

ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТРАНСПОРТНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА  
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

РОЖОК ЛІЛІЯ СТЕПАНІВНА

УДК 539.3

**ДИСЕРТАЦІЯ**

ПРОСТОРОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ  
ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА СТРУКТУРИ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,  
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Л.С. Рожок

Науковий консультант: Григоренко Ярослав Михайлович, академік НАН  
України, доктор технічних наук, професор

Київ 2019

## АНОТАЦІЯ

*Рожок Л.С.* Просторові задачі теорії пружності для циліндричних оболонок складної геометрії та структури. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 "Механіка деформівного твердого тіла". – Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Національний транспортний університет МОН України, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, 2019.

Дисертація присвячена розробці та удосконаленню методів дослідження напружено-деформованого стану циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури за певних граничних умов на торцях та ізотропних суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців при дії поверхневого навантаження в просторовій постановці.

Запропонована спільна методика базується на застосуванні ефективних аналітичних методів для зведення вихідної крайової задачі, що описується диференціальними рівняннями в частинних похідних, до одномірної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При цьому, для циліндричних тіл першого типу отримав розвиток метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та вперше застосовано метод сплайн-функцій для циліндричних тіл другого типу з розкриттям невизначеності в геометрично особливій точці.

При розв'язуванні задач лінійної просторової теорії пружності для некругових нетонких анізотропних циліндричних оболонок складної форми поперечного перерізу та неоднорідної по товщині структури, для зведення тривимірної крайової задачі до двовимірної використовується точний аналітичний метод відокремлення змінних в напрямку твірної оболонки. Для відокремлення змінних в напрямку напрямної, в розв'язувальній системі

диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, записують доповняльні функції замість добутків розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від координат напрямної та товщини. Формально, отримана таким чином система рівнянь, дозволяє відокремлення змінних в напрямку напрямної шляхом розвинення розв'язувальних, доповняльних функцій та компонент навантаження у звичайні ряди Фур'є, після чого, двовимірна крайова задача зводиться до одномірної, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь більш високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для інтегрування отриманої системи рівнянь використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. При цьому, для обчислення амплітудних значень доповняльних функцій, використовується їх апроксимація дискретними рядами Фур'є.

При розв'язуванні осесиметричної задачі теорії пружності про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців, для зведення двовимірної краєвої задачі до одномірної використовується метод сплайн-функцій; при цьому розкривається невизначеність у геометрично особливій точці. Отримана одномірна крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Розроблено алгоритми, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах для визначення напруженого-деформованого стану, викликаного прикладеним поверхневим навантаженням для циліндричних тіл двох типів. Створені обчислювальні комплекси дозволяють проводити розрахунки в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів розглядуваних тіл, виду прикладеного поверхневого навантаження та способу закріплення торців для суцільних ізотропних циліндрів.

На основі розробленого підходу розв'язано ряд нових класів просторових задач лінійної теорії пружності про напруженено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури при дії рівномірного та локального навантаження, а також для суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців.

Зокрема, розв'язано задачу про напруженено-деформований стан циліндричних оболонок з двопараметричним відхиленням поперечного перерізу від кругової форми у вигляді гофрованих еліпсів, при цьому знайдено рівняння гладкої кривої, що дозволяє отримати чотири форми поперечного перерізу (кругову, еліптичну, кругову гофровану та у вигляді гофрованих еліпсів) і проаналізувати переваги кожної з форм; досліджено напруженено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих (увігнутих) напівгофрів, що описуються рівняннями скороченої епіциколоїди (гіпоциколоїди), в залежності від зміни кривизни, викликаної варіаціями кількості напівгофрів та їх амплітуди; розв'язано задачу про напруженено-деформований стан циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом, виготовлених з ортотропного та трансверсально-ізотропного матеріалу, а також шаруватих нетонких циліндричних оболонок в залежності від характеристик матеріалу середнього шару та геометричних параметрів поперечного перерізу поверхні відліку; проведено аналіз впливу локального навантаження на характеристики напруженено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури, при цьому, досліджено вплив на розподіл полів напружень та переміщень як інтервалу, так і способу (на двох та чотирьох ділянках) прикладання локального навантаження.

Проведено дослідження достовірності та точності отримуваних розв'язків при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації, дискретних рядів Фур'є для циліндричних тіл первого типу та спайн-апроксимації для циліндричних тіл другого типу.

Проведено аналіз результатів розв'язування задач теорії оболонок з еліптичним поперечним перерізом, отриманих на основі уточненої моделі Тимошенка, що базується на гіпотезі прямої лінії та в просторовій постановці на основі розробленої методики для циліндричних тіл первого типу. Було з'ясовано, що при застосуванні уточнених моделей необхідно враховувати не тільки товщину оболонок, але і відношення товщини до радіуса кривизни

поверхні відліку в поперечному перерізі, оцінюючи виникаючу похибку в різних перерізах.

На основі отриманих розв'язків встановлено характерні закономірності розподілу полів переміщень та напружень, викликаних прикладеним поверхневим навантаженням для циліндричних тіл двох типів та виявлено нові ефекти, що пов'язані з геометрією та структурою нетонких циліндричних оболонок, зокрема досліджено суперпозицію еліптичної та гофрованої форм поперечних перерізів для оболонок виготовлених з ізотропного, ортотропного матеріалу та шаруватих оболонок з ортотропним середнім шаром симетричної будови та надано інженерні рекомендації щодо можливості застосування спрощених схем: для деяких значень амплітуди гофрування еліптичних гофрованих циліндричних оболонок, виготовлених з ізотропного матеріалу, знайдено відповідні значення степеня еліптичності за яких при розрахунках на міцність оболонок даного класу, можна захтувати еліптичністю.

Крім того, розроблену методику для циліндричних тіл первого типу, що базується на використанні апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, було застосовано для розв'язання задачі про напружений стан цистерни некругового поперечного перерізу, що знаходиться під дією внутрішнього тиску без врахування технологічних особливостей.

Розглянуто еліптичні форми поперечного перерізу обичайки цистерни при збереженні горизонтальних габаритів кругової форми з метою оптимізації розмірів цистерни за висотою, при цьому довжину цистерни обрано таким чином, щоб загальний об'єм кругової та еліптичної цистерн збігався.

Проведено розрахунки напруженого стану тришарової цистерни із сталеною обичайкою, теплоізоляцією та нержавіючою обшивкою.

Розв'язано осесиметричну задачу про напружений стан ізотропних суцільних циліндрів за двох способів закріплення торців: жорсткого закріплення та шарнірного обпирання.

**Ключові слова:** просторові задачі, нетонкі циліндричні оболонки, напруженео-деформований стан, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, двопараметричне відхилення від кругової форми, з'єднані напівгофри, ортотропні матеріали, локальне навантаження, суцільні цилінди, метод сплайн-функцій, суперпозиція форм поперечних перерізів.

### Список публікацій здобувача

1. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (2), 67 – 73 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section. Int. App. Mech. **40** (2), 169 – 175 (2004))
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (6), 99 – 106 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Orthotropic Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **40** (6), 679–685 (2004))
3. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние. Прикл. механика. **40** (9), 87 – 93 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of corrugation frequency and amplitude on the stress state of hollow elliptic cylinders. Int. App. Mech. **40** (9), 1012–1017 (2004))
4. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Прикл. механика. **41** (3), 62 – 69 (2005) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **41** (3), 277 –282 (2005))
5. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання краївих задач статики пружних тіл неканонічної форми. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **48** (2), 79 – 100 (2005)

6. Рожок Л.С.: Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів. Доповіді НАН України. (7), 56 – 59 (2006)
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. J. Eng. Math. **54**, 145–157 (2006)
8. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **42** (6), 24 – 31 (2006) (Grigorenko Ya.M., Grigorenko A. Ya., Rozhok L.S. Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. Int. App. Mech. **42** (6), 629 – 635 (2006))
9. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках. Прикл. механика. **42** (8), 44 – 57 (2006) (Grigorenko Ya.M., Urusova G. P., Rozhok L.S. Stress analysis of nonthin elliptic cylindrical shells in refined and spatial formulations . Int. App. Mech. **42** (8), 886 – 894 (2006))
10. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Анализ влияния кривизны на напряженное состояние полых эллиптических цилиндров по двум моделям. Вісник Донецького ун-ту. Сер А: Природн. науки. (1), 55 – 58 (2006)
11. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **42** (12), 87 – 96 (2006) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders. Int. App. Mech. **42** (12), 1389 – 1397 (2006))
12. Рожок Л.С.: Шаруваті порожнисті цилінди з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (12), 70 – 75 (2007)
13. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43** (12), 82 – 90 (2007) (Grigorenko Ya.M., Rozhok

- L.S. Influence of orthotropy parameters on the stress state of hollow cylinders with elliptic cross-section. Int. App. Mech. **43** (12), 1372 – 1379 (2007))
14. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (3), 90 – 94 (2009)
15. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **46** (3), 15 – 24 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders. Int. App. Mech. **46** (3), 255 – 263 (2010))
16. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с некруговым поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **46** (7), 3 – 10 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of curvature on the stress state of hollow cylinders with complex-shaped noncircular cross-section. Int. App. Mech. **46** (7), 737 – 743 (2010))
17. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Доповіді НАН України. (3), 57 – 62 (2011)
18. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Расчет напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **47** (6), 48 – 56 (2011) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. Int. App. Mech. **47** (6), 645 – 652 (2011))
19. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. – мех. поля. **55** (4), 125 – 130 (2012) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. J. Math. Sci. 198 (2), 158 – 165 (2014))

20. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Дослідження напруженого стану некругових порожнистих циліндрів складної форми різної кривизни. Мат. методи та фіз.–мех. поля. **56** (3), 122 – 128 (2013) (Hryhorenko Ya.M., Rozhok L.S. Investigation of the stress state of noncircular hollow cylinders of complex shapes with different curvatures J. Math. Sci. 205 (5), 635 – 643 (2015))
21. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **50** (2), 3 – 26 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **50** (2), 105 – 127 (2014))
22. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semi-corrugations. Мат. методи та фіз.–мех. поля. **57** (4), 109 – 120 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semicorrugations. J. Math. Sci. 220 (2), 133 – 148 (2017))
23. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз.–мех. поля. **58** (4), 70 – 77 (2015) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 228 (1), 80 – 89 (2018))
24. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (1), 78 – 85 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of Curvature on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (1), 49 – 55 (2016))
25. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с выпуклым гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (2), 55 – 63 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Orthotropy on the Stress State of

Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (2), 147 – 154 (2016))

26. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напряженное состояние полых цилиндров с вогнутым гофрированным поперечным сечением разной кривизны. Прикл. механика. **52** (6), 26 – 33 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders with Different Cross-Sectional Curvature. Int. App. Mech. **52** (6), 581 – 586 (2016))
27. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив зміни параметрів ортотропії на напружений стан порожністих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **59** (1), 132 – 140 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of the Variations of Orthotropy Parameters on the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 228 (3), 268 – 279 (2018))
28. Рожок Л.С.: Рівновага порожністих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. (1), 21 – 24 (2017)
29. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Влияние изменения параметров кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров. Прикл. механика. **54** (3), 27 – 35 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **54** (3), 266 – 274 (2018))
30. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Слоистые неоднородные полые цилиндры с вогнутым гофрированным поперечным сечением под действием внутреннего давления. Прикл. механика. **54** (5), 47 – 54 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Layered Inhomogeneous Hollow Cylinders with Concave Corrugations Under Internal Pressure. Int. App. Mech. **54** (5), 531 – 539 (2018))
31. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є при чисельному розв'язуванні краївих задач. В: Тези доповідей XI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 56 (2004)

32. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Моделювання та дослідження напруженого стану ортотропних циліндрів з некруговим поперечним перерізом. В: Тези доповідей міжнародної конференції "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем", Київ, 272 (2005)
33. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Некругові порожнисті циліндри при дії локального навантаження. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки – 2006", Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 43 (2006)
34. Grigirenko A.Ya., Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Mechanical Behavior of Elastic Cylinder with Various Cross-Section. In: 77 Annual Meeting of the Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, 128 (2006)
35. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів при дії локального навантаження. В: LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету, Київ, 384 – 385 (2008)
36. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Application of discrete Fourier series in the boundary value problems of plates and shells. In: Shell Structures: Theory and Applications (Vol. 2). – Proceedings of the 9th SSTA Conference, Jurata, Poland, 14 – 16 (2009)
37. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з некруговим поперечним перерізом в залежності від зміни кривизни. В: LXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2010)
38. Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних шаруватих порожнистих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. В: LXVII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2011)
39. Рожок Л.С.: Дослідження рівноваги пружних порожнистих неоднорідних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів. В: LXX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів,

студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2014)

40. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 35 – 39 (2016)
41. Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 92 – 95 (2017)
42. Рожок Л.С.: Вплив параметрів кривизни на напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. В: LXXIII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 472 (2017)
43. Рожок Л.С.: Вплив форми поперечного перерізу на напружений стан трансверсально-ізотропних некругових порожнистих циліндрів. В: Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Київ, 131 (2017)
44. Рожок Л.С.: Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 125 – 128 (2018)
45. Рожок Л.С.: Напружений стан пружних порожнистих некругових циліндрів в залежності від їх геометричних та механічних параметрів. В: LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 482 (2018)
46. Рожок Л.С.: Моделювання напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів при дії локального навантаження. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. Т. 1, Львів, 123 – 124 (2018)

47. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Discrete Fourier-series method in problems of bending variable-thickness rectangular plates. *J. Eng. Math.* **46** (3–4), 269–280 (2003)
48. Рожок Л.С.: Напружений стан тришаруватих еліптичних циліндрів. *Вісник НТУ* (9), 420 – 424 (2004)
49. Рожок Л.С.: Трансверсально-ізотропні порожнисті циліндири під дією локального навантаження. *Вісник НТУ* (11), 163 – 166 (2006)
50. Рожок Л.С.: Рівновага пружних циліндрів канонічної та неканонічної форми поперечного перерізу. *Вісник НТУ* (13), 279 – 281 (2006)
51. Рожок Л.С.: Рівновага неоднорідних гофрованих в поперечному перерізі циліндрів при дії локального навантаження. *Вісник НТУ* (17), 346 – 349 (2008)
52. Рожок Л.С.: Визначення напруженого стану порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. *Вісник НТУ* (18), 240 – 243 (2009)
53. Рожок Л.С.: Напружений стан ортотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі. *Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2* (21), 358 – 361 (2010)
54. Рожок Л.С.: Рівновага шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі, циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. *Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2* (26), 457 – 461 (2012)

## SUMMARY

Rozhok L.S. Three-dimensional problems of elasticity theory for cylindrical shells of complex shape and structure. – Manuscript.

Thesis of candidate for a degree of doctor of sciences in phisics and mathematics, speciality 01.02.04 "Mechanics of deformable solid". – S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, National transport university, MEC of Ukraine, S.P. Timoshenko Institute of mechanics, NAS of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is devoted to development and improvement of the methods for investigating the stressed state of cylindrical bodies of two types – non-slim

cylindrical shells of complex geometry and structure at specific boundary conditions on the ends, and isotropic continuous cylinders at various fixing of the ends under action of surface load, is 3D formulation.

The common technique is proposed that is based on the use of effective analytical methods for transformation of the initial boundary problem, which is formulated in differential equations in partial derivatives, into a one-dimensional boundary problem for a system of ordinary differential equations with constant coefficients, which is solved by a stable numerical method of discrete orthogonalization. For a cylindrical body of the first type, the method of function approximation with discrete Fourier series was developed, and for the first time the method of spline-functions was applied for a cylindrical body of the second type, with evaluation of indeterminate form in the geometrically singular point.

The precise analytical method of separated variables in the direction of the shell generatrix is utilized for solving of problems of linear spatial elasticity theory for noncircular non-slim anisotropic cylindrical shells of complex cross section shape and inhomogeneous thickness, for reducing three-dimensional boundary problem to a two-dimensional one. For separating variables in the generatrix dimension, complementary functions are used in the general system of equations in partial derivatives instead of products of the variables and coefficients, which depends on the generatrix coordinates and the thickness. Formally, the obtained equation system allows separating variables by expanding the complementary functions and stresses into Fourier series. Then the two-dimensional boundary problem is reduced into one-dimensional, which is formulated as a system of ordinary differential equations of a higher order with constant coefficients. For integrating the obtained system, a stable numerical method of discrete orthogonalization is used. To calculate the amplitudes of complementary functions, they are approximated with Fourier series.

For solving an axisymmetrical problem of the elasticity theory on the stress state of continuous isotropic cylinder at various methods of the ends fixing, the spline-functions method is utilized for reducing the two-dimensional problem to a one-dimensional one. The indeterminate form in the geometrically singular point is

evaluated. The obtained one-dimensional system is solved with stable numerical method of discrete orthogonalization.

There were developed problem-oriented algorithms and implemented in the software for determination of stressed state due to applied surface load for cylindrical bodies of two types. The software allows making calculations in a wide range of geometrical and mechanical parameters of bodies under consideration, the type of applied load and the method of the ends fixing of continuous isotropic cylinders.

With use of the developed technique, there were found solutions to new 3D problems of static linear elasticity theory on the stressed state of non-slim cylindrical shells of complex shape and structure under homogeneous and local loads, as well as for continuous isotropic cylinders at various typed of the ends fixing.

Particularly, there was solved the problem about the stress state of cylindrical shells with two-parameter deviation of the cross section from a circular shape in the form of corrugated ellipses, was found the equation of a smooth curve that allows obtaining four shapes of the cross section; there were studied the stress states of non-slim cylindrical shells with noncircular cross section made of orthotropic and transversally isotropic materials, as well as layered non-slim cylindrical shells in dependence on the properties of the middle layer and geometrical parameters of the reference surface; there was analyzed the influence of local load on the characteristics of the stress state of non-slim cylindrical shells of complex shape and structure, and the influence on the stress and displacement fields of the spacing and method (on two and four locations) of the loading.

There were studied credibility and correctness of the obtained solutions at the use of the numerical method of discrete orthogonalization, Fourier series for the cylindrical bodies of the first type and the spline approximation for the cylindrical bodies of the second type.

The analysis was performed for the solutions of problems for shells with elliptic cross section, obtained on the basis of the improved Timoshenko's model that based on the hypothesis of a straight line, and on the basis of the developed method for cylindrical bodies of the first type in two-dimensional formulation. It was revealed

that for utilizing the improved models it is necessary to take into account not only the thickness but also the ratio of thickness to the curvature radius of the reference surface in the cross section.

On the basis of the obtained solutions, it was found the typical distributions of the stress and displacement fields due to surface loads for cylindrical bodies of two types, and revealed new effects due to geometry and structure of non-slim cylindrical shells. Particularly, there was studied the superposition of elliptic and corrugated shapes of cross sections for shells made of isotropic, orthotropic materials and for layered shells with orthotropic middle layer with symmetric structure, and formulated recommendations about possibility of utilization of simplified schemes – for particular values of the corrugation amplitude of elliptic shells made of isotropic material found the corresponded values of the corrugation ratio at which the ellipticity can be neglected for durability calculations.

As well, the developed technique for cylindrical bodies of the first type was applied for solving the problem on the stress state of a tank with noncircular cross section under action of internal pressure without account for technological details.

There were studied elliptic shapes of the tank shell at constant horizontal dimension of the circular shape with the aim of optimization of the vertical dimension; the length was such that total volumes of the circular and elliptic tanks were the same.

There were calculated stress states of three-layer tank with steel shell, thermo-isolation and stainless casing.

There was solved the axisymmetrical problem about the stress state of isotropic continuous cylinder at two types of the end fixing – rigidly and hingedly fixed.

**Key words:** 3D problems, non-slim cylindrical shells, stressed state, discrete Fourier series, discrete orthogonalization method, two-parameter deviation from circular form, joined semi-corrugations, orthotropic material, local load, solid cylinders, spline-functions, superposition of cross sections shapes.

## Зміст

ВСТУП.....	20
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	29
2. РОЗРОБКА МЕТОДИКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ .....	52
2.1 Вихідні рівняння просторової теорії пружності та побудова розв'язувальної системи рівнянь статики шаруватих неоднорідних по товщині нетонких циліндричних оболонок.....	54
2.2 Використання методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є при розв'язуванні краївих задач.....	63
2.3 Деякі оцінки достовірності та точності отримуваних розв'язків при застосуванні чисельно-аналітичних методів.....	73
2.4 Аналіз результатів розв'язування задач теорії оболонок на основі двох моделей.....	87
2.5 Результати та висновки.....	94
3. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ, ЩО МАЄ ДВОПАРАМЕТРИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ ВІД КРУГОВОЇ ФОРМИ.....	96
3.1 Постановка задачі про напружено-деформований стан еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі та оцінка достовірності отримуваних результатів.....	97
3.2 Напружено-деформований стан еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі різної товщини.....	103

3.3 Дослідження впливу ступеня еліптичності на напружений стан еліптичних гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок.....	110
3.4 Вплив зміни параметрів гофрування на напружений стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок.....	119
3.5 Суперпозиція форм поперечних перерізів та деякі інженерні рекомендації щодо спрощення розрахункових геометричних схем.....	126
3.6 Результати та висновки.....	137
<b>4. ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ З'ЄДНАНИХ НАПІВГОФРІВ.....</b>	<b>139</b>
4.1 Постановка задачі та оцінка достовірності отримуваних результатів.....	140
4.2 Напруженого-деформований стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів різної товщини.....	145
4.3 Вплив зміни кривизни на напружений стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді опуклих з'єднаних напівгофрів.....	153
4.4 Вплив зміни кривизни на напружений стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді увігнутих з'єднаних напівгофрів.....	158
4.5 Характерні особливості розподілу показників напруженого-деформованого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів.....	163
4.6 Результати та висновки.....	166
<b>5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ШАРУВАТИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК.....</b>	<b>168</b>

5.1 Постановка задачі та деякі оцінки достовірності отримуваних результатів.....	169
5.2 Вплив параметрів ортотропії на напруженний стан еліптичних циліндричних оболонок та оболонок з гофрами в поперечному перерізі.....	172
5.3 Аналіз напруженого стану еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі в залежності від параметрів ортотропії.....	186
5.4 Напружено-деформований стан ортотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів.....	190
5.5 Дослідження напруженого стану шаруватих, неоднорідних по товщині некругових циліндричних оболонок.....	200
5.6 Суперпозиція форм поперечних перерізів для циліндричних ортотропних та тришарових оболонок з ортотропним середнім шаром.....	214
5.7 Оптимізація геометричних параметрів автоцистерни для перевезення світлих нафтопродуктів.....	218
5.8 Результати та висновки.....	230
<b>6. АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕКРУГОВИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК.....</b>	<b>233</b>
6.1 Постановка задачі та оцінка точності отримуваних результатів	234
6.2 Гофровані в поперечному перерізі циліндричні оболонки при дії локального навантаження.....	240
6.3 Вплив зміни проміжку прикладання локального навантаження на напружено-деформований стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок.....	246
6.4 Дослідження напружено-деформованого стану циліндричних	

оболонок з поперечним перерізом у вигляді увігнутих з'єднаних напівгофрів при дії локального навантаження.....	252
6.5 Розв'язування задачі про напружений стан овальних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією локального навантаження.....	255
6.6 Результати та висновки.....	260
<b>7. ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН СУЦІЛЬНИХ КРУГОВИХ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРІВ.....</b>	<b>262</b>
7.1 Постановка задачі та побудова розв'язувальної системи диференціальних рівнянь для суцільних циліндрів в переміщеннях.....	263
7.2 Загальні відомості про сплайн-функції та їх застосування до розв'язування краївих задач.....	267
7.3 Визначення напруженого стану суцільних кругових циліндрів на основі методу сплайн-функцій.....	274
7.4 Дослідження напруженого стану суцільних ізотропних циліндрів за різних граничних умов на торцях.....	277
7.5 Результати та висновки.....	288
<b>ВИСНОВКИ.....</b>	<b>290</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>293</b>
<b>ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації.....</b>	<b>324</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Оболонкові конструкції найбільш оптимальним способом поєднують у собі, з одного боку, мінімальну вагу, а з іншого – необхідну міцність та жорсткість. Саме через це їм віддається перевага в таких галузях як аерокосмічна, будівництво, енергетика, машинобудування, суднобудування, трубопровідна, медицина та ін. Широкого використання в умовах зростаючого рівня інтенсивності зовнішнього впливу набувають конструкції у вигляді нетонких та товстостінних пластин і оболонок. Як приклад можна навести посудини високого тиску, кріогенну техніку, двигуни; крім того, при розрахунках інженерних споруд, таких як кільцеві фундаменти, напірні труби, склепіння будівель, використовують розрахункові схеми у вигляді товстостінних циліндричних оболонок.

Аналіз досліджень напружено-деформованого стану (НДС) нетонких циліндричних оболонок показав, що значна кількість робіт присвячена застосуванню різних уточнених моделей. При цьому правомірність використання тих чи інших припущень на основі порівняльного аналізу з точним розв'язком, досліджена здебільшого для оболонок з круговим поперечним перерізом.

В загальному випадку проблему розрахунку нетонких циліндричних оболонок слід розглядати як проблему розв'язання відповідної крайової задачі просторової теорії пружності. При цьому, точні розв'язки побудовано для порівняно вузького класу задач у випадку циліндричних оболонок кругового поперечного перерізу та близького до нього. Підхід, заснований на побудові строгого аналітичного розв'язку тривимірної крайової задачі математичної теорії пружності виявляється проблематичним для оболонок довільної геометрії та з анізотропними властивостями матеріалу. Аналітичні розв'язки певних класів задач отримані за допомогою асимптотичного методу, методу малого параметру та ін.

Для розв'язування класу задач теорії пластин та оболонок, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, або такими, що зводяться до них, широко застосовуються чисельні методи. Так, дослідження напруженодеформованого стану нетонких циліндричних оболонок здійснюється на основі методу скінчених елементів (МСЕ), скінчених різниць та ін. Проте застосування МСЕ пов'язане зі значними труднощами та громіздкістю обчислювального процесу, а у випадку апроксимації розв'язку вздовж товщини скінченими різницями, граничні умови на бічних поверхнях задовольняються наближено.

