

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ім. С.П. ТИМОШЕНКА**

**Борисенко Максим Юрійович**

**УДК 539.3**

**ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВІЛЬНИХ  
КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК РІЗНИХ ПОПЕРЕЧНИХ  
ПЕРЕРІЗІВ НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНО-ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ  
МЕТОДІВ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацію є рукопис.

Робота виконана в Миколаївському національному університеті ім. В.О. Сухомлинського та Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

**Науковий керівник :** член-кореспондент НАПН України, доктор технічних наук, професор **Будак Валерій Дмитрович**, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

**Офіційні опоненти :** доктор фізико-математичних наук, професор **Лоза Ігор Андрійович**, завідувач кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету;

кандидат фізико-математичних наук, доцент **Борисейко Олександр Віталійович**, доцент кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.

Захист дисертації відбудеться «23» лютого 2016 р. о 13<sup>30</sup> годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01 Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України за адресою: 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3.

Автореферат розіслано «16» січня 2016 р.

Учений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 26.166.01  
доктор фізико-математичних наук

 О.П. Жук

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** У багатьох випадках циліндричні оболонкові конструкції залежно від їх функціонального призначення і умов експлуатації мають некруговий контур поперечного перерізу, змінну товщину та інші особливості. Прикладами таких конструкцій є зерносховища, сховища для горючих та інших промислових речовин, атомні реактори, корпуси надводних і підводних кораблів, літальних і космічних апаратів, об'єкти інженерної і хімічної промисловості. При дослідженні міцності та стійкості таких оболонкових споруд є необхідним володіти інформацією про розподіл їх динамічних характеристик, зокрема, про розподіл частот та форм вільних коливань.

Теоретичні дослідження коливань пов'язані з значними труднощами реалізації математичної моделі та необхідністю розв'язання складної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами, при розв'язанні якої спостерігається нестійкість розрахунку, втрата необхідного порядку даних обчислень. Відомі аналітичні розв'язки деяких краївих задач, що описують коливання некругових циліндричних оболонок, які можна застосовувати тільки в окремих випадках. Для дослідження цієї проблеми широко використовують системи автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – САЕ), які спроможні обчислювати конструкцію будь-якої форми завдяки застосуванню методу скінченних елементів. Крім того, САЕ-системи дають користувачу можливість оцінити поведінку комп'ютерної моделі оболонкових елементів конструкцій в реальних умовах експлуатації, дати оцінку її несучої здатності без значних затрат часу та коштів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінченних елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran. Але основною перевіркою будь-якого з результатів розрахунків залишається тільки фізичний експеримент, чисельний аналіз представляє лише моделювання реальної конструкції і від того, наскільки вдала модель і математичний апарат, який реалізує цю модель, залежить відповідність результатам експериментальної перевірки. Чисельне та експериментальне визначення частот та форм вільних коливань некругових циліндричних оболонок, а також дослідження на цій основі закономірностей залежності відповідних динамічних характеристик від форми поперечного перерізу, характеру зміни товщини,граничних умов та фізико-механічних властивостей матеріалу є актуальною науковою проблемою сучасної механіки деформівного твердого тіла. Дослідженю цієї проблеми і присвячена дисертаційна робота.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дослідження, що проведені в дисертаційній роботі, виконано у відповідності з науковими темами: «Дослідження малих переміщень та деформацій елементів конструкції змінної товщини при квазістатичному та віброрезонансному навантажені» (№ ДР 0109U002261, 2009-2011); «Чисельно-експериментальне дослідження вільних коливань пластин та пологих оболонок змінної товщини в рамках класичної та уточненої теорії» (№ ДР 0112U000478, 2012-2014); «Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей»

(№ ДР 0112U000249, 2012-2016).

**Мета та завдання дослідження.** Мету та завдання дослідження можна сформулювати наступним чином:

- розробка ефективного чисельно-експериментального підходу до розв'язання задач динаміки циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу сталої та змінної товщини;
- чисельне розв'язання задачі про визначення частот та форм вільних коливань некругових циліндричних оболонок методом скінчених елементів;
- визначення частот та форм вільних коливань некругових циліндричних оболонок методом стробоголографічної інтерферометрії;
- порівняльний аналіз результатів досліджень динамічних характеристик некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом, отриманих на основі чисельного та експериментального підходів;
- встановлення залежності динамічних характеристик некругових циліндричних оболонок від значення ексцентризу еліпса, який є формою поперечного перерізу, характеру зміни товщини оболонки, граничних умов, геометричних та механічних параметрів матеріалу.

*Об'єктом дослідження* є динамічна поведінка некругових циліндричних оболонок з еліптичними поперечними перерізами з різними геометричними та механічними параметрами та різними граничними умовами.

*Предметом дослідження* є спектр частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок вказаного класу в залежності від характеру зміни товщини оболонки, граничних умов, геометричних та механічних параметрів матеріалу.

*Методи дослідження.* Дослідження проводились на основі класичної теорії оболонок. Експериментальні дослідження проводились методом стробоголографічної інтерферометрії. Чисельні дослідження проводились методом скінчених елементів, який реалізовано на програмному засобі Femap.

**Наукова новизна отриманих результатів** полягає у наступних положеннях, що виносяться на захист:

- розроблено ефективний чисельний підхід до розрахунку частот і форм вільних коливань циліндричних оболонок довільного поперечного перерізу сталої та змінної товщини при довільних граничних умовах, який базується на розв'язку рівнянь Лагранжа II роду в дискретній формі та скінченно-елементній апроксимації методом Ланцюша;
- розроблено ефективний експериментальний підхід до визначення динамічних характеристик консольно закріплених циліндричних оболонок сталої та змінної товщини на основі безконтактного методу стробоголографічної інтерферометрії, який дає можливість в реальному часі спостерігати інтерференційні картини коливань поверхні оболонок, точно встановлювати момент виникнення резонансу, вибрати необхідний режим віброзбудження, з достатнім ступенем достовірності досліджувати спектр частот і форм вільних коливань;
- проведено розв'язання задач про вільні коливання некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом та досліджено залежність динамічних характеристик відповідних оболонок від геометричних і

механічних параметрів, граничних умов; виявлено закономірності у розподілі частот і форм вільних коливань :

- для деяких консольно закріплених циліндричних оболонок сталої та змінної товщини проведено порівняльний аналіз чисельно та експериментально отриманих частот і форм вільних коливань.

**Достовірність** отриманих результатів забезпечується коректністю проведення експериментів та вимірювань; використанням апробованих чисельних методів і критерію практичної збіжності; узгодженням чисельних результатів з експериментальними; чисельними розв'язками тестових задач.

**Практичне значення отриманих результатів.** Реалізований у роботі чисельно-експериментальний підхід дає можливість досліджувати динамічні характеристики оболонкових конструкцій інших конфігурацій і може бути використаний для оцінки допущень побудованих інших теоретичних та експериментальних моделей, досліджень в науково-дослідних організаціях та конструкторських бюро, а також при аналізі поведінки конкретних конструктивних елементів, оскільки публікацій з даного питання мало.

**Особистий вклад здобувача.** У роботах [1-12], опублікованих у співавторстві з науковим керівником, дисертанту належить побудова геометрії досліджуваних оболонок, проведення розбиття різними типами скінченних елементів, розрахунок частот та форм вільних коливань за допомогою програмного засобу Femap, підготовка поверхні оболонки до експерименту, компонування оптичної схеми установки, проведення експерименту, отримання частот вільних коливань досліджуваних оболонок та фіксування інтерференційних картин; науковому керівнику В.Д. Будаку і науковому консультанту О.Я. Григоренку належать постановка задачі і обговорення результатів отриманих чисельним та експериментальним методами; О.В. Бойчук брала участь у проведенні розрахунків у роботах [1, 2, 4, 5]; В.В. Хоришко брав участь у проведенні експерименту [3].

У роботі [1] дисертантом досліджуються вільні коливання тонких ізотропних циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу змінної товщини однакової маси на основі методу скінченних елементів. Порівнюються частоти при однакових формах коливань для оболонок однакової геометрії для трьох різних матеріалів.

У роботі [2] дисертантом проведено розрахунки частот та форм вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу для різних значень її ексцентриситету зі збереженням маси методом скінченних елементів. Для оцінки достовірності отриманих результатів виконано порівняльний аналіз з даними, які були отримані експериментальним шляхом на основі методу голограмічної інтерферометрії для конкретного значення ексцентриситету еліпса.

У роботі [3] дисертантом використовується методика голограмічної інтерферометрії для визначення частот вільних коливань ізотропних кругових циліндричних оболонок сталої і змінної товщини еквівалентної маси. Виявлено, що при малому числі півхвиль вздовж твірної резонансні частоти оболонки змінної товщини перевищують аналогічні частоти циліндричної оболонки сталої товщини при збереженні маси.

У роботі [4] дисертантом розглядаються вільні коливання тонкої ізотропної

циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини на основі методу скінченних елементів реалізованого на високопродуктивному програмному забезпеченні для інженерного аналізу – Femap. Проводиться порівняльний аналіз чисельних результатів з отриманими експериментально.

