

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА

На правах рукопису

Кіпніс Олександр Леонідович

УДК 539.375

НАПРУЖЕНИЙ СТАН БІЛЯ МІЖФАЗНИХ ЗСУВНИХ ТРИЩИН
У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
член-кореспондент НАН України,
доктор технічних наук,
професор В.М. Назаренко

Київ – 2016

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Розділ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	10
Розділ 2. ДЕЯКІ ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ПЛОСКІ СТАТИЧНІ СИНГУЛЯРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ.....	24
2.1.Поведінка напружень в околі кутової точки.....	25
2.2.Спосіб формулювання умови на нескінченості в задачах для тіл з нескінченно віддаленою точкою типу клина.....	40
Розділ 3. ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРО МАЛОМАСШТАБНІ МІЖФАЗНІ ЗСУВНІ ТРІЩИН У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ.....	45
3.1.Постановка задачі.....	45
3.2.Виведення функціонального рівняння Вінера – Гопфа.....	53
3.3.Розв'язання рівняння Вінера – Гопфа.....	61
3.4.Дослідження напруженого стану біля кінця тріщини та границю рівноваги тіла з тріщинами.....	69
3.5. Аналіз поведінки напружень біля кутової точки.....	73
Розділ 4. ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З МІЖФАЗНИМИ ЗСУВНИМИ ТРІЩИНAMI У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ ЗА НАЯВНОСТІ НАВАНТАЖЕНОЇ	

ВНУТРІШНЬОЇ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРИЩИНИ.....	90
4.1. Постановка зовнішньої задачі і виведення рівняння Вінера – Гопфа.....	90
4.2. Розв'язання рівняння Вінера – Гопфа.....	100
4.3. Аналіз поведінки напружень біля кутової точки у зовнішній задачі та дослідження напруженого стану біля кінця внутрішньої тріщини.....	102
4.4. Установлення характеру зміни руйнуючого навантаження	110
 ВИСНОВКИ.....	114
 СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	116

ВСТУП

Актуальність теми. Створення сучасної високоефективної техніки постійно ставить перед науковою про міцність матеріалів нові задачі, пов’язані з необхідністю підвищення надійності і довговічності конструкцій. Неминуча наявність в будь-якому матеріалі тріщин та тріщиноподібних ефектів, які з’являються ще на стадії його виготовлення, в ході наступної обробки, під дією навантажень і можуть стати причиною руйнування конструкцій, пояснює неперервно зростаючий інтерес дослідників до механіки руйнування – галузі науки про міцність матеріалів, що стала у даний час одним з найбільш актуальних напрямків механіки.

Основи механіки руйнування були закладені в роботах Гриффітса, Ірвіна, Орована. Великий внесок у розвиток цього розділу механіки деформівного твердого тіла, зокрема, у розвиток методів розв’язання задач про тріщини-розрізи і близьких до них в математичному відношенні задач про тонкі включення у деформівних твердих тілах, зробили В.М. Александров, О.Є. Андрейків, Ю.А. Антипов, Л.Т. Бережницький, В.Л. Богданов, П.М. Витвицький, Р.В. Гольдштейн, І.О. Гузь, О.М. Гузь, О.П. Дацюшин, С.О. Калоєров, А.О. Камінський, В.С. Кирилюк, Г.С. Кіт, В.А. Кривень, О.Ф. Кривий, Р.М. Кушнір, В.І. Кущ, М.Я. Леонов, В.В. Лобода, М.А. Мартиненко, Р.М. Мартиняк, М.А. Махутов, В.О. Меньшиков, О.В. Меньшиков, В.В. Михаськів, Є.М. Морозов, М.Ф. Морозов, В.М. Назаренко, М.М. Николишин, В.В. Панасюк, В.З. Партон, Ю.М. Подільчук, В.Г. Попов, Г.Я. Попов, М.П. Саврук, Л.Й. Слєпян, М.Г. Сташук, Г.Т. Сулим, А.Ф. Улітко, М.В. Хай, Л.П. Хорошун, Г.П. Черепанов, С.Я. Ярема, М. Comninou, A.H. Cottrell, D.S. Dugdale, J. Dundurs, F. Erdogan, H. Liebowitz, J.R. Rice, G.C. Sih, M.L. Williams, A.R. Zak та інші.

Сучасні конструкції, які виконані з композитних матеріалів, передбачають наявність різноманітних гострокінцевих концентраторів напружень, зокрема, кутових точок складної структури. Ці точки є надзвичайно небезпечними, оскільки саме біля таких концентраторів напружень слід очікувати початок руйнування тіла у першу чергу. У відповідній задачі теорії пружності при наближенні точки тіла до кутової точки – гострокінцевого концентратора напруження прямують до нескінченності. Внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе зародження тріщин, що виходять з неї, довжини яких значно менші, ніж розміри тіла (маломасштабні тріщини). Якщо тріщина, що зародилася, виявиться нестійкою, то після досягнення стану граничної рівноваги режим її розвитку буде динамічним. Це може привести до непередбаченого катастрофічного руйнування конструкції.

Викладене вище свідчить про те, що наявність розв'язків задач про тріщини у кутових точках є особливо цінною при вирішенні питань щодо руйнування конструкцій.

Але більшість праць, які присвячені дослідженню напруженодеформованого стану пружних тіл біля тріщин у кутових точках, відноситься до випадків, коли тіло в задачі, що розглядається, є однорідним. Значно менше таких праць стосується кутових точок кусково-однорідних тіл (вивчалися лише випадки, де кутовою точкою є кінець тріщини). Це пояснюється математичними труднощами, які виникають на шляху розв'язання відповідних крайових задач. Тому актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла є здійснення досліджень напружено-деформованого стану кусково-однорідних пружних тіл біля тріщин у кутових точках. В даній роботі таке дослідження проведено.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.
Робота виконувалася у рамках держбюджетних науково-дослідних тем Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України «Дослідження

крайових ефектів, стійкості, закритичного стану елементів конструкцій шаруватої структури композитних та нанокомпозитних матеріалів» (2012 – 2015 р.р., номер державної реєстрації 0112U000243), «Стійкість і закритична поведінка волокнистих і шаруватих композитних матеріалів та елементів конструкцій з локальними ефектами і недосконалостями при різних умовах навантаження» (2016 – 2020 р.р., номер державної реєстрації 0115U005702).

Мета і завдання дослідження. *Метою роботи є розвиток підходу до дослідження напруженого стану кусково-однорідних ізотропних пружних тіл біля маломасштабних зсувних тріщин у кутових точках та розв’язання з його використанням задач про граничну рівновагу тіла з міжфазними зсувними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ.*

Поставлена мета досягалась шляхом виконання таких *задань*:

- здійснення переходу від задач механіки руйнування про маломасштабні міжфазні зсувні тріщини в кутовій точці межі поділу середовищ до відповідної задачі теорії пружності для кусково-однорідного клиноподібного тіла з лініями розриву дотичного переміщення у вершині і умовою на нескінченості, що дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля;
- виведення і побудова точного розв’язку рівняння Вінера – Гопфа задачі;
- дослідження на основі цього розв’язку напруженого стану біля кінця маломасштабної зсувної тріщини в кутовій точці;
- установлення умови зрушення тріщини і дослідження її рівноваги на стійкість;
- аналіз поведінки напружень біля кутової точки.

Об’єкт дослідження – напружене-деформований стан кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабних міжфазних

зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу середовищ та гранична рівновага тіла з тріщинами.

Предмет дослідження – коефіцієнти інтенсивності напружень у кінцях тріщин, показники степеня сингулярності напружень у кутових точках, руйнуюче навантаження.

Методи дослідження: загальні положення про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл; метод відокремлення змінних; метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

- на основі побудованих в роботі точних розв'язків нових задач теорії пружності для кусково-однорідних клиноподібних тіл вперше у механіці руйнування досліджено напружений стан біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин у кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ;
- установлено характер зміни рівня концентрації напружень біля кінця тріщини та біля кутової точки у залежності від кута і пружних сталіх;
- метод розв'язання одновимірних функціональних рівнянь Вінера – Гопфа задач теорії пружності для однорідних клиноподібних тіл поширено на випадок кусково-однорідного тіла;
- виведено рівняння для визначення руйнуючого навантаження, при досягненні якого відбувається зрушення тріщини; показано, що рівновага тріщини є нестійкою;
- досліджено граничну рівновагу кусково-однорідної площини з міжфазними тріщинами у кутовій точці межі поділу середовищ за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини; установлено характер зміни руйнуючого навантаження в залежності від кута і пружних сталіх.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів забезпечується використанням як вихідних лише класичних положень механіки деформівного твердого тіла; коректністю постановок краївих задач теорії пружності; застосуванням точних математичних методів для розв'язання задач; збігом результатів в окремих випадках з відомими; узгодженістю висновків, що випливають з одержаних результатів з фізичними міркуваннями.

Практичне значення одержаних результатів. Результати роботи подано у вигляді зручних для практичного користування формул, числових таблиць і графіків, які відповідають різним значенням кута між лініями межі поділу середовищ в її кутовій точці і пружних стальних. Ці дані можуть становити інтерес для будівництва, машинобудування, приладобудування і використовуватись при вирішенні питань, що пов'язані з розрахунками міцності елементів конструкцій.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 12 наукових праць: 1 стаття у науковому фаховому виданні України, яке включено до міжнародних наукометричних баз; 4 статті у наукових фахових виданнях України; 7 робіт у матеріалах конференцій.

Особистий внесок здобувача. Основні результати роботи одержані здобувачем самостійно. В [45, 63 – 72] здобувачу належить участь у постановці задач, виконання всіх аналітичних перетворень при побудові точних розв'язків задач теорії пружності для клиноподібних тіл, дослідження на основі цих розв'язків напруженого стану біля кінців тріщин та біля кутових точок, дослідження граничної рівноваги тіл з тріщинами, проведення необхідних розрахунків. Співавторам в [45, 63 – 72] належить формулювання загальної проблеми, з якою пов'язана дана робота; участь в постановці задач і вибір методів їх розв'язання; участь спільно зі здобувачем в обговоренні одержаних результатів.

Апробація результатів роботи. Основні положення та результати дисертації доповідались і обговорювались на Міжнародних конференціях «Dynamical system modelling and stability investigation: modelling&stability» (Київ, 2013, 2015); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики» (Львів, 2013); 5-ій міжнародній науковій конференції «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій» (Львів, 2014); 12-му міжнародному симпозіумі українських інженерів-механіків у Львові (Львів, 2015); Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2016); Міжнародній конференції «Математичні проблеми технічної механіки - 2016» (Дніпропетровськ, 2016).

У повному обсязі дисертація доповідалась і обговорювалась на наукових семінарах відділу обчислювальної механіки та техніки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом члена-кореспондента НАН України, професора В.М. Назаренка; семінарі з наукового напрямку «Механіка композитних і неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Я.Я. Рущицького.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, висновків та списку використаної літератури, що включає 169 найменувань. Загальних обсяг дисертації становить 133 сторінки, у тому числі 112 сторінок основного тексту. Робота містить 22 рисунки і 8 таблиць.

Автор висловлює глибоку вдячність науковому керівнику члену-кореспонденту НАН України, професору Володимиру Михайловичу Назаренку за постійну увагу до роботи, консультації та численні методичні вказівки, які були використані при її виконанні.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

У цьому розділі проведено огляд літератури за темою дисертації: коротко описано результати досліджень плоских статичних задач теорії пружності для клиноподібних тіл, зокрема, для клиноподібних тіл з тріщинами у вершині, а також інших задач про ліній розриву переміщення в кутових точках.

Широкий клас задач для клина, на гранях якого задані різні наскрізні крайові умови, систематично досліджений в роботі Я.С. Уфлянда [104]. Для досліджень використовується розвинутий в [104] апарат інтегральних перетворень, який застосовується до задач теорії пружності.

Задача для клина з розрізом, що виходить з вершини, на бісектрисі під дією розподілених навантажень, які прикладені до берегів розрізу, розглядалася в роботах Р.Д. Банцурі [14], Б.І. Сметаніна [97, 98], А.О. Храпкова [105], Срівастава та Нараїна [153]. В [153] пара інтегральних рівнянь зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. В [14] після конформного відображення області, яку займає тіло, на смугу з півнескінченим розрізом по осі симетрії функції Колосова – Мусхелішвілі відшукувались у вигляді інтегральних розвинень, для спектральних густин яких отримана крайова задача Рімана з нульовим індексом. В [97, 98] задача для клина з симетричним розрізом у вершині розглядалася як окремий випадок задачі для клина з внутрішнім розрізом скінченної довжини на бісектрисі. Якщо розв'язання цієї загальної задачі зводиться до розв'язання рівняння Фредгольма, то у випадку розрізу, що виходить з вершини, будується функціональне рівняння Вінера – Гопфа, яке розв'язується за допомогою наближеної факторизації. В [105]

інтегральним перетворенням Мелліна дана задача зводиться до функціонального рівняння Вінера – Гопфа, точний аналітичний розв'язок якого отриманий як розв'язок задачі Рімана.

Задача для клина з внутрішнім розрізом скінченної довжини на бісектрисі розглядалася в роботах С.А. Лутченка та Г.С. Целікова [54], Б.І. Сметаніна [97, 98]. В [97, 98] досліджувались випадки, коли на гранях клина задані крайові умови таких типів: клин затиснутий між двома гладкими жорсткими основами, сили тертя між основами й клином відсутні; між клином і основами має місце повне зчеплення; грані клина вільні від зусиль. До берегів щілини прикладено нормальне навантаження, що підтримує щілину в розкритому стані. За допомогою перетворення Мелліна задачу зведенено до інтегрального рівняння відносно функції, яка визначає шукану форму поверхні щілини. В результаті відповідної заміни змінних у цьому рівнянні, отримано інтегральне рівняння з різницевим ядром, що залежить від безрозмірного параметра $\lambda = 2[\ln(b/a)]^{-1}$ ($a, b > a$ – відстань від вершини клина до кінців щілини). Для наближеного розв'язання рівняння з різницевим ядром використовується асимптотичний метод, розвинутий в роботі В.М. Александрова та Й.І. Воровича [6]. Отримані формули для визначення форми поверхні щілини і коефіцієнта інтенсивності нормальніх напружень у вигляді асимптотичних рядів за степенями λ . В роботі [54] дана задача розв'язана за умови, що грані клина жорстко закріплені. Для розв'язання інтегральних рівнянь задачі використовується метод ортогональних многочленів.

В роботі Л.А. Кіпніса [47] досліджена задача для клина з вільними від напружень гранями, який містить внутрішню півнескінченну тріщину на бісектрисі. З використанням інтегрального перетворення Мелліна задача зводиться до однорідного функціонального рівняння Вінера – Гопфа. Побудований точний розв'язок рівняння, що виражається через інтеграли типу Коші і гамма-функції. Виведена формула для коефіцієнта

інтенсивності напружень в кінці тріщини і досліджено напружений стан біля вершини клина.

Точні розв'язки задач плоскої деформації пружного клина, бічні грані якого вільні від напружень, з прямолінійними тріщинами на його осі симетрії з використанням методу Вінера – Гопфа приводяться у роботі К.М. Некислих та В.І. Острика [74]. В задачі 1 скінченна тріщина виходить з вершини; в задачі 2 півнескінченна тріщина починається на деякій відстані від вершини; в задачі 3 клин містить внутрішню скінченну тріщину. Задачі 1, 2, для яких інтегральні рівняння задано на півнескінченому проміжку і мають різницеві ядра, розв'язані методом Вінера – Гопфа, а задача 3 – узагальненим методом Вінера – Гопфа. Остання зводиться до інтегрального рівняння з різницевим ядром на скінченному проміжку. Інтегральне рівняння приводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої знаходиться у рядах за степенями малого параметра. Факторизація коефіцієнта функціонального рівняння Вінера – Гопфа проведена у нескінченних добутках. Приводяться результати обчислень коефіцієнтів інтенсивності напружень, розподілу нормальних напружень на лінії продовження тріщини, а також нормальних переміщень берегів тріщини.

Задачу плоскої деформації пружного клина, до бічних граней якого прикладені сили, з прямолінійною трічиною на осі симетрії розглянуто К. Некислих та В. Остриком [73]. Враховано контакт берегів тріщини. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень, розподіл нормальних напружень на лінії продовження тріщини та в області контакту, нормальні переміщення берегів тріщини.

В роботі Ердогана та Гупти [124] розглядається задача для клина, який містить на бісектрисі два розрізи, один з яких виходить з вершини, а інший – є внутрішнім півнескінченним. Грані клина і береги розрізу вільні

від напружень. Головний вектор зусиль на перешийку задано. За допомогою перетворення Мелліна задача зводиться до інтегрального рівняння з ядром типу Коші. Розв'язання рівняння проводиться чисельно.

В роботі А.О. Храпкова [107] розглянута задача про клин з прямолінійним розрізом, що виходить з вершини. Грані клина вільні від напружень, а до берегів розрізу прикладені задані навантаження, рівні між собою і протилежно напрямлені. За допомогою перетворення Мелліна задача зведена до неоднорідного двомірного векторного функціонального рівняння Вінера – Гопфа. Для випадків півплощини з крайовим розрізом, клина з розрізом на продовженні грані, який охоплює півплощину, і півнескінченного розрізу зі зломом в безмежній площині, здійснюється факторизація матричного коефіцієнта функціонального рівняння і будується його точний розв'язок. Визначені коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці розрізу.

В роботі А.О. Храпкова [106] у різноманітних геометричних ситуаціях і при різних однорідних крайових умовах на гранях розв'язана велика кількість задач для клина з прямолінійним розрізом у вершині, до берегів якого прикладені задані навантаження, рівні між собою і протилежно напрямлені. У всіх цих випадках проблема факторизації матричного коефіцієнта функціонального рівняння Вінера – Гопфа допускає точний аналітичний розв'язок.

В роботі Мукі та Вестаманна [144] розглядається тріщина, яка бере початок з основи вирізу. Тріщина розповсюджується вздовж однієї з сторін, що утворюють виріз. Задача розв'язана чисельним методом інтегральних рівнянь. Вивчені такі випадки навантаження берегів тріщини: 1) однорідні розтягуючі і зсувні навантаження; 2) зосереджені тангенціальні і розтягуючі сили; 3) сингулярний розподіл напружень, що відповідає відсутності тріщини.

В роботі Вестманна [167] досліджується вплив кута скосу на характер напруженого стану біля тріщин в клеєному з'єднанні внакладку. Тріщини розміщені усередині клеєного шва. Модельна задача про склеєні півпростір та клин з кутом клиновидності θ_0 при наявності напівнескінченної тріщини, вершина якої віддалена від вершини клина на відстань 1, розв'язується з використанням перетворення Мелліна. В результаті задача зводиться до системи парних інтегральних рівнянь. Досліджується асимптотичним методом характер особливості напруженого стану на границі з'єднання $\theta=0$ у вершині клина і на кінці тріщини для випадку $\theta_0=\pi$ і чисельним методом для проміжних значень $0 < \theta_0 < \pi$.

В роботі Л.А. Кіпніса [46] досліджена задача для охоплюючого півплощину клина з вільними від напружень гранями, який містить внутрішню півнескінченну тріщину на продовженні однієї з них. Задача зведена до однорідного двомірного векторного функціонального рівняння Вінера – Гопфа. Побудовано точний аналітичний розв'язок рівняння і виведені формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень в кінці тріщини. Досліджено напружений стан біля вершини клина.

В роботі Тамейт та Кондо [160] вивчена задача для клина, що містить прямолінійну тріщину скінченної довжини, до границі якої прикладено розподілене нормальне навантаження. Розглядаються випадки вільної і жорстко закріпленої границі клина. Задача розв'язана чисельно методом інтегральних рівнянь. Досліджено вплив віддалення тріщини від вершини клина, а також величини кута розхилу клина на концентрацію напружень біля кінців тріщини.

В роботі Срівастави [154] розглянута задача про кусково-однорідний клин, з вершини якого виходить розріз, розташований на бісектрисі, яка є границею поділу різних середовищ. На берегах розрізу задані напруження. На гранях клина дотичне напруження і нормальнє зміщення дорівнюють

нулю. Задача зведена до крайової задачі Рімана, для якої побудований замкнений розв'язок.

В роботі В.М. Вайншельбаума, Р.В. Гольдштейна та М.Л. Холмянського [21] розглянута задача про тріщину скінченної довжини, розташовану на границі розділу двох клинів з різними пружними властивостями, що моделює один з характерних випадків дефективності реальних елементів конструкцій. Задача розв'язана чисельним методом інтегральних рівнянь. Розв'язок будується з урахуванням відомої асимптотики біля кінців тріщини, в якій крім кореневої особливості є ще осцилюючий множник. Обчислені значення коефіцієнтів інтенсивності напружень в кінцях тріщини в широкому діапазоні значень кутів розхилу клинів при різних віддаленнях тріщини від їх вершини і співвідношеннях між пружними сталими.

В роботі В.К. Вострова [25] розглянуто задачу про зсувну прямолінійну тріщину скінченної довжини, яка виходить з вершини клина, одна з граней якого вільна від напружень, а на другій – дотичне напруження і нормальнє зміщення дорівнюють нулю. Взаємодія берегів тріщини описується законом сухого кулонового тертя із зчепленням. Для побудови точного розв'язку задачі застосовується метод Вінера – Гопфа. Визначається коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці тріщини.

В роботі Л.А. Кіпніса та Г.П. Черепанова [43] розглянута задача для охоплюючого півплощину клина з вільними від напружень гранями, з вершини якого виходить несиметрична пряма лінія ковзання скінченної довжини. Будується точний розв'язок функціонального рівняння Вінера – Гопфа задачі і обчислюється коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії ковзання. Виводиться рівняння, яке служить для визначення довжини лінії ковзання.

В роботі Л.А. Кіпніса та Г.П. Черепанова [45] досліджена симетрична задача для охоплюючого півплощину клина, з вершини якого

виходять дві прямі лінії ковзання скінченної довжини. Розглядаються випадки, коли на гранях клина задані крайові умови таких типів: а) грані жорстко затиснуті; б) грані вільні від напружень; в) дотичне напруження і нормальне переміщення на гранях дорівнюють нулю. В кожному з випадків виведено неоднорідне функціональне рівняння Вінера – Гопфа задачі і побудовано його точний розв'язок. Отримано вираз для коефіцієнта інтенсивності напружень в кінці лінії ковзання.

В роботі Л.А. Кіпніса [44] розглянуто задачу про пряму лінію ковзання скінченної довжини у вершині прямокутного клина, в якого одна з граней жорстко затиснута, а друга – вільна від напружень. На основі точного розв'язку задачі, який отримано методом Вінера – Гопфа, знайдено довжину лінії ковзання і кут її нахилу до грані клина.

В роботі Ю.А. Антипова [11] розглянуто плоский напружений стан складеного клина, з вістря якого під довільним кутом виходить тонке жорстке включення. До включення прикладено довільне навантаження. Задачу зведено до матричної задачі Рімана. Визначені обмеження на геометричні та пружні характеристики клина, що є достатніми для отримання розв'язку в замкненому вигляді.

В роботах В.М. Александрова, Б.І. Сметаніна та А.С. Соловйова [9, 98] задача про повздовжній нерозтяжний стрижень скінченної довжини в клині, який розміщений симетрично відносно його граней, зводиться до інтегрального рівняння. При розв'язанні рівняння використовується асимптотичний метод, розвинутий в [6].

Нехай у грань $\theta = \alpha$ клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ вдавлюється без тертя жорсткий штамп. У загальному випадку лінія контакту штампа з гранню клина визначається нерівністю $a \leq r \leq b$. Поза штампом грань $\theta = \alpha$ не навантажена. На грані $\theta = -\alpha$ передбачаються граничні умови трьох видів: 1 – жорстке затиснення; 2 – шарнірне затиснення; 3 – відсутність зусиль.

Задачу 3 для випадку чвертьплощини розглянуто в роботі В.С. Тонояна [102] і розв'язано наближеним методом інтегральних рівнянь. В роботі В.С. Тонояна [103] вивчена для чвертьплощини задача 1. Задача 2 для випадку чвертьплощини може бути розв'язана в замкненому вигляді (див. [92]).

При $\alpha \neq \pi / 4$ задачу 2 розглянуто в роботі Матчинського [142] для випадку $a = 0$. Вона зведена до функціонального рівняння Вінера – Гопфа. Розв'язок останнього отримано за допомогою методу наближеної факторизації.

Задачу 1 в загальній постановці розглянуто в роботі С.А. Лутченка [52]. Тут вона зведена до інтегрального рівняння відносно невідомої функції розподілу контактних тисків $q(r)$. Наблизений розв'язок останнього знайдено методом ортогональних поліномів. В роботі С.А. Лутченка та Г.Я. Попова [53] досліджується частинний випадок $a = 0$ задачі 1. Наблизений вираз для функції $q(r)$ знайдено методом ортогональних поліномів. В роботі М.І. Бронштейна [20] для наближеного розв'язку задачі 1 в загальній постановці використано метод колокацій за рівновіддаленими вузлами.

Вивченю задач 1 – 3 присвячено роботи В.М. Александрова [5], В.М. Александрова та Д.А. Пожарського [7], Й.І. Воровича, В.М. Александрова та В.А. Бабешка [24]. В результаті застосування до рівнянь Ламе і відповідних граничних умов перетворення Мелліна кожна задача зводиться до розв'язку інтегрального рівняння відносно функції розподілу контактних тисків. В праву частину рівняння входить функція, яка визначається формою основи штампа і степенем його входу в грань клина. Розв'язок задач будується асимптотичним методом.

В роботі С.А. Лутченка [55] задача про втиснення гладкого штампа в грань клина, друга грань якого затиснута, зведена до інтегрального рівняння типу Вінера – Гопфа відносно контактного напруження, що

розшукується. Розглянуто випадок, коли кут розхилу клина дорівнює π і зона контакту включає вістря клина. Факторизація при цьому виражається через гамма-функції. Досліджено характер поведінки контактного напруження в особливих точках.

Задачу про контактну взаємодію штампа з прямолінійною основою та пружного клина, одна з граней якого закріплена розглянуто В.І. Остриком та О.М. Щокотовою [81]. Враховано сили тертя в області контакту. Методом Вінера – Гопфа отримано аналітичний розв'язок задачі. Наведено результати обчислень контактних напружень та переміщень точок незакріпленої грані клина.

В роботі Б.М. Прокоф'єва [91] розглядається контактна задача для n – складового клина. В його грані $\theta_1 = 0$ вдавлюється гладкий штамп. На грані $\theta_n = -\varphi_n$ навантаження відсутнє. Для зведення задачі до інтегрального рівняння відносно контактних тисків застосовується метод, який базується на використанні виведених в роботі функцій податливості. Отримана рекурентна формула для побудови функцій податливості при довільному числі складових клинів. Шляхом відповідної заміни змінних в інтегральному рівнянні одержується інтегральне рівняння з різницевим ядром, яке залежить від параметра λ . Для розв'язку застосовується асимптотичний метод, розвинутий в [6]. Зроблено аналіз залежності контактних тисків від числа клинів, їх пружних властивостей і кутів. В якості прикладу застосування одержаних загальних формул показано розв'язання контактної задачі для 2-складового і 3-складового клинів.

В роботі Б.М. Нуллера [77] побудовано і досліджено точний розв'язок задачі для клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, одна частина границі якого $\theta = \pm\alpha$, $0 \leq r \leq 1$ знаходиться в умовах ковзаючої заробки, а друга – вільна від напружень. Розв'язок визначає напружений стан клина, на який через жорстку обійму (клиноподібний штамп) діє навантаження,

еквівалентне поздовжній силі P , поперечній силі Q і моменту M . Для побудови розв'язку застосовується метод Вінера – Гопфа.

В роботі Б.М. Нуллера [80] отримано точний розв'язок задачі про передачу дотичних зусиль на клин через скінчений пружний стержень змінного перерізу. До пружної клиновидної пластини $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ на відрізку $\theta = 0$, $0 \leq r \leq 1$, прикріплено пружний абсолютно гнучкий стержень, площа перерізу якого змінюється за лінійним законом. До торця стержня прикладена сила T , а на вільну частину його бокою поверхні при $0 \leq r \leq 1$ діють дотичні зусилля $f(r)$. Визначені напруження в пластині. Задача розв'язана методом Вінера – Гопфа.

В роботі Ердогана та Сівелека [125] розглянуто контактну задачу для клина з тріщиною, яка розміщена вздовж бісектриси. Грані клина утворюють гострий кут, в який симетрично вдавлюється штамп. За допомогою перетворення Мелліна задача зведена до системи трьох інтегральних рівнянь відносно невідомих контактних напружень і розкриття берегів тріщини. Отримано чисельний розв'язок цих рівнянь. Обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень біля кінців тріщини і вершини клина для випадків внутрішньої або крайової тріщини.

В роботі В.Н. Акопяна [3] розглядається задача про контакт двох однакових симетрично розміщених гладких штампів з пружним клином, який на деякому відрізку своєї середньої лінії укріплено абсолютно жорстким включенням. Задача математично формулюється у вигляді системи двох інтегральних рівнянь, яка розв'язується з застосуванням ортогональних многочленів Чебишева.

В роботі Комніноу [118] досліджується характер особливості напружень біля вістря клина (з гострим кутом) при kontaktі його по одній з граней з пружною півплощиною з іншого матеріалу з урахуванням кулонівського тертя в зоні контакту. Використовується апарат перетворення Мелліна.

Широке коло задач для пружних клинів з накладками, стрингерами (підкріплюючими ребрами), стержнями, впаяними балками, тонкими включеннями та іншими концентраторами напружень такого типу досліджено в [8, 13, 62, 76, 78, 79, 89, 90, 101, 113]. Характерна особливість даних концентраторів напружень полягає в тому, що один з розмірів концентратора знаходить малий в порівнянні з іншими. Крім того, припускається, що концентратор знаходиться на промені, який виходить з вершини клина. При цьому він може бути розташований як усередині тіла, так і на його межі.

