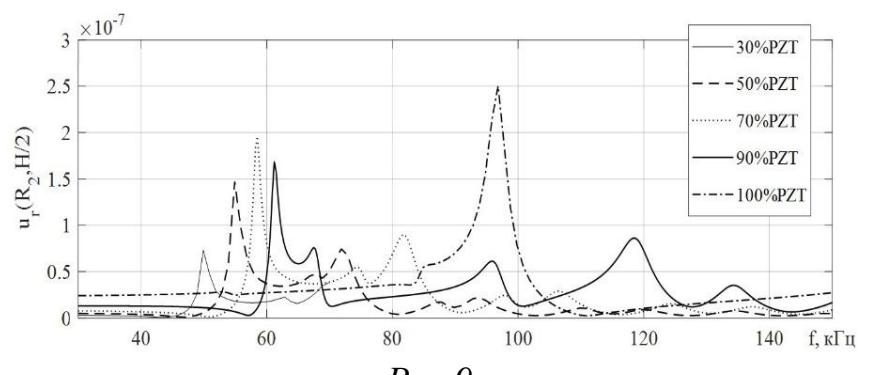


Рис. 9

Побудовані амплітудно-частотні характеристики (рис. 9) ілюструють залежність резонансної частоти та амплітуди відгуку від частки п'єзокераміки. Бачимо, що в композитах резонансні частоти в 1,5–2 рази нижчі, ніж в однорідних елементах. Отже, в міжрезонасному діапазоні, де вплив дисипації енергії на коливання малий, для знаходження матеріальних характеристик шаруватих п'єзоелектрических композитів можна використовувати будь-яку з трьох розглянутих моделей. В резонансній зоні для знаходження узагальнених комплексних модулів може бути використана модель 3. Розвинутий в розділі підхід дозволяє визначати залежність відгуку п'єзоелемента від частки п'єзокераміки, що дає можливість оптимізувати конструкцію елемента шляхом зміни частки складових матеріалів в композиті.

У четвертому розділі дано нові постановки нестационарних задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища. Розвинuto та реалізовано узагальнений чисельний підхід до дослідження пульсуючих коливань тіл плоскої, циліндричної та сферичної форм, в якому тип геометрії задається за допомогою параметра  $N$ . В постановці задачі всі матеріальні характеристики вважаються функціонально залежними від просторової координати. Для врахування дисипативних властивостей матеріалу пропонується нова розширенна на випадок п'єзоелектрических тіл чотирипараметрична узагальнена модель затухання коливань, що включає в себе демпфування за Релеєм, модель Кельвіна-Фойгта, п'єзоелектричні та діелектричні втрати.

Система осесиметричних рівнянь електропружності для плоских ( $N = 0$ ), порожністих циліндричних ( $N = 1$ ) та сферичних ( $N = 2$ ) тіл з врахуванням запропонованої математичної моделі електров'язкопружного демпфування коливань складається з рівняння руху та квазістатичного рівняння Максвелла у відповідній системі координат (при  $N = 0$   $r \equiv x$ ,  $x \in [0, h]$  — товщина координата):

$$\rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_d \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{N}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}); \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + N \frac{D_r}{r} = 0. \quad (14)$$

Матеріальні співвідношеннями для поляризованих за товщиною тіл

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{33}^E (\varepsilon_{rr} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N c_{13}^E (\varepsilon_{\theta\theta} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) - e_{33} (E_r + \lambda_d \dot{E}_r); \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{13}^E (\varepsilon_{rr} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N c_{11}^N (\varepsilon_{\theta\theta} + \beta_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) - e_{13} (E_r + \lambda_d \dot{E}_r); \\ D_r &= e_{33} (\varepsilon_{rr} + \lambda_d \dot{\varepsilon}_{rr}) + N e_{31} (\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_d \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}) + e_{33}^S (E_r + \gamma_d \dot{E}_r), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $c_{11}^N = c_{11} - (N - 1)(c_{11} - c_{23})/2$ . В (15) коефіцієнт  $\alpha_d$  відповідає альфа-демпфуванню;  $\beta_d$  — бета-демпфування, або демпфування за Фойгтом;  $\gamma_d$ ,  $\lambda_d$  — коефіцієнти діелектрических та п'єзоелектрических втрат. Доповнююмо постановку співвідношеннями  $\varepsilon_{rr} = \partial u / \partial r$ ;  $\varepsilon_{\theta\theta} = u / r$ ;  $E_r = -\partial \varphi / \partial r$ . Всі матеріальні характеристики, враховуючи дисипативні, будемо вважати функціонально залежними від просторової

координати. В нормуванні (4) для однорідних матеріалів беремо  $c_{00} = c_{33}^E + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}^S$ ;  $\epsilon_{00} = \epsilon_{33}^S$ ;  $\rho_{00} = \rho$ ;  $t_h = h_0 \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ , для неоднорідних нормуючі величини вибираємо аналогічно за параметрами п'єзокерамічної складової. Отримуємо систему рівнянь електров'язкопружності у формі

$$\begin{aligned} & \left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ c_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{dc_{33}}{dr} + N \frac{c_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{N}{r} \frac{dc_{13}}{dr} - N \frac{c_{13}}{r^2} + N^2 \frac{c_{13} - c_{11}^N}{r^2} \right) u \right] + \\ & + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ e_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left( \frac{de_{33}}{dr} + N \frac{e_{33} - e_{31}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = \rho \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha_d \frac{\partial u}{\partial t} \right); \\ & \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ e_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left( \frac{de_{33}}{dr} + N \frac{e_{13} + e_{33}}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{N}{r} \frac{de_{31}}{dr} + N(N-1) \frac{e_{13}}{r^2} \right) u \right] - \\ & - \left(1 + \gamma_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \left( \frac{d\epsilon_{33}}{dr} + N \frac{\epsilon_{33}}{r} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Система рівнянь (16) доповнюється механічними граничними умовами:  $u(R_i, t) = U_i(t)$  або  $\sigma_{rr}(R_i, t) = P_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ), граничними умовами для електричних польових величин  $\varphi(R_1) = 0$ ,  $\varphi(R_2) = V(t)$ , де  $R_1$ ,  $R_2$  – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра або кулі. За відсутності закріплень на зовнішніх поверхнях динамічні граничні умовами набувають вигляду ( $i = 1, 2$ ):

$$\sigma_{rr}|_{r=R_i} = \left[ \left(1 + \beta_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + N c_{13}^E \frac{u}{r} \right) + \left(1 + \lambda_d \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right]_{r=R_i} = P_i(t). \quad (17)$$

Для багатошарових тіл на поверхнях спряження  $r = r_k$  виконуються умови повного контакту  $u(r_k - 0, t) = u(r_k + 0, t)$ ;  $\sigma_{rr}(r_k - 0, t) = \sigma_{rr}(r_k + 0, t)$ . На електродованих поверхнях спряження задається значення електричного потенціалу  $\varphi(r_k, t) = V_k(t)$ , на неелектродованих поверхнях приймаємо умову неперервності електричної індукції  $D_r(r_k - 0, t) = D_r(r_k + 0, t)$ . Для пружних шарів рівняння механічних коливань записуються у формі (14) при наведених вище пружних модулях та нульових п'єзомодулях ( $e_{ij} = 0$ ). Для збереження структури матриць покладаємо  $\epsilon_{ii}^S = 1$ .

При роботі п'єзоелемента в режимі прямого п'єзоefекту електрорушійна сила (ЕРС) визначається за допомогою математичних перетворень рівняння Максвела як різниця потенціалів на його розімкнених електродах  $V(t) = \varphi|_{r=R_2} - \varphi|_{r=R_1}$ . В результаті при дискретизації задачі та врахуванні функціональної неоднорідності матеріалу електрична гранична умова записується у вигляді

$$e_{33}(R_2)u_{m+1} - e_{33}(R_1)u_1 - \left[ \varepsilon_{33}^S(R_2)\varphi_{m+1} - \varepsilon_{33}^S(R_1)\varphi_1 \right] + \\ + \sum_{i=1}^m \left( (Ne_{31}(r_i)/r_i - e'_{33}(r_i))u_i + \varepsilon'_{33}(r_i)\varphi_i \right) \Delta = 0. \quad (18)$$

Штрихами позначаються похідні за просторовою координатою, крапкою — похідні за часом.

Для опису взаємодії з акустичним середовищем шукається загальний розв'язок рівняння руху ідеальної стисливої рідини  $\ddot{\psi} = c_a^2 \nabla^2 \psi$  в просторі перетворень за Лапласом. Виключаємо компоненти акустичного поля з умов нерозривності та отримуємо механічну граничну умову на поверхні елемента.

При переході в простір оригіналів у випадку плоского шару маємо імпедансну граничну умову  $\sigma_x|_{x=h} + \rho_a c_a \dot{u}|_{x=h} = 0$ .

В циліндричній системі координат на поверхні п'єзоелемента маємо граничну

умову  $\rho_a \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(R_2, \tau) g_{00}(R_2, t-\tau) d\tau = - \int_0^t \sigma(R_2, \tau) g_{01}(R_2, t-\tau) d\tau,$

де<sup>7</sup>  $g_{0n}(r, t) = \frac{ch(n \cdot \arccos((t+r)/r))}{r \sqrt{((t+r)/r)^2 - 1}}$ .

В умовах сферичної симетрії механічна гранична умова на поверхні п'єзоелемента приймає вигляд  $\rho_a \ddot{u}|_{r=R_2} = -\dot{\sigma}_{rr}|_{r=R_2}/c_a - \sigma_{rr}|_{r=R_2}/R_2$ . Тиск і швидкість в акустичному середовищі визначаються через напруження на зовнішній поверхні п'єзоелемента.

Чисельний спосіб розв'язання системи рівнянь (16) будується з використанням скінченно-різницевих виразів другого порядку точності. Вводимо розбиття  $r_i = R_1 + (i-1)\Delta_r$  ( $\Delta_r = h/m$ ,  $i = 1, \dots, m+1$ ) та будемо шукати розв'язок відносно  $\mathbf{U}(t) = \{u(r_i)\}$  і  $\Phi(t) = \{\varphi(r_i)\}$ . Отримуємо систему рівнянь, яка в матричній формі може бути записана наступним чином:

$$\mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}\Phi + (\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}) \dot{\mathbf{U}} + \lambda_d \mathbf{B} \dot{\Phi} = \mathbf{p} \ddot{\mathbf{U}}; \quad (19)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{U} - \mathbf{M}\Phi + \lambda_d \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{U}} - \gamma_d \mathbf{M} \dot{\Phi} = 0. \quad (20)$$

Тут  $\mathbf{a}_d$ ,  $\beta_d$ ,  $\lambda_d$ ,  $\mathbf{p}$  — діагональні матриці  $(m-1) \times (m-1)$  зі значеннями коефіцієнтів демпфування та густини у внутрішніх точках розбиття. Система (19), (20) доповнюється електричними та механічними граничними умовами (17), (18) в різницевій формі з використанням односторонніх різницевих виразів другого порядку точності та отримуємо систему з  $2(m+1)$  рівнянь.