У роботі [5] дисертантом визначаються частоти та форми вільних коливань тонких циліндричних оболонок кругового та еліптичного поперечного перерізу еквівалентної маси при різних граничних умовах на одному торці та вільному іншому. Отримані результати дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення їх з резонансного режиму за рахунок варіації граничних умов, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на:

- 1) Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2011» (Україна, Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2011).
- 2) XIII Всеукраїнській науково-методичній конференції «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (Україна, Миколаїв, 2011).
- 3) VII Міжнародній науковій конференції присвяченій 90-річчю від дня народження академіка НАН України Олександра Сергійовича Космодаміанського (Україна, Донецьк, Мелекіно, 2013).
- 4) XIV Всеукраїнській науково-методичній конференції присвяченій 100-річчю з дня заснування МНУ ім. В.О. Сухомлинського «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі» (Україна, Миколаїв, 2013).
- 5) Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2014» (Україна, Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2014).
- 6) Міжнародній науковій конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2015» (Україна, Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2015).
- 7) Міжнародній науково-практичній конференції «Проблеми механіки та фізики-хімії конденсованого стану речовини» (Україна, Миколаїв, 2015).
- 8) науковому семінарі кафедри прикладних математики і механіки та інформатики механіко-математичного факультету Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського (Миколаїв, 2015).
- 9) науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015).
- 10) науковому семінарі за напрямком «Механіка оболонкових систем» при Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України (Київ, 2015).

**Публікації.** Згідно результатів дисертації видано дванадцять праць, в тому числі п'ять статей у фахових журналах [1-5], які входять в перелік ДАК України, а також сім публікацій у збірниках матеріалів і праць конференцій [6-12].

**Структура і обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації становить 142 сторінки, в тому числі 79 рисунків, 18 таблиць, список використаних джерел із 192 найменувань на 20 сторінках.

Автор щиро вдячний науковому керівникові, член-кореспонденту Національної академії педагогічних наук України, доктору технічних наук,

професору Будаку Валерію Дмитровичу за постановку проблеми, корисні поради та допомогу при виконанні роботи. Щиру подяку автор висловлює також науковому консультанту, доктору фізико-математичних наук, професору Григоренку Олександру Ярославовичу за постійну увагу, консультації та допомогу при виконанні роботи.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

**У вступі** подається загальна характеристика роботи. Зокрема обґруntовується необхідність проведення наукового пошуку у цій галузі і визначається актуальність теми дисертації, формулюється мета роботи. На основі аналізу основних результатів, які увійшли до дисертації, визначено їх наукову новизну та практичне значення. Вказані публікації автора та відмічено його особистий внесок у кожній опублікованій науковій статті у співавторстві. Приводяться дані про зв'язок дисертаційної роботи з науковими темами, що виконуються в установі здобувача, дані про апробацію результатів дисертації.

**У першому** розділі подано огляд літературних джерел, в яких містяться дослідження, присвячені визначенням динамічних характеристик циліндричних оболонок різних поперечних перерізів. Задача на визначення власних частот кругових циліндричних оболонок при різних граничних умовах та з різними особливостями дуже широко і активно обговорюється протягом століття, при цьому мають місце аналітичні, чисельні та експериментальні методи розв'язання даної проблеми.

Важливу роль у розробці загальної теорії оболонок зіграли праці С.О. Амбарцумяна, В.З. Власова, О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, О.Л. Гольденвейзера, О.М. Кільчевського, А.І. Лур'є, А. Лява, Х.М. Муштарі, В.В. Новожилова, Е. Рейснера, С.П. Тимошенка та ін.

Розв'язанню деяких класів задач динаміки оболонок складної форми присвячені роботи О.І. Беспалової, В.В. Болотіна, В.Д. Будака, А.Т. Василенка, О.Я. Григоренка, В.І. Гуляєва, Е.І. Григолюка, Я.О. Жука, В.Л. Заруцького, М.В. Марчука, О.В. Марчука, Б.Я. Кантора, В.Г. Карнаухова, В.І. Козлова, В.Д. Кубенка, Л.В. Курпи, Р.М. Кушніра, І.А. Лози, П.З. Лугового, А. Лейса, Ч.В. Ліма, Дж.М. Лінберга, К.М. Лью, В.Ф. Мейша, Л.В. Мольченка, М.Д. Олсона, О.Д. Оніашвілі, М.Петіта, Б.Л. Пелеха, В.Г. Піскунова, О.О. Рассказова, І.К. Сенченкова, Н.В. Сметанкіної, В.І. Сторожева, І.Ю. Хоми, В.К. Чибірякова, М.О. Шульги, О.М. Шупікова та ін.

Дослідження Н. Абрамсона, Ю.Г. Золотого, А.С. Каїрова, Д. Кана, Ю.М. Кузнецова, У. Ліндхольма, О.В. Овчаренка, К. П'юсі, Г.М. Сальникову, А.Г. Сенюкову, Ж. С'юелла, А.К. Шалабанова присвячені експериментальному визначенням динамічних характеристик циліндричних оболонок різної форми.

З огляду публікацій, які представлені в першому розділі дисертації, можна дійти висновку, що розробка ефективного підходу до розв'язування задач про вільні коливаннях некругових циліндричних оболонок сталої та змінної товщини представляє складну актуальну проблему механіки деформівного твердого тіла, оскільки при аналітичному розв'язуванні виникають значні складності. Використання методу скінченних елементів та методу стробоголографічної

інтерферометрії дозволяє визначити спектр частот і форм вільних коливань оболонок із будь-яким поперечним перерізом та різним характером зміни товщини оболонки. Поєднання цих двох методів дає можливість з високим ступенем точності дослідити динамічні характеристики оболонок, що досліджуються в дисертації та провести аналіз їхньої поведінки в залежності від характеру зміни товщини оболонки, типу граничних умов, геометричних та механічних параметрів матеріалу.

У другому розділі проведено постановку задачі про вільні коливання некругових циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом, наведені основні положення методу скінчених елементів, який застосовується при розв'язанні динамічних задач оболонкових конструкцій, описані основні принципи голографічної інтерферометрії, апаратура і обладнання для забезпечення голографічного експерименту.

Розглядаються пружні тіла в формі некругових циліндричних оболонок в ортогональній криволінійній системі координат  $\alpha = s$ ,  $\beta = t$ ,  $\gamma$  (рис. 1), де  $s = \text{const}$ ,  $t = \text{const}$  – лінії головних кривизн на деякій координатній циліндричній поверхні, які представляють собою сукупність напрямних та твірних, а координата  $\gamma$  відраховується від нормалі до цієї поверхні. Дугову координату  $t$  направляючи відраховуємо від деякої фіксованої твірної, а натуральний параметр  $s$  твірної допускаємо рівним відстані до одного з граничних контурів координатної поверхні. У такому випадку положення деякої точки  $M$  у просторі буде визначатися трьома величинами  $(s, t, \gamma)$ .

Відповідно до класичної теорії Кірхгофа – Лява рівняння, що описують вільні коливання циліндричних оболонок, будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial s} + k_t \left( Q_t + \frac{\partial H}{\partial s} \right) &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} + \frac{\partial Q_t}{\partial t} - k_t N_t &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial t} &= Q_s, \quad \frac{\partial M_t}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial s} = Q_t, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина матеріалу,  $h$  – товщина оболонки,  $\tau$  – час.

Для нормальних  $N_s$ ,  $N_t$  і зсувних зусиль  $S$ , згинних  $M_s$ ,  $M_t$  та крутільних моментів  $H$  мають місце матеріальні співвідношення:

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}\varepsilon_s + C_{12}\varepsilon_t, & M_s &= D_{11}\chi_s + D_{12}\chi_t, \\ N_t &= C_{12}\varepsilon_s + C_{22}\varepsilon_t, & M_t &= D_{12}\chi_s + D_{22}\chi_t, \\ S &= C_{66}\varepsilon_{st}, & H &= 2C_{66}\chi_{st}, \end{aligned} \quad (2)$$

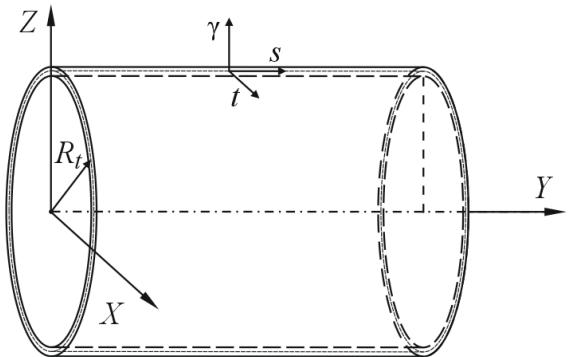


Рис.1

де  $C_{ij} = B_{ij}h(s, t)$  і  $D_{ij} = B_{ij}h^3(s, t)/12$ ,  $\{i, j\} \in \{1, 2, 6\}$ , жорсткість оболонки при розтягу-стиску і згині відповідно,  $B_{11} = E_1/(1 - v_1 v_2)$ ,  $B_{22} = E_2/(1 - v_1 v_2)$ ,  $B_{12} = v_2 E_1/(1 - v_1 v_2) = v_1 E_2/(1 - v_1 v_2)$ ,  $B_{66} = G_{12}$ .