Необхідність створення конструкцій з підвищеними вимогами до їх міцності й довговічності з використанням мінімальної кількості матеріалів та з найменшими витратами на їх виготовлення і експлуатацію висуває на перший план проблему оптимального проектування. Саме на етапі проектування конструкцій велику роль відіграють чисельно-аналітичні методи теорії оболонок, оскільки вони дозволяють найбільш просто виявити вплив тих чи інших параметрів та підказати шляхи покращення самої конструкції стосовно підвищення характеристик її міцності.

Відсутність достатньо точних та надійних методів розв'язання задач теорії пружності для нетонких неоднорідних анізотропних оболонок призводить до необхідності розробки нових ефективних методик до розв'язання задач статики оболонок в просторовій постановці, що дозволять отримати з високим степенем точності значення всіх факторів напруженено-деформованого стану в широких діапазонах зміни геометричних та механічних характеристик за різних видів прикладеного навантаження.

Крім того, певну зацікавленість викликає питання, пов'язане з розширенням класів задач, розв'язок яких можна отримати за допомогою вже існуючих методів.

Врахування вищезгаданих обставин обумовлює актуальність вибраної теми дисертації.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота відповідає основним напрямкам наукових досліджень відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України. Дисертаційне дослідження проводилось при виконанні таких науково-дослідних

робіт: НДР № 326 "Розробка чисельно-аналітичних підходів до розв'язання статичних та динамічних задач для просторових тіл і оболонок різної форми та структури з врахуванням анізотропії і неоднорідності", номер державної реєстрації 0101U002861, 2001 – 2005 рр.; НДР № 443п "Розв'язання окремих класів задач та дослідження напруженого стану і коливань пластин та оболонок складної геометрії", номер державної реєстрації 0103U005976, 2003 – 2005 рр.; НДР № 349 "Розробка методів розв'язання задач та дослідження статичного і динамічного деформування пружних тіл складної геометрії та структури на основі моделей різного рівня", номер державної реєстрації 0105U001991, 2005 – 2009 рр.; НДР № 1.3.1.358 "Розробка нових нетрадиційних підходів на основі дискретно-континуальних методів і комбінованих моделей до дослідження деформування і руйнування композитних матеріалів для розв'язання проблем міцності і довговічності сучасних конструкцій", номер державної реєстрації 0107U000345, 2007 – 2011 рр.; НДР № 1.3.1.370 "Розробка нових підходів до дослідження деформування складних оболонкових систем з неоднорідних анізотропних матеріалів при різних видах навантаження на основі методів чисельного аналізу", номер державної реєстрації 0109U004184, 2009 – 2013 рр.; НДР № 1.3.1.382 "Дослідження механічної поведінки неоднорідних анізотропних елементів сучасних конструкцій складної структури за допомогою нових підходів на основі різних моделей", номер державної реєстрації 0112U000249, 2012 – 2016 рр.; НДР № 1.3.1.401 "Чисельний аналіз впливу конструктивної та структурної неоднорідності анізотропних оболонкових структур на їх стаціонарне деформування", номер державної реєстрації 0115U005709, 2016 – 2020 рр. Дисертаційна робота проводилась згідно тематики науково-дослідної роботи кафедри теоретичної та прикладної механіки Національного транспортного університету МОН України К 04 – 11 – 3 "Розробка теорій і методів дослідження статичного та динамічного станів тіл складної геометрії за формою та структурою" (2006 – 2012), "Розробка методів дослідження статичного та динамічного станів тіл з ускладненими геометричними та фізико-механічними характеристиками" (2013 – 2018).

**Мета та завдання дослідження.** Мета роботи полягає в розробці спільної ефективної чисельно-аналітичної методики розв'язання задач статики лінійної теорії пружності для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців на основі просторової моделі із використанням чисельно-аналітичних методів та проведенні на її основі дослідження впливу геометричних та механічних параметрів циліндричних тіл зазначених класів на фактори їх напруженого-деформованого стану, викликаного прикладеним поверхневим навантаженням.

*Досягнення цієї мети передбачає:*

- розробку спільної чисельно-аналітичної методики до розв'язання задач статики циліндричних тіл двох типів, що базується на редукції вихідної країової задачі, з використанням ефективних аналітичних методів, до одномірної країової задачі, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь, та розв'язанням останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації;
- побудову розв'язку задачі про напруженено-деформований стан некругових неоднорідних анізотропних циліндричних оболонок за певних граничних умов на торцях при дії розподіленого поверхневого навантаження на основі удосконаленого підходу з використанням апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є;
- побудову розв'язку осесиметричної задачі про напружений стан ізотропних суцільних циліндрів на основі сплайн-функцій, з розкриттям невизначеності в геометрично особливій точці;
- проведення досліджень достовірності, точності й збіжності чисельно-аналітичної методики, що реалізується шляхом порівняння числових розв'язків модельних задач з відомими в літературі аналітичними розв'язками, отриманими іншими авторами, а також на основі різних індуктивних методів;
- дослідження напруженено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок, що мають двопараметричне відхилення форми поперечного перерізу від кругової в залежності від зміни геометричних параметрів, анізотропії матеріалу та за наявності шарів по товщині при дії поверхневого навантаження;

- аналіз показників напруженого-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів в залежності від зміни їх кривизни, анізотропії матеріалу за наявності шарів по товщині, що знаходяться під дією розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній або внутрішній бічній поверхні;
- дослідження впливу локального навантаження на фактори напруженого-деформованого стану некругових нетонких циліндричних оболонок в залежності від інтервалу та способу прикладання навантаження і зміни геометричних параметрів та механічних характеристик матеріалу оболонок;
- аналіз напруженого стану суцільних ізотропних циліндрів при дії поверхневого навантаження за різних способів закріплення торців;
- виявлення характерних закономірностей в розподілі полів переміщень і напружень, викликаних прикладеним поверхневим навантаженням, та встановлення нових ефектів, пов'язаних з їх геометричними та механічними характеристиками.

*Об'єктом досліджень є просторовий напруженого-деформований стан циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою, за певних граничних умов на торцях та суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців.*

*Предметом досліджень є вплив геометричних та механічних параметрів циліндричних тіл, що розглядаються, на характеристики об'єкта дослідження.*

**Методи дослідження.** При розв'язуванні задач лінійної просторової теорії пружності для некругових нетонких анізотропних циліндричних оболонок складної форми поперечного перерізу та неоднорідної по товщині структури, для зведення тривимірної крайової задачі до двовимірної використовується точний аналітичний метод відокремлення змінних в напрямку твірної оболонки.

Для відокремлення змінних в напрямку напрямної, в розв'язувальній системі диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, записують доповняльні функції замість добутків розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які залежать від координат напрямної та товщини. Формально,

отримана таким чином система рівнянь, дозволяє відокремлення змінних в напрямку напрямної шляхом розв'язування доповняльних функцій та компонент навантаження у звичайні ряди Фур'є, після чого, двовимірна крайова задача зводиться до одномірної, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь більш високого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для інтегрування отриманої системи рівнянь використовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. При цьому, для обчислення амплітудних значень доповняльних функцій, використовується їх апроксимація дискретними рядами Фур'є.

Для визначення поверхні відліку поперечного перерізу знакозмінної кривизни використовуються рівняння гладких кривих без перегинів та розривів (гофрований еліпс, епіциклоїда та гіпоциклоїда), що звільняє від необхідності задоволення умовам спряження у місцях з'єднання гофрів та напівгофрів.

При дослідженні впливу локального навантаження на напружений стан зазначеного класу оболонок, навантаження подається у вигляді відповідного збіжного ряду Фур'є.

При розв'язуванні осесиметричної задачі теорії пружності про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців, для зведення двовимірної крайової задачі до одномірної використовується метод сплайн-функцій; при цьому розкривається невизначеність у геометрично особливій точці.

Отримана одномірна крайова задача розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

#### **Наукова новизна результатів роботи полягає в наступному:**

- Розроблено спільну ефективну методику чисельно-аналітичного розв'язання задач статики для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців;

- отримано подальший розвиток методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є для циліндричних тіл першого типу та вперше застосовано метод сплайн-апроксимації для циліндричних тіл другого типу;
- з використанням розробленої методики побудовано розв'язки нових розширеніх класів просторових задач для циліндричних тіл двох типів, пов'язаних з ускладненими геометричними та механічними характеристиками;
- на основі отриманих розв'язків проведено аналіз напруженено-деформованого стану циліндричних тіл, що розглядаються, при заданих навантаженнях;
- виявлено характерні закономірності розподілу полів переміщень та напружень і встановлено нові ефекти, пов'язані з геометрією та структурою розглядуваних тіл, зокрема, розглянуто суперпозицію деяких форм поперечних перерізів.

**Обґрунтованість та достовірність результатів, наведених у дисертації,** забезпечується коректністю та строгістю математичних постановок задач у рамках механіки деформівного твердого тіла та просторової лінійної теорії пружності, застосуванням обґрунтованих, здебільш точних аналітичних методів розв'язування поставлених задач, тестуванням підходу на ряді задач даного класу та контролем точності розрахунків на базі індуктивних оцінок.

**Практичне значення отриманих результатів** полягає у можливості використання розробленої методики, що враховує складну структуру та форму поперечного перерізу розглядуваних циліндричних тіл для дослідження їх напруженено-деформованого стану з метою проведення розрахунків оцінки міцності та надійності подібних конструкцій та їх елементів, вибору відповідної структури та форми поперечного перерізу, що задовольнятиме заданим умовам експлуатації і дає можливість уникнути необхідності проведення дорогих пошукових експериментальних досліджень, а також для індуктивних оцінок правомірності результатів, отриманих з використанням уточнених моделей теорії оболонок.

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювались на наукових вітчизняних та міжнародних конференціях, зокрема: XI Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (Львів 2004); міжнародна конференція

"Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем" (Київ 2005); міжнародна наукова конференція "Математичні проблеми технічної механіки – 2006" (Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ 2006); LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету (Київ, 2008); LXVI, LXVII, LXX, LXXII, LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету (Київ, 2010, 2011, 2014, 2017, 2018); 77 Annual Meeting of the Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik (Берлін, Німеччина 2006); 9th SSTA Conference (Jurata, Poland 2009); IV, V, VI Міжнародна науково-практична конференція "Математика в сучасному технічному університеті" (Київ 2015 – 2017); XVIII International Conference: Dynamical system modeling and stability investigation (Київ 2017); Сучасні проблеми механіки та математики: (Львів 2018).

У повному обсязі дисертація доповідалась й обговорювалась на науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки "Сучасні проблеми теоретичної та прикладної механіки" Національного транспортного університету (керівник – д.ф.-м.н., професор І.А. Лоза, 2018 р.); на науковому семінарі відділу обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.ф.-м.н., професор О.Я. Григоренко, 2018 р.); на науковому семінарі за напрямком "Механіка оболонкових систем" Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.т.н., професор П.З. Луговий, 2018 р.); на загальноінститутських семінарах з механіки Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – академік НАН України, д.т.н., професор О.М. Гузь, 2018 – 2019 pp.).

**Публікації та особистий внесок здобувача.** Результати дисертації висвітлено в 54 наукових працях, у тому числі: 26 публікації у індексованих Google Scholar та Scopus наукових виданнях; 2 статті [7, 47] у провідному англомовному міжнародному журналі, 29 статей [1 – 6, 8 – 30] у наукових фахових виданнях України за спеціальністю дисертації, 7 робіт [48 – 54] – у фахових виданнях з технічних наук та 16 тез доповідей і матеріалів вітчизняних та міжнародних

наукових конференцій. Праці [6, 12, 14, 28, 35, 37 – 39, 41 – 46, 48 – 54] опубліковані автором одноосібно. Основні результати отримані здобувачем самостійно. У всіх працях, що опубліковані в співавторстві, здобувач приймав участь у постановці задач, реалізації та розробці підходу до їх розв'язання. Здобувачеві повністю належить адаптація методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є для розв'язання розширеніх класів просторових задач для нетонких циліндричних оболонок; програмна реалізація розробленої методики; отримання числових результатів та їх ілюстрація, частково – інтерпретація отриманих розв'язків.

**Структура та обсяг дисертаційної роботи.** Дисертація складається з анотації, вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел із 345 найменувань. Загальний обсяг дисертації складає 331 сторінку, разом із 126 рисунками та 55 таблицями.

*Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому консультантові – акаадеміку НАН України, доктору технічних наук, професору Ярославу Михайловичу Григоренку за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та виражає подяку доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Ярославовичу Григоренку за постійну увагу до роботи, слушні поради та пропозиції при її написанні.*

## Розділ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Циліндричні оболонки – найважливіший елемент конструкцій літаків, ракет, підводних човнів. У будівництві вони знаходять широке застосування в конструкціях будівель, резервуарів, газгольдерів, трубопроводів. Кількість конструкцій типу оболонок, що знаходять застосування в техніці і будівництві, збільшується і в даний час.

На даному етапі розвитку науки і техніки, збільшується кількість конструкцій та їх елементів, виконаних у вигляді оболонок з круговою та некруговою формою поперечного перерізу. Використання конструкцій подібного типу дає змогу задовільнити вимоги, пов'язані зі зменшенням ваги конструкції без зниження її несучої здатності. Оболонкові конструкції широко застосовуються в аерокосмічній, автомобільній промисловості, при будівництві споруд та ін. [269, 273, 298, 300, 308, 331, 337, 344]. Розрахункам оболонкових конструкцій присвячена ціла низка робіт [119, 265, 279, 287, 321].

Проте продовжує залишатись актуальним питання побудови тривимірної теорії нетонких циліндрических оболонок, а також розробка ефективних методів розв'язання задач для окремих класів оболонок.

Теорія пружності як самостійний розділ механіки суцільних середовищ виникла в першій половині XIX століття в результаті вкладу видатних вчених, серед яких можна назвати К. Нав'є, А. Коші, С. Пуассона, Г. Ламе та Б. Клайперона. Завдяки їх роботам задача про визначення внутрішніх зусиль та переміщень твердого тіла при його деформуванні згідно закону Гука була зведена до граничної задачі математичної фізики. При цьому вивчення стану пружного тіла, що знаходиться під дією зовнішніх сил та певним чином закріплене, базується на

дослідженні розв'язків певної системи рівнянь в частинних похідних. Необхідні для конкретизації розв'язків граничні умови визначають характер взаємодії тіла, що розглядається, та оточуючих тіл і формулюються зазвичай у вигляді співвідношень, які задають на граничних контурах переміщення, напруження або їх комбінації [112].

Граничні задачі теорії пружності є найбільш складними в математичному сенсі граничними задачами математичної фізики і відносяться до типу нейманівських векторних граничних задач [172]. Їх розв'язування пов'язане зі значними труднощами математичного характеру. При цьому виникає дві пов'язані між собою проблеми – вивчення характеру функцій, що задовольняють основні диференціальні рівняння, та визначення сталох інтегрування та функцій, які входять до набору частинних розв'язків, згідно заданим граничним умовам.

Що стосується досліджень структури розв'язків рівнянь рівноваги та руху пружного тіла, то в розділі теорії пружності, що відноситься до вивчення так званих загальних розв'язків, досягнуто значного прогресу. Отримано представлення вектора пружних переміщень через гармонічні функції в задачах статики та хвильові функції в задачах динаміки. Ці розв'язки дають можливість будувати набори частинних розв'язків рівнянь рівноваги чи руху в координатних системах, що допускають відокремлення змінних в тривимірних рівняннях Лапласа чи Гельмгольца.

Питанню досліджень загальних розв'язків рівнянь теорії пружності присвячена ціла низка робіт [235, 240, 246, 313], зв'язок між ними та повноту розглянуто в роботах [29, 187, 232, 242].

При розв'язуванні граничних задач теорії пружності для тіл, гранична поверхня яких співпадає з координатною поверхнею триортогональної системи координат, що дозволяє відокремлення змінних у векторному рівнянні Лапласа або Гельмгольца, питання про побудову найбільш задовольняючим граничним умовам комбінацій частинних розв'язків рівнянь Ламе, розв'язується методом власних векторних функцій [160, 287].

Граничні задачі теорії пружності є векторними. Для них повну систему власних векторних функцій на поверхні тіла можна побудувати не єдиним способом. Так, наприклад, повну систему власних векторних функцій можна отримати, визначаючи всі компоненти векторів переміщень або напружень через власні функції відповідної скалярної задачі. Вирази зазначених векторів зберігають необхідні властивості ортогональності та повноти при застосуванні разом із власними функціями скалярної задачі деяких комбінацій їх перших похідних.

Тіла скінчених розмірів мають певну характерну особливість, яка полягає в тому, що його гранична поверхня може бути складена з частин координатних поверхонь різних сімейств (рис. 1.1). Таке трактування поняття тіла скінчених розмірів надає йому дещо умовного характеру, оскільки відносить до таких тіл напівскінчений циліндр і виключає замкнену сферу. Однак з точки зору способів задоволити граничні умови між скінченим і напівскінченим циліндрами немає жодних розбіжностей і граничні задачі для них мають бути віднесені до одного класу граничних задач теорії пружності [112].

Результати, що були отримані в теорії пружності при розгляді граничних задач для областей, обмежуюча поверхня яких утворена координатними поверхнями одного сімейства триортогональної системи координат, є вихідними при розгляді граничних задач для тіл скінчених розмірів.

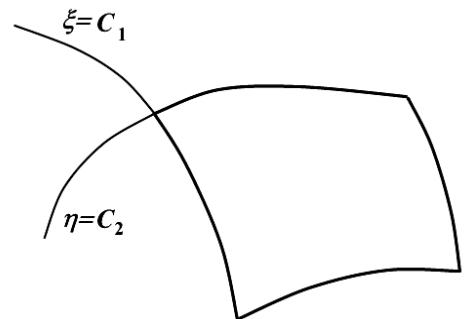


Рис. 1.1 Гранична поверхня тіла скінчених розмірів

Було розвинуто два підходи при застосуванні таких результатів. Один з них, що отримав назву метода однорідних розв'язків [160] був застосований в роботах В. Стеклова [236], П. Шиффа [329]. Метод однорідних розв'язків став міцним засобом асимптотичного аналізу наближених теорій пластин та оболонок, а також побудови нових теорій, що дозволяють послідовно провести врахування величин одного порядку малості. Суттєві результати було отримано в роботах І. Воровича та його учнів [6, 7, 26].

Інший підхід дослідження граничних задач теорії пружності для тіл скінчених розмірів базується на спробах знайти точний розв'язок першої основної граничної задачі теорії пружності для паралелепіпеда. Конкретно розглядалась задача про симетричний, відносно трьох площин симетрії, напружений стан паралелепіпеда, викликаний нормальним навантаженням на гранях. На той час було отримано розв'язок задачі про періодично деформований пружний шар. Застосування такого розв'язку дає можливість повністю задовольнити граничні умови на двох протилежних гранях паралелепіпеда, при цьому довільні стали (коєфіцієнти подвійного ряду Фур'є), що містяться в ньому, визначаються з простих алгебраїчних співвідношень. Далі Г. Ламе запропонував ідею, що, якщо необхідно задовольнити умови на трьох парах граней, то необхідно використати три відповідних розв'язки для шару.

Ця ідея була розвинута в роботах Х. Сайто [326] та Б. Абрамяна [1]. В останній, розглядаючи задачу про осесиметричний напружений стан циліндра скінченої довжини, було вперше доведено регулярність нескінчених систем, викликаних граничними умовами, що дало можливість визначити алгоритм знаходження їх наближеного розв'язку.

Огляд робіт по застосуванню підходу Г. Ламе при розв'язуванні граничних задач для тіл скінчених розмірів наведено в [3]. Метод однорідних розв'язків та метод Ламе мають проблемну орієнтованість, тобто, є орієнтованими на певний клас задач. Широкого розповсюдження набули інші методи розв'язування даного класу задач. В роботі [11] загальний розв'язок рівнянь рівноваги Ламе отримано в аналітичних функціях. Зв'язок між осесиметричними та плоскими полями розглянуто в роботах [9, 194].

Широкого застосування при побудові розв'язків великого загалу задач теорії пружності набули методи, засновані на загальних варіаційних теоремах [5, 157, 168, 201, 202, 248, 249]. Недоліком варіаційних підходів до розв'язування граничних задач теорії пружності для тіл скінчених розмірів є труднощі оцінки якості отриманого розв'язку, особливо при вивчені локальних ефектів в досліджуваних полях.

Будь-який метод розв'язування математично сформульованих задач у фізичних теоріях має забезпечувати отримання результатів, що кількісно та якісно відображає всі суттєві риси явища, що вивчається. Саме в цьому випадку можна говорити про точний розв'язок задачі.

Розрахунки напруженого-деформованого стану елементів конструкцій здійснюються на основі сучасних методів, що описуються різними розрахунковими схемами [129, 153, 186, 231, 233, 262, 271].

Суттєвого значення набуває потреба у розробці таких методів розрахунку напруженого-деформованого стану оболонок, коли чисельні й аналітичні методи, по можливості, використовуються паралельно, доповнюючи один одного [63].

Дослідження у сфері теорії оболонок мають давню історію [131]. Перші спроби отримати рівняння теорії оболонок з рівнянь теорії пружності були здійснені Г. Ароном у 1874 р. на базі методу Кірхгофа. Проте, вираз для енергії мав такий самий вигляд, як і в теорії пластин. Відмінність полягала лише у виразі енергії згину: кривизни деформування пластини було замінено на різницю кривизн поверхні до та після деформації. Розвиток сучасної теорії оболонок слід пов'язувати з роботами А. Лява [163].

Подальший розвиток теорії оболонок відбувався за двома суттєво різними напрямками. Перший, що отримав назву класичного, продовжив дослідження стосовно виводу рівнянь теорії оболонок з рівнянь просторової теорії пружності. Другий напрямок, пов'язаний з прямим підходом до побудови теорії оболонок. Сутність його полягає в моделюванні оболонки деформованою поверхнею і подальшим вивченням механіки такої поверхні.

Теорія Лява (1906) завоювала велику популярність і широко застосовувалась у практичних розрахунках. Проте, вона мала певні недоліки: незрозумілі граници застосування, непослідовне нехтування малими членами та ін. Тому у XX ст. продовжились дослідження з основних положень теорії оболонок. Значного розмаху набули дослідження з розробки ефективних методів розв'язання крайових задач теорії оболонок. У ранніх роботах зарубіжних науковців головна увага приділялась побудові точних розв'язків крайових задач теорії оболонок, що

знаходились в певному протиріччі з наближенним характером вихідних рівнянь. У зв'язку з цим, І. Штаєрманом було введено поняття асимптотичних методів. Послідовно така точка зору наводиться у книзі А. Лур'є [160] при побудові розв'язків та в роботі В. Новожилова [185] при комплексному перетворенні рівнянь теорії оболонок.

Асимптотичні методи інтегрування рівнянь теорії оболонок мали свій розвиток у роботах А. Гольденвейзера. Інша точка зору, заснована на інтуїтивно-фізичних поданнях, використовувалась в роботах В. Власова [40].

Значний внесок у розвиток теорії пластин та оболонок зробили праці С. Амбарцумяна, В. Болотіна, І. Векуа, В. Власова, І. Воровича, О. Гузя, Б. Гальоркіна, Н. Галімова, О. Гольденвейзера, Е. Григолюка, Я. Григоренка, М. Кільчевського, С. Корольова, С. Лехніцького, А. Лур'є, Х. Муштари, В. Новожилова, Ю. Работнова, С. Тимошенка, І. Штаєрмана, Е. Рейсснера та ін.

В роботі [159] А. Лур'є наводить тензорний вид основних рівнянь теорії оболонок, заснований на гіпотезі Кірхгофа – Лява. Проте теорія А. Лур'є не містить малих членів, які можна було б відкинути без зайвих проблем. Питанням виникнення похибки при застосуванні гіпотези Кірхгофа – Лява присвячені роботи А. Лур'є [160] та В. Новожилова [183]. В. Новожиловим була поставлена і розв'язана задача про формулювання найпростішої теорії оболонок, в якій були не тільки сформульовані прості співвідношення теорії пружності, але й наведено їх систематичне використання. В подальшому з'ясувалось, що не існує тензорних рівнянь, які б співпадали з співвідношеннями В. Новожилова без порушення однієї із властивостей: 1) неперервної залежності від радіуса кривизни або 2) збереження "ізотропності" (наприклад, в лініях кривизни записані співвідношення для ізотропного матеріалу, тоді в будь-якій іншій системі координат, ці співвідношення мають відповідати оболонці з ізотропного матеріалу). Подібна задача була розв'язана Дж. Сандерсоном [330] та У. Койтером [302]. В роботі [253] показано, що розбіжність у співвідношеннях Новожилова та Койтера – Сандерса мають місце в членах, що виходять за границі точності вихідних припущень, а область застосування у них однакова.

На основі асимптотичного аналізу рівнянь теорії пружності А. Гольденвейзер надав інше формулювання кінематичних та статичних "гіпотез", що відрізнялося від гіпотез Кірхгофа – Лява. Він отримав нові співвідношення пружності, які відрізнялися від співвідношень А. Лур'є врахуванням поперечного стискання оболонки. Якщо спрощення, що приймаються при розв'язуванні задач теорії оболонок не є очевидними та обґрунтованими, то для визначення напружено-деформованого стану оболонок доцільно використовувати точні рівняння просторової теорії пружності [14]. Необхідність побудови просторових моделей пов'язана з існуванням значних градієнтів напружень та переміщень, суттєвою анізотропією пружних властивостей, з локальністю прикладеного навантаження, а також у випадку динамічного характеру задачі.

Розв'язування задач про напружено-деформований стан неоднорідних пружних тіл в просторовій постановці здійснюється на підставі поєднання різних аналітичних перетворень, внаслідок чого вихідна тривимірна задача зводиться до одномірної, відносно обраних за певних критеріїв розв'язувальних функцій. Розв'язання отриманої одномірної задачі відбувається методами чисельного аналізу.

Точні розв'язки задач статики пружних тіл в просторовій постановці, що отримані в аналітичному вигляді наведено в роботі [200]. При цьому на всіх етапах розв'язування задачі застосовуються відповідні аналітичні перетворення та спеціальні функції. На основі такого підходу отримано розв'язки задач для однорідних одношарових тіл.

Просторові задачі для сфер, що виготовлені з дискретно чи безперервно неоднорідного матеріалу при дії не віссиметричного навантаження розглянуто в роботах [35, 71, 73].

Рівновага однорідного ізотропного конуса досліджувалась в роботах [241, 243], в останній – розглядалась задача про віссиметричну рівновагу суцільного та порожнистого ізотропних конусів при дії навантаження, що змінюється за поліноміальним законом.