<sup>7</sup> Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання біоморфних електропружиних тіл. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 448 с.

*Інтегрування за часом.* Розв'язок задачі будемо шукати в моменти часу  $t^k$  з кроком за часом  $\Delta_t$ . Для інтегрування за часом неявним чисельним методом використовуємо схему Ньюмарка з параметром  $\xi$  ( $0,5 < \xi < 1$ ):

$$\dot{f}_i^{k+1} = \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\xi \Delta_t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{f}_i^k; \quad \ddot{f}^{k+1} = \frac{f^{k+1} - f^k}{\xi^2 \Delta_t^2} - \frac{1}{\xi^2 \Delta_t} \dot{f}^k - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{f}^k. \quad (21)$$

Система (19), (20) з врахуванням (21) записується у вигляді

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{A} + \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}}{\xi \Delta_t} - \frac{\mathbf{p}}{\xi^2 \Delta_t^2} \right) \mathbf{U}^{k+1} + \left( \mathbf{B} + \frac{\lambda_d \mathbf{B}}{\xi \Delta_t} \right) \Phi^{k+1} = \left( \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}}{\xi \Delta_t} - \frac{\mathbf{p}}{\xi^2 \Delta_t^2} \right) \mathbf{U}^k + \\ & + \left( \frac{1-\xi}{\xi} (\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}) - \frac{\mathbf{p}}{\xi^2 \Delta_t} \right) \dot{\mathbf{U}}^k + \mathbf{p} \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{\mathbf{U}}^k + \frac{\lambda_d \mathbf{B}}{\xi \Delta_t} \Phi^k + \lambda_d \mathbf{B} \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\Phi}^k; \\ & \left( \mathbf{B}^T + \frac{\lambda_d \mathbf{B}^T}{\xi \Delta_t} \right) \mathbf{U}^{k+1} - \left( \mathbf{M} + \frac{\gamma_d \mathbf{M}}{\xi \Delta_t} \right) \Phi^{k+1} = \frac{\lambda_d \mathbf{B}^T}{\xi \Delta_t} \mathbf{U}^k + \\ & + \lambda_d \mathbf{B}^T \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\mathbf{U}}^k - \frac{\gamma_d \mathbf{M}}{\xi \Delta_t} \Phi^k - \gamma_d \mathbf{M} \frac{1-\xi}{\xi} \dot{\Phi}^k. \end{aligned} \quad (22)$$

Розв'язок шукається у вигляді вектора  $\mathbf{Y} = \{u_1, \dots, u_{m+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}\}$ . Тоді система (22) має вигляд  $\mathbf{M}\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{Y}^k, \dot{\mathbf{Y}}^k, \ddot{\mathbf{Y}}^k)$ . Отриману систему диференціальних рівнянь розв'язуємо при початкових умовах  $\mathbf{U}|_{t=0} = U_0(\mathbf{r})$ ,  $\dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = W_0(\mathbf{r})$ , де  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{m+1})$  — вектор просторової координати в точках розбиття. Пришвидшення в нульовий момент часу та електричний потенціал  $\Phi|_{t=0} = \Psi_0(\mathbf{r})$  визначається з (19), (20) при  $t=0$ .

При застосуванні явної чисельної схеми з початкових умов отримуємо дискретизований розподіл шуканих величин в нульовий ( $t^0 = 0$ ) та перший момент часу ( $t^1 = \Delta_t$ ):  $\mathbf{U}^0 = U_0(\mathbf{r})$ ;  $\Phi^0 = \Psi_0(\mathbf{r})$ ;  $\mathbf{U}^1 = \Delta_t W_0(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r})$ . Розподіл електричного потенціалу при  $t = t^1$  визначається з рівняння (20). В наступні моменти часу  $t^{k+1} = k\Delta_t$ , ( $k = 2, 3, \dots$ ) з (19), (20) маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\mathbf{p}}{\Delta_t^2} - \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}}{\Delta_t} \right) \mathbf{U}^{k+1} - \frac{\lambda_d}{\Delta_t} \mathbf{B} \Phi^{k+1} = \left( \mathbf{A} + \frac{2\mathbf{p}}{\Delta_t^2} - \frac{\beta_d \mathbf{A} - \alpha_d \mathbf{p}}{\Delta_t} \right) \mathbf{U}^k - \frac{\mathbf{p}}{\Delta_t^2} \mathbf{U}^{k-1} + \left( \mathbf{B} - \frac{\lambda_d \mathbf{B}}{\Delta_t} \right) \Phi^k; \\ & - \frac{\lambda_d}{\Delta_t} \mathbf{B}^T \mathbf{U}^{k+1} + \frac{\gamma_d}{\Delta_t} \mathbf{M} \Phi^{k+1} = \left( 1 - \frac{\lambda_d}{\Delta_t} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{U}^k - \left( 1 - \frac{\gamma_d}{\Delta_t} \right) \mathbf{M} \Phi^k. \end{aligned} \quad (23)$$

З введенням вектора  $\mathbf{Y}$  (23) приймає вигляд  $\mathbf{N}\mathbf{Y}^{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}^k, \mathbf{Y}^{k-1})$ . Матриця  $\mathbf{N}$  складається з чотирьох діагональних матриць, що спрощує обчислення в порівнянні з неявною схемою. Значення переміщень та електричного потенціалу в

контурних точках виключаються з системи (23). При нульових або частково нульових коефіцієнтах демпфування з першого рівняння визначаються переміщення у внутрішніх точках в момент часу  $t^{k+1}$ , потім переміщення на контурі, потім електричний потенціал з системи  $\mathbf{M}\Phi^{k+1} = \mathbf{B}^T \mathbf{U}^{k+1}$ . Оскільки явна схема є умовно збіжною, при обчисленні беремо  $\Delta_t \approx 0,1\Delta_r$ . Такого відношення зазвичай достатньо для забезпечення стійкості обчислювального процесу.

Для інтегрування за часом за допомогою процедури Рунге-Кутта систему рівнянь потрібно представити у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього вводимо змінну швидкості переміщень та перетворюємо (19), (20) до форми

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{V}; \quad \dot{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\rho}^{-1} \left( \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}\Phi + (\boldsymbol{\beta}_d \mathbf{A} - \boldsymbol{\alpha}_d \boldsymbol{\rho})\mathbf{V} + \boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}\dot{\Phi} \right); \\ \dot{\Phi} &= (\boldsymbol{\gamma}_d \mathbf{M})^{-1} \left( \mathbf{B}^T \mathbf{U} - \mathbf{M}\Phi + \boldsymbol{\lambda}_d \mathbf{B}^T \mathbf{V} \right).\end{aligned}\quad (24)$$

Система (24) може бути записана у вигляді  $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{F}\mathbf{Y}$ , де  $\mathbf{Y} = \{u_1, \dots, u_{m+1}, v_1, \dots, v_{m+1}, \varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}\}$ . При нульових  $\boldsymbol{\gamma}_d$  та  $\boldsymbol{\lambda}_d$  третє рівняння (24) беремо у вигляді  $\dot{\Phi} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{V}$ .

Для тестування представленої методики проводилося порівняння результатів, отриманих на сітках з різними значеннями  $\Delta_t$ ,  $\Delta_r$  за допомогою описаних вище способів інтегрування за часом. Також проводилося порівняння з методом скінченних елементів та з результатами, наведеними в роботі<sup>7</sup>.

Користуючись вищеописаним підходом, проводиться дослідження пульсуючих коливань багатошарових  $n$ -ззоелементів без врахування дисипації енергії. Розглядаються п'зоелементи, що складаються з  $n$  п'зоокерамічних шарів зі змінним напрямком поляризації згідно до рис. 10. При дослідженні коливань плоского п'зоелемента при  $V(t) = H(t)$ , де  $H(t)$  — функція Гевісайда (рис. 11), спостерігається чітка пропорційність екстремумів переміщень від кількості шарів п'зоелемента, що прослідковується для циліндричних та сферичних тіл також. Цей ефект є корисним в низьковольтажних актуаторах. При аналізі поширення електромеханічної хвилі при  $n=3$  (рис. 12) маємо розриви на кривих напруженсь  $\sigma_y$ , що може призводити до виникнення міжфазних тріщин.

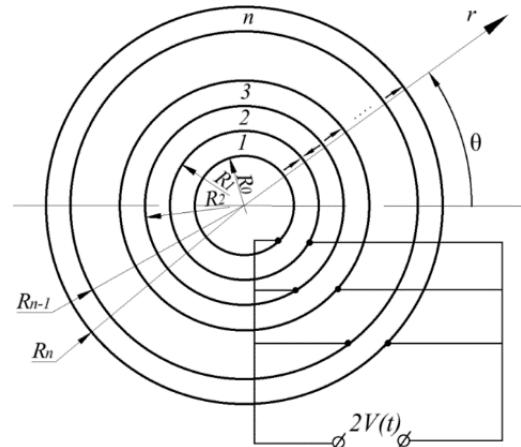


Рис. 10

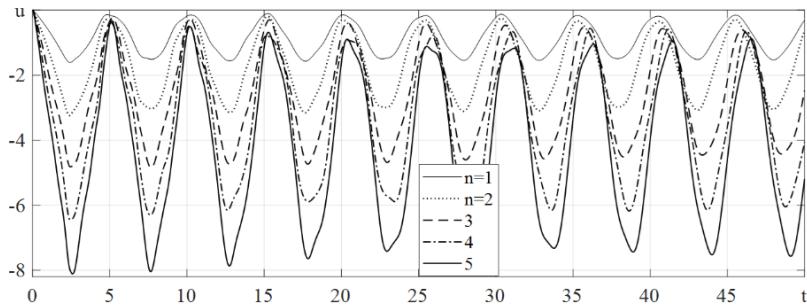


Рис. 11

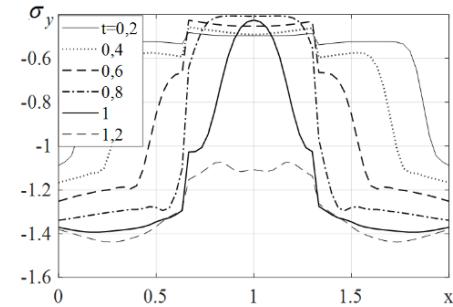


Рис. 12

Відхилення в результатах обчислень за допомогою неявної чисельної схеми та методу скінчених елементів лежить в межах 2%. Встановлено, що максимальні переміщення лінійно залежать від кількості шарів п'єзоелемента та радіусу зовнішньої поверхні.