Вираз для деформації серединної поверхні оболонки має вигляд:

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \chi_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \\ \varepsilon_t &= \frac{\partial v}{\partial t} + k_t w, & \chi_t &= -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \varepsilon_{st} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}, & \chi_{st} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t},\end{aligned}\quad (3)$$

де  $u(s, t, \tau)$ ,  $v(s, t, \tau)$  і  $w(s, t, \tau)$  – переміщення точок серединної поверхні оболонки. У виразах для згинних деформацій не враховуються тангенціальні переміщення.

Підставивши (3) в (2), а потім в (1), отримаємо три еквівалентні диференціальні рівняння в частинних похідних із змінними коефіцієнтами відносно трьох невідомих переміщень  $u$ ,  $v$  і  $w$ :

$$\begin{aligned}C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{11}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{12}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \\ + \frac{\partial C_{66}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} + k_t C_{12} \frac{\partial w}{\partial s} + k_t \frac{\partial C_{12}}{\partial s} w = 0, \\ C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial C_{22}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial s} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{\partial C_{66}}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + \\ + \frac{\partial C_{12}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} - k_t D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - k_t \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k_t (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} - \\ - 4k_t \frac{\partial D_{66}}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + k_t C_{22} \frac{\partial w}{\partial t} - k_t \frac{\partial D_{12}}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left( k_t \frac{\partial C_{22}}{\partial t} + k'_t C_{22} \right) w = 0, \\ D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t^3} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial s^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial s} + \\ + \left( \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial(D_{12} + 2D_{66})}{\partial t} \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial s^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial t \partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + \\ + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \left( \frac{\partial^2 D_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \\ + k_t^2 C_{22} w + k_t C_{22} \frac{\partial v}{\partial t} + k_t C_{12} \frac{\partial u}{\partial s} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

На торцях оболонки  $s = const$  можна задати наступні граничні умови:

- жорстко закріплений торець (C):

$$u = v = w|_{s=const} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s}|_{s=const} = 0; \quad (5)$$

- шарнірно закріплений торець (Sc):

$$u = v = w|_{s=const} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}|_{s=const} = 0; \quad (6)$$

- шарнірно опертний торець (S):

$$u = w|_{s=const} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s}|_{s=const} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}|_{s=const} = 0; \quad (7)$$

- вільний торець (F):

$$N_s|_{s=const} = 0, \quad M_s|_{s=const} = 0, \\ (S + 2k_t H)|_{s=const} = 0, \quad \left( Q_s + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)|_{s=const} = 0. \quad (8)$$

Відповідні динамічні рівняння для МСЕ можна отримати, якщо розглянути рівняння руху механічної системи зі скінченою кількістю ступенів вільності, яка описується системою рівнянь Лагранжа II роду в дискретній формі, яке для оболонки при її скінченно-елементній апроксимації набуває вигляду

$$[M]\ddot{\lambda} + [K]\lambda = \{0\}. \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) представляємо у вигляді

$$\{\lambda\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (10)$$

де  $\{A\}$  – вектор амплітудних значень вузлових переміщень, що визначають форму власних коливань;  $\omega$  – колова частота,  $\beta$  – фаза коливань. Після підстановки (10) у (9) та скорочення на  $\cos(\omega t + \beta)$  отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{A\} = \{0\}, \quad (11)$$

У цій системі ненульові значення компонентів  $\{A\}$  можливі лише при умові, що

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (12)$$

Якщо квадратні матриці  $[M]$  та  $[K]$  – додатньо визначені, то рівняння (12) має  $N$  додатних розв'язків – власних частот  $\omega_k$ , причому можливі парні значення (тут  $N$  – кількість невідомих у системі алгебраїчних рівнянь (11)).

$N$  значень власних частот  $\omega_k$  дозволяють розв'язок системи (11) представити у вигляді лінійної комбінації з  $N$  виразів (10):

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (13)$$

Тобто, зміна форми лінійної пружної конструкції з часом, коли вона коливається вільно або здійснює вимушенні коливання, є лінійною комбінацією всіх її власних форм.

Для визначення частот та форм вільних коливань, якщо дисипація енергії та демпфування не враховується, доцільно використовувати як основний, метод Ланцюша (Lanczos), що потребує менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам'яті

на жорсткому диску) порівняно з іншими методами. Метод Ланцюша дозволяє визначати  $n$ -у кількість потрібних власних значень частот і форм із заданою точністю. Чим більшу кількість власних пар частот треба визначити, тим більш помітними виявляються переваги цього методу.

Знаходження власних частот і форм коливань зводиться до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь (11).

Метод Ланцюша використовує зведення до тридіагональної матриці  $T$

$$T = Q_j^T M K^{-1} M Q_j, \quad (14)$$

де  $Q_j = \{q_1, q_2, \dots, q_j\}$  – прямокутна матриця з елементами  $N_{eq} \times j$ ,  $N_{eq}$  – число рівнянь,  $j$  – номер кроку по Ланцюшу,  $q_j$  –  $j$ -ий вектор Ланцюша. Вираз

$$\beta_{j+1} \vec{q}_{j+1} = K^{-1} M \vec{q}_j - \alpha_j \vec{q}_j - \beta_j \vec{q}_j, \quad (15)$$

генерує наступний вектор Ланцюша  $q_{j+1}$  і визначає поточний рядок матриці  $T$

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \beta_j \quad \alpha_j \end{vmatrix}$$

Таким чином, отримаємо задачу на власні значення:

$$T \vec{s}_k^j - \lambda_k^j \vec{s}_k^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, j \quad (16)$$

$(\omega_k^j)^2 = 1/\lambda_k^j$ , де  $\omega_k^j$  –  $j$ -а апроксимація колової частоти  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – потрібне число власних пар. Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні  $j$  – номера кроку процедури Ланцюша) до тих пір, поки не буде досягнута потрібна точність  $\|\{\lambda\}_i - \omega_i^2 K^{-1} M \{\lambda\}_i\| / \|\{\lambda\}_i\| \leq 10^{-7}$  по всіх власних значеннях.

У третьому розділі проведено аналіз достовірності результатів, отриманих методом скінченних елементів при розв'язанні задач на визначення частот та форм вільних коливань циліндричних оболонок з різним поперечним перерізом. Обґрунтовано вибір виду та розміру скінченного елемента. Розв'язано три тестових задачі, на підставі яких можна зробити висновок про ефективність та точність запропонованого чисельного підходу.

За допомогою МСЕ реалізованого на програмному комплексі Femap досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань двох еквівалентних по масі ізотропних циліндричних оболонок: кругова оболонка висотою  $h = 120 \text{ мм}$ , товщиною  $d = 2 \text{ мм}$ , радіусом серединної поверхні  $R_c = 43,547 \text{ мм}$ ; некругова оболонка висотою  $h = 120 \text{ мм}$ , товщиною  $d = 2 \text{ мм}$  та півосяями серединної поверхні, яка є еліпсом,  $a_c = 50,810 \text{ мм}$  і  $b_c = 36,285 \text{ мм}$  при різних граничних умовах накладених на один торець, інший торець вільний. В якості матеріалу оболонки вибиралась сталь 40Х з модулем Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,32$ , густину  $\rho = 7820 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Скінченно-елементна розбивка проводилася лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони 1 мм.

Резонансні частоти при кожному виді закріплення та їх відхилення від частот, що відповідають жорсткому закріпленню, у відсотках приведені в таблицях 1 і 2 відповідно.

