

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА**

Юрчук Василь Миколайович



УДК 539.3

**СЦЕНАРІЙ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ РІЗНИХ ПОЧАТКОВИХ ПРОФІЛІВ В
МАТЕРІАЛАХ, ЯКІ ДЕФОРМУЮТЬСЯ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНО**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

РЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2025

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана у відділі реології Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Науковий консультант: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико - математичних наук, професор
Рущицький Ярема Ярославович,
завідувач відділу реології Інституту механіки
ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Офіційні опоненти: член Академії наук вищої школи України,
доктор технічних наук, професор
Лимарченко Олег Степанович,
завідувач кафедри комп'ютерних методів механіки і процесів
керування механіко-математичного факультету Київського
національного університету ім. Тараса Шевченка

доктор фізико - математичних наук, професор
Городецька Наталія Сергіївна,
заступник директора з наукової роботи
Інституту гідромеханіки НАН України.

доктор фізико - математичних наук, професор
Лоза Ігор Андрійович,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки
Національного транспортного університету

Захист відбудеться «2» вересня 2025 року о 14-00 годині на засіданні
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, ауд. 311.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту механіки
ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, к.
504, та на офіційному веб-сайті: <https://inmech.kyiv.ua/l/ua/dissertations/>.

Автореферат розісланий «____» 2025 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01
доктор фізико-математичних наук

Анатолій ХОРОШУН

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія нелінійних хвиль в матеріалах являє собою великий розділ нелінійної теорії хвиль та нелінійної теорії пружності, в'язкопружності та інших узагальнень теорії пружності. Ця теорія не є закінченою і розвивається шляхом ускладнення моделей деформування, розширення типів хвиль, розвитку математичних методів розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, збільшення можливостей комп'ютерних програм і т.п. Розвиток відбувається у багатьох наукових центрах світової механіки і досі. Сучасна промисловість виробляє величезну кількість машин, конструкцій, приладів, устаткувань, які, або постійно працюють у динамічних режимах, або у роботі яких використовуються механізми поширення хвиль, або в яких спостерігаються хвильові процеси. Тому розвиток теорії хвиль в матеріалах постійно перебуває під тиском промисловості і є для неї затребуваним продуктом.

Поодинокі хвилі спосеред різноманіття хвиль складають доволі великий клас хвиль. Знання про такі хвилі є необхідним, оскільки пряме або непряме застосування таких хвиль фактично спостерігається у всіх галузях практичної діяльності людини – від медицини до архітектури, від машинознавства до історії. Підтвердження цього можна знайти у пошуковій системі Google за ключовими словами *solitary waves in materials*. В дисертації для прикладу вказано наукові публікації щодо поодиноких хвиль в провідних світових журналах, який свідчить про актуальність вивчення поодиноких хвиль.

В дисертації вивчаються хвилі з заданим початковим поодиноким профілем, який далі еволюціонує з часом поширення хвилі.

Поодинокі хвилі в матеріалах досліджені значно менше, порівняно з рідинами. З практичної точки зору, знання закономірностей розповсюдження подиноких хвиль корисно при інженерних розрахунках різних конструкцій, на які діє ударний імпульс. Спеціалізовані наукові журнали з теорії хвиль належать до групи найбільш рейтингових в області механіки. Отже, розвиток теорії поодиноких хвиль в матеріалах актуальний з точки зору фундаментальних аспектів теорії хвиль.

У дисертації досліджено додатково до поодиноких два типи хвиль з гармонічним профілем – крутильні та сейсмічні хвилі.

Крутильні хвилі вивчені значно менше інших типів хвиль, але постійно привертають увагу теоретиків і інженерів через практичну значимість в інженерних проблемах буріння і використання скважин. В розділі 7, присвяченому крутильним хвильям, приведений результат бібліографічного пошуку в базі даних Google наукових публікацій щодо крутильних хвиль в провідних світових журналах, який свідчить про актуальність вивчення цих хвиль. Особливість крутильних хвиль є такою, що хвilia поширюється в напрямку осі циліндра і змінює амплітуду в напрямку від поверхні циліндра до його осі. Приведені в роботі сценарії розподілу амплітуд хвилі від центру до поверхні циліндра (всередині циліндра) при поширенні нелінійно пружної крутильної хвилі засвідчили, що в аналізі цих хвиль багато прогалин і такий аналіз є актуальним.

Сейсмічні хвилі поширяються від осередків землетрусів, вибухів та інших джерел до поверхні Землі. В дисертації вивчаються плоскі поперечні сейсмічні хвилі

(зсувні хвилі). Вони зміщують частинки ґрутових порід у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі. Звичайно, ґрути вважаються реологічними середовищами. Історично так склалося, що ту область механіки матеріалів, яка враховує властивості пружності та в'язкості має назву теорія в'язкопружності, теж відносять до реології. Відповідно, властивості в'язкопружних матеріалів традиційно називають реологічними властивостями і параметри моделей теж називають реологічними. При вивчені деформування ґрутових шарів явище вязкопружності спостерігається постійно і в дисертації вибрана так звана стандартна модель. Сама постановка задачі, підхід до її розв'язування і отримані результати є новими в теорії сейсмічних хвиль. Актуальність розвитку теорії сейсмічних хвиль є незаперечною перш за все через існування практичних задач захисту від сейсмічної небезпеки. Затребуваність на нові результати в області сейсмічного захисту є постійною і актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана у відповідності з основними напрямками наукових досліджень відділу реології Інституту механіки НАН України ім. С.П. Тимошенка; зокрема, з науково – дослідницькою темою № 1.3.1.418-20 «Побудова наближених розв'язків нелінійних задач поширення гармонічних і поодиноких хвиль в пружних матеріалах» (І. 2020 – IV. 2023, номер державної реєстрації 0119U103784). Отримані наукові результати увійшли до звіту науково-дослідницької роботи № 1.3.1.418-20. Продовження отриманих результатів даної роботи увійшли до наступної науково – дослідницькою теми № 1.3.1.461-24 «Еволюція поодиноких хвиль різних початкових профілів в пружних матеріалах» (І. 2024 – IV. 2027, номер державної реєстрації 0123U104924). Також продовження отриманих результатів увійшли до науково-дослідницької роботи “Дослідження критичного стану тріщин та траекторій їх поширення, а також розповсюдження хвиль в рамках нелінійних підходів сучасної комп'ютерної та аналітичної механіки” (шифр: 472-25) в рамках гранту для молодих вчених НАН України.

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є побудова сценаріїв еволюції поодиноких і гармонічних нелінійних хвиль, яка включає постановку нових задач, отримання аналітичних розв'язків нових нелінійних хвильових рівнянь, розвиток методів розв'язування цих рівнянь, адаптації програм комп'ютерного моделювання та аналіз отриманих сценаріїв з точки зору виявлення нових нелінійних хвильових ефектів. Більш конкретно вона включає:

- вибір поодиноких хвиль, як предмета досліджень (автор разом з консультантом сформували новий напрямок досліджень);
- постановку задач про поширення хвиль в матеріалах (середовищах), що деформуються пружно нелінійно згідно з п'ятиконстантною моделлю Мернагана або стандартною триконстантною реологічною моделлю;
- отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для поздовжніх, циліндричних радіальних, крутильних та сейсмічних поперечних хвиль та розв'язків цих рівнянь;

- розвитку наближеного методу обмеження на градієнт зміщення при розв'язуванні нелінійної хвильової задачі і отримання первих двох та трьох наближень, а також прямого методу розв'язування хвильового рівняння для стандартної реологічної моделі;
- вибір п'ятьох типів початкового профіля хвилі (гармонічна косинусоїдальна періодична функція, функції Гаусса, Уіттекера, Макдональда, Фрідляндера), які є близькими до реально спостережуваних профілів хвиль в матеріалах;
- аналіз нелінійного хвильового рівняння для поздовжніх хвиль з початковим гармонічним профілем з метою порівняння ефективності двох методів (послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення) при розв'язуванні в рамках двох та трьох первих наближень;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення поздовжніх хвиль з початковим профілем у вигляді функції Гаусса (симетричний профіль з одним горбом);
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення поздовжніх хвиль з початковим профілем у вигляді функції Уіттекера (несиметричний профіль з одним горбом);
- порівняння наблизених розв'язків для хвиль Гаусса та Уіттекера за різними параметрами порівняння;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення циліндричних радіальних хвиль з початковим профілем у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндера (несиметричний профіль без горба).
- порівняння розв'язків, отриманих для хвиль Макдональда та Фрідляндера, за різними параметрами порівняння;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції) поширення гармонічної крутальної хвилі всередині кругового циліндра і вздовж його осі симетрії;
- проведення більш загального порівняльного аналізу нелінійних поодиноких хвиль з різними початковими профілями на основі отриманих автором розв'язків, який включає вплив частоти, початкової амплітуди і параметрів матеріалу на еволюцію початкового профілю;
- розробка методу визначення параметрів стандартної триконстантної реологічної моделі;
- теоретичний і числовий аналіз (побудова сценаріїв еволюції швидкості зсувної гармонічної сейсмічної хвилі та амплітуди хвилі для трьох досліджених типів ґрунту (бурого суглинку, піщаного жирного суглинку та мулистої глини) при зміні частоти хвилі і часу поширення хвилі.

Об'єктом дослідження є подинокі хвилі в матеріалах (плоска поздовжна, циліндрична радіальна та крутально-гармонічна), що деформуються нелінійно пружно та гармонічна плоска зсувна сейсмічна хвиля в ґрутових шарах з реологічними властивостями.

Предметом дослідження є еволюція початкового профілю поодиноких хвиль в матеріалах, деформування яких описується пятиконстантною моделлю Мернагана); вплив нелінійності деформування матеріалу на характер поширення п'яти типів хвиль - плоска поздовжна, циліндрична радіальна, гармонічна плоска

зсувна сейсмічна хвиля в ґрутових шарах, деформування якої описується реологічною стандартною триконстантною моделлю. Додатково досліджуються та використовуються методи наближеного розв'язування нелінійних хвильових рівнянь, програми комп'ютерного моделювання з використанням спеціальних функцій математичної фізики, методика знаходження параметрів реологічної моделі з використанням експериментальних кривих повзучості.

Методи дослідження. В роботі застосовувалися як аналітичні так і числові методи дослідження. Основою аналітичних досліджень були нелінійна теорія пружності та вязкопружності. Нелінійні хвильові рівняння отримувалися за строгими процедурами цих теорій і аналізувалися методом обмеження на градієнт зміщення з метою отримання перших двох та трьох наближень. Числовий аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою процедур алгоритмів комп'ютерної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в таких положеннях, що виносяться на захист:

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОЛОЖЕННЯ

1. Теоретичний і числовий опис нових нелінійних хвильових ефектів, який полягає в побудові сценаріїв еволюції чотирьох типів хвиль (плоска поздовжна, плоска поперечна – зсувна, циліндрична радіальна, крутильна) з різними початковими профілями - гармонічний косинусоїдальний, подинокий симетричний з одним горбом, поодинокий несиметричний з одним горбом, несиметричний без горба).
2. Проведення порівнянь різних сценаріїв за різними критеріями порівняння і формулювання нових коментарів до отриманих сценаріїв.
3. Отримання нових нелінійних хвильових рівнянь для плоских поздовжніх хвиль (хвиль Гаусса та Уіттекера), плоских поперечних хвиль (сейсмічних гармонічних хвиль), циліндричних радіальних (хвиль Макдональда та Фрідляндра), крутильних гармонічних хвиль.
4. Побудова в рамках одного наближеного підходу обмеження на градієнт зміщення перших двох (1+2) і трьох (1+2+3) наближень при розв'язуванні хвильових задач.
5. Проведення числового моделювання для порівняння двох та трьох наближень розв'язку хвильової задачі при різних типах матеріалів, підошв і максимальних амплітуд для хвиль з метою виявлення впливу третього наближення на спотворення початкового профілю хвилі.
6. Побудова сценаріїв поширення в ґрутових шарах сейсмічної плоскої поперечної хвилі прямим методом розв'язання реологічного хвильового рівняння.

КОНКРЕТИЗОВАНІ ПОЛОЖЕННЯ СТОСОВНО РЕЗУЛЬТАТІВ, ВИКЛАДЕНИХ В ОКРЕМИХ РОЗДІЛАХ

7. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт змі-

- щення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень.
8. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної циліндричної радіальної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень.
 9. Розділ 4. Проведено числове моделювання для двох різних методів розв'язування нелінійної задачі поширення поздовжної хвилі з гармонічним профілем в рамках двох та трьох перших наближень.
 10. Розділ 4. Виявлено новий хвильовий ефект, який супроводжує класичний ефект генерації другої гармоніки – профіль цієї гармоніки деформується і стає несиметричним.
 11. Розділ 4. При аналізі отриманих графіків спостережено утворення двох горбів замість одного (для наближення (1+2) за двома методами - послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення).
 12. Розділ 4. Спостережено різну швидкість еволюції (швидкість зміни початкового профіля хвилі) при її описанні двома методами, включаючи збільшення максимальної амплітуди.
 13. Розділ 4. Для трьох перших наближень в рамках двох методів, початковий профіль спотворюється по різному внаслідок різного математичного представлення наближень. Для методу послідовних наближень трете наближення вводить поправку четвертого порядку, яка не змінює знак при зміні знаку амплітуди, тоді як для методу обмеження на градієнт зміщення поправка має третій порядок і змінює знак при зміні знаку амплітуди.
 14. Розділ 4. Графіки отримані для наближення (1+2) при застосуванні обох методів показують подібні спотворення. У випадку обох методів еволюція відбувається асиметрично: додатна частина профілю перетворюється у два горби, тоді як від'ємна частина має тенденцію трансформуватися в профіль 2-ї гармоніки.
 15. Розділ 4. Спостережено, що для гармонічної хвилі трете наближення за обома методами змінює суттєво як початковий профіль так і профіль в рамках «перше +друге наближення». Вплив пиявляється по різному. Для першого методу горби у верхній та нижніх частинах розпадається на два горби кожен, показуючи при цьому тенденцію до утворення четвертої гармоніки. Для другого методу горб у верхній частині розпадається на два, а горб у нижній частині не розпадається, виявляючи при цьому тенденцію до значної деформації другої гармоніки.
 16. Розділ 5. Для отриманих за методом обмеження на градієнт зміщення двох та трьох перших наближень проведено числове моделювання еволюції поширення поздовжної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функцій Гаусса та Уїттекера.
 17. Розділ 5. Спостережено, що для хвилі Гаусса графіки, отримані для наближень (1+2) і (1+2+3) в рамках методу обмеження на градієнт зміщення, є різними. Для перших двох наближень спотворення відбувається практично

симетрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два горби. Для перших трьох наближень спотворення відбувається асиметрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два різні горби – лівий горб опускається, а правий піднімається.

18. Розділ 5. Отримані графіки для наближень (1+2) і (1+2+3) в рамках методу обмеження на градієнт зміщення для несиметричної хвилі Уіттекера з двома варіантами початкового профіля. Для першого варіанту показано, що для обох наближень (1+2) і (1+2+3) спотворення відбувається несиметрично. Швидкість еволюції для різних варіантів і наближень різна, значення максимальної амплітуди зростає та зменшується розмір підошви хвилі.
19. Розділ 5. Хвилі Уіттекера для другого варіанту початкового профіля та відповідного розв'язку другого і третього наближення еволюціонують аналогічно несиметрично з різною дисторсією – для третього наближення на схилі профіля утворюється горб. Швидкість спотворення та значення максимальної амплітуди для наближень 1+2+3 більша ніж для 1+2 а розмір підошви зменшується ще більше.
20. Розділ 5. Обидва несиметричні профілі хвилі Уіттекера еволюціонують по різному і вплив третього наближення є суттєвим по відношенню до другого.
21. Розділ 6. Проведено числове моделювання і побудовані сценарії еволюції за методом обмеження на градієнт зміщення для нелінійної задачі поширення циліндричної радіальної поодинокої хвилі з початковим профілем у вигляді функції Макдональда та Фрідляндра в рамках наближень (1+2) і (1+2+3).
22. Розділ 6. Отримані графіки показують, що несиметричність профілю Макдональда зберігається, а спотворений профіль стає все крутішим і крутишим. Швидкість спотворення для наближення 1+2+3 вища ніж для 1+2, а розмір підошви зменшується.
23. Розділ 6. Хвилі Фрідляндра проаналізована для двох варіантів початкового профіля. Спостережено, що для першого варіанту спотворення відбувається аналогічно хвилі Макдональда.
24. Розділ 6. Показано теоретично і чисельно, що сценарії еволюції хвиль Макдональда та Фрідляндра для першого варіанту початкового профіля дуже схожа. З цього факту випливає, що в рамках аналізу еволюції обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представлені по-різному.
25. Розділ 6. Для хвилі Фрідлендера з другим варіантом початкового профіля показано, що вона спотворюється несиметрично у випадку другого та третього наближень. Спотворення відбувається як для додатних значень амплітуд, так і від'ємних. Для додатних профіль стає крутішим, а для від'ємних стає близчим до горизонтальної осі.
26. Розділ 6. Спостережено, що хвилі Макдональда та Фрідляндра еволюціонують майже однаково і вплив третього наближення не є суттєвим по відношенню до другого.
27. Розділ 6. Функція Макдональда може розглядатися як точний розв'язок нелінійного хвильового рівняння, а функцію Фрідлендера можна інтерпретув-

вати як наближений розв'язок цього рівняння.

28. Розділ 7. Проаналізована циліндрична крутильна хвиля, яка поширюється в напрямку осі циліндра. Отримана достатньо проста формула для знаходження перших двох наближень і показано ефективність методу обмеження на градієнт зміщення у випадку наближеного аналізу простого варіанту хвильового рівняння крутильної хвилі. Метод обмежує зміну швидкості крутильної хвилі і узагальнює розвинений для інших хвильових рівнянь метод.
29. Розділ 7. Проведено числове моделювання спотворення початкового профіля радіальної циліндричної крутильної хвилі в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра до його центру для трьох типів матеріалів.
30. Розділ 7. Показано існування змінного спотворення крутильних хвиль хвилі у радіальному напрямку і постійного у осьовому, всередині поширення кругового циліндра та вздовж його осі симетрії.
31. Розділ 7. Спостережено значний вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутильна хвиля, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра.
32. Розділ 7. При аналізі граничних умов з'ясовано, що існує велика відмінність в формулуванні цих умов для лінійної та нелінійної постановок.
33. Розділ 8. Запропоновано в реалізовано опис деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю.
34. Розділ 8. Розроблено і застосовано метод визначення параметрів реологічної моделі на основі однієї експериментальної кривої повзучості реального ґрунтового шару.
35. Розділ 8. Показано чисельно, що для гармонічної сейсмічної хвилі зміна амплітуди хвилі з часом чи зі зміною частоти супроводжується затуханням амплітуди хвилі. Значення амплітуди зі збільшенням часу поширення чи частоти асимптотично прямують до нуля за експоненціальним законом.
36. Розділ 8. Показано, що залежності швидкості хвилі і коефіцієнту затухання хвилі від частоти виявили неочікувану з практичної точки зору ситуацію, коли суттєва нелінійність цих залежностей спостерігається лише для дуже низьких частот від 1 до 4 герц і для більших значень частоти швидкість і затухання хвилі практично є постійними.

Обґрунтованість та достовірність забезпечуються коректністю постановки задач, використанням класичної нелінійної теорії поширення хвиль в матеріалах, узгодженістю нелінійного підходу до аналізу поздовжніх, циліндричних радіальних та крутильних хвиль з класичним лінійним підходом, коректністю аналізу стандартної реологічної моделі щодо сейсмічних хвиль, коректністю використання методів послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення, використання графічних алгоритмів комп'ютерної алгебри, узгодженням отриманих результатів з результатами раніше проведених теоретичних і експериментальних досліджень хвиль та з відповідністю результатів міркуванням фізичного характеру.

Теоретична і практична цінність отриманих результатів є багаторівневою. Перший рівень включає цінність для загальної теорії поширення нелінійних хвиль в матеріалах. Тут сформульовано і розвинуто новий напрямок теорії – аналіз еволюції

поодиноких хвиль з заданим початковим профілем. Наступний рівень полягає в побудові наближених розвязків конкретних типів хвиль і виявлення нових нелінійних хвильових ефектів.

Оскільки робота планувалася і в процесі її виконання сформувалася як робота в області фундаментальних проблем механіки, то практичне значення отриманих результатів має в основному потенційний характер.

Кожен тип проаналізованих в роботі поодиноких хвиль може потенційно знайти практичне застосування в інженерній механіці.

На даний момент практична цінність результатів полягає також в можливості кращого розуміння впливу хвилі, її параметрів і матеріалу (середовища поширення хвилі) на поширення п'яти типів досліджених в роботі хвиль. Оскільки поодинокі хвилі здебільшого генеруються вибухами, короткими імпульсами високої інтенсивності та інше, то ті сфери діяльності, де виникають динамічні процеси такого роду, потенційно зацікавлені в дослідженнях поодиноких хвиль. Дослідження сейсмічних хвиль є предметом постійного інтересу організацій, які відповідають за сейсмічну безпеку. Отримані результати щодо сейсмічних хвиль планується застосовувати в спільних роботах зі вченими Інституту геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України.

Особистий внесок здобувача. Наукові результати дисертації були отримані автором самостійно. У всіх працях, що опубліковані у співавтості з добувачем приймає участь у постановці задач реалізації та розробці підходів до їх розв'язання. Всі основні результати дисертації які виносяться на захист отримані автором самостійно, матеріали опубліковані у співавторстві, що використані в дисертації отримані здобувачем особисто включаючи постановку задач та безпосереднє виконання всіх етапів робіт. У спільних публікаціях з науковим консультантом членом-кор. НАНУ, Я.Я Рушицьким та членом-кор. НАНУ О.В. Кендзерою, к.ф.-м.н. С.В. Сінчилом, к.ф.-м.н., О.О.Хотенко дисертантом виконано постановку нових задач, отримання аналітичних розв'язків нових нелінійних хвильових рівнянь, розвиток методів розв'язування цих рівнянь, адаптації програм комп'ютерного моделювання та аналіз отриманих сценаріїв з точки зору виявлення нових нелінійних хвильових ефектів, для сейсмічних хвиль запропоновано в реалізовано опис деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю.

Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, що включені в дисертацію, були представлені в наступних анотаціях доповідей на міжнародних наукових конференціях:

1. Юрчук В.М. Рушицький Я.Я. Моделювання еволюції поодиноких хвиль конструкційних матеріалах. Перші три наближення// Матеріали міжн. наук.- практ. конф. «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання», Івано-Франківськ–Яремча, 18 – 22 травня – 2020.– С. 212-216.
2. Рушицький Я.Я. Сінчило С.В. Юрчук В.М. Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу. Абстракти VII Міжн. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» 28–30 серпня 2023 р. Київ, Київський нац. унів. Ім. Тараса Шевченка. С.89.
3. Хотенко О.О. Юрчук В.М. Границі умови в аналізі нелінійних поверхневих і крутильних хвиль. Абстракти VII Міжн. наук.

конф. «Сучасні проблеми механіки» 28–30 серпня 2023 р. Київ, Київський нац. унів. Ім. Тараса Шевченка. С.122. 4. Rushchitsky J.J. Yurchuk V.M. To comparison of evolution of different kinds of elastic solitary waves. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. 5. Хотенко О.О. Юрчук В.М. Про граничні умови в аналізі нелінійних поверхневої крутильної хвиль. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. 6. Сінчило С.В. Юрчук В.М. Про новий наближений метод аналізу рівнянь, для крутильних пружних хвиль. Анотації доповідей. Міжнародна наукова конференція “Актуальні проблеми механіки” до 145-річчя від дня народження С.П. Тимошенка 14–16 листопада 2023 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. 7. Юрчук В.М. Одна особливість еволюції початкового профіля нелінійно пружних хвиль. Анотації доповідей. 11-та Міжнародна наукова конференція “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” 24–26 вересня 2024 р. Львів, Інститут механіки прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ 8. Юрчук В.М. Опис застосування стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль Міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи» 7–11 жовтня 2024 р. Київ, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

В завершенному вигляді дисертаційна робота доповідалась і обговорювалась на семінарах відділу реології Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - член-кор. НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Рушицький Я.Я.), на науковому семінарі за напрямком “Механіка композитних і неоднорідних середовищ” Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - д. ф.-м. н. Сторожук Є. А.) і на загальноінститутському семінарі Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник - акад. НАНУ, д. т. н., Назаренко В.М.) і отримала позитивну оцінку.

Основні положення, результати дослідження та висновки кандидатської дисертації автора є допоміжними і не входять у блок нових результатів, які складають докторську дисертацію.

Публікації. За темою дисертації опубліковано 18 наукових робіт, 14 із них у міжнародному науковому журналі «Прикладна механіка - International Applied Mechanics», зокрема 10 публікацій [1,2,4-9,16,17] квартиля Q3, 4 публікацій [11-14] квартиля Q4 одна публікація [10] – глава в колективній монографії видавництва Springer, а також три публікації категорії “Б”, зокрема дві публікації [3,18] в журналі “Доповіді НАНУ” та одна [15] в журналі “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка”.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, 8 розділів, висновків, списку використаних джерел із 159 найменувань. Загальний обсяг дисертації становить 312 сторінок разом з 237 рисунками та двома

таблицями.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту - член-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Яремі Ярославовичу Рущицькому за постійну увагу, цінні поради, пропозиції та всебічну підтримку під час виконання роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Вступ містить загальну характеристику роботи. У ньому: проаналізовано стан наукової проблеми, обґрунтовано актуальність теми дисертації, її зв'язок з науковими програмами; сформульовано мету роботи та задачі дослідження; відзначено наукову новизну і практичну цінність одержаних результатів; наведено дані про апробацію результатів дисертації та про публікації результатів роботи, а також короткий опис структури дисертації.

У першому розділі (допоміжному) розглянуто класичні хвильові рівняння для плоских, циліндричних та крутильних хвиль, основні характеристики і термінологія. Описано схему побудови моделей нелінійного пружного деформування матеріалів. Розглянуто п'ятиконстантну модель Мернагана та отримані нелінійні хвильові рівняння в рамках моделі Мернагана стосовно плоских, циліндричних радіальних та крутильних хвиль.

В підрозділі 1.1 розглянуто класичні хвильові рівняння і описано хвилю, яка розуміється як поширення в просторі збурення певного стану фізичної чи іншої системи. Хвилі відрізняються своєю геометричною формою (профілем) яка може бути найрізноманітнішою.

Крім профіля, хвилю також характеризують швидкість поширення і фаза. Ці поняття пояснюються за допомогою розв'язку Д'Алямбера одновимірного хвильового

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Коли деякі початкові дані дорівнюють нулеві, то цей розв'язок має вигляд

$$u(x, t) = u_{01}(vt - x) + u_{02}(vt + x). \quad (1.2)$$

Найчастіше біжучі хвилі розглядаються для випадку гармонічних хвиль.

$$u(x, t) = A \cos \omega [t - (x/v)] \text{ або } u(x, t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (1.3)$$

В підрозділі 1.2 розглянуто класичні рівняння поширення плоских хвиль.

Серед усіх типів хвиль плоскі хвилі є найбільш вивченими. При їх вивченні в ізороптических матеріалах припускається, що напрямок поширення збігається з віссю абсцис

$$\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}. \quad (1.4)$$

Підстановка представлення (1.4) в рівняння руху дає три лінійні хвильові рівняння

$$\rho \ddot{u}_1 - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_2 - \mu u_{2,11} = 0, \quad \rho \ddot{u}_3 - \mu u_{3,11} = 0. \quad (1.5)$$

Рівняння (1.5) описують одну поздовжню плоску хвилю (*P*-хвилю), дві поперечні плоскі хвилі - горизонтально поляризовану хвилю (*SH*-хвилю) і вертикально поля

ризовану хвилю (*SV* – хвилю). Відповідні розв'язки рівнянь (1.5) є такими

$$u_1(x_1, t) = u_1^o e^{i(k_L x_1 - \omega t)}, \quad k_L = (\omega/v_L), \quad v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad (1.6)$$

$$u_2(x_1, t) = u_2^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad u_3(x_1, t) = u_3^o e^{i(k_T x_1 - \omega t)}, \quad k_T = (\omega/v_T), \quad v_T = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (1.7)$$

Таким чином, плоскі гармонічні хвилі поширяються в лінійно пружному ізотропному середовищі з постійною швидкістю і є найпростішими хвильами.

В *підрозділі 1.3* розглянута класична радіальна циліндрична хвilia, яка є хвилею, що виникає в нескінченому лінійно пружному тілі з циліндричною порожниною заданого радіуса $r = r_o$.

Якщо вибрати циліндричну систему координат $O\varphi z$ у такий спосіб, що вісь Oz співпадає з віссю порожнини, то задача про рух хвилі стає осесиметричною.

У цьому випадку лише одне з трьох зміщень – радіальне зміщення – не є нульовим $u_r(r, t) \neq 0$, $u_\varphi(r, t) = u_z(r, t) = 0$ і лише три напруження відрізняються від нуля – $\sigma_{rr}(r, t)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(r, t)$, $\sigma_{zz}(r, t)$.

Поширення циліндричної хвилі радіального зміщення описується двома функціями Ханкеля і задається формулою

$$u_r(r, t) = \frac{p_o k_L}{k_L (2\mu + \lambda k_L) H_o^{(1)}(k_L r_o) - \frac{2\mu}{r_o} H_1^{(1)}(k_L r_o)} H_1^{(1)}(k_L r) e^{-i\omega t}. \quad (1.8)$$

Таким чином, для кожного фіксованого моменту часу профіль циліндричної хвилі (1.8) повторює графік функції Ханкеля $H_1^{(1)}(k_L r)$.

В *підрозділі 1.4* розглянуто класичну пружну крутільну хвилю, що виникає в нескінченому лінійно пружному циліндрі заданого радіуса. Використовується циліндрична система координат $O\varphi z$ у такий спосіб, що вісь Oz вибирають за вісь циліндра.

Головним припущенням є те, що на бічній поверхні циліндра відсутні напруження $\sigma_{rr}(r_0, \varphi, z, t) = \sigma_{r\varphi}(r_0, \varphi, z, t) = \sigma_{rz}(r_0, \varphi, z, t) = 0$

Рівняння щодо зміщення u_φ є лінійним

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\varphi = 0, \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \text{-швидкість хвилі}. \quad (1.9)$$

Розв'язок цього рівняння шукають у вигляді гармонічної хвилі

$$u_\varphi(r, z, t) = u_\varphi^0 \cdot J_1(\beta r) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2} \quad (1.10)$$

Розвязок (1.10) включає невідомі хвильове число k і фазову швидкість, які знаходять з граничних умов. Підстановка розв'язку (1.10) в граничні умови дає трансцендентне рівняння для знаходження величини βr_0

$$\beta r_0 J_0(\beta r_0) = 2 J_1(\beta r_0) \quad (1.11)$$

Це рівняння має нескінченну кількість розвязків і тому хвilia має таку ж кількість мод.

В *підрозділі 1.5* дано інформацію щодо нелінійного пружного деформування матеріалів. Класичну гіперпружність матеріалу визначають за ознакою, за якою

питома внутрішня енергія (енергія пружного деформування, потенціал) W є аналітичною функцією компонентів тензора деформацій, віднесених до природного стану

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{IK}) = & (1/2!) \left[\left(\partial^2 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijkl} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \\ & + (1/3!) \left[\left(\partial^3 W / \partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{mn} \right)_{\varepsilon_{IK}=0} \equiv C_{ijklmn} \right] \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{mn} + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для ізотропних матеріалів пружні сталі є такими

$$C_{ijkl} \equiv \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}, \quad I_{ijkl} = (1/2)(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$$C_{ijklmn} = 2C \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + 2B (\delta_{ij} I_{klmn} + \delta_{kl} I_{mnij} + \delta_{mn} I_{ijkl}) + (1/2) A (\delta_{ik} I_{jlmn} + \delta_{il} I_{jkmn} + \delta_{jk} I_{ilmn} + \delta_{jl} I_{ikmn}).$$

В позначеннях Фойхта $C_{ijkl} \equiv C_{IJ}$, $C_{ijklmn} \equiv C_{IJK}$ і для випадку властивостей ізотропії внутрішня енергія (1.12) має вигляд

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}) = & (1/2) C_{12} (\varepsilon_{mm})^2 + (1/2) (C_{11} - C_{12}) (\varepsilon_{ik})^2 + \\ & + (4/3) C_{456} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{km} + C_{144} (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{mm} + (1/6) C_{123} (\varepsilon_{mm})^3 + \dots \end{aligned} \quad (1.13)$$

Найбільш застосовними є потенціали Мернагана, Рівліна-Саундерса, Муні, Йона, Блетца-Ко, Хазановича, Трелоара, Огдена-Саундерса, Сіньйоріні. Всі ці моделі запропоновані на основі умоглядних міркувань.

При описі моделі Мернагана зазвичай використовується тензор деформації Коші-Гріна, який задається за відомим вектором переміщень $\bar{u}(x_k, t)$ в Лягранжевій системі координат $\{x_k\}$ і в відліковій конфігурації

$$\varepsilon_{nm}(x_k, t) = (1/2)(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{n,i} u_{i,m}). \quad (1.14)$$

В підрозділі 1.6 описано нелінійний потенціал Мернагана, який є кубічним щодо тензора деформацій. Найчастіше він записується через компоненти нелінійного тензора деформацій Гріна (1.14)

$$\begin{aligned} W(\varepsilon_{ik}) = & (1/2) \lambda (\varepsilon_{mm})^2 + \mu (\varepsilon_{ik})^2 + \\ & + (1/3) A \varepsilon_{ik} \varepsilon_{im} \varepsilon_{km} + B (\varepsilon_{ik})^2 \varepsilon_{mm} + (1/3) C (\varepsilon_{mm})^3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

або через перші алгебраїчні інваріанти I_k цього тензора

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3} A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3} C I_1^3. \quad (1.16)$$

Тут $I_1 = \text{tr}(\varepsilon_{ik})$, $I_2 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^2]$, $I_3 = \text{tr}[(\varepsilon_{ik})^3]$; λ, μ є пружними постійними Ляме, A, B, C є пружними постійними Мернагана.

П'ятиконстантна модель Мернагана є найбільш повною моделлю нелінійного деформування з кубічною нелінійністю. Вона враховує всі три перші інваріанти тензора деформацій.

Далі використано спрощення потенціалу Мернагана. Тут у представленні потенціалу через зміщення зберігаються лише нелінійності порядку 2 і 3

$$W = \frac{1}{2} \lambda (u_{m,m})^2 + \frac{1}{4} \mu (u_{i,k} + u_{k,i})^2 + \left(\mu + \frac{1}{4} A \right) u_{i,k} u_{m,i} u_{m,k} + \\ + \frac{1}{2} (\lambda + B) u_{m,m} (u_{i,k})^2 + \frac{1}{12} A u_{i,k} u_{k,m} u_{m,i} + \frac{1}{2} B u_{i,k} u_{k,i} u_{m,m} + \frac{1}{3} C (u_{m,m})^3. \quad (1.17)$$

В рамках підходу (1.17) нелінійний варіант класичних рівнянь Ляме є таким

$$\rho \ddot{u}_m - \mu u_{m,kk} - (\lambda + \mu) u_{n,mn} = F_m, \quad (1.18)$$

де F_m включає лише нелінійні доданки другого порядку.

Важливий факт щодо рівнянь (1.18): ці рівняння складаються з двох частин – лінійної і нелінійної. Вказано особливість дає змогу застосувати наближені методи.

У *підрозділі 1.7.1* розглянуто нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення плоских хвиль в рамках моделі Мернагана.

Використано потенціал (1.17). Для того, щоб перейти до нелінійного хвильового рівняння потрібно виконати два кроки. На першому кроці використовується формула для напруження Кірхгофа t_{ik} . Другий крок полягає у підстановці виразу t_{ik} у рівняння руху

$$t_{ik,i} + X_k = \rho \ddot{u}_k \quad (1.19)$$

і отриманні нелінійного аналогу класичних рівнянь Ляме (1.18).

Розглянуто плоскі хвилі і припущене, що хвилі поширяються вздовж осі абсцис, тобто, $\vec{u} = \{u_k(x_1, t)\}$. Тоді потенціал (1.17) спрощується до вигляду

$$W = (1/2) \left[(\lambda + 2\mu) (u_{1,1})^2 + \mu \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right] \right] + \\ \left[\mu + (1/2)\lambda + (1/3)A + B + (1/3)C \right] (u_{1,1})^3 + (1/2)(\lambda + B) u_{1,1} \left[(u_{2,1})^2 + (u_{3,1})^2 \right]. \quad (1.20)$$

Підстановка тензора напруження Кіргофа в рівнянні руху дає квадратичне нелінійне хвильове рівняння для трьох поляризованих плоских пружних P, SH, SV хвиль

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}), \quad (1.21)$$

$$\rho u_{2,tt} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{2,1}), \quad (1.22)$$

$$\rho u_{3,tt} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11} u_{1,1} + u_{1,11} u_{3,1}), \quad (1.23)$$

$$N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)], \quad N_2 = \lambda + 2\mu + (1/2)A + B. \quad (1.24)$$

Особливістю нелінійних хвильових рівнянь (1.21) - (1.24) є те, що ліві частини є класичними лінійними хвильовими рівняннями. Праві включають тільки квадратично нелінійні доданки.

У *підрозділі 1.7.2* розглянуто нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення радіальних циліндричних хвиль в рамках моделі Мернагана.

Деформування гіперпружного середовища описується пружним потенціалом Мернагана

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3} A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3} C I_1^3 \quad (1.25)$$

Рівняння руху в загальному випадку є такими $\nabla_k \left[\sigma^{ki} (\delta_i^n + \nabla_i u^n) \right] = \rho \ddot{u}^i$. Якщо використати в нелінійних визначальних співвідношеннях лінійний тензор деформації Коші-Гріна і нехтувати нелінійними правими частинами (внаслідок чого нелінійність буде чисто фізичною), то рівняння руху матиме наступний вигляд:

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -\alpha_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \alpha_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \alpha_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \alpha_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \alpha_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2. \quad (1.26)$$

справа зібрані нелінійні доданки двох типів – ті, що включають компоненти тензора напружень і ті, що включають перші похідні компонентів тензора напружень.

У підрозділі 1.7.3 розглянуто нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення крутільних хвиль в рамках моделі Мернагана.

Тут модель Мернагана задається кубічно нелінійним пружним потенціалом (1.25) зі стандартними представленнями перших трьох інваріантів тензора деформації.

Рівняння руху щодо зміщення u^2 є таким

$$\nabla_k \left[\sigma^{k2} (\delta_2^n + \nabla_2 u^n) \right] = \rho \ddot{u}^2 \text{ або } \rightarrow \nabla_1 \sigma^{12} + \nabla_3 \sigma^{32} = \rho \ddot{u}^2 \quad (1.27)$$

Спрощене хвильове рівняння для крутільної хвилі прийме вигляд

$$\begin{aligned} \mu \left[L u_g \equiv \left(u_{g,rr} + (1/r) u_{g,1r} - (1/r^2) u_g + u_{g,zz} \right) \right] - \rho u_{g,tt} &= \\ = L u_g (1/2) B \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Рівняння (1.28) являє собою нове нелінійне хвильове рівняння, яке у лівій частині повністю співпадає з лінійним хвильовим рівнянням, класичної задачі лінійної теорії пружності поширення крутільних хвиль а у правій частині містить доданки, які є кубічно нелінійними щодо зміщення.

Другий розділ (допоміжний) містить інформацію про поодинокі хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Гаусса, Уіттекера, Макдональда та Фрідляндра, їх основні характеристики та властивості.

У підрозділі 2.1 розглянута найпростіша поодинока хвиля, яка описана класичним розв'язком Д'Алямбера $u(x,t) = f(x - ct)$ лінійного хвильового рівняння (у даному випадку, лінійною частиною $u_{,tt} - c^2 u_{,xx} = 0$ рівняння (1.21)) для одновимірної хвилі зміщення. Хвиля Д'Алямбера відповідає лінійній теорії пружності, в рамках якої зміну початкового профіля описати неможливо.

У підрозділі 2.2.1 розглянуто гармонічні хвилі.

Гармонічна хвиля представляється математично за допомогою простої формули

$$u(x,t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_{ph}} \right).$$

Більш звичне представлення біжучої гармонічної хвилі $u(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$, де $k = (\omega/v_{ph})$ є хвильове число, яке пов'язане з довжиною хвилі $\lambda = (2\pi/k)$.

Також гармонічну хвилю, задають у вигляді комплекснозначної функції

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \text{ або } u(x, t) = Ae^{ik(x - vt)}.$$

У підрозділі 2.2.2 розглянуто функцію Чебишова-Ерміта як функцію, яка має наступний аналітичний вигляд

$$\psi_n(z) = e^{-z^2/2} H_n^*(z),$$

де $H_n^*(z)$ є поліномами Чебишова-Ерміта

Також вона є розв'язками диференціального рівняння Вебера

$$\psi_n''(z) + (1 + 2n - z^2)\psi_n(z) = 0,$$

а поліноми $H_n^*(z)$ є розв'язками диференціального рівняння Чебишова-Ерміта

$$w'' - 2zw' + 2nw = 0.$$

Функція Чебишова-Ерміта нульового індексу $\psi_0(x) = e^{-x^2/2\sigma}$ має назву функції Гаусса (гауссіана) і використовується в теорії ймовірностей і теж добре відома в теорії сигналів і загальній теорії хвиль і має там назву “дзвіноподібна функція”.

У підрозділі 2.2.3 розглянуто функції Уіттекера $M_{k,m}(z)$ і $W_{k,m}(z)$ які є розв'язками наступного диференціального рівняння

$$w'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \left(\frac{1}{4} - m^2 \right) / z^2 \right) w = 0.$$

Аналітична функція $W_{k,m}(z)$ означена для всіх значень k, m і для всіх невід'ємних дійсних z .

Також функція Уіттекера має представлення

$$M_{p+m+\frac{1}{2}, m}(z) = \frac{z^{-m+\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}}}{(2m+1) \cdots (2m+p)} \frac{d^p}{dz^p} \left(z^{p+2m} e^{-z} \right).$$

Існують важливі зв'язки функції Уіттекера з певними значеннями індексів і інших відомих у математичній фізиці функціями. Зокрема, функцій Бесселя уявного аргумента $K_m(z)$ або $I_m(z)$

$$K_m\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{z}} W_{0,m}(z), \quad M_{0,m}(z) = 2^{2m} \Gamma(m+1) \sqrt{z} I_m\left(\frac{z}{2}\right).$$

У підрозділі 2.2.4 розглянуто функцію Макдоальда, яка є модифікованою функцією Бесселя другого роду $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu \pi}$, де ν є не ціле дійсне число

і $I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}$, є циліндричною функцією з чисто уявним аргументом.

Функції $I_{-\nu}(z)$ і $I_\nu(z)$ є модифікованими функціями Бесселя 1-го роду.

Загальний вигляд представлення функції Макдоальда через ряди:

$$K_{n+1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} e^{-z} \sum_{r=0}^n \frac{(n+r)!}{r!(n-r)(2z)^r}, \quad n - \text{циле невід'ємне};$$

$$K_0(z) = -\ln\left(\frac{z}{2}\right) I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{1}{(m!)^2} \psi(m+1),$$

Рекурентні формули: $K'_0(z) = -K_1(z)$,

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \quad K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2 \frac{dK_\nu(z)}{dz}.$$

У підрозділі 2.2.5 розглянуто відомий у фізичній теорії вибуху (початково, атомного вибуху) початковий профіль - функцію Фрідландера - який досліджується вже майже сто років і ці дослідження продовжуються до нашого часу.