В роботі Теокаріса та Гдоутоса [161] розглядається напружений стан у вершині клина, який складається з клинів з різними пружними характеристиками. На лініях контакту середовищ припускається, що виконується умова пропорційності між дотичною і нормальнюю компонентами. Для кожного клина розшукується власна функція. З умови спряження на границях розділу і з крайових умов на вільних сторонах будується трансцендентне рівняння, що визначає відповідний показник. Наведено розрахунки для біметалічного клина.

В роботі Теокаріса та Гдоутоса [163] розглядається нескінченна пружна площа, яка складена з двох матеріалів з різними пружними властивостями. Границями розділу служать сторони кута. Вздовж однієї сторони кута прилеглі частини взаємодіють за законом Кулона. Вздовж другої сторони зроблено розріз, до берегів якого прикладено задане розтягуюче напруження. Відшукується асимптотичний розв'язок у вершині розрізу (яка співпадає з вершиною кута, що є границею розділу). Отримано трансцендентне рівняння, з якого визначається показник особливості у вершині розрізу в залежності від величини кута φ , коефіцієнта тертя q і двох параметрів α і β , які є комбінаціями пружних модулів.

В роботі Теокаріса та Гдоутоса [162] розглянуто композицію, що являє собою два взаємодоповнюючих до повної площини різних пружних однорідних ізотропних клина, які спаяні вздовж однієї з сторін. На обох берегах другої лінії розділу середовищ задаються нульові граничні умови першої, другої і мішаної задач. Отримані трансцендентні рівняння, чисельний розв'язок яких дозволяє відшукати, взагалі кажучи, комплексні власні значення λ задачі, які визначають порядок сингулярності поля напружень $(r^{-1+\lambda})$ в малому околі вершини дефекту. Вивчено зміну порядку сингулярності напружень в залежності від параметрів, що визначають геометрію задачі, від пружних сталих матеріалів, що складають композицію, і від вигляду граничних умов на розрізі.

В роботі О.М. Лущика [56] досліджується особливість напруженого стану в околі вершини складеного клина при різних способах закріплення ребер, що утворюють його. Проводиться аналіз структури областей зміни параметрів задачі, при яких можливі нескінчені напруження біля вершини. Напруження в околі вершини складеного тіла, яке являє собою жорстке з'єднання двох клинів з різних матеріалів, мають особливість порядку ρ^{k-1} , де ρ – відстань від вершини, а k – корені деякого трансцендентного рівняння, яке залежить від п'яти параметрів, що характеризують геометрію тіла (α, β) і пружні властивості матеріалів $(\nu_1, \nu_2, g = G_1/G_2)$. Тут α, β – кути розхилу клинів, G_1, G_2 і ν_1, ν_2 – відповідно модулі зсуву і коефіцієнти Пуассона матеріалів першого (з кутом α) і другого (з кутом β) клинів. При дослідженні поля напружень в околі такої вершини важливо знати число коренів згаданого рівняння, які розташовані в смузі $0 < \operatorname{Re} k < 1$; від цього залежить, можливі чи ні для даного з'єднання нескінчені напруження при вершині. З якісного боку важливо знати характер перших коренів цього рівняння (комплексні вони чи дійсні). Першим називається той корінь з півплощини $\operatorname{Re} k > 0$, дійсна

частина якого мінімальна; інші корені пронумеровуються в порядку зростання їх дійсної частини.

В роботі Демпсі та Сінклера [119] розглянуто ряд задач для складеного клина. На гранях клина можуть бути задані нульові зусилля, нульові зміщення, умова контакту з тертям Кулона або нульові нормальні зусилля і дотичне переміщення, а на межі з'єднання клинів – неперервність зусиль і переміщень, неперервність зусиль і нормальног зміщення і умова тертя Кулона, неперервність дотичних зусиль і дотичних переміщень і нульові нормальні переміщення. Розглянуто 37 крайових задач. З застосуванням аналізу Вільямса для кожної задачі можуть бути виписані характеристичні трансцендентні рівняння, що визначають степінь сингулярності напружень у вершині клина. Для 24 задач ці рівняння виписані.

Плоскі статичні задачі теорії пружності для клиноподібних тіл досліджувались також в [2, 4, 10, 15, 22, 88, 99, 100, 108, 109, 121, 128, 135 – 137, 145 – 147, 152, 157, 158, 168].

У випадку півплощини з краєвою тріщиною відповідні задачі досліджувались в [18, 32, 33, 86, 93, 94, 111, 116, 127, 129, 130, 132, 134, 139, 150, 151, 155, 164], а у випадку півплощини з внутрішньою тріщиною – в [1, 34, 42, 50, 60, 95, 96, 112, 114, 117, 120, 122, 123, 131, 133, 156, 169].

Велику кількість праць присвячено задачам механіки руйнування про ліній розриву переміщення, які виходять з кінців тріщин та інших кутових точок – гострокінцевих концентраторів напружень. Ці ліній розриву моделюють вузькі зони передруйнування, що з'являються і розвиваються у деформівних твердих тілах біля указаних концентраторів. Такі задачі досліджувались в роботах [12, 16, 17, 23, 35, 37, 39, 51, 83, 84, 87, 110, 115, 126, 140, 141, 148, 149, 159, 165, 166].

Даний огляд свідчить про те, що у більшості досліджених задач про ліній розриву переміщення в кутових точках тіло вважається однорідним. У

випадку кусково-однорідного тіла досліджувались лише задачі про лінії розриву переміщення в кінцях міжфазних тріщин та у кінці тріщини, що виходить на межу поділу середовищ. Задачі механіки руйнування, в яких досліджувався б напружене-деформований стан біля тріщин у кутових точках кусково-однорідних пружних тіл, не розглядалися. Тому вони становлять новий клас плоских статичних задач теорії пружності для тіл з тріщинами. В даній роботі досліджено задачі, що належать цьому класу.

Розділ 2

ДЕЯКІ ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ПЛОСКІ СТАТИЧНІ СИНГУЛЯРНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

У цьому розділі наведено відомості з теорії пружності, що лежать в основі підходу до дослідження напруженого стану кусково-однорідних пружних тіл біля маломасштабних зсувних тріщин у кутових точках, який запропоновано використовувати в даній роботі. Суть підходу полягає у здійсненні переходу від задач про тріщини в кутових точках до задач теорії пружності для тіл клиноподібної конфігурації з лінією розриву дотичного переміщення у вершині і умовами на нескінченості, що дозволяють врахувати вплив зовнішнього поля; побудові методом Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна точних розв'язків цих задач та проведені на основі побудованих розв'язків дослідження граничної рівноваги пружних тіл з маломасштабними зсувними тріщинами у кутових точках.

В першій частині розділу розглянуто метод дослідження поведінки напружень біля кутових точок пружних тіл, в основі якого лежить вивчення відповідних однорідних крайових задач для нескінчених клиноподібних областей [88, 108]. В другій частині наведено зміст запропонованої в [109] і відмінної від класичної [61, 104] ідеї підходу до формулювання умови на нескінченості в задачах для тіл з нескінченно віддаленою точкою типу клина, яка дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля на напружене-деформований стан нескінченого тіла. Детальне викладення цих питань міститься в [61, 88, 104, 108] та інших роботах.

2.1. Поведінка напружень в околі кутової точки

У третьому і четвертому розділах при постановці краївих задач будуть використовуватись деякі загальні положення про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл. Докладно ці положення викладені в [88, 108]. Згідно з ними, в околі кутової точки області розв'язок плоскої статичної задачі теорії пружності складається з двох частин – асимптотичного ряду і нескінченно диференційованої функції. Членами вказаного ряду є розв'язки відповідної однорідної краївої задачі для нескінченного клина або більш загальної клиноподібної області.

Ці розв'язки мають вигляд:

$$\sigma_\theta(r, \theta) = r^\lambda f_1(\theta), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = r^\lambda f_2(\theta), \quad \sigma_r(r, \theta) = r^\lambda f_3(\theta), \quad (2.1)$$

де r, θ – полярна система координат з полюсом в кутовій точці; $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$ – напруження; $\operatorname{Re} \lambda > -1$.

Однорідній задачі відповідає трансцендентне характеристичне рівняння. Воно має нескінченну множину коренів. Кожний ненульовий корінь λ породжує розв'язок (2.1). Розв'язки визначаються з точністю до довільних сталих.

На основі указаних положень можна, не розв'язуючи задачу теорії пружності для тіла з кутовою точкою, установлювати, чи є дана кутова точка концентратором напружень, тобто чи прямують напруження до нескінченності при наближенні точки області до досліджуваної кутової точки. Для цього користуються таким критерієм. Якщо характеристичне рівняння відповідної однорідної задачі для клиноподібної області має в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ дійсні корені, то досліджувана кутова точка є концентратором напружень. Серед вказаних коренів найближчий до -1

корінь λ являє собою показник степеня сингулярності напруження в кутовій точці. При $r \rightarrow 0$ напруження прямують до нескінченності як r^λ .

Розглянемо як приклади низку плоских статичних симетричних однорідних задач теорії пружності для клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ з найбільш типовими варіантами краївих умов на гранях:

- задача для клина, на гранях якого нормальнє і дотичне напруження дорівнюють нулю (клин з вільними від напружень гранями) (задача К1);
- задача для клина, на гранях якого нормальнє і дотичне переміщення дорівнюють нулю (клин з жорстко затисненими гранями) (задача К2);
- задача для клина, на гранях якого дотичне напруження і нормальнє переміщення дорівнюють нулю (клин з шарнірно затисненими гранями) (задача К3).

Проілюструємо застосування наведеного критерію до відповідних кутових точок.

Беручи до уваги симетрію, розглядатимемо область $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \alpha$.

Запишемо рівняння рівноваги, умову сумісності деформацій і закон Гука:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0, \quad (2.2)$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0, \quad \left(\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta], \quad \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r],$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}, \quad (2.4)$$

де u_θ , u_r – переміщення; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Диференціюючи останнє співвідношення (2.4) по r , а перше – по θ , знаходимо

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = 2 \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} = \frac{1+\nu}{E} \left[(1-\nu) \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - \nu \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right]. \quad (2.6)$$

З останнього співвідношення (2.4) випливає, що

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \quad (2.7)$$

За допомогою (2.5), (2.6), (2.7) отримаємо

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = \frac{1+\nu}{E} \left(2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right). \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.1) (де $\operatorname{Re} \lambda > -1$) в рівняння рівноваги (2.2) і умову сумісності деформацій (2.3), приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d f_2}{d \theta} - f_1 + (\lambda + 1) f_3 = 0, \quad \frac{d f_1}{d \theta} + (\lambda + 2) f_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 f_1}{d \theta^2} + \frac{d^2 f_3}{d \theta^2} + \lambda^2 (f_1 + f_3) = 0. \quad (2.9)$$

З перших двох рівнянь (2.9) знаходимо

$$f_2 = -(\lambda + 2)^{-1} \frac{d f_1}{d \theta}, \quad (2.10)$$

$$f_3 = (\lambda + 1)^{-1} (\lambda + 2)^{-1} \left[\frac{d^2 f_1}{d \theta^2} + (\lambda + 2) f_1 \right]. \quad (2.11)$$

Підставляючи (2.11) в останнє рівняння (2.9), приходимо до рівняння

$$\frac{d^4 f_1}{d\theta^4} + \left[\lambda^2 + (\lambda+2)^2 \right] \frac{d^2 f_1}{d\theta^2} + \lambda^2 (\lambda+2)^2 f_1 = 0. \quad (2.12)$$

Нехай $\lambda \neq 0$. За допомогою (2.1), першого співвідношення (2.4), (2.8), (2.10) – (2.12) отримуємо наступні формули:

$$\sigma_\theta = r^\lambda [a_1 \sin(\lambda+2)\theta + a_2 \sin \lambda \theta + a_3 \cos(\lambda+2)\theta + a_4 \cos \lambda \theta], \quad (2.13)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{r^\lambda}{\lambda+2} [a_1(\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta + a_2 \lambda \cos \lambda \theta -$$

$$-a_3(\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta - a_4 \lambda \sin \lambda \theta],$$

$$\sigma_r = -\frac{r^\lambda}{\lambda+2} [a_1(\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta + a_2(\lambda-2) \sin \lambda \theta +$$

$$+a_3(\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta + a_4(\lambda-2) \cos \lambda \theta],$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{(1+\nu)\lambda r^{\lambda-1}}{E(\lambda+2)} [a_1(\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta +$$

$$+a_2(\lambda+1+\alpha) \cos \lambda \theta - \quad (2.14)$$

$$-a_3(\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta - a_4(\lambda+1+\alpha) \sin \lambda \theta],$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{(1+\nu)r^\lambda}{E(\lambda+2)} [a_1(\lambda+2) \sin(\lambda+2)\theta + a_2(\lambda+1-\alpha) \sin \lambda \theta +$$

$$+a_3(\lambda+2) \cos(\lambda+2)\theta + a_4(\lambda+1-\alpha) \cos \lambda \theta],$$

де $\alpha = 3 - 4\nu$, a_1, a_2, a_3, a_4 – сталі, які підлягають визначенню.

Розглянемо задачу К1. Крайові умови задачі мають вигляд

$$\theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0. \quad (2.15)$$

Згідно з (2.15) матимемо

$$a_1 \sin(\lambda + 2)\alpha + a_2 \sin \lambda \alpha + a_3 \cos(\lambda + 2)\alpha + a_4 \cos \lambda \alpha = 0, \quad (2.16)$$

$$a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\alpha + a_2 \lambda \cos \lambda \alpha - a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha - a_4 \lambda \sin \lambda \alpha = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2 \lambda = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2(\lambda + 1 + \alpha) = 0.$$

Система лінійних рівнянь (2.16) з невідомими a_1, a_2, a_3, a_4 має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю. Обчислюючи цей визначник і прирівнюючи його до нуля, приходимо до такого трансцендентного рівняння:

$$\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha = 0 \quad (2.17)$$

Рівняння (2.17) є характеристичним рівнянням однорідної задачі для клина, яка розглядається. Кожний з нескінченної множини коренів даного рівняння, які лежать в півплощині $\operatorname{Re} \lambda > -1$, породжує розв'язок (2.13) задачі, що визначається з точністю до довільної сталої. Ці розв'язки є членами асимптотичного ряду, про який йшла мова раніше.

Відомо [104], що при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ рівняння (2.17) в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ коренів не має, а при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ в ній існує єдиний корінь $\lambda(\alpha) \in [-\frac{1}{2}; 0]$.

В таблиці 2.1 наведені значення кореня λ при деяких значеннях кута α .

Розглянемо задачу теорії пружності (задача I) для області, межа якої містить кутову точку і в її околі вільна від напружень. Задача вважається симетричною відносно бісектриси відповідного кута, що дорівнює 2α . Інформація про корінь характеристичного рівняння (2.17) в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ дозволяє зробити висновок, що при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ (у випадку

клиноподібного вирізу) кутова точка, яка розглядається, є концентратором напружень.

Розв'язок системи (2.16), що відповідає згаданому кореню λ , має вигляд

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{\lambda \sin \lambda \alpha}{(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2) \alpha} a_4 \quad (2.18)$$

(a_4 – довільна дійсна стала). Підставляючи (2.18) в (2.13) і поклавши $a_4/(\lambda + 2) = C(2\pi)^{\lambda}/2$, отримуємо розв'язок симетричної задачі для клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\right)$ з вільними від напружень гранями, який породжується єдиним у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ коренем λ її характеристичного рівняння (2.17)

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} &= \frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda} \left[(\lambda + 2) \cos \lambda \theta - \frac{\lambda \sin \lambda \alpha}{\sin(\lambda + 2) \alpha} \cos(\lambda + 2) \theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= \frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda} \left[\lambda \sin \lambda \theta - \frac{\lambda \sin \lambda \alpha}{\sin(\lambda + 2) \alpha} \sin(\lambda + 2) \theta \right], \\ \sigma_r &= \frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda} \left[-(\lambda - 2) \cos \lambda \theta + \frac{\lambda \sin \lambda \alpha}{\sin(\lambda + 2) \alpha} \cos(\lambda + 2) \theta \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

де C – довільна дійсна стала.

При $\alpha = \pi$ співвідношення (2.19) приводять до відомого в механіці руйнування розв'язку задачі про півнескінченну тріщину нормального розриву з вільними від напружень берегами, який породжується коренем $\lambda = -1/2$ її характеристичного рівняння $\sin 2\pi\lambda = 0$

$$\sigma_{\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right), \quad (2.20)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right),$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень.

Нехай $\lambda = 0$ (в задачі 1 розшукується член асимптотичного ряду, незалежний від r). Відповідно з (2.12) отримаємо такі формули:

$$\sigma_\theta = a_1 \sin 2\theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \theta + a_4, \quad (2.21)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} (2a_1 \cos 2\theta - 2a_2 \sin 2\theta + a_3),$$

$$\sigma_r = -a_1 \sin 2\theta - a_2 \cos 2\theta + a_3 \theta + a_4,$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = -\frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{a_3}{r}, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} \left[-a_1 \sin 2\theta - a_2 \cos 2\theta + (1-2\nu)a_3 \theta + (1-2\nu)a_4 \right],$$

де a_1, a_2, a_3, a_4 – сталі, які підлягають визначенню. Згідно (2.15)

$$a_1 \sin 2\alpha + a_2 \cos 2\alpha + a_3 \alpha + a_4 = 0, \quad (2.23)$$

$$2a_1 \cos 2\alpha - 2a_2 \sin 2\alpha + a_3 = 0,$$

$$2a_1 + a_3 = 0,$$

$$a_3 = 0.$$

При $\alpha \neq \pi/2 ; \pi$ система (2.23) має лише тривіальний розв'язок.

Тому в задачі I в даному випадку асимптотичний ряд, що відповідає кожному з напружень $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \sigma_r$, не містить члена, незалежного від r .

При $\alpha = \pi/2$ (півплошина) розв'язок системи (2.23) має вигляд $a_1 = 0$, $a_2 = C_1$, $a_3 = 0$, $a_4 = C_1$ (C_1 – довільна дійсна стала). Розв'язок задачі К1 запишеться так: $\sigma_\theta = 2C_1 \cos^2 \theta$, $\tau_{r\theta} = 2C_1 \sin \theta \cos \theta$, $\sigma_r = 2C_1 \sin^2 \theta$.

В задачі I для кожного з напружень ці вирази визначають член асимптотичного ряду, незалежний від r .

При $\alpha = \pi$ (півнечінчений прямолінійний розріз) розв'язок системи (2.23) має вигляд $a_1 = 0$, $a_2 = C_2$, $a_3 = 0$, $a_4 = -C_2$ (C_2 – довільна дійсна стала). Розв'язок задачі К1 такий: $\sigma_\theta = -2C_2 \sin^2 \theta$, $\tau_{r\theta} = 2C_2 \sin \theta \cos \theta$, $\sigma_r = -2C_2 \cos^2 \theta$. В задачі I ці вирази – члени асимптотичних рядів, незалежні від r .

Невідомі сталі C_1 , C_2 встановлюються з розв'язку задачі I.

Таким чином, якщо в задачі I має місце випадок клиноподібного вирізу $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\right)$, то при $r \rightarrow 0$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди виражаються формулами (2.19), де λ – єдиний корінь рівняння (2.17) на інтервалі $] -1; 0 [$, а C – невідома стала.

Розглянемо задачу К2. Крайові умови задачі мають вигляд

$$\theta = \alpha, \quad u_\theta = u_r = 0; \quad \theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0. \quad (2.24)$$

Згідно з (2.24) отримаємо систему лінійних рівнянь

$$a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\alpha + a_2(\lambda + 1 + \alpha)\cos \lambda \alpha - \quad (2.25)$$

$$-a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha - a_4(\lambda + 1 + \alpha)\sin \lambda \alpha = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha + a_2(\lambda + 1 - \alpha)\sin \lambda \alpha +$$

$$+a_3(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\alpha + a_4(\lambda + 1 - \alpha)\cos \lambda \alpha = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2\lambda = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2(\lambda + 1 + \alpha) = 0.$$

Характеристичне рівняння задачі має вигляд

$$\alpha \sin 2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1)\sin 2\alpha = 0. \quad (2.26)$$

Відомо, що рівняння (2.26) в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ комплексних коренів не має. При $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ немає і дійсних коренів. При $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ існує єдиний дійсний корінь λ' . В таблиці 2.1 наведені значення кореня λ' при деяких значеннях кута α (значення у чисельнику відповідають випадку $\nu = 0,333$, а значення у знаменнику – випадку $\nu = 0,250$).

Таблиця 2.1

α°	95	100	105	110	115	120	125	130	135
$-\lambda$	0,100	0,181	0,248	0,303	0,348	0,384	0,414	0,437	0,456
$-\lambda'$	0,022	0,044	0,066	0,089	0,113	0,140	0,169	0,199	0,232
	0,028	0,054	0,080	0,106	0,134	0,162	0,191	0,221	0,252
α°	140	145	150	155	160	165	170	175	
$-\lambda$	0,470	0,480	0,488	0,493	0,496	0,499	0,499	0,499	
$-\lambda'$	0,266	0,299	0,333	0,365	0,396	0,425	0,452	0,477	
	0,284	0,315	0,346	0,375	0,403	0,430	0,455	0,479	

Розглянемо задачу теорії пружності (задача II) для області, межа якої містить кутову точку і в її околі жорстко затиснена. Задача симетрична відносно бісектриси відповідного кута, що дорівнює 2α .

Приведена інформація про існування єдиного дійсного кореня характеристичного рівняння (2.26) в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ дозволяє зробити

висновок, що при $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ (у випадку жорсткого клиноподібного включення) кутова точка, яка розглядається, є концентратором напружень.

Розв'язок системи (2.25), що відповідає згаданому кореню λ' , має вигляд

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = -\frac{(\lambda' + 1 + \alpha)\sin \lambda' \alpha}{(\lambda' + 2)\sin(\lambda' + 2)\alpha} a_4, \quad (2.27)$$

де a_4 – довільна дійсна стала. Підставляючи (2.27) в (2.13) і поклавши $a_4/(\lambda' + 2) = -C(2\pi)^{\lambda'}/(2\alpha)$, отримуємо розв'язок симетричної задачі для клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi\right)$ з жорстко затисненими гранями, який породжується єдиним у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ коренем λ' із характеристичного рівняння (2.26)

$$\sigma_\theta = \frac{C}{2\alpha} (2\pi r)^{\lambda'} \left[\frac{(\lambda' + 1 + \alpha)\sin \lambda' \alpha}{\sin(\lambda' + 2)\alpha} \cos(\lambda' + 2)\theta - (\lambda' + 2)\cos \lambda' \theta \right], \quad (2.28)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{C}{2\alpha} (2\pi r)^{\lambda'} \left[\frac{(\lambda' + 1 + \alpha)\sin \lambda' \alpha}{\sin(\lambda' + 2)\alpha} \sin(\lambda' + 2)\theta - \lambda' \sin \lambda' \theta \right],$$

$$\sigma_r = \frac{C}{2\alpha} (2\pi r)^{\lambda'} \left[(\lambda' - 2)\cos \lambda' \theta - \frac{(\lambda' + 1 + \alpha)\sin \lambda' \alpha}{\sin(\lambda' + 2)\alpha} \cos(\lambda' + 2)\theta \right],$$

де C – довільна дійсна стала.

Нехай тепер $\lambda = 0$ (в задачі II розшукується член асимптотичного ряду, незалежний від r).

Враховуючи формули (2.21), (2.22), згідно (2.24) отримуємо

$$-a_1 \sin 2\alpha - a_2 \cos 2\alpha + (1 - 2\nu)a_3 \alpha + (1 - 2\nu)a_4 = 0, \quad (2.29)$$

$$2a_1 + a_3 = 0,$$

$$a_3 = 0.$$

Розв'язок системи (2.29) має вигляд $a_1 = 0; a_2 = C_1; a_3 = 0;$

$a_4 = \frac{C_1}{1-2\nu} \cos 2\alpha$ (C_1 – довільна стала). Розв'язок задачі К2 запишеться

$$\text{так: } \sigma_\theta = C_1 \cos 2\theta + C'; \quad \tau_{r\theta} = C_1 \sin 2\theta; \quad \sigma_r = -C_1 \cos 2\theta + C'$$

$$\left(C' = \frac{C_1}{1-2\nu} \cos 2\alpha \right). \text{ В задачі II для кожного з напружень ці вирази}$$

визначають член асимптотичного ряду, незалежний від r . Невідома стала C_1 визначається з розв'язку задачі II.

Отже, якщо в задачі II має місце випадок клиноподібного жорсткого включення ($\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$), то при $r \rightarrow 0$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди виражаються формулами (2.28), де λ' – єдиний корінь рівняння (2.26) на інтервалі $] -1; 0 [$, а C – невідома стала.

Розглянемо задачу К3. Крайові умови задачі мають вигляд:

$$\theta = \alpha, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0. \quad (2.30)$$

Система лінійних рівнянь, що відповідає (2.30):

$$a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\alpha + a_2\lambda \cos \lambda \alpha - \\ (2.31)$$

$$-a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha - a_4\lambda \sin \lambda \alpha = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2)\cos(\lambda + 2)\alpha + a_2(\lambda + 1 + \alpha)\cos \lambda \alpha - a_3(\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha -$$

$$-a_4(\lambda + 1 + \alpha)\sin \lambda \alpha = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2\lambda = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2(\lambda + 1 + \alpha) = 0.$$

Характеристичне рівняння задачі:

$$\sin(\lambda + 2)\alpha \sin \lambda \alpha = 0. \quad (2.32)$$

Рівняння (2.32) при $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ і $\alpha = \pi$ у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ коренів

не має. При $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ в цій смузі існує єдиний корінь $\lambda'' = \frac{\pi}{\alpha} - 2$ рівняння.

Таким чином, в симетричній задачі теорії пружності для області, межа якої містить кутову точку і в її околі шарнірно затиснена (задача III), при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ця кутова точка є концентратором напружень. Розв'язок системи (2.31), що відповідає згаданому кореню λ'' , буде таким:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 0; \quad a_4 = 0 \quad (2.33)$$

(a_3 – довільна дійсна стала). Підставляючи (2.33) в (2.13) і поклавши $a_3/(\lambda''+2) = C(2\pi)^{\lambda''}/2$, отримаємо розв'язок симетричної задачі для клина $0 \leq r < \infty, -\alpha \leq \theta \leq \alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right)$ з шарнірно затисненими гранями, який породжується єдиним у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ коренем λ'' і її характеристичного рівняння (2.32)

$$\sigma_\theta = \frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda''} (\lambda''+2) \cos(\lambda''+2)\theta, \quad (2.34)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda''} (\lambda''+2) \sin(\lambda''+2)\theta,$$

$$\sigma_r = -\frac{C}{2}(2\pi r)^{\lambda''} (\lambda''+2) \cos(\lambda''+2)\theta,$$

де C – довільна дійсна стала.

При $\lambda = 0$, враховуючи формули (2.21), (2.22), згідно з (2.30) отримаємо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2a_1 \cos 2\alpha - 2a_2 \sin 2\alpha + a_3 &= 0, \\ 2a_1 + a_3 &= 0, \\ a_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

При $\alpha \neq \pi/2; \pi$ система (2.35) має лише тривіальний розв'язок. Тому в задачі III в цьому випадку асимптотичний ряд, що відповідає напруженню $\tau_{r\theta}$, не містить члена, незалежного від r . А члени асимптотичних рядів, незалежні від r , які відповідають напруженням σ_θ і σ_r , мають вигляд $\sigma_\theta = C'$, $\sigma_r = C'$, де C' – довільна дійсна стала.

При $\alpha = \pi/2; \pi$ розв'язок системи (2.35) має вигляд $a_1 = 0$, $a_2 = C''$, $a_3 = 0$ (C'' – довільна дійсна стала). Члени асимптотичних рядів, незалежні від r , мають вигляд:

$$\sigma_\theta = C'' \cos 2\theta + C', \quad \tau_{r\theta} = C'' \sin 2\theta, \quad \sigma_r = -C'' \cos 2\theta + C'.$$

Таким чином, в задачі III при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ головні члени розкладу напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ виражаються формулами (2.34), де λ'' – єдиний корінь рівняння (2.32) на інтервалі $] -1; 0 [$, а C – невідома стала.

Розглянемо статичну симетричну задачу теорії пружності (задача K) для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута (рис. 2.1, де $E_1, E_2, E_1 > E_2$ – модулі Юнга; v_1, v_2 – коефіцієнти Пуассона).

Крайові умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, \quad \langle \sigma_\theta \rangle &= \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \\ \theta = 0, \quad \tau_{r\theta} &= 0, \quad u_\theta = 0; \\ \theta = \pi, \quad \tau_{r\theta} &= 0, \quad u_\theta = 0 \\ (\ 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \langle a \rangle &- стрібок a). \end{aligned}$$

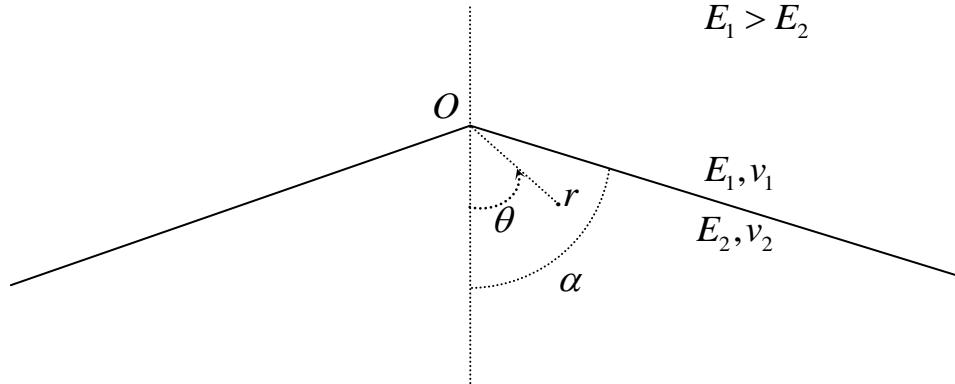


Рис. 2.1

Характеристичне рівняння задачі є таким:

$$\Delta(-\lambda - 1) = 0, \quad \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2,$$

$$\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha],$$

$$\delta_1(z) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] - [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha] \times$$

$$\times (\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$e = \frac{1 + v_2}{1 + v_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1,2} = 3 - v_{1,2}.$$

Як показують обчислення, характеристичне рівняння у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ має єдиний корінь $\lambda_0 \in]-1; 0[$. Деякі значення λ_0 наведено у табл. 3.1 ($v_1 = v_2 = 0,3$).