Наступний етап — дослідження коливань плоских, циліндричних та сферичних п'ятишарових елементів з зовнішнім в'язкопружним алюмінієвим шаром. Демпфування коливань в в'язкопружному шарі враховується за моделлю Кельвіна-Фойгта. Збурення задається у формі півхвилі синусоїди  $V(t) = (H(t) - H(t - \pi / \omega))V_0 \sin \omega t$ ,  $\omega = 1$ . На рис. 13 наведено коливання зовнішньої поверхні для порожнистої кулі з кераміки PZT-4 з радіусами поверхонь  $R_0/R_n = 2/3$ . Товщина зовнішнього шару

$h_3 = h_i = \frac{R_n - R_0}{n}$ . Досліджено залежність процесу затухання від коефіцієнта  $\beta_d$ .

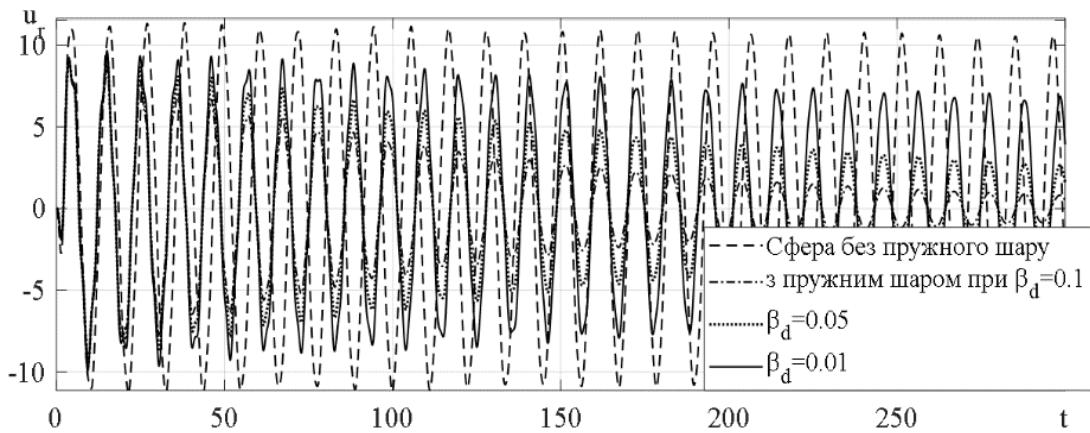


Рис. 13

Проведено дослідження переходних процесів в неоднорідних п'єзоелектричних тілах без врахування затухання коливань. Розглядаються п'єзоелементи, виготовлені з комбінацій м'якої PZT-5h та твердої п'єзокераміки PZT-8. Порівнюються коливання однорідних, двошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів з закріпленою нижньою поверхнею. Розглянуті варіанти розподілу ФГМ за товщиною наведені на рис. 14. Напруження  $\sigma_{yy}$  в функціонально-неоднорідному плоскому шарі (рис. 15) є гладкими без розривів, на відміну від двошарових п'єзоелементів PZT-5h+PZT-8 (рис. 16). Встановлено, що для мінімізації напружень біля закріплення потрібно розміщувати м'яку п'єзокераміку.

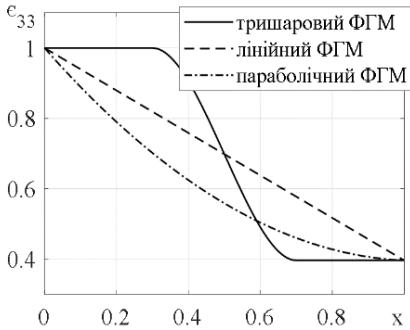


Рис. 14

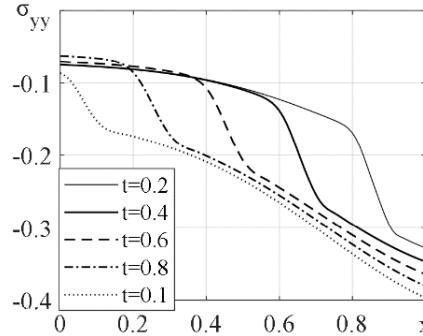


Рис. 15

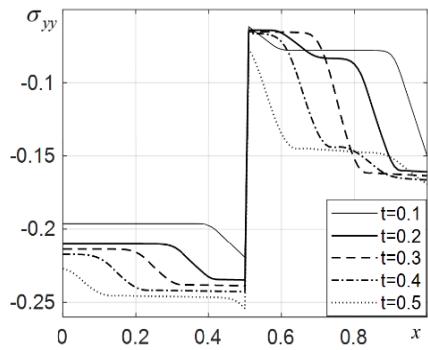


Рис. 16

На рис. 17 порівнюються переміщення зовнішньої поверхні двошарових та функціонально-неоднорідних циліндрів з різними функціями розподілу за товщиною.

В межах запропонованого підходу проводиться порівняння альфа- та бета-демпфування функціонально-неоднорідних циліндрів, що введені в постановці задачі коефіцієнтами  $\alpha_d$  та  $\beta_d$  відповідно. Розглядаються п'єзоелементи, виготовлені з комбінацій м'якої PZT-5h та твердої п'єзокераміки PZT-8. Порівнюються коливання однорідних, двошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів з закріпленою нижньою поверхнею. На рис. 18 наведено криві коливань зовнішніх поверхонь функціонально-неоднорідних циліндрів з параболічним розподілом за товщиною з врахуванням альфа-демпфування (а) та бета-демпфування (б) при різних значеннях коефіцієнтів демпфування та без демпфування.

Для отриманих переміщень визначено логарифмічний декремент коливань. З кривої коливань без демпфування знайдено декремент

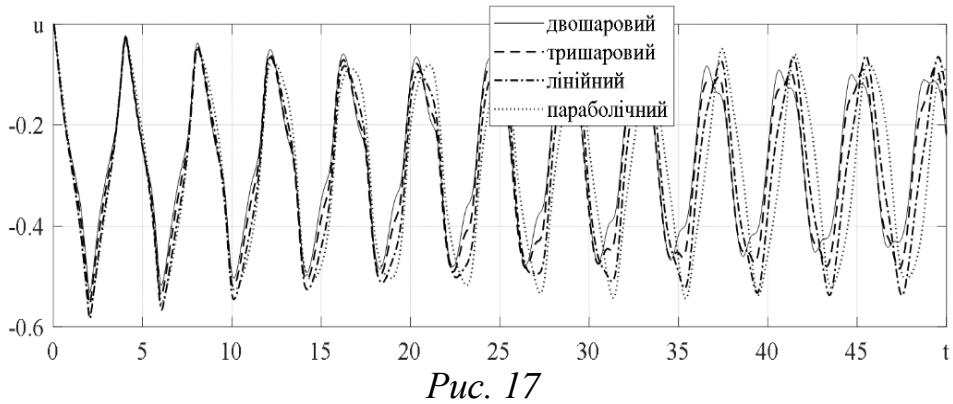
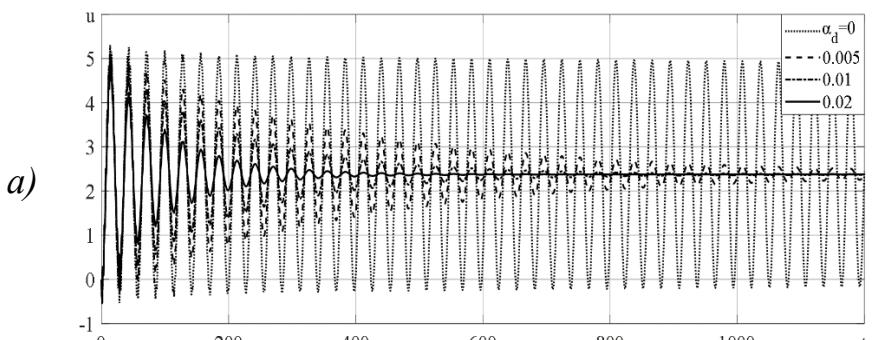


Рис. 17

а)



б)

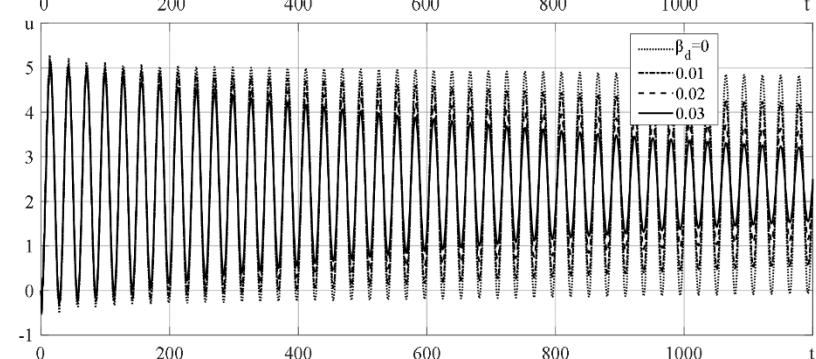


Рис. 18

чисельної схеми. В графіку декремента чисельної схеми при  $t < 300$  спостерігаються флюктуації, що пов'язані з пробігом товщинної хвилі; при  $t > 300$  товщинні коливання затухають і декремент є сталою величиною. У випадку альфа-демпфування високочастотні товщинні коливання затухають на інтервалі часу  $t < 300$ , так само, як і для недемпфованої системи. Далі декремент стає пропорційний до коефіцієнта демпфування. У випадку бета-демпфування ділянка нестационарних збурень обмежується  $t = 100$ , при  $t > 100$  декремент стає сталим. Робимо висновок, що при альфа-демпфуванні високочастотні товщинні коливання зникають переважно за рахунок в'язкості чисельної схеми, тоді як бета-демпфування спричиняє затухання цих коливань пропорційно до коефіцієнта  $\beta_d$ , що відповідає відомим закономірностям.

Залежність декрементів коливань від радіусу серединної поверхні п'єзоелемента проілюстрована на рис. 19. Зі зростанням розмірів і товщини стінки при альфа-демпфуванні (а) декременти збільшуються, при бета-демпфуванні (б) — зменшуються. Це пов'язано з тим, що при зростанні радіусу циліндра власна частота коливань його стінки зменшується, тобто рис. 19 відповідає частотній залежності логарифмічного декремента при сталому коефіцієнти демпфування.