Профіль Фрідландера має вигляд

$$F(x_1) = A^o e^{-bx_1/x_{att}} (1 - x_1/x_{att}),$$

де A^o є амплітудним множником, постійна b визначає підошву профіля і постійна x_{att} характеризує затухання профіля (крутизну).

Хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Гаусса, Уіттекера, Макдональда, Фрідляндера – далі розуміються, як хвиля Гаусса, хвиля Уіттекера, хвиля Макдональда та хвиля Фрідляндера (скорочений запис).

На рис.2.1 зображено профілі функцій, які використано в дисертації

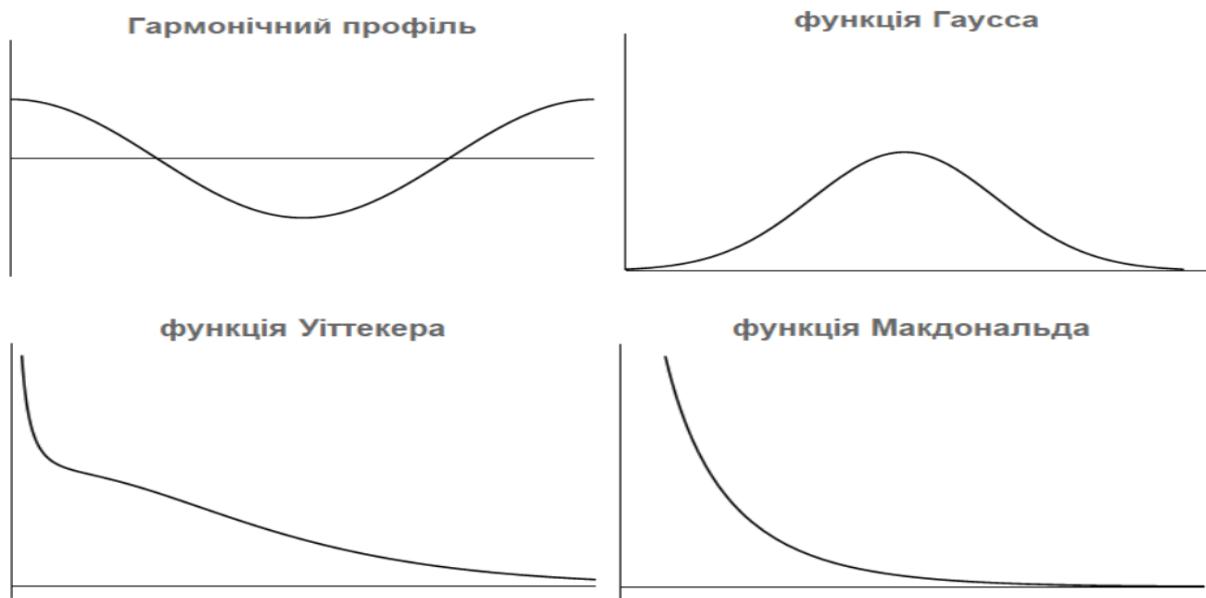


Рис.2.1 Початкові профілі відповідних функцій

У третьому розділі (допоміжно-основному) розглянуто два підходи до розв'язання нелінійної хвильової задачі: метод послідовних наближень, та метод обмеження на градієнт зміщення. Для плоскої гармонічної хвилі проаналізовано два розв'язки в рамках відповідних методів для перших трьох наближень. Для плоскої поздовжньої хвилі та радіальної циліндричної хвилі розв'язки отримані тільки в рамках методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень.

У підрозділі 3.1.1. розглянуто просте квадратично нелінійне хвильове рівняння. Розглянуто три поляризовані плоскі пружні P, SH, SV хвилі (1.21) -(1.24). Найбільш

просте нелінійне рівняння для поздовжної хвилі утворюється з рівняння (1.21) у рамках так званої першої стандартної задачі, коли у збуджується лише поздовжна хвиля

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1} \rightarrow u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = (N_1/\rho) u_{1,11} u_{1,1}, \quad (3.1)$$

де швидкість лінійної плоскої поздовжньої хвилі позначена як $v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$.

У підрозділі 3.1.2. стисло описано метод послідовних наближень. Він оснований на введенні малого параметра ε . Застосовувати метод зручно, коли відомий розв'язок задачі, близький до тої, яку треба розв'язати. У випадку нелінійних хвиль близькою задачею вважають лінійну задачу.

Метод розглядає невідому функцію $\vec{u}(x,t)$, в припущеннях, що вона достатньо гладка. Застосуємо його до нелінійного рівняння

$$L\vec{u} + N\vec{u} = 0, \quad (3.2)$$

де L є лінійним оператором, а N - нелінійним.

Тоді розв'язок рівняння (3.2) шукається у вигляді послідовних наближень

$$\vec{u}(x_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{u}^n(x_1, t) = \vec{u}^{(1)}(x_1, t) + \vec{u}^{(2)}(x_1, t) + \vec{u}^{(3)}(x_1, t) + \dots \quad (3.3)$$

Особливістю та характерною перевагою цього методу є те, що довільне наближення $u^{(n)}(x_1, t)$ знаходиться як розв'язок неоднорідного лінійного рівняння

$$L\vec{u}^{(n)} + N\vec{u}^{(n-1)} = 0 \quad (3.4)$$

з відомим ($n-1$) наближенням.

У підрозділі 3.1.3. розглядається задача про плоску поздовжну хвилю і її розв'язок за методом послідовних наближень, коли лінійна задача описується хвильовим рівнянням

$$u_{1,tt} - (v_L)^2 u_{1,11} = 0 \quad (3.5)$$

Рекурентне співвідношення згідно методу має вигляд

$$u_{1,tt}^{(n)} - (v_L)^2 u_{1,11}^{(n)} = (N_1/\rho) u_{1,11}^{(n-1)} u_{1,1}^{(n-1)}, \quad (3.6)$$

де $N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]$.

Слід зазначити, що рекурентна формула (3.6) спрощує обчислення наближень.

У підрозділі 3.1.4. розглянуто розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого і другого наближень.

Для рівняння (3.6) розв'язок у першій апроксимації є лінійним і для гармонічних плоских хвиль має вигляд

$$u_1^{(1)}(x, t) = u_{1o} \cos(kx - \omega t) \quad ((\omega/k) = v_L). \quad (3.7)$$

Розв'язок у вигляді перших двох наближень (1+2) має вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

У підрозділі 3.1.5. розглянуто розв'язок для гармонічної хвилі з урахуванням першого, другого і третього наближень (1+2+3).

Розв'язок для третього наближення, має наступний вигляд:

$$u_1^{(3)} = u_{1(0)}(M_L)^3(x_1)^3 \left\{ -\frac{8}{3} + \frac{13}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left[-\frac{4}{3} + \frac{29}{8(k_L)^2(x_1)^2} \right] \cos 4\sigma \right\}, \quad (3.9)$$

$$\text{де } M_L = \frac{N_1}{8(\lambda+2\mu)} u_{1o} (k_L)^2 = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{k_L^2}{v_L^2} = \frac{1}{8\rho} N_1 u_{1o} \frac{\omega^2}{v_L^4}.$$

Розв'язок для перших трьох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ &+ u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отже, характер еволюції у межах трьох наближень визначається параметром M_L , початковою амплітудою і хвильовим числом у лінійному наближенні.

У підрозділі 3.2.1 розглянуто для поздовжної хвилі метод, оснований на переворенні нелінійного рівняння і обмежені на градієнт зміщення.

Перша особливість даного методу полягає у тому, що нелінійне хвильове рівняння, до якого він застосовується, повинно мати особливу структуру якби лінійного рівняння

$$u_{1,tt} - \{1 + \alpha u_{1,1}\}(v_L)^2 u_{1,11} = 0, \text{ де } \alpha = [N_1 / (\lambda + 2\mu)]. \quad (3.11)$$

Наступне припущення є таким: поодинока хвиля з початковим профілем у вигляді $F(ax_1)$ поширюється у такому ж вигляді, але функція вже залежить від фазової змінної $\sigma = a(x_1 - vt)$,

$$u(x_1, t) = F[a(x_1 - vt)], \quad (3.12)$$

куди входить змінна швидкість хвилі

$$v = \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L. \quad (3.13)$$

Зазначимо, що швидкість v можна трактувати як локальну швидкість хвилі в точці x і в момент часу t .

У підрозділі 3.2.2 показано як отримується розв'язок з урахуванням наближень (1+2). Представимо розв'язок (3.11) першими двома наближеннями, для цього приймається два обмеження (припущення) в представленні швидкості хвилі (3.13). Перше припущення

$$|\alpha u_{1,1}| \ll 1, \quad (3.14)$$

Тоді за умови (3.14) швидкість (3.13) можна представити наступним чином:

$$u_1(x_1, t) \equiv F[a(x_1 - v_L t - (1/2)\alpha u_{1,1} t)]. \quad (3.15)$$

Фаза хвилі $\sigma = a(x_1 - vt) = a[x_1 - \sqrt{1 + \alpha u_{1,1}} v_L t]$ при врахуванні наближеного представлення (3.14) прийме вигляд:

$$\sigma \approx [a(x_1 - v_L t) - (1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t]. \quad (3.16)$$

Далі вводиться ще одне припущення – малість параметра δ

$$|\delta| = |-(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t| \ll 1. \quad (3.17)$$

Тоді розв'язок (3.15) можна розкласти в ряд Тейлора за малим параметром δ в околі класичного значення фази $\sigma = a(x_1 - v_L t)$

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma)a[\delta = -(1/2)\alpha a v_L u_{1,1} t] = F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'(\sigma)]^2 \quad (3.18)$$

Отримане наближене представлення розв'язку (3.18) має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій описує один і той же нелінійний хвильовий ефект – виникнення (окрім першої гармоніки) другої гармоніки чи подібних їй.

У підрозділі 3.2.3 показано як отримується розв'язок з урахуванням наближень (1+2+3).

Аналогічно попередньому випадку вводяться два обмеження в представленні швидкості хвилі (3.13) та малості δ .

Розв'язок з урахуванням наближень (1+2+3) наступний:

$$u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) \approx F(\sigma) - (1/2)\alpha a^2 v_L t [F'_{,1}(\sigma)]^2 - (1/8)\alpha^2 a^3 v_L t [F'_{,1}(\sigma)]^3. \quad (3.19)$$

Наближене представлення розв'язку (3.19) описує нелінійні хвильові ефекти, які зумовлені виникненням другої та третьої гармонік.

У підрозділі 3.3.1. розглянуто найпростіше квадратично нелінійне хвильове рівняння, яке описує еволюцію радіальної циліндричної хвилі.

Вибирається циліндрична система координат $Or\vartheta z$ так, щоб вісь Oz збігалася з віссю порожнини, від якої в радіальному напрямку поширюється хвиля. Ненульовими є радіальний зсув u_r і три компоненти тензора напруження $\sigma_{rr}, \sigma_{\vartheta\vartheta}, \sigma_{zz}$. Лінійне рівняння руху має вигляд

$$\mu \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \left[\frac{1}{r} (ru_r)_{,r} \right] - \rho u_{r,tt} = 0. \quad (3.20)$$

Відповідне нелінійне рівняння в рамках моделі Мернагана є таким

$$(c_L)^{-2} u_{r,tt} - \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = -\alpha_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \alpha_2 \frac{1}{r} u_{r,rr} u_r - \alpha_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \alpha_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2 - \alpha_5 \frac{1}{r^3} (u_r)^2. \quad (3.21)$$

Для знаходження розв'язку рівняння (3.21) застосовують метод послідовних наближень, початковий профіль хвилі описується функцією Ханкеля.

Нелінійний розв'язок в рамках перших двох наближень має вигляд

$$\begin{aligned} u_r(r, t) &= u_r^{(1)}(r, t) + u_r^{(2)}(r, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_r^o e^{i(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{4})} \frac{1}{\sqrt{k_L r}} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{i}{k_L r} - \frac{9}{128 (k_L r)^2} \right) + \\ &+ \frac{r (u_r^o)^2}{\pi k_L} (k_L)^2 N_1 e^{i2(k_L r - \omega t - \frac{\pi}{2})} \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{k_L r} + \frac{5}{18} \frac{i}{(k_L r)^2} + \frac{151}{288} \frac{1}{(k_L r)^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

У підрозділі 3.3.2. показано перетворення нелінійного хвильового рівняння (3.21). Якщо проігнорувати тільки дві з п'яти нелінійних складових і зберегти справа в (3.21) вираз

$$-\tilde{N}_1 u_{r,rr} u_{r,r} - \tilde{N}_3 \frac{1}{r^2} u_{r,r} u_r - \tilde{N}_4 \frac{1}{r} (u_{r,r})^2;$$

тоді рівняння (3.21) представиться у наступному вигляді

$$(\nu_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right) \left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - u_{r,tt} = 0. \quad (3.23)$$

Тут слід підкреслити, що рівняння для циліндричної радіальної хвилі (3.23) має таку ж структуру, як рівняння для плоскої поздовжної хвилі.

У підрозділі 3.3.3. отримано наближений розв'язок рівняння (3.23) з урахуванням наближень (1+2).

Початковий профіль хвилі описується функцією $u_r(r, t=0) = F(r)$ і поодинока хвиля поширюється у вигляді $u_r(r, t) = F(a(r - vt))$, де невідома швидкість хвилі визначається виразом $v = \sqrt{1 + \tilde{N}_1 u_{r,r}} \nu_L$.

Прийнято обмеження в представленні $\tilde{N}_1 u_{r,r} \ll 1$, і позначено фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю через $\sigma = a(r - vt)$. Додатково введено малий параметр $\delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a v_L u_{r,r} t$. Розв'язок (поодиноку хвилю) представлено у вигляді ряду Тейлора і обмежено розгляд першими двома членами ряду через малість δ

$$u_r^{(1+2)}(r, t) \approx F(\sigma) + F'(\sigma) \left[\delta = -(1/2) \tilde{N}_1 a v_L u_{r,r} t \right] = F(\sigma) - (1/2) \tilde{N}_1 a v_L t [F'(\sigma)]^2. \quad (3.24)$$

Наближене представлення розв'язку (3.24) для поодинокої циліндричної радіальної хвилі має загальний характер і для різних конкретно вибраних функцій F буде описувати виникнення (крім «першої гармоніки») «другої гармоніки» або подібних їй нових складових і збільшення амплітуди «другої гармоніки» з часом поширення хвилі.

У підрозділі 3.3.4. отримано розв'язок (3.23) з урахуванням наближень (1+2+3).

Розглянуто $v = \sqrt{1 + \tilde{N}_1 u_{r,r}} \nu_L$ у наближенному вигляді для перших трьох доданків.

Фазу хвилі з постійною фазовою швидкістю позначено через $\sigma = a(r - vt)$ і малий параметр через $\delta^* = -(1/2) a v_L \tilde{N}_1 u_{r,r} [1 + (1/4) \tilde{N}_1 u_{r,r}] t$.

Відповідно до методу, введено обмеження $\tilde{N}_1 u_{r,r} \ll 1$, та обмеження на параметр δ^* наступним чином

$$|\delta^* = -(1/2) a v_L \tilde{N}_1 u_{r,r} [1 + (1/4) \tilde{N}_1 u_{r,r}] t| \ll 1.$$

Представлено $u_r(r, t) = F(a(r - vt))$ у вигляді ряду Тейлора і через малість δ^* отримано наступне представлення

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r, t) \approx & u_r^o F(\sigma) - (1/2) (u_r^o)^2 a^2 v_L \tilde{N}_1 t [F'(\sigma)]^2 - \\ & - (1/8) (u_r^o)^3 a^3 v_L (\tilde{N}_1)^2 [F'(\sigma)]^3 t \end{aligned} \quad (3.25)$$

Розв'язок (3.25) містить три доданки. Перший доданок є лінійним, другий вводить квадратично нелінійну добавку, а третій – кубічно нелінійну добавку.

Четвертий розділ містить теоретичний та числовий аналіз поширення поздовжної хвилі з гармонічним профілем для перших двох та трьох наближень за методами послідовних наближень (метод 1) та обмеження на градієнт зміщення (метод 2) з метою їх порівняння за критерієм зручності використання.

У *підрозділі 4.1.1.* розглянута квадратично нелінійна хвиля з гармонічним профілем, та проведено теоретичний аналіз на основі методів 1 і 2. Отримані формули для перших двох наближень.

Розв'язки у першій апроксимації для методу 1 та методу 2 однакові

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t), \text{ або } u_1^{(1)}(x_1, t) = u_{1o} e^{i(k_L x_1 - \omega t)}. \quad (4.1)$$

де u_{1o} – початкова амплітуда хвилі

Отриманий методом 1 розв'язок в рамках перших двох наближень є таким

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2)}(x_1, t) &= u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ &= u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для методу 2 початковий профіль хвилі є гармонічним у просторі і має вигляд $F(k_L x_1 - \omega t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t)$. Тоді формула для перших двох наближень така:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L(x_1 - v_L t)) - (1/2) \alpha v_L t (k_L)^2 (u_{1o})^2 \left[\sin(k_L(x_1 - v_L t)) \right]^2 \quad (4.3)$$

У *підрозділі 4.1.2.* властивості матеріалів, які використані в числовому аналізі.

Вибрано три металеві композитні матеріали: матеріал M51, матеріал M52 та матеріал M53 (матриця – алюміній, наповнювач – вольфрам). Результати аналізу наведені для матеріалу M52, відповідні характеристики, якого такі (система CI):

Матеріал M52 (об'ємний вміст матриці 0,6) - $\rho = 0,918 \cdot 10^4$; $\lambda = 11,6 \cdot 10^{10}$; $\mu = 0,721 \cdot 10^{10}$;

$$A = -1,33 \cdot 10^{11}; B = -4,45 \cdot 10^{11}; C = -9,5 \cdot 10^{11}; v_L = 3,769 \cdot 10^3; \alpha = -34,08.$$

Параметри гармонічної хвилі вибиралися наступним чином: додатково до швидкості хвилі $v_L = (\omega/k_L)$ вибиралась початкова частота ω і вже за відомого хвильового числа $k_L = (\omega/v_L)$ перерахувалася довжина хвилі за формулою $L = (2\pi/k_L)$.

У *підрозділі 4.1.3.* проведено числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем (з застосуванням методів 1 і 2 та врахуванням перших двох наближень).

На рис. 4.1, 4.2 наведено графіки, отримані за методом 1 для матеріалу M52, що відповідає таким значенням параметрів (система CI): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

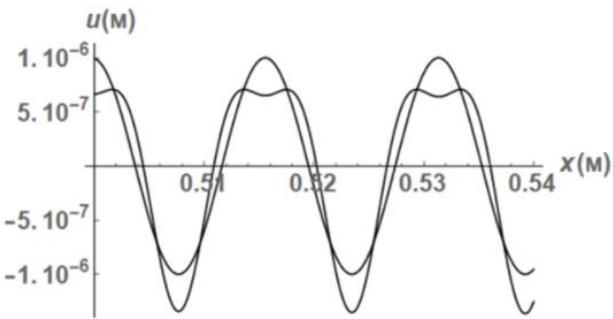


Рис. 4.1. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

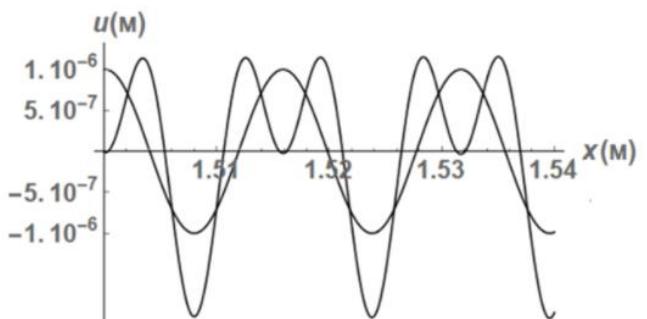


Рис. 4.2. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі нижній графік відповідає формулі (4.2) (1-ше + 2-ге наближення), а верхній – відповідає початковому профілю

На рис. 4.3, 4.4 графіки, отримані за методом 2 для матеріалу M52, що відповідають таким значенням параметрів (система CI): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1_0} = 1 \cdot 10^{-6}$

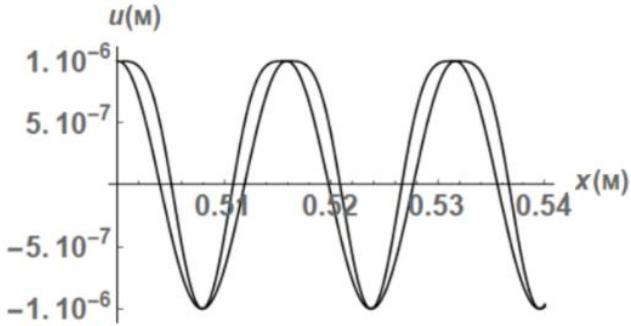


Рис.4.3. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 30 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.3) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

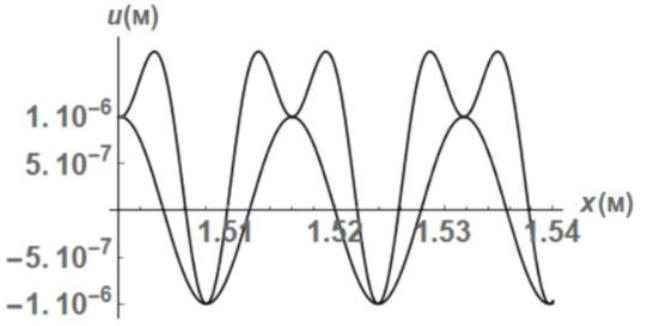


Рис. 4.4. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 90 довжин хвилі (нижній графік відповідає формулі (4.3) (1-ше + 2-ге наближення) а верхній – відповідає початковому профілю)

На графіках можна спостерегти характерні особливості для гармонічної хвилі при аналізі методами 1 та 2. Обом випадкам відповідають графіки, несиметричні щодо горизонтальної осі, і різна швидкість еволюції для додатніх і від'ємних значень амплітуд. Зміщення графіків відповідає явищу опускання або підвищення середнього значення амплітуди, щодо якого відбуваються коливання.