Задачу Ламе для порожнистого конуса, що навантажений внутрішнім тиском, або знаходиться під дією температури, що змінюється лише по товщині, розв'язано

в роботі [10]. Деякі класи статичних та динамічних задач теорії пружності розглянуто в роботах [164, 169 – 171, 251]. Питанням підвищення точності при застосуванні чисельних методів розв'язання задач присвячено роботи [167, 198, 199, 301].

Одним із підходів побудови теорії оболонок є підхід, заснований на застосуванні законів механіки до абстрактного суцільного середовища. При цьому питання обґрутування отримуваних рівнянь не розглядаються і повинні розв'язуватись окремо, що є, зазвичай, складною проблемою. Наприклад, класична теорія пружності обґрунтована тільки з експериментальної точки зору, область її застосування накреслена тільки на інтуїтивному рівні. В той самий час, класична теорія оболонок типу Лява обґрунтована з позицій тривимірної теорії пружності. Однак, не всі варіанти теорії оболонок, необхідні для практичного застосування, можна отримати безпосередньо з тривимірної теорії пружності. Це пов'язано із тим, що, по-перше, багато прикладних теорій оболонок, неможливо обґрунтувати внаслідок відсутності критеріїв достовірності; певні характеристики таких теорій наближено співпадають з тривимірними, а інші навіть якісно не співпадають; по-друге, в багатьох випадках, дослідження з позицій теорії оболонок, відсутні в тривимірній теорії пружності (теорія м'яких (з тканин) оболонок або теорія біологічних мембрани).

Дослідженню НДС пластин та оболонок на основі уточнених моделей присвячені роботи В. Баженова, О. Беспалової, В. Будака, А. Василенка, Е. Григорюка, Я. Григоренка, О. Григоренка, Н. Гук, В. Гуляєва, Я. Жука, В. Кар-наухова, В. Козлова, В. Кубенка, Л. Курпи, Р. Кушніра, П. Лугового, В. Мейша, М. Марчука, О. Марчука, Л. Мольченка, О. Рассказова, І. Сенченкова, Н. Сме-танкіної, В. Сторожева, І. Хоми, Л. Хорошуна, І. Чернишенка, М. Шульги, О. Шу-пікова та ін.

Некласична теорія оболонок типа Тимошенка, тобто оболонок, що враховують деформації поперечного зсуву, розглянута в оглядах Е. Григорюка та І. Селезова [54]. Крім того, до некласичних теорій можна віднести теорії ребристих оболонок (огляд [18]), багатошарових оболонок (огляди [13, 31, 52]), біологічні мембрани [132] та ін.

Перші роботи для ребристих та багатошарових оболонок виконані І. Бубновим (підперті пластиини) та Ю. Шиманським (циліндрична оболонка із шпангоутами), А. Лур'є (розглядав ребра як стержні Кірхгофа – Клебша), В. Власовим (розглядав ребра як тонкостінні стержні) (рис. 1.2). В подальшому розвиток цієї теорії продовжився в роботах С. Амбарцумяна, Е. Гребня, В. Заруцького, Г. Кизима, Н. Флейшмана та ін.

Багатошарові оболонки досліджувались з різних точок зору в багатьох роботах в основному у двох напрямках. До першого відносяться теорії, засновані на понятті кінематичних гіпотез для усього пакету слоїв. Вже на початковому етапі дослідження показали непрацездатність такого підходу, для випадку, коли властивості шарів суттєво відрізняються. Тому в останні роки значного розвитку набули роботи другого напрямку: кінематичні гіпотези застосовуються окремо для кожного шару, при цьому порядок рівнянь залежить від кількості шарів. Недоліком робіт другого напрямку є складність та високий порядок отримуваних рівнянь. Основний внесок в розвиток теорії

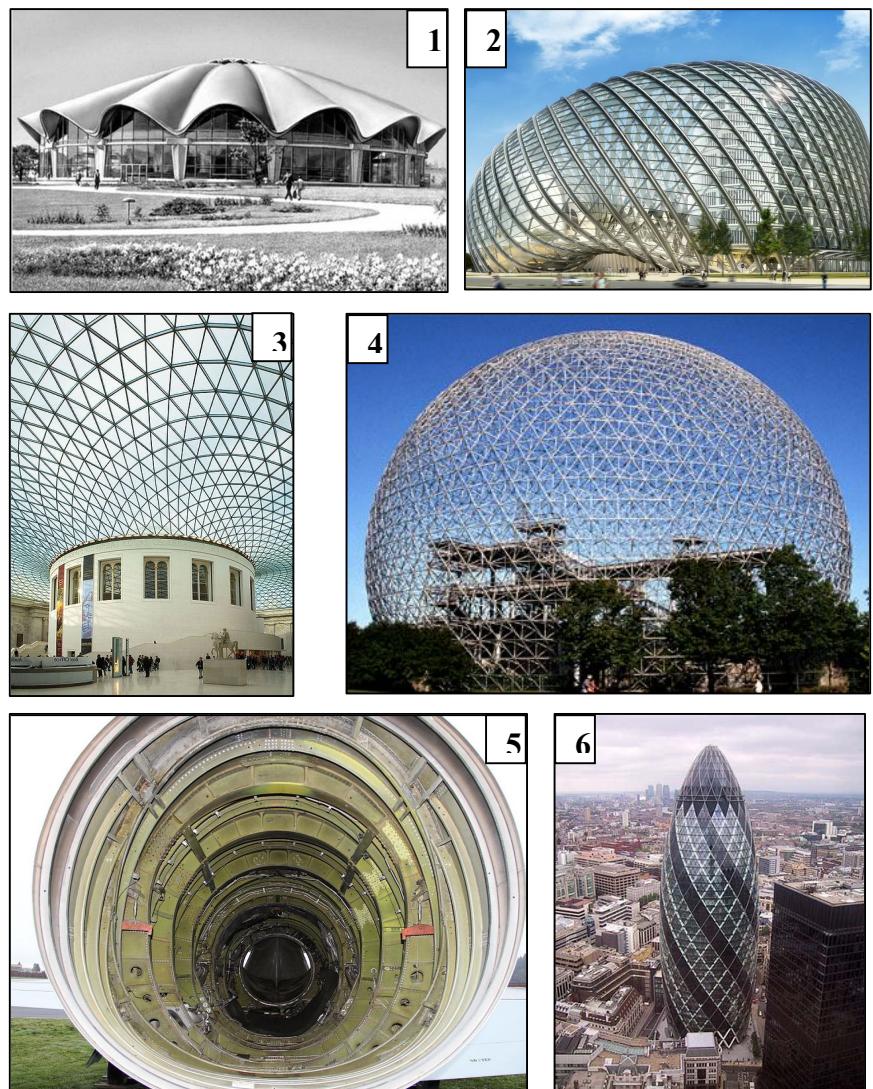


Рис. 1.2 Ребристі оболонки та оболонки із шпангоутами: 1) будівля цирку (Бухарест); 2) центр Phoenix Media (Пекін); 3-4) біосфера (Монреаль); 5) фюзеляж літака; 6) башта Мері – Екс (Лондон)

багатошарових оболонок зробили: А. Александров, В. Болотін, Е. Григолюк, М. Гусейн-Заде, Х. Муштарі, П. Чулков та ін.

Значна кількість робіт присвячена задачам про напружено-деформований стан тришарових пластин і оболонок [12]. Дані конструкції містять в собі два несучих шари і заповнювач, що забезпечує їх спільну роботу.

При цьому використовується дискретно-структурний підхід, за якого кінематичні та статичні гіпотези застосовуються для кожного окремого шару. Таким чином, порядок рівнянь для тришарових конструкцій визначається кількістю шарів. Застосування дискретно-структурного підходу дає змогу врахувати локальні ефекти на границях контакту шарів.

Результати численних досліджень напружено-деформованого стану, коливань та стійкості тришарових оболонок і пластин наведено в роботах Е. Григолюка [49], Л. Лібреску, Т. Хаузі [306], А. Нура [319].

Бібліографія робіт, де висвітлюються питання щодо розробки теорії та методів дослідження напружено-деформованого стану, стійкості та коливань оболонок, міститься в монографіях Е. Григолюка та П. Чулкова [56]. В роботах [48, 51] Григолюком була вперше внесена кінематична гіпотеза ломаної лінії в теорію шаруватих оболонок, згідно якій до внутрішніх шарів застосовується гіпотеза прямої, нерозтяжної нормалі, а закон зміни тангенціальних переміщень по товщині заповнювача приймається лінійним. На основі цієї гіпотези за допомогою варіаційного методу отримано систему розв'язувальних рівнянь та граничні умови при довільній зміні температури вздовж товщини оболонки скінченого прогину та із м'яким заповнювачем [48].

Результати роботи [48] були узагальнені на випадок тришарової пологої оболонки із жорстким заповнювачем [51]. Подальші дослідження довели спроможність, розглянутої Григолюком в теорії тришарових оболонок гіпотези ломаної лінії, визначивши значну область її застосування. Гіпотеза ломаної лінії може бути використана при дослідженні напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій при дії достатньо гладкого зовнішнього навантаження, при визначенні критичних навантажень при втраті стійкості, а також при визначенні частот вільних коливань, тощо.

В роботах [33, 43, 175, 289] застосовано більш складні закони зміни тангенціальних та нормальніх переміщень вздовж товщини всього тришарового пакета, порівняно з гіпотезою ломаної лінії. В роботах [43, 72, 77, 147] гіпотезу ломаної лінії застосовано для всього пакету, що дозволило звести розв'язувальну систему рівнянь до відповідних рівнянь одношарових оболонок.

Границі застосування гіпотез при розв'язуванні задач теорії тришарових оболонок досліджені на основі порівнювального аналізу з результатами, отриманими при розв'язуванні подібних задач із застосуванням наближених теорій та більш точних [166, 192], а також шляхом порівняння з даними, отриманими на основі експериментальних досліджень [150]. На основі аналізу фізичного змісту та структури рівнянь рівноваги в монографії [55] зроблено висновки щодо використання того чи іншого законів розподілу поперечних деформацій в заповнювачі при розв'язуванні задач даного класу.

Кількість літератури, що стосується методів розрахунку пластин та оболонок, які мають складну форму серединної поверхні відліку, або неканонічну форму опорного контуру незначна. Зазвичай в цьому класі задач розглядаються одношарові пластини та оболонки. Розрахунки тришарових оболонок подібного класу наведено в роботах [19 – 21]. Розглядались оболонки довільної геометрії, враховуючи складну форму серединної поверхні та складну форму контуру, але при цьому товщина шарів обиралась незначною. Застосування такого припущення дозволило вважати зовнішні шари безмоментними, внаслідок чого були отримані більш прості рівняння розв'язувальної системи, ніж відповідні рівняння для одношарових оболонок в теорії типу Тимошенка.

В роботі [247] розв'язано задачу про напружений стан тришарової циліндричної оболонки з середнім шаром, що має зменшений модуль пружності по відношенню до зовнішнього та внутрішнього шарів.

Значна кількість елементів конструкцій сучасної техніки, що виконана у вигляді оболонок різної форми та складної структури, знаходиться під дією розподілених та локальних навантажень при різних видах закріплення їх контурів. Широке застосування оболонкових елементів пояснюється бажанням задовільнити вимогам, які зумовлені складними умовами роботи машин, літальних та транспортних апаратів, різноманітних промислових та громадських споруд.

Розв'язання задачі про вплив локального навантаження, тобто, коли розміри поверхні прикладання навантаження невеликі порівняно з загальними розмірами оболонки, на характеристики напруженого-деформованого стану елементів конструкцій у вигляді оболонок обертання пов'язане зі значними труднощами. В багатьох роботах [123, 130, 267] при розв'язанні таких задач, розглядалась подібна задача про деформування оболонок під впливом зосередженого навантаження, розв'язок якої вдалося знайти із застосуванням асимптотичного методу. При цьому, припускалось, що інформація, яку отримано в результаті розв'язання останньої задачі, може слугувати для певної оцінки напруженого стану оболонок при дії локального навантаження.

Якщо у випадку пластин, розв'язок задачі при зосередженню навантаження може бути порівняне з розв'язком задачі для локального навантаження, то у випадку оболонок таке співставлення дає лише наближену оцінку. Детальний опис цього порівняння наведено в роботах [123, 124].

Труднощі розв'язання задачі при локально розподілених на малій ділянці чи відрізку лінії навантаженнях, пов'язані з обчислювальною реалізацією побудованого розв'язку. В роботі М. Дарєвського [124] зазначено, що розв'язання задачі про дію на оболонку зосередженої сили простіше, ніж розв'язання задачі про дію на оболонку локального навантаження, розподіленого на ділянці зі скінченими розмірами. Це можна пояснити тим фактом, що у випадку локального навантаження, якщо його задавати ступінчастою функцією, що має розриви на границі ділянки її прикладання, то її розвинення у ряди Фур'є потребують обчислення значної кількості членів ряду. В роботі [59] для заміни локального навантаження використовується його заміна дельтоподібною послідовністю [45], при цьому за критерій відповідності отримуваних розв'язків обирається степінь збігу максимальних значень основних факторів напруженого-деформованого стану оболонки.

Крім вказаного класу задач, також часто зустрічаються задачі про напружений стан оболонок обертання під дією локального навантаження у вигляді ступінчастої функції, які задані на не дуже малій ділянці в коловому напрямку. При цьому за рахунок розривності навантаження виникає питання про вплив на напружений стан оболонок додаткових навантажень, що викликані ефектом Гіббса в сумі ряду Фур'є,

за допомогою якого подається навантаження. Зазначений вплив оцінюється за допомогою методу сігма-множників Ланцоша [154]. Дія локального навантаження на оболонки в динамічних та статичних задачах досліджувалась також в роботах [158, 260, 303, 304, 312].

Характерною особливістю розвитку теорії пластин та оболонок є взаємозв'язок між процесом побудови математичної моделі даного класу задач і розробкою методу розв'язування задач, що описує дана модель. Про цей факт свідчить теорія тонких пластин Кирхгофа і теорія тонких оболонок Кирхгофа – Лява, в якій поряд із намаганням дати адекватний опис деформації пластин і оболонок ставилась мета зберегти простоту цих моделей настільки, щоб отримати розв'язок ряду задач з врахуванням існуючих обчислювальних засобів. Прикладом такого взаємозв'язку також може слугувати теорія оболонок Муштари – Доннела – Власова [40, 174, 272], в якій введені в основні рівняння спрощення дозволили побудувати розв'язок певного класу задач в досить широкому діапазоні зміни їх характеристик, про що свідчать такі назви цієї теорії: технічна теорія оболонок; теорія пологих оболонок; теорія оболонок із значним показником зміни напруженого стану [16, 50, 57, 58, 65, 116, 117, 176, 274]. Такий взаємозв'язок ще більше проявляється в теперішній час, коли для розв'язування задач теорії оболонок широко застосовуються комп'ютери і при побудові математичних моделей для певних класів оболонок необхідно враховувати всілякі особливості та можливості, які пов'язані з розв'язуванням задачі [278].

При розв'язуванні двовимірних краївих задач статики та динаміки пластин, оболонок та просторових тіл, які описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, виникають певні труднощі обчислювального характеру. Для їх подолання в ряді випадків застосовують підходи, що засновані на відокремленні змінних тим чи іншим способом та зведення вихідної задачі до одновимірної. Проте, для значної кількості задач, цьому перешкоджають численні фактори, такі як складність форми та коефіцієнтів рівнянь, граничні умови та контурах оболонок та ін.

Останнім часом в задачах обчислювальної математики, математичної фізики та механіки для їх розв'язування почали широко застосовувати сплайн-функції. Цей факт пояснюється перевагами апарату сплайн-наближення порівняно з іншими. До

числа основних переваг цього методу можна віднести той факт, що стійкість сплайнів відносно локальних збурень, тобто поведінки сплайну в околі точки не впливає на поведінку сплайну в цілому, як, наприклад, це має місце при поліноміальному наближенні; гарна збіжність сплайн-інтерполяції на відміну від багаточленної; простота і зручність в реалізації алгоритмів та обчислення сплайнів на персональних комп'ютерах [8]. Про можливість застосування різноманітних підходів для розв'язування задач теорії пластин та оболонок на основі чисельного аналізу свідчать роботи [277, 278, 286, 305, 324, 325].

Застосуванню методу сплайн-апроксимації при розв'язування задач статичного та динамічного деформування пластин і оболонок присвячені роботи [58, 62, 63, 68, 151]. При цьому чисельний розв'язок отриманої одномірної задачі побудовано на основі методу дискретної ортогоналізації, який було запропоновано в статті [46] та монографії [27]. В монографії [136] було зазначено, що метод дискретної ортогоналізації вперше було використано для розв'язування задач статики оболонок в роботах [63, 68]. Особливості застосування цього методу в задачах теорії пластин та оболонок викладені в монографії [58]. Крім того, показано, що модифікуючи відповідний алгоритм, можна суттєво скоротити об'єм займаної інформації. Ефективність використання та висока точність методу в задачах теорії пластин та оболонок зазначена в монографіях [28, 136], що підтверджено і в монографії [47].

Застосування сплайн-апроксимації для зведення двомірних задач про статичне та динамічне деформування пластин та оболонок до систем звичайних диференціальних рівнянь наведено в роботах [58, 62].

В різних галузях науки і техніки широкого застосування набувають елементи конструкцій, виконаних з композитних матеріалів [22, 23, 70], багато з яких виконані у вигляді порожнистих кругових та некругових циліндрів [70, 316]. При визначенні їх напружено-деформованого стану здебільшого використовуються різні уточнені моделі [50, 69, 70].

Однією з основних тенденцій розвитку сучасної техніки є широке використання композитних матеріалів, що мають неоднорідну структуру, що здатні значно підвищити їх надійність та вагову ефективність [47, 254, 255, 256, 263, 292, 294, 299, 304, 310, 339, 340, 341]. Неоднорідність матеріалу суттєво впливає на напружено-деформований стан оболонок та оболонкових систем, що певною мірою

відрізняється від традиційного напруженого стану оболонок, виготовлених з однорідного ізотропного матеріалу. У зв'язку з цим, математична модель проектної конструкції повинна враховувати специфіку використованого для її виготовлення матеріалу.

Зацікавленість композитними матеріалами викликана високим рівнем їх конструктивних властивостей: жорсткості, міцності та інших. Так, ще в роботі [184] було зазначено, що використання композитних матеріалів в конструкціях дозволяє підвищити їх надійність та вагову ефективність.

Ускладнення конструктивних форм та структури оболонкових елементів призводить до необхідності розвитку теорії та розробки методів розв'язування статичних та динамічних задач для оболонок з анізотропних неоднорідних матеріалів [152, 165, 261].

При будівництві нових конструкцій машин, обладнання, споруд вже на ранніх стадіях проектування для прийняття проектно-конструкторських рішень необхідною стає інформація про вплив конструктивних параметрів на їх напруженодеформований стан. Така інформація за відсутності експериментальних даних, може бути отримана лише за допомогою теоретичних моделей [167].

Розробка перспективних видів конструкцій певною мірою залежить від наявності випереджаючих розробок ефективних засобів їх математичного моделювання.

Таким чином, залишається актуальною розробка теоретичних моделей статичного та динамічного деформування, стійкості та коливань оболонок та оболонкових конструкцій, що виготовлені з неоднорідних матеріалів при врахуванні особливостей фізико-механічних властивостей цих матеріалів, стосовно до нових видів оболонкових конструкцій [277, 303, 311, 312, 323].

Розрахунки напруженено-деформованого стану елементів конструкцій (рис. 1.3) здійснюється на основі сучасних розрахункових схем, які вдало поєднують аналітичні та чисельні методи [308, 334]. Питання, пов'язані з дослідженням хвильових процесів в оболонках різної структури розглядалися в роботах [137, 139, 146, 317]. Теорія тонкостінних та нетонких конструкцій, виготовлених з композиційних матеріалів, становить один з найважливіших розділів механіки деформівного твердого тіла.

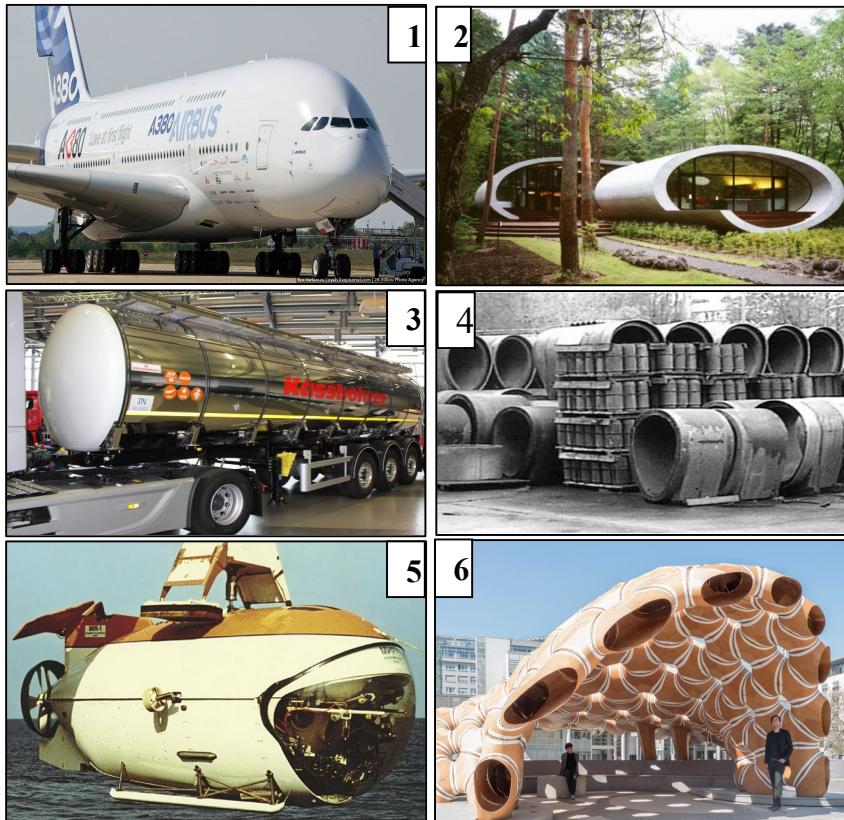


Рис. 1.3 Оболонкові конструкції: 1) аеробус А380;  
2) овальний будинок (Нагано, Японія); 3) цистерна  
високого тиску; 4) каналізаційні труби овоїдального  
поперечного перерізу; 5) батіскаф "Мир";  
6) дослідницький павільон (Штутгарт)

При цьому актуальну залишається проблема створення достовірних математичних моделей та розробка якомога більш точних методів розрахунку конструкцій, що мають багатошарову структуру. Основними напрямками досліджень в галузі механіки тонкостінних конструкцій, як зазначено в оглядах [21, 54, 80, 115, 128], є: обґрунтування застосування класичної теорії щодо постановки країових задач для конструкцій з неоднорідною

структурою омпозиційного матеріалу; обґрунтування застосування уточнених моделей порівняно з просторовими задачами теорії пружності; аналіз методів розв'язування різних класів задач щодо впливу на напружений стан геометричних та механічних параметрів, виду прикладеного навантаження і при цьому пропонуються варіанти використання отриманих розв'язків при проектуванні елементів конструкцій різного призначення.

Основи класичної теорії анізотропних оболонок розвинуті в монографіях С. Амбарцумяна [15], Я. Григоренка [71], В. Корольова [144], С. Лехніцького [155], Е. Григоляка і Ф. Когана [49].

При розрахунках на міцність і стійкість тонкостінних елементів, що мають шари слабкої жорсткості, класична теорія дає значні похибки. Однією з причин створення різних уточнених теорій анізотропних пластин і оболонок, що

враховують поперечні деформації зсуву, стала невідповідність класичної моделі реальним умовам деформування матеріалу шаруватих конструкцій.

Некласична теорія пластин та оболонок набула свого розвитку в роботах С. Амбарцумяна [15, 16], В. Васильєва [37], Я. Григоренка, О. Гузя, І. Бабіча [58, 60, 65, 117], В. Гуляєва [122], Л. Доннела [126] В. Мяченкова [177] та ін. При цьому найбільш ефективними при побудові уточнених теорій пластин і оболонок виявилися методи із застосуванням узагальнених варіаційних принципів теорії пружності.

Обґрунтування припущень, що застосовуються в некласичній теорії неоднорідних оболонок здійснюється порівнянням отриманих результатів з результатами точних, чи досить точних розв'язків окремих класів задач тривимірної теорії пружності, або за допомогою асимптотичних методів. В роботі Ю. Неміша [178] наведено огляд аналітичних методів розв'язування тривимірних задач теорії пружності та наведено аналіз застосування асимптотичних методів до зведення тривимірних задач теорії пружності до двовимірних моделей.

Вплинути на характеристики жорсткості оболонкової конструкції можна змінюючи форму поперечного перерізу. Розв'язку задач про напружено-деформований стан тіл з неканонічною формою поперечного перерізу присвячені роботи [70, 117, 121, 140, 179, 264, 336].

З метою покращення характеристик міцності матеріалу конструкцій при їх експлуатації в складних умовах і здатності матеріалу чинити опір утворенню деформації, широкого застосування набули конструкції з гофрованими елементами. Знання напружено-деформованого стану дозволяє обирати раціональну форму гофрів при конструюванні та виготовленні елементів конструкцій подібного класу [264, 269, 343].

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до необхідності вибору гладкої кривої, що описує поверхню відліку, яка не допускає розривів першої та другої похідної. В окремих роботах хвилеподібна форма поперечного перерізу описана частиною сфери чи синусоїди [293, 332], або дугами кіл додатної та від'ємної кривизни, які спряжені між собою таким чином, що кут нахилу дотичної до кривої змінюється без стрибків [333].

Гофровані тонкостінні та товстостінні пластини та оболонки широко застосовуються у вигляді елементів конструкцій в машинобудуванні (компенсатори, сильфони, шестерні – рис. 1.4). Слід зазначити, що при з'єднанні вибуховим зварюванням різномірних матеріалів в складових елементах конструкцій, поверхня розділу має хвилеподібну форму [189].

Для розв'язування задач про напружено-деформований стан та стійкість тонких гофрованих оболонок запропоновано наближені аналітичні та чисельні методи [76, 230]. Експериментальні дослідження з оцінювання стійкості наближених до сферичних

оболонок з гофрованими по азимуту поверхнями викладені в роботі [32]. При цьому встановлено, що втрата стійкості таких оболонок відбувається за критичних навантаженнях (зовнішній тиск), яке значно вище для просто сферичної оболонки. В роботі [257] на основі рівнянь просторової теорії пружності за допомогою метода збурення форми границі з врахуванням змінного осьового зусилля отримано аналітичний розв'язок задачі про напружено-деформований стан неканонічних оболонок, обмежених неортогональними поверхнями, близькими до циліндричних.