Проведено дослідження генерації напруги в п'єзокерамічному циліндрі при механічному навантаженні. На рис. 20 наведено динамічні криві переміщень зовнішньої поверхні циліндра та згенерованої напруги з урахуванням альфа-демпфування. Розв'язок прямує до розв'язку статичної задачі (рис. 21), при чому максимальні переміщення вдвічі перевищують статичні значення. Описані вище властивості процесу затухання зберігаються.

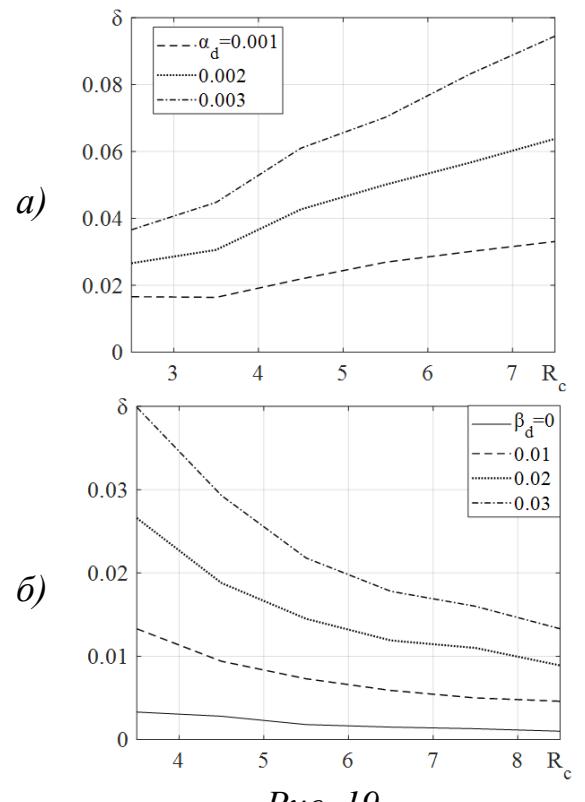


Рис. 19

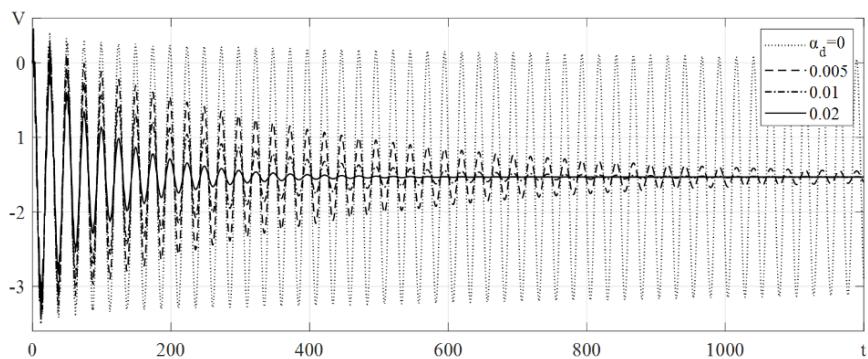


Рис. 20

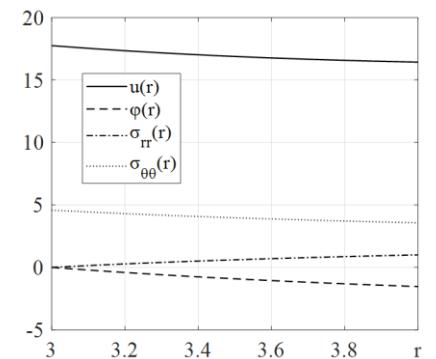


Рис. 21

Розглянемо коливання електров'язкопружних порожністіх циліндрів, які виготовлені з функціонально-неоднорідного матеріалу, що є композитом радіально поляризованої п'єзокераміки PZT-4 та полімеру PVDF. Враховуються введені в (15) механічні, електричні та п'єзоелектричні коефіцієнти демпфування. Закон зміни матеріальних характеристик, включаючи коефіцієнти демпфування,

приймемо у вигляді  $p(x) = p_1(1 - b(x)) + p_2b(x)$ , де індекс «1» відповідає п'єзокераміці; «2» — полімеру;  $b(x) = a_0 + b_0(x/h)^{k_0}$  — об'ємна частка полімеру;  $x = r - R_1$  — товщинна координата. Вплив коефіцієнта неоднорідності  $b_0$  на коливання функціонально-неоднорідних циліндрів при  $a_0 = 0$ ,  $k_0 = 2$  проілюстровано рис. 22. На рис. 23 наведено коливання зовнішньої поверхні циліндра з врахуванням дисипації енергії різної природи згідно до запропонованої чотирі параметричної моделі затухання. На рис. 24 досліджуються коливання п'єзоелектричної кулі з врахуванням затухання внаслідок бета-демпфування та при впливі акустичного середовища.

Робимо висновок, що п'єзоелектричні та діелектричні втрати в межах лінійної електров'язкопружності слабо впливають на коливання п'єзоелемента. Затухання

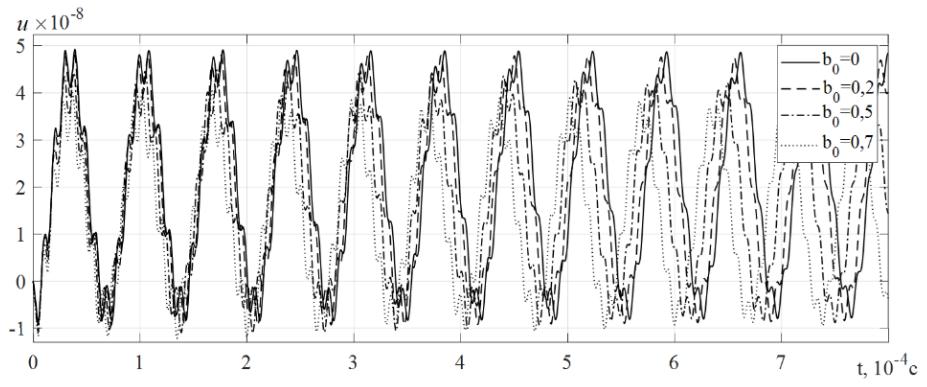


Рис. 22

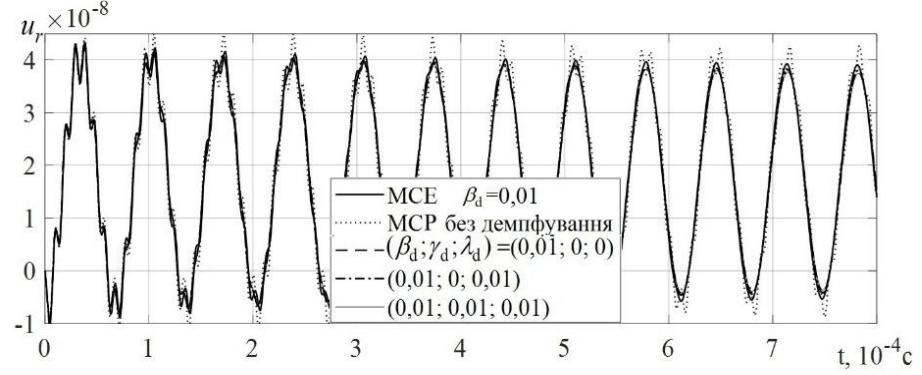


Рис. 23

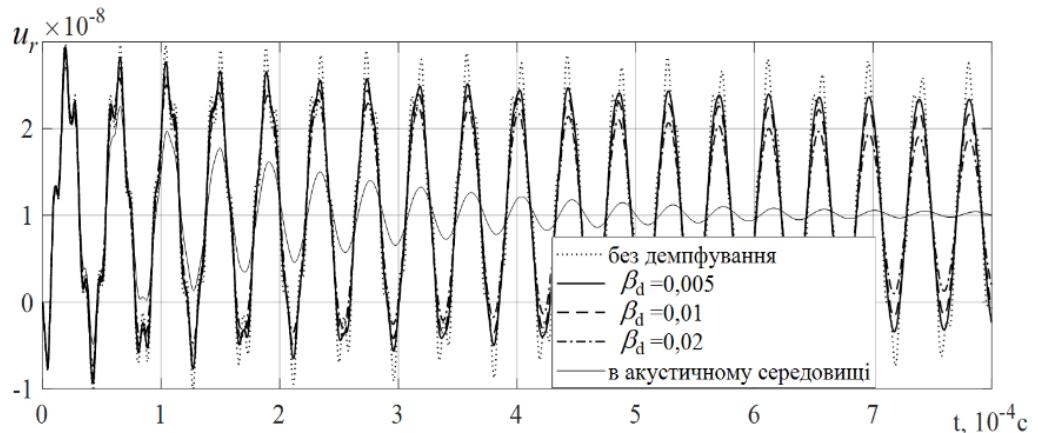


Рис. 24

в акустичному середовищі відбувається значно швидше, ніж внаслідок внутрішніх втрат.

*Планарні коливання поляризованих за товщиною п'єзокерамічних тонких круглих та кільцевих пластин досліджуються в припущені про лінійність розподілу електричного потенціалу за товщиною. Розглядається кільцева пластина  $R_0 \leq r \leq R_1$  товщиною  $h$  з електродованими площинами  $z = \pm h/2$  при електричному навантаженні різницею потенціалів  $V(t)$ , механічному планарному  $P_l(t)$  або осьовому навантаженні  $P_z(r,t)$ . Вважаємо, що пластина лежить на жорсткій основі, силою тертя між пластиною та основою нехтуємо. Розрахункові співвідношення*

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} - s_{13}^E (1 + \nu_E) \frac{\partial P_z}{\partial r}; \quad \sigma_r = \left[ \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{u_r}{r} \right) - s_{13}^E P_z + d_{31} \frac{U(t)}{h} \right] / s^*;$$

$$\sigma_\theta = \left[ \nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - s_{13}^E P_z + d_{31} \frac{U(t)}{h} \right] / s^*; \quad D_z = \frac{d_{13}}{s^*} \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \left( d_{33} - \frac{2d_{13}s_{13}}{s^*} \right) P(r,t) - \left( \varepsilon_{33}^T - \frac{2d_{13}^2}{s^*} \right) \frac{U(t)}{h},$$

де  $a = 1/\sqrt{s^* \rho}$ ;  $s^* = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E$ . Границі умови  $u_r(R_i, t) = Y_i$  або  $\sigma_r(R_i, t) = P_i$  ( $i = 0, 1$ ). Початкові умови  $u_r(r, t=0) = y_0(r)$ ;  $\dot{u}_r(r, t=0) = v_0(r)$ . Нормування:  $R = R_1$ ;  $\bar{R}R = r$ ;  $\bar{t} = ta/R$ ;  $\bar{u}_r R = u_r$ ;  $\bar{\sigma}_{r,\theta} = \sigma_{r,\theta} s_{11}^E (1 - \nu_E^2)$ ;  $\bar{V}(t) = d_{13} V(t)/h$ . При механічних навантаженнях на електродованих поверхнях  $A^\pm = \pi(R_1^2 - R_0^2)$  ЕПС визначається з граничної умови при розімкнутих електродах

$$U(t) = \frac{h}{(1 - k_p^2) A^\pm} \left[ \frac{\pi k_p^2}{d_{13}} (R_1 u_r(R_1, t) - R_0 u_r(R_0, t)) + \frac{1}{\varepsilon_{33}^T} \left( d_{33} - \frac{2d_{13}s_{13}}{s^*} \right) \int_A P_z(r, t) dA \right].$$

Для побудови чисельної схеми записується рівняння руху в різницевій формі та визначаються контурні значення переміщень з застосуванням односторонніх різницевих виразів для похідних.