Напруження виражаються формулами

$$\sigma_\theta = Cr^{\lambda_0} [(\lambda_0 + 2)\Phi_1 \cos \lambda_0 \theta - \Phi_2 \cos(\lambda_0 + 2)\theta], \quad (2.36)$$

$$\tau_{r\theta} = Cr^{\lambda_0} [\lambda_0 \Phi_1 \sin \lambda_0 \theta - \Phi_2 \sin(\lambda_0 + 2)\theta],$$

$$\sigma_r = Cr^{\lambda_0} [\Phi_2 \cos(\lambda_0 + 2)\theta - (\lambda_0 - 2)\Phi_1 \cos \lambda_0 \theta],$$

$$\sigma_\theta(r,0) = Cr^{\lambda_0}q_o, \quad q_0 = (\lambda_0 + 2)\Phi_1 - \Phi_2,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 = & (1 + \alpha_1)\lambda_0 \sin 2\alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& +(1 + \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cos \lambda_0 \alpha \sin^2(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] - \\
& -(1 + \alpha_2)\lambda_0 \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + \\
& +(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \times \\
& \times \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1 - e)\lambda_0^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + (2e - 1 + \alpha_1) \times \\
& \times \lambda_0 \sin 2\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - e(1 - \alpha_2)] \times \\
& \times \lambda_0 \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + 2[(1 - \alpha_2)e - 1 + \alpha_1] \times \\
& \times \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha], \\
\Phi_2 = & (1 + \alpha_1)\lambda_0^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& +(1 + \alpha_1)(1 - \alpha_2)\lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \times \\
& \times \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1 + \alpha_2)\lambda_0^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + \\
& +(1 - \alpha_1)(1 + \alpha_2)\lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \times \\
& \times \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1 - e)(\lambda_0 + 1 - \alpha_2)\lambda_0^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha + (2e - 1 + \alpha_1) \times \\
& \times \lambda_0(\lambda_0 + 1 - \alpha_2) \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [2 - e(1 - \alpha_2)] \lambda_0 (\lambda_0 + 1 - \alpha_2) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha + \\
& + 2[(1 - \alpha_2)e - 1 + \alpha_1] (\lambda_0 + 1 - \alpha_2) \cos^2 \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0 (\pi - \alpha) \times \\
& \times \sin[\lambda_0 (\pi - \alpha) - 2\alpha] \quad (0 \leq \theta \leq \alpha).
\end{aligned}$$

Подібні вирази мають місце для $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, $\sigma_r(r, \theta)$ при $\alpha \leq \theta \leq \pi$.

2.2. Спосіб формулювання умови на нескінченності в задачах для тіл з нескінченно віддаленою точкою типу клина

У третьому розділі буде розглянуто плоску задачу теорії пружності для області з нескінченно віддаленою точкою типу клина. Це є область, що містить нескінченно віддалену точку, в околі якої вона має такий самий вигляд, який в цьому околі має клиноподібна область. Один з варіантів такої області зображеного на рис. 2.2.

Згідно [61, 104], при постановці плоских статичних задач теорії пружності для подібних областей, як правило, приймається, що на нескінченності напруження затухають як $\frac{1}{r}$ або як $o\left(\frac{1}{r}\right)$. При цьому показано [61], що при $r \rightarrow \infty$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди являють собою розв'язок задачі Мічелла [143] для клина L_1OL_2 з вільними від напружень гранями, в вершині якого прикладена зосереджена сила, яка дорівнює головному вектору зовнішніх зусиль, що діють на межі L_1ML_2 розглядуваної області.

В [108, 109] було запропоновано інший підхід до формулювання умови на нескінченності в задачах для областей з нескінченно віддаленою

точкою типу клина. Даний підхід дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля на напружене-деформований стан нескінченного тіла. Він тісно пов'язаний з припущенням про існування деякої задачі в цілому, по відношенню до якої розглядувана задача для області з нескінченно віддаленою точкою типу клина є внутрішньою.

Ідею вказаного підходу проілюструємо на такому прикладі плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності (рис.2.3).

Нехай півплощина з глибоким крайовим клиноподібним вирізом містить невеликий розріз, що виходить з вершини. На берегах розрізу діють нормальні напруження, а решта межі тіла вільна від напружень.

При $x, y \rightarrow \infty$, $\sigma_y \rightarrow \sigma$, $\tau_{xy} \rightarrow 0$, $\sigma_x \rightarrow 0$ (σ_y , τ_{xy} , σ_x – напруження).

Припускається, що довжина l розрізу значно менша глибини L вирізу. Цю задачу будемо називати задачею в цілому.

При r , співрозмірних з L , і $l \ll r \ll L$ як розв'язок задачі в цілому будемо використовувати розв'язок аналогічної задачі без розрізу. Цю задачу будемо називати зовнішньою задачею по відношенню до задачі в цілому. Вона є одним з варіантів задачі I, яка розглянута в п.2.1, і, тому, при $r \rightarrow 0$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди виражаються формулами (2.19), де λ – єдиний корінь рівняння (2.17) на інтервалі $] -1; 0 [$, а C – стала, яка встановлюється з розв'язку даної задачі. Суми решти членів цих розвинень прямують до нуля при $r \rightarrow 0$. При r , співрозмірних з l , і $l \ll r \ll L$ як розв'язок задачі в цілому будемо використовувати розв'язок симетричної задачі для клина $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) з вільними від напружень гранями, який містить розріз, що виходить з вершини. На берегах розрізу діють нормальні напруження. Цю задачу будемо називати внутрішньою задачею по відношенню до задачі в цілому. Область в ній – область з нескінченно

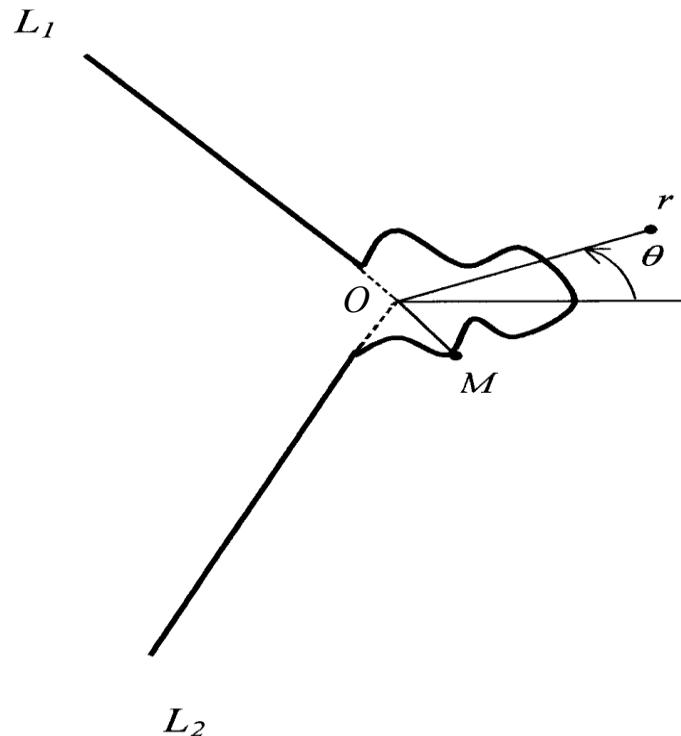
 L_2

Рис. 2.2

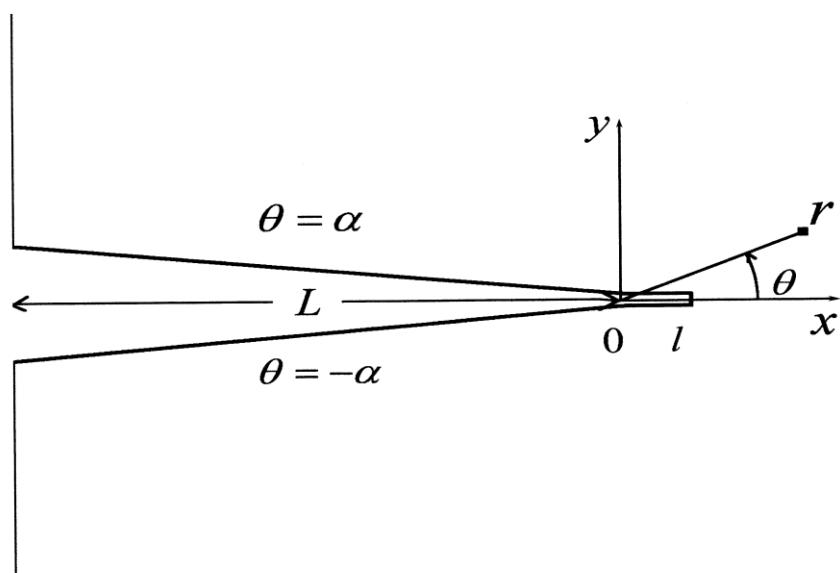
 $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\sigma$  $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\sigma$

Рис. 2.3

віддаленою точкою типу клина. Щоб задовольнити умові зшиття розв'язків зовнішньої і внутрішньої задач при $l \ll r \ll L$, умову на нескінченності у внутрішній задачі сформулюємо так: при $r \rightarrow \infty$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди у зовнішній задачі при $r \rightarrow 0$, а суми решти членів розвинень напружень в асимптотичні ряди являють собою $o\left(\frac{1}{r}\right)$.

Дана задача для охоплюючого півплощину клина з розрізом (задача **Г**) може виступати як внутрішня для нескінченної множини задач в цілому. Лише значення сталої C , яка входить в умову на нескінченності, кожен раз буде іншим. Тому, при формулюванні умови на нескінченності не будемо прив'язуватись до якої-небудь конкретної задачі в цілому, припускаючи лише її існування, а сталу C будемо вважати заданою за умовою задачі. Вказана стала характеризує інтенсивність зовнішнього поля. Вона має розмірність сили, що поділена на довжину в степені $\lambda(\alpha) + 2$, тобто її розмірність залежить від розшилу клина.

Якщо при постановці умови на нескінченності в задачі **Г** дотримуватись вказаного вище класичного підходу [61, 104], то, оскільки головний вектор зовнішніх зусиль, що діють на межі області, дорівнює 0, ця умова повинна бути сформульована таким чином: при $r \rightarrow \infty$ напруження затухають як $o\left(\frac{1}{r}\right)$. Розв'язок задачі **Г** (подібні задачі розглядалися в [14, 97, 98, 105, 153] та інших роботах), який одержано в рамках такої постановки, ніяк не враховує вплив зовнішнього поля на напружене-деформований стан нескінченного тіла. Якщо ж керуватися описаним некласичним підходом [108, 109], то розв'язок задачі **Г** буде залежити від сталої C , яка характеризує інтенсивність зовнішнього поля. Більш того, напруження, зумовлені зовнішнім полем, затухають значно

повільніше ніж напруження, викликані навантаженнями, які прикладено в скінченній частині межі тіла. Тому, при дослідженні задач, подібних **Г**, зовнішнє поле не можна не враховувати.

Задачі для областей з нескінченно віддаленою точкою типу клина, подібні **Г**, можна віднести до розряду некласичних задач теорії пружності. За термінологією [108, 109] вони належать до класу статичних задач теорії пружності, який називається «клас N». В класі N задача має нескінченну множину розв'язків. Однорідна задача класу N має нетривіальні розв'язки. Коректна постановка задачі в цьому класі повинна включати задання довільних сталих, з точністю до яких визначено її розв'язок. Для задач класу N не виконується принцип Сен – Венана. Щоб встановити, чи належить плоска статична задача теорії пружності для області з нескінченно віддаленою точкою типу клина до класу N, необхідно вивести характеристичне рівняння відповідної однорідної задачі для клиноподібної області. Якщо в смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ воно має корені, то досліджувана задача належить до класу N.

Розділ 3

ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ПРО МАЛОМАСШТАБНІ МІЖФАЗНІ ЗСУВНІ ТРИЩИНІ У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ ІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩ

У цьому розділі досліджено плоску статичну симетричну задачу механіки руйнування про маломасштабні міжфазні зсувні тріщини, які зародилися в кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ. Здійснено перехід від задачі про маломасштабні тріщини до задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута і міжфазними лініями розриву дотичного переміщення, що виходять з вершини. Виведено функціональне рівняння Вінера – Гопфа задачі і побудовано його точний розв'язок. На основі цього розв'язку досліджено напруженій стан біля кінця тріщини. Установлено умову зрушення тріщин і досліджено їх рівновагу на стійкість. Проаналізовано поведінку напружень біля кутової точки за наявності тріщин.

Матеріали розділу опубліковано у роботах [40, 41, 69].

3.1. Постановка задачі

В умовах плоскої деформації в рамках статичної симетричної задачі розглянемо кусково-однорідне тіло з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яке складене з ізотропних пружних частин з модулями Юнга E_1, E_2 ($E_1 > E_2$) і коефіцієнтамиPuассона ν_1, ν_2 (рис. 3.1).

У відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл, які наведено в підрозділі 2.1, кутова точка

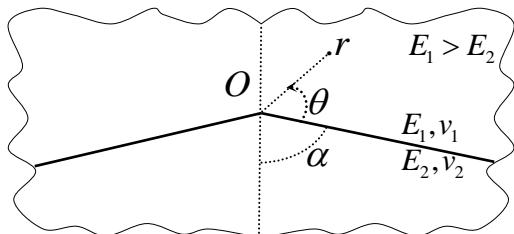


Рис.3.1

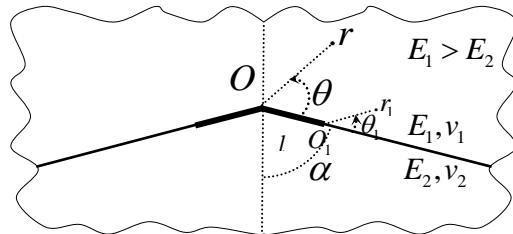


Рис.3.2

межі поділу середовищ O являє собою концентратор напружень зі степеневою особливістю. Головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ є розв'язком однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, який породжується єдиним на інтервалі $] -1; 0[$ коренем λ_0 її характеристичного рівняння.

Указану задачу (задача К) розглянуто у підрозділі 2.1.

При цьому мають місце формули виду

$$\tau_{r\theta}(r, 0) = C g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}),$$

$$\sigma_\theta(r, 0) = C g_2(\alpha, e_0, v_1, v_2) r^{\lambda_0} + o(r^{\lambda_0}), \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2} \\ (r \rightarrow 0),$$

де функції g_1 , g_2 визначаються з розв'язку задачі К, а стала C – з розв'язку кожної конкретної задачі теорії пружності, яка зображена на рис. 3.1. Сталу C , що залежить від зовнішнього навантаження, можна розглядати як коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Вирази для g_1 і g_2 мають вигляд

$$g_1 = \lambda_0 g_{11} \sin \lambda_0 \alpha - g_{12} \sin(\lambda_0 + 2)\alpha,$$

$$\begin{aligned}
g_{11} = & (1-e)\lambda_0^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha - (1-\mathfrak{e}_1 - 2e)\lambda_0 \sin 2\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \times \\
& \times \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1-\mathfrak{e}_2)e]\lambda_0 \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \times \\
& \times \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1+\mathfrak{e}_1)\lambda_0 \sin 2\alpha \times \\
& \times \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + (1+\mathfrak{e}_1)(1-\mathfrak{e}_2) \times \\
& \times \cos \lambda_0 \alpha \sin^2(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] - \\
& - (1+\mathfrak{e}_2)\lambda_0 \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + \\
& + (1+\mathfrak{e}_1)(1-\mathfrak{e}_2) \times \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \times \\
& \times \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} = & (1-e)(1-\mathfrak{e}_2 + \lambda_0)\lambda_0^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha - (1-\mathfrak{e}_1 - 2e)\lambda_0(1-\mathfrak{e}_2 + \lambda_0) \times \\
& \times \sin 2\alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1-\mathfrak{e}_2)e]\lambda_0 \times \\
& \times (1-\mathfrak{e}_2 + \lambda_0) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha - 2[1-\mathfrak{e}_1 - (1-\mathfrak{e}_2)e] \times \\
& \times (1-\mathfrak{e}_2 + \lambda_0) \cos^2 \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& + (1+\mathfrak{e}_1)\lambda_0^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] + \\
& + (1+\mathfrak{e}_1)(1-\mathfrak{e}_2)\lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \times \\
& \times \cos[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha] - (1+\mathfrak{e}_2)\lambda_0^2 \sin 2\alpha \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha + \\
& + (1-\mathfrak{e}_1)(1+\mathfrak{e}_2)\lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)\alpha \cos \lambda_0(\pi - \alpha) \times \\
& \times \sin[\lambda_0(\pi - \alpha) - 2\alpha],
\end{aligned}$$

$$g_2 = g_{21} \cos \lambda_0 \alpha + g_{22} \cos(\lambda_0 + 2) \alpha,$$

$$\begin{aligned} g_{21} = & [(\lambda_0 + 2)e - \lambda_0 - 2][(\lambda_0 + 2)\cos \lambda_0 (\pi - \alpha) \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) - \\ & - \lambda_0 \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)] \cos(\lambda_0 + 2) \alpha \times \\ & \times \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) + (1 + \alpha_1)(\lambda_0 + 2) \times \\ & \times [\cos(\lambda_0 + 2)\alpha \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) + \sin(\lambda_0 + 2)\alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)] \times \\ & \times \cos \lambda_0 (\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} = & [(\alpha_2 - \lambda_0 - 1)e + \lambda_0 + 2][(\lambda_0 + 2)\cos \lambda_0 (\pi - \alpha) \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) - \\ & - \lambda_0 \sin \lambda_0 (\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)] \cos \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) - \\ & - (1 + \alpha_1)[(\lambda_0 + 2)\cos \lambda_0 \alpha \sin(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha) + \\ & + \lambda_0 \sin \lambda_0 \alpha \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha)] \cos \lambda_0 (\pi - \alpha) \cos(\lambda_0 + 2)(\pi - \alpha), \end{aligned}$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Результати розрахунків показують, що $\lambda_0 > -1/2$; $g_1(\alpha) < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$; $g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0$; $g_1 = 0$, якщо $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$; $g_2(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$; $g_2(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$; $g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\pi/2) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi) = 0$; $g_2 = 0$, якщо $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$. Якщо e_0 збільшується, то α_1 , α_2 зменшуються. Деякі значення λ_0 наведено у табл. 3.1 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Таблиця 3.1

α°	e_0			
	2	3	5	10
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,215
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,310
45	-0,112	-0,180	-0,258	-0,332
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,308
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,203
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,059
120	-0,054	-0,081	-0,104	-0,124
135	-0,089	-0,130	-0,168	-0,202
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,278
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,318

Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення α_1° , що дорівнюють $38,2^\circ; 34,4^\circ; 29,3^\circ; 21,7^\circ$, і значення α_2° , що дорівнюють $134,2^\circ; 133,4^\circ; 133,1^\circ; 131,3^\circ$.

Якщо $C < 0$ (нижче показано, що повинна виконуватись саме ця умова) і $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$, то згідно з інформацією про функцію g_2 та формулою, що наведено вище, $\sigma_\theta(r, 0) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow 0$, а тому на межі поділу середовищ біля кутової точки нормальне напруження є стискаючими. У цьому випадку внаслідок високої концентрації напружень у кутовій точці можливе зародження міжфазних зсувних тріщин, що виходять з неї, з повністю контакуючими берегами, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла (рис. 3.2). Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим ширша область значень кута α при яких слід очікувати утворення таких тріщин.

Вважатимемо, що тертя між берегами тріщин відсутнє.

Якщо $C < 0$ і $\alpha \in]0; \alpha_1[\cup]\pi/2; \alpha_2[$, то на межі поділу середовищ біля кутової точки має місце висока концентрація нормальних

розтягуючих напружень. У цьому випадку слід очікувати зародження відкритих тріщин. Дослідження такого випадку не є темою даної роботи. Тому розглянемо лише випадок $C < 0$, $\alpha \in]\alpha_1; \pi/2[\cup]\alpha_2; \pi[$.

Ставиться задача визначення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} у кінці O_1 тріщини, установлення умови зрушення тріщин, дослідження їх рівноваги на стійкість та вивчення поведінки напружень біля кутової точки (рис. 3.2).

При $r_1 \rightarrow 0$ у відповідності до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл реалізується асимптотика, що являє собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, яка містить на прямолінійній межі поділу середовищ півнескінченну лінію розриву дотичного переміщення (рис. 3.3), що породжується коренем $-1/2$ її характеристичного рівняння. Зокрема,

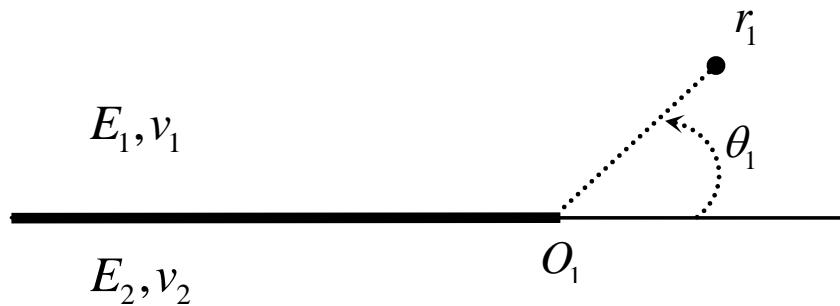


Рис. 3.3

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi) \sim -\frac{K_{II}e'}{2(1+\alpha_2)e}\sqrt{2\pi r_1} \quad (r_1 \rightarrow 0), \quad e' = 1 - \alpha_1 - (1 - \alpha_2)e.$$

Оскільки $e' > 0$, а контактне напруження $\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi)$ від'ємне, повинна виконуватись умова $K_{II} > 0$.

З урахуванням малості тріщин приходимо до плоскої статичної симетричної задачі теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, що містить розрізи скінченої довжини, які виходять з кутової точки та розташовані на цій межі (рис. 3.4).

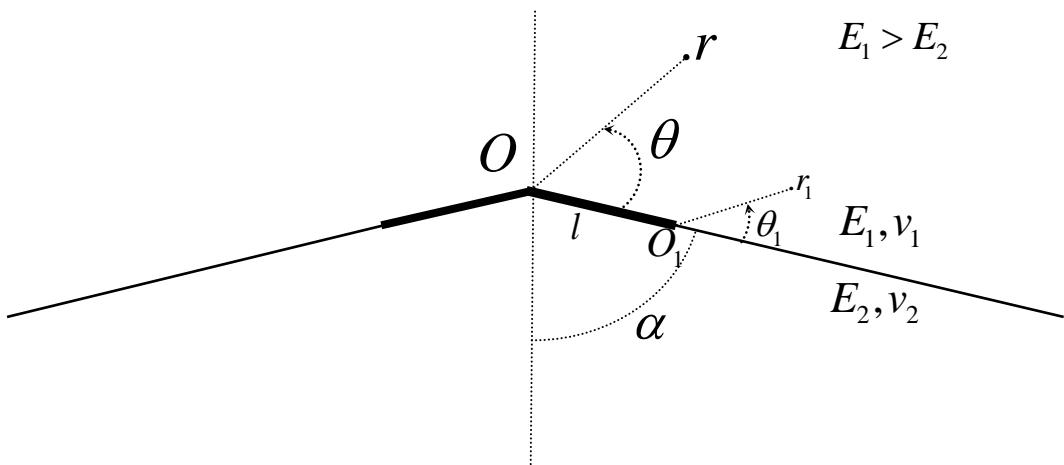


Рис.3.4

На нескінченності задана асимптотика поля напружень, що являє собою розв'язок аналогічної задачі без розрізів – задачі К, про який йшлося вище. Довільна ставала C , що входить до указаного розв'язку, вважається заданою. Вона характеризує інтенсивність зовнішнього поля і повинна визначатися з розв'язку зовнішньої задачі.

Наведемо рівняння рівноваги, умову сумісності деформацій і два співвідношення, які випливають з закону Гука

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = \frac{1+\nu_j}{E_j} \left(2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{1-\nu_j}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\nu_j}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu_j}{E_j} \left[(1-\nu_j) \sigma_r - \nu_j \sigma_\theta \right] \quad (j=1,2).$$

Беручи до уваги симетрію, крайові умови задачі (рис. 3.4) запишемо так:

$$\theta = \pi - \alpha, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0; \quad \theta = -\alpha, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0;$$

$$\theta = 0, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (3.4)$$

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = 0, r > l, \langle u_r \rangle = 0; \quad (3.5)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow \infty, \tau_{r\theta} = C g_1 r^{\lambda_0} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3.6)$$

$$(-\alpha \leq \theta \leq \pi - \alpha; \langle a \rangle - \text{стрибок } a).$$

Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності (рис. 3.4) є сумою розв'язків наступних двох задач. Перша (задача 1) відрізняється від неї тим, що замість першої з умов (3.5) маємо

$$\theta = 0, r < l, \tau_{r\theta} = -C g_1 r^{\lambda_0}, \quad (3.7)$$

а на нескінченності напруження затухають як $o(1/r)$ (у (3.6) відсутній перший доданок). Друга задача – задача К.

3.2. Виведення функціонального рівняння Вінера – Гопфа

Серед методів розв'язання задач механіки деформівного твердого тіла, зокрема, задач механіки композитних матеріалів і механіки руйнування, які застосовуються у даний час [19, 27 – 31, 48, 57 – 59, 85, 138] одним з ефективних є метод Вінера – Гопфа [75, 82].

Для побудови точного розв'язку задачі 1 будемо використовувати метод Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна [104].

Розглянемо змішану задачу теорії пружності для клина $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$.

Застосовуючи перетворення Мелліна

$$m^*(p) = \int_0^\infty m(r)r^p dr$$

з комплексним параметром p ($-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$, ε – досить мале додатне число) до рівнянь рівноваги (3.1) і умови сумісності деформацій (3.2), одержуємо систему диференціальних рівнянь відносно меллінівських трансформант напружень $\sigma_\theta^*(p, \theta)$, $\tau_{r\theta}^*(p, \theta)$, $\sigma_r^*(p, \theta)$.

$$\frac{d\tau_{r\theta}^*}{d\theta} - p\sigma_r^* - \sigma_\theta^* = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta} - (p-1)\tau_{r\theta}^* = 0,$$

$$\frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} + \frac{d^2\sigma_r^*}{d\theta^2} + (p+1)^2(\sigma_\theta^* + \sigma_r^*) = 0.$$

З перших двох рівнянь (3.8) знаходимо

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} \frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta}, \quad \sigma_r^* = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p-1} \frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} - \sigma_\theta^* \right). \quad (3.9)$$

Підставляючи другий з виразів (3.9) у третє рівняння (3.8), приходимо до диференціального рівняння четвертого порядку

$$\frac{d^4\sigma_\theta^*}{d\theta^4} + \left[(p+1)^2 + (p-1)^2 \right] \frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} + (p+1)^2 (p-1)^2 \sigma_\theta^* = 0. \quad (3.10)$$

Розв'язок рівняння (3.10) має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^*(p, \theta) = & A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + \\ & + A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

У цій формулі $A_1(p), A_2(p), A_3(p), A_4(p)$ – невідомі функції параметра p .

Підставляючи (3.11) у (3.9), одержуємо

$$\tau_{r\theta}^*(p, \theta) = \frac{1}{p-1} [A_1(p+1)\cos(p+1)\theta + A_2(p-1)\cos(p-1)\theta -] \quad (3.12)$$

$$- A_3(p+1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta],$$

$$\sigma_r^*(p, \theta) = -\frac{1}{p-1} [A_1(p+3)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta +]$$

$$+ A_3(p+3)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta].$$

Застосовуючи перетворення Мелліна до співвідношень (3.3), знаходимо

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* = \frac{1+\nu_1}{E_1(p+1)} \left[2p \tau_{r\theta}^* - \nu_1 \frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta} + (1-\nu_1) \frac{d\sigma_r^*}{d\theta} \right], \quad (3.13)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^* = \frac{1 + \nu_1}{E_1} [(1 - \nu_1) \sigma_r^* - \nu_1 \sigma_\theta^*].$$

Підставляючи (3.11), (3.12) у (3.13), одержуємо

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* = \frac{1 + \nu_1}{E_1(p-1)} [A_1(p - \alpha_1) \cos(p+1)\theta + A_2(p-1) \cos(p-1)\theta -$$

$$- A_3(p - \alpha_1) \sin(p+1)\theta - A_4(p-1) \sin(p-1)\theta],$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^* = - \frac{1 + \nu_1}{E_1(p-1)} [A_1(p + \alpha_1) \sin(p+1)\theta + A_2(p-1) \sin(p-1)\theta +$$

$$+ A_3(p + \alpha_1) \cos(p+1)\theta + A_4(p-1) \cos(p-1)\theta].$$

Таким чином, мають місце наступні вирази для меллінівських трансформант напружень та похідних переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^* &= A_1 \sin(p+1)\theta + A_2 \sin(p-1)\theta + \\ &+ A_3 \cos(p+1)\theta + A_4 \cos(p-1)\theta, \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} [A_1(p+1) \cos(p+1)\theta + A_2(p-1) \cos(p-1)\theta -$$

$$- A_3(p+1) \sin(p+1)\theta - A_4(p-1) \sin(p-1)\theta],$$

$$\sigma_r^* = - \frac{1}{p-1} [A_1(p+3) \sin(p+1)\theta + A_2(p-1) \sin(p-1)\theta +$$

$$+ A_3(p+3) \cos(p+1)\theta + A_4(p-1) \cos(p-1)\theta],$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^* = \frac{1 + \nu_1}{E_1(p-1)} [A_1(p - \alpha_1) \cos(p+1)\theta + A_2(p-1) \cos(p-1)\theta -$$

$$-A_3(p-\alpha_1)\sin(p+1)\theta - A_4(p-1)\sin(p-1)\theta],$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^* = -\frac{1+\nu_1}{E_1(p-1)}[A_1(p+\alpha_1)\sin(p+1)\theta + A_2(p-1)\sin(p-1)\theta + \\ + A_3(p+\alpha_1)\cos(p+1)\theta + A_4(p-1)\cos(p-1)\theta]$$

$(A_1(p), A_2(p), A_3(p), A_4(p)$ – невідомі функції).