Таким чином, Відмінність та подібність описаної еволюції методами 1 та 2 полягає в наступному: 1. Подібним для обох методів є те, що утворюються два горби замість одного, тобто друге наближення, яке присутнє у розв'язку за методом 1 та методом 2 (що є подібне для цих методів) вносить суттєві корективи. 2. Відмінність для обох методів полягає в різному математичному представленні (друге наближення для обох методів є суттєво математично відмінним) розв'язків гармонічного нелінійного рівняння.

У підрозділі 4.2.1. розглянуто квадратично нелінійну хвилю з гармонічним профілем, проведено теоретичний аналіз на основі методів 1 та 2. Отримані формули для перших трьох наближень.

Розв'язок у першій апроксимації для методу 1 та 2 має вигляд – (4.1)

Розв'язок, який отриманий для методу 1 для перших двох наближень – (4.2)

Отриманий методом 1 розв'язок в рамках перших трьох наближень має вигляд:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) + u_1^{(3)}(x_1, t) = u_{1o} \cos \sigma + u_{1o} M_L x_1 \cos 2\sigma + \\ & + u_{1o} (M_L)^3 (x_1)^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2k_L x_1} \sin 4\sigma + \left(-\frac{4}{3} + \frac{11}{8(k_L x_1)^2} \right) \cos 4\sigma \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

Розв'язок, який для методу 2 для перших двох наближень – (4.3)

Отриманий методом 2 розв'язок в рамках перших трьох наближень, такий:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_{1o} \cos(k_L(x_1 - v_L t)) - (1/2)\alpha v_L t (k_L)^2 (u_{1o})^2 [\sin(k_L(x_1 - v_L t))]^2 + \\ & + (1/8)\alpha^2 v_L t (k_L)^3 (u_{1o})^3 [\sin(k_L(x_1 - v_L t))]^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

У підрозділі 4.2.2. наведені параметри матеріалу та хвилі, які були взяті, аналогічні тим, що застосувались в попередньому підрозділі.

У підрозділі 4.2.3. проведено числовий аналіз хвилі з гармонічним профілем з застосуванням методів 1 і 2 і врахуванням перших трьох наближень.

Наступні графіки побудовані за методом 1 для варіанту матеріалу М52, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

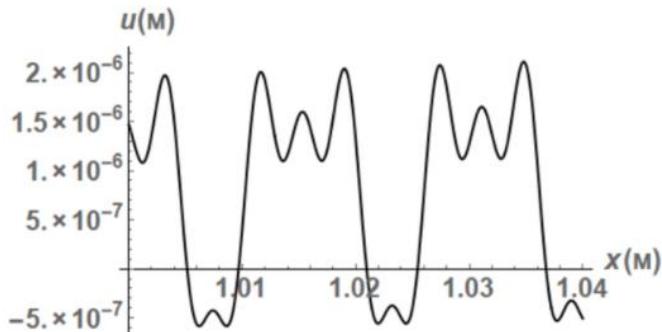


Рис. 4.5. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

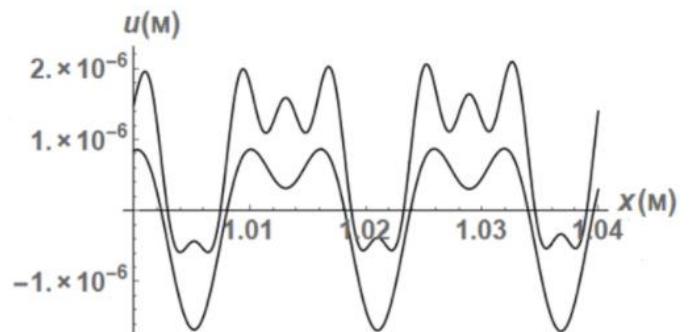


Рис. 4.6. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.4) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.2) (1-ше + 2-ге наближення))

На рис. 4.5, 4.6 показано еволюцію з врахуванням третього наближення. Рис 4.5 демонструє еволюцію початкового профілю, що відповідає розв'язку (4.6). З рис 4.6. видно, що вплив нелінійної третьої добавки в порівнянні з двома першими є суттєвим: утворюються три горби і дві впадини, для додатніх значень амплітуди та один горб і дві впадини для відємних значень амплітуди.

Всі графіки рис. 4.7, 4.8 побудовані за методом 2 для варіанту матеріалу М52, що відповідає таким значенням параметрів (система СІ): $L = 0,018$, $\omega = 1,5 \cdot 10^6$, $u_{1o} = 1 \cdot 10^{-6}$.

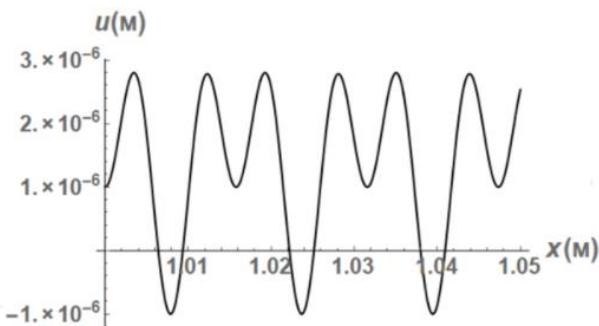


Рис. 4.7. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (відповідає розв'язку (4.8) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення))

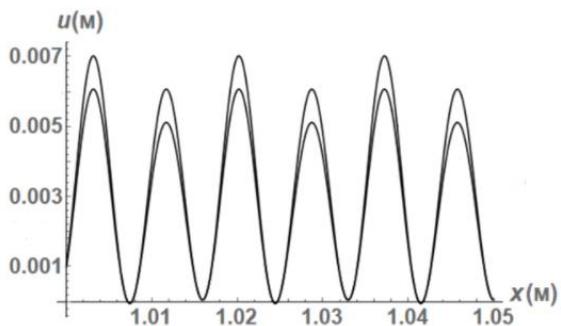


Рис. 4.8. Профіль гармонічної хвилі після проходження відстані в 60 довжин хвилі (верхній графік відповідає розв'язку (4.5) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) а нижній - розв'язку (4.3) (1-ше + 2-ге наближення))

З рис. 4.7, 4.8 слідує, що еволюція профілю хвилі відбувається несиметрично щодо осі, та майже несиметрично щодо вершин. Дисторсія хвилі, проявляється в тому, що утворюється два горби замість одного, а також збільшується значення максимальної амплітуди. Домінуючий вплив третьої гармоніки присутній. Основною новизною у данному дослідженні є те що, розв'язки при двох наближеннях і розв'язки при трьох наближеннях відповідно до методів 1 та 2 дають різну картину зміни початкового профіля. Вплив третього доданка по відношенню до другого значний тільки на великих відстанях пройдених хвилею.

Основний нелінійний хвильовий ефект при аналізі за методом 1 полягає в утворенні трьох горбів для додатних значень амплітуди, і двох впадин для від'ємних значень амплітуди, та збільшення максимальної амплітуди. Основний нелінійний хвильовий ефект при аналізі за методом 2 полягає в утворенні двох горбів замість одного, та суттєвого збільшення максимальної амплітуди.

У підрозділі 4.3 описано новий хвильовий ефект, який супроводжує класичний ефект генерації другої гармоніки.

Використовується п'ятиконстантна модель Мернагана і вибирається квадратично нелінійне рівняння, яке відповідає схемі поширення плоскої поздовжної хвилі зміщення $u_1(x, t)$ вздовж осі абсцис.

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu) u_{1,11} = N_1 u_{1,11} u_{1,1}, \quad N_1 = 3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]. \quad (4.7)$$

Тут ρ є густину, u_k - зміщеннями; λ, μ, A, B, C - пружними константами моделі Мернагана.

Квадратично нелінійне хвильове рівняння аналізувалося, за допомогою трьох методів – методу повільно змінних амплітуд (методу ван дер Поля), методу послідовних наближень, методу обмеження на градієнт зміщення.

Далі зібрано разом розв'язки хвильового рівняння (4.7), які, як вважається, описують генерацію 2^o гармоніки трьома різними методами:

M1 (повільно змінних амплітуд)

$$u_1(x_1, t) = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} - \frac{3}{2} \left[1 + \frac{2(A + 3B + C)}{(\lambda + 2\mu)} \right] (k_L)^2 (A_1)^2 x_1 e^{2i(k_1 x - \omega t)}, \quad (4.8)$$

М2 (послідовних наближень)

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1 \left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)} (u_{1o})^2 k_L^2 \right] \cos 2(k_L x_1 - \omega t), \quad (4.9)$$

М3 (обмеження на градієнт амплітуди)

$$u_1(x_1, t) = a^o e^{-ik_L(x_1 - v_L t)} - (1/2) v_L t \alpha (k_L)^2 (a^o)^2 e^{-2ik_L(x_1 - v_L t)}. \quad (4.10)$$

і проведено порівняння перших та других доданків.

Перші доданки є ідентичними і описують першу гармоніку. Другі доданки дуже подібні, але не ідентичні і при записі в уніфікованому вигляді є постійними для вибраного матеріалу, мають різні знаки і відрізняються між собою множником.

Розв'язок (4.8) у зручному вигляді, для порівняння величин амплітуд першої та другої гармонік наступний:

$$u_1(x_1, t) = u_{1o} \left[\cos \sigma + \frac{3[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)]}{8(\lambda + 2\mu)} u_{1o} k_L^2 x_1 \cos 2\sigma \right], \quad \sigma = k_L x_1 - \omega t \quad (4.11)$$

Формула (4.11) дає підставу для загальноприйнятого твердження, що при поширенні 1^{ої} гармоніки з часом вона перетворюється у 2^{гу}. При цьому акцентується увага на факті збільшення амплітудного множника перед 2^{ою} гармонікою.

Другий доданок у (4.11) містить функцію $x_1 \cos 2(k_L x_1 - \omega t)$ і вона вже є деформованою 2^{ою} гармонікою, що і є новим хвильовим ефектом.

На рис. 4.9, 4.10 зображені графіки, які відповідають формулі (4.11) для композитного матеріалу і довжині хвилі 0,018. На графіку рис. 4.9 зображений початковий профіль хвилі (профіль 1^{ої} гармоніки) з заданою амплітудою і довжиною хвилі. На графіках рис. 4.10 показані початковий профіль і профіль хвилі, де враховані перше і друге наближення при проходженні хвилею 25 довжин хвилі.

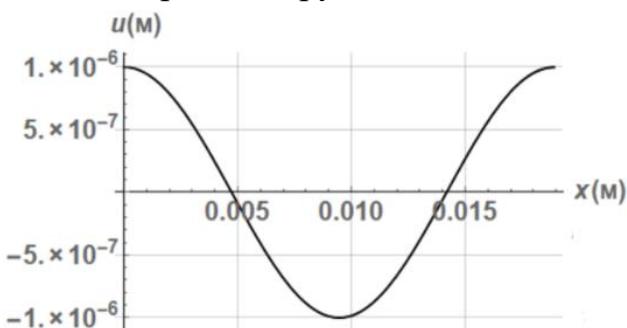


Рис. 4.9. Початковий гармонічний профіль після проходження хвилею одного періоду першої гармоніки

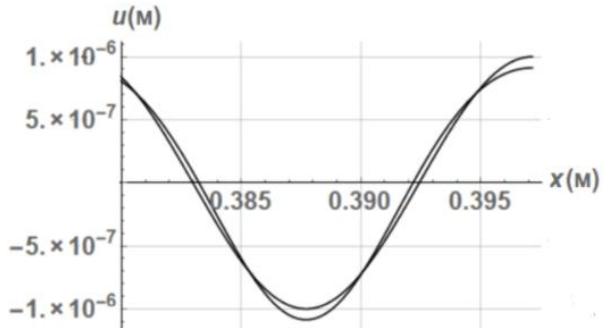


Рис. 4.10. Профіль гармонічної хвилі після проходження 25 довжин хвилі (розв'язок 4.11) (верхній графік відповідає деформованому профілю, а нижній – початковому профілю)

Основне спостереження полягає у тому, що насправді другий доданок в (4.11) вносить зміну в профіль 1^{ої} гармоніки. Ця зміна вводить несиметрію стосовно горизонтальної і вертикальної осей і викликана такою ж несиметрією деформованої 2^{ої} гармоніки. Вертикальна несиметрія може бути спостережена вже на першому

періоді, коли амплітуда крайнього лівого горба залишається незмінною, а амплітуда крайнього правого зростає на певну величину (горб піднімається вверх). Горизонтальна виявляється у тому, що ліві і праві схили горбів деформуються по-різному – праві стають більш похилими. Крім того, нулі зміщуються вліво.

Отже, розв'язки, які відповідають трьом методам наближеного аналізу нелінійного хвильового рівняння, що описує еволюцію гармонічної плоскої поздовжної хвилі при її поширенні в квадратично нелінійно пружному матеріалі, виявляють новий не описаний і не коментований раніше нелінійний хвильовий ефект – несиметричне деформування профіля 2^{oї} гармоніки як відносно горизонтальної, так і вертикальної осей. Цей ефект спостерігається і в еволюції 1^{oї} гармоніки – її початковий симетричний профіль трансформується в несиметричний профіль, який виявляє тенденцію до утворення несиметрично деформованого профіля 2^{oї} гармоніки.

У пятому розділі проведено теоретичний та числовий аналіз (побудовано сценарії еволюції початкового профіля хвилі) поширення поздовжної поодинокої хвилі Гаусса (симетричний профіль з одним горбом) та Уіттекера (несиметричний профіль з одним горбом), для перших двох та трьох наближень за методом 2 (обмеження на градієнт зміщення).

У підрозділі 5.1.1. розглянуто нелінійну хвиллю Гаусса. Проведено аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень.

Початковий профіль хвилі Гаусса має вигляд

$$u_1^{(1)}(x_1, t) = u_1^0 e^{-[a^2(x_1 - v_L t)^2/2]}. \quad (5.1)$$

де u_1^0 – початкова амплітуда хвилі

Розв'язок для першого і другого наближень з урахуванням (5.1) такий:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 e^{-[a^2(x_1 - v_L t)^2/2]} - (1/2)t\alpha v_L a^2 (x_1 - v_L t)^2 (u_1^0)^2 e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2}. \quad (5.2)$$

Розв'язок для першого другого і третього наближень з урахуванням (5.1) такий:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) \approx & u_1^0 e^{-[a^2(x_1 - v_L t)^2/2]} - (1/2)\alpha a^2 v_L t (x_1 - v_L t)^2 (u_1^0)^2 e^{-a^2(x_1 - v_L t)^2} + \\ & + (1/8)\alpha^2 a^3 v_L t (x_1 - v_L t)^3 (u_1^0)^3 e^{-3[a^2(x_1 - v_L t)^2/2]}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Порівняння розв'язків (5.2) і (5.3) показує, що третій доданок добавляє до існуючих 1-ої та 2-ої “гармонік” третю. Тут слід зазначити, що для «дзвона» поняття гармоніки є дещо умовним.

У підрозділі 5.1.2. наведені параметри матеріалу, які були взяті аналогічні тим, що застосувались в попередньому розділі. Результати наведені для матеріалу 52.

Дзвіноподібна хвилля характеризується параметром a , який визначає довжину підошви хвилі за формулою $\sigma = (1/a)$ за правилом «3σ». Для двох матеріалів початкові підошви вибрані одинаковими ($a = 160$).

У підрозділі 5.1.3. проведено числовий аналіз хвилі Гаусса (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення)

На рис. 5.1, 5.2 наведено графіки, що відповідають матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 5 \cdot 10^{-3}$ та підошва хвилі $L = 0,037$.

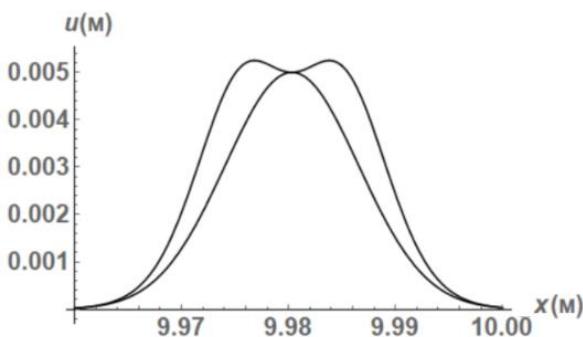


Рис. 5.1. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.2) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній – розв'язку (5.1) (1-ше наближення)

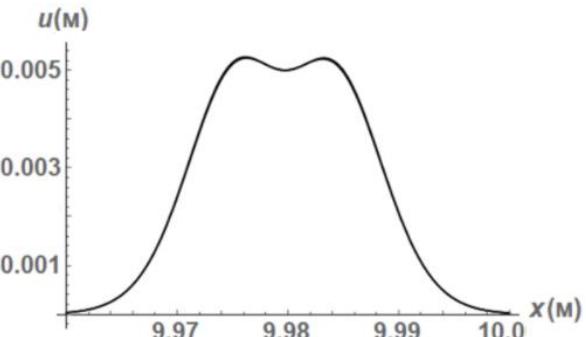


Рис. 5.2. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $2,5 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, відповідає накладанню розв'язків (5.3) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), та (5.2) (1-ше + 2-ге наближення)

Рис. 5.1, 5.2 демонструють спотворення початкового профілю для перших двох наближень, а перші два наближення відносно перших трьох залишаються незмінні.

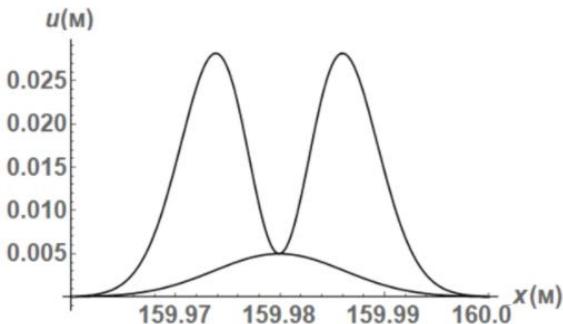


Рис. 5.3. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.2) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній – розв'язку (5.1) (1-ше наближення)

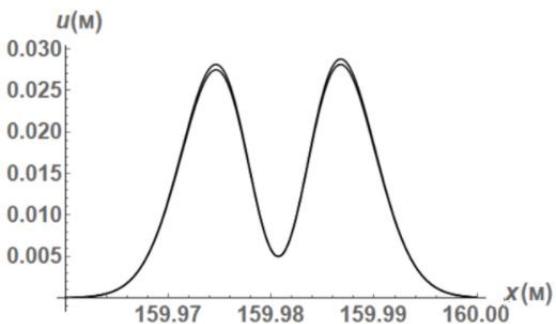


Рис. 5.4. Профіль хвилі Гаусса, що відповідає відстані в $40 \cdot 10^2$ довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.3) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.2) (1-ше + 2-ге наближення)

Рис. 5.3, 5.4 демонструють спотворення початкового профілю - утворення двох горбів і збільшення максимальної амплітуди. При поширенні хвилі на велику відстань обидва розв'язки (5.2) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.3) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) показують суттєві і різні результати. Для хвилі, яка відповідає першим трьом наближенням горби, стають більш крутіші та спостерігається западання лівого і піднесення правого горба.

Вплив третього наближення суттєвий відносно початкового профілю, але менш суттєвий відносно другого наближення. Отриманий ефект спостерігається на великих відстанях поширенні хвилі при незмінній підошві хвилі.

Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу хвилі Гаусса засвідчують, що згідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі початковий профіль деформується суттєво і майже зберігає симетричність профіля, яка супроводжується розпадом одного горба на два виявляючи два нелінійні хвильові ефекти - не однакові схили горбів зліва і справа та несиметричні зміщення вершин горбів.

У підрозділі 5.2.1. розглянуто нелінійну хвилю Уїттекера. Проведено аналіз на основі методу 2 (обмеження на градієнт зміщення) для перших трьох наближень.

Розглядається задача про хвилю Уїттекера $W_{k,m}(z)$ з параметрами ($k=1/4, m=1/4$). Тоді початковий профіль приймає вигляд

$$u_1^{(1)}(\sigma) = u_1^0 W_{1/4;1/4}(\sigma), \quad (5.4)$$

де u_1^0 - початкова амплітуда хвилі і $\sigma = a(x_1 - v_L t)$ - фаза хвилі.

Розв'язок, для першого і другого наближень такий:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha(a)^2 v_L(u_1^0)^2 \left(\frac{1}{4\sigma} - \frac{1}{2} \right)^2 (W_{1/4;1/4}(\sigma))^2, \quad (5.5)$$

Розв'язок, для першого, другого і третього наближень такий:

$$\begin{aligned} u_1^{(1+2+3)}(x_1, t) = & u_1^0 W_{1/4;1/4}(\sigma) - (1/2)t\alpha(a)^2 v_L(u_1^0)^2 (1/4\sigma - 1/2)^2 (W_{1/4;1/4}(\sigma))^2 - \\ & -(1/8)t(\alpha)^2(a)^3 v_L(u_1^0)^3 (1/4\sigma - 1/2)^3 (W_{1/4;1/4}(\sigma))^3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

У підрозділі 5.2.2. наведені параметри матеріалу, які були взяті аналогічні тим, що застосувались в попередньому підрозділі.

У підрозділі 5.2.3.1 проведено числовий аналіз хвилі Уїттекера (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення) та розглянуто перший варіант початкового профіля ($k=1/4, m=1/4$) для матеріалу M51.

У підрозділі 5.2.3.2 проведено числовий аналіз хвилі Уїттекера (аналогічно попередньому підрозділу) але вже для матеріалу M52.

На рис. 5.5, 5.6 наведено графіки, що відповідають матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підошви хвилі $L = 0,037$.