Таблиця 1

Частоти вільних коливань кругової циліндричної оболонки при різних граничних умовах на одному торці, інший торець вільний

m	n	Власні частоти $f$ , Гц				$\varepsilon_{\text{закріплення}} = \frac{f_c - f_{\text{закріплення}}}{f_c} \times 100\%$		
		$f_c$	$f_{Sc}$	$f_s$	$f_F$	$\varepsilon_{Sc}$	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_F$
1	4	1836	1836	755	716	0,0	58,9	61,0
1	6	2266	2266	2076	2022	0,0	8,4	10,8
1	8	3977	3977	3929	3867	0,0	1,2	2,8
1	10	6318	6318	6299	6231	0,0	0,3	1,4
1	12	9155	9155	9145	9072	0,0	0,1	0,9
2	4	6476	6476	6139	852	0,0	5,2	86,8
2	6	4812	4812	4316	2222	0,0	10,3	53,8
2	8	5302	5302	4990	4092	0,0	5,9	22,8
2	10	7231	7231	7057	6465	0,0	2,4	10,6
2	12	9935	9935	9826	9309	0,0	1,1	6,3

Таблиця 2

Частоти вільних коливань некругової циліндричної оболонки при різних граничних умовах на одному торці, інший торець вільний

m	n	Власні частоти $f$ , Гц				$\varepsilon_{\text{закріплення}} = \frac{f_c - f_{\text{закріплення}}}{f_c} \times 100\%$		
		$f_c$	$f_{Sc}$	$f_s$	$f_F$	$\varepsilon_{Sc}$	$\varepsilon_s$	$\varepsilon_F$
1	4	1712	1712	728	690	0,0	57,5	59,7
1	6	2154	2154	1992	1938	0,0	7,5	10,0
1	8	3849	3849	3794	3732	0,0	1,4	3,0
1	10	6129	6129	6107	6041	0,0	0,4	1,4
1	12	8963	8963	8952	8883	0,0	0,1	0,9
2	4	6159	6159	5821	824	0,0	5,5	86,6
2	6	4488	4488	4046	2137	0,0	9,8	52,4
2	8	4895	4895	4639	3954	0,0	5,2	19,2
2	10	7072	7072	6882	6270	0,0	2,7	11,3
2	12	9748	9748	9631	9112	0,0	1,2	6,5

Аналізуючи дані, наведені в таблиці 1 і 2, можна зробити висновки:

- порядок виникнення форм коливань для кругової та некругової циліндричних оболонок не порушується при одинакових видах закріплення;
- частоти при жорсткому та шарнірному закріпленні торця є одинакові, що пояснюється еквівалентністю граничних умов;
- залежність частоти від виду закріплення торця особливо спостерігається для форм коливань з кількістю півхвиль по контуру  $n = 4$  і  $n = 6$ ;

- мале відхилення частот при різних закріпленах спостерігаються на формах коливань з кількістю півхвиль по контуру  $n=10$  і  $n=12$ ;
- найнижчі частоти спостерігаються при вільних торцях;
- характер зміни частот для обох оболонок одинаковий.

Досліджувався спектр частот трьох консольно закріплених ізотропних циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різних матеріалів: сталь (модуль Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,32$ , густина  $\rho = 7820 \text{ кг}/\text{м}^3$ ), алюміній (модуль Юнга  $E = 71 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,34$ , густина  $\rho = 2710 \text{ кг}/\text{м}^3$ ), мідь (модуль Юнга  $E = 110 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,35$ , густина  $\rho = 8920 \text{ кг}/\text{м}^3$ ). Геометрія оболонок та розбивка скінченними елементами вибиралась така сама, як у випадку вище розглянутої задачі. Отримані частоти приведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Частоти вільних коливань некругових  
циліндричних оболонок з різних матеріалів

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$			$f_{\text{сталь}}$	$f_{\text{сталь}}$
		Сталь	Алюміній	Мідь	$f_{\text{ал.}}$	$f_{\text{мідь}}$
1	4	1712	1676	1150	1,02	1,49
1	6	2155	2113	1456	1,02	1,48
1	8	3849	3776	2605	1,02	1,48
1	10	6131	6015	4150	1,02	1,48
1	12	8962	8793	6068	1,02	1,48
2	4	6160	6025	4131	1,02	1,49
2	6	4488	4394	3018	1,02	1,49
2	8	4896	4797	3302	1,02	1,48
2	10	7073	6938	4785	1,02	1,48
2	12	9748	9564	6600	1,02	1,48

Порядок виникнення форм коливань для оболонок з різних матеріалів є однаковим і не залежить від пружніх характеристик.

Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що частоти вільних коливань при однакових геометричних параметрах оболонок із сталі і алюмінію мають незначну відмінність через невелику відмінність швидкості розповсюдження об'ємного розширення, яка залежить від модуля Юнга і густини матеріалу  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ . Частоти для

оболонок з міді, при ідентичній геометрії, в 1,49 разів менші відповідних частот оболонок із сталі, що пояснюється відношенням відповідних швидкостей поздовжніх хвиль  $\frac{c_{\text{сталь}}}{c_{\text{мідь}}} = 1,49$ .

Розглядалась консольно закріплена циліндрична ізотропна оболонка з еліптичним поперечним перерізом змінної товщини вздовж твірної. Геометрія оболонки обиралась із збереженням висоти та маси відповідно до оболонки сталої товщини, фізико-механічні властивості та розбивка скінченними елементами

вибирались такі самі, як у вище розглянутих задачах. Товщина оболонки змінюється лінійно вздовж твірної від 1 мм до 3 мм. Розглядається два варіанти жорсткого закріплення:

- по торцю товщиною  $d = 1 \text{ мм}$ , інший край вільний;
- по торцю товщиною  $d = 3 \text{ мм}$ , інший край вільний.

Резонансні частоти приведені в таблиці 4 і у вигляді гістограм (рис. 2), де  $d = 2$  – частоти циліндричної оболонки сталої товщини.

Таблиця 4

Частоти вільних коливань некругових циліндричних оболонок сталої та змінної товщини вздовж твірної

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$		
		$d = 1$	$d = 2$	$d = 3$
1	4	1471	1712	2104
1	6	2654	2155	1899
1	8	4281	3849	2866
1	10	6135	6131	4161
1	12	8240	8962	5786
2	4	5128	6160	6994
2	6	4242	4488	4841
2	8	5743	4896	4848
2	10	8361	7073	6632
2	12	10807	9748	8786

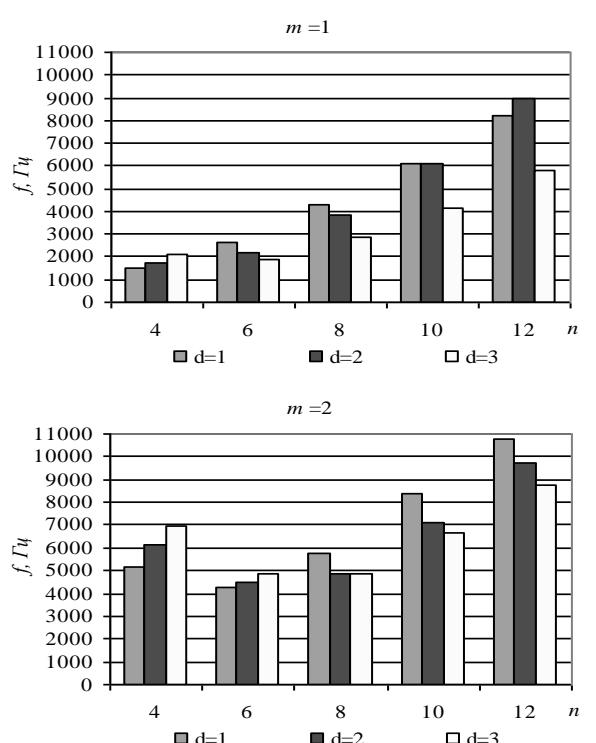


Рис. 2. Гістограми частот оболонок сталої та змінної товщини

Порівняння отриманих результатів для оболонок сталої та змінної товщини вздовж твірної по лінійному закону дає змогу зробити наступні висновки:

- порядок появи форм коливань для розглянутих оболонок не є однаковим;
- частоти оболонки сталої товщини майже на всіх формах коливань знаходяться між частотами оболонок змінної товщини, що дає можливість виводити оболонку з резонансного режиму за рахунок модуляції товщини.

Розглядалися консольно закріплені ізотропні циліндричні оболонки еквівалентної маси з еліптичним поперечним перерізом сталої та змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу. Геометрія оболонки, механічні властивості та розбивка скінченими елементами вибирались такі самі, як у випадку вище розглянутих задач. Товщини оболонок уздовж великої півосі  $d_a$  і вздовж малої півосі  $d_b$  вказані в таблиці 3.12.

Резонансні частоти циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом приведені в таблиці 6 і у вигляді гістограм (рис. 3).

Таблиця 5

Значення товщин вздовж  
великої і малої півосей  
циліндричних оболонок

Вид оболонки	$d_a, \text{мм}$	$d_b, \text{мм}$
сталої товщини	$d_a = d_b$	2
змінної товщини	$d_a > d_b$	3
	$d_a < d_b$	1
		2,73

Таблиця 6

Частоти вільних коливань некругових  
циліндричних оболонок сталої і змінної  
товщини вздовж дуги перерізу

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1565	1712	1801
1	6	1992	2155	2119
1	8	3678	3849	3755
1	10	5829	6131	5896
1	12	8493	8962	8610
2	4	5800	6160	6369
2	6	4456	4488	4386
2	8	4817	4896	4733
2	10	6714	7073	6848
2	12	9245	9748	9374

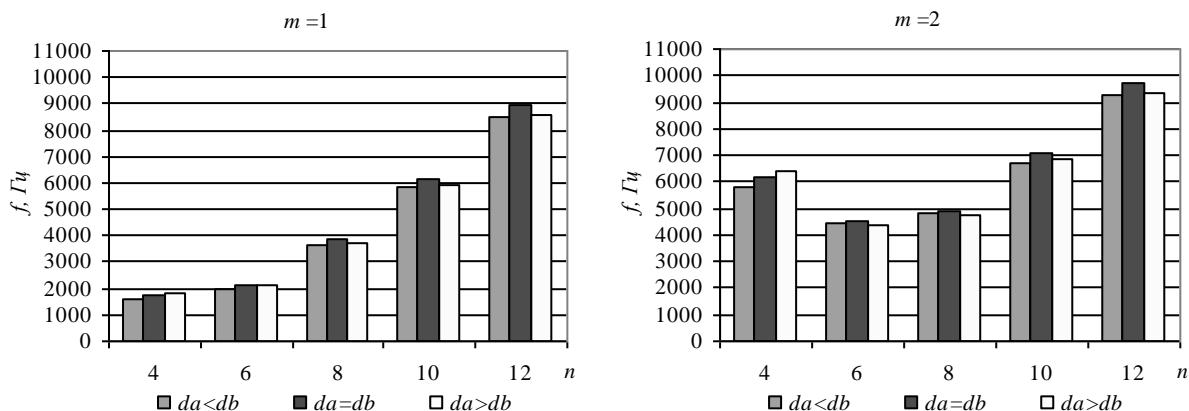


Рис. 3. Гістограми частот вільних коливань некругових циліндричних оболонок  
сталої і змінної товщини.