Рис. 1.4 Компенсатори, сильфони, шестерні



Рис. 1.5 Товстостінні циліндри та поршні

Широкого застосування оболонкові конструкції набули у зв'язку з інтенсивним розвитком багатьох областей техніки [114, 266, 270, 276, 291, 338, 345]. На сучасному етапі характерною є тенденція використання конструкцій типу оболонок в умовах зростаючої інтенсивності зовнішнього впливу – високого та над-

високого тиску, екстремальної температури тощо. Такі обставини вимагають все частіше використовувати товстостінні конструкції (рис. 1.5).

В якості прикладів застосування оболонок в сучасній техніці можна зазначити такі: сосуди високого тиску, будівництво двигунів, кріогенна техніка, захисні оболонки ядерних реакторів. Розрахункові схеми у вигляді товстостінних оболонок застосовуються також для розрахунків різноманітних інженерних споруд – кільцеві фундаменти, перекриття, напірні труби, облицювання тунелів та інше [148, 258].

Реалізація багатьох сучасних проектів потребує розробки конструкцій типу оболонок зі складною внутрішньою будовою, при цьому доводиться розв'язувати одночасно декілька проблем. Численні приклади конструкцій такого роду надає термоядерна та атомна енергетика, хімічне машинобудування, кріогенна та космічна техніка, п'єзоелектричні випромінювачі та ін. При ескізному проєктуванні таких конструкцій велику роль відіграють саме методи теорії оболонок, оскільки вони дозволяють найбільш повним чином відстежити вплив тих чи інших параметрів і підказати шляхи покращення конструкції.

Проблема надійності елементів конструкцій висуває на перший план питання про підвищення точності розрахунків, при цьому не останню роль відіграє вибір розрахункової моделі. У зв'язку з цим, проводяться дослідження стосовно подальшого удосконалення моделей деформування та напруженості оболонок та їх реалізація в методах розв'язку конкретних класів задач. Їх розвиток стимулюється, з одного боку, прагненням створити математично коректні моделі оболонок, з іншого – необхідністю з достатнім степенем точності розв'язати задачу щодо розрахунків елементів конструкції. Саме цим фактом пояснюється наявність значної кількості варіантів різних моделей оболонок [148, 269, 279, 322, 335].

Із застосуванням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фурє в роботах [94, 98, 103, 210,] отримано розв'язки задачі про напружений стан ізотропних циліндрів з еліптичним та гофрованим поперечним перерізом за наявності ізотропних неоднорідних шарів по товщині при дії розподіленого та локального навантаження.

Наразі залишаються актуальними питання про підвищення точності отримуваного наближеного розв'язку краївих задач та задач Коші. Дослідження

шляхів підвищення точності розв'язків краївих задач присвячена значна кількість робіт, серед яких праці Ю. Зав'ялова, В. Мірошниченка, С. Стежкіна, Ю. Субботіна, А. Лігуна.

Осьесиметричним задачам для пружних циліндрів скінченої довжини, суцільних та порожнистих, присвячена значна кількість робіт [196]. Стан проблеми до 1963 року висвітлено в огляді [3]. Значну частину монографії [290] відведено для розв'язання задач даного класу та наведено огляд літератури після 1963 року. В роботах [194, 195] враховано вплив об'ємних сил, зокрема питому вагу матеріалу циліндра. Розробці аналітичних та чисельно-аналітичних методів розв'язування задач для пружних циліндрів присвячені роботи [117, 279]. Наближені аналітичні та чисельні методи розв'язування цієї проблеми при різних граничних умовах на торцях розглядались в роботах [268, 315, 324, 341, 342].

Методи розв'язування задач для порожнистого циліндра можуть бути отримані за рахунок незначної модифікації будь-якого підходу, розвинутого для визначення напруженого стану суцільного циліндра [112].

Задача для порожнистого циліндра скінченої довжини в рамках методу однорідних розв'язків розглянута в роботі [173], де описаний характер труднощів, що виникають при обчисленні коренів характеристичного рівняння та запропоновано спосіб їх подолання. Розглянуті конкретні випадки навантаження дозволяють зробити певні загальні висновки щодо можливостей цього методу.

Важливе застосування однорідних розв'язків першої граничної задачі для порожнистого циліндра наведено в роботах [25, 26]. В них вказано на спосіб побудови теорій, що не суперечать теорії циліндричних оболонок, які дозволяють врахувати граничні шари довільного порядку.

Метод граничних задач для порожнистого циліндра, що співпадає з відповідним методом Б. Абрамяна для суцільного циліндра описаний в роботах [2, 34, 202, 203]. В цих роботах встановлена регулярність нескінчених систем для випадку, коли переміщення задаються вздовж циліндричної поверхні, а напруження – на торцях.

Серед зарубіжних авторів великий обсяг досліджень при розгляді задач для суцільного та порожнистого циліндрів виконані Йенгаром та співавторами [295 – 297]. В цих роботах не піднімалось питання доведення обґрунтування формальної

побудови нескінчених систем методом редукції. При збереженні незначного числа рівнянь в системах розглянуто ряд конкретних задач пружності та термопружності. Дуже повільна збіжність рядів для напружень на границі циліндра знижує цінність отриманих у такий спосіб кількісних оцінок напруженості. Зазначений недолік можна віднести й до робіт японських вчених [318, 327, 328].

Складність задачі про строгое задоволення граничних умов на всій поверхні циліндрів скінченої довжини зумовила розробку ряду наблизених підходів. Деякі з них втратили свою актуальність, деякі розвивалися надалі [27, 30, 237]. В роботі [294] розглянуто варіаційний підхід до побудови розв'язку граничних задач для тіл скінченої довжини на прикладі задачі для напівскінченої полоси та напівскінченого циліндра.

Задача для порожнистого кругового циліндра скінченої довжини досліджувалась за допомогою методу, що базується на аналогії між плоскими та осесиметричними полями [135, 193]. Застосування такого підходу дало можливість розглянути випадки таких граничних умов, що не призводять до нескінчених систем в рамках метода Б. Абрамяна та однорідних розв'язків. У випадку основних граничних задач використання узагальнених аналітичних функцій не приводило до жодних спрощень.

Таким чином, з проведеного аналізу наукової літератури можна зробити наступний висновок. Задачам про напружено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом присвячена значна кількість робіт, проте, для їх розв'язання застосовувались переважно уточнені моделі. У випадку застосування просторової моделі, розглядалися циліндричні оболонки з круговим поперечним перерізом, або близьким до нього. Для кругових циліндричних оболонок за певних умов на торцях отримані точні розв'язки. Деякі класи задач про напружено-деформований стан циліндричних товстостінних оболонок розв'язані із застосуванням різних наблизених підходів. Використання уточнених моделей та наблизених підходів не дозволяє отримати достовірних оцінок збіжності отриманих розв'язків до точних.

З огляду на сучасний стан проблеми моделювання просторового напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок складної геометрії та структури при дії поверхневого навантаження виникає необхідність побудови

чисельно-аналітичних методів дослідження цього класу задач. Важливим завданням є розробка та удосконалення методів розв'язання складних задач лінійної теорії пружності, які дозволяють отримати наближений до точного розв'язок, з високим степенем вірогідності.

Аналіз досліджень напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок показав, що значна кількість робіт присвячена застосуванню різних уточнених моделей. При цьому правомірність використання тих чи інших припущень на основі порівняльного аналізу з точним розв'язком, досліджена здебільшого для оболонок з круговим поперечним перерізом.

В загальному випадку проблему розрахунку нетонких циліндричних оболонок слід розглядати як проблему розв'язання відповідної краєвої задачі просторової теорії пружності. При цьому, точні розв'язки побудовано для порівняно вузького класу задач у випадку циліндричних оболонок кругового поперечного перерізу та близького до нього. Підхід, заснований на побудові строгого аналітичного розв'язку тривимірної краєвої задачі математичної теорії пружності виявляється проблематичним для оболонок довільної геометрії та з анізотропними властивостями матеріалу. Аналітичні розв'язки певних класів задач отримані за допомогою асимптотичного методу, методу малого параметру та ін.

Для розв'язування класу задач теорії пластин та оболонок, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, або такими, що зводяться до них, широко застосовуються чисельні методи. Так, дослідження напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок здійснюється на основі методу скінчених елементів, скінчених різниць та ін. Проте застосування методу скінчених елементів пов'язане зі значними труднощами та громіздкістю обчислювального процесу, а у випадку апроксимації розв'язку вздовж товщини скінченими різницями, граничні умови на бічних поверхнях задовольняються наближено.

Необхідність створення конструкцій з підвищеними вимогами до їх міцності й довговічності з використанням мінімальної кількості матеріалів та з найменшими витратами на їх виготовлення і експлуатацію висуває на перший

план проблему оптимального проектування. Саме на етапі проектування конструкцій велику роль відіграють чисельно-аналітичні методи теорії оболонок, оскільки вони дозволяють найбільш просто виявити вплив тих чи інших параметрів та підказати шляхи покращення самої конструкції стосовно підвищення характеристик її міцності.

Відсутність достатньо точних та надійних методів розв'язання задач теорії пружності для нетонких неоднорідних анізотропних оболонок призводить до необхідності розробки нових ефективних методик до розв'язання задач статики оболонок в просторовій постановці, що дозволять отримати з високим степенем точності значення всіх факторів напруженого-деформованого стану в широких діапазонах зміни геометричних та механічних характеристик за різних видів прикладеного поверхневого навантаження.

Крім того, певну цікавість викликає питання, пов'язане з розширенням класів задач, розв'язок яких можна отримати за допомогою вже існуючих методів.

Дослідження даної дисертаційної роботи націлені на розробку та удосконалення методики розв'язання просторових задач лінійної теорії пружності для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях та суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців з метою проведення дослідження напруженого-деформованого стану розглядуваних тіл, викликаного прикладеним поверхневим навантаженням, враховуючи значну змінну кривизну поперечного перерізу поверхні відліку, анізотропію використовуваних матеріалів, неоднорідність, шаруватість по товщині, локальність прикладеного навантаження для циліндричних тіл першого типу та способу закріплення торців для циліндричних тіл другого.

## Розділ 2

### **РОЗРОБКА МЕТОДИКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИХ МЕТОДІВ**

Дослідження просторових задач теорії пружності мають давню історію та відзначаються значною кількістю різноманітних підходів, аналітичних та чисельних методів розв'язування поставлених краївих задач.

Деякі постановки та методи розв'язування задач для пружних ізотропних однорідних тіл, а також результати розрахунків для тіл канонічної форми наведено в роботах [13, 36, 38, 42, 134, 138 – 141, 145, 149, 160, – 162, 188, 234, 238, 242]. Результати розробок для тіл складної неканонічної форми наведено в роботах [39, 53, 120, 180, 228]. Задачі теорії пружності для анізотропних та неоднорідних тіл розглядалися в роботах [53, 117, 128, 133, 142, 156, 180, 182, 191, 229, 267]. Також просторові задачі теорії пружності неоднорідних тіл розглядалися в роботах [113, 117, 118, 120, 190, 259], виконаних в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

На даному етапі, розробка підходів до розв'язування просторових задач теорії пружності пов'язана як із розвитком методів розв'язування краївих задач математичної фізики, так і з необхідністю отримання розв'язків для розподілу полів переміщень та напружень з достатнім степенем точності, що характеризують дійсний напруженого-деформований стан в певних перерізах елементів конструкцій сучасної техніки.

Досягнути необхідної надійності та стійкості конструкції, чи окремих елементів можна за допомогою варіації поперечного перерізу або вибору відповідного матеріалу для її виготовлення. Відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до значної зміни її кривизни, що в свою чергу,

впливає на вибір моделі розв'язування задачі. Велика кількість задач теорії оболонок розв'язується на основі різних уточнених моделей. Проте у випадку суттєвої кривизни поперечного перерізу, отримувані результати можуть містити значні похибки. У зв'язку з цим, важливого значення набуває побудова достатньо точних розв'язків просторових задач теорії пружності, оскільки вони дають змогу оцінити точність розрахунків наближених методів і визначити граници їх застосування. Методи розв'язування просторових задач теорії пружності, які дозволяють отримати достатньо точні значення переміщень та напружень в широких діапазонах зміни геометричних та механічних характеристик пружних тіл, дозволяють використовувати їх за еталонні при оцінці застосування різних гіпотез.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* Розв'язувальна система диференціальних рівнянь в частинних похідних для ортотропних, пружних циліндрів з некруговою формою поперечного перерізу та метод розв'язування задач із застосуванням дискретних рядів Фур'є в повному обсязі наведено в роботах [91, 101, 107, 282, 281 та ін.].

Деякі оцінки збіжності результатів розв'язку задач теорії пластин та оболонок при застосуванні дискретних рядів Фур'є наведено в роботах [91, 282].

В роботах [110, 111] проведено аналіз розв'язків, отриманих із застосуванням уточненої моделі, що базується на гіпотезі прямої лінії (модель Тимошенка) та просторової моделі при розв'язування задачі про напруженодеформований стан еліптичної циліндричної оболонки за певних умов на торцях при дії поверхневого навантаження.

В даному розділі наведено чисельно-аналітичну методику розв'язування класу задач про НДС нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою. В підрозділі 2.1 на основі основних співвідношень лінійної просторової теорії пружності для ортотропного шаруватого тіла отримана розв'язувальна система диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує просторовий напруженено-деформований стан

оболонок зазначеного класу. В підрозділі 2.2 тривимірну крайову задачу зведенено до одномірної із використанням методу відокремлення змінних та апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, при цьому наведено методику застосування останнього при розв'язуванні двовимірних задач. Дослідження впливу на отриманий розв'язок кількості точок визначення табличних значень доповнельних функцій та кількості утримуваних членів дискретний рядів Фур'є, а також кількості точок інтегрування та кількості точок ортогоналізації при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації проводиться в підрозділі 2.3. Аналіз результатів розв'язування задачі про напружений стан еліптичних циліндричних оболонок на основі двох моделей (уточненої – модель Тимошенка та просторової) наведено у підрозділі 2.4.

## **2.1 Вихідні рівняння просторової теорії пружності та побудова розв'язувальної системи рівнянь статики шаруватих неоднорідних потовщині нетонких циліндричних оболонок**

Розв'язується просторова задача лінійної теорії пружності. В загальному випадку розглядаються нетонкі циліндричні оболонки сталої товщини, що мають некругову форму поперечного перерізу, які виготовлені з ортотропного матеріалу і мають шарувату структуру та знаходяться під дією навантаження, прикладеного на зовнішній чи внутрішній бічній поверхні.

Для побудови розв'язувальної системи диференціальних рівнянь, що характеризує напружене-деформований стан оболонок даного класу, за вихідні прийнято основні рівняння лінійної просторової теорії пружності неоднорідного ортотропного тіла [156, 239] в криволінійній системі координат  $s, t, \gamma$  [70], яка побудована таким чином. В ортогональній криволінійній системі координат  $s, t$  обирається криволінійна циліндрична поверхня за поверхню відліку, а координата  $\gamma$  відкладається вздовж нормалі до цієї поверхні (рис. 2.1). Дугова координата  $t$  відкладається від деякої фіксованої твірної, а координата  $s$  дорівнює відстані від початкового граничного контуру. Таким чином, положення будь-якої точки  $M$  оболонки однозначно визначається трьома

координатами ( $s, t, \gamma$ ). За координату поверхню оболонок, що розглядаються, може бути обрана будь-яка поверхня, яка еквідистантна бічним поверхням, що обмежують оболонку. За координатну поверхню в даній роботі обрано серединну поверхню, яка рівновіддалена від бічних поверхонь.

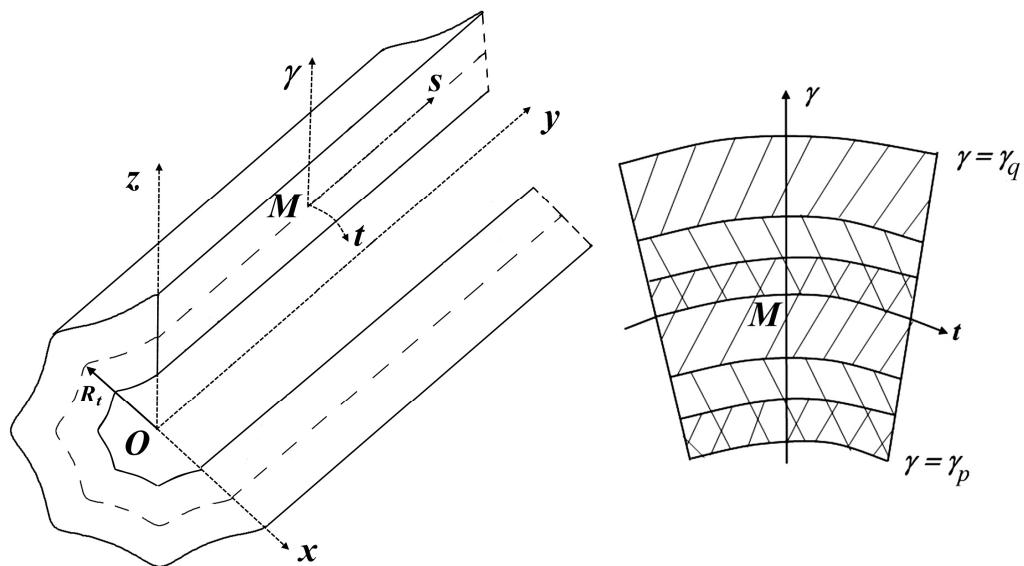


Рисунок 2.1. Нетонка циліндрична оболонка та розташування шарів в поперечному перерізі

При цьому вважається, що обмежуючі поверхні контактів суміжних шарів співпадають з координатними поверхнями  $\gamma = const$ .

Квадрат довжини лінійного елемента в обраній системі координат для нетонких некругових циліндричних оболонок має вигляд

$$dS^2 = H_1^2 ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (2.1)$$

де  $H_1 = 1$ ;  $H_2 = 1 + \gamma / R_t$ ;  $H_3 = 1$  – параметри Ламе,  $R_t$  – радіус кривизни поверхні відліку поперечного перерізу.

Переміщення точок  $i$ -го шару при деформації тіла внаслідок дії прикладеного навантаження характеризується величинами  $u_s^i(s, t, \gamma)$ ,  $u_t^i(s, t, \gamma)$ ,  $u_\gamma^i(s, t, \gamma)$ . Деформація  $i$ -го шару визначається величинами  $e_s^i(s, t, \gamma)$ ,  $e_t^i(s, t, \gamma)$ ,  $e_\gamma^i(s, t, \gamma)$ ,  $e_{st}^i(s, t, \gamma)$ ,  $e_{sy}^i(s, t, \gamma)$ ,  $e_{ty}^i(s, t, \gamma)$ .

Напружений стан  $i$ -го шару в обраній системі координат характеризується величинами  $\sigma_s^i(s, t, \gamma)$ ,  $\sigma_t^i(s, t, \gamma)$ ,  $\sigma_\gamma^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{st}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{ts}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{sy}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{ys}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{ty}^i(s, t, \gamma)$ ,  $\tau_{yt}^i(s, t, \gamma)$ . Згідно з законом парності дотичних напружень, мають місце залежності  $\tau_{st}^i = \tau_{ts}^i$ ,  $\tau_{sy}^i = \tau_{ys}^i$ ,  $\tau_{ty}^i = \tau_{yt}^i$ .

Крім того, шари взаємодіють без проковзування та відриву, тому на поверхні контакту  $i$ -го та  $i+1$ -го шару мають бути неперервними напруження  $\sigma_\gamma$ ,  $\tau_{sy}$ ,  $\tau_{ty}$  та переміщення  $u_\gamma$ ,  $u_s$ ,  $u_t$ . Умова спряження шарів записується так:

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma^i &= \sigma_\gamma^{i+1}, \quad \tau_{sy}^i = \tau_{sy}^{i+1}, \quad \tau_{ty}^i = \tau_{ty}^{i+1}; \\ u_\gamma^i &= u_\gamma^{i+1}, \quad u_s^i = u_s^{i+1}, \quad u_t^i = u_t^{i+1}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Враховуючи рівність (2.1), вихідні рівняння, що описують даний клас задач для кожного  $i$ -го шару ( $i = \overline{1, N}$ ), приймають такий вигляд:

вирази деформацій через переміщення

$$\begin{aligned}e_s^i &= \frac{\partial u_s^i}{\partial s}; \quad e_t^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i; \quad e_\gamma^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma}; \quad e_{st}^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s}; \\ e_{sy}^i &= \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} + \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma}; \quad e_{ty}^i = H_2^i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_t^i}{H_2^i} \right) + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t};\end{aligned}\tag{2.3}$$

рівняння рівноваги

$$\begin{aligned}H_2^i \frac{\partial \sigma_s^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{sy}^i) &= 0; \quad \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{ty}^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial s} + \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{ty}^i = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \sigma_\gamma^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{sy}^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{ty}^i}{\partial t} - \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_t^i &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Розглядаються оболонки, в загальному випадку, виготовлені з ортотропного матеріалу, який має три площини пружної симетрії, що

ортогональні до координатних ліній. В такому випадку, співвідношення узагальненого закону Гука приймають вигляд

$$\begin{aligned} e_s^i &= a_{11}^i \sigma_s^i + a_{12}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i; & e_t^i &= a_{12}^i \sigma_s^i + a_{22}^i \sigma_t^i + a_{23}^i \sigma_\gamma^i; & e_\gamma^i &= a_{13}^i \sigma_s^i + a_{23}^i \sigma_t^i + a_{33}^i \sigma_\gamma^i; \\ e_{t\gamma}^i &= a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i; & e_{s\gamma}^i &= a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i; & e_{st}^i &= a_{66}^i \tau_{st}^i, \end{aligned} \quad (2.5)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= \frac{1}{E_s^i}; & a_{12}^i &= -\frac{\nu_{st}^i}{E_t^i} = -\frac{\nu_{ts}^i}{E_s^i}; & a_{13}^i &= -\frac{\nu_{s\gamma}^i}{E_\gamma^i} = -\frac{\nu_{\gamma s}^i}{E_s^i}; \\ a_{22}^i &= \frac{1}{E_t^i}; & a_{23}^i &= -\frac{\nu_{\gamma t}^i}{E_t^i} = -\frac{\nu_{t\gamma}^i}{E_\gamma^i}; & a_{33}^i &= \frac{1}{E_\gamma^i}; & a_{44}^i &= \frac{1}{G_{t\gamma}^i}; & a_{55}^i &= \frac{1}{G_{s\gamma}^i}; & a_{66}^i &= \frac{1}{G_{st}^i}, \end{aligned}$$

тут  $E_s^i, E_t^i, E_\gamma^i$  – модулі пружності в напрямку координатних осей,  $G_{t\gamma}^i, G_{s\gamma}^i, G_{st}^i$  – модулі зсуву для площин, паралельних координатним поверхням,  $\nu_{st}^i, \nu_{ts}^i, \nu_{s\gamma}^i, \nu_{\gamma s}^i, \nu_{t\gamma}^i, \nu_{\gamma t}^i$  – коефіцієнти Пуассона.

Для трансверсально-ізотропного тіла, що характеризується наявністю поверхні, наприклад,  $\gamma = const$ , на якій усі напрямки еквівалентні стосовно пружних властивостей, співвідношення (2.5) приймають вигляд

$$\begin{aligned} e_s^i &= a_{11}^i \sigma_s^i + a_{12}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i; & e_t^i &= a_{12}^i \sigma_s^i + a_{11}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i; & e_\gamma^i &= a_{13}^i (\sigma_s^i + \sigma_t^i) + a_{33}^i \sigma_\gamma^i; \\ e_{t\gamma}^i &= a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i; & e_{s\gamma}^i &= a_{44}^i \tau_{s\gamma}^i; & e_{st}^i &= 2(a_{11}^i - a_{12}^i) \tau_{st}^i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $a_{11}^i = \frac{1}{E^i}; a_{12}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; a_{13}^i = -\frac{\nu'^i}{E'^i}; a_{33}^i = \frac{1}{E'^i}; a_{44}^i = \frac{1}{G'^i}$ . Тут  $E_s^i = E_t^i = E^i$ ,  $E_\gamma^i = E'^i$ ,  $G_{s\gamma}^i = G_{t\gamma}^i = G'^i$ ,  $\nu_{st}^i = \nu^i$ ,  $\nu_{s\gamma}^i = \nu_{t\gamma}^i = \nu'^i$  і  $E^i, \nu^i$  – модулі пружності та коефіцієнти Пуассона в площині ізотропії;  $E'^i, \nu'^i$  – відповідні величини в перпендикулярній площині;  $G'^i$  – модуль зсуву.

Для ізотропного тіла усі напрямки еквівалентні стосовно пружних властивостей і співвідношення закону Гука набувають вигляду

$$\begin{aligned}
e_s^i &= \frac{1}{E^i} \left[ \sigma_s^i - \nu^i (\sigma_t^i + \sigma_\gamma^i) \right]; \quad e_t^i = \frac{1}{E^i} \left[ \sigma_t^i - \nu^i (\sigma_s^i + \sigma_\gamma^i) \right]; \\
e_\gamma^i &= \frac{1}{E^i} \left[ \sigma_\gamma^i - \nu^i (\sigma_s^i + \sigma_t^i) \right]; \\
e_{t\gamma}^i &= \frac{1}{G^i} \tau_{t\gamma}^i; \quad e_{s\gamma}^i = \frac{1}{G^i} \tau_{s\gamma}^i; \quad e_{st}^i = \frac{1}{G^i} \tau_{st}^i,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

де  $E^i$  – модуль пружності,  $G^i = \frac{E^i}{2(1+\nu^i)}$  – модуль зсуву,  $\nu^i$  – коефіцієнт Пуассона.