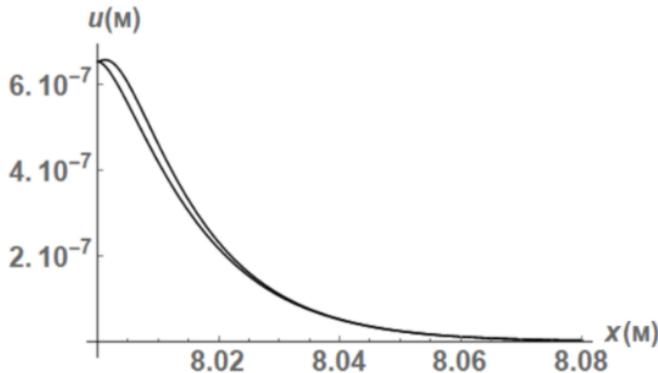


Рис. 5.5. Профіль хвилі Уїттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше наближення)

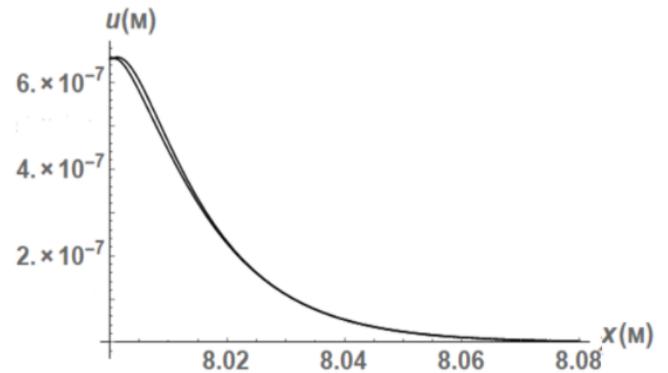


Рис. 5.6. Профіль хвилі Уїттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге наближення)

Рис. 5.5, 5.6 демонструють незначне відхилення від початкового профіля і збільшення максимальної амплітуди. Хвиля які відповідає розв'язку (5.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) не змінює довжину підошви і демонструє лише незначне відхилення від початкового профілю.

Третє наближення більше впливає на початковий профіль в порівнянні з дру-

гим, але цей ефект спостерігається тільки на достатньо великих відстанях поширення хвилі.

У підрозділі 5.2.3.3 проведено числовий аналіз хвилі Уіттекера (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення) та розглянуто другий варіант початкового профіля ($k = 5/4, m = 5/4$) для матеріалу M51, що дає можливість проаналізувати вплив другого та третього наближення на інший початковий профіль хвилі в порівнянні із попереднім вибором цього профіля.

У підрозділі 5.2.3.4 проведено числовий аналіз хвилі Уіттекера (аналогічно попередньому підрозділу) але вже для матеріалу M52.

Наступна група графіків рис. 5.7, 5.8 відповідає матеріалу M52 і значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_1^0 = 1 \cdot 10^{-6}$ та значення підошви хвилі $L = 0,037$.

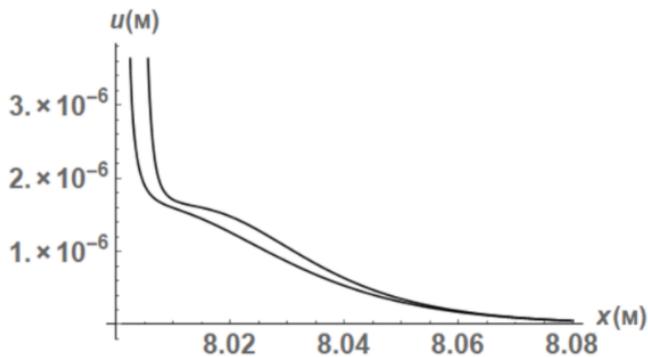


Рис. 5.7. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (5.4) (1-ше наближення)

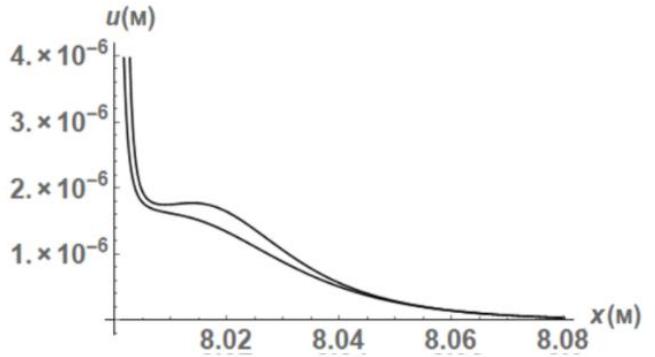


Рис. 5.8. Профіль хвилі Уіттекера, що відповідає відстані в 218 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (5.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (5.5) (1-ше + 2-ге наближення)

Хвилі, які відповідають розв'язкам (5.5) (1-ше + 2-ге наближення) і (5.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), показують незначне і не однакове відхилення від початкового профіля. Хвilia, яка відповідає першим трьом наближенням дає більший ефект в порівнянні з хвилею, що відповідає першим двом наближенням та вносить нове явище – утворення горба.

Вплив перших трьох наближень на початковий профіль, при поширенні поодинокої хвилі Уіттекера для конфігурації параметрів ($k = 5/4, m = 5/4$), що відповідає якісно іншому початковому профілю в порівнянні з хвилею з параметрами ($k = 1/4, m = 1/4$), є подібним зберігаючи при цьому несиметричність спотворення.

Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу хвилі Уіттекера засвідчують, що з гідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі початковий профіль деформується суттєво і зберігає несиметричність профіля, що супроводжується зменшенням підошви хвилі. При цьому у певному виборі параметрів початкового профіля на профілі утворюється горб.

Шостий розділ містить теоретичний та числовий аналіз (сценарії еволюції початкового профіля хвилі) поширення радіальної циліндричної поодинокої хвилі Макдональда та Фрідляндра (несиметричні профілі без горба), для перших двох та трьох наближень за методом обмеження на градієнт зміщення.

У підрозділі 6.1.1. розглянута нелінійна хвиля Макдональда. Проведено аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень.

Лінійний розв'язок з початковим профілем у вигляді хвилі Макдональда такий

$$u_r^{(1)}(r,t) = u_0 K_0(\sigma), \quad \sigma = a(r - c_L t) \quad (6.1)$$

де u_0 - початкова амплітуда хвилі, розв'язок для перших двох наближень

$$u_r^{(1+2)}(r,t) \approx u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_1(\sigma)]^2; \quad (6.2)$$

розв'язок для перших трьох наближень

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r,t) \approx & u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t [K_1(\sigma)]^2 - \\ & -(1/8)(u_0)^3 a^3 c_L (\tilde{N}_1)^2 t [-K_1(\sigma)]^3. \end{aligned} \quad (6.3)$$

При побудові графіків профіля хвилі, яка поширюється від циліндричної порожнини радіуса r_o , врахований факт, що повинна виконуватися умова $r \geq r_o$.

У підрозділі 6.1.2. наведені параметри матеріалу, які були взяті такими ж, що застосувались в попередньому розділі. Результати наведені для матеріалу M52. Для поодинокої хвилі Макдональда (яка є функцією скінченної ваги) приймається припущення, що довжина підошви хвилі є інтервалом, для якого площа під графіком початкового профілю хвилі поза цим інтервалом є малою (не перевищує 5 %).

При представленні хвилі через функцію Макдональда у вигляді $K_0(a(r - c_L t))$ параметр a визначає довжину підошви хвилі. Для обох матеріалів початкова підошва та амплітуда хвилі вибирались однаковими.

У підрозділі 6.1.3. проведено числовий аналіз поширення хвилі Макдональда (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення).

При побудові графіків виконується умова, що $r \geq r_o = 0.001$ м.

Далі розглянуто графіки, де на всіх рис. 6.1, 6.2 наведено варіант, що відповідає матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система СІ): $\alpha = -34.08, u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ та значення підошви хвилі $L = 0,037$, ($a = 160$).

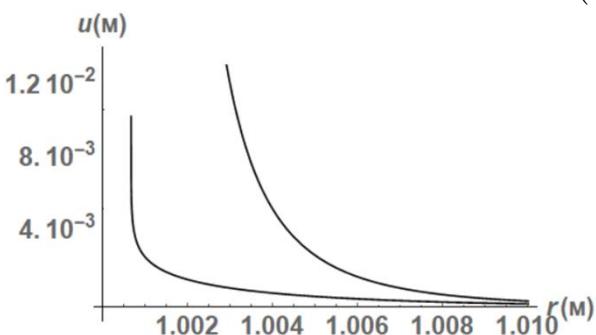


Рис. 6.1. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.2) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.1) (1-ше наближення)

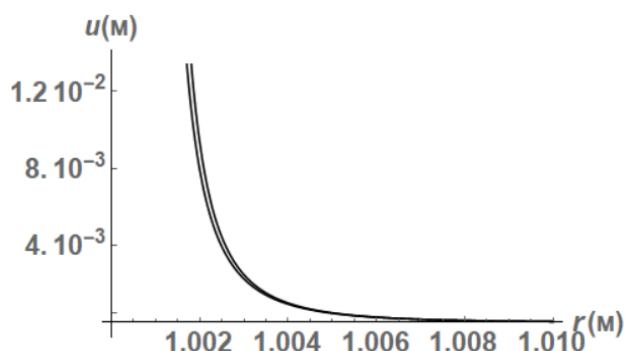


Рис. 6.2. Профіль хвилі Макдональда, що відповідає відстані в 34 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.3) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.2) (1-ше + 2-ге наближення)

На рис. 6.1 спостерігається значне відхилення хвилі, що відповідає розв'язку (6.2), (1-ше + 2-ге наближення) відносно початкового профілю хвилі, що відповідає розв'язку (6.1), 1-ше наближення). Хвilia для перших двох наближень стає круті-

шою, зменшується значення підошви та збільшується значення максимальної амплітуди. Відхилення між профілями, що відповідають розв'язку (6.2) (1-ше + 2-ге наближення) та розв'язку (6.3) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) рис. 6.2 незначні при цьому значення максимальної амплітуди незмінне.

Отже, для циліндричної хвилі Макдональда, спотворення несиметричного початкового профіля відбувається несиметрично аналогічно як і для плоских поздовжніх хвиль. Спільним є те, що вплив третього наближення спостерігається тільки для достатньо великих відстаня.

У підрозділі 6.2.1. розглянуто нелінійну хвиллю Фрідляндра. Проведено аналіз на основі методу обмеження на градієнт зміщення для перших трьох наближень.

Хвilia Фрідляндра має вигляд

$$F(\sigma) = u_0 e^{-\sigma/x_{att}} \left(1 - \sigma/x_{att}\right) \quad (6.4)$$

де u_0 - початкова амплітуда хвилі, $\sigma = a(r - c_L t)/x_{att}$ - фаза хвилі і постійна x_{att} - характеризує крутину профіля.

Розв'язок для перших двох наближень

$$u_r^{(1+2)}(r, t) \approx u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right) - (1/2) c_L \tilde{N}_1 t a^2 \frac{(u_0)^2}{x_{att}^2} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^2 \left[e^{-2a(r - c_L t)/x_{att}} \right] \quad (6.5)$$

у випадку (6.11), для перших трьох наближень

$$\begin{aligned} u_r^{(1+2+3)}(r, t) \approx & u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right) - \\ & - (1/2) c_L \tilde{N}_1 t a^2 \frac{(u_0)^2}{x_{att}^2} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^2 \left[e^{-2a(r - c_L t)/x_{att}} \right] + \\ & + (1/8) c_L (\tilde{N}_1)^2 t a^3 \frac{(u_0)^3}{x_{att}^3} \left(2 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)^3 \left[e^{-3a(r - c_L t)/x_{att}} \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

При побудові графіків хвилі, яка поширюється від циліндричної порожнини радіуса r_o , врахований той факт, що $r \geq r_o$, аналогічно до хвилі Макдональда.

У підрозділі 6.2.2. наведені параметри матеріалу, які вказані в попередньому підрозділі.

Функція Фрідляндра $F(a(r - c_L t)) = u_0 e^{-a(r - c_L t)/x_{att}} \left(1 - a(r - c_L t)/x_{att}\right)$ визначається параметрами: параметр a визначає довжину підошви хвилі ($a = 70$), постійний параметр x_{att} - характеризує затухання профіля (крутину). Початкова амплітуда вибрана для кожного матеріалу в одному варіанті.

У підрозділі 6.2.3.1 проведено числовий аналіз хвилі Фрідляндра (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення) та розглянуто перший варіант початкового профіля $x_{att} = 3,52$ для матеріалу M51.

У підрозділі 6.2.3.2 проведено числовий аналіз хвилі Фрідляндра (аналогічно попередньому підрозділу), але для матеріалу M52.

На рис. 6.3, 6.4 наведено варіант, для матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система CI): $\alpha = -34,08$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 3,52$ та значення підошви хвилі $L = 0,016$.

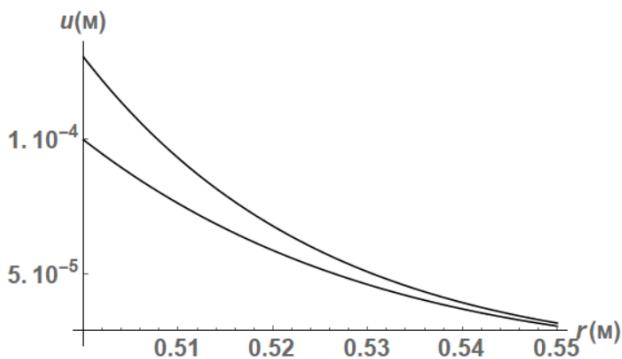


Рис. 6.3. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення) а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

На рис. 6.3 спостерігається значна відмінність між хвилею, що відповідає розв'язку (6.4) (1-ше наближення) та хвилею для розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення). Хвilia, що відповідає двом наближенням, не змінює довжину підошви і демонструє значне відхилення вгору від початкового профілю, при цьому максимальне значення амплітуди для хвилі, що відповідає розв'язку (6.5), збільшується.

Також присутні незначні зміни відхилення профілів один від одного при порівнянні хвиль відповідних розв'язків (6.5) (1-ше + 2-ге наближення) та (6.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) рис. 6.4. В даному випадку профіль, що відповідає першим трьом наближенням, відхиляється вгору від профілю, що відповідає першим двом наближенням, і значення його максимальної амплітуди збільшується.

Отже вплив третього наближення при поширенні поодинокої циліндричної хвилі Фрідляндер на достатньо великі відстанні аналогічний випадку для циліндричної радіальної хвилі з профілем у вигляді функції Макдональда.

У підрозділі 6.2.3.3 проведено числовий аналіз хвилі Фрідлянdera (застосовано метод 2 і враховано перші три наближення) та розглянуто перший варіант початкового профіля $x_{att} = 1,02$ для матеріалу M51.

У підрозділі 6.2.3.4 проведено числовий аналіз хвилі Фрідлянdera (аналогічно попередньому підрозділу) але для матеріалу M52.

У підрозділах 6.2.3.3 та 6.2.3.4 взяті початкові параметри хвилі, які вирізняють профіль хвилі Фрідлянdera від попереднього випадку. Отримана хвilia не є вже схожою на хвилю Макдональда. Показано, що при різних конфігураціях параметрів початкового профіля хвилі змінюється сам початковий профіль, але еволюція, яка викликана нелінійністю, має однаковий характер.

Рис. 6.5, 6.6 відповідають матеріалу M52 і таким значенням параметрів (система CI) : $\alpha = -34.08$, $u_0 = 1 \cdot 10^{-4}$, $x_{att} = 1,02$ та значення підошви хвилі $L = 0,016$.

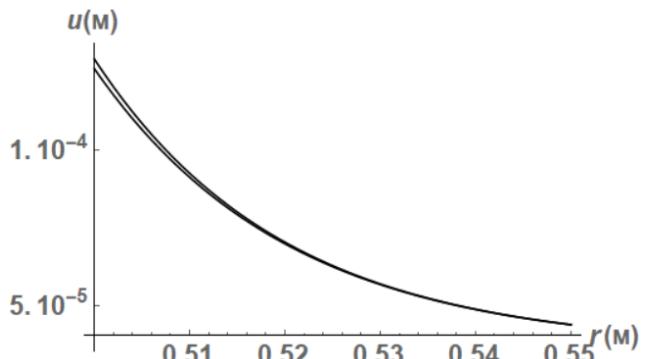


Рис. 6.4. Профіль хвилі Фрідляндер, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення)

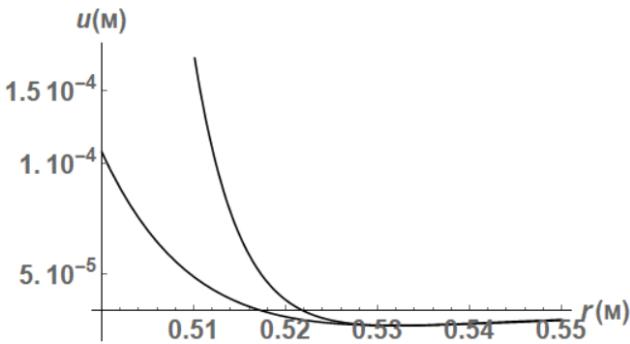


Рис. 6.5. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення), а нижній - розв'язку (6.4) (1-ше наближення)

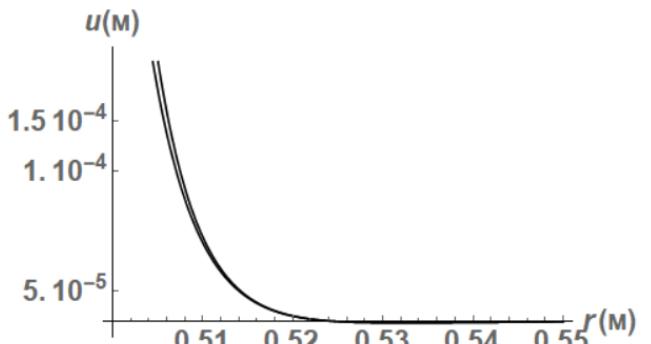


Рис. 6.6. Профіль хвилі Фрідляндерса, що відповідає відстані в 35 довжин підошви хвилі, верхній графік відповідає розв'язку (6.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення), а нижній - розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення)

Рис. 6.5 демонструє, що хвіля, яка відповідає розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення), стає крутішою ніж хвіля, що відповідає початковому профілю (розв'язок (6.4)), максимальна амплітуда збільшується і розмір підошви зменшується. Профіль, що відповідає розв'язку (6.6) (1-ше + 2-ге + 3-те наближення) відхиляється вгору від профілю, що відповідає розв'язку (6.5) (1-ше + 2-ге наближення) для додатніх значень амплітуди і обидва профілі для від'ємних значень амплітуди аналогічним чином притискаються асимптотично до осі, також значення максимальної амплітуди збільшується.

Отже вплив третього наближення при поширенні хвилі Фрідляндерса для параметру $x_{att} = 1,02$ на достатньо великі відстанні аналогічний хвилі Фрідляндерса для параметру $x_{att} = 3,52$, для додатніх значень амплітуди. Різниця для даних типів хвиль полягає у тому, що хвіля Фрідляндерса для параметру $x_{att} = 1,02$ має значення як і для від'ємних, так і для додатніх амплітудах.

Отримані результати як теоретичного, так і числового аналізу циліндричної радіальної хвилі Фрідляндерса (як приклад хвилі з несиметричним профілем) засвідчують, що згідно з отриманими сценаріями еволюції хвилі, нелінійний хвильовий ефект полягає у зміщенні графіка вгору відносно початкового профіля для додатніх значень амплітуд і зміні підошви профіля.

Сьомий розділ присвячений теоретичному та числовому аналізу поширення нелінійно пружної крутильної хвилі (побудові сценаріїв еволюції початкового профіля хвилі і розподілу амплітуд хвилі всередині циліндра).

У підрозділі 7.1.1 розглянуто нелінійне хвильове рівняння, яке описує поширення пружної крутильної хвилі. Задача про поширення крутильних хвиль вздовж осі симетрії кругового циліндра в лінійній постановці є класичною в теорії пружності і нелінійне рівняння має вигляд (1.28).

Базуючись на підході до побудови нелінійної теорії крутильних хвиль, отримано хвильове нелінійне рівняння у вигляді лінійного рівняння з невідомою нелінійною фазовою швидкістю

$$\left\{ \left(v_T \right)^2 \left[1 - (1/2)B/\mu \right] \left[\left(\tilde{u}_{g,r} \right)^2 + \frac{1}{r} \tilde{u}_{g,r} \tilde{u} + \frac{2}{r^2} \tilde{u}_g^2 + \left(\tilde{u}_{g,z} \right)^2 \right] \right\} \times \quad (7.1)$$

$$\times \left(\tilde{u}_{\vartheta,rr} + (1/r) \tilde{u}_{\vartheta,r} \left(-\left(1/r^2 \right) + \omega^2 \right) \tilde{u}_\vartheta + \tilde{u}_{\vartheta,zz} \right) = 0.$$

В аналізі цього рівняння застосовано і узагальнено метод обмеження на градієнт зміщення.

У підрозділі 7.1.2 розглянуті деякі факти з класичної задачі лінійної теорії пружності про поширення крутильних хвиль.

Гармонічна крутильна хвиля в напрямку осі симетрії циліндра Oz збуджується імпульсом $u_\vartheta(t) = u_\vartheta^o e^{i\omega t}$, прикладеним до поперечного перерізу циліндра (круга) $z=0$. Тоді в циліндрі виникає крутильна хвиля, яка поширюється вздовж його осі.

Для опису крутильної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу використовуються циліндричні координати (r, ϑ, z) і додаткові умови $u_r(r, z, t) = u_z(r, z, t) = 0$.