Порівняння отриманих результатів для оболонок змінної товщини з частотами для циліндричних оболонок сталої товщини еквівалентної маси дає змогу зробити висновки:

- для форм коливань  $m=1, n=4$  і  $m=2, n=4$  при збільшенні товщини вздовж осі  $a$  резонансні частоти зростають і, навпаки, при збільшенні товщини вздовж осі  $b$  – резонансні частоти зменшуються;
- для інших розглянутих форм частота вільних коливань оболонки сталої товщини вища в порівнянні з частотами вільних коливань оболонок змінної товщини, причому із збільшенням  $n$  різниця цих частот зростає.

За допомогою системи Femap побудовано геометрії консольно закріплених оболонок еквівалентної маси висотою  $h=120 \text{ мм}$  у вигляді циліндричних поверхонь еліптичного перерізу з різними значеннями ексцентриситету  $\epsilon$ . В якості матеріалу оболонки вибиралась сталь. Резонансні частоти приведені в таблиці 8 та у вигляді графіків (рис. 4).

Таблиця 8

Частоти вільних коливань циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу при різних значеннях ексцентризитету

$m$	$n$	$f, \text{Гц}$									
		$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,2$	$\varepsilon = 0,3$	$\varepsilon = 0,4$	$\varepsilon = 0,5$	$\varepsilon = 0,6$	$\varepsilon = 0,7$	$\varepsilon = 0,8$	$\varepsilon = 0,9$
1	4	1836	1836	1835	1833	1827	1812	1779	1712	1576	1284
1	6	2266	2266	2265	2263	2258	2245	2216	2154	2023	1727
1	8	3977	3977	3976	3974	3967	3952	3919	3849	3703	3362
1	10	6318	6317	6315	6310	6298	6273	6225	6129	5921	5381
1	12	9155	9155	9154	9151	9143	9123	9075	8963	8677	7934
2	4	6476	6476	6475	6470	6456	6419	6338	6159	5769	4901
2	6	4812	4812	4810	4804	4788	4748	4661	4488	4145	3441
2	8	5302	5302	5300	5293	5271	5219	5109	4895	4486	3661
2	10	7231	7230	7229	7225	7217	7199	7161	7072	6819	5975
2	12	9935	9935	9935	9932	9924	9904	9858	9748	9480	8715

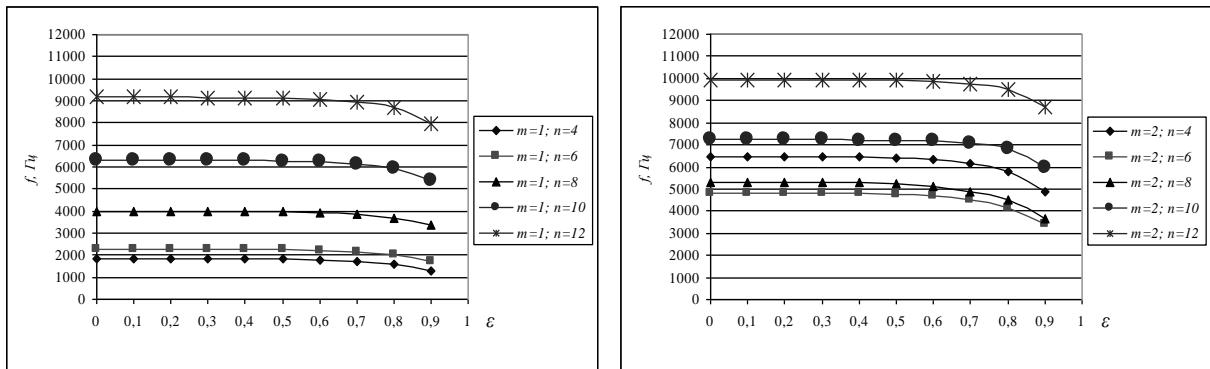


Рис. 4. Графіки залежності частоти вільних коливань від  $\varepsilon$

Аналіз отриманих результатів дає змогу зробити наступні висновки:

- порядок виникнення форм коливань для всіх оболонок зберігається;
- спостерігається зменшення частоти при збільшенні ексцентризитету;
- із збільшенням значення  $\varepsilon$  від 0 до 0,5 залежність при однакових формах частот від ексцентризитету має лінійний характер, відхилення частот еліптичних оболонок від кругової не перевищує 1,5%;
- в діапазоні  $\varepsilon$  від 0,5 до 0,9 залежність при однакових формах частот від ексцентризитету має квадратичний характер спадання;
- на формах при  $m=1, n=4$  спостерігається візуальна мутація форм починаючи із значення ексцентризитету 0,7, а при  $m=2, n=4 - 3 0,4$ .

У четвертому розділі описана методика проведення експерименту та оптична схема установки, а також наведені результати виконаних досліджень.

Для експериментального розв'язання поставлених задач були виготовлені три циліндричні оболонки еквівалентних мас з високолегованої сталі марки 40Х (модуль Юнга  $E = 214 \text{ ГПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,26$ , густина  $\rho = 7820 \text{ кг}/\text{м}^3$ ) методом точіння на станку з ЧПУ. Остаточна обробка здійснювалась на коло-шліфувальному і внутрішньо-шліфувальному станку для забезпечення точності геометричних параметрів.

Тонкостінна кругова циліндрична оболонка розглядалась як ізотропна однорідна

і в точності циліндрична з круговим поперечним перерізом. Оболонка має такі параметрами: висота  $h = 120\text{мм}$ , радіус серединної поверхні  $R_c = 43,547\text{мм}$ , товщина  $d = 2\text{мм}$ , відношення товщини до радіусу серединної поверхні  $d / R_c = 0,046$  (рис. 5).

Тонкостінна некругова циліндрична оболонка сталої товщини розглядалась як ізотропна однорідна і в точності з еліптичним поперечним перерізом, з параметрами: висота  $h = 120\text{мм}$ , велика піввісь  $a = 50,8\text{мм}$ , мала піввісь  $b = 36,295\text{мм}$  (рис. 6).

Тонкостінна некругова циліндрична оболонка змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу має такі параметри: висота  $h = 120\text{мм}$ , велика піввісь серединної поверхні  $a = 50,8\text{мм}$ , мала піввісь серединної поверхні  $b = 36,295\text{мм}$ , товщина вздовж великої півосі  $d_a = 1\text{мм}$ , товщина вздовж малої півосі  $d_b = 2,73\text{мм}$  (рис. 7). Зауважимо, що розміри оболонок обиралися за критерієм збереження відповідних значень висоти та маси.