Виходячи з краївих умов (3.4), за допомогою (3.14) одержуємо систему лінійних рівнянь

$$A_1(p+1)\cos(p+1)(\pi-\alpha) + A_2(p-1)\cos(p-1)(\pi-\alpha) - \quad (3.15)$$

$$-A_3(p+1)\sin(p+1)(\pi-\alpha) - A_4(p-1)\sin(p-1)(\pi-\alpha) = 0,$$

$$A_1(p-\alpha_1)\cos(p+1)(\pi-\alpha) + A_2(p-1)\cos(p-1)(\pi-\alpha) -$$

$$-A_3(p-\alpha_1)\sin(p+1)(\pi-\alpha) - A_4(p-1)\sin(p-1)(\pi-\alpha) = 0,$$

$$A_3 + A_4 = \sigma_\theta^*(p, 0),$$

$$A_1(p+1) + A_2(p-1) = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p, 0).$$

Розв'язок системи (3.15) має вигляд

$$A_1 = \frac{p-1}{2\Delta_+} [(\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) + \quad (3.16)$$

$$+ (\sin 2p(\pi-\alpha) - \sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)],$$

$$A_2 = -\frac{1}{2\Delta_+} [(p+1)(\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha)\sigma_\theta^*(p, 0) +$$

$$+ (p-1)(\sin 2p(\pi-\alpha) + \sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p, 0)],$$

$$A_3 = -\frac{p-1}{2\Delta_+} [(\sin 2p(\pi-\alpha) + \sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0) -$$

$$-(\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,0)],$$

$$A_4 = \frac{1}{2\Delta_+} [(p+1)(\sin 2p(\pi-\alpha) - \sin 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0) -$$

$$-(p-1)(\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,0)],$$

$$\Delta_+ = \sin 2p(\pi-\alpha) - p \sin 2\alpha.$$

Розглянувши змішану задачу теорії пружності для клина $-\alpha \leq \theta \leq 0$, приходимо до системи лінійних рівнянь

$$B_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha + \quad (3.17)$$

$$+ B_3(p+1)\sin(p+1)\alpha + B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = 0,$$

$$B_1(p-\alpha_2)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha +$$

$$+ B_3(p-\alpha_2)\sin(p+1)\alpha + B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = 0,$$

$$B_3 + B_4 = \sigma_\theta^*(p,0),$$

$$B_1(p+1) + B_2(p-1) = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p,0)$$

$$(B_1(p), B_2(p), B_3(p), B_4(p) - \text{невідомі функції}).$$

Розв'язок системи (3.17) має вигляд

$$B_1 = -\frac{p-1}{2\Delta_-} [(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)\sigma_\theta^*(p,0) - \quad (3.18)$$

$$-(\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha)\tau_{r\theta}^*(p,0)],$$

$$B_2 = \frac{1}{2\Delta_-} \left[(p+1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) \sigma_\theta^*(p,0) - \right.$$

$$\left. -(p-1)(\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p,0) \right]$$

$$B_3 = -\frac{p-1}{2\Delta_-} \left[(\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p,0) + \right.$$

$$\left. + (\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p,0) \right],$$

$$B_4 = \frac{1}{2\Delta_-} \left[(p+1)(\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p,0) + \right.$$

$$\left. + (p-1)(\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p,0) \right],$$

$$\Delta_- = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha.$$

Виходячи з останньої умови (3.4), за допомогою (3.14) одержуємо рівність

$$A_1(p-\alpha_1) + A_2(p-1) = e[B_1(p-\alpha_2) + B_2(p-1)]. \quad (3.19)$$

Підставляючи вирази для A_1 , A_2 , B_1 , B_2 з (3.16), (3.18) та (3.19), приходимо до співвідношення, що зв'язує трансформанти $\sigma_\theta^*(p,0)$ і $\tau_{r\theta}^*(p,0)$

$$\sigma_\theta^*(p,0) = \frac{N(p)}{D(p)} \tau_{r\theta}^*(p,0), \quad (3.20)$$

$$N(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [(1-\alpha_1) \sin 2p(\pi-\alpha) -$$

$$-(2p-1-\alpha_1) \sin 2\alpha] - (\sin 2p(\pi-\alpha) - p \sin 2\alpha) \times \\ \times [(1-\alpha_2) \sin 2p\alpha - (2p-1-\alpha_2) \sin 2\alpha] e,$$

$$D(p) = (1+\alpha_1) [\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) +$$

$$+ (1 + \alpha_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha]e.$$

Використовуючи (3.14), знаходимо

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* = & -\frac{1 + \nu_1}{E_1(p-1)} \{A_3(p + \alpha_1) + A_4(p-1) - \\ & - [B_3(p + \alpha_2) + B_4(p-1)]e\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Підставляючи у (3.21) вирази для A_3 , A_4 , B_3 , B_4 з (3.16), (3.18) і враховуючи (3.20), приходимо до співвідношення, яке зв'язує трансформанти $\tau_{r\theta}^*(p, 0)$ і $\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^*$

$$\tau_{r\theta}^*(p, 0) = \frac{(1 + \alpha_1)D(p)}{2D_0(p)} \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^*, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} D_0(p) = & (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] + \\ & + \{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \\ & \times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times \\ & \times (\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)\}e + \\ & + [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)e^2. \end{aligned}$$

Беручи до уваги другу з умов (3.5) і умову (3.7), одержуємо

$$\tau_{r\theta}^*(p, 0) = l^{p+1} \left[\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \right], \quad (3.23)$$

$$\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^* = l^{p+1} \Phi^-(p),$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \left. \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \right|_{\substack{r=\rho l \\ \theta=0}} \rho^p d\rho,$$

$$\tau = -Cg_1 l^{\lambda_0}.$$

Підставляючи одержані для трансформант $\tau_{r\theta}^*(p, 0)$ і $\left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{\theta=0}^*$

вирази (3.23) у (3.22), приходимо до наступного функціонального рівняння Вінера–Гопфа відносно невідомих функцій $\Phi^+(p)$, $\Phi^-(p)$:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} = G_1^0(p) \Phi^-(p), \quad (3.24)$$

$$G_1^0(p) = \frac{(1+\alpha_1)[a_0(p) + a_1(p)e]}{2[b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2]},$$

$$a_0(p) = (1+\alpha_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),$$

$$a_1(p) = (1+\alpha_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha],$$

$$b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],$$

$$b_1(p) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] -$$

$$- [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha),$$

$$b_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – досить малі додатні числа).

Функція $\Phi^+(p)$ аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, а функція $\Phi^-(p)$ аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p > -\varepsilon_1$.

3.3. Розв'язання рівняння Вінера – Гопфа

Рівняння (3.24) запишемо так:

$$\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} = A \operatorname{ctg} p\pi G_1(p) \Phi^-(p), \quad (3.25)$$

$$A = \frac{(1 + \alpha_1)[1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e]}{2[\alpha_1 + (1 + \alpha_1\alpha_2)e + \alpha_2e^2]}, \quad G_1(p) = \frac{G_{11}(p)}{G_{12}(p)},$$

$$G_{11}(p) = [\alpha_1 + (1 + \alpha_1\alpha_2)e + \alpha_2e^2] [a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi,$$

$$G_{12}(p) = [1 + \alpha_1 + (1 + \alpha_2)e] [b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi$$

$$(-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2).$$

Функція

$$G_1(it) = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}, \quad (3.26)$$

$$\varphi_1(t) = [\alpha_1 + (1 + \alpha_1\alpha_2)e + \alpha_2e^2] \{ (1 + \alpha_1)(ch 2t(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha) \times$$

$$\times (sh 2t\alpha + t \sin 2\alpha) + (1 + \alpha_2)(ch 2t\alpha - \cos 2\alpha) \times$$

$$\times (sh 2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha)e \} sh t\pi,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(t) = & \left[1 + \mathfrak{A}_1 + (1 + \mathfrak{A}_2)e \right] \{ (sh2t\alpha + t \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_1 sh2t(\pi - \alpha) + t \sin 2\alpha) + \right. \\
& + \left\{ (1 + \mathfrak{A}_1)(1 + \mathfrak{A}_2)sh^2t\pi - (sh2t\alpha + t \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_1 sh2t(\pi - \alpha) + t \sin 2\alpha) - \right. \\
& - (sh2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_2 sh2t\alpha - t \sin 2\alpha) \} e + \\
& \left. + (sh2t(\pi - \alpha) - t \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_2 sh2t\alpha - t \sin 2\alpha)e^2 \right\} cht\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) = & \left[\mathfrak{A}_1 + (1 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)e + \mathfrak{A}_2e^2 \right] (1 - e^{-2t\pi}) \{ (1 + \mathfrak{A}_1) \times \right. \\
& \times (1 - e^{-4t\alpha} + 2te^{-2t\alpha} \sin 2\alpha)(1 + e^{-4t(\pi - \alpha)} - 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \cos 2\alpha) + \\
& + (1 + \mathfrak{A}_2)(1 + e^{-4t\alpha} - 2te^{-2t\alpha} \cos 2\alpha)(1 - e^{-4t(\pi - \alpha)} - 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha)e \} \\
\psi_2(t) = & \left[1 + \mathfrak{A}_1 + (1 + \mathfrak{A}_2)e \right] (1 + e^{-2t\pi}) \{ (1 - e^{-4t\alpha} + 2te^{-2t\alpha} \sin 2\alpha) \times \right. \\
& \times (\mathfrak{A}_1(1 - e^{-4t(\pi - \alpha)}) + 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha) + \\
& + \left\{ (1 + \mathfrak{A}_1)(1 + \mathfrak{A}_2)(1 + e^{-4t\pi} - 2e^{-2t\pi}) - \right. \\
& - (1 - e^{-4t(\pi - \alpha)} + 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_1(1 - e^{-4t(\pi - \alpha)}) + 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha) - \\
& - (1 - e^{-4t(\pi - \alpha)} - 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_2(1 - e^{-4t\alpha}) + 2te^{-2t\alpha} \sin 2\alpha) \} e + \\
& \left. + (1 - e^{-4t(\pi - \alpha)} - 2te^{-2t(\pi - \alpha)} \sin 2\alpha)(\mathfrak{A}_2(1 - e^{-4t\alpha}) - 2te^{-2t\alpha} \sin 2\alpha)e^2 \right\}
\end{aligned}$$

$(-\infty < t < \infty)$ є дійсною додатною парною функцією t , яка прямує до одиниці при $t \rightarrow \infty$.

Згідно з (3.26) функція $G_1(p)$ на уявній осі задовольняє умові Гельдера. Індекс функції $G_1(p)$ по уявній осі дорівнює нулю.

Отже, справедлива факторизація [26]

$$G_1(p) = \frac{G_1^+(p)}{G_1^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (3.27)$$

$$\exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G_1(z)}{z-p} dz\right] = \begin{cases} G_1^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G_1^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

Функція $G_1^+(p)$ аналітична, не має нулів і прямує до одиниці при $p \rightarrow \infty$ у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а функція $G_1^-(p)$ аналітична, не має нулів і прямує до одиниці при $p \rightarrow \infty$ у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$.

Функцію $p \operatorname{ctg} p\pi$ можна факторизувати так [49]:

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp p)} \quad (3.28)$$

($\Gamma(z)$ – гамма – функція). Функція $K^+(p)$ аналітична і не має нулів у півплощині $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функція $K^-(p)$ аналітична і не має нулів у півплощині $\operatorname{Re} p > -1/2$. Справедливі асимптотики

$$K^+(p) \sim \sqrt{-p}, \quad K^-(p) \sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.29)$$

За допомогою факторизацій (3.27), (3.28) рівняння (3.25) перепишемо так:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G_1^+(p)} + \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(p)G_1^+(p)} = \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG_1^-(p)} \quad (3.30)$$

($\operatorname{Re} p = 0$).

Другий доданок в (3.30) представимо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(p)G_1^+(p)} &= \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{1}{K^+(p)G_1^+(p)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \right] + \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \\ &\quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Підставляючи (3.31) у (3.30), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G_1^+(p)} + \frac{\tau}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{1}{K^+(p)G_1^+(p)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \right] = \frac{AK^-(p)\Phi^-(p)}{pG_1^-(p)} - \\ &\quad - \frac{\tau}{(p + \lambda_0 + 1)K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Функція в лівій частині (3.32) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а функція в правій частині (3.32) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. На основі принципу аналітичного продовження ці функції дорівнюють одній і тій самій функції, що аналітична у всій площині p .

Вивчимо поведінку функцій $\Phi^+(p)$ і $\Phi^-(p)$ при $p \rightarrow \infty$.

В околі кінця O_1 розрізу відповідно до загальних положень про поведінку напружень біля кутових точок пружних тіл, які наведено у підрозділі 2.1, реалізується асимптотика, що являє собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, яка містить на прямолінійній межі поділу середовищ півнескінченну лінію

розриву дотичного переміщення (рис.3.5), що породжується найменшим на інтервалі $] -1; 0[$ коренем її характеристичного рівняння.

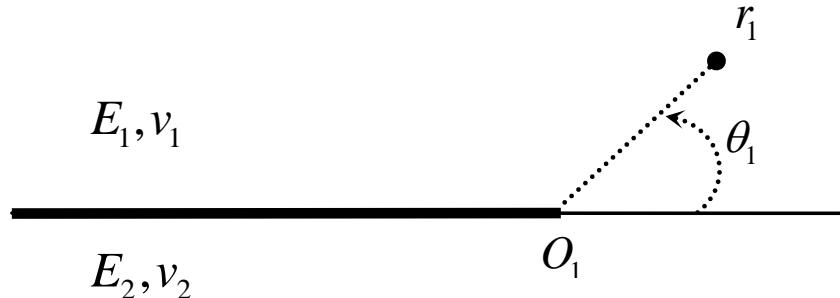


Рис. 3.5

Крайові умови цієї задачі мають вигляд

$$\theta_1 = 0, \langle \sigma_{\theta_1} \rangle = \langle \tau_{r_1 \theta_1} \rangle = 0, \langle u_{\theta_1} \rangle = \langle u_{r_1} \rangle = 0; \quad (3.33)$$

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, \pi) = \sigma_{\theta_1}(r_1, -\pi), \quad \tau_{r_1 \theta_1}(r_1, \pi) = \tau_{r_1 \theta_1}(r_1, -\pi),$$

$$u_{\theta_1}(r_1, \pi) = u_{\theta_1}(r_1, -\pi), \quad \tau_{r_1 \theta_1}(r_1, \pi) = 0.$$

За допомогою (2.13), (2.14), (3.33) приходимо до системи лінійних рівнянь

$$a_3 + a_4 - b_3 - b_4 = 0, \quad (3.34)$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2\lambda - b_1(\lambda + 2) - b_2\lambda = 0,$$

$$a_1(\lambda + 2) + a_2(\lambda + 1 + \alpha_1) - b_1e(\lambda + 2) - b_2e(\lambda + 1 + \alpha_2) = 0,$$

$$a_3(\lambda + 2) + a_4(\lambda + 1 - \alpha_1) - b_3e(\lambda + 2) - b_4e(\lambda + 1 - \alpha_2) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& a_1 \sin \lambda \pi + a_2 \sin \lambda \pi + a_3 \cos \lambda \pi + a_4 \cos \lambda \pi + b_1 \sin \lambda \pi + \\
& + b_2 \sin \lambda \pi - b_3 \cos \lambda \pi - b_4 \cos \lambda \pi = 0, \\
& a_1(\lambda + 2) \cos \lambda \pi + a_2 \lambda \cos \lambda \pi - a_3(\lambda + 2) \sin \lambda \pi - a_4 \lambda \sin \lambda \pi - \\
& - b_1(\lambda + 2) \cos \lambda \pi - b_2 \lambda \cos \lambda \pi - b_3(\lambda + 2) \sin \lambda \pi - b_4 \lambda \sin \lambda \pi = 0, \\
& a_1(\lambda + 2) \cos \lambda \pi + a_2(\lambda + 1 + \alpha_1) \cos \lambda \pi - a_3(\lambda + 2) \sin \lambda \pi - \\
& - a_4(\lambda + 1 + \alpha_1) \sin \lambda \pi - b_1 e(\lambda + 2) \cos \lambda \pi - b_2 e(\lambda + 1 + \alpha_2) \cos \lambda \pi - \\
& - b_3 e(\lambda + 2) \sin \lambda \pi - b_4 e(\lambda + 1 + \alpha_2) \sin \lambda \pi = 0, \\
& a_1(\lambda + 2) \cos \lambda \pi + a_2 \lambda \cos \lambda \pi - a_3(\lambda + 2) \sin \lambda \pi - a_4 \lambda \sin \lambda \pi = 0
\end{aligned}$$

$(a_j, j=1,2,3,4$ відповідають області $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $a b_j$ – області $-\pi \leq \theta_1 \leq 0$).

Обчислюючи визначник $\Delta(\lambda)$ системи (3.34) та прирівнюючи його до нуля, одержуємо характеристичне рівняння однорідної задачі, що розглядається

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) & \equiv 8(\alpha_1 + e)(1 + \alpha_2 e)(\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e) \times \\
& \times (\lambda + 2)^2 \sin^3 \lambda \pi \cos \lambda \pi = 0.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Рівняння (3.35) у смузі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ має єдиний корінь, який дорівнює $-1/2$. Розв'язок системи (3.34), що відповідає цьому кореню, такий:

$$a_1 = -\frac{1 + \alpha_2 e + 2(\alpha_1 + e)}{3(1 + \alpha_2 e)} a_2, \tag{3.36}$$

$$a_3 = 0,$$

$$a_4 = 0,$$

$$b_1 = -\frac{\alpha_1 + e + 2(1 + \alpha_2 e)}{3(1 + \alpha_2 e)} a_2,$$

$$b_2 = \frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_2 e} a_2,$$

$$b_3 = 0,$$

$$b_4 = 0$$

(a_2 – довільна дійсна стала). Підставляючи (3.36) у (2.13) та покладаючи

$a_2 = \frac{3K_n}{4\sqrt{2\pi}}$, знаходимо розв'язок однорідної задачі, яка зображена на

рис.3.5, що породжується коренем $-1/2$ її характеристичного рівняння

$$\sigma_{\theta_1} = -R(r_1) \left\{ 3(1 + \alpha_2 e) \sin \frac{\theta_1}{2} + [2(\alpha_1 + e) + 1 + \alpha_2 e] \sin \frac{3\theta_1}{2} \right\}, \quad (3.37)$$

$$\tau_{r_1 \theta_1} = R(r_1) \left\{ (1 + \alpha_2 e) \cos \frac{\theta_1}{2} + [2(\alpha_1 + e) + 1 + \alpha_2 e] \cos \frac{3\theta_1}{2} \right\},$$

$$\sigma_{r_1} = -R(r_1) \left\{ 5(1 + \alpha_2 e) \sin \frac{\theta_1}{2} - [2(\alpha_1 + e) + 1 + \alpha_2 e] \sin \frac{3\theta_1}{2} \right\}$$

$$(0 \leq \theta_1 \leq \pi);$$

$$\sigma_{\theta_1} = -R(r_1) \left\{ 3(\alpha_1 + e) \sin \frac{\theta_1}{2} + [2(1 + \alpha_2 e) + \alpha_1 + e] \sin \frac{3\theta_1}{2} \right\},$$

$$\tau_{r_1 \theta_1} = R(r_1) \left\{ (\alpha_1 + e) \cos \frac{\theta_1}{2} + [2(1 + \alpha_2 e) + \alpha_1 + e] \cos \frac{3\theta_1}{2} \right\},$$

$$\sigma_{r_1} = -R(r_1) \left\{ 5(\alpha_1 + e) \sin \frac{\theta_1}{2} - [2(1 + \alpha_2 e) + \alpha_1 + e] \sin \frac{3\theta_1}{2} \right\}$$

$$(-\pi \leq \theta_1 \leq 0); R(r_1) = \frac{K_n}{4(1 + \alpha_2 e) \sqrt{2\pi r_1}}.$$

У цих формулах K_n – довільна дійсна стала.

Отже, у задачі, яка зображена на рис. 3.4, при $r_1 \rightarrow 0$ головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди виражаються формулами (3.37), де K_{II} – коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії розриву дотичного переміщення, що підлягає визначенню. Зокрема, справедливі асимптотики

$$\theta = 0, r \rightarrow l + 0, \tau_{r\theta} \sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}, \quad (3.38)$$

$$\theta = 0, r \rightarrow l - 0, \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}.$$

Має місце наступна теорема абелевого типу [75]. Якщо

$$f(x) \sim ax^\eta \quad (x \rightarrow +0, -1 < \eta < 0),$$

то

$$\int_0^\infty f(x)e^{-zx} dx \sim a\Gamma(\eta+1)z^{-\eta-1} \quad (z \rightarrow \infty, \operatorname{Re} z > 0).$$

Виходячи з (3.38), за теоремою абелевого типу одержуємо

$$\Phi^+(p) \sim \frac{\alpha_1 + e + 1 + \alpha_2 e}{2(1 + \alpha_2 e)} \frac{K_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \quad (3.39)$$

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{\alpha_1 + e}{1 + \alpha_1} \frac{K_{II}}{\sqrt{2pl}}$$

$$(p \rightarrow \infty).$$

З (3.27), (3.29), (3.39) випливає, що функції у лівій і правій частинах (3.32) прямують до нуля при $p \rightarrow \infty$ у півплошинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. За теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тодіжно дорівнює нулю у всій площині p .

Таким чином, розв'язок рівняння Вінера – Гопфа (3.24) має вигляд

$$\Phi^+(p) = \frac{\tau K^+(p)G_1^+(p)}{p + \lambda_0 + 1} \left[\frac{1}{K^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{K^+(p)G_1^+(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p < 0), \quad (3.40)$$

$$\Phi^-(p) = \frac{\tau p G_1^-(p)}{AK^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)(p + \lambda_0 + 1)K^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p > 0).$$

3.4. Дослідження напруженого стану біля кінця тріщини та граничної рівноваги тіла з тріщинами

За допомогою (3.40) знаходимо асимптотику

$$\Phi^-(p) \sim \frac{\tau}{AK^+(-\lambda_0 - 1)G_1^+(-\lambda_0 - 1)\sqrt{p}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (3.41)$$

Згідно (3.39), (3.41) одержуємо наступну формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці O_1 тріщини (рис. 3.2):

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) k(\alpha, e_0, v_1, v_2) Cl^{\lambda_0 + 1/2},$$

$$k = \frac{2\sqrt{2}(1+\alpha_2 e)\Gamma(\lambda_0 + 3/2)}{[1+\alpha_1 + (1+\alpha_2)e]\Gamma(\lambda_0 + 2)G_1^+(-\lambda_0 - 1)}, \quad (3.42)$$

$$G_1^+(-\lambda_0 - 1) = \exp \left[\frac{\lambda_0 + 1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_1(it)}{t^2 + (\lambda_0 + 1)^2} dt \right].$$

Оскільки $K_{II} > 0$, $g_1 < 0$, повинна виконуватись умова $C < 0$.

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_{II}^0 = -K_{II} / (Cl^{\lambda_0 + 1/2})$ від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображені на рис. 3.6 ($v_1 = v_2 = 0,3$).

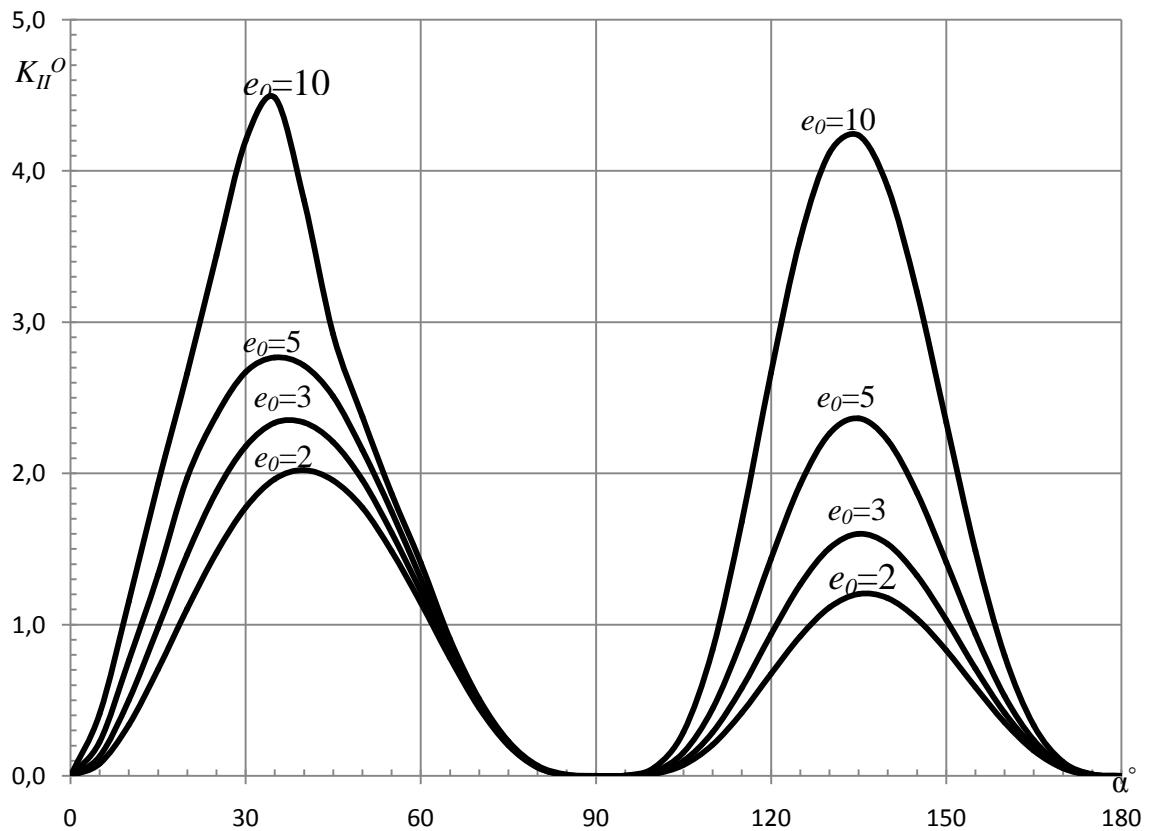


Рис. 3.6

Таблиця 3.2

e_0	2	3	5	10
$\alpha_{\max 1}^\circ$	42,4	37,1	35,3	33,5
$K_{II}^0(\alpha_{\max})$	2,0224	2,3371	2,7663	4,5121
$\alpha_{\max 2}^\circ$	139,2	135,4	134,1	132,4
$K_{II}^0(\alpha_{\max})$	1,2025	1,6012	2,3644	4,2363

Значення $\alpha_{\max 1}^\circ$, $\alpha_{\max 2}^\circ$ кута α , при яких функція $K_{II}^0(\alpha)$ буде найбільшою на кожному з інтервалів $]0; \pi/2[$, $]\pi/2; \pi[$, і відповідні її значення наведено у табл. 3.2. Деякі значення K_{II}^0 наведено у табл. 3.3.

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ і від α_2 до π концентрація напружень біля кінця O_1 тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють $42,4^\circ$; $37,1^\circ$; $35,3^\circ$; $33,5^\circ$.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншими є гострий и тупий кути максимальної концентрації напружень.

Користуючись силовим критерієм руйнування [85] і прирівнюючи праву частину (3.42) до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напружень K_{IIc} , що являє собою задану сталу, приходимо до рівняння для визначення руйнуючого навантаження

Таблиця 3.3

α°	e_0				α°	e_0			
	2	3	5	10		2	3	5	10
5	0,081	0,130	0,224	0,410	95	0,001	0,001	0,001	0,002
10	0,337	0,499	0,762	1,152	100	0,013	0,019	0,029	0,055
15	0,703	0,977	1,327	1,928	105	0,071	0,100	0,155	0,290
20	1,104	1,462	1,969	2,660	110	0,205	0,287	0,445	0,834
25	1,476	1,879	2,384	3,442	115	0,416	0,580	0,899	1,678
30	1,775	2,178	2,669	4,200	120	0,674	0,933	1,434	2,662
35	1,963	2,335	2,766	4,485	125	0,924	1,267	1,929	3,552
40	2,022	2,337	2,713	3,811	130	1,113	1,506	2,264	4,120
45	1,953	2,209	2,510	2,924	135	1,202	1,601	2,364	4,236
50	1,773	1,956	2,155	2,376	140	1,175	1,533	2,219	3,894
55	1,487	1,608	1,749	1,867	145	1,040	1,326	1,873	3,202
60	1,145	1,221	1,306	1,410	150	0,830	1,031	1,412	2,338
65	0,782	0,826	0,874	0,906	155	0,586	0,709	0,937	1,488
70	0,451	0,475	0,491	0,511	160	0,354	0,416	0,528	0,796
75	0,202	0,208	0,219	0,229	165	0,168	0,194	0,237	0,334
80	0,055	0,057	0,061	0,067	170	0,051	0,060	0,072	0,093
85	0,005	0,005	0,005	0,009	175	0,003	0,006	0,008	0,010

$$C = \frac{K_{Ic}}{g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2)k(\alpha, e_0, v_1, v_2)l^{\lambda_0+1/2}}.$$

Зрушення тріщин відбудеться тоді, коли параметр навантаження C , зростаючі за модулем зі зростанням зовнішнього навантаження, досягне свого граничного значення, яке визначається попередньою формулою.