На пружні сталі, що входять до рівнянь узагальненого закону Гука (2.5), накладаються певні обмеження, які є свідченням того факту, що потенціальна енергія у вигляді (індекс  $i$  опущено)

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} a_{11} \sigma_s^2 + a_{12} \sigma_s \sigma_t + a_{13} \sigma_s \sigma_\gamma + a_{16} \sigma_s \tau_{st} + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_t^2 + a_{23} \sigma_t \sigma_\gamma + a_{26} \sigma_t \tau_{st} + \\
& + \frac{1}{2} a_{33} \sigma_\gamma^2 + a_{12} \sigma_s \sigma_t + a_{36} \sigma_\gamma \tau_{st} + \frac{1}{2} a_{44} \tau_{t\gamma}^2 + a_{45} \tau_{t\gamma} \tau_{s\gamma} + \frac{1}{2} a_{55} \tau_{s\gamma}^2 + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{st}^2
\end{aligned}$$

являє собою додатну визначену квадратичну форму [202, 307]. Виходячи з необхідних та достатніх умов додатної визначеності квадратичної форми [38], можна записати обмеження, що накладаються на пружні сталі у вигляді

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{16} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{26} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{16} & a_{23} \dots a_{66} \end{vmatrix} > 0.$$

Таким чином, для ортотропного матеріалу мають місце залежності

$$1 - \nu_{t\gamma} \nu_{\gamma t} > 0, \quad 1 - \nu_{s\gamma} \nu_{\gamma s} > 0, \quad 1 - \nu_{ts} \nu_{st} > 0;$$

$$1 - \nu_{st} \nu_{ts} - \nu_{t\gamma} \nu_{\gamma t} - \nu_{s\gamma} \nu_{\gamma s} - 2\nu_{st} \nu_{t\gamma} \nu_{\gamma s} > 0;$$

$$|\nu_{st}| < (E_t/E_s)^{1/2}, \quad |\nu_{ts}| < (E_s/E_t)^{1/2};$$

$$|\nu_{t\gamma}| < (E_\gamma/E_t)^{1/2}, \quad |\nu_{\gamma t}| < (E_t/E_\gamma)^{1/2};$$

$$|\nu_{\gamma s}| < (E_s/E_\gamma)^{1/2}, \quad |\nu_{s\gamma}| < (E_\gamma/E_s)^{1/2};$$

$$\nu_{st} \nu_{t\gamma} \nu_{\gamma s} < \frac{1}{2} \left[ 1 - \nu_{st}^2 \frac{E_s}{E_t} - \nu_{t\gamma}^2 \frac{E_t}{E_\gamma} - \nu_{\gamma s}^2 \frac{E_\gamma}{E_s} \right] < \frac{1}{2}.$$

На пружні сталі трансверсально-ізотропного матеріалу накладені обмеження

$$-1 \leq \nu \leq 1 - 2\nu' \frac{E}{E'}, \quad -\left(\frac{E}{E'}\right)^{1/2} \leq \nu \leq \left(\frac{E}{E'}\right)^{1/2}, \quad E > 0, \quad E' > 0$$

і для ізотропного матеріалу

$$E > 0, \quad -1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}.$$

Співвідношення (2.4) – (2.5) являють собою замкнену систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує напруженодеформований стан шаруватих нетонких некругових ортотропних циліндричних оболонок в області  $\{0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_p \leq \gamma \leq \gamma_q\}$ . Для визначення свавілля, що міститься у загальному інтегралі цієї системи, необхідно задати граничні умови. На зовнішній та внутрішній бічних поверхнях оболонок граничні умови можна подати у вигляді

$$\sigma_\gamma^q = q_\gamma^+; \quad \tau_{s\gamma}^q = q_s^+; \quad \tau_{t\gamma}^q = q_t^+ \quad \text{при } \gamma = \gamma_q;$$

$$\sigma_{\gamma}^p = q_{\gamma}^-; \quad \tau_{s\gamma}^p = q_s^-; \quad \tau_{t\gamma}^p = q_t^- \quad \text{при } \gamma = \gamma_P. \quad (2.8)$$

Крім умов на обмежуючих поверхнях, необхідно задовольняти граничні умови на торцях при  $s = 0; s = l$ .

Нехай на торцях оболонок має місце діафрагма, абсолютно жорстка в своїй площині та гнучка при виході з неї. Граничні умови в цьому випадку можна записати так (умови простого обпирання):

$$\sigma_s^i = u_t^i = u_{\gamma}^i = 0 \quad \text{при } s = 0; \quad s = l. \quad (2.9)$$

Оболонки замкнені вздовж напрямної, тому мають виконуватись умови періодичності

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma}^i(s, t, \gamma) &= \sigma_{\gamma}^i(s, t + T, \gamma); \\ \tau_{s\gamma}^i(s, t, \gamma) &= \tau_{s\gamma}^i(s, t + T, \gamma); \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ u_t^i(s, t, \gamma) &= u_t^i(s, t + T, \gamma), \end{aligned}$$

тут  $T$  – період.

При побудові розв'язувальної системи диференціальних рівнянь приймаються такі припущення: напрямна серединної поверхні являє собою довільну неперервну гладку криву; механічні характеристики є змінними вздовж товщини, залишаючись сталими вздовж твірної; закон розподілу прикладених до оболонки поверхневих та об'ємних сил може бути заданий довільним чином.

Метою даної роботи є розробка методики, що дає змогу отримати якомога більш точний розв'язок, тому за розв'язувальні, обрано функції, в яких формулюються умови спряження шарів (2.2) та граничні умови (2.8), а саме: компоненти напружень  $\sigma_{\gamma}^i, \tau_{s\gamma}^i, \tau_{t\gamma}^i$  та компоненти переміщень  $u_{\gamma}^i, u_s^i, u_t^i$ . Після деяких перетворень з вихідних рівнянь можна отримати розв'язувальну

систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами у вигляді

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \gamma} &= (c_2^i - 1) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_\gamma^i - \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial t} + b_{22}^i \left( \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma^i + \\
 &+ b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^{i2}} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}; \\
 \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma}^i - b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s^2} - \\
 &- b_{66}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} \right) - (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s \partial t}; \\
 \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial t} - \frac{2}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma}^i - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i \right) - \\
 &- (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s \partial t} - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} \right) - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s^2}; \\
 \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma} &= c_4^i \sigma_\gamma^i - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i - c_1^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}; \tag{2.10} \\
 \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma} &= a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i - \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s}, \quad \frac{\partial u_t^i}{\partial \gamma} = a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_t^i \\
 (b_{11}^i &= a_{22}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{12}^i = -a_{12}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{22}^i = a_{11}^i a_{66}^i / \Omega^i; \\
 b_{66}^i &= (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) / \Omega^i; \quad \Omega^i = (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) a_{66}^i; \\
 c_1^i &= -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i.
 \end{aligned}$$

Напруження  $\sigma_t^i$ ,  $\sigma_s^i$ ,  $\tau_{st}^i$  визначаються через розв'язувальні функції таким чином

$$\sigma_s^i = c_2^i \sigma_\gamma^i + b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i + b_{22}^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t};$$

$$\sigma_t^i = c_2^i \sigma_\gamma^i + b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i + b_{12}^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t};$$

$$\tau_{st}^i = \frac{1}{a_{66}^i} \left[ \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s} \right].$$

За рахунок граничних умов (2.9), тривимірну країову задачу для системи рівнянь (2.10) з граничними умовами (2.8) можна звести до двовимірної на основі методу відокремлення змінних, шляхом розвинення розв'язувальних функцій та компонент навантаження в ряди Фур'є вздовж твірної оболонки. Відповідні ряди Фур'є записуються для кожного шару у вигляді (надалі індекс  $i$  опускається)

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (2.11)$$

де

$$X = \{\sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q_\gamma, q_t\}; \quad Y = \{\tau_{s\gamma}, u_s, q_s\} \quad \lambda_n = \pi n / l \quad (0 \leq s \leq l).$$

Після підстановки рядів Фур'є (2.11) до розв'язувальної системи рівнянь (2.10) і граничних умов (2.8) та відокремлення змінних, двовимірну країову задачу можна описати системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами відносно амплітудних значень розв'язувальних функцій відповідних рядів (2.11) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_{\gamma,n} + \lambda_n \tau_{s\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial t} + b_{22} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_{\gamma,n} + \\ &+ b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{s,n} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{s\gamma,n}}{\partial \gamma} = & -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma,n} - b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,n} - \\
& - b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\
\frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial \gamma} = & -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma,n} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} \right) - \\
& + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} \right) + b_{66} \lambda_n^2 u_{t,n}; \\
\frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \gamma} = & c_4 \sigma_{\gamma,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + c_1 \lambda_n u_{s,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\
\frac{\partial u_{s,n}}{\partial \gamma} = & a_{55} \tau_{s\gamma,n} - \lambda_n u_{\gamma,n}; \quad \frac{\partial u_{t,n}}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{t,n} \quad (n=1, N)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma,n} = & q_{\gamma,n}^-; \quad \tau_{s\gamma,n} = q_{s,n}^-; \quad \tau_{t\gamma,n} = q_{t,n}^- \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_p; \\
\sigma_{\gamma,n} = & q_{\gamma,n}^+; \quad \tau_{s\gamma,n} = q_{s,n}^+; \quad \tau_{t\gamma,n} = q_{t,n}^+ \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_q.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для відокремлення змінних в напрямку напрямної циліндра застосовано метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є.

## 2.2 Використання методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є при розв'язуванні краївих задач

Розглядається один підхід до розв'язання двовимірних краївих задач зі змінними параметрами в двох координатних напрямках, що описують напружене-деформований стан пружних тіл під дією різних навантажень за певних граничних умов. Цей підхід базується на застосуванні методу

апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є при зведенні двовимірної країової задачі до одновимірної, розробленого у відділі обчислювальних методів Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України [80, 109, 278].

Система диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описує напружене-деформований стан пружного тіла має вигляд

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} = \Phi_i \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k} \right) + f_i(\alpha, \beta) \quad (i, j, k = \overline{1, l}), \quad (2.14)$$

де  $Z_i = Z_i(\alpha, \beta)$  ( $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ ) – шукані розв'язувальні функції,  $\Phi_i$  – лінійні функції відносно своїх аргументів;  $f_i(\alpha, \beta)$  – праві частини,  $O\alpha\beta$  – ортогональна криволінійна система координат. Для відкритих пружних тіл до цієї системи рівнянь додають граничні умови на контурах  $\alpha = const, \beta = const$ . Для замкнених в одному з координатних напрямків тіл граничні умови замінюють умовами періодичності.

На підставі періодичності, наприклад, для замкнених пружних тіл в напрямку  $O\beta$ , країова задача для системи рівнянь (2.14) дозволяє подати розв'язки у вигляді рядів Фур'є за координатою  $\beta$  для всіх шуканих функцій. При цьому необхідно, щоб усі члени рівнянь з відповідними коефіцієнтами не перешкоджали відокремленню змінних у цьому напрямку. В більш простих випадках таким чином можна відокремити змінні за допомогою розвинення всіх функцій в звичайні ряди Фур'є [73]

$$Z_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ Z_{in}(\alpha) \cos n\beta + Z'_{in}(\alpha) \sin n\beta \right] \quad (i = \overline{1, l}). \quad (2.15)$$

Проте в багатьох випадках система диференціальних рівнянь (2.14) містить члени з коефіцієнтами, що характеризують геометричні параметри тіла та інші

змінні параметри, які перешкоджають відокремленню змінних шляхом подання шуканих функцій рядами Фур'є. Для подолання цих перешкод зазначені члени замінюються доповняльними функціями, які визначаються через розв'язувальні функції та їх похідні. В результаті цього, розв'язувальна система рівнянь набуває такого вигляду

$$Z_i = \frac{\partial Z_i}{\partial \alpha} = F_i \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^k Z_j}{\partial \beta^k}, \varphi_r^p \right) + f_i(\alpha, \beta), (i, j, k = \overline{1, l}; r = \overline{1, R}; p = \overline{1, P}), \quad (2.16)$$

в якій доповняльні функції мають вигляд:

$$\varphi_r^p = \varphi_r^p \left( \alpha, \beta, \frac{\partial^s Z_i}{\partial \alpha^s}, \frac{\partial^t Z_i}{\partial \beta^t} \right) \quad (s, t \leq l). \quad (2.17)$$

Отримана система диференціальних рівнянь (2.16) крім розв'язувальних функцій  $Z_i$  містить в собі ще і доповняльні функції  $\varphi_r^p$ . При цьому значно збільшується загальна кількість невідомих, що необхідно враховувати при чисельному розв'язанні крайової задачі.

Формально коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (2.16) не залежать від координати  $\beta$ , тому для побудови розв'язку вихідної крайової задачі всі функції, що входять до системи рівнянь (2.16), подаються у вигляді розвинень в ряди Фур'є за цією координатою, а саме

$$\tilde{X}(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^M \tilde{X}_m(\alpha) \cos \lambda_m \beta; \tilde{Y}(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^M \tilde{Y}_m(\alpha) \sin \lambda_m \beta; \lambda_m = 2\pi m / T, \quad (2.17)$$

де  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{Y}$  – розв'язувальні та доповняльні функції системи (2.16),  $T$  – період.

Підставляючи ряди (2.17) в систему рівнянь (2.16), після відокремлення змінних та деяких перетворень, для амплітудних значень рядів (2.17) отримано зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\frac{dZ_{im}}{d\alpha} = F_{im}(\alpha, Z_{im}, \varphi_{rm}^p) + f_{im}(\alpha), (i = \overline{1, l}; m = \overline{0, M}; r = \overline{1, R}; p = \overline{1, P}). \quad (2.18)$$

Аналогічно чинять з граничними умовами і отримують граничні умови для амплітудних значень функцій  $Z_{im}$  на кінцях інтервалу  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ . Система рівнянь (2.18) крім амплітудних значень розв'язувальних функцій утримує ще амплітудні значення доповняльних функцій, які треба визначати окремо. Для їх визначення при інтегруванні системи (2.18) чисельним методом одночасно для всіх гармонік, на кожному кроці інтегрування при фіксованому значенні  $\alpha$ , обчислюють амплітудні значення доповняльних функцій в деяких точках інтервалу  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ , використовуючи поточні амплітудні значення розв'язувальних функцій. Далі будуються ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок [250, 252]. Зі збільшенням кількості точок, в яких обчислюються значення доповняльних функцій, дискретний ряд Фур'є все менше відрізняється від точного ряду Фур'є і таким чином можна отримати розв'язок задачі з високим степенем точності. За допомогою, наприклад, схеми Рунге [143] знаходять коефіцієнти дискретних рядів Фур'є, які підставляють до системи рівнянь (2.18) і роблять наступний крок інтегрування. На кінцях інтервалу  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  задовольняють граничні умови.

На практиці, при розв'язуванні прикладних задач зазвичай використовують лише небагато перших членів дискретного ряду Фур'є, оскільки коефіцієнти Фур'є швидко спадають, а з ними швидко зменшується вплив далеких гармонік. Відомо, що в питанні про точність наближень при обчисленні рядів Фур'є важливу роль відіграє швидкість спадання коефіцієнтів Фур'є, що в свою чергу пов'язано з диференціальними властивостями функції, подовженої на весь

проміжок  $(-\infty, \infty)$ . Поряд з цим існують наближені підходи, які дозволяють порівняти значення коефіцієнта дискретного ряду Фур'є, побудованого на скінченій множині точок, з точним значенням цього ж та інших коефіцієнтів ряду Фур'є для тієї ж функції, яка задана аналітично [250].

Нехай функція  $y(x)$  задана на множині точок  $x_i = i \frac{2\pi}{k}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ ),

тобто відомі її значення в цих точках  $y(x_i) = y_i$ . Ряд Фур'є для функції  $y(x)$ , що задана на дискретній множині точок  $x_i$  ( $i = \overline{0, k-1}$ ) записується у вигляді

$$y(x) = a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \quad (n \leq k/2),$$

де коефіцієнти  $a_0$ ,  $a_m$ ,  $b_m$  визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i; \quad a_m = \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{k-1} y_i \cos m \frac{2\pi i}{k}; \quad b_m = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{k-1} y_i \sin m \frac{2\pi i}{k} \quad (m \leq k/2). \quad (2.19)$$

Наближені значення коефіцієнтів ряду Фур'є пов'язані з точними значеннями коефіцієнтів цього ряду таким чином.

Точний ряд Фур'є для функції  $y = y(x)$ , яка задана на інтервалі  $[0, 2\pi]$  аналітично і двічі диференційована має вигляд

$$y(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos jx + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin jx.$$

Тут великими літерами позначені точні значення коефіцієнтів. Покладаючи  $x_i = i \frac{2\pi}{k}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ ), обчислюємо ті значення функції  $y_i = y(x_i)$ , які

утримуються в формулах (2.19). Підставляючи ці значення  $y_i$  в формули (2.19), після деяких перетворень можна отримати

$$a_0 = A_0 + A_k + A_{2k} + A_{3k} + \dots,$$

$$a_m = A_m + A_{k-m} + A_{k+m} + A_{2k-m} + \dots,$$

$$b_m = B_m - B_{k-m} + B_{k+m} - B_{2k-m} + \dots (m \leq k/2).$$

Зокрема,

1) при  $k = 12$ :

$$a_0 = A_0 + A_{12} + \dots, a_1 = A_1 + A_{11} + \dots, a_2 = A_2 + A_{10} + \dots, a_3 = A_3 + A_9 + \dots;$$

2) при  $k = 24$ :

$$a_0 = A_0 + A_{24} + \dots, a_1 = A_1 + A_{23} + \dots, a_2 = A_2 + A_{22} + \dots, a_3 = A_3 + A_{21} + \dots,$$

$$a_4 = A_4 + A_{20} + \dots, a_5 = A_5 + A_{19} + \dots, a_6 = A_6 + A_{18} + \dots, a_7 = A_7 + A_{17} + \dots,$$

$$a_8 = A_8 + A_{16} + \dots, \quad \text{i т. д.}$$

З цих рівностей видно, що при  $k = 12$  можна враховувати тільки 2 – 3 гармоніки, а при  $k = 24$  – можна очікувати достатню точність уже для перших 7 – 8 гармонік.

Повертаючись до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (2.12), треба зазначити, що вона містить в собі добутки розв'язувальних функцій на коефіцієнти, які перешкоджають відокремленню змінних в напрямку напрямної. Замість зазначених добутків в цій системі записують доповняльні функції у вигляді (надалі індекс  $n$  у позначенні розв'язувальних функцій та компонент навантаження опускаємо)

$$\varphi_1^j = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1,5});$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \tau_{t\gamma}; u_t \right\} \quad (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\
\varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\
\varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_4^2.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

З врахуванням виразів (2.20) система рівнянь (2.12) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= \lambda_n \tau_{t\gamma} + (c_2 - 1) \varphi_1^1 - \varphi_4^1 + b_{22} \varphi_1^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_1^4 + b_{22} \varphi_4^3; \\
\frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma + b_{11} \lambda_n^2 u_s - \varphi_{1,n}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_1^3 - b_{66} \varphi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_4^2; \\
\frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -b_{66} \lambda_n^2 u_t - c_2 \varphi_3^1 - 2 \varphi_2^1 - b_{22} \varphi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_3^3 - b_{22} \varphi_7; \\
\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma + c_1 \lambda_n u_s - c_2 \varphi_4^2 - c_2 \varphi_1^3; \\
\frac{\partial u_s}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

з граничними умовами (2.13).

Формально, коефіцієнти системи диференціальних рівнянь (2.21) не залежать від координати напрямної  $t$  і дозволяють відокремити змінні в цьому напрямку шляхом розвинень розв'язувальних, доповняльних функцій і компонент навантаження в ряди Фур'є вздовж напрямної оболонки. Зазначені ряди Фур'є подаються у вигляді

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t, \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t, \quad (2.22)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \{\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma, q_s\}, \\ \tilde{Y} &= \{\tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7, q_t\}, \quad \lambda_k = 2k\pi/T.\end{aligned}$$

Підстановка рядів (2.22) до розв'язувальної системи рівнянь (2.21) та граничних умов (2.13) дозволяє відокремити змінні і прийти до одномірної краєвої задачі, яку описано системою звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (2.22) у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= \lambda_n \tau_{s\gamma,k} + (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\ \frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\ \frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k} - c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2 \varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k}; \\ \frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_1 \lambda_n u_{s,k} + c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\ \frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})\end{aligned} \quad (2.23)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned}\gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^-; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^-; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^-; \\ \gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^+; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^+; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^+.\end{aligned} \quad (2.24)$$

Точний розв'язок краївої задачі для звичайних диференціальних рівнянь (2.23), (2.24) можна знайти в аналітичному вигляді лише в окремих випадках для кругових циліндричних оболонок. Так, наприклад, для ізотропних та трансверсально-ізотропних одношарових циліндричних оболонок розв'язок може бути представлений циліндричними функціями [24, 156, 160]. Для ортотропних оболонок отримано наближений розв'язок на основі асимптотичних розкладів за параметром в роботі [316].

Виходячи з цього, розв'язок краївих задач для отриманих диференціальних рівнянь будується за допомогою стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації [46]. Численна кількість проведених експериментів довела високу ефективність використання цього методу при розв'язуванні задач теорії оболонок, які зводяться до систем звичайних диференціальних рівнянь [66, 136].

Застосування чисельних методів для розв'язування розглядуваного класу задач дозволяє ефективно знаходити розв'язок для широкого діапазону геометричних та механічних параметрів, що характеризують некругову форму оболонки за довільної неоднорідності матеріалу по товщині з врахуванням силового навантаження.

Обрання за розв'язувальні, функції, в яких формулюються умови контакту суміжних шарів та граничні умови, дозволяє автоматично безперервно проводити розв'язування задачі для заданого числа неоднорідних шарів і обчислювати величини всіх факторів напруженого стану в заданих точках товщини оболонок.

Слід зазначити, що поверхня відліку поперечного перерізу може бути задана або в параметричній формі, або в полярній системі координат [143]. Нехай поверхня відліку задається в параметричній формі рівнянням

$$x = x(\theta); \quad z = z(\theta),$$

де  $\theta$  – деякий кутовий параметр в поперечному перерізі, тоді для функції  $V(t(\theta), y)$  перехід від координати  $t$  до координати  $\theta$  здійснюється таким чином

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \omega(\theta); \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\theta}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

При цьому радіус кривизни поверхні відліку буде

$$R(\theta) = \omega^3(\theta) \left/ \left( \frac{dx}{d\theta} \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{dz}{d\theta} \frac{d^2 x}{d\theta^2} \right) \right..$$

Якщо поверхня відліку задається в полярній системі координат  $\rho = \rho(\psi)$ , тоді ( $\psi$  – кутовий параметр в поперечному перерізі)

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{d\psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

і радіус кривизни обчислюється за формулою

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) / (\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho'').$$

Отримана крайова задача (2.23), (2.24) розв'язується одночасно для всіх гармонік рядів (2.22). В процесі інтегрування на кожному кроці застосування чисельного методу необхідно знаходити амплітудні значення доповняльних функцій. При цьому для кожного фіксованого значення  $\gamma_k$  відрізка  $[\gamma_p; \gamma_q]$  обчислюють в ряді точок напрямної  $t_i$  ( $i = \overline{1, R}$ ) величини

$$h_1^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{R_t(t_i) + \gamma_k}; \quad h_2^i = \frac{1}{H_2} = \frac{R_t(t_i)}{R_t(t_i) + \gamma_k} \quad (i = \overline{1, R});$$

$$\varphi_{1,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \{\sigma_{\gamma,m}; \tau_{s\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m}\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j = \overline{1, 4}); \quad \varphi_{1,i}^5 = (h_1^i)^2 \sum_{m=0}^M u_{\gamma,m} \cos \lambda_m t_i;$$

$$\varphi_{2,i}^j = h_1^i \sum_{m=0}^M \left\{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \right\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j=1,2); \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{3,i}^j &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \left\{ \sigma_{\gamma,m}; u_{\gamma,m}; u_{s,m} \right\} \sin \lambda_m t_i, \quad (j=\overline{1,3}); \\ \varphi_{4,i}^j &= h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \left\{ \tau_{t\gamma,m}; u_{t,m} \right\} \cos \lambda_m t_i, \quad (j=1,2); \quad \varphi_{4,i}^3 = h_1^i h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m u_{t,m} \cos \lambda_m t_i. \end{aligned}$$

Застосовуючи стандартну процедуру обчислення коефіцієнтів Фур'є для функції, яку задано таблицею, знаходять ці коефіцієнти для функцій (2.25). Значення  $\varphi_{1,m}^3, \varphi_{3,m}^3, \varphi_{4,m}^2$  ( $m = \overline{0, M}$ ) використовують для обчислення табличних значень функцій

$$\begin{aligned} \varphi_{5,i} &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{1,m}^3 \sin \lambda_m t_i; \quad \varphi_{6,i} = h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{3,m}^3 \cos \lambda_m t_i; \\ \varphi_{7,i} &= -h_2^i \sum_{m=0}^M \lambda_m \varphi_{4,m}^2 \sin \lambda_m t_i \quad (i = \overline{1, R}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

після чого, обчислюють коефіцієнти Фур'є для функцій (2.26). Знайдені коефіцієнти для функцій (2.25), (2.26) підставляють до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (2.23) і виконують наступний крок інтегрування, переходячи від точки  $\gamma_k$  до точки  $\gamma_{k+1}$ . На кінцях інтервалу  $[\gamma_p; \gamma_q]$  задовольняють граничні умови (2.24).

### 2.3 Деякі оцінки достовірності та точності отримуваних розв'язків при застосуванні чисельно-аналітичних методів

Запропонована методика розв'язування класу задач про просторовий напружено-деформований стан нетонких некругових циліндричних оболонок складається з п'яти етапів: відокремлення змінних в напрямку твірної, введення

доповняльних функцій, відокремлення змінних в напрямку напрямної, чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та апроксимації доповняльних функцій дискретними рядами Фур'є.

При застосуванні такого підходу, похибка отримуваних результатів виникає безпосередньо на двох останніх етапах за рахунок застосування чисельного методу дискретної ортогоналізації та апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є (рис. 2.2).

Контроль збіжності отримуваних розв'язків здійснюється за рахунок варіації кількості точок для обчислення табличних значень доповняльних функцій та кількості членів відповідного ряду Фур'є, а також за рахунок варіації кількості точок інтегрування та точок ортогоналізації.