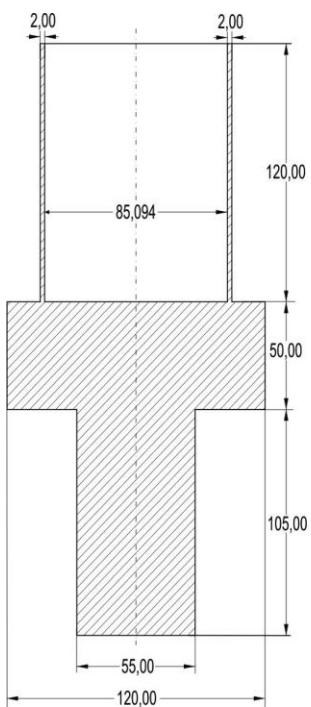


Рис. 5

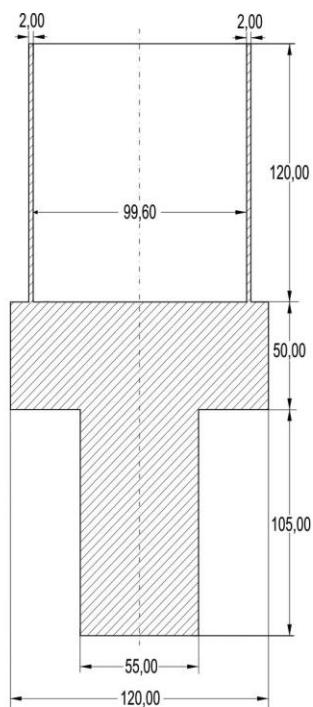


Рис. 6

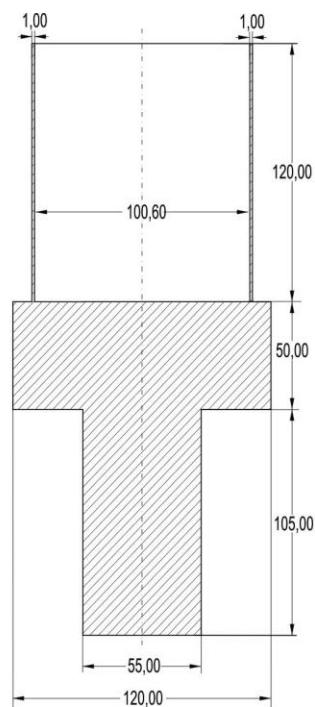


Рис. 7

Оболонка 1 (рис. 8) фіксувалася через масивне тіло 2, яке виточене разом з нею, у затисному пристрої 3 на масивній плиті голографичної установки 4. Таким чином вважається, що граничні умови жорсткого закріплення одного торця

забезпечені, інший торець вільний.

Для визначення частот та форм вільних коливань оболонок методом голограмічної інтерферометрії використовувалася оптична схема голограмічної установки (рис. 9). Досліджувана оболонка (8) жорстко закріплювалась на масивній плиті (4) голографічного стенду. Джерелом когерентного випромінювання є Не-Не лазер ЛГН-222 (1), промінь якого, пройшовши через електрооптичний модулятор МЛ-3 (3) і відбившись від дзеркала (4), ділиться на два промені за допомогою світлоподілювача (6). Відбитий від нього промінь дзеркалом (5) та мікрооб'єктивом (7) формує опорну світлову хвилю, яка освітлює фотопластинку (11). З променя, який пройшов через світлоподілювач, сферичним дзеркалами (10) формується пучок освітлення оболонки, який, відбившись від поверхні досліджуваного об'єкта, дає нам предметну світлову хвилю.

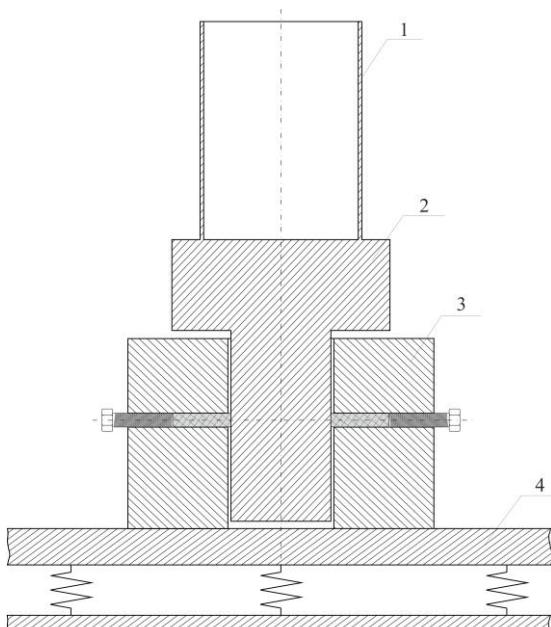


Рис. 8

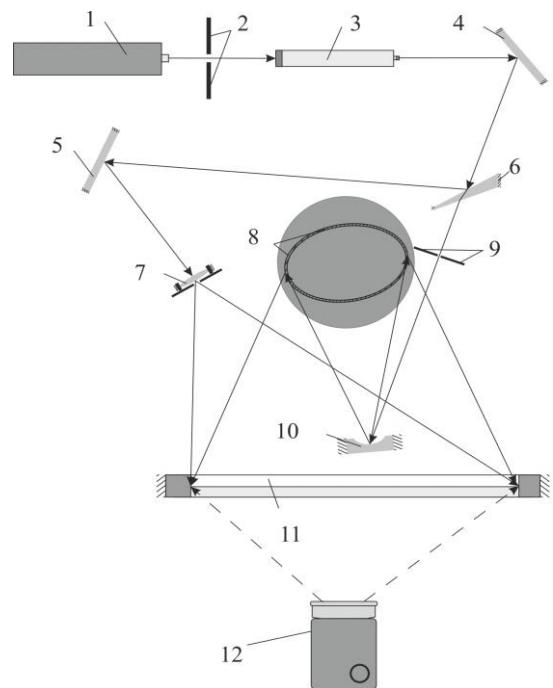


Рис. 9

За допомогою методу голограмічної інтерферометрії були отримані частоти вільних коливань кругової циліндричної оболонки. Порівняння результатів експерименту з результатами отриманими чисельно представлені у вигляді таблиці 9.

Таблиця 9

Порівняння експериментально та чисельно отриманих частот вільних коливань кругової циліндричної оболонки

$n$	$m$	$f_{\text{експ.}}$	$f_{\text{чис.}}$	$\varepsilon, \%$
1	4	1923	1836	4,5
1	6	2352	2266	3,7
1	8	4210	3977	5,5
1	10	6653	6318	5,0
2	4	6584	6476	1,6
2	6	4873	4812	1,2
2	8	5361	5302	1,1
2	10	7254	7231	0,3

Форма коливань  $m=1$ ,  $n=4$  отримана експериментально та чисельно представлена на рис. 10, форма  $m=1$ ,  $n=6$  – на рис. 11.

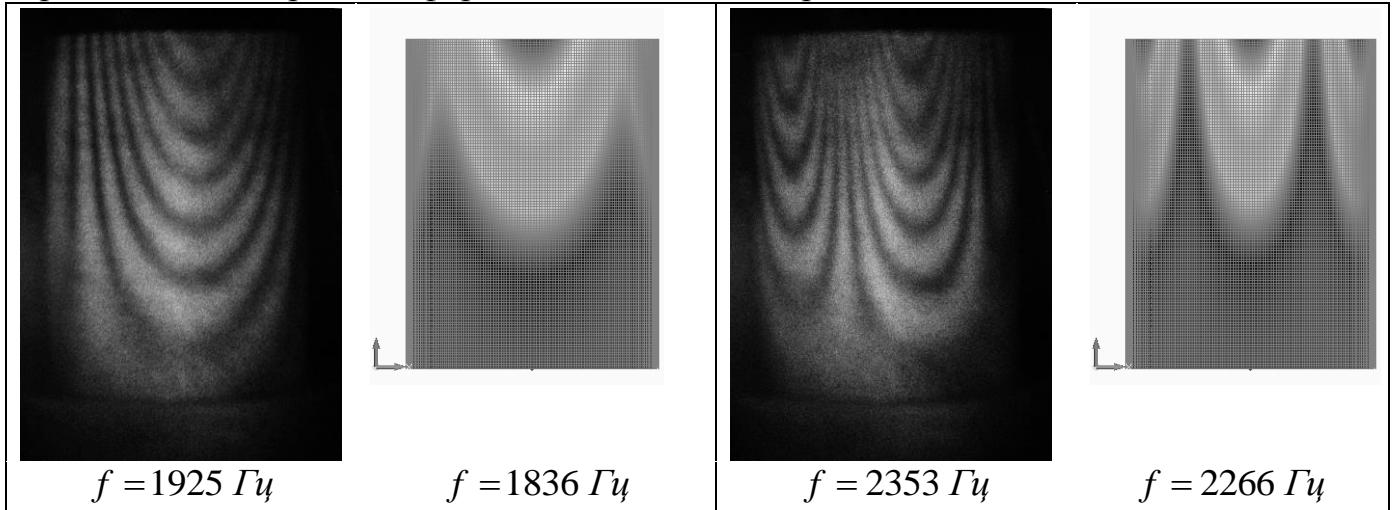


Рис. 10.  $m=1$ ,  $n=4$

Рис. 11.  $m=1$ ,  $n=6$

Отримані частоти вільних коливань циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу сталої товщини. Порівняння результатів експерименту з результатами отриманими чисельно представлені у вигляді ї таблиці 10.

Таблиця 10

Порівняння експериментально та чисельно отриманих частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки сталої товщини

$m$	$n$	$f_{\text{експ.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{чис.}}, \text{Гц}$	$\varepsilon, \%$
1	4	1723	1712	0,6
1	6	2306	2161	6,3
1	8	4097	3860	5,8
1	10	6519	6154	5,6
1	12	9493	8978	5,4
2	6	4782	4498	5,9
2	8	5197	4911	5,5

Форма коливань  $m=2$ ,  $n=6$  отримана експериментально та чисельно представлена на рис. 12, форма  $m=2$ ,  $n=8$  – на рис. 13.