Оскільки $\lambda_0 > -1/2$, з (3.42) знаходимо

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = (\lambda_0 + 1/2) k C g_1 l^{\lambda_0-1/2} > 0.$$

Використовуючи цю нерівність і критерій стійкості рівноваги тріщин [85], можна сформулювати наступний висновок. Якщо у кутовій точці межі поділу ізотропних пружних середовищ зародилися міжфазні тріщини, довжина яких значно менша, ніж розміри тіла, то у випадку повного гладкого контакту берегів їх рівновага є нестійкою. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

3.5. Аналіз поведінки напружень біля кутової точки

Визначимо напруження в задачі 1.

Підставляючи (3.20) у (3.16), (3.18), одержуємо наступні вирази для $A_j(p)$, $B_j(p)$ ($j=1,2,3,4$) через меллінівську трансформанту $\tau_{r\theta}^*(p,0)$:

$$A_1 = \frac{(p-1)\tau_{r\theta}^*(p,0)}{D(p)} \left([\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] \times \right. \\ \left. \times (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) - \right. \\ (3.43)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\{(1+\alpha_1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] + \\
& + [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha][(1-\alpha_2)\sin 2p\alpha + (2p-1-\alpha_2)\sin 2\alpha]\}e,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \frac{\tau_{r\theta}^*(p,0)}{D(p)}(-(p-\alpha_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha) + \\
& + \frac{1}{2}\{-(1+\alpha_2)(p-1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha] + \\
& + (p+1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha][(1-\alpha_2)\sin 2p\alpha + (2p-1-\alpha_2)\sin 2\alpha]\}e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & \frac{(p-1)\tau_{r\theta}^*(p,0)}{D(p)}(-[\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha](\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha) + \\
& + \frac{1}{2}\{(1+\alpha_1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\cos 2p(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha] + \\
& + [\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha][(1-\alpha_2)\sin 2p\alpha + (2p-1-\alpha_2)\sin 2\alpha]\}e),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 = & \frac{\tau_{r\theta}^*(p,0)}{D(p)}((p-\alpha_1)[\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha](\sin 2p\alpha + p\sin 2\alpha) - \\
& - \frac{1}{2}\{(1+\alpha_2)(p+1)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\cos 2p(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha] + \\
& + (p-1)[\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] \times \\
& \times [\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] \}e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = & \frac{(p-1)\tau_{r\theta}^*(p,0)}{D(p)} \left(-\frac{1}{2}\{(1+\alpha_1)(\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha) \times \right. \\
& \times [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [(1 - \alpha_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \alpha_1) \sin 2\alpha] \} + \\
& + (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} \left(\frac{1}{2} \left\{ -(1 + \alpha_1)(p - 1) (\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) \times \right. \right. \\
& \times [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] + + (p + 1) [\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha] \times \\
& \times [(1 - \alpha_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \alpha_1) \sin 2\alpha] \} + \\
& + (p - \alpha_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & \frac{(p - 1)\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} \left(-\frac{1}{2} \left\{ (1 + \alpha_1) [\cos 2p\alpha + \cos 2\alpha] \times \right. \right. \\
& \times [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] + \\
& + (\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) [(1 - \alpha_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \alpha_1) \sin 2\alpha] \} + \\
& + (\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} \left(\frac{1}{2} (1 + \alpha_1)(p - 1) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] + \right. \\
& + (p + 1) (\sin 2p\alpha + \sin 2\alpha) \times \\
& \times [(1 - \alpha_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \alpha_1) \sin 2\alpha] \} - \\
& \left. - (p - 1) (\sin 2p\alpha - \sin 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(p) = & (1 + \alpha_1) [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) + \\
& + (1 + \alpha_2) (\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha) [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] e .
\end{aligned}$$

Підставляючи (3.43) у (3.14), знаходимо

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_1^A(p, \theta), \\
 \tau_{r\theta}^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_2^A(p, \theta), \\
 \sigma_r^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_3^A(p, \theta) \\
 &\quad (0 \leq \theta \leq \pi - \alpha); \\
 \sigma_\theta^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_1^B(p, \theta), \\
 \tau_{r\theta}^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_2^B(p, \theta), \\
 \sigma_r^*(p, \theta) &= \frac{\tau_{r\theta}^*(p, 0)}{D(p)} V_3^B(p, \theta) \\
 &\quad (-\alpha \leq \theta \leq 0);
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
 V_1^A(p, \theta) &= \left[H_1 \Delta'' - \frac{e}{2} (H_1 H_4 + (1 + \alpha_2) H_3 H_5) \right] (p-1) \sin(p+1)\theta + \\
 &\quad + \left[-(p - \alpha_1) H_1 \Delta'' + \frac{e}{2} ((p+1) H_1 H_4 - (p-1)(1 + \alpha_2) H_2 H_5) \right] \sin(p-1)\theta + \\
 &\quad + \left[-H_2 \Delta'' + \frac{e}{2} (H_2 H_4 + (1 + \alpha_1) H_5 H_6) \right] (p-1) \cos(p+1)\theta + \\
 &\quad + \left[(p - \alpha_1) H_3 \Delta'' - \frac{e}{2} ((p+1) H_3 H_4 + (p-1)(1 + \alpha_2) H_5 H_6) \right] \cos(p-1)\theta,
 \end{aligned}$$

$$V_2^A(p, \theta) = \left[H_3 \Delta'' - \frac{e}{2} (H_2 H_4 + (1 + \alpha_1) H_5 H_6) \right] (p+1) \sin(p+1)\theta +$$

$$+ \left[-(p - \alpha_1)H_3\Delta'' + \frac{e}{2}((p+1)H_3H_4 + (p-1)(1+\alpha_2)H_5H_6) \right] \sin(p-1)\theta +$$

$$+ \left[H_1\Delta'' - \frac{e}{2}(H_1H_4 + (1+\alpha_1)H_3H_5) \right] (p+1)\cos(p+1)\theta + \\ + \left[-(p - \alpha_1)H_1\Delta'' + \frac{e}{2}((p+1)H_1H_4 - (p-1)(1+\alpha_2)H_2H_5) \right] \cos(p-1)\theta,$$

$$V_3^A(p,\theta) = \left[-H_1\Delta'' + \frac{e}{2}(H_1H_7 + (1+\alpha_1)H_3H_5) \right] (p+3)\sin(p+1)\theta + \\ + \left[(p - \alpha_1)H_1\Delta'' - \frac{e}{2}((p+1)H_1H_4 - (p-1)(1+\alpha_2)H_2H_5) \right] \sin(p-1)\theta + \\ + \left[H_2\Delta'' - \frac{e}{2}(H_2H_4 + (1+\alpha_1)H_5H_6) \right] (p+3)\cos(p+1)\theta + \\ + \left[-(p - \alpha_1)H_3\Delta'' + \frac{e}{2}((p+1)H_3H_4 + (p-1)(1+\alpha_2)H_5H_6) \right] \cos(p-1)\theta,$$

$$V_1^B(p,\theta) = \left[H_5\Delta'e - \frac{1}{2}(H_5H_9 + (1+\alpha_1)H_1H_8) \right] (p-1)\sin(p+1)\theta + \\ + \left[(p - \alpha_2)H_5\Delta'e + \frac{1}{2}((p+1)H_5H_9 - (p-1)(1+\alpha_1)H_1H_7) \right] \sin(p-1)\theta + \\ + \left[H_7\Delta'e - \frac{1}{2}(H_7H_9 - (1+\alpha_1)H_1H_{10}) \right] (p-1)\cos(p+1)\theta + \\ + \left[-(p - \alpha_2)H_8\Delta'e + \frac{1}{2}((p+1)H_8H_9 + (p-1)(1+\alpha_1)H_1H_5) \right] \cos(p-1)\theta,$$

$$V_2^B(p,\theta) = \left[-H_7\Delta'e + \frac{1}{2}(H_7H_9 - (1+\alpha_1)H_1H_{10}) \right] (p+1)\sin(p+1)\theta + \\ + \left[(p - \alpha_2)H_8\Delta'e - \frac{1}{2}((p+1)H_8H_9 + (p-1)(1+\alpha_1)H_1H_5) \right] \sin(p-1)\theta +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[H_5 \Delta' e - \frac{1}{2} (H_5 H_9 + (1 + \alpha_1) H_1 H_8) \right] (p+1) \cos(p+1)\theta + \\
& + \left[(p - \alpha_2) H_5 \Delta' e + \frac{1}{2} ((p+1) H_5 H_9 - (p-1)(1 + \alpha_1) H_1 H_7) \right] \cos(p-1)\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3^B(p, \theta) = & \left[-H_5 \Delta' e + \frac{1}{2} (H_5 H_9 - (1 + \alpha_1) H_1 H_8) \right] (p+3) \sin(p+1)\theta + \\
& + \left[-(p - \alpha_2) H_5 \Delta' e - \frac{1}{2} ((p+1) H_5 H_9 - (p-1)(1 + \alpha_1) H_1 H_5) \right] \sin(p-1)\theta + \\
& + \left[-H_7 \Delta' e + \frac{1}{2} (H_7 H_9 - (1 + \alpha_1) H_1 H_{10}) \right] (p+3) \cos(p+1)\theta + \\
& + \left[(p - \alpha_2) H_8 \Delta' e - \frac{1}{2} ((p+1) H_8 H_9 + (p-1)(1 + \alpha_1) H_1 H_5) \right] \cos(p-1)\theta,
\end{aligned}$$

$$\Delta' = \sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha, \quad \Delta'' = \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha,$$

$$H_1 = \cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha,$$

$$H_2 = \sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha,$$

$$H_3 = \sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha,$$

$$H_4 = (1 - \alpha_2) \sin 2p\alpha + (2p - 1 - \alpha_2) \sin 2\alpha,$$

$$H_5 = \cos 2p\alpha - \cos 2\alpha,$$

$$H_6 = \cos 2p(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha,$$

$$H_7 = \sin 2p\alpha - \sin 2\alpha,$$

$$H_8 = \sin 2p\alpha + \sin 2\alpha,$$

$$H_9 = (1 - \alpha_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - (2p - 1 - \alpha_1) \sin 2\alpha,$$

$$H_{10} = \cos 2p\alpha + \cos 2\alpha.$$

Підставляючи (3.40) у (3.23), одержуємо

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta}^*(p, 0) &= \frac{M(p)}{p + \lambda_0 + 1}, \\ M(p) &= \frac{m\Gamma(1-p)G_1^+(p)l^{p+1}}{\Gamma(1/2-p)}, \\ m &= -\frac{g_1\Gamma(\lambda_0 + 3/2)}{\Gamma(\lambda_0 + 2)G_1^+(-\lambda_0 - 1)}Cl^{\lambda_0}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Згідно з (3.44), (3.45) вирази для меллінівських трансформант напружень мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_1^A(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)}, \\ \tau_{r\theta}^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_2^A(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)}, \\ \sigma_r^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_3^A(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)} \quad (0 \leq \theta \leq \pi - \alpha); \\ \sigma_\theta^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_1^B(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)}, \\ \tau_{r\theta}^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_2^B(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)}, \\ \sigma_r^*(p, \theta) &= \frac{M(p)V_3^B(p, \theta)}{(p + \lambda_0 + 1)D(p)} \quad (-\alpha \leq \theta \leq 0).\end{aligned}\tag{3.46}$$

Застосовуючи до виразів (3.46) формулу обернення Мелліна, одержуємо наступні формули для напружень у задачі 1:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M(p)V_1^{A,B}(p,\theta)}{(p+\lambda_0+1)D(p)} r^{-p-1} dp, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M(p)V_2^{A,B}(p,\theta)}{(p+\lambda_0+1)D(p)} r^{-p-1} dp, \\ \sigma_r &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{M(p)V_3^{A,B}(p,\theta)}{(p+\lambda_0+1)D(p)} r^{-p-1} dp\end{aligned}\quad (3.47)$$

(індекс A вибирається при $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$, а індекс B – при $-\alpha \leq \theta \leq 0$; γ – довільна пряма, яка паралельна уявній осі і лежить у смузі $-\varepsilon < \operatorname{Re} p < 0$).

У смузі $-1 < \operatorname{Re} p < 0$ кожна з підінтегральних функцій у (3.47) має дві особливості – прості полюси в точках $p = -\lambda_0 - 1$ і $p = -\lambda_1 - 1$, де λ_1 – єдиний на інтервалі $] -1; 0 [$ корінь рівняння $D(-\lambda - 1) = 0$, тобто

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_1) &[\cos 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] + \\ &+ (1 + \alpha_2) [\cos 2(\lambda + 1)\alpha - \cos 2\alpha] [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - \\ &- (\lambda + 1)\sin 2\alpha] e = 0.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Використовуючи цю інформацію про особливі точки підінтегральних функцій у (3.47), застосовуючи до інтегралів (3.47) теорему про лишки та додаючи розв'язки задачі 1 і задачі К, одержуємо наступні формули для головних членів розвинень напружень в асимптотичні ряди при $r \rightarrow 0$ у задачі теорії пружності з краївими умовами (3.4) – (3.6) (рис. 3.4):

$$\sigma_\theta(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_1^A(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_2^A(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$\sigma_r(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_3^A(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}) (r \rightarrow 0);$$

$$C_1 = \frac{g_1 \Gamma(\lambda_0 + 3/2) \Gamma(\lambda_1 + 2) G_1^+(-\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_0) s \Gamma(\lambda_0 + 2) \Gamma(\lambda_1 + 3/2) G_1^+(-\lambda_0 - 1)} Cl^{\lambda_0 - \lambda_1}$$

$$\begin{aligned} s = & (1 + \alpha_1) \{ [\cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] [2\alpha \cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha + \sin 2\alpha] - \\ & - 2(\pi - \alpha) [\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha] \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) \} + \\ & + (1 + \alpha_2) \{ [2(\pi - \alpha) \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha] [\cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha - \cos 2\alpha] - \\ & - 2\alpha [\sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha] \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha \} e, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1^A(\theta) = & \frac{1}{2} \left[-s_1^1 (\lambda_1 + 2) \sin \lambda_1 \theta + s_2^1 \sin (\lambda_1 + 2) \theta + \right. \\ & \left. + s_3^1 (\lambda_1 + 2) \cos \lambda_1 \theta - s_4^1 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right], \end{aligned}$$

$$s_1^1 = 2c_1 c_2 - [c_1 c_3 + (1 + \alpha_2) c_4 c_5] e,$$

$$s_2^1 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2) c_1 c_2 - [\lambda_1 c_1 c_3 - (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_2) c_4 c_6] e,$$

$$s_3^1 = 2c_2 c_6 - [c_3 c_6 + (1 + \alpha_1) c_4 c_7] e,$$

$$s_4^1 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_1) c_2 c_5 - [\lambda_1 c_3 c_5 + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1) c_4 c_7] e,$$

$$S_2^A(\theta) = \frac{1}{2} \left[s_1^2 \lambda_1 \sin \lambda_1 \theta - s_2^2 \sin (\lambda_1 + 2) \theta + s_3^2 \lambda_1 \cos \lambda_1 \theta - s_4^2 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right],$$

$$s_1^2 = 2c_2c_6 - [c_6c_3 + (1+\alpha_1)c_4c_7]e,$$

$$s_2^2 = 2(1+\lambda_1+\alpha_1)c_2c_5 - [\lambda_1c_5c_3 + (\lambda_1+2)(1+\alpha_2)c_4c_7]e,$$

$$s_3^2 = 2c_1c_2 - [c_1c_8 + (1+\alpha_1)c_4c_5]e,$$

$$s_4^2 = 2(1+\lambda_1+\alpha_1) - [\lambda_1c_1c_3 - (\lambda_1+2)(1+\alpha_1)c_4c_6]e,$$

$$\begin{aligned} S_3^A(\theta) = & \frac{1}{2} \left[s_1^3 (\lambda_1 - 2) \sin \lambda_1 \theta - s_2^3 \sin (\lambda_1 + 2) \theta - \right. \\ & \left. - s_3^3 (\lambda_1 - 2) \cos \lambda_1 \theta + s_4^3 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right], \end{aligned}$$

$$s_1^3 = 2c_1c_2 - [c_1c_3 + (1+\alpha_1)c_4c_5]e,$$

$$s_2^3 = 2(1+\lambda_1+\alpha_1)c_1c_2 - [\lambda_1c_1c_3 - (\lambda_1+2)(1+\alpha_2)c_4c_6]e,$$

$$s_3^3 = 2c_2c_6 - [c_6c_3 + (1+\alpha_1)c_4c_7]e,$$

$$s_4^3 = 2(1+\lambda_1+\alpha_1)c_2c_5 - [\lambda_1c_5c_3 + (\lambda_1+2)(1+\alpha_2)c_4c_7]e,$$

$$c_1 = \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha,$$

$$c_2 = \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha,$$

$$c_3 = (2\lambda_1 + 3 + \alpha_2)\sin 2\alpha + (1 - \alpha_2)\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha,$$

$$c_4 = \cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha - \cos 2\alpha,$$

$$c_5 = \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \sin 2\alpha,$$

$$c_6 = \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha,$$

$$c_7 = \cos 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha,$$

$$c_8 = (2\lambda_1 + 3 + \alpha_2)\sin 2\alpha + (1 - \alpha_1)\sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha,$$

$$0 < \theta < \pi - \alpha;$$

$$\sigma_\theta(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_1^B(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_2^B(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}),$$

$$\sigma_r(r, \theta) = r^{\lambda_1} S_3^B(\theta) C_1 + o(r^{\lambda_1}) (r \rightarrow 0);$$

$$\begin{aligned} S_1^B(\theta) = & \frac{1}{2} \left[-\sigma_1^1 (\lambda_1 + 2) \sin \lambda_1 \theta - \sigma_2^1 \sin (\lambda_1 + 2) \theta - \right. \\ & \left. - \sigma_3^1 (\lambda_1 + 2) \cos \lambda_1 \theta - \sigma_4^1 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_1^1 = 2c_4c_9 - [c_4c_{13} + (1 + \alpha_1)c_1c_{11}]e,$$

$$\sigma_2^1 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2)c_4c_9 + [\lambda_1c_4c_{13} - (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_1c_{10}]e,$$

$$\sigma_3^1 = 2c_9c_{10} - [c_{10}c_{13} - (1 + \alpha_1)c_1c_{12}]e,$$

$$\sigma_4^1 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2)c_9c_{11} - [\lambda_1c_{11}c_{13} + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_1c_4]e,$$

$$S_2^B(\theta) = \frac{1}{2} \left[-\sigma_1^2 \lambda_1 \sin \lambda_1 \theta + \sigma_2^2 \sin (\lambda_1 + 2) \theta + \sigma_3^2 \lambda_1 \cos \lambda_1 \theta + \sigma_4^2 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right],$$

$$\sigma_1^2 = 2c_9c_{10} - [c_{10}c_{13} - (1 + \alpha_1)c_5c_{12}]e,$$

$$\sigma_2^2 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2) - [\lambda_1c_{11}c_{13} + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_4c_5]e,$$

$$\sigma_3^2 = 2c_4c_9 - [c_4c_{13} + (1 + \alpha_1)c_5c_{11}]e,$$

$$\sigma_4^2 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2) + [\lambda_1c_4c_{13} + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_5c_{10}]e,$$

$$\begin{aligned} S_3^B(\theta) = & \frac{1}{2} \left[\sigma_1^3 (\lambda_1 - 2) \sin \lambda_1 \theta + \sigma_2^3 \sin (\lambda_1 + 2) \theta + \right. \\ & \left. + \sigma_3^3 (\lambda_1 - 2) \cos \lambda_1 \theta - \sigma_4^3 \cos (\lambda_1 + 2) \theta \right], \end{aligned}$$

$$\sigma_1^3 = 2c_4c_9 - [c_4c_{13} - (1 + \alpha_1)c_1c_{11}]e,$$

$$\sigma_2^3 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2)c_4c_9 + [\lambda_1c_4c_{13} - (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_1c_{10}]e,$$

$$\sigma_3^3 = 2c_9c_{10} - [c_{10}c_{13} - (1 + \alpha_1)c_1c_{12}]e,$$

$$\sigma_4^3 = 2(1 + \lambda_1 + \alpha_2)c_9c_{11} - [\lambda_1c_{11}c_{13} + (\lambda_1 + 2)(1 + \alpha_1)c_1c_4]e,$$

$$c_9 = \sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda_1 + 1)\sin 2\alpha,$$

$$c_{10} = \sin 2(\lambda_1 + 1)\alpha + \sin 2\alpha,$$

$$c_{11} = \cos 2(\lambda_1 + 1)\alpha + \cos 2\alpha,$$

$$c_{13} = (1 - \alpha_1)\sin 2(\lambda_1 + 1)(\pi - \alpha) - (2\lambda_1 + 3 + \alpha_1)\sin 2\alpha, -\alpha < \theta < 0.$$

Залежності кореня λ_1 – показника степеня сингулярності напружень у кутовій точці О від кута α та від відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$ зображені на рис. 3.7 – 3.10 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

Деякі значення λ_1 наведено у табл. 3.4.

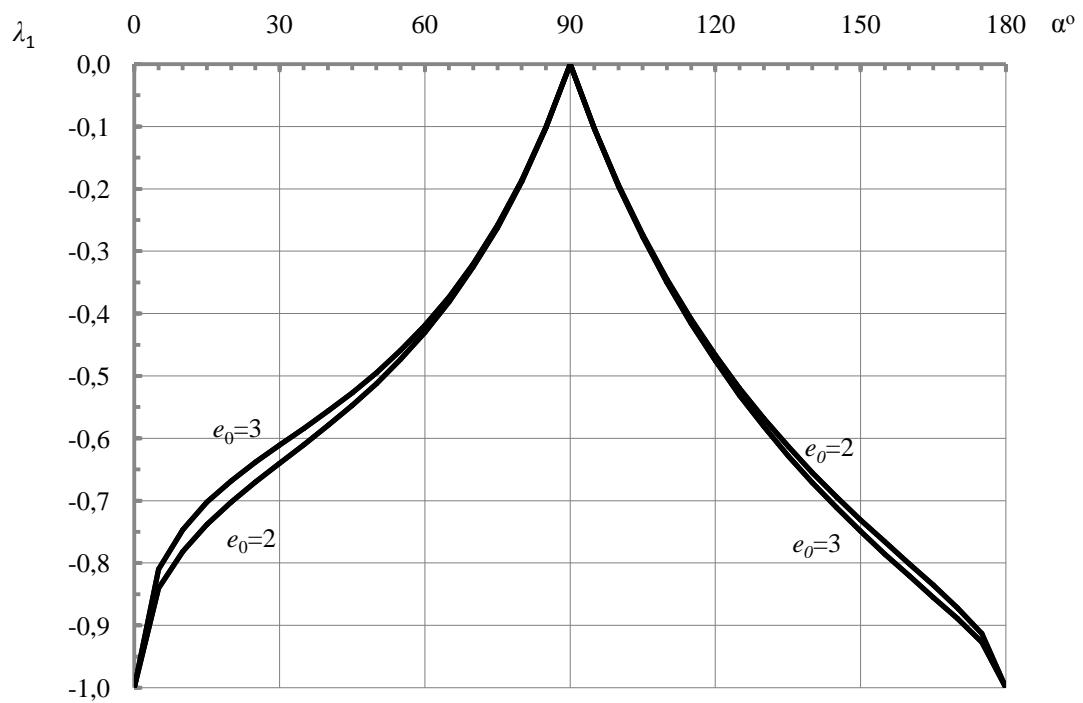


Рис. 3.7

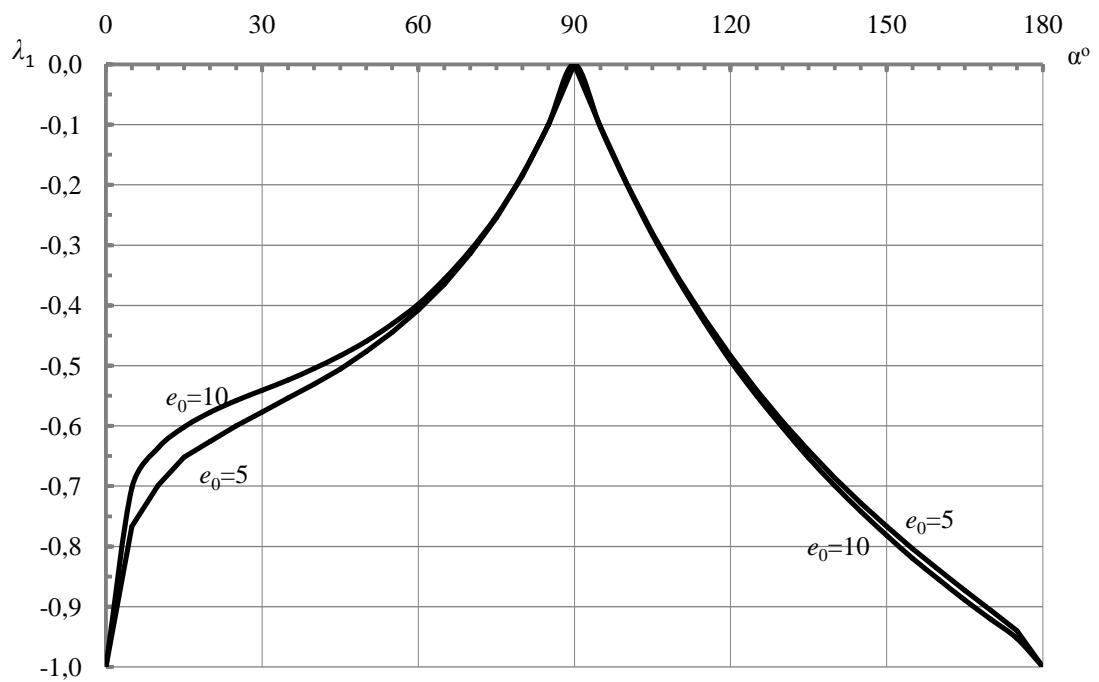


Рис. 3.8

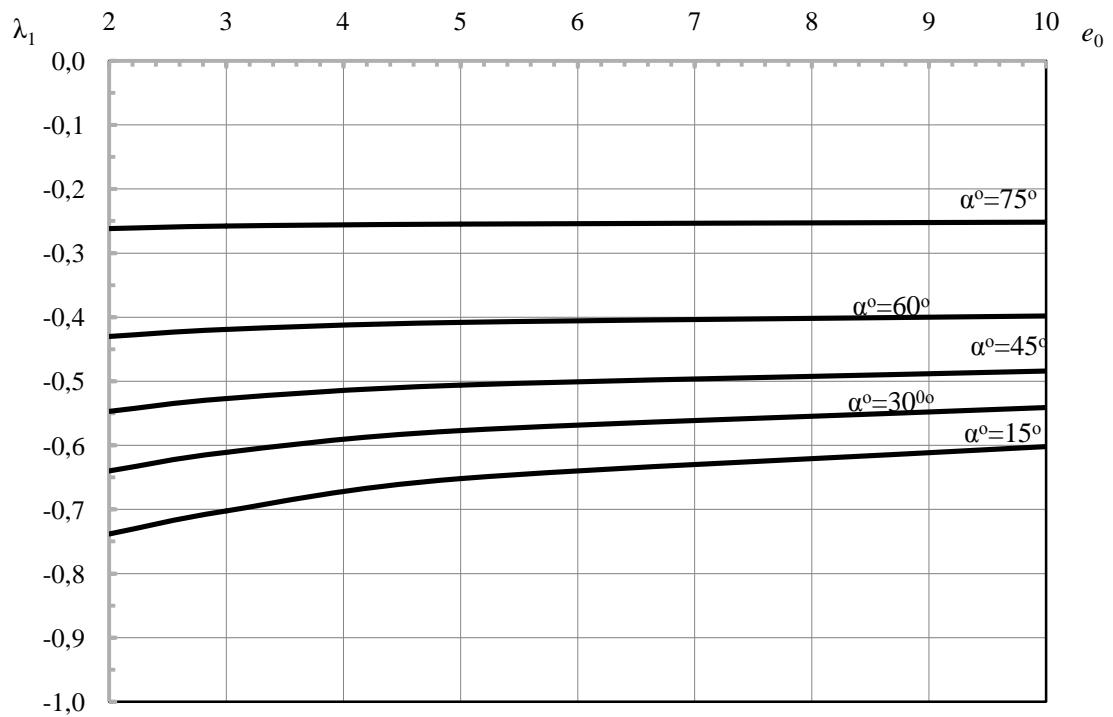


Рис. 3.9

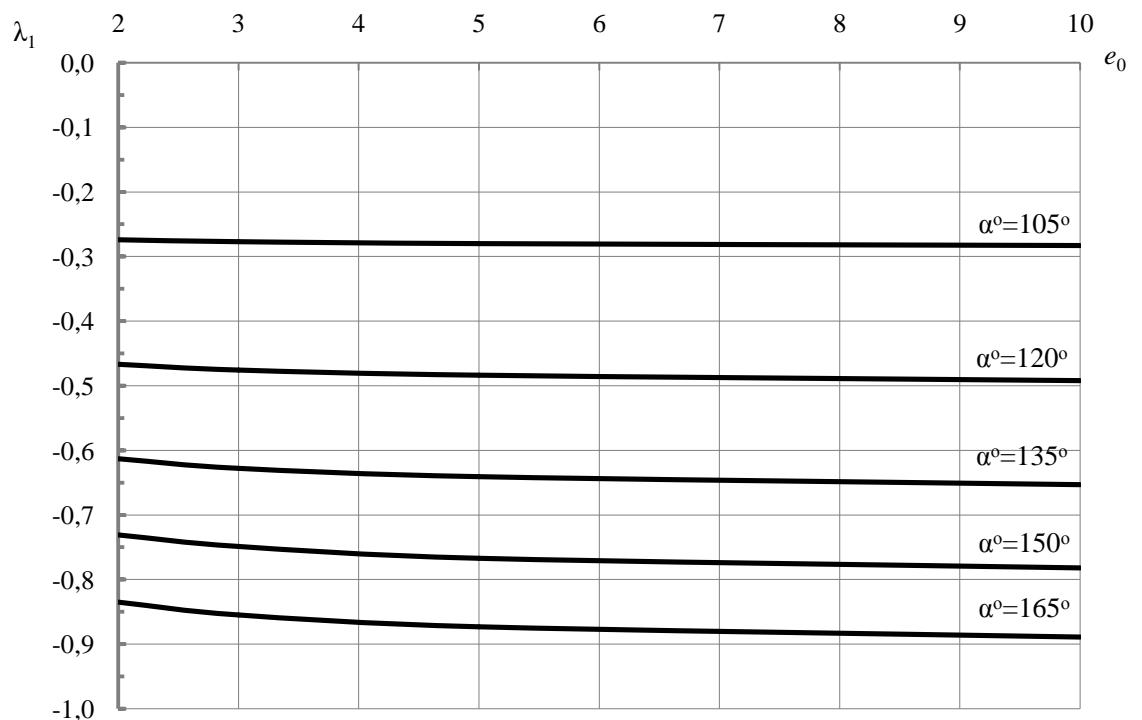


Рис. 3.10

Таблиця 3.4

α°	e_0			
	2	3	5	10
5	-0,840	-0,810	-0,767	-0,703
10	-0,781	-0,746	-0,699	-0,637
15	-0,738	-0,702	-0,652	-0,602
20	-0,702	-0,668	-0,626	-0,578
25	-0,670	-0,638	-0,600	-0,558
30	-0,640	-0,611	-0,577	-0,541
35	-0,610	-0,584	-0,554	-0,524
40	-0,579	-0,556	-0,531	-0,505
45	-0,547	-0,527	-0,506	-0,484
50	-0,512	-0,495	-0,477	-0,460
55	-0,473	-0,459	-0,445	-0,431
60	-0,430	-0,419	-0,408	-0,398
65	-0,381	-0,373	-0,365	-0,357
70	-0,325	-0,320	-0,314	-0,309
75	-0,262	-0,258	-0,255	-0,252
80	-0,188	-0,186	-0,185	-0,183
85	-0,102	-0,101	-0,101	-0,100
90	0	0	0	0
95	-0,104	-0,104	-0,104	-0,105
100	-0,194	-0,196	-0,197	-0,198
105	-0,274	-0,277	-0,280	-0,283
110	-0,345	-0,35	-0,355	-0,359
115	-0,409	-0,416	-0,422	-0,428
120	-0,467	-0,476	-0,484	-0,492
125	-0,520	-0,531	-0,541	-0,550
130	-0,568	-0,581	-0,593	-0,603
135	-0,613	-0,628	-0,641	-0,653
140	-0,655	-0,671	-0,686	-0,699
145	-0,694	-0,711	-0,728	-0,742
150	-0,731	-0,749	-0,767	-0,782
155	-0,766	-0,786	-0,804	-0,82
160	-0,801	-0,820	-0,839	-0,855
165	-0,835	-0,855	-0,873	-0,889
170	-0,872	-0,889	-0,906	-0,921
175	-0,913	-0,927	-0,940	-0,953

Аналіз одержаних у розділі 3 результатів дозволяє зробити наступні висновки. Формула (3.42) установлює зв'язок між коефіцієнтом інтенсивності напружень у кінці тріщини і коефіцієнтом інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ.

Зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ і від α_2 до π концентрація напружень біля кінця O_1 тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найбільшої концентрації напружень, що дорівнюють $42,4^\circ; 37,1^\circ; 35,3^\circ; 33,5^\circ$.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншими є гострий и тупий кути максимальної концентрації напружень.

Зрушення тріщин відбудеться тоді, коли параметр навантаження C , зростаючі за модулем зі зростанням зовнішнього навантаження, досягне свого граничного значення, яке визначається певною формулою.

Рівновага тріщин є нестійкою і після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

Кутова точка O є особливою точкою крайової задачі теорії пружності, що розглядається (рис. 3.2). Вона являє собою концентратор напружень. При наближенні точки області до точки O напруження прямують до нескінченності.

Особливість напружень у точці O степенева. Показник степеня сингулярності напружень залежить від кута, відношення модулів Юнга та від коефіцієнтів Пуассона. Цей показник являє собою єдиний на інтервалі $] -1; 0 [$ корінь певного трансцендентного рівняння (рівняння (3.48))

Зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ концентрація напружень біля кутової точки послаблюється, а зі зростанням його від $\pi/2$ до π – посилюється.

Якщо матеріали однакові, то показник степеня сингулярності напружень співпадає з відповідним показником у задачі теорії пружності про розтяг площини з лініями ковзання, що виходять з її точки. Ця задача, а також відповідна задача про півнескінченні лінії ковзання були досліджені в роботах А.О. Камінського і співробітників [36, 38].

Якщо кут α прямує до нуля або π , показник степеня сингулярності напружень прямує до -1 . Якщо кут α прямує до $\pi/2$, то показник степеня сингулярності напружень прямує до нуля. Якщо кут α гострий, то зі зростанням відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ концентрація напружень біля кутової точки послаблюється, а якщо тупий – посилюється.

Розділ 4

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛОЩИНИ З МІЖФАЗНИМИ ЗСУВНИМИ ТРИЩИНAMI У КУТОВІЙ ТОЧЦІ МЕЖІ ПОДІЛУ СЕРЕДОВИЩ ЗА НАЯВНОСТІ НАВАНТАЖЕНОЇ ВНУТРІШНЬОЇ ПІВНЕСКІНЧЕННОЇ ТРИЩИНИ

У цьому розділі розглянуто один з варіантів задачі про маломасштабні міжфазні зсувні тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ – випадок кусково-однорідної площини з негладкою межею поділу середовищ і міжфазними тріщинами за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини. Методом Вінера – Гопфа побудовано точний розв’язок зовнішньої задачі – аналогічної задачі без міжфазних тріщин. На його основі проаналізовано поведінку напружень біля кутової точки у зовнішній задачі та досліджено напружений стан біля кінця внутрішньої тріщини. Визначено коефіцієнт інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ і коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці маломасштабної міжфазної зсувної тріщини, яка зародилася в цій точці у випадку, що розглядається. Установлено характер зміни руйнуючого навантаження.

Матеріали розділу опубліковано у роботах [40, 63 – 68, 70 – 72].

4.1. Постановка зовнішньої задачі і виведення рівняння Вінера – Гопфа

Розглянемо плоску статичну симетричну задачу теорії пружності для кусково-однорідної ізотропної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, яка містить маломасштабні міжфазні зсувні тріщини в

кутовій точці і навантажену внутрішню півнескінченну тріщину (рис. 4.1). Береги тріщини знаходяться під дією тиску, розподіленого за законом F / r^2 , $r \geq L$ (F – задана додатна стала, що має розмірність сили).

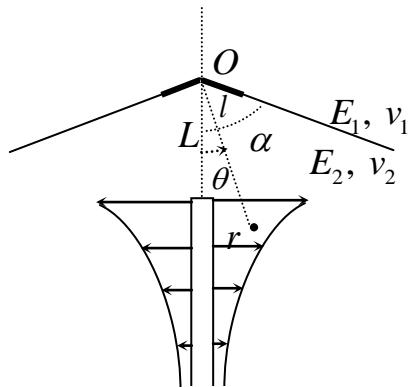


Рис. 4.1

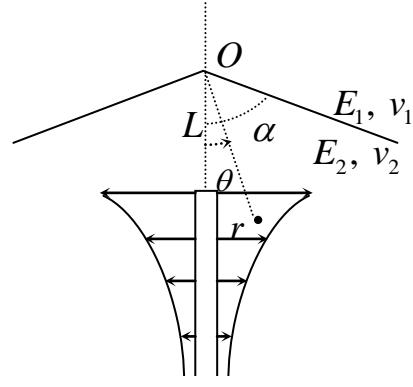


Рис.4.2

З метою проведення дослідження напруженого стану біля кінців тріщин та кутової точки, у відповідності до підходу, який запропоновано використовувати в даній роботі, задачу, що розглядається, – задачу в цілому розкладемо на зовнішню і внутрішню задачі. Зовнішньою задачею по відношенню до задачі в цілому є задача теорії пружності для кусково-однорідної площини з внутрішньою півнескінченною тріщиною (рис. 4.2). Внутрішньою задачею по відношенню до задачі в цілому є задача, що досліджена у третьому розділі (рис. 3.4). У внутрішній задачі на нескінченності (при $r \rightarrow \infty$) головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди біля кутової точки (при $r \rightarrow 0$) у зовнішній задачі і являють собою розв'язок однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, який породжується єдиним на інтервалі $]-1; 0[$ коренем її характеристичного рівняння. Останню задачу розглянуто у підрозділі

2.1. Стала C , що входить до її указаного розв'язку, повинна бути знайдена із розв'язку зовнішньої задачі.

З урахуванням симетрії країві умови зовнішньої задачі (рис. 4.2) запишемо так:

$$\theta = \alpha, \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \quad (4.1)$$

$$\theta = \pi, \tau_{r\theta} = 0, u_\theta = 0; \theta = 0, \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = 0, r < L, u_\theta = 0; \theta = 0, r > L, \sigma_\theta = -\frac{F}{r^2} \quad (4.2)$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi).$$

Виведемо рівняння Вінера – Гопфа задачі.

Розглянувши першу основну задачу теорії пружності для клина $0 \leq \theta \leq \alpha$, приходимо до системи лінійних рівнянь

$$A_1 \sin(p+1)\alpha + A_2 \sin(p-1)\alpha + A_3 \cos(p+1)\alpha + \quad (4.3)$$

$$+ A_4 \cos(p-1)\alpha = \sigma_\theta^*(p, \alpha),$$

$$A_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + A_2(p-1)\cos(p-1)\alpha - A_3(p+1)\sin(p+1)\alpha -$$

$$- A_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p, \alpha),$$

$$A_3 + A_4 = \sigma_\theta^*(p, 0),$$

$$A_1(p+1) + A_2(p-1) = 0.$$

Розв'язок системи (4.3) має вигляд

$$A_1 = (p-1)\delta_A^{-1}(p) \left[2(\sin p\alpha \cos \alpha + p \cos p\alpha \sin \alpha) \sigma_\theta^*(p, \alpha) - \right. \\ \left. - 2(p-1) \sin p\alpha \sin \alpha \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) \right], \quad (4.4)$$

$$A_2 = -(p+1)\delta_A^{-1}(p) \left[2(\sin p\alpha \cos \alpha + p \cos p\alpha \sin \alpha) \sigma_\theta^*(p, \alpha) - \right. \\ \left. - 2(p-1) \sin p\alpha \sin \alpha \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) \right],$$

$$A_3 = -2(p-1)\delta_A^{-1}(p) \left[(p+1) \sin p\alpha \sin \alpha \sigma_\theta^*(p, \alpha) - \right. \\ \left. - (\sin p\alpha \cos \alpha - p \cos p\alpha \sin \alpha) \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) - \right. \\ \left. - (\sin^2 p\alpha + p \sin^2 \alpha) \sigma_\theta^*(p, 0) \right],$$

$$A_4 = 2\delta_A^{-1}(p) \left[(p-1) \left[(p+1) \sin p\alpha \sin \alpha \sigma_\theta^*(p, \alpha) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\sin p\alpha \cos \alpha - p \cos p\alpha \sin \alpha) \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) \right] - \right. \\ \left. - (p+1) \left[\sin^2 p\alpha - p \sin^2 \alpha \right] \sigma_\theta^*(p, 0) \right],$$

$$\delta_A(p) = -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha).$$

Підставивши (4.4) в (3.14), отримуємо

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha=0}^* = \frac{1+\nu_2}{E_2} \delta_A^{-1}(p) \left\{ - (1+\alpha_2) (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times \right. \\ \times \sigma_\theta^*(p, \alpha) - 2[(1-\alpha_2) \sin^2 p\alpha - 2p^2 \sin^2 \alpha + \\ \left. + (1+\alpha_2) p \sin^2 \alpha] \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) + \right\} \quad (4.5)$$

$$+2(1+\alpha_2)(\sin p\alpha \cos \alpha + p \cos p\alpha \sin \alpha) \sigma_\theta^*(p,0)\},$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)_{\theta=\alpha=0}^* = -\frac{1+\nu_2}{E_2} \delta_A^{-1}(p) \left[-2[(1-\alpha_2)\sin^2 p\alpha - 2p^2 \sin^2 \alpha - \right.$$

$$-(1+\alpha_2)p \sin^2 \alpha] \sigma_\theta^*(p, \alpha) +$$

$$+(1+\alpha_2)(\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha) \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) -$$

$$-2(1+\alpha_2)(p+1)\sin p\alpha \sin \alpha \sigma_\theta^*(p,0)\};$$

$$\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)_{\theta=0}^* = \frac{1+\nu_2}{E_2} (1+\alpha_2) \delta_A^{-1}(p) \left[-2(\sin p\alpha \cos \alpha + \right. \quad (4.6)$$

$$+ p \cos p\alpha \sin \alpha) \sigma_\theta^*(p, \alpha) +$$

$$+ 2(p-1)\sin p\alpha \sin \alpha \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) +$$

$$+(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \sigma_\theta^*(p,0)\].$$

Змішаній задачі теорії пружності для клина $\alpha \leq \theta \leq \pi$ відповідає система лінійних рівнянь

$$B_1 \sin(p+1)\alpha + B_2 \sin(p-1)\alpha + B_3 \cos(p+1)\alpha + \quad (4.7)$$

$$+ B_4 \cos(p-1)\alpha = \sigma_\theta^*(p, \alpha),$$

$$B_1(p+1)\cos(p+1)\alpha + B_2(p-1)\cos(p-1)\alpha - B_3(p+1)\sin(p+1)\alpha -$$

$$-B_4(p-1)\sin(p-1)\alpha = (p-1)\tau_{r\theta}^*(p, \alpha),$$

$$\begin{aligned} & B_1(p-\alpha_1)\cos p\pi + B_2(p-1)\cos p\pi - \\ & - B_3(p-\alpha_1)\sin p\pi - B_4(p-1)\sin p\pi = 0, \\ & B_1(p+1)\cos p\pi + B_2(p-1)\cos p\pi - \\ & - B_3(p+1)\sin p\pi - B_4(p-1)\sin p\pi = 0. \end{aligned}$$

Згідно (4.7)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha+0}^* = \frac{1+\nu_1}{2E_1} \delta_B^{-1}(p) \{ -(1+\alpha_1)[\cos 2p(\pi-\alpha) - \\ & - \cos 2\alpha] \sigma_\theta^*(p, \alpha) + [(1-\alpha_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - \\ & - 2p \sin 2\alpha + (1+\alpha_1)\sin 2\alpha] \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) \}, \\ & \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{\theta=\alpha+0}^* = -\frac{1+\nu_1}{2E_1} \delta_B^{-1}(p) \{ (1-\alpha_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p \sin 2\alpha - \\ & - (1+\alpha_1)\sin 2\alpha] \sigma_\theta^*(p, \alpha) + (1+\alpha_1) \times \\ & \times [\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos 2\alpha] \tau_{r\theta}^*(p, \alpha) \}, \\ & \delta_B(p) = \sin 2p(\pi-\alpha) - p \sin 2\alpha. \end{aligned} \tag{4.8}$$

За допомогою (4.5), (4.8) та другої з умов (4.1) одержуємо

$$A_{11}\sigma_\theta^*(p, \alpha) + A_{12}\tau_{r\theta}^*(p, \alpha) = b_1\sigma_\theta^*(p, 0), \tag{4.9}$$

$$A_{21}\sigma_\theta^*(p,\alpha) + A_{22}\tau_{r\theta}^*(p,\alpha) = b_2\sigma_\theta^*(p,0),$$

$$A_{11} = \frac{1+\nu_2}{E_2}(1+\alpha_2)(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}(1+\alpha_1)[\cos 2p(\pi-\alpha) - \cos 2\alpha]\delta_B^{-1}(p),$$

$$A_{12} = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}[(1-\alpha_2)\sin^2 p\alpha - 2p^2 \sin^2 \alpha + (1+\alpha_2)p \sin^2 \alpha]\delta_A^{-1}(p) +$$

$$+\frac{1+\nu_1}{2E_1}[(1-\alpha_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p \sin 2\alpha + (1+\alpha_1)\sin 2\alpha]\delta_B^{-1}(p),$$

$$A_{21} = -\frac{2(1+\nu_2)}{E_2}[(1-\alpha_2)\sin^2 p\alpha - 2p^2 \sin^2 \alpha - (1+\alpha_2)p \sin^2 \alpha]\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}[(1-\alpha_1)\sin 2p(\pi-\alpha) - 2p \sin 2\alpha - (1+\alpha_1)\sin 2\alpha]\delta_B^{-1}(p),$$

$$A_{22} = \frac{1+\nu_2}{E_2}(1+\alpha_2)(\sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)\delta_A^{-1}(p) -$$

$$-\frac{1+\nu_1}{2E_1}(1+\alpha_1)[\cos 2p(\pi-\alpha) + \cos \alpha]\delta_B^{-1}(p),$$

$$b_1 = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}(1+\alpha_2)(\sin p\alpha \cos \alpha + p \cos p\alpha \sin \alpha)\delta_A^{-1}(p),$$

$$b_2 = \frac{2(1+\nu_2)}{E_2}(1+\alpha_2)(p+1)\sin p\alpha \sin \alpha \delta_A^{-1}(p).$$

В результаті розв'язку системи (4.9) маємо

$$\sigma_{\theta}^*(p, \alpha) = \frac{E_2}{1 + \nu_2} (1 + \alpha e_2) \frac{N_1(p)}{\tilde{D}(p)} \sigma_{\theta}^*(p, 0), \quad (4.10)$$

$$\tau_{r\theta}^*(p, \alpha) = \frac{E_2}{1 + \nu_2} (1 + \alpha e_2) \frac{N_2(p)}{\tilde{D}(p)} \sigma_{\theta}^*(p, 0),$$

$$N_1(p) = \frac{1 + \nu_2}{E_2} [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] [(1 + \alpha e_2) \cos p\alpha \cos \alpha -$$

$$- (2p + 1 - \alpha e_2) \sin p\alpha \sin \alpha] + \frac{1 + \nu_1}{E_1} \{(1 + \alpha e_1) (\sin p\alpha \cos \alpha +$$

$$+ p \cos p\alpha \sin \alpha) [\cos 2p(\pi - \alpha) + \cos 2\alpha] + (p + 1) [(1 - \alpha e_1) \times$$

$$\times \sin 2p(\pi - \alpha) - 2p \sin 2\alpha + (1 + \alpha e_1) \sin 2\alpha] \sin p\alpha \sin \alpha\},$$

$$N_2(p) = \frac{1 + \nu_2}{E_2} [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] [(1 - \alpha e_2) \sin p\alpha \cos \alpha +$$

$$+ (2p + 1 + \alpha e_2) \cos p\alpha \sin \alpha] + \frac{1 + \nu_1}{E_1} \{(1 + \alpha e_1) (p + 1) \times$$

$$\times [\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha] \sin p\alpha \sin \alpha - (\sin p\alpha \cos \alpha +$$

$$+ p \cos p\alpha \sin \alpha) [(1 - \alpha e_1) \sin 2p(\pi - \alpha) - 2p \sin 2\alpha - (1 + \alpha e_1) \sin 2\alpha]\},$$

$$\tilde{D}(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \left[(1 + \alpha e_2)^2 - 4(\alpha e_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha) \right] +$$

$$+ \{(1 + \alpha e_1)(1 + \alpha e_2) \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha)\} \times .$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times$$

$$\times [(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 4(\alpha_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)] \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} \frac{E_2}{E_1} -$$

$$-4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] \left(\frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_2} \frac{E_2}{E_1} \right)^2.$$

Підставляючи (4.10) в (4.6), приходимо до спiввiдношення, що

$$\text{зв'язує трансформанти } \sigma_\theta^*(p, 0) \text{ i } \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{\theta=0}^*$$

$$\sigma_\theta^*(p, 0) = \frac{\tilde{\Delta}(p)}{2\Delta_0(p)} \frac{E_2}{2(1 - \nu_2^2)} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{\theta=0}^*, \quad (4.11)$$

$$\Delta_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] +$$

$$+ \{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times$$

$$\times (\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)\}e +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] (\alpha_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha)e^2,$$

$$\tilde{\Delta}(p) = -4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] +$$

$$+ \{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \sin 2p\pi + 4(\sin^2 p\alpha - p^2 \sin^2 \alpha) \times$$

$$\times [\alpha_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] \times$$

$$\times [(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 4(\alpha_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)]\}e +$$

$$+ [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha] [(1 + \alpha_2)^2 - 4(\alpha_2 \sin^2 p\alpha + p^2 \sin^2 \alpha)] e^2,$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1,2} = 3 - 4\nu_{1,2}.$$

Враховуючи, що

$$\sigma_\theta^*(p, 0) = L^{p+1} \left[\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p-1} \right], \quad (4.12)$$

$$\frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)_{\theta=0}^* = L^{p+1} \Phi^+(p),$$

$$\Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho L, 0) \rho^p d\rho,$$

$$\Phi^+(p) = \frac{E_2}{2(1-\nu_2^2)} \int_1^\infty \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \Bigg|_{\begin{array}{l} r=\rho L \\ \theta=0 \end{array}} \rho^p d\rho,$$

$$\sigma = \frac{F}{L^2},$$

за допомогою (4.11) одержуємо наступне функціональне рівняння Вінера–Гопфа:

$$\Phi^-(p) + \frac{\sigma}{p-1} = \operatorname{ctg} p\pi G_0(p) \Phi^+(p), \quad (4.13)$$

$$G_0(p) = \frac{\tilde{\Delta}(p) \sin p\pi}{2\Delta_0(p) \cos p\pi}$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ – досить малі додатні числа).

4.2. Розв'язання рівняння Вінера – Гопфа

Побудуємо розв'язок рівняння (4.13).

Функція $G_0(it)$ ($-\infty < t < \infty$) є дійсною додатною парною функцією t , яка прямує до одиниці при $t \rightarrow \infty$. Тому індекс функції $G_0(p)$ по уявній осі дорівнює нулю. Оскільки, крім того, функція $G_0(p)$ на уявній осі задовільняє умові Гельдера, має місце факторизація [26]

$$G_0(p) = \frac{G_0^+(p)}{G_0^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0), \quad (4.14)$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln G_0(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G_0^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G_0^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

За допомогою факторизацій (3.28), (4.14) рівняння (4.13) перепишемо так:

$$\frac{G_0^-(p)\Phi^-(p)}{K^-(p)} + \frac{\sigma G_0^-(p)}{(p-1)K^-(p)} = \frac{K^+(p)G_0^+(p)\Phi^+(p)}{p} \quad (4.15)$$

$$(\operatorname{Re} p = 0).$$

Справедливе представлення

$$\frac{\sigma G_0^-(p)}{(p-1)K^-(p)} = \frac{\sigma}{p-1} \left[\frac{G_0^-(p)}{K^-(p)} - \frac{G_0^-(1)}{K^-(1)} \right] + \frac{\sigma G_0^-(1)}{(p-1)K^-(1)} \quad (4.16)$$

$$(\operatorname{Re} p = 0).$$

Підставляючи (4.16) у (4.15), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{K}^+(p)G_0^+(p)\Phi^+(p)}{p} - \frac{\sigma G_0^-(1)}{(p-1)\mathbf{K}^-(1)} &= \frac{G_0^-(p)\Phi^-(p)}{\mathbf{K}^-(p)} + \\ &+ \frac{\sigma}{p-1} \left[\frac{G_0^-(p)}{\mathbf{K}^-(p)} - \frac{G_0^-(1)}{\mathbf{K}^-(1)} \right] (\operatorname{Re} p = 0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Функція в лівій частині (4.17) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а функція в правій частині (4.17) аналітична у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. На основі принципу аналітичного продовження ці функції дорівнюють одній і тій самій функції, що аналітична у всій площині p .

Мають місце асимптотики

$$\Phi^+(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{-2pL}}, \quad \Phi^-(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2pL}} \quad (p \rightarrow \infty) \quad (4.18)$$

(K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці тріщини).

З (3.29), (4.14), (4.18) випливає, що функції у лівій і правій частинах (4.17) прямують до нуля при $p \rightarrow \infty$ у півплощинах $\operatorname{Re} p < 0$ і $\operatorname{Re} p > 0$ відповідно. За теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тодіжно дорівнює нулю у всій площині p .

Таким чином, розв'язок рівняння (4.13) має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) &= \frac{\sigma G_0^-(1)p}{\mathbf{K}^-(1)(p-1)\mathbf{K}^+(p)G_0^+(p)} \quad (\operatorname{Re} p < 0), \\ \Phi^-(p) &= \frac{\sigma \mathbf{K}^-(p)}{(p-1)G_0^-(p)} \left[\frac{G_0^-(1)}{\mathbf{K}^-(1)} - \frac{G_0^-(p)}{\mathbf{K}^-(p)} \right] \quad (\operatorname{Re} p > 0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

4.3. Аналіз поведінки напружень біля кутової точки у зовнішній задачі та дослідження напруженого стану біля кінця внутрішньої тріщини

За допомогою (4.19) знаходимо асимптотику

$$\Phi^+(p) \sim \frac{\sigma G_0^-(1)}{K^-(1)\sqrt{-p}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (4.20)$$

Згідно (4.18), (4.20) одержуємо формулу для коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці тріщини

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} G_0^-(1) \frac{F}{L^{3/2}}, \quad G_0^-(1) = \exp \left[-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln G_0(it)}{t^2 + 1} dt \right].$$

Залежності безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $K_I^0 = K_I L^{3/2} / F$ від кута α та від відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$ зображені на рис. 4.3 – 4.5 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$). Деякі значення $K_I^0 = K_I L^{3/2} / F$ наведено у табл. 4.1.

Використовуючи (4.11), (4.12), (4.19) і формулу обернення Мелліна, знаходимо

$$\sigma_\theta(r, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma G_0^-(1) p \tilde{\Delta}(p) L^{p+1}}{2K^-(1)(p-1)\Delta_0(p)K^+(p)G_0^+(p)} r^{-p-1} dp \quad (4.21)$$

(γ – довільна пряма, яка паралельна уявній осі і лежить у смузі $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < 0$).