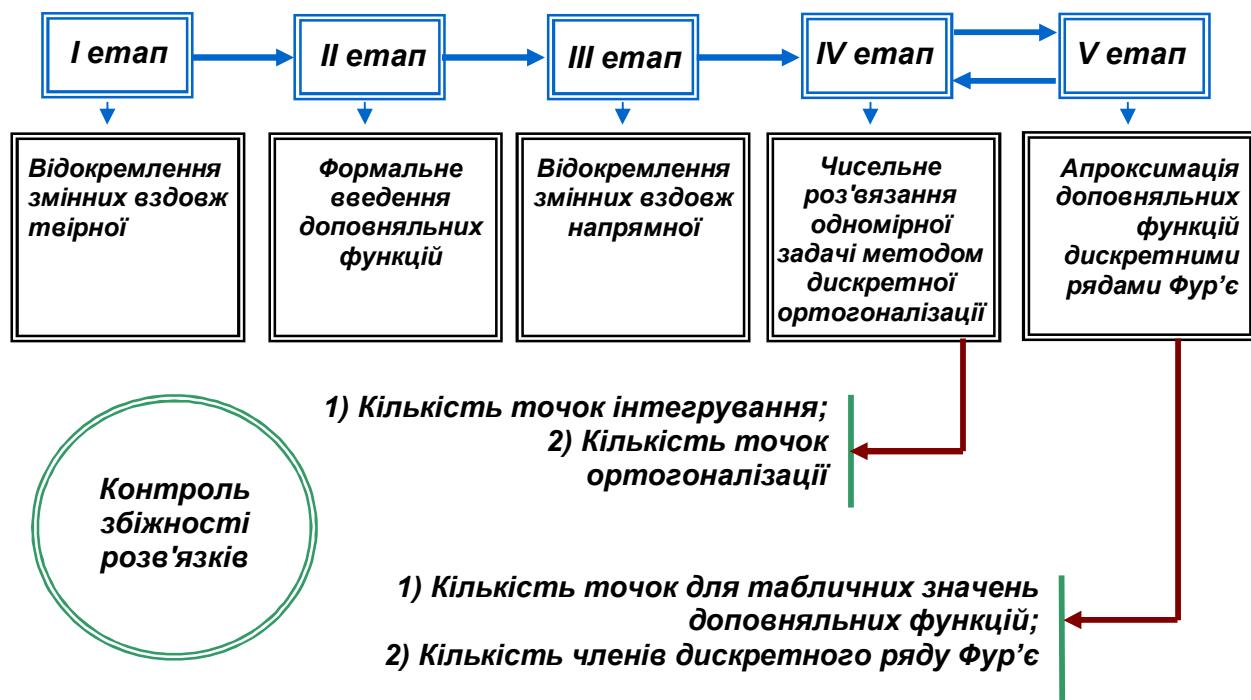


Рис. 2.2 Виникнення похибки на етапах розв'язування задачі

Оскільки дискретний ряд Фур'є при збільшенні кількості точок, в яких знаходяться значення доповняльних функцій, а також при збільшенні утримуваних членів, наближається до звичайного ряду Фур'є, доцільним буде встановити необхідну кількість указаних величин при розв'язуванні задач про

напруженого-деформованій стан нетонких циліндричних оболонок, що мають складну геометрію та структуру.

Розглянемо задачу про напруженого-деформованій стан ортотропних нетонких некругових циліндричних оболонок, що знаходяться під дією рівномірного навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні  $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ).

Нехай, поверхня відліку поперечного перерізу являє собою гофрований еліпс (рис. 2.3) і задається в полярній системі координат рівнянням

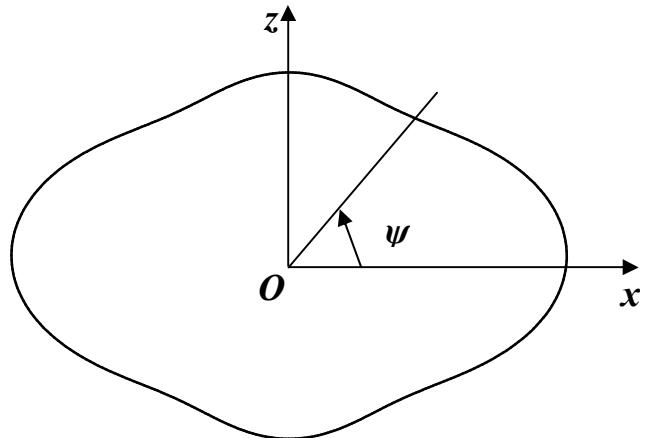


Рис. 2.3 Поперечний переріз поверхні відліку

$$\rho(\psi) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \quad e = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta},$$

$$a = r_0(1 - \Delta)/f, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \quad (2.27)$$

де  $\alpha$  – амплітуда,  $m$  – частота гофрування,  $e$  – ексцентрикитет еліпса,  $\Delta$  – степінь еліптичності.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних:  $l = 60$ ;  $r_0 = 40$ ; степінь еліптичності  $\Delta = 0,20$ ;  $h = 8$ ;  $\alpha = 3$ ;  $m = 4$ . При цьому враховано механічні характеристики для ортотропного матеріалу  $E_s = 3,68E_0$ ;  $E_\psi = 2,68E_0$ ;  $E_\gamma = 1,1E_0$ ;  $\nu_{s\psi} = 0,105$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,405$ ;  $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$ ;  $G_{s\psi} = 0,5E_0$ ;  $G_{s\gamma} = 0,45E_0$ ;  $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$ .

Також прийнято, кількість точок, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій  $R = 20; 40; 60; 80$  та кількість членів дискретних рядів Фур'є  $M = 4; 6; 8; 10; 12$ .

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 2.4 для нормальних переміщень поверхні відліку  $u_\gamma$  і у табл. 2.1 – для напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхні оболонки в середньому перерізі по довжині вздовж напрямної оболонки. В силу симетрії поперечного перерізу для напрямної взято інтервал  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ .

Як було зазначено вище, суттєвого збільшення точності отримання результатів задачі при застосуванні дискретних рядів Фур'є, можна досягти за рахунок збільшення точок, в яких обчислюються значення доповняльних функцій, а також за рахунок кількості членів, що утримуються в дискретних рядах Фур'є.

У випадку, коли поперечний переріз поверхні відліку заданий кривою, що не має сталого значення кривизни, доцільно обирати якомога більше точок вздовж напрямної, при цьому, одночасно збільшуячи і кількість утримуваних членів дискретного ряду Фур'є.

За недостатньої кількості утримуваних членів дискретних рядів Фур'є ( $M = 4$ ), навіть за великої кількості точок напрямної, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій, характер розподілу нормальних переміщень має вигляд, як у випадку кругової форми поперечного перерізу. При цьому недостатня кількість точок напрямної для табличних значень доповняльних функцій, при 12 членах дискретних рядів Фур'є впливає на кількісну складову розподілу переміщень. Аналогічний характер носить розподіл нормальних напружень (табл. 2.1).

Збіжність значень дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях (при  $s = 0$ ) в залежності від точності обчислення розв'язувальних функцій, пов'язаної з кількістю табличних значень доповняльних функцій та числом відповідних членів дискретних рядів Фур'є, вздовж напрямної оболонки, на зовнішній поверхні, наведена у вигляді графіків на рис. 2.5.

З графіків, наведених на рис. 2.5 видно, що збіжність до 4 знаків для значень напружень  $\tau_{s\psi}$  в околі кутових ліній, якими є напрямні на торцях оболонки, спостерігається при  $R = 60 - 80$  і  $M=12$ .

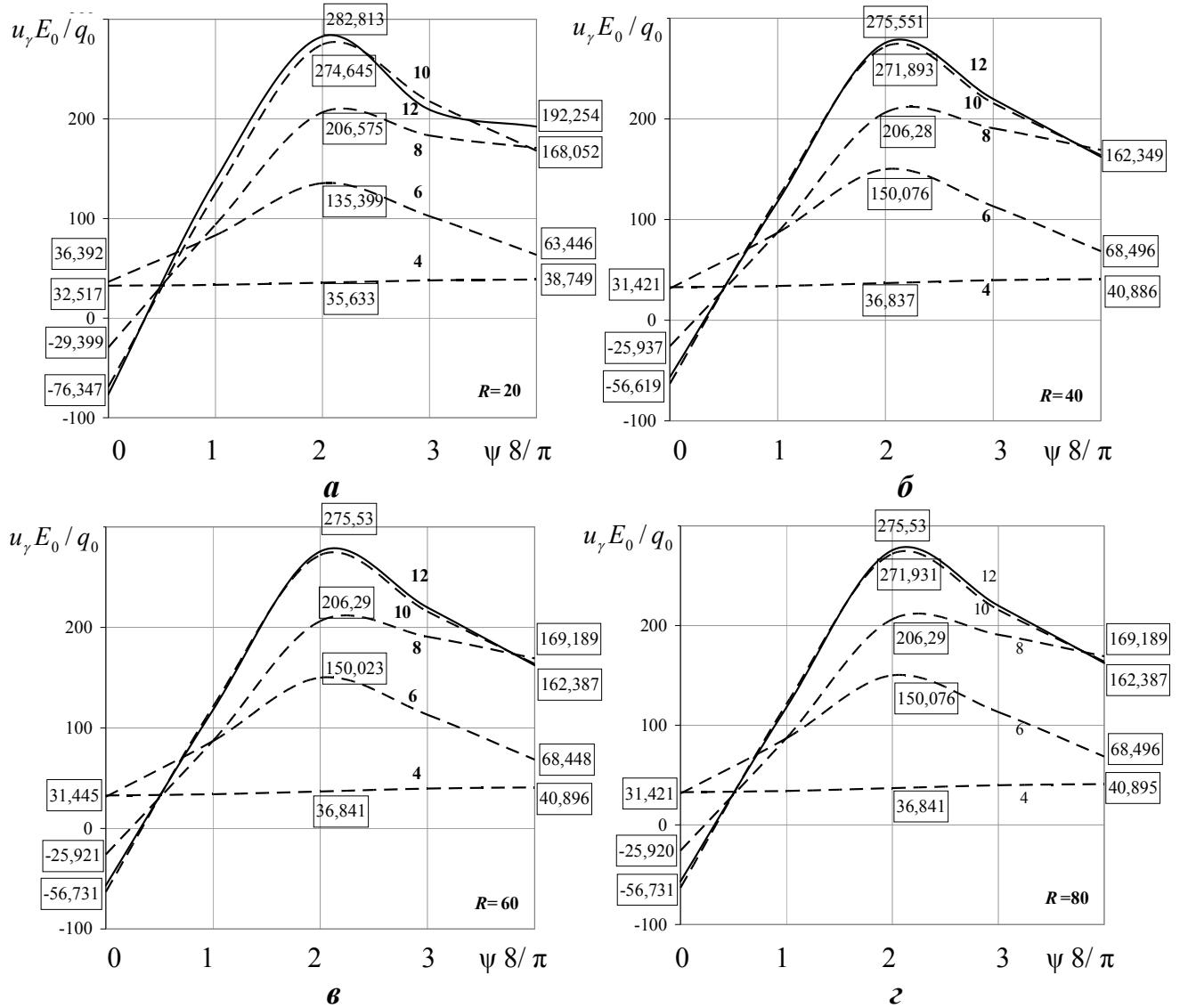


Рис. 2.4 Збіжність значень переміщень  $u_y$  при застосуванні дискретних рядів Фур'є

Таблиця 2.1 Залежність збіжності значень напружень  $\sigma_\psi$  від точності обчислень дискретних рядів Фур'є

$M$	$R$	$\sigma_\psi / q_0$					
		- $h/2$			$h/2$		
		$\psi = 0$	$\psi = \pi / 4$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 4$	$\psi = \pi / 2$
4	20	-1,270	-2,701	-1,437	1,885	1,312	2,215
	40	-1,272	-2,762	-1,481	1,888	1,339	2,312
	60	-1,272	-2,762	-1,481	1,888	1,339	2,312
6	20	-1,672	-6,960	-2,221	1,476	4,881	2,665
	40	-1,607	-7,595	-2,274	1,151	5,392	2,862
	60	-1,607	-7,598	-2,275	1,149	5,393	2,864
8	20	-0,443	-9,979	-5,041	-2,382	7,204	7,859
	40	-0,538	-9,939	-4,910	-2,145	7,203	7,736
	60	-0,539	-9,939	-4,911	-2,144	7,204	7,737
	80	-0,539	-9,939	-4,911	-2,144	7,204	7,737
10	20	0,691	-12,423	-4,228	-4,742	10,058	7,640
	40	0,603	-12,320	-4,107	-4,372	9,946	7,411
	60	0,604	-12,322	-4,107	-4,373	9,947	7,411
	80	0,604	-12,322	-4,107	-4,373	9,947	7,411
12	20	1,123	-12,755	-5,085	-4,497	10,408	8,180
	40	0,255	-12,514	-3,790	-4,023	10,076	7,348
	60	0,248	-12,512	-3,792	-4,030	10,075	7,350
	80	0,248	-12,512	-3,792	-4,030	10,075	7,350
14	60	0,248	-12,488	-3,810	-4,005	10,033	7,389
	80	0,248	-12,488	-3,810	-4,005	10,033	7,389

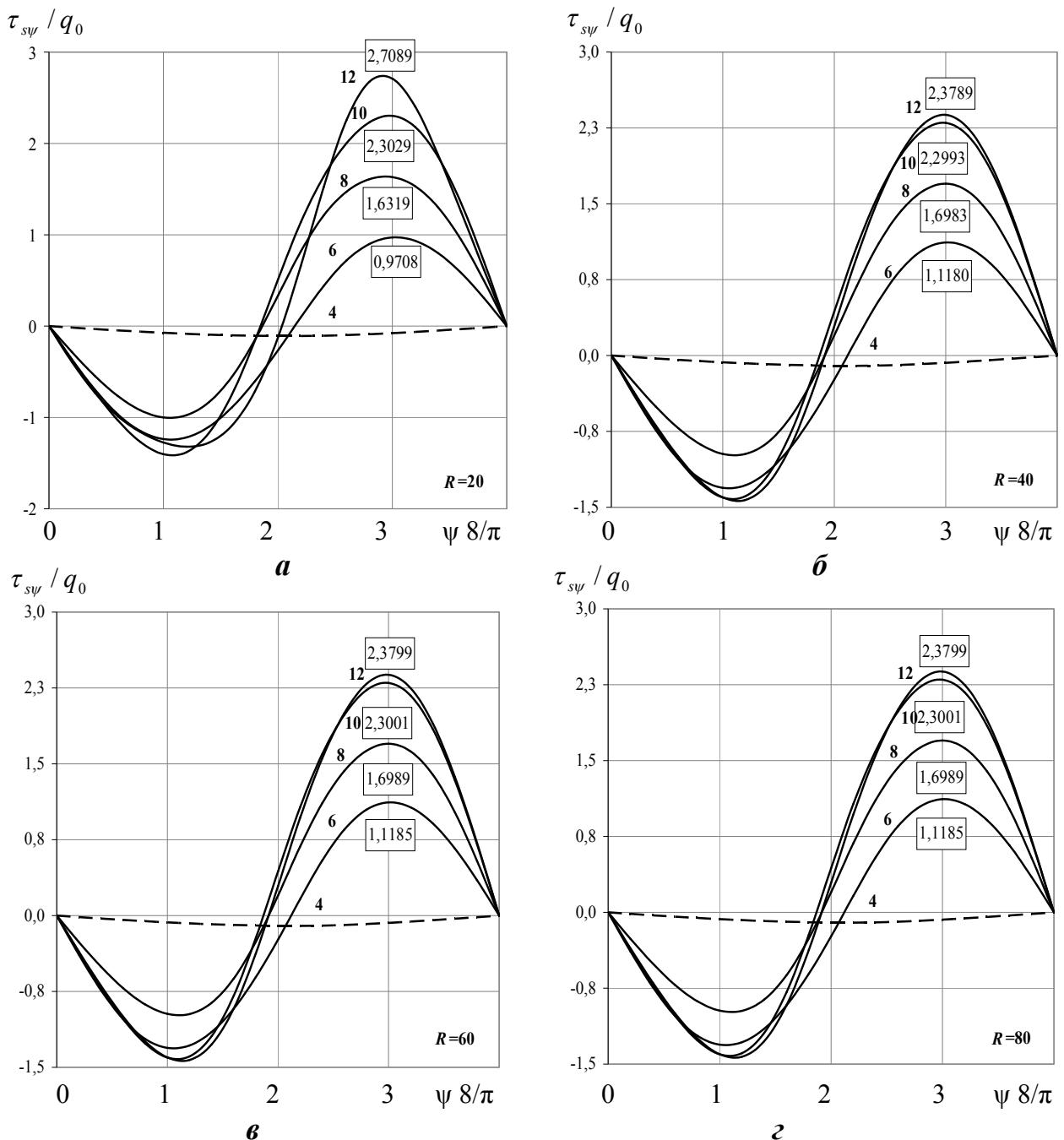


Рис. 2.5 Збіжність значень напружень  $\tau_{s\psi}$  при застосуванні дискретних рядів Фур'є

Розглянемо далі задачу про напружений стан ізотропних нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих напівгофрів, що знаходяться під дією внутрішнього тиску  $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ).

Поверхня відліку таких оболонок (рис. 2.6) задається рівняннями скороченої епіциклоїди і в параметричній формі має вигляд

$$x = (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left( \frac{A + a}{a} \psi \right); z = (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left( \frac{A + a}{a} \psi \right), \quad (2.28)$$

де  $A$  – радіус нерухомого кола,  $a$  ( $a > 0$ ) – радіус рухомого кола,  $\lambda a$  ( $\lambda < 1$ ) – відстань до радіуса рухомого кола,  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ) – кутовий параметр, центральний кут в поперечному перерізі.

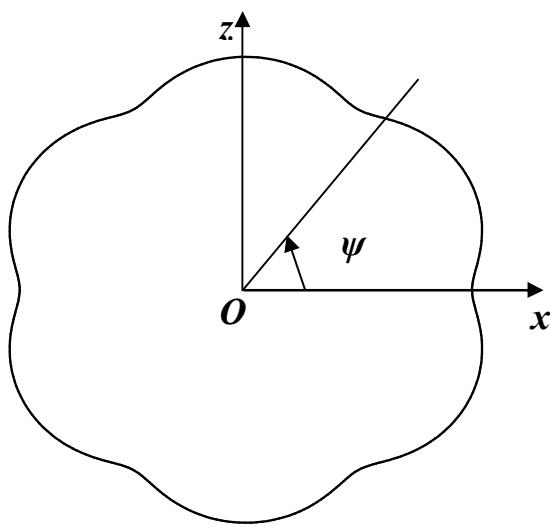


Рис. 2.6 Поперечний переріз поверхні відліку з опуклими з'єднаними напівгофрами

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 2.7 для нормальних переміщень поверхні відліку  $u_y$  і на рис. 2.8 – для напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки в середньому перерізі довжини вздовж напрямної.

З графіків, наведених на рис. 2.7 та рис. 2.8 можна прослідкувати безпосередньо вплив на збіжність розв'язків залежності між кількістю утримуваних членів в дискретних рядах Фур'є і кількістю точок, в яких визначаються значення доповняльних функцій.

Так, обравши недостатню кількість членів ряду  $M = 6$  (рис. 2.7 a), отримуємо лінійну залежність полів переміщень вздовж напрямної оболонки, як для випадку оболонки з круговим поперечним перерізом.

Задачу розв'язано за таких умов:  $A = 18$ ;  $a = 3$ ;  $\lambda = 0,4$ ;  $l = 40$ ;  $h = 2$ ;  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ . Крім того, кількість точок, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій  $R = 60; 90; 120; 150$  та кількість членів дискретних рядів Фур'є  $M = 6; 10; 14; 16$ .

Збільшення кількості точок, в яких визначаються табличні значення доповняльних функцій, призводить лише до кількісної зміни отриманих значень.

Якісну зміну розподілу переміщень дає збільшення числа утримуваних членів дискретних рядів Фур'є до  $M = 10$  (рис. 2.7 б). Проте остаточна картина розподілу переміщень має місце при  $M = 14, 16$  (рис. 2.7 в, г).

Необхідна кількість точок для обчислення значень доповняльних функцій  $R = 90, 120$ . При цьому досягається збіжність результатів до 4 – 5 знаків.

Аналогічну картину можна спостерігати для розподілу полів напружень (рис. 2.8).

Збіжність значень дотичних напружень  $\tau_{sy}$  на торцях (при  $s = 0$ ) в залежності від точності обчислення розв'язувальних функцій, пов'язаної з кількістю табличних значень доповняльних функцій та числом відповідних членів дискретних рядів Фур'є, вздовж напрямної оболонки, на зовнішній поверхні, наведена у вигляді графіків на рис. 2.9.

З графіків, наведених на рис. 2.9 видно, що збіжність до 4 – 5 знаків для значень напружень  $\tau_{sy}$  в критичних точках спостерігається так само при  $R = 120$  і  $M = 14$ .

Таким чином, при подальшому розв'язуванні задач, будуть враховуватись 12 членів дискретних рядів Фур'є для еліптичних гофрованих оболонок та 14 – для оболонок із з'єднаними напівгофрами.

При цьому табличні значення доповняльних функцій будуть обчислюватись у 80 точках для еліптичних гофрованих і у 120 точках – для оболонок зі з'єднаними напівгофрами.

При чисельному розв'язуванні краївих задач теорії оболонок доволі часто мають місце різні країові та локальні ефекти, що спричиняють значне зростання шуканих розв'язувальних функцій і метод зведення краївих задач до задач Коші призводить до нестійкого обчислювального процесу.

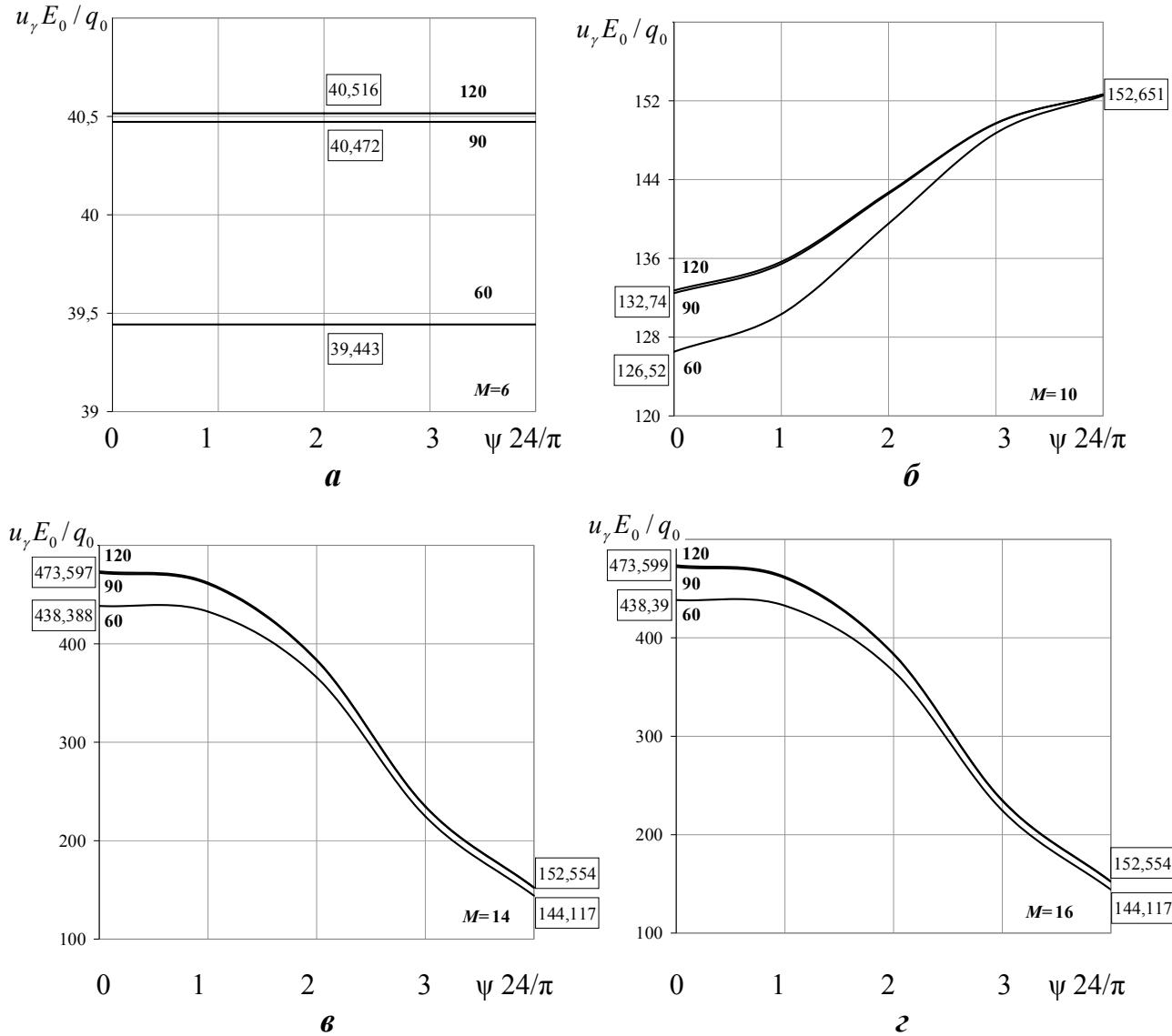


Рис. 2.7 Збіжність значень переміщень  $u_\gamma$  при застосуванні дискретних рядів Фур'є