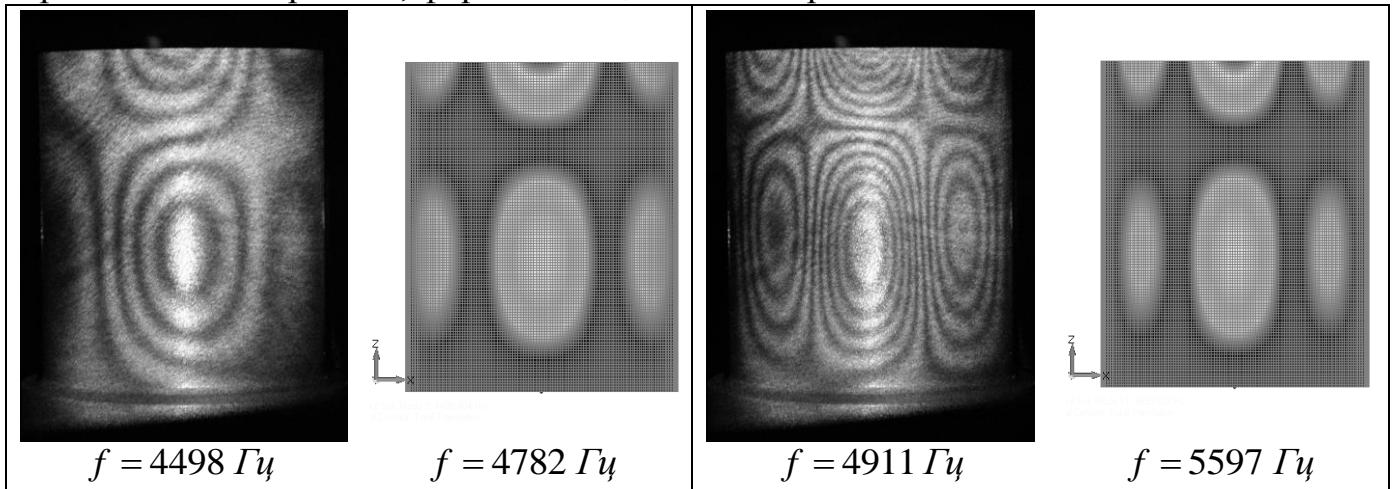


Рис. 12.  $m=2$ ,  $n=6$

Рис. 13.  $m=2$ ,  $n=8$

Отримані частоти вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини вздовж дуги контуру поперечного перерізу. Порівняння результатів експерименту з результатами отриманими чисельно представлені у вигляді ї табліці 11.

Таблиця 11

Порівняння експериментально та чисельно отриманих частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини вздовж дуги перерізу

$m$	$n$	$f_{\text{експ.}}, \text{Гц}$	$f_{\text{чис.}}, \text{Гц}$	$\varepsilon, \%$
1	4	1631	1565	4,0
1	6	2149	1992	7,3
1	8	3852	3678	4,5
1	10	5980	5829	2,5
2	4	5891	5800	1,5
2	6	4678	4456	4,7
2	8	5427	5117	5,7
2	10	7182	6714	6,5

Форма коливань  $m=3, n=18$  отримана експериментально та чисельно представлена на рис. 14, форма  $m=6, n=12$  – на рис. 15.

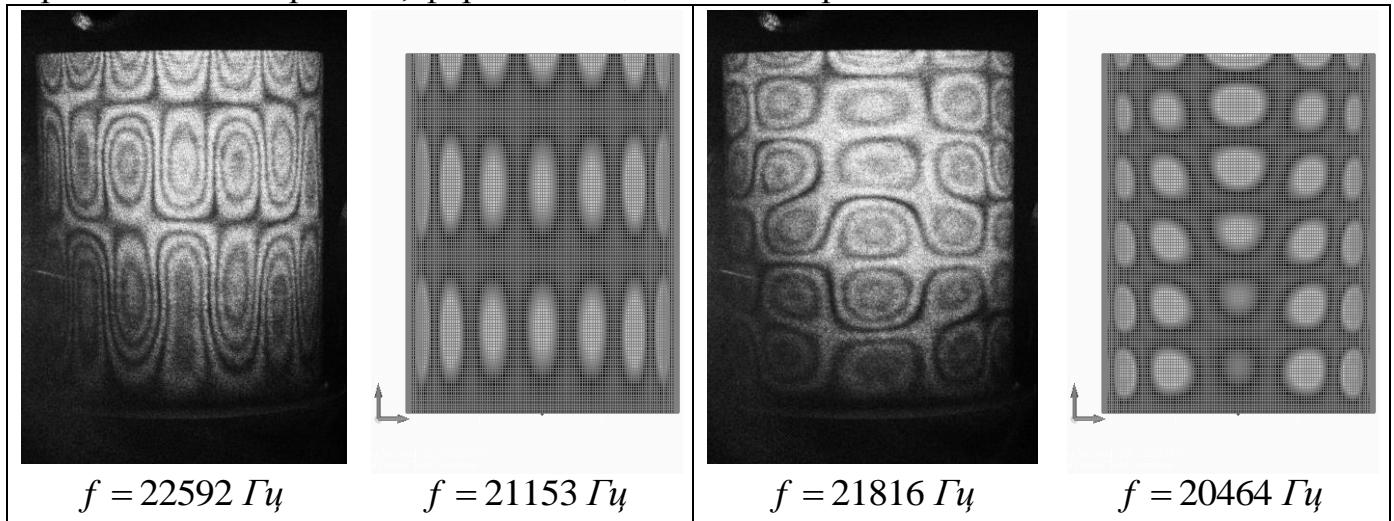


Рис. 14.  $m=3, n=18$

Рис. 15.  $m=6, n=12$

Отримані чисельно та експериментально симетричні та несиметричні форми вільних коливань для всіх розглянутих оболонок. Як приклад представлена перша форма  $m=1, m=4$  для некругової еліптичної оболонки змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу (рис. 16).

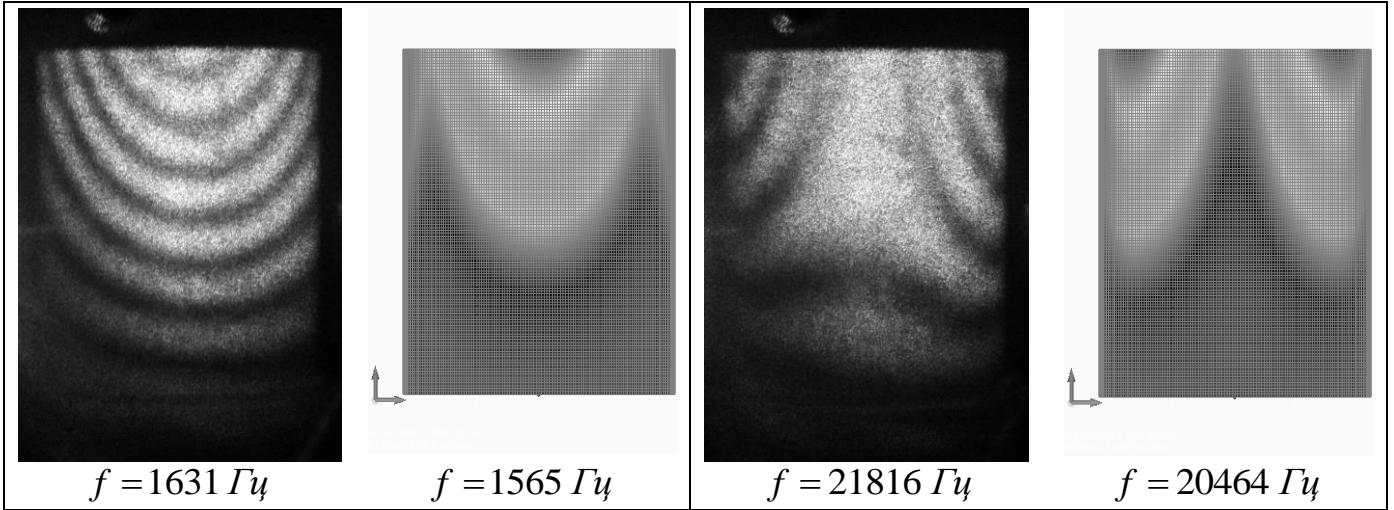


Рис. 16.  $m=1, m=4$

Результати порівняння експериментально отриманих частот консольних циліндрических оболонок сталої та змінної товщини представлені у вигляді таблиці 12 та гістограми (рис. 17).