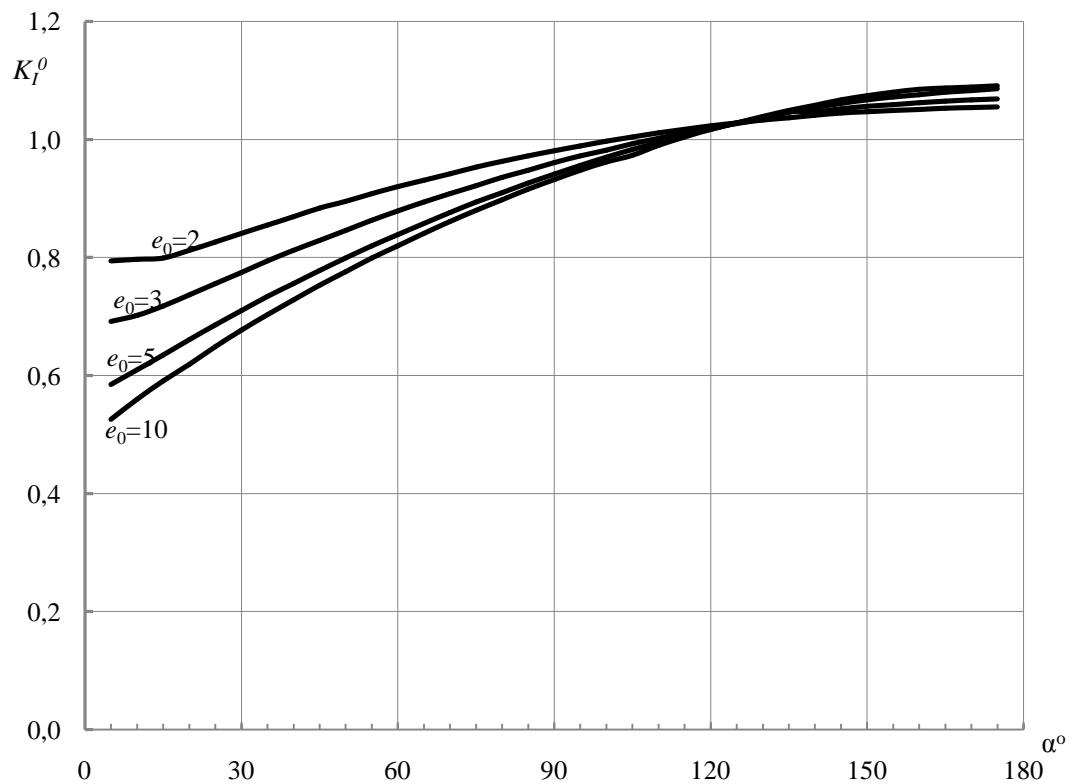


Рис. 4.3

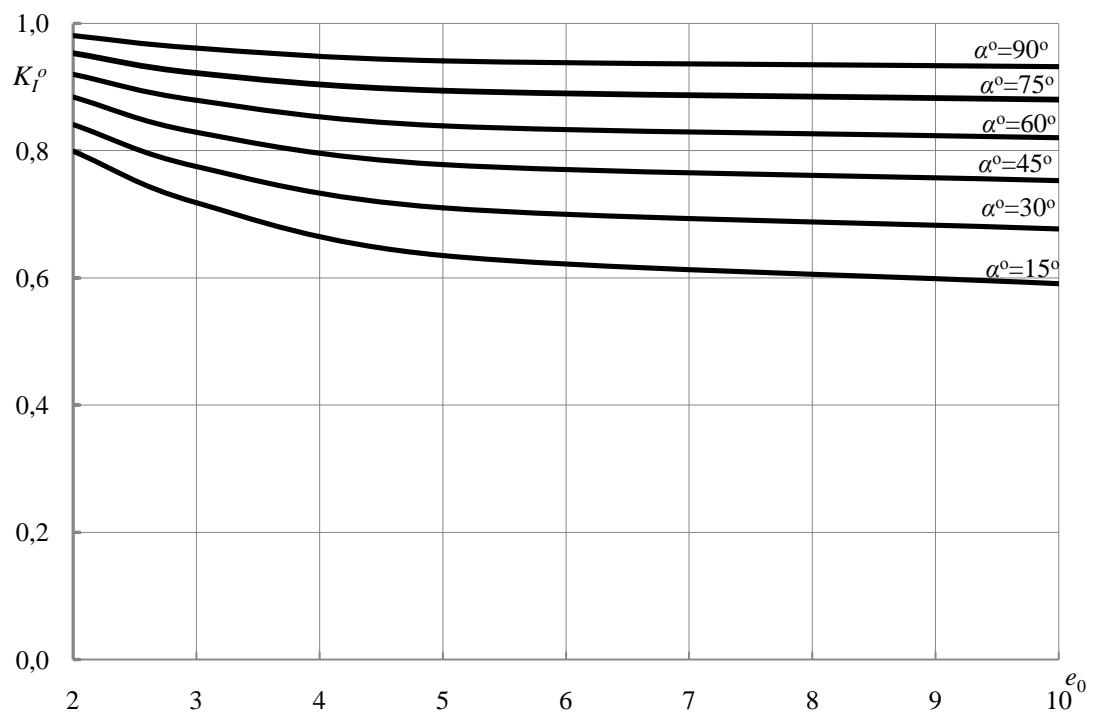


Рис. 4.4

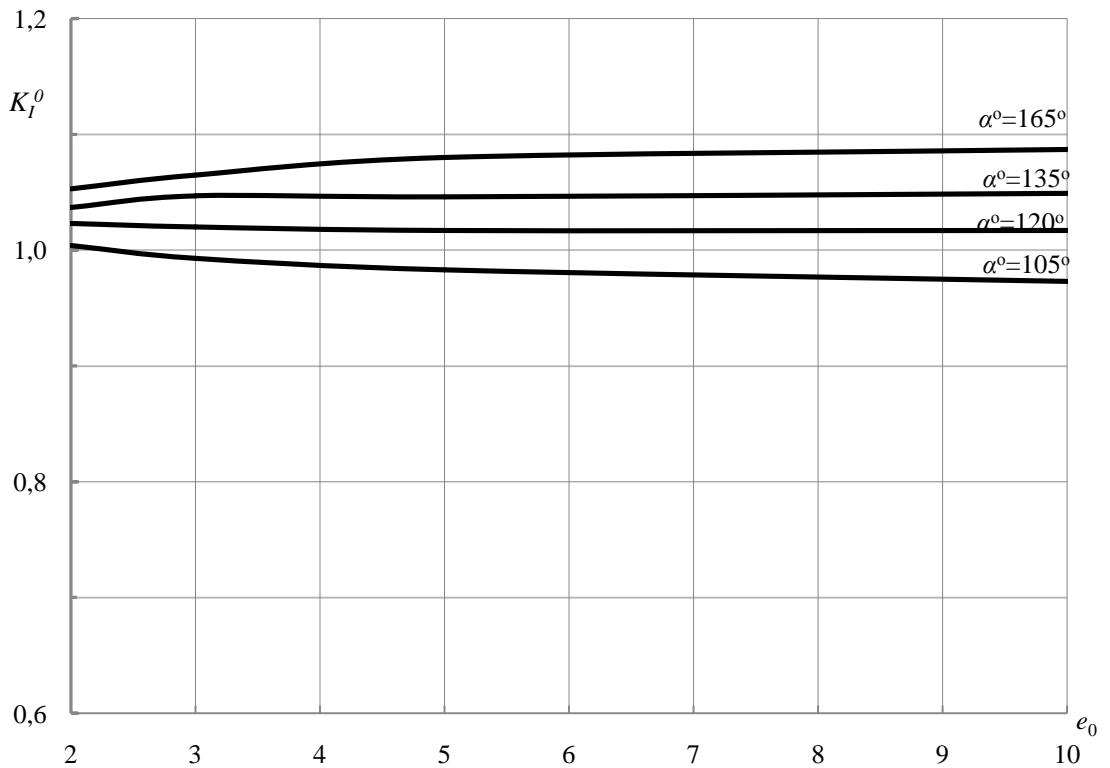


Рис. 4.5

У смузі $-1 \leq \operatorname{Re} p < 0$ підінтегральна функція у (4.21) має єдину особливість – простий полюс в точці $p = -\lambda_0 - 1$, де λ_0 – єдиний на інтервалі $] -1; 0 [$ корінь рівняння $\Delta_0(-\lambda - 1) = 0$, тобто

$$\begin{aligned}
 & [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] [\alpha_1 \sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] + \{(1 + \alpha_1) \times \\
 & \times (1 + \alpha_2) \sin^2 \lambda \pi - [\sin 2(\lambda + 1)\alpha + (\lambda + 1)\sin 2\alpha] [\alpha_1 \sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) + (\lambda + 1) \times \\
 & \times \sin 2\alpha] - [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] [\alpha_2 \sin 2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1)\sin 2\alpha]\} e + \\
 & + [\sin 2(\lambda + 1)(\pi - \alpha) - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] [\alpha_2 \sin 2(\lambda + 1)\alpha - (\lambda + 1)\sin 2\alpha] e^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Таблиця 4.1

α°	e_0			
	2	3	5	10
5	0,794	0,692	0,585	0,526
10	0,797	0,702	0,610	0,56
15	0,799	0,718	0,635	0,591
20	0,812	0,737	0,661	0,619
25	0,826	0,756	0,686	0,649
30	0,841	0,775	0,710	0,677
35	0,855	0,794	0,734	0,703
40	0,869	0,812	0,756	0,728
45	0,884	0,829	0,778	0,753
50	0,895	0,846	0,799	0,776
55	0,908	0,863	0,82	0,799
60	0,920	0,879	0,839	0,820
65	0,931	0,894	0,858	0,841
70	0,942	0,908	0,876	0,861
75	0,953	0,922	0,894	0,880
80	0,963	0,936	0,910	0,898
85	0,972	0,948	0,926	0,916
90	0,981	0,961	0,941	0,932
95	0,989	0,972	0,956	0,948
100	0,997	0,982	0,970	0,962
105	1,004	0,993	0,983	0,973
110	1,011	1,002	0,995	0,990
115	1,017	1,011	1,007	1,004
120	1,023	1,020	1,017	1,017
125	1,028	1,027	1,028	1,028
130	1,033	1,035	1,037	1,039
135	1,037	1,047	1,046	1,049
140	1,041	1,047	1,054	1,058
145	1,045	1,052	1,061	1,067
150	1,047	1,056	1,067	1,074
155	1,049	1,059	1,072	1,080
160	1,051	1,062	1,076	1,085
165	1,053	1,065	1,080	1,087
170	1,054	1,067	1,083	1,089
175	1,055	1,069	1,086	1,091

Використовуючи цю інформацію про особливу точку підінтегральної функції у (4.21) і застосовуючи до інтегралу (4.21) теорему про лишки, одержуємо наступну формулу:

$$\sigma_\theta(r, 0) = Sr^{\lambda_0} + f(r) (r \rightarrow 0), \quad (4.22)$$

$$S = \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\Delta}(-\lambda_0 - 1) \Gamma(\lambda_0 + 3/2) G_0^-(1)}{4(\lambda_0 + 2) s_0 \Gamma(\lambda_0 + 1) G_0^+(-\lambda_0 - 1)} \frac{F}{L^{\lambda_0 + 2}},$$

$$s_0 = \Delta'_0(-\lambda_0 - 1).$$

У цій формулі $f(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$; $\Delta'_0(p)$ – похідна функції $\Delta_0(p)$.

Аналогічні формули мають місце для $\sigma_\theta(r, \theta)$, $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, $\sigma_r(r, \theta)$.

Залежність кореня λ_0 – показника степеня сингулярності напружень у кутовій точці від кута α та від відношення модулів Юнга $e_0 = E_1/E_2 > 1$ зображене на рис. 4.6 – 4.8 ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$).

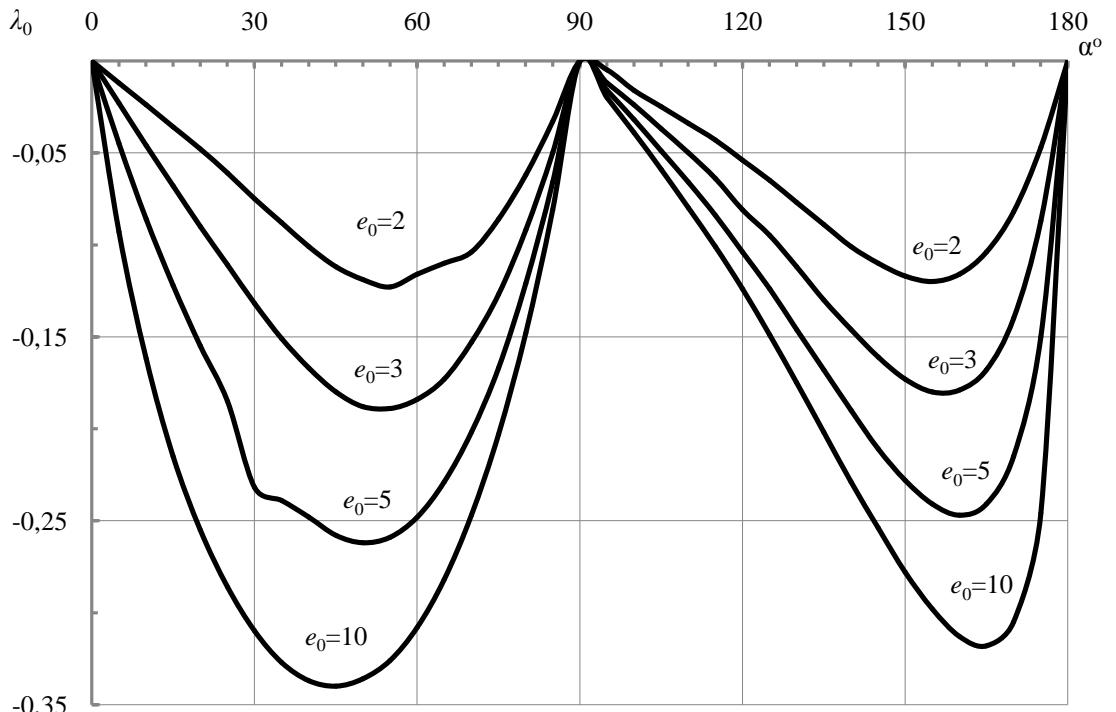


Рис. 4.6

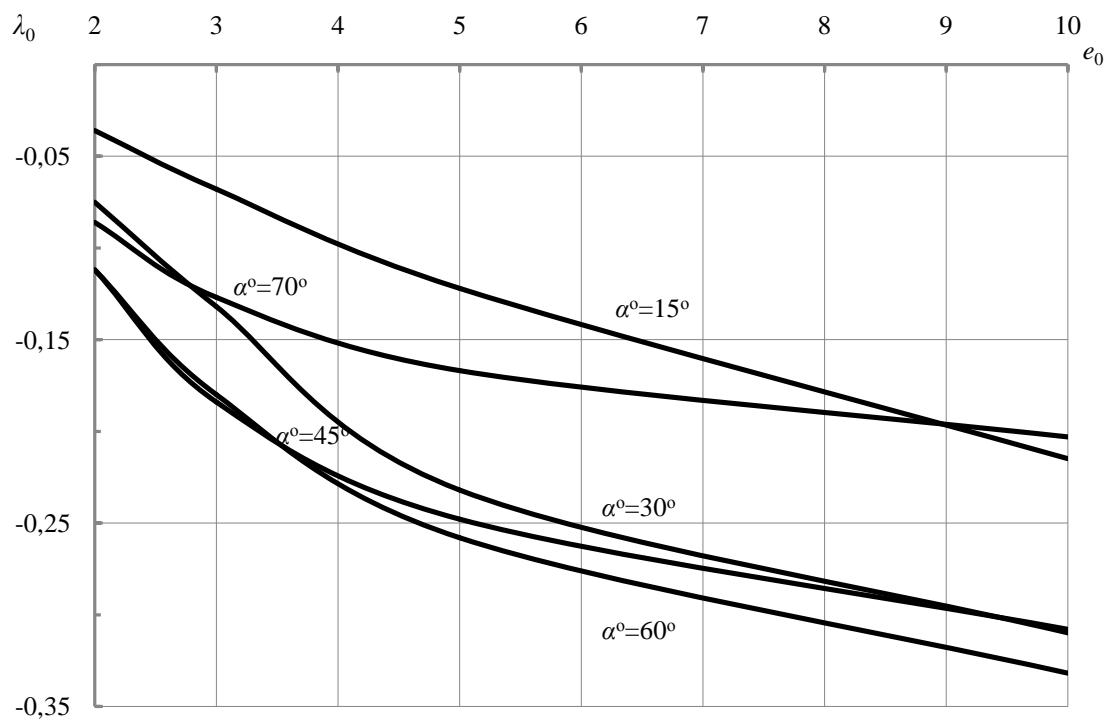


Рис. 4.7

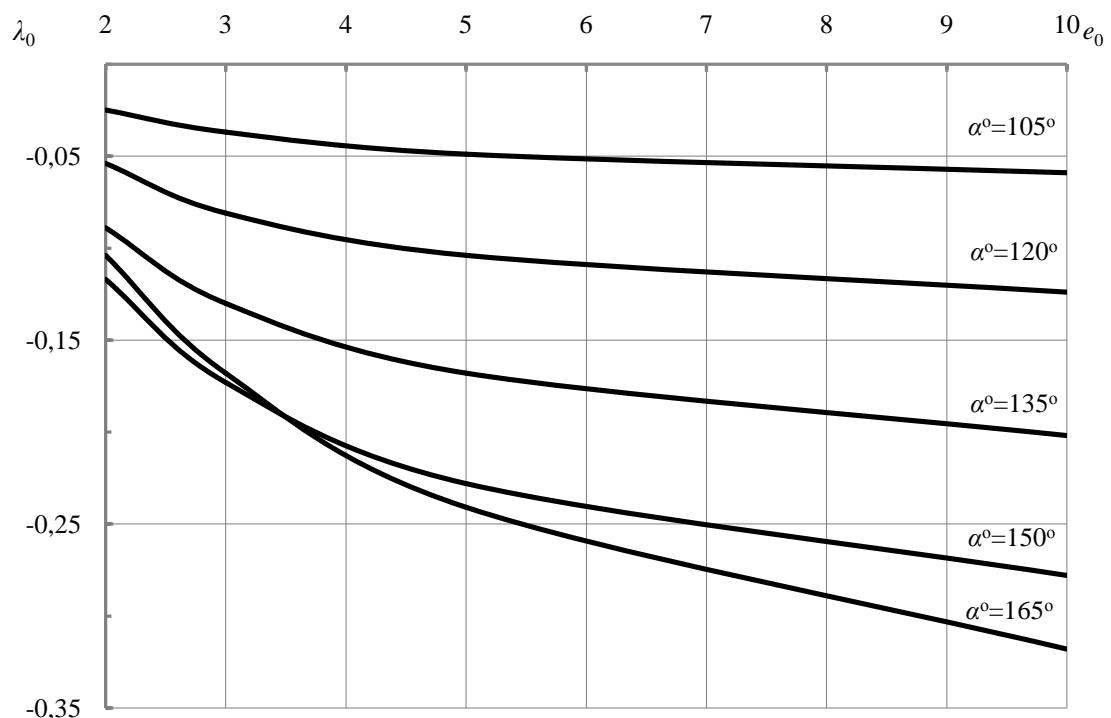


Рис. 4.8

Значення $\alpha_{\min 1}^\circ$, $\alpha_{\min 2}^\circ$ кута α , при яких функція $\lambda_0(\alpha)$ досягає свого найменшого значення на кожному з інтервалів $[0; \pi/2[$, $]\pi/2; \pi[$, а також значення $\lambda_0(\alpha_{\min 1})$, $\lambda_0(\alpha_{\min 2})$ наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2

e_0	2	3	5	10
$\alpha_{\min 1}^\circ$	57,3	54,1	46,7	42,2
$\lambda_0(\alpha_{\min 1})$	-0,1232	-0,1893	-0,2622	-0,3321
$\alpha_{\min 2}^\circ$	152,6	155,8	163,4	168,3
$\lambda_0(\alpha_{\min 2})$	-0,1204	-0,1801	-0,2474	-0,3181

Деякі значення λ_0 наведено у табл. 4.3.

З (4.22) випливає, що

$$\sigma_\theta(r, 0) \sim Sr^{\lambda_0} (r \rightarrow 0). \quad (4.23)$$

За допомогою розв'язку однорідної задачі К, яку розглянуто у підрозділі 2.1, знаходимо

$$\sigma_\theta(r, 0) \sim C q_0 r^{\lambda_0} (r \rightarrow 0), \quad (4.24)$$

де $q_0(\alpha, e_0, v_1, v_2)$ виражається формулою (2.36).

Згідно (4.23), (4.24)

$$C = \Sigma(\alpha, e_0, v_1, v_2) \frac{F}{L^{\lambda_0+2}}, \quad (4.25)$$

$$\Sigma = \frac{\sqrt{\pi} \tilde{\Delta}(-\lambda_0 - 1) \Gamma(\lambda_0 + 3/2) G_0^-(1)}{4(\lambda_0 + 2) q_0 s_0 \Gamma(\lambda_0 + 1) G_0^+(-\lambda_0 - 1)}.$$

Таблиця 4.3

α°	e_0				
	2	3	5	7	10
5	-0,012	-0,023	-0,045	-0,065	-0,093
10	-0,024	-0,046	-0,086	-0,12	-0,162
15	-0,036	-0,068	-0,122	-0,165	-0,215
20	-0,048	-0,09	-0,155	-0,204	-0,255
25	-0,061	-0,111	-0,185	-0,235	-0,286
30	-0,075	-0,132	-0,232	-0,261	-0,31
35	-0,088	-0,151	-0,211	-0,281	-0,327
40	-0,101	-0,167	-0,248	-0,295	-0,337
45	-0,112	-0,18	-0,258	-0,302	-0,34
50	-0,119	-0,188	-0,262	-0,302	-0,336
55	-0,123	-0,189	-0,259	-0,295	-0,326
60	-0,112	-0,184	-0,248	-0,281	-0,308
65	-0,116	-0,173	-0,229	-0,258	-0,282
70	-0,104	-0,153	-0,202	-0,227	-0,247
75	-0,086	-0,127	-0,167	-0,187	-0,203
80	-0,062	-0,092	-0,121	-0,136	-0,148
85	-0,033	-0,05	-0,066	-0,074	-0,081
90	0	0	0	0	0
95	0	-0,012	-0,016	-0,018	-0,02
100	-0,016	-0,024	-0,032	-0,073	-0,039
105	-0,025	-0,037	-0,049	-0,054	-0,059
110	-0,034	-0,05	-0,066	-0,073	-0,08
115	-0,043	-0,064	-0,084	-0,093	-0,101
120	-0,054	-0,181	-0,104	-0,115	-0,124
125	-0,065	-0,095	-0,124	-0,138	-0,149
130	-0,077	-0,112	-0,146	-0,162	-0,175
135	-0,089	-0,13	-0,168	-0,187	-0,202
140	-0,101	-0,146	-0,19	-0,211	-0,229
145	-0,11	-0,161	-0,211	-0,235	-0,254
150	-0,117	-0,173	-0,228	-0,256	-0,278
155	-0,12	-0,18	-0,241	-0,272	-0,298
160	-0,116	-0,179	-0,247	-0,283	-0,313
165	-0,104	-0,168	-0,241	-0,282	-0,318
170	-0,082	-0,14	-0,215	-0,262	-0,305
175	-0,047	-0,087	-0,15	-0,196	-0,246

Результати розрахунків показують, що $\Sigma(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0; \pi/2[$; $\Sigma(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\pi/2; \pi[$; $\Sigma(0) = \Sigma(\pi/2) = \Sigma(\pi) = 0$.

З наведеної інформації випливає, що зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ і від $\pi/2$ до π концентрація напружень біля кутової точки (рис. 4.2) спочатку посилюється, а потім послаблюється. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки. Зі зростанням e_0 гострий кут максимальної концентрації напружень зменшується, а тупий – збільшується.

Зі зростанням навантаження концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини посилюється. Чим менша відстань між кутовою точкою і кінцем тріщини, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини.

Зі зростанням кута α концентрація напружень біля кінця тріщини посилюється. Якщо $\alpha^\circ \leq 120^\circ$, то зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється, а якщо $\alpha^\circ \geq 130^\circ$ – посилюється. На проміжку $120^\circ < \alpha^\circ < 130^\circ$ існують значення кута, при яких зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється; спочатку послаблюється, а потім посилюється; посилюється.

4.4. Установлення характеру зміни руйнуючого навантаження

Оскільки повинна виконуватись умова $C < 0$, то беручи до уваги (4.25) і інформацію про функцію Σ , вважатимемо, що кут α є гострим.

Підставляючи C з (4.25) у (3.42), визначимо коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці O_1 міжфазної тріщини у задачі механіки руйнування, яку зображену на рис. 4.1:

$$K_{II} = g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) k(\alpha, e_0, v_1, v_2) \Sigma(\alpha, e_0, v_1, v_2) \left(\frac{l}{L} \right)^{\lambda_0+1/2} \frac{F}{L^{3/2}}. \quad (4.26)$$

Прирівнюючи праву частину (4.26) до критичного значення коефіцієнта інтенсивності напруженъ K_{Ic} , одержуємо наступну формулу для визначення руйнующого навантаження F_p :

$$F_p = \frac{K_{Ic} L^{\lambda_0+2}}{g_1(\alpha, e_0, v_1, v_2) k(\alpha, e_0, v_1, v_2) \Sigma(\alpha, e_0, v_1, v_2) l^{\lambda_0+1/2}}.$$

Залежності безрозмірного руйнующого навантаження

$$F_p^o = \frac{F_p}{K_{Ic} L^{3/2}} = \frac{1}{g_1 k \Sigma \left(\frac{l}{L} \right)^{\lambda_0+1/2}}$$

від кута α для різних значень відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$ зображене на рис. 4.9 ($l / L = 0,03$; $v_1 = v_2 = 0,3$).

Наведені дані свідчать про те, що чим менша відстань між кутовою точкою O і кінцем внутрішньої тріщини, тим менше руйнуще навантаження. Чим більша довжина міжфазної тріщини, тим менше руйнуще навантаження.

Зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ руйнуще навантаження спочатку зменшується, а потім збільшується. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найменшого руйнущого навантаження, що дорівнюють $40,3^\circ; 36,5^\circ; 34,1^\circ; 30,7^\circ$.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим менше руйнуще навантаження і меншим є кут найменшого руйнущого навантаження.

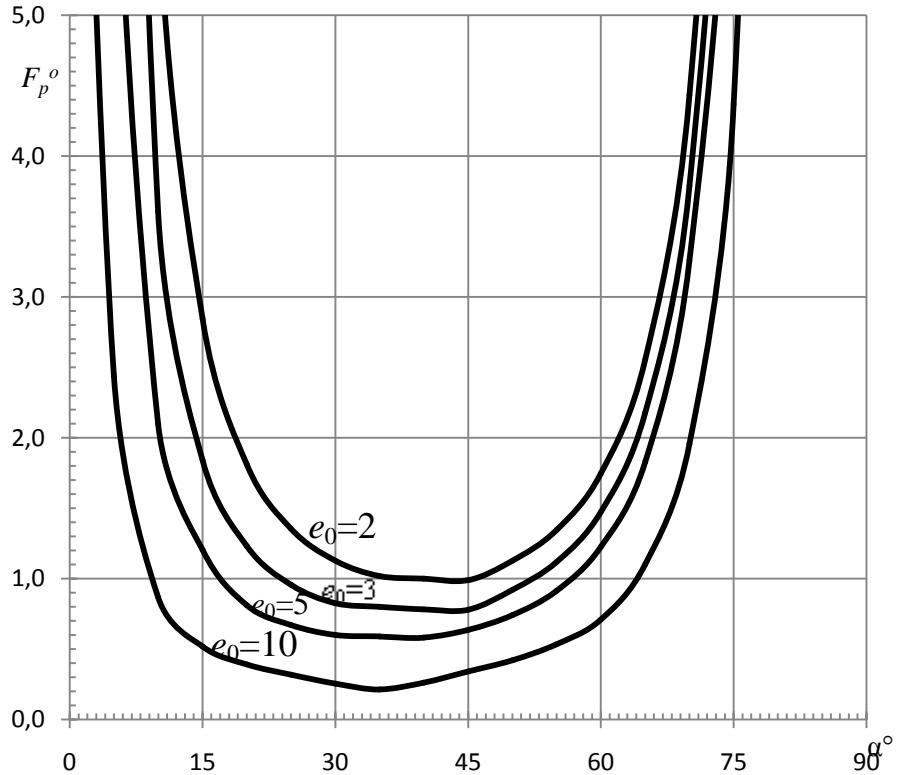


Рис. 4.9

Аналіз одержаних у розділі 4 результатів дозволяє зробити наступні висновки. У задачі теорії пружності, яку зображено на рис. 4.2, зі зростанням кута α від нуля до $\pi/2$ і від $\pi/2$ до π концентрація напружень біля кутової точки (рис. 4.2) спочатку посилюється, а потім послаблюється. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки. Зі зростанням e_0 гострий кут максимальної концентрації напружень зменшується, а тупий – збільшується.

Зі зростанням навантаження концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини посилюється. Чим менша відстань між кутовою точкою і кінцем тріщини, тим сильніша концентрація напружень біля кутової точки та біля кінця тріщини.

Зі зростанням кута α концентрація напружень біля кінця тріщини посилюється. Якщо $\alpha^\circ \leq 120^\circ$, то зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється, а якщо $\alpha^\circ \geq 130^\circ$ – посилюється. На проміжку $120^\circ < \alpha^\circ < 130^\circ$ існують значення кута, при яких зі збільшенням жорсткості першого матеріалу концентрація напружень біля кінця тріщини послаблюється; спочатку послаблюється, а потім посилюється; посилюється.

Якщо у кутовій точці зародилися маломасштабні міжфазні зсуви тріщини, то чим менша відстань між кутовою точкою O і кінцем внутрішньої тріщини, тим менше руйнуюче навантаження. Чим більша довжина міжфазної тріщини, тим менше руйнуюче навантаження.

Зі зростанням кута α від α_1 до $\pi/2$ руйнуюче навантаження спочатку зменшується, а потім збільшується. Значенням e_0 , що дорівнюють 2; 3; 5; 10, відповідають значення кута найменшого руйнуючого навантаження, що дорівнюють $40,3^\circ; 36,5^\circ; 34,1^\circ; 30,7^\circ$.

Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим менше руйнуюче навантаження і меншим є кут найменшого руйнуючого навантаження.

ВИСНОВКИ

В роботі вперше у механіці руйнування проведено дослідження напруженого стану кусково-однорідного ізотропного пружного тіла біля маломасштабних міжфазних зсувних тріщин в кутовій точці межі поділу середовищ. Дослідження виконано на основі побудованих в роботі точних розв'язків нових задач теорії пружності для кусково-однорідних клиноподібних тіл.

Основні результати роботи такі.

1. Здійснено перехід від задач про маломасштабні зсувні тріщини до задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею поділу середовищ у формі сторін кута, лініями розриву дотичного переміщення, які виходять з вершини, і умовою на нескінченості, що дозволяє врахувати вплив зовнішнього поля.
2. Побудовано точний розв'язок задачі.
3. На основі цього розв'язку виведені формула, яка установлює зв'язок між коефіцієнтом інтенсивності напружень у кінці тріщини і коефіцієнтом інтенсивності напружень у кутовій точці межі поділу середовищ, а також трансцендентне рівняння для визначення показника степеня сингулярності напружень в кутовій точці за наявності в ній тріщин.
4. Одержано рівняння для визначення руйнуючого навантаження і показано, що рівновага тріщин є нестійкою.
5. Розв'язано задачу про граничну рівновагу кусково-однорідної площини з міжфазними тріщинами в кутовій точці межі поділу середовищ за наявності навантаженої внутрішньої півнескінченної тріщини (задача А).

Аналіз одержаних в роботі результатів дозволив зробити такі основні висновки для широкого класу задач про міжфазні зсувні тріщини у кутовій точці межі поділу середовищ.

1. Зі зростанням кута α на проміжках допустимих значень концентрація напружень біля кінця тріщини спочатку посилюється, а потім послаблюється. Кут найбільшої концентрації напружень є гострим.

2. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим сильніша концентрація напружень біля кінця тріщини і меншим є гострий і тупий кути максимальної концентрації напружень.

3. Після досягнення стану граничної рівноваги режим розвитку тріщин буде динамічним.

4. Зі зростанням гострого кута α концентрація напружень біля кутової точки за наявності в ній тріщин послаблюється, а зі зростанням тупого – посилюється. Якщо кут гострий, то зі зростанням e_0 концентрація напружень послаблюється, а якщо тупий – посилюється.