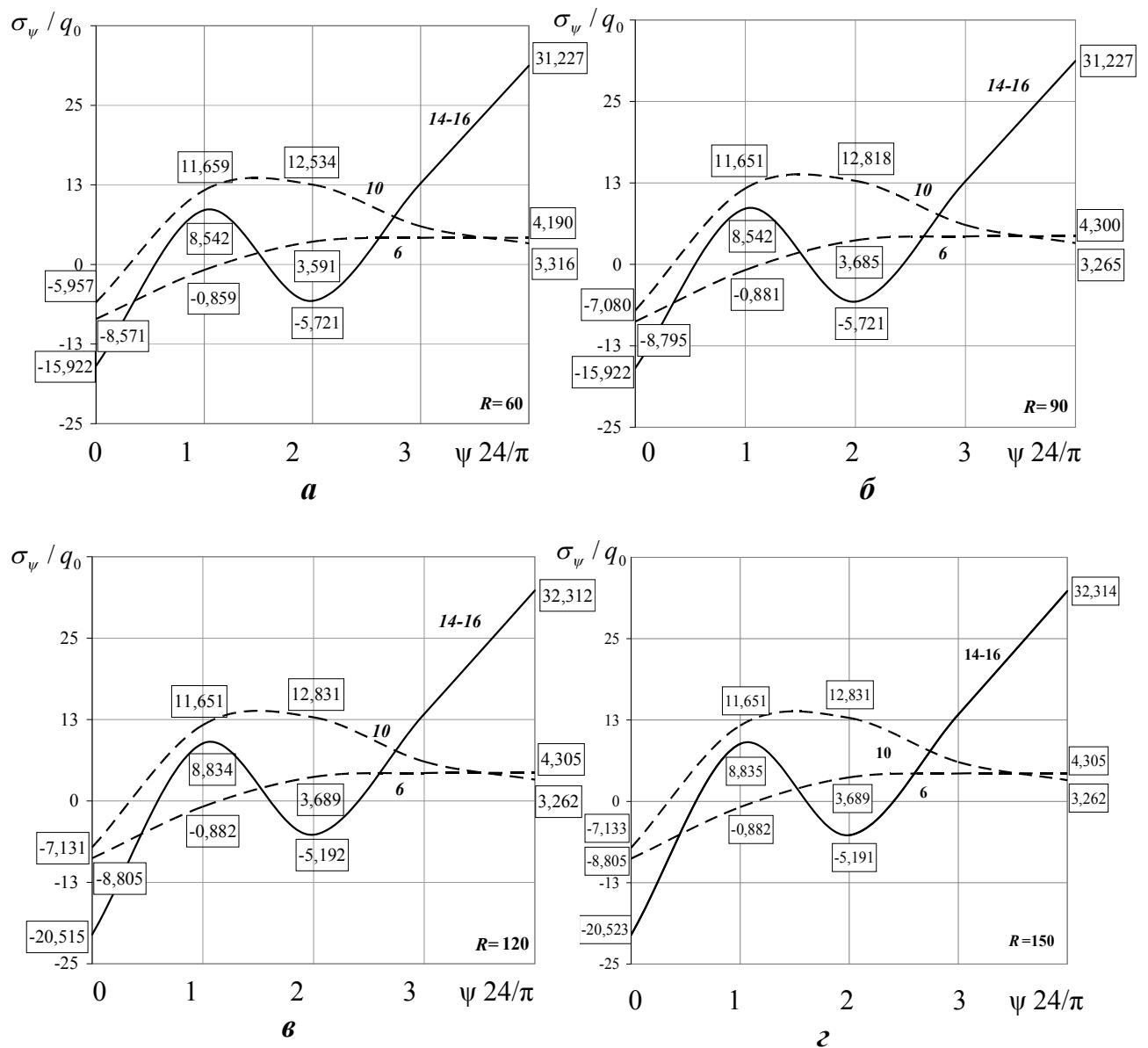


Рис. 2.8 Збіжність значень напружень  $\sigma_\psi$  при застосуванні дискретних рядів Фур'є

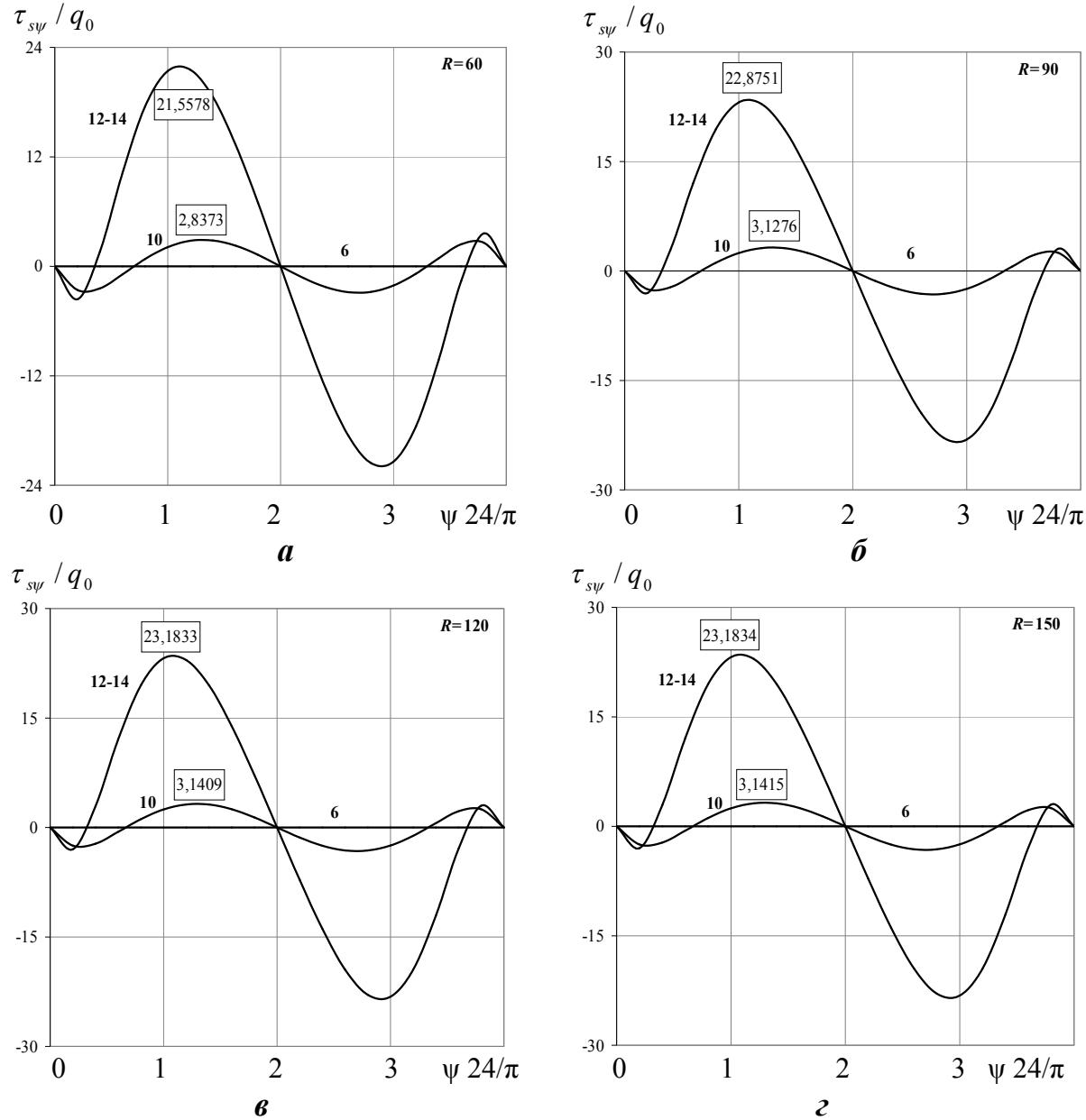


Рис. 2.9 Збіжність значень напружень  $\tau_{sy}$  при застосуванні дискретних рядів Фур'є

З математичної точки зору це означає, що у випадку, коли власні значення матриці системи значною мірою відрізняються за величиною дійсної частини, то при інтегруванні зі збільшенням аргументу в результаті втрати значущих чисел система векторів-розв'язків задачі Коші стає практично лінійно залежною і тому неможливо з достатнім степенем точності, задовольняючи граничні умови на іншому кінці інтервалу, визначити сталі інтегрування і самі шукані функції.

Щоб здолати розглянуті перешкоди, розроблено ряд методів, за допомогою яких чисельний розв'язок краївих задач зводиться до стійкого обчислювального процесу. Одним із таких методів є метод дискретної ортогоналізації Годунова [46], в якому за рахунок ортогоналізації векторів-розв'язків задач Коші в окремих точках, ліквідується зростання похибки.

При розв'язуванні одномірної краївої задачі із застосуванням методу дискретної ортогоналізації, використовується метод Рунге – Кутта з ортогоналізацією векторів – розв'язків в заданій кількості точок, число яких задається в залежності від необхідної точності. Застосування методу Рунге – Кутта четвертого порядку з ортогоналізацією векторів – розв'язків дозволяє отримати наближений розв'язок задачі з достатнім степенем точності (до 6 – 8 знаків). Цей факт підтверджується великим досвідом застосування даного методу для розв'язування задач теорії пластин та оболонок [61, 177].

Вибір точок ортогоналізації є довільним, тому виникає потреба оцінити вплив на точність отримуваних результатів кількості точок інтегрування та кількості точок ортогоналізації. При цьому необхідно враховувати, що кожна точка видачі результатів має бути точкою ортогоналізації, а кожна точка ортогоналізації – точкою інтегрування.

Розглянемо задачу про напружений стан ізотропних нетонких циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом у вигляді гофрованих еліпсів, поверхня відліку яких задається рівнянням (2.27), що знаходяться під дією внутрішнього тиску  $q_r = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних:  $l = 60$ ;  $r_0 = 40$ ; степінь еліптичності  $\Delta = 0,20$ ;  $h = 6, 10$ ;  $\alpha = 3$ ;  $m = 4$ ,  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ . Крім того, кількість точок інтегрування  $L^i = 4; 8; 16; 32; 64$  та кількість точок ортогоналізації  $L^o = 4; 8; 16; 32; 64$ . Точки ортогоналізації обирались, виходячи з нерівності  $L^o \leq L^i$ .

Результати розв'язку задачі наведено в табл. 2.2 в середньому перерізі по довжині оболонки для переміщень  $u_\psi$  та напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки для двох значень напрямної  $\psi = 0$  та  $\psi = \pi / 2$ .

Табл. 2.2. Збіжність результатів розв'язку задачі в залежності від кількості точок інтегрування та точок ортогоналізації

$L^i$	$L^o$	$h = 6$				$h = 10$			
		$u_\gamma E_0 / q_0$		$\sigma_\psi / q_0$		$u_\gamma E / q_0$		$\sigma_\psi / q_0$	
		$\psi = 0$		$\psi = \pi / 2$		$\psi = 0$		$\psi = \pi / 2$	
4	4	2252,72	-76,286	-20,287	-1,777	581,869	-5,793	-7,282	0,716
8	4	2253,14	-76,120	-20,291	-1,783	582,202	-5,667	-7,286	0,706
	8	2253,12	-76,116	-20,291	-1,784	582,202	-5,668	-7,286	0,706
16	4	2253,18	-76,108	-20,291	-1,784	582,224	-5,657	-7,286	0,705
	8	2253,17	-76,109	-20,291	-1,784	582,225	-5,657	-7,286	0,705
	16	2253,19	-76,114	-20,291	-1,784	582,224	-5,657	-7,286	0,705
	32	2253,16	-76,104	-20,291	-1,784	582,227	-5,656	-7,286	0,705
32	8	2253,16	-76,110	-20,291	-1,784	582,226	-5,657	-7,286	0,705
	16	2253,18	-76,111	-20,291	-1,784	582,226	-5,656	-7,286	0,705
	32	2253,16	-76,095	-20,291	-1,784	582,226	-5,656	-7,286	0,705
	64	2253,17	-76,102	-20,291	-1,784	582,227	-5,656	-7,286	0,705
64	8	2253,17	-76,111	-20,291	-1,784	582,224	-5,657	-7,286	0,705
	16	2253,20	-76,119	-20,291	-1,784	582,225	-5,656	-7,286	0,705
	32	2253,18	-76,097	-20,291	-1,784	582,230	-5,658	-7,286	0,705
	64	2253,17	-76,105	-20,291	-1,784	582,226	-5,655	-7,286	0,704

Аналіз результатів, наведених в табл. 2.2 показав, що відносна похибка при застосуванні методу дискретної ортогоналізації значно зменшується при збільшенні точок інтегрування і збільшенні при цьому точок ортогоналізації.

Так, достатньої точності (збіжності до 4 – 5 знаків) можна очікувати вже при 32 точках інтегрування та 16 точках ортогоналізації.

Слід зазначити, що у випадку шаруватих, неоднорідних по товщині оболонок, необхідно враховувати більшу кількість точок інтегрування та

ортогоналізації, щоб дослідити поведінку показників напруженодеформованого стану оболонок, особливо поблизу границь шарів.

## **2.4 Аналіз результатів розв'язування задач теорії оболонок на основі двох моделей**

Застосування точних аналітичних методів відокремлення змінних та методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, дозволяють отримати розв'язок задач про напруженено-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з достатнім степенем точності. Цього факту можна досягти за рахунок збільшення точок напрямної, в яких обчислюються значення доповнельних функцій, за рахунок збільшення кількості утримуваних членів в дискретних рядах Фур'є та за рахунок збільшення точок інтегрування та ортогоналізації. Внаслідок цього, таку методику можна використовувати при індуктивних оцінках результатів, отриманих на основі уточнених моделей теорії оболонок.

Цінність результатів, отриманих в просторовій постановці для конкретних задач полягає в тому, що вони в певній мірі можуть слугувати еталоном для оцінки правомірності припущенъ наближених моделей в якісному та кількісному плані. Результати, отримані в просторовій постановці мають бути достовірними, реалізованими в широких діапазонах зміни геометричних та механічних параметрів. Порівняння отриманих результатів розв'язків окремих задач в просторовій постановці і на основі наближених моделей слід розглядати як індуктивний прийом забезпечення їх точності. Звісно, що таке порівняння не може дати остаточної відповіді стосовно спроможності тієї чи іншої наближеної моделі, проте проведення значної кількості таких порівнянь дає можливість з великою вірогідністю та обґрутованістю визначити граници параметрів для яких мають місце розглядувані припущення.

При дослідженні напруженено-деформованого стану нетонких оболонок користуються різноманітними уточненими моделями [50, 67, 69]. Найбільш застосовуваною серед них є гіпотеза прямої лінії [67, 69] (зокрема, модель

Тимошенка). Для оцінки придатності уточненої теорії оболонок використовують порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами розв'язування тривимірних задач. Для кругових нетонких циліндричних оболонок деякі співставлення проведені в роботах [50, 67], що дозволило в певних межах геометричних та механічних параметрів, видів прикладеного навантаження та закріплення торців оболонки використовувати уточнену модель. При розгляді нетонких некругових циліндричних оболонок необхідно враховувати ще й степінь зміни кривизни поперечного перерізу, оскільки при цьому відношення товщини оболонки до радіуса кривизни може значно збільшуватись, що призводить до збільшення похибки прикладної теорії. У зв'язку з вищезазначенним, доцільно провести порівняння результатів розв'язання задач для некругових нетонких циліндричних оболонок в уточненій та просторовій постановках.

Були проведені розрахунки напружено-деформованого стану циліндричних ізотропних оболонок різної товщини з еліптичним поперечним перерізом, що знаходяться під дією навантаження, прикладеного на зовнішній бічній поверхні в залежності від зміни ступеня еліптичності в уточненій та просторовій постановках за умови простого обпирання торців (2.9).

Поперечний переріз поверхні відліку задано в параметричній формі (рис. 2.10)

$$x = b \cos \theta, \quad z = a \sin \theta, \quad (\theta \leq 0 \leq 2\pi), \quad (2.29)$$

де  $\theta$  – кутовий параметр поперечного перерізу,  $b, a$  – більша та менша півосі еліпса, периметр якого дорівнює довжині кола радіуса  $R$ , тобто

$$\pi(a+b)f = 2\pi R, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots, \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a},$$

де  $\Delta$  – параметр, що характеризує степінь еліптичності, при  $\Delta = 0$  – маємо круговий поперечний переріз.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ ;  $R = 60$ ; степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,05; 0,10; 0,15$ ; товщина оболонки  $h = 6, 8, 10, 12, 14$ ; коефіцієнт Пуасона  $\nu = 0,3$ , модуль Юнга  $E = E_0$ .

Результати аналізу наведено в табл. 2.3 для розподілу полів нормальних переміщень  $u_\gamma$  та в табл. 2.4 для розподілу полів напружень  $\sigma_\theta^+$  на зовнішній поверхні оболонки.

З табл. 2.3 можна побачити, що для кругової оболонки ( $\Delta = 0$ ) зі збільшенням товщини відмінність результатів за уточненою моделлю від результату, отриманого за просторовою моделлю, складає від 3 % до 6 %.

При цьому для еліптичної оболонки у вершині більшої півосі ( $\theta = 0$ ) зі збільшенням ступеня еліптичності  $\Delta$  від 0,05 до 0,15 відмінність результатів за двома моделями складає для  $h = 6$  від 4 % до 7 %, для  $h = 8$  від 5 % до 9 %, для  $h = 10$  – від 7 % до 10 %, для  $h = 12$  – від 8 % до 12 %.

Тобто, для менших значень товщини зі збільшенням ступеня еліптичності відмінність результатів за двома моделями більша, ніж для оболонок з більшою товщиною. При цьому, у вершині більш податливої зони ( $\theta = \pi / 2$ ) спостерігається така картина: зі збільшенням еліптичності величина розбіжностей значень переміщень за двома моделями зменшується.

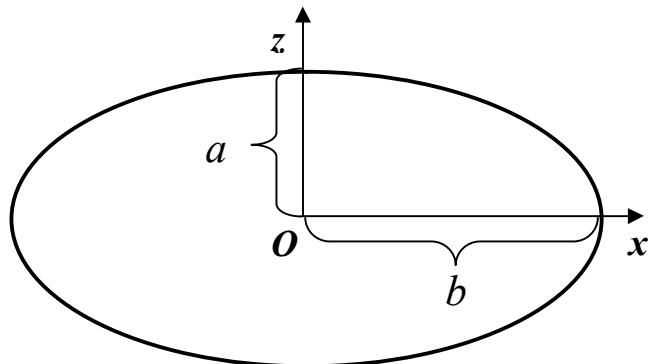


Рис. 2.10 Еліптичний поперечний переріз поверхні відліку

Табл. 2.3 Розподіл полів переміщень в залежності від товщини та ступеня еліптичності оболонки

$h$	$\Delta$	$u_\gamma E_0 / q_0$					
		$\theta = 0$			$\theta = \pi / 2$		
		$I$	$II$	Похибка, %	$I$	$II$	Похибка, %
6	0	572,79	553,40	3	572,79	553,40	3
	0,05	394,12	378,00	4	776,17	754,90	3
	0,10	237,28	225,90	5	1007,05	983,90	2
	0,15	99,47	92,10	7	1267,74	1243,00	2
8	0	410,67	396,50	3	410,67	396,50	3
	0,05	301,57	286,80	5	531,86	512,50	4
	0,10	204,28	190,90	7	665,08	644,80	3
	0,15	118,34	107,40	9	809,85	788,90	3
10	0	311,20	294,40	5	311,20	294,40	5
	0,05	241,38	225,30	7	387,01	369,70	4
	0,10	178,06	162,90	9	468,03	450,40	4
	0,15	121,55	109,50	10	553,23	535,70	3
12	0	244,25	228,90	6	244,25	228,90	6
	0,05	197,89	182,80	8	293,50	278,00	5
	0,10	155,07	140,50	9	344,85	329,60	4
	0,15	116,27	102,30	12	397,39	382,70	4

Таким чином, можна зробити висновок. В нетонких оболонках з еліптичним поперечним перерізом у вершині більшої півосі на відміну від кругових оболонок, значення нормальних переміщень зумовлене степенем збільшення кривизни оболонки.

Якщо радіус кола  $R = 60$  ( $\Delta = 0$ ), то при збільшенні еліптичності  $\Delta = 0,05; 0,10; 0,15$  для  $\theta = 0$  радіус кривизни приймає значення 51,54; 44,07; 37,48.

Таким чином, відношення товщини до радіуса кривизни  $h/R_\theta$  набувають значень  $h = 6 - 0,1; 0,12; 0,14; 0,16$ ;  $h = 8 - 0,13; 0,16; 0,18; 0,21$ ;  $h = 10 - 0,16; 0,19; 0,23; 0,27$ ; для  $h = 12 - 0,20; 0,23; 0,27; 0,32$  (табл. 2.5). Тобто, якщо для тонких оболонок прийнято  $h/R_\theta \leq 0,05$ , тоді з наведених співвідношень видно, що зі збільшенням степеня еліптичності і товщини оболонки, величина  $h/R_\theta$  суттєво збільшується, що й зумовлює збільшення відмінностей значень нормальних переміщень, отриманих за двома моделями.

З наведених в табл. 2.4 даних для значень напружень  $\sigma_\theta^+$  на зовнішній поверхні оболонки можна побачити як змінюються їх величини для  $\theta = 0$  та  $\theta = \pi/2$  для різних значень степеня еліптичності  $\Delta = 0,05; 0,10; 0,15$  та товщини  $h = 6, 8, 10, 12$ . А саме, в зоні більшої жорсткості ( $\theta = 0$ ) при фіксованому значенні товщини зі збільшенням параметра  $\Delta$ , величина напружень  $\sigma_\theta^+$  значно зменшується. Незначне зменшення величини  $\sigma_\theta^+$  відбувається зі збільшенням товщини.

Розбіжність між значеннями напружень  $\sigma_\theta^+$ , отриманих за уточненою моделлю та просторовою суттєво зростає для фіксованого значення товщини  $h$  при збільшенні степеня еліптичності та несуттєво зі збільшенням товщини. При  $\theta = \pi/2$  величина напружень  $\sigma_\theta^+$  при фіксованому значенні товщини зі збільшенням  $\Delta$  дещо зростає, а зі збільшенням товщини  $h$  – спадає. Різниця між результатами за двома теоріями не перевищує приблизно 10 %.

Таким чином, приведені результати дослідження напруженого стану некругових нетонких циліндричних оболонок на прикладі оболонок з еліптичним поперечним перерізом, свідчать про те, що при розрахунках оболонок зі змінною кривизною координатної поверхні, разом з врахуванням зміни товщини, необхідно враховувати зміну відношення  $h/R_\theta$  в різних зонах координатної поверхні, оцінюючи при цьому виникаючу похибку.

Табл. 2.4 Розподіл полів напружень в залежності від товщини та степеня еліптичності оболонки

$h$	$\Delta$	$\sigma_{\theta}^{+} / q_0$					
		$\theta = 0$			$\theta = \pi / 2$		
		$I$	$II$	Похибка, %	$I$	$II$	Похибка, %
6	0	10,7	10,28	4	10,7	10,28	4
	0,05	8,78	8,3	5	12,7	12,18	4
	0,10	6,83	6,36	7	14,73	14,21	4
	0,15	4,87	4,37	10	16,75	16,24	3
8	0	8	7,62	5	8	7,62	5
	0,05	6,64	6,05	9	9,27	8,74	6
	0,10	5,28	4,65	12	10,52	10	5
	0,15	3,88	3,19	18	11,71	11,21	4
10	0	6,25	5,69	9	6,25	5,69	9
	0,05	5,33	4,74	11	7,12	6,58	8
	0,10	4,36	3,73	14	7,91	7,4	6
	0,15	3,36	2,67	21	8,63	8,14	6
12	0	5,07	4,51	11	5,07	4,51	11
	0,05	4,42	3,84	13	5,66	5,13	9
	0,10	3,73	3,1	17	6,18	5,67	8
	0,15	3	2,31	23	6,63	6,14	7

Табл. 2.5 Відношення товщини до радіуса кривизни еліптичних оболонок в двох перерізах напрямної

$h$	$\Delta$	$R_\theta$	$h / R_\theta$	$R_\theta$	$h / R_\theta$
		$\theta = 0$		$\theta = \pi / 2$	
6	0	60	0,10	60	0,10
	0,05	51,54	0,12	69,59	0,09
	0,10	44,07	0,14	80,46	0,07
	0,15	37,48	0,16	92,82	0,06
8	0	60	0,13	60	0,13
	0,05	51,54	0,16	69,59	0,11
	0,10	44,07	0,18	80,46	0,10
	0,15	37,48	0,21	92,82	0,09
10	0	60	0,17	60	0,17
	0,05	51,54	0,19	69,59	0,14
	0,10	44,07	0,23	80,46	0,12
	0,15	37,48	0,27	92,82	0,11
12	0	60	0,20	60	0,20
	0,05	51,54	0,23	69,59	0,17
	0,10	44,07	0,27	80,46	0,15
	0,15	37,48	0,32	92,82	0,13

Надалі, говорячи про циліндри, будемо мати на увазі нетонкі циліндричні оболонки, для яких відношення товщини до радіуса кривизни поверхні відліку в окремих перерізах напрямної знаходиться в межах товстостінних та оболонок середньої товщини для яких застосовано просторову модель.

## 2.5 Результати та висновки

1. В просторовій постановці на основі основних рівнянь лінійної теорії пружності для некругових неоднорідних по товщині нетонких ортотропних циліндричних оболонок, отримано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, що описує тривимірну крайову задачу.
2. Із застосуванням аналітичного методу відокремлення змінних в одному з координатних напрямків, тривимірну задачу було зведене до двовимірної. Для зниження розмірності двовимірної крайової задачі, для відокремлення змінних у другому координатному напрямку, застосовано метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розроблений у відділі обчислювальних методів Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, який було адаптовано для розвязування більш складних задач для нетонких циліндричних оболонок з ускладненими геометричними та механічними параметрами.
3. Отримано розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації з достатнім степенем точності. При цьому, амплітудні значення введених до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь доповняльних функцій знаходяться на кожному кроці застосування чисельного методу як коефіцієнти дискретних рядів Фур'є.
4. Проведено дослідження збіжності розв'язку в залежності від кількості точок, в яких обчислюються табличні значення доповняльних функцій та кількості утримуваних членів в дискретних рядах Фур'є на прикладі задачі про напруженний стан нетонких ортотропних циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, а також ізотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів. Було встановлено, що для досягнення задовільної точності отримуваних результатів, необхідно враховувати співвідношення між

кількістю точок, в яких визначаються табличні значення доповняльних функцій та кількості членів, що утримуються в дискретних рядах Фур'є. При цьому для оболонок, поперечний переріз яких, описується кривою з більш змінною кривизною, необхідно використовувати більшу кількість точок напрямної для визначення табличних значень доповняльних функцій.

5. Досліджено збіжність отримуваних результатів при застосуванні чисельного методу дискретної ортогоналізації в залежності від кількості точок інтегрування та відповідної кількості точок ортогоналізації. Було показано, що достатню точність можна отримати (до 4 – 5 знаків) збільшуючи кількість як точок інтегрування, так і точок ортогоналізації.
6. Проведено аналіз результатів розв'язування задач теорії оболонок з еліптичним поперечним перерізом, отриманих на основі уточненої моделі Тимошенка, що базується на гіпотезі прямої лінії та в просторовій постановці із застосуванням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є. Було встановлено, що похибка в отриманих результатах залежить як від ступеня відхилення форми поперечного перерізу від кругової, так і від збільшення товщини оболонки. При застосуванні уточнених моделей, зокрема, гіпотези прямої лінії (модель Тимошенка) для некругових оболонок, при дії розподіленого навантаження за певних граничних умов на торцях, необхідно звертати увагу, крім товщини, ще і на відношення товщини до радіуса кривизни поверхні відліку, оцінюючи виникаючу похибку в різних перерізах.