На рис. 25 наведено коливання поверхні  $r = R_1$  пластини при електричному збуренні. Матеріал пластини – п'єзокераміка ЦТС-19,  $h/R = 1/25$ . Контури пластини вільні від навантажень. Збурення  $V(t) = V_0 H(t)$ . Електрорушійна сила, що виникає на розімкнутих електродах при планарному навантаженні  $P_0(t) = 0$ ;

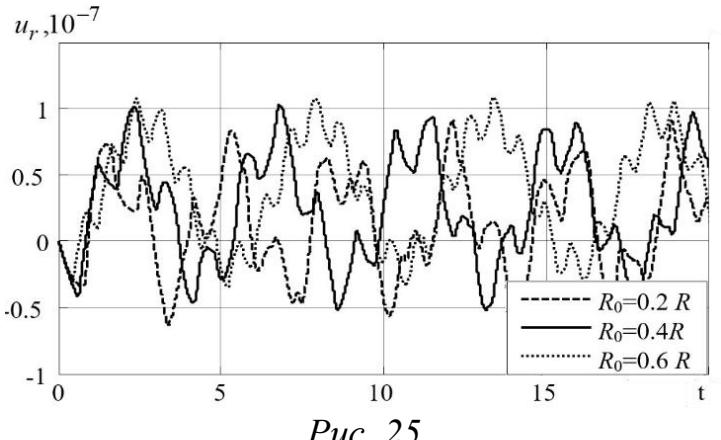
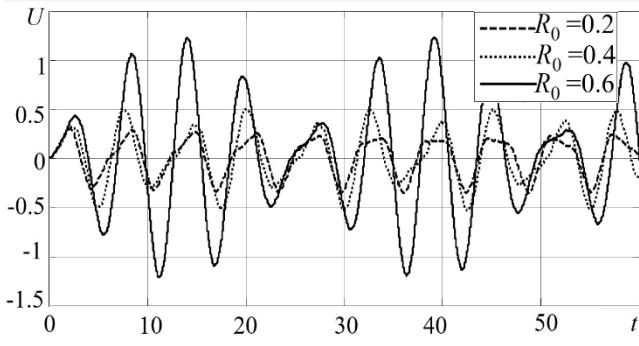
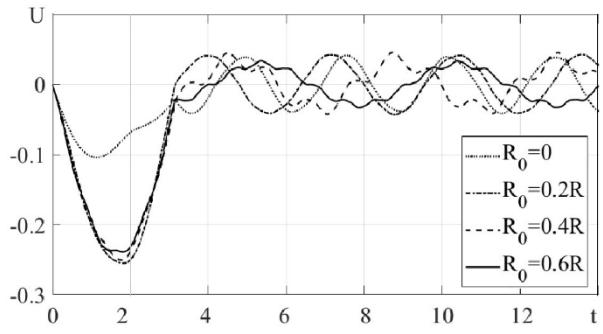


Рис. 25

$P_1(t) = P \sin \omega t$ ;  $\omega = 1$ , наведена на рис. 26. ЕПС при осьовому навантаженні  $P_z(t)$  у формі півхвилі синусоїди проілюстровано на рис. 27.



Rис. 26



Rис. 27

Розроблений підхід дає можливість прогнозувати реакцію п'єзоелемента на довільне нестационарне навантаження, досліджувати повний динамічний електро-механічний стан, оптимізувати форму пластиини для отримання максимального відгуку при конкретному способі збурення коливань.

В п'ятому розділі розвивається підхід до чисельного моделювання п'єзоелектричних неоднорідних перетворювачів складної форми при динамічних навантаженнях з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу методом скінченних елементів (МСЕ). В МСЕ в задачах електропружності прийнято вводити узагальнені вектори, що складаються з компонент механічного та електричного поля:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T; \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, D_1, D_2, D_3\}^T; \quad \bar{\mathbf{p}} = \{p_1, p_2, p_3, -q_s\}^T. \end{aligned} \quad (25)$$

Матеріальні співвідношення через узагальнені вектори (25) мають вигляд  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , де  $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^T & \mathbf{e}^S \end{bmatrix}$  — узагальнена матриця матеріальних характеристик.

Функціонал Гамільтона-Остроградського з врахуванням дисипації енергії записується тотожно до функціонала для механічних систем:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^k L^j dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^k \left[ \int_{\Omega^j} \frac{1}{2} \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\bar{\mathbf{u}}}^T \mathbf{p} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \int_0^t \Phi_p^* \Big|_{t=\tau} d\tau \right) d\Omega - \int_{S^j} (\bar{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{p}}) dS \right] dt,$$

де  $\Phi_p^*(t)$  — дисипативна функція. Задача знаходження нуля першої варіації лагранжіана  $\delta L^j$  для  $j$ -го скінченного елемента зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь за часом ( $n_j$  — кількість вузлових точок в  $j$ -му елементі)  $\partial L^j / \partial U_j^k = 0$  ( $k = 1 \dots 4n_j$ ), яка у матричній формі записується як

$$\mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{U}}_j + \mathbf{C}_j \dot{\mathbf{U}}_j + \mathbf{K}_j \mathbf{U}_j = \mathbf{F}_j. \quad (26)$$

Елементна матриця демпфування  $\mathbf{C}_j$  формується згідно до демпфування за Релеєм  $\mathbf{C}_j = \alpha_d \mathbf{M}_j + \beta_d \mathbf{K}_j$ , коефіцієнти якої визначаються за (3). Ансамбльована система (26) для п'єзоелектричних тіл може бути записана у вигляді

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u & [0] \\ [0] & -\mathbf{C}_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ (\mathbf{K}_{u\varphi})^T & -\mathbf{K}_\varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\varphi \end{Bmatrix}.$$

При стаціонарних коливаннях компоненти матриці  $\mathbf{C}_u$  мають комплексний множник і можуть трактуватися як уявна частина комплексних модулів. Для матеріалів, для яких відомі комплексні модулі, задаємо матрицю тангенсів механічних втрат.  $\mathbf{C}_\varphi$  формується з тангенсів діелектричних втрат. На даний момент в існуючих програмних комплексах врахування п'єзоелектричних втрат та діелектричних втрат в нестаціонарному режимі не реалізовано. Провідність п'єзоелемента визначається через заряд на електродах та прикладену різницю потенціалів  $Y = \frac{I}{\Delta V} = \frac{I^a}{V^a} = \frac{i\omega Q^a}{V^a}$ . В модальному аналізі резонансні частоти  $f_r$  знаходимо при короткозамкнутих електродах, антирезонансні частоти  $f_a$  — на розімкнутих електродах. Відповідний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ)  $k_d = \sqrt{(f_a^2 - f_r^2)} / f_a$ .

Розв'язання задач електров'язкопружності в МСЕ вимагає коректного введення матриць пружних, п'єзоелектричних та діелектричних характеристик, матриць тангенсів пружних втрат, тангенса діелектричних втрат, підключення відповідного типу скінченних елементів з відповідними опціями, узгодження елементної системи координат з напрямком поляризації, створення еквіпотенціальних поверхонь, що моделюють електродування, та задання відповідних граничних умов. Для реалізації неоднорідності матеріалу геометрична модель розбивається на  $M$  частин, дляожної з яких в циклі створюється окремий матеріал в відповідними характеристиками. Тип динамічності задачі задається вибором розв'язувальної підпрограми за допомогою оператора \*if.

Запропонований підхід застосовується до динамічного аналізу функціонально-неоднорідного секціонованого циліндра. Секції циліндра зустрічно поляризовані в коловому напрямку. Матеріал — функціонально-неоднорідна п'єзокераміка на основі PZT-5A. Зовнішні радіуси  $R_1 = 3 \text{ см}$ ,  $R_2 = 5 \text{ см}$ , висота  $2H = 10 \text{ см}$ . Внаслідок симетрії розглядається лише верхня частина п'єзоелемента. Матеріальні характеристики пропорційні до функції  $b(\theta) = 0,8 + 0,4N\theta/2\pi$ ,  $\theta \in [0, 2\pi/N]$ .

На рис. 28 наведено розподіл радіальних (а) та поздовжніх (б) переміщень в описаному циліндрі при статичному навантаженні.

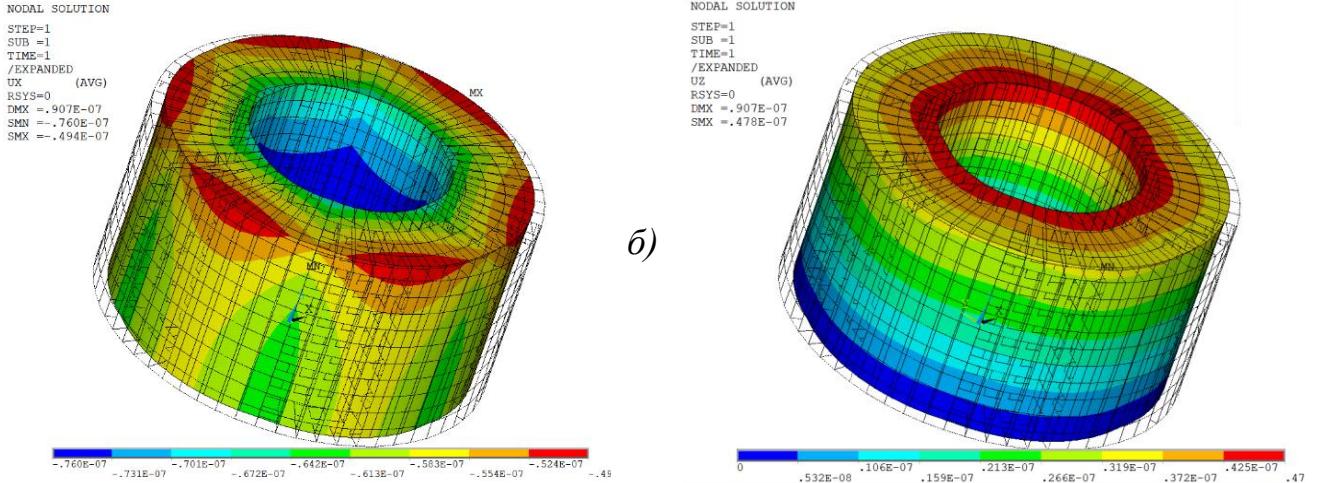


Рис. 28

При модальному аналізі знаходимо резонансні

$$f_r = \{10085; 11536; 17031; 23259; 30323; 32642; 37652; 39242; 42936...\} \text{ Гц}$$

та антирезонансні частоти

$$f_a = \{11253; 13656; 17745; 23260; 30376; 32687; 37655; 39242; 42937...\} \text{ Гц}.$$

КЕМЗ визначається для першого резонансу:  $k_d = 0,4950$ .