Лінійне рівняння руху у випадку крутильних хвиль є таким

$$\sigma_{r\vartheta,r} + \sigma_{z\vartheta,z} = \rho u_{\vartheta,tt} \rightarrow u_{\vartheta,rr} + (1/r) u_{\vartheta,r} - \left(1/r^2 \right) u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} - \left(1/v_T^2 \right) u_{\vartheta,tt} = 0. \quad (7.2)$$

Колове зміщення u_ϑ є гармонічним у часі і просторі і має вигляд

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (7.3)$$

Залежна від радіуса амплітуда хвилі визначається з рівняння

$$u_{\vartheta,rr}^o + (1/r) u_{\vartheta,r}^o + \left[k_z^2 - k_T^2 - \left(1/r^2 \right) \right] u_\vartheta^o = 0. \quad (7.4)$$

Розв'язок рівняння (7.4) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого індексу)

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta^o J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}, \text{де } \beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}. \quad (7.5)$$

Хвильове число k_z і відповідна фазова швидкість $v_z = (\omega/k_z)$ визначаються з умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра.

Умова $\sigma_{r\vartheta}(r^o, z, t) = 0$ дає рівняння з якого знаходяться хвильове число k_z

$$\beta r^o J_0(\beta r^o) = 2 J_1(\beta r^o) \quad (7.6)$$

Рівняння (7.6) має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o$ ($k = 1, 2, \dots$). Відповідно, крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями $(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}$.

У підрозділі 7.1.3 застосовано новий наближений метод побудови розв'язку не-лінійного хвильового рівняння для крутильної хвилі.

Розв'язок рівняння (7.1) представляється у вигляді хвилі з невідомим хвильовим числом і невідомою амплітудою

$$u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r) e^{i(k_z z - \omega t)} \text{ або } u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta^o J_1\left(r \sqrt{k_K^2 - k_z^2}\right) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (7.7)$$

Після підстановки $u_\vartheta(r, z, t) = \tilde{u}_\vartheta(r) e^{i(k_z z - \omega t)}$ у другий множник першого доданку (7.1) нелінійне хвильове рівняння (7.1) перетворюється на якби лінійне рівняння зі зміненою швидкістю хвилі $v_K = c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{\vartheta,r})^2 + \frac{1}{r} u_{\vartheta,r} u_\vartheta + \frac{2}{r^2} u_\vartheta^2 + (u_{\vartheta,z})^2 \right]}$,

$$\tilde{u}_{g,rr} + (1/r)\tilde{u}_{g,r} - \tilde{u}_g \left(1/r^2 - (k_z)^2 - (k_K)^2 \right) = 0, \quad (7.8)$$

де $k_K = \omega / \sqrt{\left(c_T \sqrt{1 - \frac{B}{2\mu} \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]} \right)}$.

За новим методом, введено обмеження на змінну швидкість

$$\frac{B}{2\mu} M(u_g) \ll 1, \quad M(u_g) = \left[(u_{g,r})^2 + \frac{1}{r} u_{g,r} u_g + \frac{2}{r^2} u_g^2 + (u_{g,z})^2 \right]. \quad (7.9)$$

Далі розкладено корінь (вираз для швидкості) в ряд зі збереженням перших двох членів $\sqrt{1 - (B/2\mu)M(u_g)} \approx 1 - (B/4\mu)M(u_g)$.

Для рівняння (7.8) його розв'язок можна записати через функцію Бесселя

$$\tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^o J_1 \left(r \sqrt{k_K^2 - k_z^2} \right), \quad \tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^o J_1(\beta_K r) \quad \beta_K = \sqrt{k_K^2 - k_z^2}. \quad (7.10)$$

Тоді функція Бесселя $J_1 \left(\sqrt{k_K^2 - k_z^2} r \right)$ наблизено представлена так:

$$J_1 \left(r \sqrt{k_K^2 - k_z^2} + r \frac{B k_K^2}{4\mu \sqrt{k_K^2 - k_z^2}} M(u_g) \right). \quad (7.11)$$

Далі за методом використано друге обмеження

$$\delta = r \frac{B k_K^2}{4\mu \sqrt{k_K^2 - k_z^2}} M(u_g) \ll 1. \quad (7.12)$$

До (7.11) застосовано перше наближення $J_1(\sigma + \delta) \approx J(\sigma) + J'(\sigma)\delta$ за формулою Тейлора в околі точки $\sigma = r \sqrt{k_K^2 - k_z^2}$, вважаючи (7.12) малою величиною. Тоді розв'язок (7.10) з урахуванням (7.11) і (7.12) наблизено представляється так:

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1(\sigma) + (\tilde{u}^o)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r \frac{B k_K^2}{8\mu} [J_0(\sigma) - J_2(\sigma)] \times \\ \times \left\{ \frac{(k_K^2 - k_z^2)}{4} [J_0(\sigma) - J_2(\sigma)]^2 + \frac{\sqrt{k_K^2 - k_z^2}}{2r} [(J_0(\sigma) - J_2(\sigma)) J_1(\sigma)] + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) [J_1(\sigma)]^2 \right\}. \quad (7.13)$$

Отже, при поширенні крутильної хвилі відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра (добавка містить змінний радіус r як множник). Друге спотворення пов'язане з тим, що на поверхні циліндра лінійна гармонічна хвilia (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки, тобто, хвilia спотворюється до вигляду модульованої хвилі (добавка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку).

У підрозділі 7.1.4. прокоментовано граничні умови в нелінійній задачі про крутильної хвилі.

Хвильове число k_z і швидкість хвилі $v_z = (\omega/k_z)$ в нелінійній задачі про крутильної хвилі визначені, як і для лінійної задачі, з додатковою умовою відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$

$$\sigma_{rr}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = \sigma_{rz}(r^o, z, t) = 0. \quad (7.14)$$

Всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і не можуть одночасно бути нульовими, оскільки у такому випадку для знаходження одного хвильового числа задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеню. Для розв'язання цієї проблеми збережено в граничних умовах нелінійної задачі одну граничну умову щодо дотичного напруження σ_{rz} . Саме ця умова у лінійній постановці трансформується в трансцендентне рівняння для знаходження хвильового числа, а дві інші умови визначають напруження на бічній поверхні циліндра, що знаходяться із конститутивних рівнянь.

В нелінійній задачі про крутільну хвилю появляється нормальнє напруження σ_{rr} , яке залежить лише нелінійно від зміщення u_g .

Зважаючи на теоретичну складність врахування нелінійної граничної умови для напруження σ_{rz} , у першому наближенні, для спрощення задачі приймають цю граничну умову лінійною.

Тоді гранична умова перетворюється у рівняння

$$r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2} J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) = 2 J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right). \quad (7.15)$$

Достовірність наближеного представлення (7.15) регулюється певними обмеженнями. Перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі.

У *підрозділі 7.2.1.* розглядаються властивості матеріалів, які використані при числовому аналізі моделювання спотворення початкового профіля крутільної хвилі.

Вибрано три матеріали: сталь 11, сталь 22 та сталь 23. Характеристики сталі 22 такі (система СІ): $\rho = 0,357 \cdot 10^4$; $\mu = 0,114 \cdot 10^{10}$; $B = -3,84 \cdot 10^{10}$. Далі вибрано першу моду і знайдено значення першого кореня трансцендентного рівняння (7.15) $k_T = 176,96 \text{ 1/m}$, і хвильове число $k_z = 5,65$.

У *підрозділі 7.2.2.* проведено числовий аналіз крутільної хвилі (застосовано новий метод обмеження змінної швидкості).

Побудовано графіки залежності амплітуди хвилі як всередині, так і на поверхні циліндра.

Залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра (1-ше+2-ге наближення), має такий вигляд:

$$u_{g(lin+Nonlin)}^{in}(r, z, t) = \tilde{u}^o J_1(\sigma) + (\tilde{u}^o)^3 r \frac{Bk_T^2}{8\mu} [J_0(\sigma) - J_2(\sigma)] \times \\ \times \left\{ \frac{\left(k_T^2 - k_z^2\right)}{4} [J_0(\sigma) - J_2(\sigma)]^2 + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} [(J_0(\sigma) - J_2(\sigma)) J_1(\sigma)] + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) [J_1(\sigma)]^2 \right\}, \quad (7.16)$$

де $\sigma = r \sqrt{k_T^2 - k_z^2}$.

Перший доданок в (7.16) дає 1-ше наближення залежності амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра. Другий доданок в (7.16) дає 2-ге наближення.

Залежність амплітуди хвилі від фазової змінної при русі хвилі вздовж осі циліндра (на поверхні циліндра, 1-ше+2-ге наближення) є такою:

$$\begin{aligned}
 u_{g(lin+Nonlin)}^{ext}(r^o, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1(\sigma^o) + (\tilde{u}^o)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r^o \frac{Bk_T^2}{8\mu} [J_0(\sigma^o) - J_2(\sigma^o)] \times \\
 & \times \left\{ \frac{(k_T^2 - k_z^2)}{4} [J_0(\sigma^o) - J_2(\sigma^o)]^2 + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r^o} [(J_0(\sigma^o) - J_2(\sigma^o)) J_1(\sigma^o)] + \left(\frac{2}{(r^o)^2} - (k_z)^2 \right) [J_1(\sigma^o)]^2 \right\},
 \end{aligned} \quad (7.17)$$

де $\sigma^o = r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}$.

Залежність амплітуди хвилі від координати z та радіуса циліндра при русі хвили вздовж поверхні циліндра (1-ше наближення) - перший доданок в (7.17).

Залежність амплітуди хвилі від координати z та радіуса циліндра при русі хвили вздовж поверхні циліндра (2-ге наближення) - другий доданок в (7.17).

З формули (7.17) випливає, що перший доданок відповідає першому наближенню (першій гармоніці), другий доданок відповідає другому наближенню але третьій гармоніці.

На рис. 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу - сталь 22 і таким значенням параметрів (система СІ): амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$ та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$.

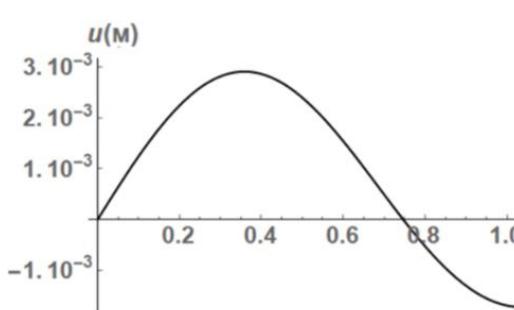


Рис. 7.1. Амплітуда хвилі всередині циліндра
(1-ше наближення) (7.16)

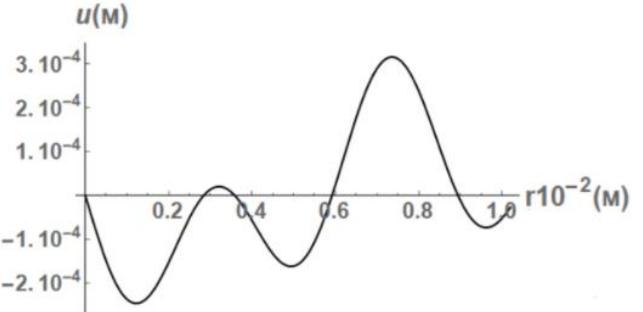


Рис. 7.2. Амплітуда хвилі всередині циліндра
(2-ге наближення) (7.16)

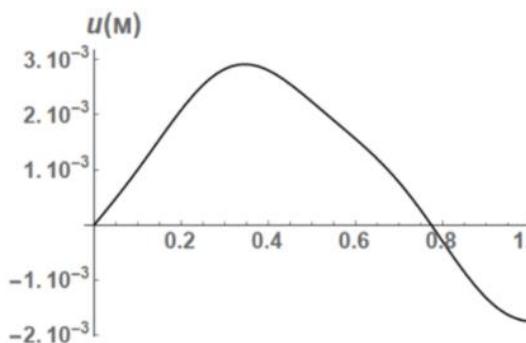


Рис. 7.3. Амплітуда хвилі всередині циліндра
(1-ше+2-ге наближення) (7.16)

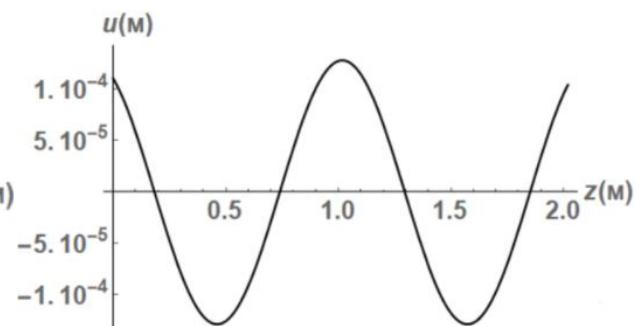


Рис. 7.4. Хвилі на поверхні циліндра
(1-ше наближення) (7.17)

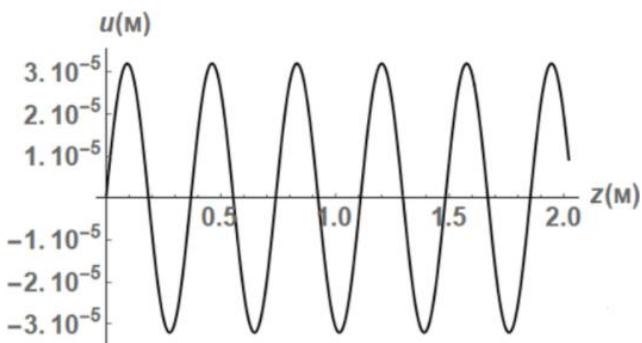


Рис. 7.5. Хвиля на поверхні циліндра (7.17)
(2-ге наближення)

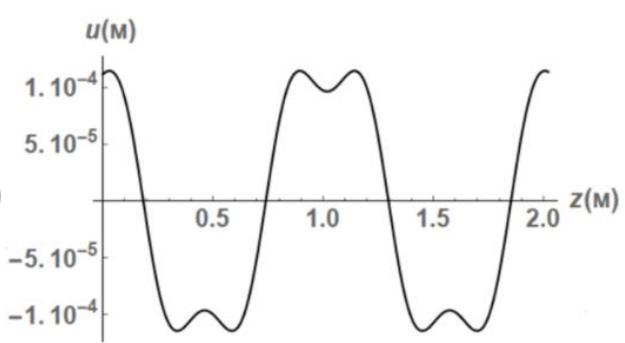


Рис. 7.6. Хвиля на поверхні циліндра (7.17)
(1-ше+2-ге наближення)

З рис. 7.1 випливає, що хвиля (перша мода) є гармонічною з частотою першої гармоніки, однак максимальна амплітуда хвилі залежить від вибору параметрів задачі – частоти хвилі, параметрів матеріалу та радіуса.

Друге нелінійне рис. 7.2. стосується зміни амплітуди хвилі в залежності від радіуса всередині циліндра. Суттєвим є вибір хвильового числа, який визначає кількість нулів і піків в розподілі амплітуди. Найбільша амплітуда хвилі спостерігається близьче до осі циліндра.

На рис. 7.3 об'єднано вже лінійну (перша гармоніка) та нелінійну хвилі (третя гармоніка). Тут зображене залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра. Графіки свідчать, що спостерігається тенденція, до утворення двох піків та двох нулів.

Далі на рис. 7.4, 7.5 зображені графіки залежності амплітуди хвилі від координати z для лінійного випадку та нелінійної добавки. Рисунок 7.4 відповідає кла-сичній гармонічній хвилі (перша гармоніка). Рисунок 7.5 дає можливість оцінити вплив нелінійної частини (третіої гармоніки) на лінійну частину. На рис. 7.6 зображені графіки залежності амплітуди хвилі від фазової змінної при русі хвилі вздовж осі циліндра (на поверхні циліндра) за формулою (7.17). Розв'язок (7.17) 1-ше + 2-ге наближення показує, тенденцію до утворення двох горбів для додатних значень амплітуди і двох впадин для від'ємних значень амплітуди. Хвиля 1+2 є модульованою хвилею, утвореною першою та другою гармоніками з суттєво відмінними амплітудами. Профіль цієї хвилі не змінюється в процесі руху хвилі.

У підрозділі 7.2.3 проведений числовий аналіз впливу величини радіуса циліндра на параметри крутильної хвилі.

Формула (7.16) описує явище впливу величини радіуса циліндра на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Для кількісної оцінки впливу було проведено комп'ютерне моделювання розподілу амплітуд хвилі всередині циліндра.

В авторефераті розглянута перша мода хвилі, 1 матеріал, 2 варіанти радіуса циліндра ($r = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м, $r = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м), 1 варіант частоти поширення хвилі та початкової мак-симальної амплітуди. Перший графік (а) відповідає першому наближенню, другий (б) - другому наближення, а третій (в) - 1-му та 2-му наближенням разом.

Для числового моделювання вибрано параметри матеріалу, які були взяті аналогічні тим, що застосувались в попередньому підрозділі. Результати наведені для матеріалу сталь 22.

Рис. 7.7, 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12 наведено графіки для варіанта, що відповідає матеріалу сталь 22 і таким значенням параметрів (система СІ): амплітуда $\tilde{u}^o = 5 \cdot 10^{-3}$

та частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$.

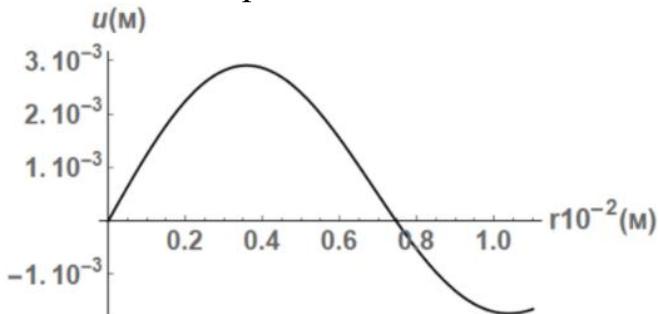


Рис. 7.7. Амплітуда хвилі, що відповідає
(1-ше наближення, $r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

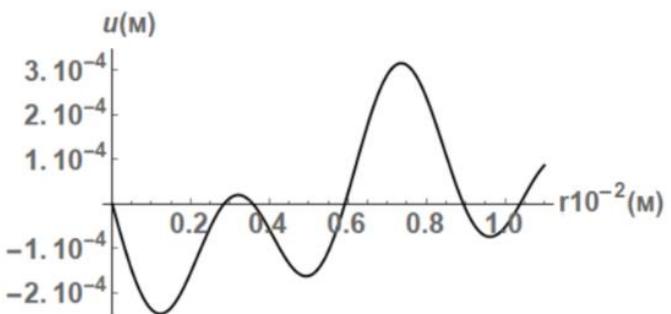


Рис. 7.8. Амплітуда хвилі, що відповідає
(2-ге наближення, $r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

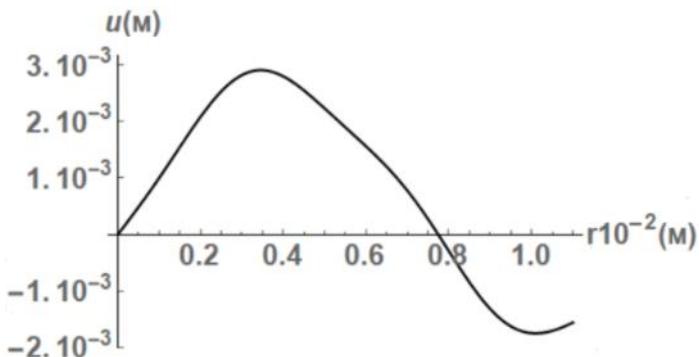


Рис. 7.9. Амплітуда хвилі, що відповідає
(1-ше+2-ге наближення, $r = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

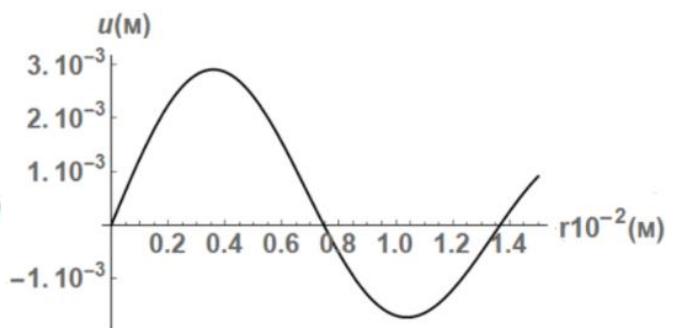


Рис. 7.10. Амплітуда хвилі, що відповідає
(1-ше наближення, $r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

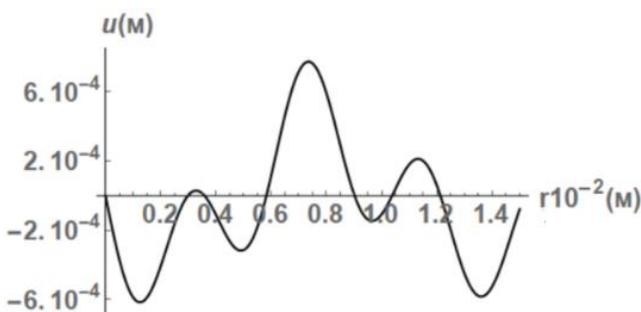


Рис. 7.11. Амплітуда хвилі, що відповідає
(2-ге наближення, $r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

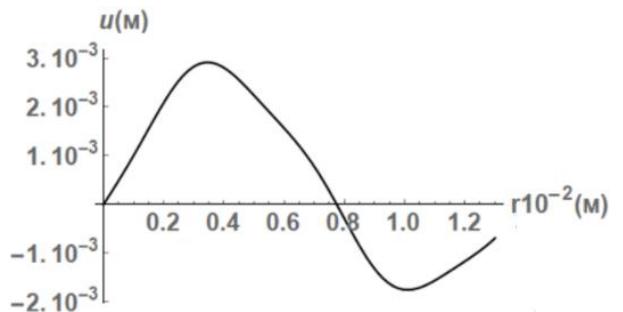


Рис. 7.12. Амплітуда хвилі, що відповідає
(1-ше+2-ге наближення, $r = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$)

З графіків випливає, що вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутильна хвилля, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра суттєвий.