5. У випадку задачі А зі зростанням на проміжку допустимих значень кута α , який є гострим, руйнуюче навантаження спочатку зменшується, а потім збільшується. Чим більше відношення модулів Юнга $e_0 = E_1 / E_2 > 1$, тим менше руйнуюче навантаження і меншим є кут найменшого руйнуючого навантаження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аветисян Е.П. Об одной смешанной задаче теории упругости для полуплоскости с внутренним прямолинейным разрезом / Е.П. Аветисян, О.Х. Хачатрян, С.С. Шагинян // Учен. зап. Ереван. ун-т. Естест. Науки. – 1983. - № 1. – С. 28 – 33.
2. Аветисян А. Г. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела в условиях плоской задачи теории упругости / А. Г. Аветисян, К. С. Чобанян // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1972. – Т. 25, № 6. – С. 34–40.
3. Акопян В. Н. Об одной контактной задаче для упругого клина, усиленного жестким включением / В. Н. Акопян // Доклады АН Арм. ССР. – 1989. – Т. 88, № 2. – С. 77–81.
4. Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для упругого клина, ослабленного трещиной / В. Н. Акопян, А. В. Саакян // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 66–78.
5. Александров В. М. Контактные задачи для упругого клина / В. М. Александров // Известия АН ССР. Механика твердого тела. – 1967. – № 2. – С. 120–131.
6. Александров В. М. О действии штампа на упругий слой конечной толщины / В. М. Александров, И. И. Ворович // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 2. – С. 267–277.
7. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, № 4. – С. 651–656.
8. Александров В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболь. – М. : Физматлит, 1993. – 224 с.

9. Александров В. М. Эффективные методы решения сложных смешанных задач теории упругости, связанных с вопросами концентрации напряжений / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, А. С. Соловьев // Концентрация напряжений. Вып. 3. – Киев : Наук. думка, 1971. – С. 5–10.
10. Антипов Ю. А. Контактные задачи теории упругости для клиновидных областей в условиях трения и сцепления / Ю. А. Антипов, Н. Х. Арутюнян // Прикладная математика и механика. – 1992. – Т. 56, № 5. – С. 709–715.
11. Антипов Ю.А. Краевые задачи плоской теории упругости для клиновидной области при наличии включения / Ю.А. Антипов. – Одесса : 1982. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.12.82 №6332–82.
12. Бакиров В.Ф. Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения материалов / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Прикл. математика и механика. – 2004. – Т. 68, № 1. – С. 170 – 179.
13. Банцури Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением / Р. Д. Банцури // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 211, № 4. – С. 797–800.
14. Банцури Р. Д. Решение первой основной задачи теории упругости для клина, имеющего конечный разрез / Р. Д. Банцури // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 6. – С. 1256–1259.
15. Белоносов С.М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей / С. М. Белоносов. – Новосибирск : Изд–во Сиб. Отд. АН СССР. – 1962. – 231 с.
16. Бережницкий Л. Т. О возникновении и развитии пластических деформаций в окрестности остроугольного жесткого включения / Л. Т. Бережницкий, Н. М. Кундрат // Физ.–хим. механика материалов. – 1983. – Т. 19, № 6. – С. 60–68.
17. Бережницкий Л. Т. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения / Л. Т. Бережницкий, Н. М. Кундрат // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66–69.

18. Бережницкий Л.Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом деле / Л.Т. Бережницкий, В.В. Панасюк, Н.Г. Сташук // Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
19. Богданов В.Л. Исследование неклассических проблем механики разрушения композитов со взаимодействующими трещинами / В. Л. Богданов, А. Н. Гузь, В. М. Назаренко // Прикладная механика. - 2015. - Т. 51, № 1. - С. 79-104.
20. Бронштейн М. И. Решение контактной задачи для штампа на клиновидном основании / М. И. Бронштейн // Основания, фундаменты и механика грунтов. Вып. 4. – Киев, 1968. – С. 2–4.
21. Вайншельбаум В.М. Плоская задача о трещине на границе соединения двух упругих клиньев / В.М. Вайншельбаум, Р.В. Гольдштейн, М.Л. Холмянский // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. - №5. – С. 77 – 85.
22. Ведерников Ю.А. Трещиностойкость звездообразного контура / Ю.А. Ведерников, И.Д. Сузdal'ničkij // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1984. - № 3. – С. 160 – 164.
23. Волошко О.І. Дослідження зон передруйнування для тріщини в адгезійному прошарку, що з'єднує ізотропні матеріали / О.І. Волошко, В.В. Лобода // Вісн. Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. - № 4. – С. 54 – 59.
24. Ворович И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974, – 456 с.
25. Востров В. К. Сдвиговые трещины у края плоского штампа / В. К. Востров // Прикладная механика: международный научный журнал. – 1983. – Т. 19, № 7. – С. 91–95.
26. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977. – 640 с.
27. Головчан В.Т. Статика материалов / В.Т. Головчан, А.Н. Гузь, Ю.В. Коханенко, В.И. Кущ // Киев: Наук. думка, 1993. – 457 с.

28. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии / А.Н. Гузь // Киев: Наук. думка, 1990. – 630 с.
29. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / А.Н. Гузь // Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
30. Гузь А.Н. Пространственные задачи динамической механики разрушения материалов с трещинами в границе раздела (обзор) / А.Н. Гузь, И.А. Гузь, А.В. Меньшиков, В.А. Меньшиков // Прикладная механика. – 2013. – Т. 49, № 1. – С. 3 – 78.
31. Гузь А.Н. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами / А.Н. Гузь, М.Ш. Дышель, В.М. Назаренко // Киев.: Наук. думка, 1992. – 456 с.
32. Дацьшин А.П. Краевая криволинейная трещина в упругой полуплоскости / А.П. Дацьшин, Г.П. Марченко // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 67 – 71.
33. Дацьшин А.П. О предельном равновесии полуплоскости с поверхностной трещиной / А.П. Дацьшин // Физ.-хим. механика материалов. – 1969. – Т. 5, № 6. – С. 746 – 748.
34. Дацьшин А.П. Предельное равновесие полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной / А.П. Дацьшин, М.П. Саврук // Термомеханические методы разрушения горных пород. – Киев: Наук. думка, 1972. – Т. 2. – С. 93 – 97.
35. Дудик М.В. Модель «тризубець» пластиичної зони в кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу поділу матеріалів / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Фізико-хімічна механіка матеріалів – 2014. - № 4. – С. 41 – 48.
36. Каминский А. А. О критерии начала роста двух сдвиговых трещин в упругом теле в условиях плоской деформации / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Г. А. Хазин // Прикл. механика. - 2006. – Т. 42, № 4. - С. 83-90.

37. Каминский А.А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л.А. Кипнис // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, №. 10. – С. 28-41.
38. Каминский А.А. Об интенсивности напряжений вблизи конца трещины, образовавшейся при пересечении линий скольжения / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, В.Н. Дякон // Прикл. механика. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 90 – 95.
39. Каминский А. А. Расчет пластической зоны в угловой точке в рамках модели “трезубец” / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Г. А. Хазин // Прикладная механика: международный научный журнал. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 110–116.
40. Кипнис А.Л. О подходе к решению задач о межфазных трещинах, зародившихся в угловых точках кусочно-однородного тела / А.Л. Кипнис // Допвіді НАН України. – 2014. – № 10. – С.51 – 55.
41. Кипнис Л. А. О предельном равновесии кусочно-однородного тела с межфазными трещинами в угловой точке при сжатии / Л.А. Кипнис, Г. А. Хазин, Т.В. Полищук, А.Л. Кипнис // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – № 51. – С.91 – 100.
42. Кипнис Л. А. Равновесие полупространства с несимметричной трещиной / Л.А. Кипнис // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 113 – 116.
43. Кипнис Л. А. Линии скольжения в вершине клиновидного выреза / Л. А. Кипнис, Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 1. – С. 160–163.
44. Кипнис Л. А. Линия скольжения в вершине прямоугольного клина с жестко защемленной гранью / Л. А. Кипнис // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 4. – С. 102–103.
45. Кипнис Л. А. Применение принципа выбора к проблеме начального развития линий скольжения из угловой точки / Л. А. Кипнис, Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1989. – Т. 53, № 1. – С. 159–164.

46. Кипнис Л. А. Трещина на продолжении грани объемлющего полупространство клина / Л. А. Кипнис // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 5. – С. 911–915.
47. Кипнис Л. А. Упругое равновесие клина с трещиной / Л. А. Кипнис // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 43, № 1. – С. 153–159.
48. Кущ В.И. Напряженное состояние упругой среды, содержащей взаимодействующие круговые трещины и сфероидальные включения / В.И. Кущ // Прикл. механика. – 1998.- Т. 34, № 5. – С. 42 – 47.
49. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
50. Лібацький Л.Л. Фундаментальний розв'язок задачі про напружений стан півплощини з тріщиною / Л.Л. Лібацький // Вісник Львівського політехн. ін-ту. Математика і механіка. – 1974. - № 87. – С. 82 – 86.
51. Лобода В.В. Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными материалами / В.В. Лобода, А.Е. Шевелева // Прикл. механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76 – 82.
52. Лутченко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина / С. А. Лутченко // Прикладная механика: международный научный журнал. – 1966. – Т. 2, № 12. – С. 61–66.
53. Лутченко С. А. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости для клина / С. А. Лутченко, Г. Я. Попов // Прикладная механика: международный научный журнал.. – 1970. – Т. 6, № 3. – С. 64–71.
54. Лутченко С. А. Об одной плоской задаче теории упругости для клина со щелью / С. А. Лутченко, Г. С. Целиков // Судостроение и морские сооружения. – Харьков : Изд–во Харьковского ун–та, 1973 . – С. 85–88.
55. Лутченко С. А. Точное решение некоторых смешанных задач для упругого клина / С. А. Лутченко // Прикладная механика: международный научный журнал. – 1972. – Т. 8, № 3. – С. 117–120.

56. Лущик О. Н. О поведении корней уравнения, определяющего особенность напряженного состояния в окрестности вершины составного клина / О. Н. Лущик // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 5. – С. 82–92.
57. Мартиненко М.А. Мішані просторові задачі математичної теорії пружності / М.А. Мартиненко // Київ.: Освіта України, 2012. – 376 с.
58. Мартиненко М.А. Перша основна задача теорії пружності для тіла з циліндричною тріщиною / М.А. Мартиненко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. - 2013. - № 3. - С. 184-187.
59. Мартыненко М.А. Напряженное состояние вблизи вершины сферического разреза в неограниченной упругой среде / М.А. Мартыненко, А.Ф. Улитко // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 9. – С. 15 – 23.
60. Мартынук П.А. О равновесии изолированной трещины в упругой полосе / П.А. Мартынук, Э.Б. Поляк // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1978. - № 4. – С. 175 – 183.
61. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
62. Мхитарян С. М. К решению двух контактных задач для клина с упругими креплениями / С. М. Мхитарян, К. Г. Гулян // Известия АН Арм. ССР. Механика. – 1978. – Т. 31, № 4. – С. 3–20.
63. Назаренко В.М. Задача механіки руйнування про напівнескіненну тріщину нормальноговідриву у кусково-однорідній площині / В конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача : Тези доповідей – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2013. – Т.2. – С.76.

64. Назаренко В.М. Концентрация напряжений вблизи вершины внутренней полубесконечной трещины в кусочно-однородной плоскости с негладкой границей раздела сред / В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис // Прикладная механика: международный научный журнал. – 2015. – Т. 51, № 4. – С. 92 – 97.
65. Назаренко В.М. Концентрація напружень біля кутової точки межі поділу середовищ у кусково-однорідній площині за наявності тріщини / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2014. - № 3. – С. 42 – 45.
66. Назаренко В.М. Кусково-однорідна площаина з межею поділу середовищ у формі сторін кута за наявності півнескінченої тріщини / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад.. Михайла Кравчука, 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. – Київ: НТУУ «КПІ», 2016. – С.205 – 208.
67. Назаренко В.М. Кусково-однорідна площаина з напівнескінченою трічиною / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // DSMSI: XVI International Conference: Modeling and stability: Abstracts of conf. reports, Kiev. – 2013. Р. 298.
68. Назаренко В.М. Напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній площині з негладкою межею поділу середовищ / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: збірник наукових праць 5-ї міжнародної конференції / Під заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України. – 2014. – С. 321 – 324.
69. Назаренко В.М. Об интенсивности напряжений в концах межфазных сдвиговых трещин в угловой точке границы раздела сред / В.М. Назаренко, А.Л. Кипнис // Доповіді НАН України. – 2015. - № 8. – С.58 – 63.

70. Назаренко В.М. Про інтенсивність напружень біля кінця внутрішньої півнескінченої тріщини у біоднорідній площині / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // DSMSI: XVII International Conference: Modeling and stability: Abstracts of conf. reports, Kiev. – 2015. Р. 110.
71. Назаренко В.М. Про півнескінчену навантажену тріщину нормального відриву у кусково-однорідній площині / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // Математичні проблеми технічної механіки – 2016: Матеріали міжнародної конференції. – С.65.
72. Назаренко В.М. Пружна рівновага кусково-однорідної площини з півнескінченою тріщиною / В.М. Назаренко, О.Л. Кіпніс // XII міжнародній симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2015. – С. 40.
73. Некислих К. Контакт берегів крайової тріщини у пружному клині / К. Некислих, В. Острик // Машиностроение. – 2010. – № 1-2. – С. 8-13.
74. Некислих Е. М. Задача об упругом равновесии клина с трещинами на оси симметрии / Е. М. Некислих, В. И. Острик // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – № 5. – С. 111-129.
75. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М. : Изд–во иностр. лит. 1962. – 279 с.
76. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой / Б. М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1974. – Т. 38, № 5. – С. 876–882.
77. Нуллер Б. М. Некоторые контактные задачи для упругого бесконечного клина / Б. М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1972. – Т. 36, № 1. – С. 158–163.
78. Нуллер Б. М. О деформации упругой клиновидной пластинки, подкрепленной стержнем переменной жесткости, и об одном методе решения смешанных задач / Б. М. Нуллер // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, № 2. – С. 306–316.

79. Нуллер Б. М. Передача усилий на упругую клиновидную пластину через впаянный в нее стержень / Б. М. Нуллер, М. Б. Рывкин // Прикладная механика: международный научный журнал. – 1976. – Т. 12, № 10. – С. 129–133.
80. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения / Б. М. Нуллер // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 5. – С. 98–100.
81. Острик В. І. Ковзний контакт штампа з пружним клином / В. І. Острик, О. М. Щокотова // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2011. – № 4. – С. 82-91.
82. Острик В.І. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости / В.І. Острик, А.Ф. Улитко // Київ.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
83. Панасюк В. В. Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування / В. В. Панасюк, М. П. Саврук // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – № 1. – С. 49–68.
84. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К. : Наук. думка, 1968. – 246 с.
85. Панасюк В.В. Основы механики разрушения материалов / В.В. Панасюк, А.Е. Андрейкив, В.З. Парсон // Київ: Наук. думка, 1988. – 488 с.
86. Панасюк В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин // Київ: Наук. думка, 1976. – 444 с.
87. Панасюк В. В. Плоска пружно–пластиична задача для тіл з тріщинами при локалізації пластичних деформацій в тонких шарах / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, І. В. Прокопчук, А. М. Данилович // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1991. – № 5. – С. 35–42.
88. Парсон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Парсон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.

89. Попов Г. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином / Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко // Прикладная математика и механика. – 1974. – Т. 38, № 2. – С. 312–320.
90. Попов Г. Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином / Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 6. – С. 1100–1109.
91. Прокофьев Б. М. Контактная задача для составного клина / Б. М. Прокофьев // Взаимодействие в мех. конструкций. – Киев – Одесса, 1980. – С. 52–59.
92. Развитие теории контактных задач в СССР. – М. : Наука, 1976. – 493 с.
93. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук // Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
94. Саврук М.П. Напряжения около трещины в упругой полуплоскости / М.П. Саврук // Физ.-хим. механика материалов. – 1975. – Т. 11, № 5. – С. 59 – 64.
95. Саврук М.П. О взаимодействии системы трещин с границей упругого тела / М.П. Саврук, А.П. Дацышин // Прикл. механика. – 1974. – Т. 10, № 7. – С. 84 – 92.
96. Саркисян В.С. О двух смешанных задачах теории упругости для полуплоскости, ослабленной внутренним прямолинейным разрезом / В.С. Саркисян, Э.Х. Григорян, С.С. Шагинян // Учен. зап. Ереван. ун-т. Естест. Науки. – 1980. - № 2. – С. 49 – 58.
97. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое / Б. И. Сметанин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1968. – № 2. – С. 115–122.
98. Сметанин Б. И. Об одной смешанной задаче теории упругости для клина / Б. И. Сметанин // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 708–714.

99. Сметанин Б.И. О расклинивании упругого бесконечного клина / Б. И. Сметанин // Прикл. математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 935 – 940.
100. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
101. Тихоненко Л. Я. Плоская контактная задача для упругого клина и сцепленного с ним полубесконечного упругого стержня / Л. Я. Тихоненко // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск : Изд–во Днепропетровского ун–та, 1973. – С. 82–93.
102. Тоноян В. С. Об одной контактной задаче для упругой четвертьплоскости / В. С. Тоноян // Доклады АН Арм. ССР. – 1963. – Т. 37, № 3. – С. 121–130.
103. Тоноян В. С. Плоская контактная задача для упругой четвертьплоскости с неподвижной вертикальной кромкой / В. С. Тоноян // Доклады АН Арм. ССР. – 1963. – Т. 37, № 5. – С. 249–258.
104. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
105. Храпков А. А. Бесконечный треугольный клин с надрезом на биссектрисе под действием сосредоточенных сил, приложенных к берегам надреза / А. А. Храпков // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 5. – С. 88–97.
106. Храпков А. А. Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине, разрешимые в замкнутой форме / А. А. Храпков // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 6. – С. 1062–1069.
107. Храпков А. А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил / А. А. Храпков // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 35, № 4. – С. 677–689.

108. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
109. Черепанов Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости / Г. П. Черепанов // Проблемы механики твердого деформированного тела. – Л. : Судостроение, 1970. – С. 467–479.
110. Черепанов Г. П. Пластические линии разрыва в конце трещины / Г. П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1976. – Т. 40, № 4. – С. 720–728.
111. Черепанов Г.П. Равновесие откоса с тектонической трещиной / Г.П. Черепанов // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40, № 1. – С. 136 – 151.
112. Шкараев С.В. Определение перемещений и коэффициентов интенсивности напряжений в полубесконечной пластине с трещиной / С.В. Шкараев // Физ-хим. механика материалов. – 1985. – Т. 21, № 4. – С. 111 – 113.
113. Alblas J. B. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate / J. B. Alblas, W. J. J. Kuypers // Appl. Scientific Research. Ser. A. – 1965–1966. – Vol. 15, № 6. – P. 429–439.
114. Ashbauch N. Stress solution for a crack at an arbitrary angle to an interface / N. Ashbauch // Int. J. Fract. – 1975. – Vol.11, № 2. – P. 205 – 219.
115. Atkinson C. A simple representation of crack tip plasticity: the inclined strip yield superdislocation model / C. Atkinson, M. F. Kannien // Int. J. Fract. – 1977. – Vol. 13, № 2. – P. 151–163.
116. Barr D.T. Thermoelastic fracture solutions using distributions of singular influence functions. I. Determining crack stress fields from dislocation distributions / D.T. Barr, M.P. Cleary // Int. J. Solids and Struct. – 1983. – Vol. 19, № 1. – P. 73 – 82.
117. Chen Y.Z. Solutions of multiple crack problems of elastic half-plane / Y.Z. Chen // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1985. – Vol. 52, № 4. – P. 979 – 981.

118. Comninou M. Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction / M. Comninou // Z. angew. Math. und Phys. – 1976. – Vol. 27, № 4. – P. 493–499.
119. Dempsey J. P. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge / J. P. Dempsey, G. B. Sinclair // J. Elast. – 1981. – Vol. 11, № 3. – P. 317–327.
120. Dhaliwal R.S. Vertical crack inside a semi-infinite plate / R.S. Dhaliwal, A. Singh // Int. J. Eng. Sci. – 1976. – Vol. 14, № 11. – P. 1059 – 1069.
121. Doran H.E. The wedge with a symmetric crack at the vertex in plane elastostatics / H.E. Doran // J. Inst. Math. and Appl. – 1969. – Vol. 5, № 4. – P. 363 – 372.
122. Erdogan F. A half plane and strip with an arbitrarily located crack / F.A. Erdogan, K. Arin // Int. J. Fract. – 1975. – Vol. 11, № 2. – P. 191 – 204.
123. Erdogan F. Bonded dissimilar materials containing cracks parallel to the interface / F. Erdogan // Eng. Fract. Mech. – 1971. – Vol. 3, № 3. – P. 231 – 240.
124. Erdogan F. Contact and crack problems for an elastic wedge / F. Erdogan, G. D. Gupta // Int. J. Eng. Sci. – 1976. – Vol. 14, № 2. – P. 155–164.
125. Erdogan F. Stress intensity factors in a cracked infinite elastic wedge loaded by a rigid punch / F. Erdogan, M. B. Civelek // Int. J. Eng. Sci. – 1979. – Vol. 17, № 8. – P. 973–989.
126. Evans J. T. Reverse shear on inclined planes at the tip of sharp crack / J. T. Evans // J. Mech. and Phys. Solids. – 1979. – Vol. 27, № 1. – P. 73–88.
127. Freund L.B. Stress intensity factor calculations based on a conservation integral / L.B. Freund // Int. J. Solids and Struct. – 1978. – Vol. 14, № 3. – P. 241 – 250.
128. Gregory R.D. The edge-cracked circular disc under symmetric pin-loading / R.D. Gregory // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1979. – Vol. 85, № 3. – P. 523 – 538.
129. Hasebe N. Stress analysis of a semi-infinite plate with an oblique edge crack / N. Hasebe, S. Inohara // Ing.-Arch. – 1980. – Vol. 49, № 1. – P. 51 – 62.

130. Hasebe N. Uniform tension of a semi-infinite plate with crack at an end of a stiffened edge / N. Hasebe // Ing.-Arch. – 1979. – Vol. 48, № 2. – P. 129 – 141.
131. Higashida Y. Stress fields around a crack lying parallel to a free surface / Y. Higashida, K. Kamada // Int. J. Fract. – 1982. – Vol. 19, № 1. – P. 39 – 52.
132. Hills D.A. The Green's function for a slant edge crack // D.A. Hills, A. Sackfield, A.Uzel // Eng. Fract. Mech. – 1984. – Vol. 20, № 2. – P. 245 – 253.
133. Isida M. On the determination of stress intensity factors for some common structural problems / M. Isida // Eng. Fract. Mech. – 1970. – Vol. 2, № 1. – P. 61 – 79.
134. Ioakimidis N.I. A system of a curvilinear cracks in an isotropic elastic halfplane / N.I. Ioakimidis, P.S. Theocaris // Int. J. Fract. – 1979. – Vol. 15, № 4. – P. 299 – 309.
135. Karp S.N. The elastic–field behavior in the neigh–bourhood of a crack of arbitrary angle / S. N. Karp, F. C. J. Karal // Comm. Pure and Appl. Math. – 1962. – Vol. 15, № 4. – P. 413–421.
136. Keer L.M. Crack at the apex of a loaded notch / L.M. Keer, D.A. Mendelsohn, J.D. Achenbach // Int. J. Solids and Struct. – 1977. – Vol. 13, № 7. – P. 615 – 623.
137. Keer L.M. Stress distributions for a quarter plane containing an arbitrarily oriented crack / L.M. Keer, J.C. Lee, T. Mura // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1983. – Vol. 50, № 1. – P. 43 – 49.
138. Kushch V.I. Elastic equilibrium of a medium containing finite number of aligned spheroidal inclusions / V.I. Kushch // Int. J. Solids and Struct. – 1996. – Vol. 33, № 8. – P. 1175 – 1189.
139. Lachenbruch A.H. Depth and spacing of tension cracks / A.H. Lachenbruch // J. Geophysical Research. – 1961. – Vol. 66, № 12. – P. 4273 – 4291.

140. Loboda V. Analysis of pre-fracture zones for an electrically permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials // V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // Int. J. Fract. – 2006. – Vol. 142. – P. 307 – 313.
141. Lo K. K. Modeling of plastic yielding at a crack tip by inclined slip planes / K. K. Lo // Int. J. Fract. – 1979. – Vol. 15, № 6. – P. 583–589.
142. Matczynski M. Elastic wedge with discontinuous boundary conditions / M. Matczynski // Arch. Mech. Stosowanej. – 1963. – Vol. 15, № 6. – P. 833–855.
143. Michell J. H. Elementary distributions of plane stress / J. H. Michell // Proc. London. Math. Soc. – 1901. – P. 32.
144. Muki R. Crack emanating from an open notch / R. Muki, R. A. Westmann // J. Elast. – 1974. – Vol. 4, № 3. – P. 173-186.
145. Ouchterlony F. Some stress intensity factors for self-similar cracks, derived from path independent integrals / F. Ouchterlony // J. Elast. – 1978. – Vol. 8, № 3. – P. 259 – 271.
146. Ouchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by concentrated loads / F. Ouchterlony F. // Int. J. Eng. Sci. – 1977. – Vol. 15, № 2. – P. 109 – 116.
147. Ouchterlony F. Symmetric cracking of a wedge by transverse displacements / F. Ouchterlony // J. Elast. – 1980. – Vol. 10. № 2. – P. 215 – 223.
148. Rice J. R. Limitation to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity / J. R. Rice // J. Mech. and Phys. Solids. – 1974. – Vol. 22, № 1. – P. 17–26.
149. Riedel H. Plastic yielding on inclined slip–planes at a crack tip / H. Riedel // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – Vol. 24, № 5. – P. 277–289.
150. Rooke D.P. Stress intensity factors in fretting fatigue / D.P. Rooke, D.A. Jones // J. Strain Anal. – 1979. – Vol. 14, № 1. – P. 1 – 6.
151. Sneddon I.N. The stress intensity factor at the tip of an edge crack in an elastic half-plane / I.N. Sneddon, S.C. Das // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – Vol. 9, № 1. – P. 25 – 36.

152. Srawley J.E. Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens / S.E. Srawley, B. Gross // Mater. Res. and Stand. – 1967. – Vol. 7, № 4. – P. 155 – 162.
153. Srivastav R.P. Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge shaped elastic solids under discontinuous loads / R. P. Srivastav, P. Narain // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1965. – Vol. 61, № 4. – P. 945–954.
154. Srivastava K.N. On a Griffith crack at the interface of two bonded dissimilar wedges / K. N. Srivastava // Z. angew. Math. und Mech. – 1979. – Vol. 59, № 11. – P. 643–646.
155. Stallybrass M.P. A crack perpendicular to an elastic half-plane / M.P. Stallybrass // Int. J. Eng. Sci. – 1970. – Vol. 8, № 5. – P. 351 – 362.
156. Stallybrass M.P. A semi-infinite crack perpendicular to the surface of an elastic half-plane / M.P. Stallybrass // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – Vol. 9, № 1. – P. 133 – 150.
157. Sternberg E. The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity / E. Sternberg, W. T. Koiter // J. Appl. Mech. – 1958. – Vol. 25, № 4. – P. 575–581.
158. Stone S.F. Stress intensity factors for cracked wedges / S.F. Stone, R.A. Westmann // Int. J. Solids and Struct. – 1981. – Vol. 17, № 3. – P. 345 – 358.
159. Swedlow J.L. Elasto-plastic cracked plates in plane-strain / J. L. Swedlow // Int. J. Fract. – 1965. – Vol. 5, № 1. – P. 33–44.
160. Tamate O. Singular stresses in the vicinity of ends of a crack in an elastic wedge / O. Tamate, T. Kondo // Trans. Jap. Soc. Mec. Eng. – 1978. – Vol. 44, № 3. – P. 756–761.
161. Theocaris P.S. Stress singularities at vertices of composite plates with smooth or rough interfaces / P. S. Theocaris, E. E. Gdoutos // Arch. Mech. Stosow. – 1976. – Vol. 28, № 4. – P. 693–704.
162. Theocaris P.S. Stress singularities in cracked composite full-planes / P. S. Theocaris, E. E. Gdoutos // Int. J. Fract. – 1977. – Vol. 13, № 6. – P. 763–773.

163. Theocaris P.S. The bimaterial full-plane with a crack at any angle to the interfaces / P. S. Theocaris, E. E. Gdoutos // Materialprufung. – 1976. – Vol. 18, № 12. – P. 472–475.
164. Tsamasphyros G. Integral-equation solution for half planes bonded together or in contact and containing internal cracks or holes / G. Tsamasphyros, P.S. Theocaris // Ing.-Arch. – 1983. – Vol. 53, № 4. – P. 225 – 241.
165. Vitek V. Yielding on inclined planes at the tip of a crack loaded in uniform tension / V. Vitek // J. Mech. and Phys. Solids. – 1976. – Vol. 24, № 5. – P. 263–275.
166. Voloshko O. Analytical and numerical study of cohesive zones for a crack in an adhesive layer between identical isotropic materials / O. Voloshko, Y. Lapusta, V. Loboda // Eng. Fract. Mech. – 2010. – Vol. 77. – P. 2577-2592.
167. Westmann R. A. Geometrical effects in adhesive joints / R. A. Westmann // Int. J. Eng. Sci. – 1975. – Vol. 13, № 4. – P. 369-391.
168. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension / M. L. Williams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – Vol. 19, № 4. – P. 526–535.
169. Wilson W.K. Stress intensity factors for deep cracks in bending and compact tension specimens / W.K. Wilson // Eng. Fract. Mech. – 1970. – Vol. 2, № 2. – P. 169 – 171.