При гармонічному аналізі розглядається вузький частотний діапазон 8–18 кГц, що містить перші три резонансні частоти. На рис. 29 наведено АЧХ радіальних (а) та поздовжніх (б) переміщень для однорідного та функціонально-неоднорідного циліндра з врахуванням демпфування за Релеєм.

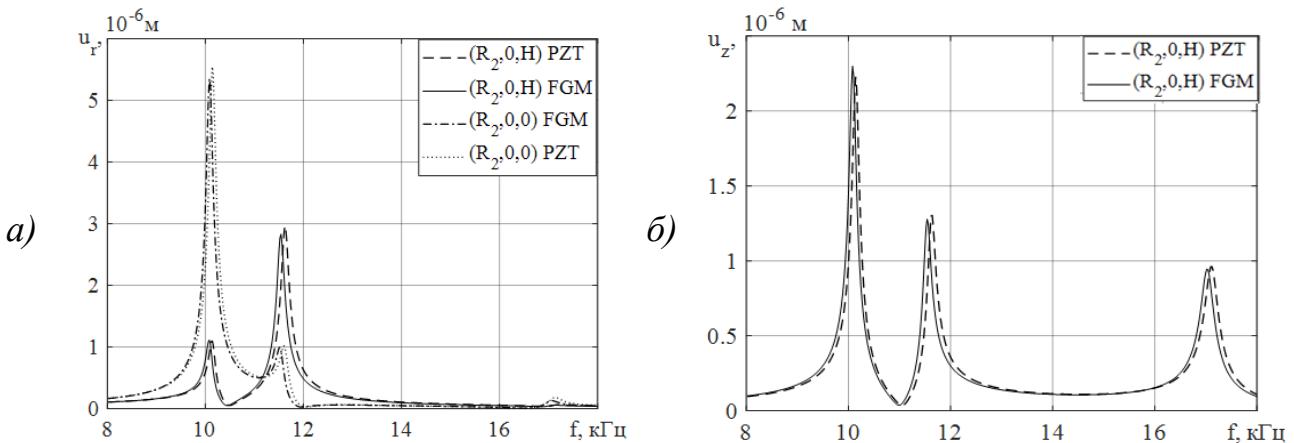


Рис. 29

На рис. 30 порівнюються різні способи врахування затухання коливань. Спостерігається практично повне співпадіння кривих альфа-, бета- демпфування, демпфування за Релеєм та частотно незалежного демпфування на другому резонансі. З врахуванням комплексних модулів маємо відхилення між результатами в 12%. Врахування тангенса діелектричних втрат на кривих майже не відобразилося. На рис. 31 наводяться АЧХ провідності  $Y$ , її фазового кута та логарифму. Екстремуми кривих відповідають резонансним та антирезонансним частотам.

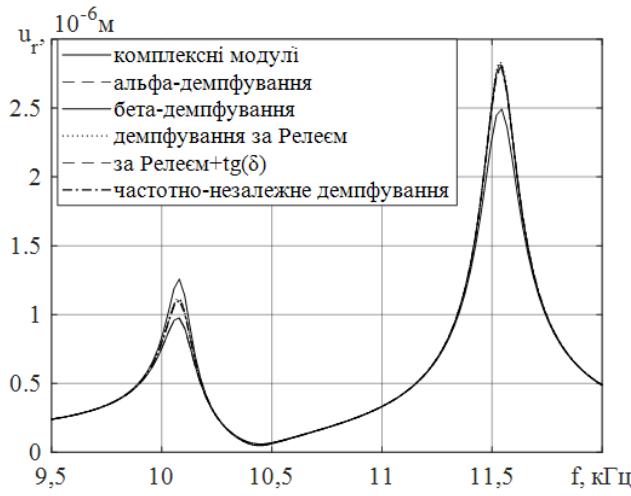


Рис. 30

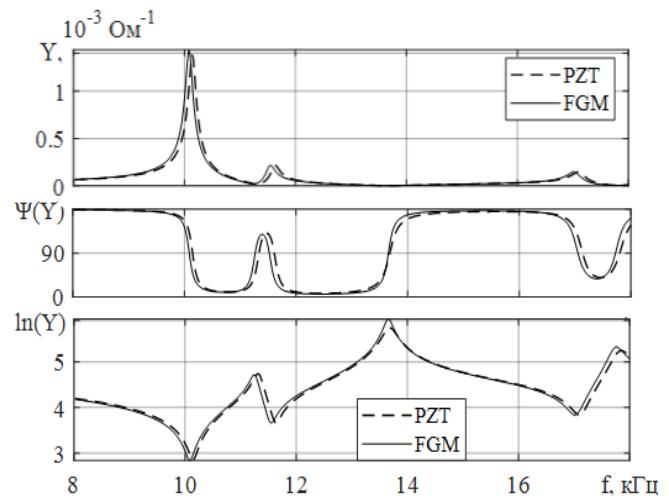


Рис. 31

Аналіз реакції п'єзоелемента на нестационарне навантаження проведено на прикладі навантаження типу Гевісайда. На рис. 32 недемпfovаний аналіз порівнюється з результатами, отриманими з врахуванням демпфування за Релеєм. Амплітуди коливань описуються немонотонними кривими, що ускладнюють визначення параметрів затухання, але амплітудна залежність чітко прослідковується.

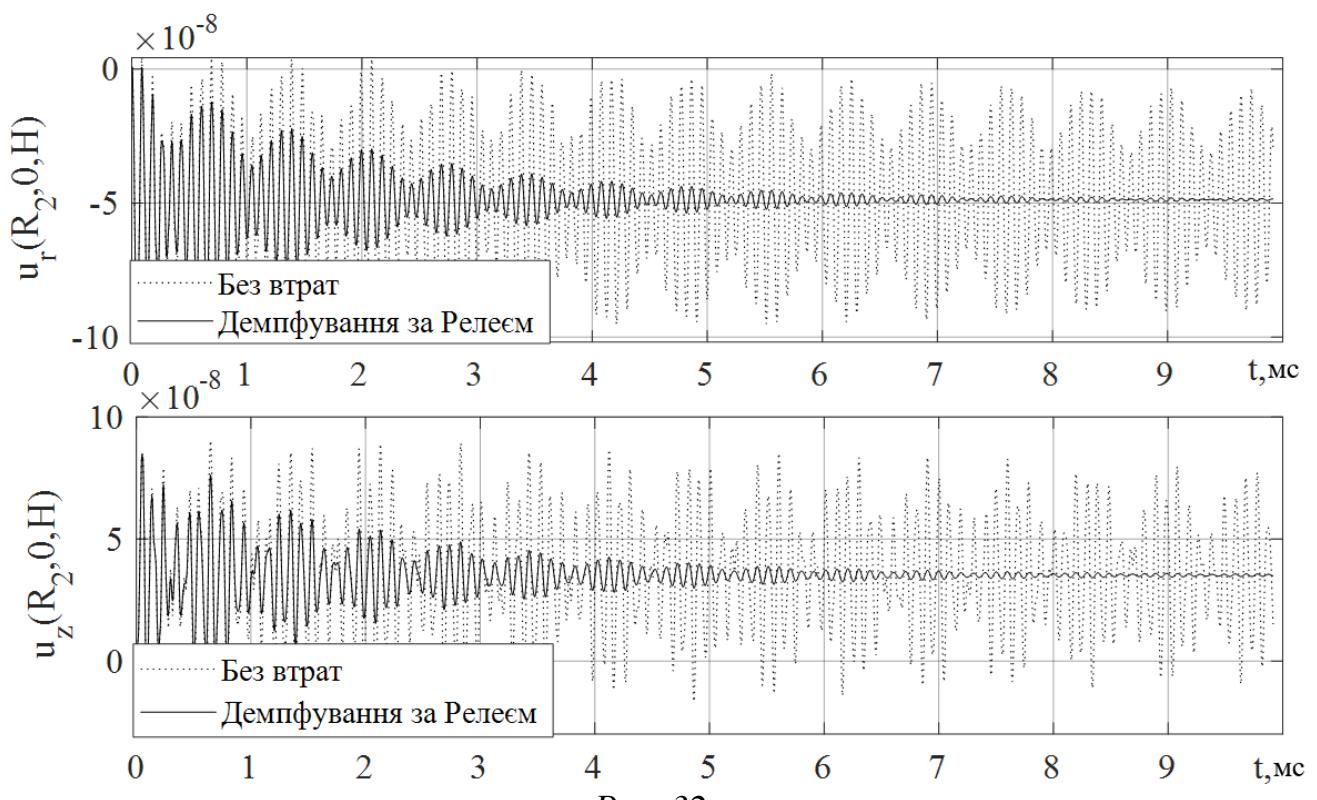


Рис. 32

Розвинутий підхід дає можливість досліджувати реакцію п'єзоелементів складної форми на динамічне навантаження, визначати основні електромеханічні характеристики п'єзоелементів (резонансні частоти, КЕМЗ), оптимізувати форму та умови закріплення елемента та прогнозувати його поведінку при незапланованих режимах навантаження.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної наукової проблеми, що полягає в побудові ефективних чисельних підходів до дослідження усталених та перехідних процесів деформування неоднорідних електров'язкопружних конструктивних елементів, апробації цих підходів на низці конкретних модельних прикладів, аналізі результатів і виявленні особливостей динамічної поведінки таких елементів, у тому числі в режимі генерації напруги та з урахуванням взаємодії з акустичним середовищем. Проведено дослідження коливань електромеханічних перетворювачів однорідної, композитної, багатошарової та функціонально-неоднорідної структури плоскої, циліндричної та сферичної форм при електричних та механічних навантаженнях. Для п'єзоелементів складної форми розроблено підхід до моделювання неоднорідних електромеханічних та дисипативних властивостей матеріалу на основі методу скінченних елементів.