У восьмому розділі проведено теоретичний та числовий аналіз і побудовано сценарії еволюції швидкості та амплітуди сейсмічної хвилі для трьох типів ґрунту при зміні частоти хвилі і зміні часу поширення хвилі. При цьому промодельовано деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Додатково запропоновано новий в теорії сейсмічних хвиль метод визначення реологічних параметрів ґрунтових шарів.

У підрозділах 8.1 – 8.5 коротко розглянуті та прокоментовані відповідні задачі реологічних моделей: сейсмічна гармонічна поперечна хвилля в трикомпонентній системі «атмосфера – пружний ґрунтовий шар – пружний скельний масив», загальні

факти з теорії в'язкопружності, двоелементна реологічна модель Максвелла, двоелементна реологічна модель Фойхта та стандартна реологічна модель (триелементні моделі Пойнтінга-Томсона та Кельвіна).

У підрозділі 8.6. розглянута задача про гармонічну сейсмічну хвилю в рамках стандартної реологічної моделі.

Застосовано прямий підхід до аналізу поширення зсувної гармонічної хвилі в рамках стандартної моделі. Рівняння руху має вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu_0 n \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (8.1)$$

При вивченні гармонічних хвиль, які описує реологічне рівняння (8.1), можливі три випадки: випадок 1 – хвиля затухає за просторовою координатою і має вигляд $u(x, t) = Ae^{-\gamma x - i(kx - \omega t)}$; випадок 2 – затухання за часом і тоді хвиля має вигляд $u(x, t) = Ae^{i[kx - (\omega + i\alpha)t]}$; випадок 3 – відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом $u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$.

У випадку 1 відповідні розв'язки залежності швидкості зсувної хвилі від частоти та залежність затухання амплітуди хвилі від частоти наступні:

$$v_T = (v_T^o) \sqrt{2nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)} \times \sqrt{\omega^2 nm \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right) + \omega^4 n^2 m^2 \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)^2}{(m-1)^2} \right) + \frac{1}{(m-1)^2}}. \quad (8.2)$$

$$\gamma = \frac{(m-1)}{2(v_T^o) nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)} \quad (8.3)$$

$$\times \sqrt{2nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right) \left(\omega^2 nm \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}{(m-1)^2} \right) \pm \sqrt{\omega^4 n^2 m^2 \left(\frac{1}{(m-1)} - \frac{m \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)^2}{(m-1)^2} \right) + \frac{1}{(m-1)^2}} \right)}.$$

У випадку 2 відповідні розв'язки залежності швидкості від коефіцієнта затухання хвилі α з часом поширення хвилі та залежності величини α від частоти

$$v_T^2 = \frac{v_T^{o2}}{3\alpha_x^2/\omega^2 + 2\alpha_x/n\omega^2 - 1} \quad (8.4)$$

$$\alpha_T^3 + \alpha_T^2 (3/4n)(1+1/m) + \alpha_T (1/2n^2 m - \omega^2) - \omega^2 (1/4n)(1+1/m) = 0. \quad (8.5)$$

Оскільки математично важко виразити α_T з рівняння (8.5), то прийнято, що гра-

фіки відносно (8.4) та (8.5) слід отримувати з рівнянь поточково – шляхом вибору десяти значень ω та відповідної підстановки в дані рівняння.

Розв'язок для випадку 2 (затухання за часом) відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом і має вигляд

$$u(x,t) = Ae^{i[kx - (\omega + i\alpha)t]} = Ae^{(ikx - i\omega t + \alpha t)} = Ae^{\alpha t} \cos(kx - \omega t). \quad (8.6)$$

Випадок 3 досліжується аналогічно до двох попередніх випадків.

У підрозділі 8.7. наведено простий спосіб визначення трьох реологічних параметрів моделі. Цей спосіб застосовується в механіці полімерних матеріалів і, скоріш за все, невідомий у механіці ґрунтів та сейсмофізиці. Перевага методу полягає у тому, що всі три параметри реологічної моделі визначаються з однієї кривої повзучості, отриманої з досліду на одновісний розтяг чи простий зсув.

Теоретична крива повзучості у стандартній реологічній моделі визначається за формулою

$$\varepsilon(t) = \sigma^o \left[\frac{1}{H} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{H} \right) e^{-\frac{H}{En}t} \right]. \quad (8.7)$$

Спочатку фіксуються моменти часу $t = t_n (n = 0, 1, 2, 4, 8, 16, \dots)$ і вводяться позначення $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$, $\varepsilon(t_1) = \varepsilon_1$, $\varepsilon(t_2) = \varepsilon(2t_1) = \varepsilon_2$, ... $H/En = 1/b$. Тоді з (8.7) отримується рівність

$$\frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2} = \frac{(\varepsilon_2)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_4}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_0 - \varepsilon_4}. \quad (8.8)$$

Для знаходження ε_0 , використовують (8.8) яке дає значення миттєвого модуля E (для кривої повзучості значення напруження σ відоме)

$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma}{H}, \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}, b = \frac{En}{H}, \quad (8.9)$$

Далі знаходять три величини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4$, які визначаються з кривої повзучості. За умови $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ значення ε_0 знаходиться як корінь квадратного рівняння (8.8). При відомому ε_0 значення деформації при довготривалій повзучості ε_∞ (отже, тривалого модуля H) згідно з першою формулою (8.9)), вираховується формулою

$$\varepsilon_\infty = \frac{(\varepsilon_1)^2 - \varepsilon_0 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2}.$$

Час релаксації n для конкретних точок на кривій t_N при позначенні $b_N = \frac{En}{H} t_N$ значення деформації, яке відповідає цій точці на кривій, визначається за простою формулою

$$-b_N = \ln \left[\frac{\varepsilon_\infty - \varepsilon(b_N)}{\sigma} \frac{HE}{H - E} \right], \quad (8.10)$$

Формула (8.10) дає значення часу релаксації, на чому процедура знаходження реологічних параметрів закінчується.

У підрозділі 8.8. обчислено параметри реологічної моделі для трьох типів ґрунтових шарів - бурого суглинку, піщаного жирного суглинку та мулистої глини. та проведений числовий аналіз сценаріїв зміни швидкості хвилі та затухання амплітуди хвилі з часом та відстанню поширення хвилі.

Розглянуто можливість застосування описаного підходу до аналізу ґрунтових шарів. Для цього використано експериментальні криві повзучості трьох типів ґрунтових шарів. На рисунках 8.1 та 8.2 показані залежності деформації зсуву від часу при різних значеннях прикладеного зсувного напруження.

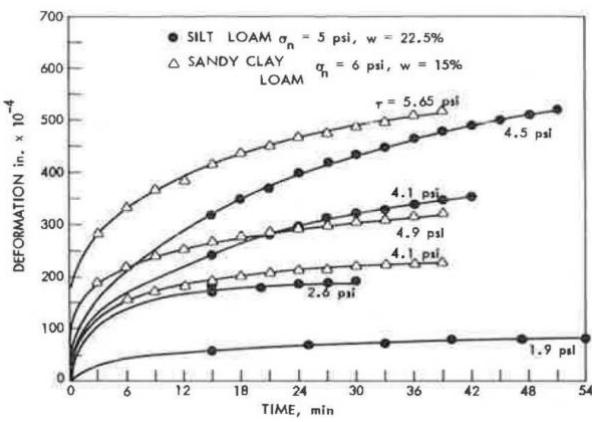


Рис. 8.1 Криві повзучості для бурого суглинку та піщаного жирного суглинку

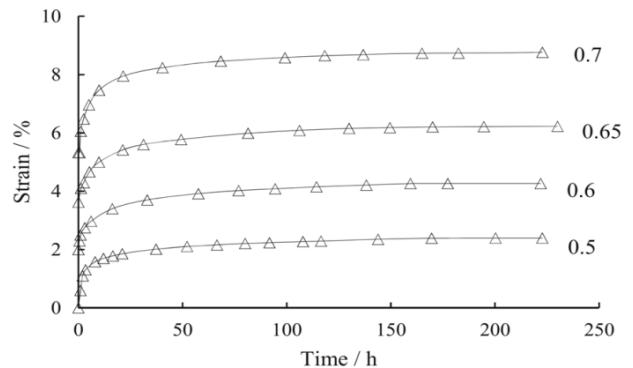


Рис. 8.2 Криві повзучості для мулистої глини

Далі проведено теоретичний та чисельний аналіз для кожного типу ґрунтових шарів. Всього розглянуто 6 прикладів. Кожному прикладу відповідає один із трьох ґрунтових шарів і два різні значення напруження σ . Отримані результати показані в авторефераті тільки для одного типу ґрунту-піщаний жирний суглинок для $\sigma = 4,1 \text{ psi}$

З кривої, яка відповідає піщаному жирному суглинку (рис. 8.1) при значенні напруження $\sigma = 4,1 \text{ psi} = 28,25851 \text{ KPa}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г}/\text{cm}^3$ (третя знизу крива на рисунку 8.1), фіксуємо моменти часу: $t_1 = 540, t_2 = 1080, t_4 = 2160$ (у секундах).

З форми вибраної кривої відповідні значення деформації є такими (система CI): $\varepsilon_1 = 5,83 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_2 = 6,66 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_3 = 7,5 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_0 = 4,4 \cdot 10^{-3}, \varepsilon_\infty = 8,0 \cdot 10^{-3}$, а відповідні значення миттєвого і тривалого модулів зсуву, швидкостями хвилі та відношення модулів є такими (система CI): $E = \mu_0 = 6,28 \cdot 10^6, H = \mu_\infty = 3,51 \cdot 10^6, \mu_0/\mu_\infty = m = 1,8, v_T^o = \sqrt{\mu_0/\rho} = 75,94, v_T^\infty = \sqrt{\mu_\infty/\rho} = 56,77$.

Час релаксації визначається за формулою (8.10): $n = 639.87$ секунд.

На рис. 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7 наведено графіки для варіанта, що відповідає ґрунтовому шару піщаний жирний суглинок з такими значеннями параметрів: $\sigma = 4,1 \text{ psi}$ і густині $\rho = 1,09 \times 10^3 \text{ г}/\text{cm}^3$

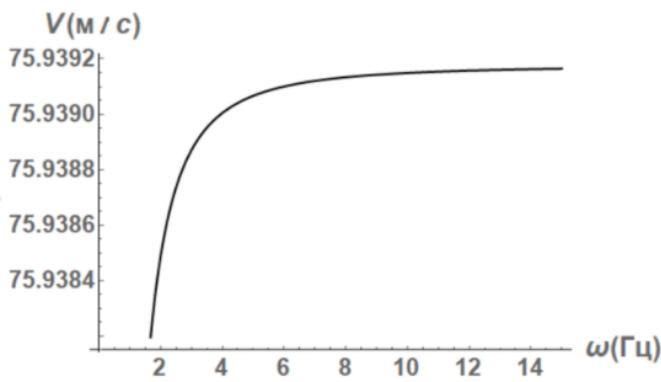


Рис. 8.3. Залежність швидкості хвилі від частоти (випадок 1)

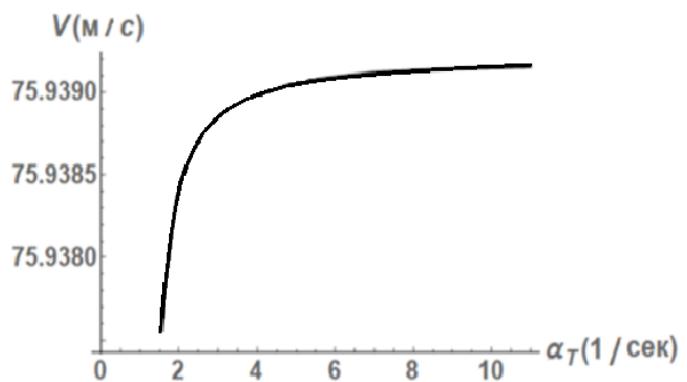


Рис. 8.4. Залежність швидкості хвилі від затухання (випадок 2)

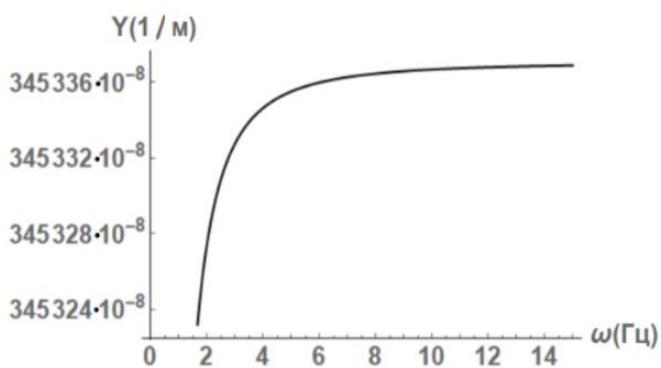


Рис. 8.5. Залежність затухання амплітуди хвилі від частоти (випадок 1)

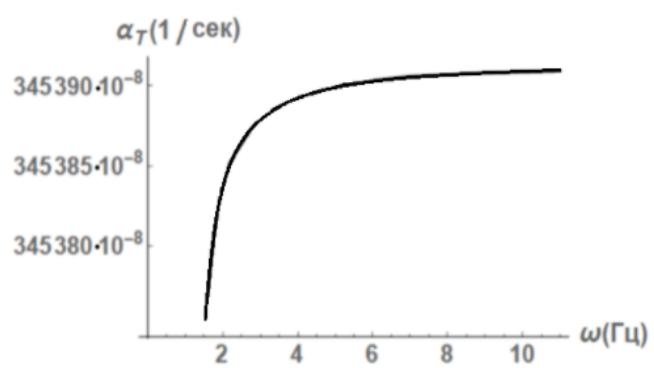


Рис. 8.6. Залежність затухання α_T від частоти хвилі (випадок 2)

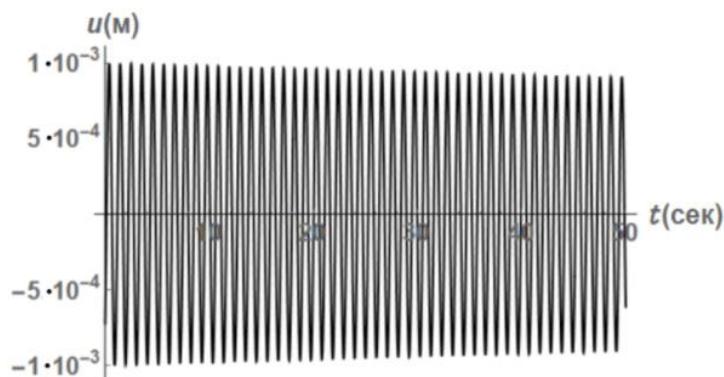


Рис. 8.7. Сценарій еволюції хвилі в залежності від часу

На рис. 8.3 та 8.5 спостерігається зміна швидкості хвилі (випадки 1 і 2 відповідно). Швидкість суттєво нелінійно змінюється зі зміною частоти, але спостережена зміна складає долі процента від початкового значення швидкості. Це означає, що зміна незначна і хвилю можна вважати недисперсійною.

На рис. 8.4 та 8.6 спостерігається нелінійна зміна затухання амплітуди хвилі з пройденою хвилею відстанню при зміні частоти та з часом поширення хвилі (випадки 1 і 2 відповідно). Ситуація аналогічна ситуації, показаній на першій групі графіків.

Рис. 8.7 показує сценарій еволюції хвилі при її поширенні (тобто, в залежності

від часу поширення). Показані сценарії підтверджують початкове припущення, що стандартна реологічна модель описує хвилю, експоненціально затухаючу з часом поширення.

Отже, в цілому спостережена для даного ґрунту в рамках стандартної реологічної моделі двох варіантів сейсмічних плоских зсувних гармонічних хвиль формально нелінійна залежність характеристик хвилі від частоти трансформується практично у настільки незначну, що нею можна знехтувати. При цьому, базову для реологічних моделей властивість експонентціального затухання амплітуди з часом поширення хвилі застосована модель описує.

Іншими словами, залежності швидкості хвилі і коефіцієнту затухання хвилі від частоти виявили неочікувану з практичної точки зору ситуацію, коли суттєва нелінійність цих залежностей спостерігається лише для дуже низьких частот від 1 до 4 Гц і для більших значень частоти швидкість і затухання хвилі практично є постійними.

Висновки.

ВИСНОВКИ ЗАГАЛЬНОГО ХАРАКТЕРУ

1. Найбільш загальний висновок з отриманих в роботі результатів полягає у тому, що ці результати є новими і у сукупності складають певний закінчений фрагмент сучасної нелінійної теорії хвиль в матеріалах.
2. Для чотирьох типів хвиль (плоска поздовжна, плоска поперечна – зсувна, циліндрична радіальна, крутильна) побудовано сценарії еволюції. Ці хвилі характеризуються різними початковими профілями – гармонічний косинусоїдальний, поодинокий симетричний з одним горбом, поодинокий несиметричний з одним горбом, поодинокий несиметричний без горба. Отже, застосований до групи хвиль підхід уможливив побудову нових сценаріїв, які відповідають фізичному сенсу проаналізованих задач.
3. Проведено порівняння різних сценаріїв за великою кількістю критеріїв порівняння. Сформульовані нові коментарі до отриманих сценаріїв. Показано, що сценарії за одними критеріями схожі, а за іншими – відмінні. Отримана сукупність сценаріїв і їх порівняння демонструють різноманітність процесу еволюції. У тому числі, подібності і відмінності цього процесу.
4. Отримано нові нелінійні хвильові рівняння для плоских поздовжніх хвиль (хвиль Гаусса та Уіттекера), плоских поперечних хвиль (сейсмічних гармонічних хвиль), циліндричних радіальних (хвиль Макдональда та Фрідляндра), крутильних гармонічних хвиль. Отримана множина нелінійних хвильових рівнянь створює базу даних для узагальнень і уточнень, які характерні для сучасної теорії хвиль.
5. Побудовано в рамках одного наближеного підходу обмеження на градієнт зміщення перші два і три наближення при розв'язуванні хвильових задач. Отримані загальні формули дають можливість вивчати конкретні початкові профілі.
6. Проведено числове моделювання для порівняння двох та трьох наближень розв'язку хвильової задачі при різних типах матеріалів, підошв і максимальних

амплітуд з метою виявлення впливу другого і третього наближення на споворення початкового профілю хвилі. Цей вплив завжди присутній якісно, однак кількісно він може бути незначним для певних конкретних початкових профілів.

7. Побудовано сценарії поширення сейсмічної плоскої поперечної хвилі прямим методом розв'язання реологічного хвильового рівняння. Успішна реалізація вибраного підходу створює можливість для розвитку нового напрямку в аналізі сейсмічних хвиль.

КОНКРЕТИЗОВАНІ ВИСНОВКИ СТОСОВНО РЕЗУЛЬТАТІВ, ВИКЛАДЕНИХ В ОКРЕМИХ РОЗДІЛАХ

8. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної плоскої поздовжної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень. Цей метод успішно застосований до ряду нелінійних хвильових задач, має загальний характер і може бути застосованим для інших нових задач.
9. Розділ 3. Запропоновано і реалізовано новий наближений метод знаходження розв'язку нелінійного хвильового рівняння щодо пружної циліндричної радіальнної хвилі, оснований на перетворенні цього рівняння і обмеженні на градієнт зміщення. Метод виявився успішним. Отримано формулу для знаходження перших трьох наближень. Загальність отриманих формул створює можливість їх застосування і у випадку інших циліндричних хвиль.
10. Розділ 4. Для нелінійної задачі поширення поздовжної хвилі з гармонічним профілем проведено числове моделювання (два різні методи розв'язування в рамках двох та трьох перших наближень). Основний висновок – методи дають відмінні між собою результати для вищих апроксимацій.
11. Розділ 4. Засвідчено існування нелінійного хвильового ефекту, який супроводжує класичний ефект утворення другої гармоніки гармонічної хвилі на виході з квадратично нелінійного середовища, коли на вході генерується перша гармоніка. Ефект полягає в несиметричному деформуванні профіля другої гармоніки, яке відбувається з моменту початку руху хвилі і виявляється в зміщенні нулів вліво та вершин вверх. В результаті поєднання двох ефектів – присутності другої гармоніки в другому наближенні і деформуванні її класичного профіля – отриманий за двома наближеннями профіль стає несиметричним. Це спостереження стосується практично всіх розглянутих в роботі сценаріїв.
12. Розділ 4. Спостережено при аналізі отриманих графіків (для двох перших наближень за двома методами – послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення) утворення двох горбів замість одного. Отже, тут обидва методи описують основний нелінійний хвильовий ефект.
13. Розділ 4. Внаслідок різного математичного представлення при описанні еволюції початкового профіля хвилі профіль спотворюється по-різному. Для методу послідовних наближень третє наближення вводить нелінійну поправку четвертого порядку, яка не змінює знак при зміні знаку амплітуди, тоді як для мето-

ду обмеження на градієнт зміщення поправка має третій порядок і змінює знак при зміні знаку амплітуди. Як відомо, при відмінностях в математичному описі механічних явищ критерієм є коректний експеримент.