Таблиця 12

Частоти вільних коливань  
некругових циліндрических оболонок  
сталої і змінної товщини

$m$	$n$	$f_{\text{експ.}}, \text{Гц}$	
		Сталої товщини	Змінної товщини
1	4	1723	1565
1	6	2306	1992
1	8	4097	3678
1	10	6519	5829
2	6	4782	4456
2	8	5197	5117

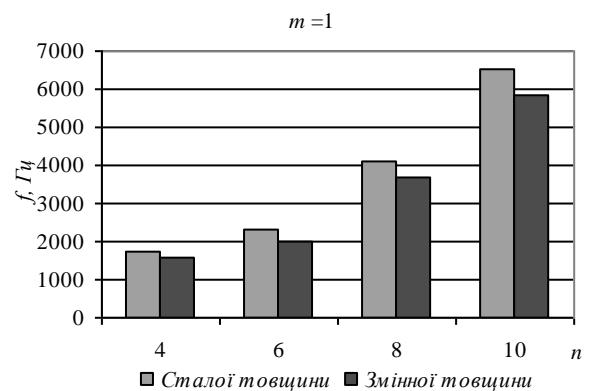


Рис. 17. Частоти вільних коливань оболонок  
сталої і змінної товщини при  $m=1$

Отримані експериментально частоти вільних коливань циліндрических оболонок методом стробоголографічної інтерферометрії дають можливість підтвердити достовірність чисельних розрахунків методом скінченних елементів. Спостерігаються малі відхилення між експериментально визначеними частотами та частотами, розрахованими чисельно на відповідних формах коливань, які не перевищують 8% для всіх досліджуваних оболонок. Порядок появи форм коливань при чисельних розрахунках та експерименті одинаковий. Експериментально підтверджується наявність симетрических та несиметрических форм, які краще спостерігаються для некругових циліндрических оболонок.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено ефективний чисельно-експериментальний підхід до розв'язання задачі про визначення частот та форм вільних коливань

некругових циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різними геометричними та механічними параметрами при різних граничних умовах. Проведено аналіз достовірності застосування запропонованого чисельного методу на тестових задачах за допомогою програмного комплексу Femap.

При цьому отримані такі конкретні результати:

1. На основі розрахунків вільних коливань некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом для випадку декількох ізотропних матеріалів отримано частотні коефіцієнти, які визначають залежність значень частот вільних коливань оболонки від механічних властивостей матеріалу і дають можливість з високим ступенем точності визначати частоти відповідної форми коливань оболонок з довільного ізотропного матеріалу при однакових геометричних параметрах та граничних умовах.
2. Встановлені залежності вільних коливань циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу від характеру зміни товщини дають можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для уникнення резонансного режиму за рахунок модуляції зміни товщини оболонки.
3. Виявлені залежності вільних коливань некругових циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом від значення ексцентризитету дають можливість визначати коефіцієнти частотного переходу від кругової оболонки до еліптичної при збереженні маси та граничних умов, завдяки цьому можна прогнозувати частоти оболонок будь-якої еліптичності за відомими частотами кругової оболонки.
4. Результати експериментальних досліджень вільних коливань некругових циліндричних оболонок сталої та змінної товщини добре узгоджуються з чисельними розрахунками, що свідчить про ефективність застосування обох підходів.
5. Реалізований у роботі чисельно-експериментальний підхід дає можливість досліджувати динамічні характеристики оболонкових конструкцій інших конфігурацій і може бути використаний для оцінки точності оболонкових моделей та інших чисельних підходів, а також при аналізі поведінки конкретних тонкостінних конструктивних елементів.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Будак В.Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Математика. Механіка». – 2014. – 32, №2. – С. 32-37.
2. Будак В.Д. Вплив ексцентризитету еліптичної оболонки на розподіл її динамічних характеристик / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Фізико-математичні науки». – 2015. – 2. – С. 23-28.
3. Будак В.Д. Исследование свободных колебаний цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины с помощью метода голографической интерферометрии / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, В.В. Хоришко, М.Ю. Борисенко // Прикладная механика. –2014. – 50, №1 – С. 101-109.

4. Будак В.Д. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 1. – С. 145-152.

5. Будак В.Д. Про вільні коливання циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу при різних граничних умовах / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук // Вісник Запорізького національного університету, серія фізико-математичні науки. – 2015. №2. С. 20-28.

6. Борисенко М.Ю. Чисельне визначення власних частот некругових циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різних матеріалів / М.Ю. Борисенко // Тези доповіді Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми механіки та фізико-хімії конденсованого стану речовини» 17-19 вересня 2015., – Миколаїв, 2015. – С. 38.

7. Борисенко М.Ю. Експериментальне визначення власних частот тонкостінних циліндричних оболонок кругового та некругового поперечних перерізів / М.Ю. Борисенко // Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2015», 14-17 квітня 2015р., – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2015. – С. 19.

8. Будак В.Д. Визначення резонансних частот тонких оболонок постійної та змінної товщини методом стробоголографічної інтерферометрії / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, С.В. Пузирьов, М.Ю. Борисенко // Тези доповідей XIII Всеукраїнської науково-методичної конференції «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі», 15-17 вересня 2011р., – Миколаїв, 2011. – С. 6.

9. Будак В.Д. Влияние изменения толщины эллиптической оболочки на распределение ее динамических характеристик / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Тези доповіді Міжнародної наукової конференції «Математичні проблеми технічної механіки – 2014», 14-17 квітня 2014р., – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2014. – С. 14.

10. Будак В.Д. Експериментальне визначення власних частот тонкостінної оболонки з некруговим поперечним перерізом постійної товщини / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.П. Пригода, В.В. Хоришко // Тези доповіді XIV Всеукраїнської науково-методичної конференції присвяченій 100-річчю з дня заснування МНУ ім. В.О. Сухомлинського «Сучасні проблеми фізико-математичних наук та підготовка фахівців у цій галузі», 12-14 вересня 2013р., – Миколаїв, 2013. – С. 5.

11. Будак В.Д. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов / В.Д. Будак, А.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, Е.В. Бойчук // Тези доповіді VII Міжнародної наукової конференції, присвяченої 90-річчю від дня народження академіка НАН України Олександра Сергійовича Космодаміанського, 11-14 червня 2013р., – Донецьк – Мелекіно, 2013. – С. 75.

12. Будак В.Д. Теоретико-експериментальне дослідження оболонок постійної та змінної товщини еквівалентної маси / В.Д. Будак, О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко // Тези доповідей Міжнародної наукової конференції «Математичні

проблеми технічної механіки – 2011», 13-15 квітня 2011р., – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2011. – С. 68.

## АНОТАЦІЯ

**Борисенко М.Ю. Визначення динамічних характеристик вільних коливань циліндричних оболонок довільного перерізу чисельно-експериментальними методами.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв, 2015.

Дисертація присвячена розробці ефективного чисельно-експериментального підходу до розв'язання задачі про визначення частот та форм вільних коливань некругових циліндричних оболонок еліптичного перерізу з різними геометричними та механічними параметрами при різних граничних умовах.

На основі розробленого підходу проведено розрахунки вільних коливань циліндричних оболонок еліптичного поперечного перерізу з різним характером розподілу товщин. На основі проведених чисельно-експериментальних досліджень отримані залежності частот та форм коливань від форми поперечного перерізу, характеру зміни товщини, граничних умов та механічних властивостей матеріалу, що є актуальною науковою проблемою сучасної механіки деформівного твердого тіла.

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, стробоголографічна інтерферометрія, кругова циліндрична оболонка, некругова циліндрична оболонка, частота та форма вільних коливань.

## АННОТАЦИЯ

**Борисенко М.Ю. Определение динамических характеристик свободных колебаний цилиндрических оболочек произвольного сечения численно-экспериментальными методами.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Николаевский национальный университет им. В.А. Сухомлинского, Николаев, 2015.

Диссертация посвящена разработке эффективного численно-экспериментального подхода к решению задачи на определение частот и форм свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек эллиптического сечения с различными геометрическими и механическими параметрами при разных граничных условиях.

На основе разработанного подхода проведены расчеты динамических характеристик свободных колебаний цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения с различным характером распределения толщины. На основе проведенных численно-экспериментальных исследований получены зависимости

частот и форм колебаний от вида поперечного сечения, характера изменения толщины, граничных условий и механических свойств материала, что является актуальной научной проблемой современной механики деформируемого твердого тела.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, стробоголографическая интерферометрия, круговая цилиндрическая оболочка, некруговая цилиндрическая оболочка, частота и форма свободных колебаний.

## SUMMARY

**Borisenko M.Yu. Determination of arbitrary cross-section cylindrical shells free oscillations dynamic characteristics using numerical-experimental methods.** – Manuscript.

Thesis for candidate of physical and mathematical sciences scientific degree, specialty 01.02.04 – mechanics of deformable solids. – S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, V.O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv, 2015.

Dissertation is devoted to the development of an effective numerical and experimental approach to the problem of determining the vibration frequencies and modes of non-circular cylindrical shells of elliptical cross-section with different geometrical and mechanical parameters under various boundary conditions.

The shells as a cylindrical surface with elliptic cross-section with different character thickness distribution free oscillations dynamic characteristics were calculated based on the developed approach. On the basis of numerical and experimental studies were obtained the dependences of frequencies and mode shapes of the type of cross-sectional nature changes in thickness of the boundary conditions and mechanical properties of the material, which is an actual scientific problem of modern solid mechanics.

**Keywords:** finite element method, strobogolografic interferometry, circular cylindrical shell, non-circular cylindrical shell, frequency and form of free vibrations.