Основні результати дисертації полягають у наступному:

- На основі співвідношень теорії електропружності, механіки спадкового середовища, реологічних співвідношень, механіки композитів, акустики та ін. дано постановки нового класу динамічних задач електров'язкопружності, що враховують неоднорідність матеріалу п'єзоелектрика, його дисипативні властивості та вплив акустичного середовища.
- У межах моногармонічного наближення розвинуто варіаційно-сплайновий метод розв'язання динамічних задач електропружності з застосуванням сплайн-апроксимацій та варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Також реалізовано підхід до дослідження гармонічних коливань п'єзоелектричних циліндрів на основі гамільтонового формалізму. Виконано чисельну реалізацію розвинутих підходів за допомогою методу дискретної ортогоналізації. Розвинуті підходи адаптовано до розрахунку віссесиметричних коливань однорідних та композитних циліндрів.
- Систематизовано підходи до врахування дисипативних характеристик матеріалу за допомогою комплексних модулів, частотно-незалежного демпфування, демпфування за Релеєм, врахування діелектричних та п'єзоелектричних втрат, що випливають із залежностей механіки спадкового середовища для п'єзоелектриків. Запропоновано та досліджено нову чотирипараметричну модель врахування дисипативних властивостей матеріалів для електров'язкопружних тіл при нестационарних навантаженнях. Розвинуто підхід до оцінки дисипативних характеристик п'єзоелемента на основі розвинутих чисельних методик та теорії коливань дисипативних систем.
- Розроблено узагальнений чисельний метод дослідження нестационарних пульсуючих коливань однорідних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементів плоскої, циліндричної та сферичної форм з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу на основі скінченно-різницевих виразів другого порядку точності та запропонованої чотирипараметричної моделі дисипації енергії. В

межах запропонованого підходу розвинуто спосіб визначення електрорушійної сили п'єзоелементів при механічних нестационарних навантаженнях.

- Запропоновано підхід до аналізу динаміки функціонально-неоднорідних та багатошарових п'єзоелементів складної форми за допомогою методу скінченних елементів з врахуванням дисипації енергії. При модальному аналізі розвинутого підходу визначаються основні електромеханічні характеристики п'єзоелементів (резонансні та антирезонансні частоти, КЕМЗ), при демпфованому гармонічному аналізі — амплітудні значення переміщень та дисипативні характеристики п'єзоелемента, при нестационарному аналізі — логарифмічний декремент та час затухання коливань для п'єзоелемента.

Таким чином, у роботі створено методику розрахунку динамічних процесів в електров'язкопружних тілах, що включає: постановку динамічних задач електров'язкопружності для неоднорідних тіл; розробку прямих чисельних методів дослідження усталених та нестационарних коливань; розв'язок окремих задач динамічного деформування та генерації напруги п'єзоелектричними елементами, в тому числі з врахуванням впливу акустичного середовища; розширення класів розв'язаних задач на випадок функціонально-неоднорідних електров'язкопружних тіл складної форми.

- Виконані чисельні експерименти і аналіз отриманих результатів дозволили виявити низку особливостей динамічної електромеханічної поведінки неоднорідних електров'язкопружних елементів конструкцій. Виявлені фізичні ефекти поширення збурень можуть бути використані для ефективних інженерних рішень при проєктуванні та підборі режиму експлуатації п'єзоелектричних перетворювачів. Зазначені висновки прикладного характеру можуть бути сформовані наступним чином:

- Розвинуто методику дослідження динамічних процесів в композитних, багатошарових та функціонально-неоднорідних п'єзоелементах дозволяє прогнозувати їх реакцію на електричні та механічні збурення, що дає змогу суттєво підвищити ефективність електромеханічних процесів та розширити область практичного застосування проєктованих пристройів.

- Отримана методика чисельного моделювання дозволяє коригувати комбінацію активних п'єзокерамічних та пасивних в'язкопружних матеріалів для оптимізації електромеханічного відгуку п'єзоелемента, узгодження хвильового опору середовища з опором акустичного середовища, забезпечення пасивного демпфування коливань. Оптимізація елементів конструкції з шаруватих п'єзоелектричних композитів за резонансною частотою, відгуком, електромеханічною чутливістю, дисипативними властивостями може бути реалізована шляхом зміни частки п'єзокераміки в композиті.

- Врахування дисипативних властивостей матеріалів при моделюванні переходних процесів в неоднорідних п'єзоелементах можливе за новою чотирипараметричною моделлю електров'язкопружності.

- В межах лінійної моделі електров'язкопружності, що спирається на теорію спадкових середовищ або розширену модель Кельвіна-Фойгта, впливом діелектричних та п'єзоелектричних втрат можна нехтувати. Вплив рідкого акустичного середовища на демпфування коливань значно вищий, ніж затухання коливань через механічні втрати.
- Встановлена залежність логарифмічного декремента коливань та інших дисипативних характеристик п'єзоелемента від коефіцієнтів демпфування, форми та розмірів п'єзоелемента може бути використана для прогнозування його поведінки при нестационарних процесах.
- В розвинутій методиці на основі МСР п'єзоелектричні функціонально-неноднорідні матеріали моделюються як матеріали з неперевно-диференційованими характеристиками. В МСЕ вони задаються як шаруватий матеріал з дискретною зміною характеристик. Запропоновані підходи демонструють хорошу збіжність результатів.

Отримані результати можуть бути використані для модернізації існуючих та проектування нових однорідних та неоднорідних п'єзоперетворювачів. Розвинута методика є корисною при виборі матеріалів та їх комбінацій для п'єзоелектричних елементів конструкцій з метою задоволення необхідним експлуатаційним показникам; при оптимізації геометричних параметрів п'єзоелемента, їх умов навантаження і закріplення для максимального ефективного перетворення енергії; визначенням конфігурації згенерованого електричного сигналу при механічних навантаженнях; врахуванні дисипативних процесів для коректного моделювання та керування коливаннями п'єзоелемента.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Гармонічні коливання п'єзокерамічних секціонованих функціонально-градієнтних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Mech. Adv. Technol.* 2024. Т. 8, № 1. С. 98–107.
2. Yanchevskyi I. V., Hryhorieva L. O. Nonstationary Vibrations of a Viscoelastic Functionally Graded Cylinder. *International Applied Mechanics.* 2023. Vol. 59. P. 708–717. (Scopus)
3. Григор'єва Л. О., Янчевський І. В. Нестационарні коливання п'єзо-електричних перетворювачів з функціонально-градієнтних матеріалів. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій.* 2022. № 35. С. 29–41.
4. Grigoryeva L., Ivanenko P., Korbakov O. Generation of energy in console piezoelectric energy harvesters. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 108. P. 337–348. (Web of Science)
5. Hryhorieva L., Yanchevskyi I. Influence of material functional heterogeneity on non-stationary oscillations of piezoceramic bodies. *Strength of Materials and Theory of Structures.* 2022. No. 109. P. 359–368. (Web of Science)

6. Григор'єва Л. О., Безверхий О. І. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндрів з врахуванням дисипації енергії. *Проблеми обчислюваної механіки та міцності конструкцій*. 2020. № 31. С. 44–54.
7. Grigoryeva L.O. Transient responses in piezoceramic multilayer actuators taking into account external viscoelastic layer. *Strength of materials and theory of structures*. 2020. No. 105. P. 255–266. (Web of Science)
8. Bezverkhyi O. I., Grigoryeva L. O. Comparative analysis of two methods used for the investigation of harmonic vibrations of piezoceramic cylinders. *Journal of mathematical sciences*. 2019. Vol. 240, no. 2. P. 129–140. (Scopus, Q3)
9. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Підхід до розрахунку гармонічних коливань електропружних циліндрів. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2018. Т. 23, № 1. С. 39–45.
10. Grigoryeva L. O. Calculation of Cylindrical Multilayer Electromechanical Transducer at Different Polarization Types in Non-stationary Modes. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2018. Vol. 54, no. 1. P. 5–11.
11. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Варіаційно-сплайнний метод в задачах дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2017. № 98. С. 149–161. (Web of Science)
12. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Електромеханічна чутливість круглих та кільцевих п'єзоелектричних тонких пластин при механічному збуренні. *Мікросистеми, електроніка та акустика*. 2017. Т. 22, № 5. С. 40–46.
13. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Застосування гамільтонового формалізму для дослідження гармонічних коливань п'єзокерамічних циліндрів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. 2017. Т. 38, № 2. С. 23–28.
14. Григор'єва Л. О. Нестаціонарні коливання плоского багатошарового п'єзоелемента з урахуванням пружного підкріплюючого шару і акустичного середовища. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 103–109.
15. Bezverhyi O. I., Grigoryeva L. O., Grigoryev S. A. Resonance radial oscillations of a piezoceramic cylinders and spheres taking into account electromechanical losses // *Вісник Тернопільського національного технічного університету*. 2016. Vol. 81, no. 1. P. 41–48.
16. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Метод дослідження осесиметричних коливань п'єзокерамічних тіл. *Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій*. 2015. № 24. С. 5–17.
17. Григор'єва Л. О., Кириченко А. А., Бабкова Н. О. Визначення електрорушійної сили поляризованої по товщині кільцевої пластини при механічному збуренні. *Опір матеріалів і теорія споруд*. 2014. № 93. С. 47–55.

18. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Babkova N. O. Electrically Excited Nonstationary Vibrations of Thin Circular Piezoelectric Plates. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 406–411. (Scopus, Q2)
19. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kirichenko A. A. Nonstationary Electro-elastic Vibrations of a Spherical Shell with Impedance Boundary Conditions. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, no. 3. P. 274–280. (Scopus, Q2)
20. Шульга Н. А., Григорьева Л. О., Ластивка И. О., Бабкова Н. О. Численный анализ нестационарных колебаний круглых пьезоэлектрических пластин. *Теоретич. и прикладная механика*. 2011. Т. 48, № 2. С. 98–104.
21. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O. Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 2. P. 177–185. (Scopus, Q3)
22. Shulga M. O., Grigoryeva L. O. Electromechanical unstationary thickness vibrations of piezoceramic transformers at electric excitation. *Mechanical vibrations: types, testing, and analysis*. N.Y, 2011. P. 179–204. (Scopus)
23. Shul'ga N. A., Grigor'eva L. O., Kornienko V. F. Harmonic thickness vibrations of inhomogeneous elastic layers with curved boundaries. *International Applied Mechanics*. 2011. Vol. 47, no. 1. P. 62–69. (Scopus, Q3)
24. Шульга М. О., Григор'єва Л. О. Про коливання пружних шарів з викривленими границями. Опір матеріалів і теорія споруд. 2010. № 84. С. 120–126.
25. Григор'єва Л. О. Усталені коливання електров'язкопружного композитного циліндра. *Міжнародна наукова конференція «Механіка: сучасність і перспективи – 2024»: Матеріали доп.*, м. Київ, 8–10 жовт. 2024 р. 2024. С. 24–26.
26. Григор'єва Л. О. М'яка та тверда п'єзокераміка в функціонально-градієнтних п'єзокерамічних перетворювачах. *XIX міжнародна науково-технічна конференція «Вібрації в техніці та технологіях»: Матеріали конф.*, м. Київ, 23–25 трав. 2023 р. Київ, 2023. С. 30–32.
27. Янчевський I. B., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних коливань електров'язкопружних функціонально-градієнтних тіл. *Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми механіки»*, м. Київ. Київ, 2023. С. 123-124.
28. Hryhorieva L. O. CAE Simulation of console piezoelectric energy harvesters. *Modern directions of scientific research development: Proceedings of the 15th International scientific and practical conference, Chicago*. Chicago, 2022. С. 148–153.
29. Григор'єва Л. О. Узагальнений підхід до розрахунку нестационарних коливань багатошарових п'єзокерамічних перетворювачів. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2021» : матеріали конф.*, м. Дніпро, Кам'янське. Дніпро, 2021. С. 20–21.
30. Grigoryeva L. O. Piezoelectric devices for Energy harvesting in building structures. *VI International Scientific and Practical Conference «Transfer of Innovative technologies – 2021»: Conference proceedings*. Kyiv, 2021. P. 22–24.

31. Grigoryeva L. O. Vibrations of Piezoceramic Multilayer Actuators with Elastic Matching Layers. *International scientific-practical conference «International scientific integration – 2020»: Conference proceedings, 9–10 November 2020*. Kyiv, 2020. Р. 58–62.
32. Григор'єва Л. О. Резонансні коливання п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів з врахуванням втрат енергії. *Матеріали IV Міжнародної науково–практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки».*, м. Одеса. Одеса, 2019. С. 345–348.
33. Grigoryeva L. O. Piezoelectric multilayer actuators in acoustic control devices for building structures. BMC-2018: *International Scientific-Practical Conference of young scientists «Build-Master-Class-2018»*, Kyiv, November 2018. Р. 198–199.
34. Григор'єва Л. О. Поширення нестационарних збурень в багатошаровому п'єзокерамічному циліндрі при електричному навантаженні. *Тези доповідей IV Міжнародної науково–практичної конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки»*. Одеса, 2017. С. 185–186.
35. Grigoryeva L. O. Numerical investigation method of vibrations of piezoceramic transformers. *Матеріали XVIII Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 7–10 жовтня 2017 року*. Т. 1. Київ, 2017. Р. 87–90.
36. Григор'єва Л. О. Застосування варіаційних принципів та сплайн апроксимацій при вивченні товщинних нестационарних коливань п'єзокерамічних тіл. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2016» : матеріали конф.* Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ, 2016. С. 48.
37. Безверхий А. І., Григор'єва Л. О. Нестационарные электроупругие колебания сферического пьезокерамического преобразователя с импедансными граничными условиями. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2015» : матеріали конф.*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. 2015.
38. Безверхий О. І., Григор'єва Л. О. Дослідження нестационарних електропружиних коливань п'єзокерамічної кулі в акустичному середовищі. *Акустичний симпозіум «Консонанс – 2015»*, м. Київ. Київ, 2015. С. 20–25.
39. Григор'єва Л. О. Нестационарні коливання п'єзокерамічних кільцевих пластин при електричних та механічних збуреннях. *Міжнар. наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки – 2014» : матеріали конф.*, м. Дніпропетровськ; Дніпродзержинськ. 2014.

## АНОТАЦІЯ

**Григор'єва Л. О. Чисельне моделювання динамічних процесів в п'єзоелектричних тілах з урахуванням дисипативних властивостей та неоднорідності матеріалу.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ, 2025.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної наукової проблеми створення ефективної чисельної методики дослідження динамічного електромеханічного стану однорідних та неоднорідних п'єзоелектричних елементів конструкції з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу. Досліджуються нестационарні та усталені коливання п'єзоелектричних тіл однорідної, багатошарової та функціонально-неоднорідної структури плоскої, циліндричної та сферичної форм.

На базі запропонованої математичної моделі усталених та нестационарних коливань п'єзокерамічних елементів канонічних форм розвинуто ефективні чисельні підходи на основі методу скінчених різниць, варіаційно-сплайнового методу, методу скінчених елементів, гамільтонового формалізму та ін. Для врахування впливу акустичного середовища на коливання п'єзоелемента розглядається задача гідропружності в просторі перетворень за Лапласом. Для розв'язання отриманих крайових та початково-крайових задач використовувалися метод дискретної ортогоналізації, явна чисельна схема, метод Ньюмарка, метод Рунге-Кутта та ін. За допомогою розвинутих підходів досліджуються усталені коливання електров'язкопружних однорідних та композитних циліндрів скінченної довжини; переходні процеси в багатошарових та функціонально-неоднорідних поляризованих за товщиною плоских тілах, порожнистих циліндрах та кулях; планарні нестационарні коливання круглих та кільцевих п'єзокерамічних поляризованих за товщиною пластин при електричних та механічних навантаженнях; власні, вимушенні та нестационарні коливання функціонально-неоднорідних тіл у тривимірній постановці.

Отримані результати можуть бути використані для модернізації існуючих та проектування нових однорідних та неоднорідних п'єзоперетворювачів. Розвинута методика є корисною при виборі матеріалів та їх комбінацій для п'єзоелектричних елементів конструкцій з метою задоволення необхідним експлуатаційним показниками; при оптимізації геометричних параметрів п'єзоелемента, їх умов навантаження і закріplення для максимально ефективного перетворення енергії; врахуванні дисипативних процесів для коректного моделювання та керування коливаннями п'єзоелемента.

**Ключові слова:** електров'язкопружність, динамічний електромеханічний стан, демпфування коливань, дисипативні властивості матеріалу, п'єзоелектричні функціонально-неоднорідні матеріали, електрорушійна сила.

## SUMMARY

**Hryhorieva L. O. Numerical modeling of dynamic processes in piezoelectric bodies taking into account dissipative properties and inhomogeneity of the material.**  
– Manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences in the specialty 01.02.04 – Mechanics of Deformable Solids. – S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

The dissertation is devoted to solving of the current scientific problem of creating an effective numerical methodology for studying the dynamic electromechanical state of homogeneous and inhomogeneous piezoelectric structural elements taking into account the dissipative properties of the material. Work considers the problems of non-stationary and steady oscillations of piezoviscoelectric homogeneous, multilayer and functionally gradient bodies. Mathematical models of steady and non-stationary oscillations of electroviscoelastic composite materials of multilayer and functionally inhomogeneous structures are constructed. On the basis of proposed models effective numerical approaches based on finite differences, the variational spline method, the finite element method, the Hamiltonian formalism, etc. were developed for piezoceramic elements of canonical forms. To solve the obtained boundary and initial-boundary problems, the method of discrete orthogonalization, an explicit numerical scheme, the Newmark method, the Runge-Kutta method, etc. were used.

To study steady axisymmetric oscillations of homogeneous and composite piezoelectric bodies, a variational spline method and an approach based on the Hamiltonian formalism have been developed. Obtained boundary value problems are solved using discrete orthogonalization method. The implementation and comparison of the dissipative characteristics of the material using complex modules, frequency-independent damping, and Rayleigh damping were carried out. The developed approaches were adapted to the study of harmonic oscillations of piezoelectric and composite piezoelectric cylinders of limited length.

The generalized numerical method for studying pulsating oscillations of functionally inhomogeneous bodies of flat, cylindrical and spherical shape under non-stationary loads, taking into account the influence of the acoustic environment, has been developed and implemented. To take into account the influence of the acoustic environment on the oscillations of the piezoelectric element, the acoustic equations are solved in the space of Laplace transforms with the sequential exclusion of the acoustic field variables from the boundary conditions on the surface of the actuator. To take into account the dissipative properties, a four-parameter model of electroviscoelasticity has been proposed and explored. There were described transient processes in multilayer and functionally inhomogeneous thickness-polarized flat bodies, hollow cylinders and spheres; planar non-stationary oscillations of round and annular thickness-polarized piezoceramic plates under electrical and mechanical loads.

The numerical approach to studying natural, steady, and nonstationary oscillations of piezoelectric functionally inhomogeneous bodies using the finite element method is developed. The influence of functional inhomogeneity and energy dissipation on dynamic processes in piezoceramic inhomogeneous sectioned cylinders of finite length made of hard and soft piezoceramics is studied. In the case of harmonic oscillations, the dissipative characteristics of the resonance curves are determined taking into account Rayleigh damping, frequency-independent damping, and complex moduli. In the case of non-stationary disturbances, the damping of oscillations is investigated in inhomogeneous high-quality and low-quality piezoceramics taking into account the Rayleigh damping.

The main scientific results are as follows:

- The new class of electroviscoelasticity problems is formulated, which takes into account the heterogeneity of the piezoelectric material, its dissipative properties and the influence of the acoustic environment based on the theory of electroelasticity, mechanics of the hereditary medium, rheological relations, mechanics of composites, and hydroelasticity in the acoustic approximation.
- Within the framework of the monoharmonic approximation, approaches to solving dynamic electroelasticity problems based on the variational spline method and Hamiltonian formalism have been developed. The developed approaches have been numerically implemented using the discrete orthogonalization method. The developed approaches have been adapted to the calculation of harmonic axisymmetric vibrations of homogeneous and composite electroviscoelastic bodies.
- The new generalized numerical approach has been developed for the study of non-stationary pulsating oscillations of homogeneous, multilayer and functionally inhomogeneous piezoelectric elements of flat, cylindrical and spherical shapes, taking into account mechanical, piezoelectric and dielectric energy losses. A method for determining the electromotive force of piezoelectric elements under mechanical non-stationary loads has been developed.
- The comparison and systematization of approaches to taking into account the dissipative material characteristics using complex modules, frequency-independent damping, Rayleigh damping, dielectric and piezoelectric loss tangents under steady oscillations have been carried out. A four-parameter model of electroviscoelasticity under non-stationary loads has been proposed and investigated.
- The method for analyzing free, harmonic, and nonstationary oscillations of electroviscoelastic functionally inhomogeneous piezoelectric elements of complex shape using the finite element method is proposed. The effectiveness of this approach has been tested on the problems of studying the electromechanical state of sectioned cylinders.

**Keywords:** electroviscoelasticity, dynamic electromechanical state, damping of vibrations, material dissipative properties, piezoelectric functional-inhomogeneous materials, electromotive force.