14. Розділ 4. Отримані при застосуванні обох методів графіки для двох перших наближень показують подібні спотворення. У випадку методу послідовних наближень еволюція відбувається асиметрично: додатна частина профілю перетворюється у два горби, тоді як від'ємна частина має тенденцію трансформуватися по-іншому. У випадку методу обмеження на градієнт зміщення спотворення відбувається теж несиметрично щодо умовної вертикальної осі. Отже, математичні процедури відмінні між собою і більш ґрутовну відповідь можна отримати шляхом розширення нових нелінійних моделей і експериментальних спостережень.
15. Розділ 4. Виявлено, що для гармонічної хвилі третє наближення, знайдене за обома методами, змінює суттєво як початковий профіль так і профіль в рамках «перше +друге наближення». Зміна проявляється також по-різному. Для методу 1 виявлено тенденцію до утворення четвертої гармоніки, а для методу 2 - виявлено тенденцію до суттєвої деформації другої гармоніки. Можливо, при розширенні кількості типів початкових профілів можна буде виявити основну тенденцію у впливі наближень.
16. Розділ 5. Проведено числове моделювання та побудовані сценарії еволюції поширення поздовжної поодинокої хвилі з початковими профілями у вигляді функцій Гаусса та Уіттекера. Тут враховані два і три перші наближення, отримані за методом обмеження на градієнт зміщення. Реалізований підхід виявився успішним – сценарії відповідають фізичному змісту задачі.
17. Розділ 5. Отримані для хвилі Гаусса графіки для двох і трьох перших наближень в рамках методу обмеження на градієнт зміщення відрізняються між собою. Для перших двох наближень спотворення відбувається практично симетрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два горби. Для перших трьох наближень спотворення відбувається асиметрично відносно умовної вертикальної прямої, що проходить через вершину горба – утворюються два різні горби - лівий горб опускається і правий піднімається. Для всіх наближень розмір підошви хвилі є незмінним. Отже, врахування третього наближення вносить нові хвильові ефекти.
18. Розділ 5. Для несиметричної хвилі Уіттекера з двома варіантами початкового профіля з застосуванням методу обмеження на градієнт зміщення отримано графіки для двох та трьох перших наближень. Для першого варіанту показано, що для обох наближень (1+2) і (1+2+3) спотворення відбувається несиметрично. Швидкість еволюції для різних варіантів і наближень різна, значення максимальної амплітуди зростає та розмір підошви зменшується. Третє наближення вносить зміни в профіль.
19. Розділ 5. Хвилі Уіттекера для другого варіанту початкового профіля та відповідного розв’язку другого і третього наближення еволюціонують аналогічно несиметрично з різною дисторсією – зокрема третє наближення демонструє

утворення горба. Швидкість спотворення та значення максимальної амплітуди для наближень (1+2+3) більша ніж для (1+2), а розмір підошви зменшується. Отже, обидва несиметричні профілі хвилі Уїттекера еволюціонують по-різному і вплив третього наближення не є суттєвим по відношенню до другого.

20. Розділ 6. Проведено числове моделювання та побудовані сценарії еволюції за методом обмеження на градієнт зміщення для нелінійної задачі поширення циліндричної радіальної поодинокої хвилі з початковим профілем у вигляді функцій Макдональда та Фрідляндра в рамках двох та трьох перших наближень. Отримані графіки показують, що несиметричність профілю Макдональда зберігається, а спотворений профіль стає крутішим і розмір підошви зменшується. Швидкість спотворення для наближення (1+2+3) вища ніж для (1+2). Застосований підхід виявився успішним. Отримані сценарії відповідають фізичному сенсу задачі.
21. Розділ 6. Показано теоретично і чисельно, що еволюція хвиль Макдональда та Фрідляндра для першого варіанту початкового профіля подібна. З цього факту випливає, що в рамках аналізу еволюції обидва профілі є взаємозамінними, хоча математично представлені по-різному.
22. Розділ 6. Для хвилі Фрідлендера з другим варіантом початкового профіля пока зано, що вона спотворюється несиметрично у випадку другого та третього наближення. Спотворення відбувається як для додатних значень амплітуд, так і від ’ємних. Для додатних профіль стає крутішим, а для від’ємних стає близчим до горизонтальної осі, а підошва суттєво зменшується. Проведений аналіз свідчить, що вибір форми початкового профіля є важливим – відповідні сценарії можуть суттєво відрізнятися.
23. Розділ 6. Хвilia Фрідляндра проаналізована для двох варіантів початкового профіля. Спостережено, що для першого варіанту спотворення відбувається аналогічно випадку хвилі Макдональда.
24. Розділ 6. Одним з основних висновків при порівняння хвиль Макдональда та Фрідляндра є те, що функція Макдональда може розглядатися як точний розв’язок нелінійного хвильового рівняння, а функцію Фрідлендера можна інтерпретувати як наближений розв’язок цього рівняння.
25. Розділ 7. Проаналізована циліндрична крутильна хвilia, яка поширюється в напрямку осі кругового циліндра. Отримана достатньо проста формула для знаходження розподілу амплітуд всередині циліндра і виявлені особливості розподілу.
26. Запропоновано і застосовано метод обмеження на зміну швидкість хвилі для перших двох наближень у випадку наближеного аналізу простого варіанту хвильового рівняння крутильної хвилі. Метод обмежує зміну швидкості крутильної хвилі і узагальнює метод, розвинений для інших хвильових рівнянь.
27. Розділ 7. Проведено числове моделювання спотворення початкового профіля радіальної циліндричної крутильної хвилі в напрямку осі циліндра та напрямку від поверхні циліндра до його центру для трьох типів матеріалів. Застосовані формули уможливили побудову нових сценаріїв еволюції, які відповідають фізичному сенсу задачі.

28. Розділ 7. Показано існування змінного спотворення крутальної хвилі у радіальному напрямку (всередині кругового циліндра) і постійного у осьовому (вздовж його осі симетрії).
29. Розділ 7. Спостережено значний вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутальна хвилья, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Зокрема, це явище не коментоване для лінійної задачі і може трактуватися як новий хвильовий ефект.
30. Розділ 8. Запропоновано і реалізовано опис деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Такий підхід є новим і перспективним в теорії сейсмічних хвиль.
31. Розділ 8. Розроблено і застосовано новий і перспективний в теорії сейсмічних хвиль метод визначення параметрів реологічної моделі на основі експериментальної кривої повзучості реального ґрунтового шару.
32. Розділ 8. Для аналізу гармонічної сейсмічної хвилі застосовано прямий метод розвязування нелінійного хвильового рівняння. Успішність методу у випадку цієї задачі свідчить про його універсальність.
33. Розділ 8. Показано чисельно (для трьох типів ґрунтових шарів – мулиста глина, піщаний жирний суглинок, бурий суглинок), що для гармонічної сейсмічної хвилі зміна амплітуди хвилі з часом чи зі зміною частоти супроводжується затуханням амплітуди хвилі. Значення амплітуди зі збільшенням часу поширення чи частоти асимптотично прямують до нуля за експонентціальним законом. Оскільки показано, що суттєва нелінійність зміни амплітуди і затухання для дуже низьких частот є настільки незначною, що нею можна знехтувати, то можна вважати, що проведене дослідження підтверджує прийняті в теорії сейсмічних хвиль положення про постійність швидкості хвилі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Ruzytskii Я.Я., Yurchuk B.N.* О влиянии третьего приближения при анализе эволюции нелинейно упругой Р-волны. Часть 1//Прикл. механика. – 2020. – 56, N5. – С. 65 – 77. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-wave. Part 1// Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N5. – P. 581 – 589. (квартиль Q3)
2. *Ruzytskii Я.Я., Yurchuk B.N.* О влиянии третьего приближения при анализе эволюции нелинейно упругой Р-волны. Часть 2//Прикл. механика. – 2020. – 56, N6. – С. 17 – 27. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Effect of the Third Approximation in the Analysis of the Evolution of a Nonlinear Elastic P-Wave. Part 2// Int. Appl. Mech. – 2020. – 56, N6. – P. 666 – 673. (квартиль Q3)
3. *Ruzytskii Я.Я. Юрчук В.М.* Нетипова еволюція поодинокої хвилі, що поширюється в нелінійно пружному середовищі //Доповіді НАН України, 2020, N12. - С.28-37. (категорія “Б”)
4. *Ruzytskii Я.Я., Yurchuk B.M.* До еволюції плоскої гармонічної хвилі в нелінійно пружному композитному матеріалі, що моделюється двофазною сумішшю // Прикл. механіка. – 2021. – 57, N2. – С. 58 – 69; *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N* On the

Evolution of a Plane Harmonic Wave in a Nonlinear Elastic Composite Material Modeled by a Two-Phase Mixture//Int.Appl.Mech.– 2021. – 57, N2. – P. 172 – 183. (квартиль Q3)

5. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Аналогії між класичною задачею про коливання тіл і не класичною задачею про поширення плоских хвиль// Прикл. механіка. – 2021. 57, N4. – С. 11 – 22; Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Analogies Between the Classical Problem on the Oscillation of Bodies and the Nonclassical Problem on the Propagation of Plane Waves //Int.Appl.Mech. – 2021. – 57, N4. – P. 386 – 394. (квартиль Q3)

6. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М., О.М. Григорчук., Я.В. Симчук Нехарактерна еволюція нелінійно пружної поодинокої циліндричної хвилі// Прикл. механіка. – 2021. 57, N6. – С. 3 – 20; Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N., Hryhorchuk O. M., Symchuk Ya. V. Noncharacteristic Evolution of a Nonlinear Elastic Single Cylindrical Wave //Int.Appl .Mech. – 2021. – 57, N6. – P. 619 – 634. (квартиль Q3)

7. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Спотворення нелінійно пружної поодинокої плоскої хвилі з профілем Фрідляндра// Прикл. механіка. – 2022. 58, N4. – С. 21 – 31. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Distortion of a Nonlinear Elastic Solitary Plane Wave with Friedlander Profile // Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N4. – P. 389–397. (квартиль Q3)

8. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Порівняння еволюції пружної поодинокої циліндричної хвилі з профілями Фрідляндра та Макдональда // Прикл. механіка. – 2022. 58, N5. – С. 16 – 26. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Comparison of the Evolution of a Solitary Elastic Cylindrical Wave with Friedlander and Macdonald Profiles// Int.Appl. Mech. – 2022. – 58, N5. – P. 497–509. (квартиль Q3)

9. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Комп'ютерний аналіз повільних і швидких хвиль в композитному матеріалі // Прикл. механіка. – 2022. 58, N6. – С. 3 – 17. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. Computer Analysis of Slow and Fast Waves in a Composite Material // Int.Appl.Mech. – 2022. – 58, N6. – P. 623–633. (квартиль Q3)

10. Rushchitsky, J., Yurchuk, V. Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (Harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, and Friedlander Initial Profiles). Chapter 25 in: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) Advances in Mechanics//Springer, Cham – 2023. vol 191. – P. 435-468.

11. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Новий варіант методу обмеження на градієнт зміщення, що виникає при аналізі еволюції крутальної хвилі // Прикл. механіка. – 2023. 59, N2. – С. 19 – 27. Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N. New Variant of the Method of Constraints for the Displacement Gradient that Arises When Analyzing the Evolution of a Torsional Wave //Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N2. – P. 145–152. (квартиль Q4)

12. Кендзера О.В., Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. До реологічної моделі ґрунтового шару: визначення параметрів моделі з досліду на повзучість шару // Прикл. механіка. – 2023. 59, N4. – С. 3 – 17. Kendzera O.V., Rushchitsky J. J., Yurchuk V. M. Rheological Model of Soil Layer: Determination of Its Parameters from Creep Study //Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N4. – P. 381–393. (квартиль Q4)

13. Руцицький Я.Я., Хотенко О.О., Юрчук В.М. Про особливості граничних умов в аналізі нелінійних хвиль наприкладі поверхневої і крутальної хвиль // Прикл. механіка. – 2023. 59, N5. – С. 44 – 60. Rushchitsky J.J., Khotenko O.O., Yurchuk V.M. Peculiarities of the Boundary Conditions in the Analysis of Nonlinear Waves for Surface and Torsional Waves as Examples // Int.Appl.Mech. – 2023. – 59, N5. – P. 540–554.

(квартиль Q4)

14. Руцицький Я.Я., Сінчилло С.В., Юрчук В.М. Нові нелінійні хвильові рівняння для крутильних пружних хвиль, новий наближений метод аналізу рівнянь, числове моделювання еволюції хвиль // Прикл. механіка. – 2023. 59, N6. – С. 14 – 25. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Yurchuk V.M. New Nonlinear Wave Equations for Analysis of Torsional Elastic Waves and Modeling of Their Evolution //Int.Appl.Mech. –2023. – 59, N6. – P. 641–651. (квартиль Q4)

15. Юрчук В.М., Сінчилло С.В. Крутильні пружні хвилі. Деякі аспекти нелінійного аналізу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка – 2023. N2. – С. 172 – 175. (категорія “Б”)

16. Юрчук В.М., Комп’ютерне моделювання впливу величини радіуса циліндра на параметри крутильної нелінійної пружної хвилі // Прикл. механіка. – 2024. 60, N4. – С. 118 – 124. Yurchuk V.M. Computer Simulation of Effect of Cylinder Radius on Parameters of Torsional Nonlinear Elastic Wave //Int.Appl.Mech. –2024. – 60, N4. – P. 488–493. (квартиль Q3)

17. Руцицький Я.Я., Юрчук В.М. Про одну особливість еволюції нелінійної пружної хвилі з різними початковими профілями // Прикл. механіка. – 2024. 60, N5. – С. 112 – 116. Rushchitsky J. J., Yurchuk V. M. Peculiarity of Evolution of Nonlinear Elastic Wave with Different Initial Profiles //Int.Appl.Mech. –2024. – 60, N5. – P. 608–612. (квартиль Q3)

18. Руцицький Я.Я. Юрчук В.М. Про один нелінійний хвильовий ефект, який виникає за генерації другої гармоніки//Доповіді НАН України, 2025, N1. - С.22-30. (категорія “Б”)

АНОТАЦІЯ

Юрчук В.М. Сценарії поширення хвиль різних початкових профілів в матеріалах, які деформуються нелінійно пружно. – Рукопис. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – “Механіка деформівного твердого тіла”, (131 – прикладна математика). – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2025.

У дисертації досліджено поширення плоских і циліндричних хвиль в конструкційних матеріалах, що деформуються пружно нелінійно, і сейсмічних хвиль в ґрунтових шарах, що деформуються вязкопружно, виявляючи нелінійність при деформуванні. Хвилі в матеріалах вважаються поодинокими різного початкового профіля за винятком крутильних хвиль, профіль яких описується гармонічною функцією. Хвилі в ґрунтах вважаються сейсмічними (в цих хвильях частоти є малими). Вивчаються нелінійні поздовжні плоскі хвилі і нелінійні циліндричні хвилі, з яких вибрано два типи – циліндричні радіальні і крутильні.

В роботі основну увагу приділено впливу нелінійності деформування на еволюцію хвиль різного початкового профіля. При цьому розвинуто нові підходи розв’язування отриманих для різних типів хвиль та різних середовищ нелінійних хвильових рівнянь.

Усі хвилі, за винятком сейсмічної хвилі, вивчаються із застосуванням однієї з найбільш розвинених моделей нелінійної теорії пружності - п’ятиконстантної моделі

Мернагана. В даній дисертаційній роботі нелінійність моделей основана на врахуванні квадратичної та кубічної нелінійностей, що може трактуватися як одиг з елементів новизни проведених досліджень.

В дисертаційній роботі порівняно еволюцію початкового профіля хвиль при різних рівнях наближеннях (першого, перших двох і трьох наближень) розв'язку нелінійного хвильового рівняння. Вивчено вплив параметрів, заданих при нелінійній постановці задачі, на загальну картину поширення хвиль (характер еволюції початкового профілю) та інших характеристик хвиль.

Для чотирьох типів хвиль (плоска поздовжна, плоска поперечна – зсувна, циліндрична радіальна, крутильна) побудовано сценарії еволюції. Ці хвилі характеризуються різними початковими профілями - гармонічний косинусоїдальний, подінокий симетричний з одним горбом (функція Гаусса), поодинокий несиметричний з одним горбом (функція Уіттекера), несиметричний без горба (функція Макдональда та Фрідляндра). Застосований до групи хвиль підхід уможливив побудову нових сценаріїв, які відповідають фізичному сенсу проаналізованих задач.

При вивченні сейсмічних хвиль деформування ґрунтових шарів описано стандартною триконстантною реологічною моделлю, проаналізовано поширення хвиль в ґрунтових шарах і застосовано метод визначення параметрів реологічної моделі з експерименту на повзучість конкретного ґрунтового шару. Визначені реологічні параметри використано для побудови сценаріїв зміни швидкості двох варіантів зсувної гармонічної сейсмічної хвилі і амплітуди хвилі для трьох досліджених типів ґрунтів.

В дисертації, для поздовжньої гармонічної хвилі нелінійні хвильові рівняння аналізуються методами послідовних наближень та обмеження на градієнт зміщення з метою проведення порівняння цих підходів при побудові розв'язків, у яких враховано перші три наближення.

При аналізі циліндричних радіальних поодиноких хвиль застосовано метод обмеження на градієнт зміщення та отримано нелінійне хвильове рівняння, для якого знайдено розв'язок у вигляді перших двох та трьох наближень з метою їх теоретичного і чисельного порівняння.

При вивчені нелінійно пружної крутильної хвилі запропоновано узагальнений метод обмеження на градієнт швидкості зміщення для знаходження перших двох наближень. Оскільки проаналізоване нелінійне хвильове рівняння є новим, то це демонструє застосовність методу для більш широкого класу хвильових задач.

При аналізі гармонічної сейсмічної хвилі, яка поширюється в ґрунтових шарах вперше застосовано прямий метод при побудові наближеного розв'язку хвилі.

Чисельний аналіз еволюції початкового профілю хвилі виконаний за допомогою комп’ютерної алгебри. Це дозволило проаналізувати чисельно вплив різних порядків нелінійностей для поздовжніх, поперечних, циліндричних та крутильних хвиль, а також визначити реологічні параметри з метою побудови сценаріїв еволюції.

Отже, одержані теоретичні і числові результати уможливили побудову сценаріїв поширення хвиль в матеріалах, що описуються нелінійними моделями пружного і вязкопружного деформування, кращого розуміння впливу кількості наближень

при розв'язуванні хвильової задачі на сценарії поширення різних типів хвиль.

Ключові слова: еволюція початкового профіля хвилі, нелінійна модель пружного і вязкопружного деформування матеріалу, пятиконстантна модель Мернагана, триконстантна стандартна модель вязкопружності, пружна поодинока хвилля, плоска хвилля, циліндрична радіальна хвилля, крутільна хвилля, квадратична і кубічна нелінійності, метод послідовних наближень, метод обмеження на градієнт зміщення, нелінійні хвильові ефекти.

ANNOTATION

Yurchuk V.M. Scenarios of propagation of waves of different initial profiles in materials that deform nonlinearly elastically. - Manuscript. Dissertation for obtaining a scientific degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.02.04 – solid mechanics (131 - applied mathematics). - S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2025.

In this dissertation, the propagation of plane and cylindrical waves in structural materials that deform elastically nonlinearly, and seismic waves in soil layers that deform viscoelastically, revealing nonlinearity during deformation is studied. The waves in materials are considered to be solitary waves of different initial profiles, except for the torsional waves, the profile of which is described by a harmonic function. The waves in the soil are considered seismic ones (in these waves, the frequencies are small). The nonlinear longitudinal and transverse plane waves and nonlinear cylindrical waves are studied, two types of which are selected – cylindrical radial and torsional.

In the work, the main attention is paid to the influence of deformation nonlinearity on the evolution of waves of different initial profiles. At that, the new approaches to solving the nonlinear wave equations obtained for different types of waves and different media are developed.

All waves, except for a seismic wave, are studied using one of the most developed models of nonlinear elasticity theory - the five-constant Murnaghan model. In this dissertation, the nonlinearity of the models is based on the consideration of quadratic and cubic nonlinearities, which can be treated as the element of novelty of the carried-out research.

The dissertation compares the evolution of the initial wave profile at different levels of approximation (the first, first two and three approximations) of the solution of the nonlinear wave equation. An influence of the parameters specified in the nonlinear statement of the problem on the general picture of wave propagation (the kind of evolution of the initial profile) and other wave characteristics is studied.

The scenarios of evolution are constructed for four types of waves (plane longitudinal, plane transverse - shear, cylindrical radial, and torsional). These waves are characterized by different initial profiles - harmonic cosine, single symmetric with one hump (Gauss function), single asymmetric with one hump (Whittaker functions), asymmetric without hump (McDonald and Friedlander functions). The approach applied to the group of waves made it possible to construct new scenarios that correspond to the physical sense of the analyzed problems.

When studying seismic waves, the deformation of soil layers is described by a standard three-constant rheological model, the propagation of waves in soil layers is analyzed, and the method of determining the parameters of the rheological model from an experiment on the creep of a specific soil layer is applied. The determined rheological parameters are used to construct the scenarios of the change in the speed of two variants of the shear harmonic seismic wave and the wave amplitude for the three investigated soil types.

In the dissertation, longitudinal harmonic wave, the nonlinear wave equations are analyzed by the methods of successive approximations and constraint on the displacement gradient to compare these approaches when constructing the solutions that take into account the first three approximations.

In the analysis of cylindrical radial solitary waves, the method of restriction on displacement gradient is applied, and a nonlinear wave equation is obtained, for which a solution is found in the form of the first two and three approximations for their theoretical and numerical comparison.

When studying a nonlinear elastic torsional wave, a generalized method of restriction on the velocity of displacement is proposed for finding the first two approximations. Since the analyzed nonlinear wave equation is new, it demonstrates the applicability of the method for a wider class of wave problems.

In the analysis of the harmonic seismic wave propagating in the soil layers, the direct method is used for the first time in the construction of the approximate solution of the wave.

Numerical analysis of the evolution of the initial wave profile was performed using computer algebra. This enables to analyze numerically the influence of different orders of nonlinearities for the longitudinal, transverse, cylindrical, and torsional waves, as well as to determine the rheological parameters to construct the scenarios of evolution.

Therefore, the obtained theoretical and numerical results made it possible to construct the scenarios of wave propagation in materials described by the nonlinear models of elastic and viscoelastic deformation, and a better understanding the influence of the number of approximations when solving a wave problem on the scenarios of propagation of different types of waves.

Key words: evolution of the initial wave profile, nonlinear model of elastic and viscoelastic deformation of materials, five-constant Murnaghan model, three-constant standard model of viscoelasticity, elastic solitary wave, plane wave, cylindrical radial wave, torsional wave, quadratic and cubic nonlinearities, method of successive approximations, method of restrictions on displacement gradient, nonlinear wave effects.