## Розділ 3

### **РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ, ЩО МАЄ ДВОПАРАМЕТРИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ ВІД КРУГОВОЇ ФОРМИ**

На основі розглянутого підходу, що базується на застосуванні просторової моделі теорії пружності із використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, проведено дослідження напруженого стану ізотропних нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом, яке має двопараметричне відхилення від кругової форми, що знаходиться під дією поверхневого розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній чи внутрішній бічній поверхні за певних граничних умов на торцях. Було знайдено рівняння кривої, що описує поперечний переріз поверхні відліку в полярних координатах у вигляді гофрованого еліпса, яка дозволяє врахувати, як еліптичність, так і наявність гофрів в поперечному перерізі [143]. Змінюючи відповідні параметри такої кривої можна отримати чотири групи кривих: кругову; з одно параметричним відхиленням від кругової форми – еліпс та гофроване коло і форму з двопараметричним відхиленням від кругової – гофрований еліпс, і при цьому отримати результати щодо впливу відхилення форми поперечного перерізу від кругової для оболонок різної товщини, степеня еліптичності та параметрів гофрування.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* В роботах [88, 92] досліджується вплив зміни товщини на напружений стан порожністих циліндрів з гофрованими еліпсами в поперечному перерізі, що знаходиться під дією внутрішнього тиску. При цьому проводиться порівняльний аналіз впливу

відхилення форми поперечного перерізу від кругової на параметри напруженого стану таких циліндрів.

В роботах [91, 100, 222, 280] досліджується вплив зміни геометричних параметрів циліндрів, а саме еліптичності та частоти гофрування на їх напружений стан, а також проводиться аналіз напруженого стану таких циліндрів для одно- та двопараметричного відхилення від кругової форми поперечного перерізу.

В даному розділі розв'язано задачу та проведено дослідження напруженого стану ізотропних нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді гофрованих еліпсів, що має двопараметричне відхилення від кругової форми. Постановка задачі та деякі оцінки достовірності отримуваних результатів наведено в підрозділі 3.1. В підрозділі 3.2 досліджується напружений стан циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом різної товщини. В підрозділі 3.3 розглянуто вплив на напружений стан циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом зміни ступеня еліптичності. В підрозділі 3.4 досліджується залежність напруженого стану еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі від параметрів гофрування (частоти та амплітуди). Суперпозицію форм поперечних перерізів та деякі інженерні рекомендації щодо спрощення розрахункових геометричних схем наведено в підрозділі 3.5.

Результати розв'язування задач подано у вигляді графіків розподілу полів переміщень і напружень та наведено в таблицях для характеристик напруженодеформованого стану оболонок даного класу.

### **3.1 Постановка задачі про напружено-деформований стан еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі та оцінка достовірності отримуваних результатів**

На етапі конструювання тих чи інших елементів конструкцій або деталей машин важливим елементом творчої роботи є визначення поведінки моделі, що

розробляється, у відповідних умовах з метою підбору геометрії її форми, що задовольняє певним вимогам роботи. Застосування методів математичного моделювання дозволяє прорахувати велику кількість варіантів і обрати найоптимальніший з можливих. При цьому зручно, коли виходячи з одного багато-параметричного рівняння, можна отримати форми різної конфігурації і дослідити переваги однієї над іншою.

Нехай еліптичний гофрований поперечний переріз поверхні відліку ізотропних циліндричних оболонок (рис. 3.1) задано в полярній системі координат параметричним рівнянням у вигляді

$$\begin{aligned} \rho(\psi) &= \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi, \quad e = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \\ a &= r_0(1 - \Delta)/f, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

де  $\alpha$  – характеризує амплітуду гофрування,  $m$  – частоту гофрування,  $e$  – ексцентриситет еліпса ( $\Delta$  – степінь еліптичності),  $r_0$  – радіус вихідного кола.

На рис. 3.1 показано форми поперечного перерізу поверхні відліку в залежності від значень параметрів еліптичності та гофрування. Так, для  $\alpha = 0$ ,  $\Delta = 0$ , маємо кругову оболонку (рис. 3.1. *a*), для  $\alpha = 0$ ,  $\Delta \neq 0$  – еліптичну (рис. 3.1. *b*),  $\alpha \neq 0$ ,  $\Delta = 0$  – кругову гофровану (рис. 3.1. *c*) і для  $\alpha \neq 0$ ,  $\Delta \neq 0$  – еліптичну гофровану (рис. 3.1. *z*). У випадку еліптичної гофрованої оболонки маємо двопараметричне відхилення від кругової форми.

Параметр, що характеризує частоту гофрування відповідає кількості гофрів. На рис. 3.2 показані форми поперечних перерізів для еліптичних гофрованих оболонок з різною кількістю гофрів та з різними амплітудами гофрування, які розглядалися у вище зазначених роботах при розв'язуванні задач. Радіус кривизни поверхні відліку, що задана рівнянням (3.1), визначається таким чином

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \rho' &= -\left[ \frac{ae^2 \sin 2\psi}{2(1-e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} + \alpha m \sin m\psi \right], \\ \rho'' &= -\left\{ \frac{ae^2}{2} \left[ \frac{2 \cos 2\psi}{(1-e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} - \frac{3e^2 \sin^2 2\psi}{2(1-e^2 \cos^2 \psi)^{5/2}} \right] + \alpha m^2 \cos m\psi \right\}. \end{aligned}$$

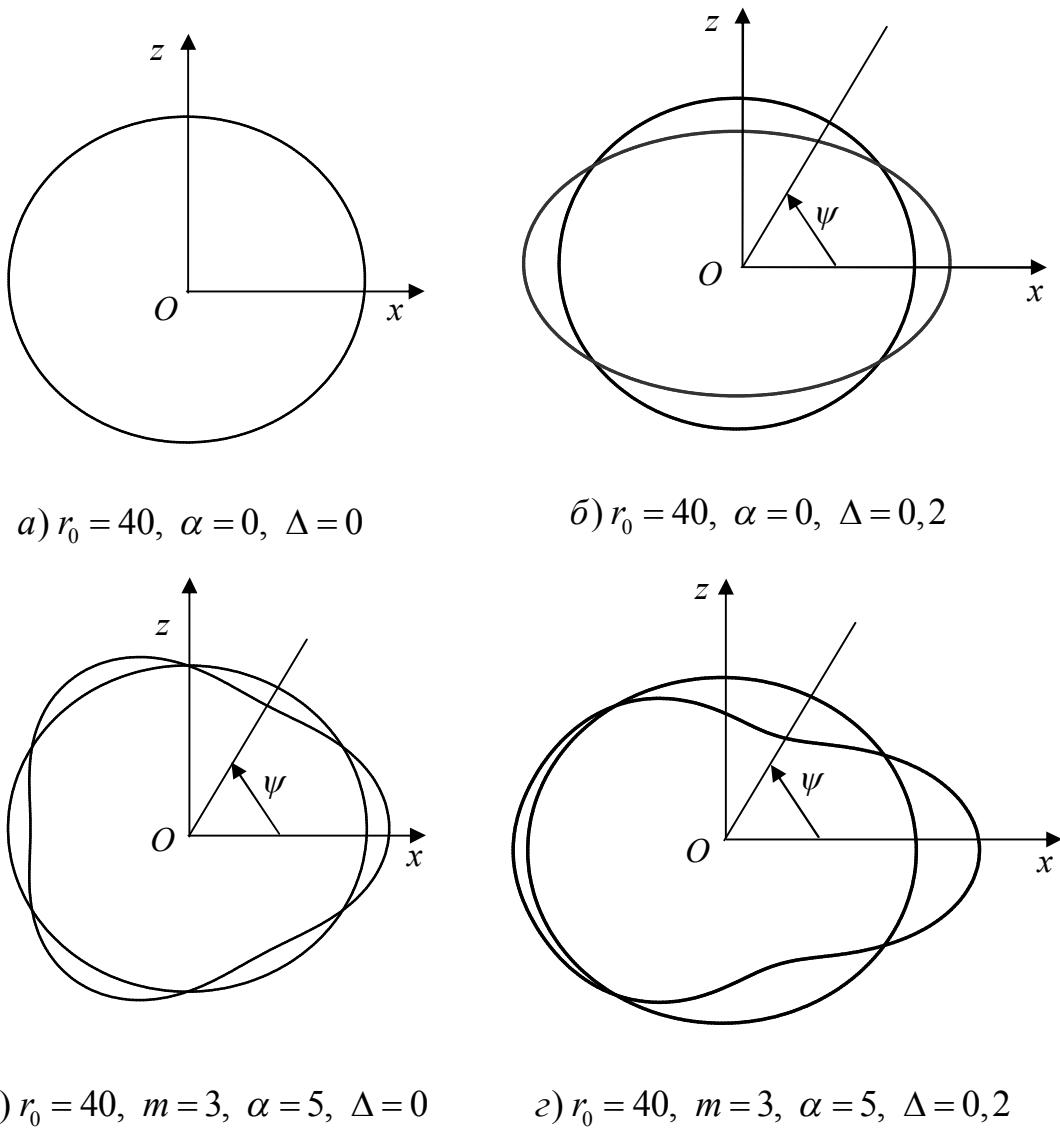


Рис. 3.1 Відхилення форми поперечного перерізу від кругової - а (одно- б, в та двопараметричне - в)

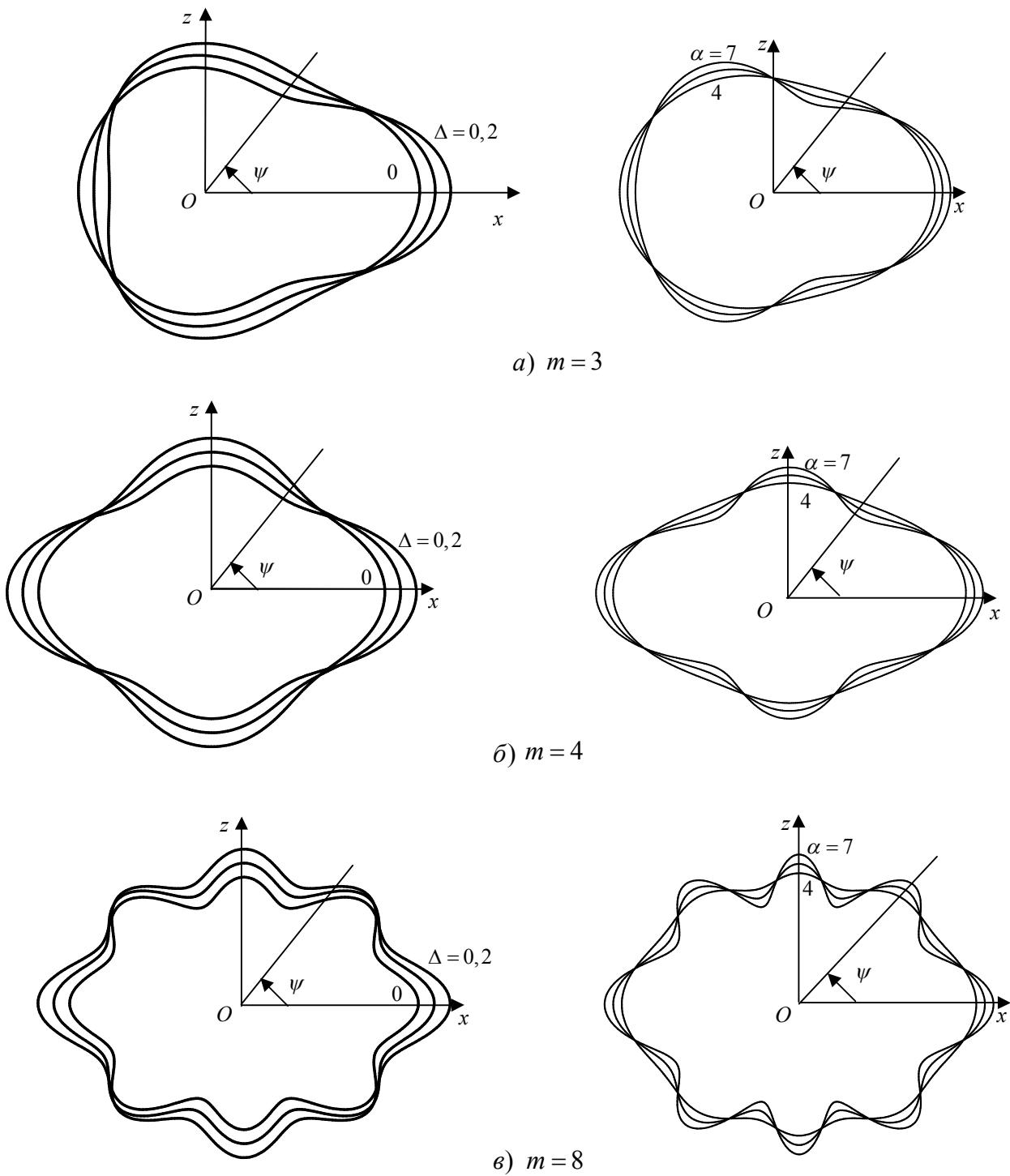


Рис. 3.2 Поперечний переріз поверхні відліку в залежності від еліптичності, частоти та амплітуди гофрування

Деякі оцінки достовірності розв'язків, отриманих на основі розглянутої методики та при застосуванні рівняння (3.1) для опису поперечного перерізу поверхні відліку, можна отримати досліджуючи напружений стан оболонок, що мають певні відхилення форми поперечного перерізу від канонічної кругової форми, коли величини параметрів, що характеризують таке відхилення, наближаються до нуля. При цьому розв'язок задачі має збігатися до розв'язку задачі для кругової оболонки, що має точний розв'язок.

Розглянемо задачу про напружений стан ізотропних нетонких циліндричних оболонок з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії внутрішнього тиску  $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ). Серединна поверхня описується рівнянням (3.1).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 6$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 0; 0,001; 0,003$ , частота гофрування  $m = 0; 4; 8$  степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,001; 0,003$ ,  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ .

Результати розв'язування задачі наведено у табл. 3.1 в середньому перерізі довжини для значень нормальніх переміщень  $u_y$  та напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхнях для двох значень напрямної  $\psi = 0; \psi = \pi/2$ .

При  $\alpha = 0$  та  $\Delta = 0$  маємо кругову оболонку, для якої існує точний розв'язок. При обраних значеннях амплітуди гофрування  $\alpha = 0,001; 0,003$  та степеня еліптичності  $\Delta = 0,001; 0,003$ , відхилення форми поперечного перерізу поверхні відліку від кругової ( $r_0 = 40$ ) в різних перерізах вздовж напрямної оболонки не перевищує 3 %.

Як видно з наведених в табл. 3.1 даних, значення переміщень  $u_y$  та напружень  $\sigma_\psi$  при незначному відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, за умови  $\Delta \rightarrow 0$  та  $\alpha \rightarrow 0$ , не перевищує 3 % порівняно з відповідними значеннями для кругової оболонки при обох значеннях частоти гофрування ( $m = 4; 8$ ).

Табл. 3.1 Розподіл переміщень та напружень в еліптичних гофрованих в поперечному перерізі оболонках при  $\Delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$

$\alpha$	$\Delta$	$\gamma$	$u_\gamma E / q_0$		$\sigma_\psi / q_0$		Похибка, %
			$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 2$	
$m = 0$							
0	0	- $h / 2$	249,583	249,583	5,777	5,777	-
		$h / 2$	236,125	236,125	6,115	6,115	-
$m = 4$							
0,001	0,001	- $h / 2$	246,940	251,978	5,796	5,767	0,2 – 1,1
		$h / 2$	233,527	238,478	6,077	6,146	0,5 – 1,1
	0,003	- $h / 2$	243,178	255,772	5,818	5,746	0,5 – 2,6
		$h / 2$	229,830	242,207	6,026	6,197	1,3 – 2,7
0,003	0,001	- $h / 2$	246,751	251,786	5,803	5,775	0,5 – 1,1
		$h / 2$	233,338	238,287	6,071	6,140	0,4 – 1,2
	0,003	- $h / 2$	242,990	255,579	5,825	5,753	0,4 – 2,6
		$h / 2$	229,643	242,015	6,020	6,191	1,2 – 2,7
$m = 8$							
0,001	0,001	- $h / 2$	247,021	252,060	5,798	5,770	0,1 – 1,0
		$h / 2$	233,607	238,558	6,075	6,144	0,5 – 1,1
	0,003	- $h / 2$	243,257	255,855	5,820	5,748	0,5 – 2,5
		$h / 2$	229,908	242,287	6,024	6,196	1,3 – 2,6
0,003	0,001	- $h / 2$	246,952	251,911	5,808	5,780	0,1 – 1,1
		$h / 2$	233,538	238,489	6,067	6,136	0,3 – 1,1
	0,003	- $h / 2$	243,189	255,787	5,830	5,758	0,3 – 2,6
		$h / 2$	229,840	242,219	6,016	6,187	1,2 – 2,7

### 3.2 Напружено-деформований стан еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі різної товщини

Розглядаються нетонкі ізотропні циліндричні оболонки, поперечний переріз яких являє собою гофрований еліпс, що задається в полярних координатах у вигляді рівняння (3.1). Метою дослідження є визначення характеристик напружено-деформованого стану оболонок даного класу різної товщини. Оболонки знаходяться під дією розподіленого навантаження  $q_\gamma = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ), прикладеного на внутрішній поверхні. Границі умови (2.24) для розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.23) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= -q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \\ \gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

На торцях оболонок мають місце граничні умови (2.9).

Задача розв'язана за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина приймає значень  $h = 4; 5; 6$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ , частота гофрування  $m = 4$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,2$ ,  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ .

Обчислимо відношення товщини оболонок до абсолютної величини радіуса кривизни в різних точках поперечного перерізу.

В табл. 3.2 наведено значення радіусів кривизни поверхні відліку в певних точках напрямної для кругової гофрованої оболонки ( $\Delta = 0$ ) та еліптичної гофрованої оболонки ( $\Delta = 0,2$ ), а також відношення різних значень товщини оболонки до абсолютноного значення радіусів кривизни в цих точках.

З даних, наведених у табл. 3.2 видно, що як для кругової так і для еліптичної гофрованої оболонки відношення товщини до радіуса кривизни суттєво змінюється в різних точках напрямної.

Таблиця 3.2 Відношення товщини до радіуса кривизни оболонок в різних точках напрямної

$\Delta=0$			
$\psi$	0	$\pi / 4$	$\pi / 2$
$ R_\psi $	17,926	46,747	17,926
$h$	$h / R_\psi$		
4	0,223	0,086	0,223
5	0,279	0,107	0,279
6	0,335	0,128	0,335
$\Delta=0,2$			
$\psi$	0	$\pi / 4$	$\pi / 2$
$ R_\psi $	30,415	78,208	20,713
$h$	$h / R_\psi$		
4	0,132	0,051	0,193
5	0,164	0,064	0,241
6	0,197	0,077	0,290

Результати розв'язку задачі наведено в перерізі  $s = 0,5l$  твірної оболонки. В силу симетрії поперечного перерізу оболонок, результати розв'язку вздовж напрямної на графіках наведено в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ .

На рис. 3.3 розподіл полів нормальних переміщень  $u_y$  наведено у вигляді графіків вздовж напрямної поверхні відліку, в табл. 3.3 – вздовж товщини і для значень полів напружень  $\sigma_\psi$  – у табл. 3.4 на внутрішній та в табл. 3.5 на зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної і на рис. 3.4 вздовж товщини.

На графіках (рис. 3.3) суцільною лінією позначені криві для еліптичної гофрованої оболонки ( $\Delta = 0,2$ ), штриховою – для кругової гофрованої оболонки ( $\Delta = 0$ ).

З графіків розподілу переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної оболонки в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ , що наведені на рис. 3.3 видно, що в оболонках з гофрованим еліптичним поперечним перерізом ( $\Delta = 0,2$ ), на відміну від кругової гофрованої ( $\Delta = 0$ ), значення переміщень в околі більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) зменшуються, а в околі меншої жорсткості ( $\psi = \pi/2$ ) – збільшуються для всіх значень товщини.

Так само зростають значення переміщень в западині гофрів ( $\psi = \pi/4$ ). При цьому зі збільшенням товщини, максимальні значення переміщень для еліптичних гофрованих оболонок ( $\Delta = 0,2$ ) у западині гофрів ( $\psi = \pi/4$ ) зростають на 22,8 % для товщини  $h = 4$ ; на 26,4 % для товщини  $h = 5$ ; на 28,5 % для товщини  $h = 6$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

Зміна товщини призводить до зменшення величини максимальних нормальних переміщень приблизно в 2 рази для  $h = 5$  та в 3 рази для  $h = 6$ , як для кругової, так і для еліптичної гофрованої оболонки.

Розподіл переміщень вздовж товщини оболонки в перерізі  $\psi = \pi/4$ , де вони приймають своїх максимальних значень, наведено в табл. 3.3. Характерним для значень нормальних переміщень вздовж товщини є слабко виражений нелінійний закон розподілу. Своїх максимальних значень переміщення досягають на поверхні відліку оболонки. При цьому зі збільшенням товщини, величина переміщень суттєво зменшується, як для кругових ( $\Delta = 0$ ) гофрованих оболонок, так і для еліптичних гофрованих ( $\Delta = 0,2$ ) оболонок.

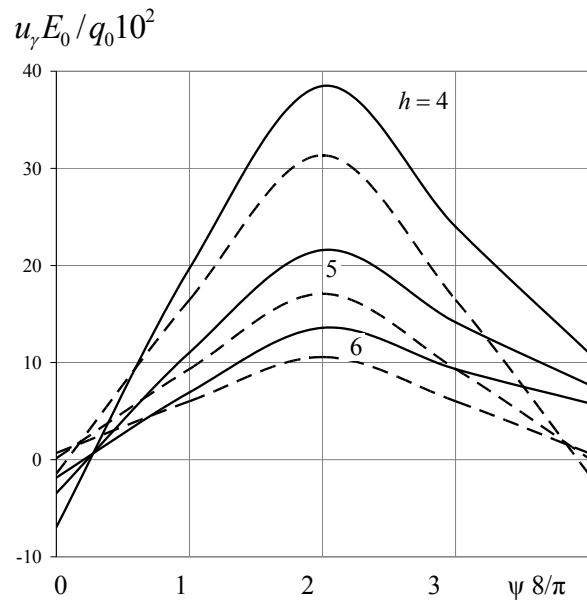
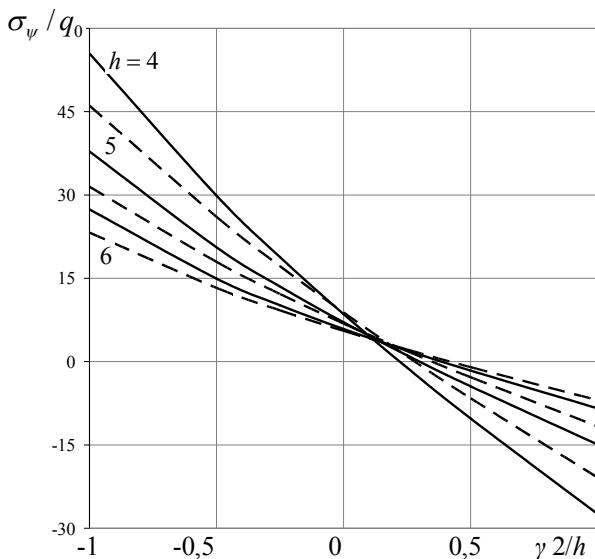


Рис. 3.3 Розподіл нормальних переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної для оболонок різної товщини

Табл. 3.3 Розподіл переміщень вздовж товщини оболонки

$\gamma$	$u_\gamma E_0 / 10^2 q_0$					
	$\Delta=0$			$\Delta=0,2$		
	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$	$h = 4$	$h = 5$	$h = 6$
$-h/2$	31,145	16,946	10,464	38,226	21,402	13,432
$-h/4$	31,286	17,052	10,547	38,400	21,537	13,540
$-h/8$	31,323	17,079	10,566	38,449	21,574	13,568
0	31,336	17,087	10,571	38,473	21,590	13,579
$h/8$	31,326	17,076	10,560	38,470	21,584	13,572
$h/4$	31,292	17,046	10,533	38,439	21,556	13,546
$h/2$	31,143	16,920	10,423	38,288	21,423	13,428

Рис. 3.4 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  вздовж товщини для оболонок різної товщини

призводить до збільшення величини колових напружень. Максимальних своїх значень напруження набувають на внутрішній поверхні в перерізі  $\psi = \pi / 2$ .

З табл. 3.4, табл. 3.5 видно, що значення напружень  $\sigma_\psi$  в околі більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) в оболонках з еліптичним гофрованим поперечним перерізом змінюються несуттєво, порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

На рис. 3.4 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  вздовж товщини у западині гофрів для кругової ( $\Delta = 0$ , штрихова лінія) та еліптичної ( $\Delta = 0,2$ , суцільна лінія) гофрованих оболонок, де вони набувають своїх максимальних значень. Розподіл колових напружень вздовж товщини має слабо виражений нелінійний характер. Збільшення товщини

Таблиця 3.4 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки

$h$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	46,1	2,62	-31,9	2,62	46,1
	0,2	44,5	1,87	-33,4	-2,27	55,8
5	0	31,5	2,69	-19,4	2,69	31,5
	0,2	31,6	1,99	-20,9	-0,48	37,8
6	0	23,2	2,52	-12,7	2,52	23,2
	0,2	24,1	1,99	-14,1	0,11	27,4

Таблиця 3.5 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки

$h$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	-20,8	12,6	45,3	12,6	-20,8
	0,2	-22,4	13,8	50,22	13,8	-27,4
5	0	-11,6	9,16	30,6	9,16	-11,6
	0,2	-13,7	9,59	34,4	10,8	-14,9
6	0	-6,95	7,08	22,2	7,08	-6,95
	0,2	-8,97	7,09	25,2	8,73	-8,43

При цьому максимальні значення напружень збільшуються на 21 % для товщини  $h = 4$ ; на 20 % для товщини  $h = 5$ ; на 18 % для товщини  $h = 6$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою. Збільшення товщини призводить до зменшення величини максимальних напружень  $\sigma_\psi$  приблизно в

1,5 рази для  $h = 5$  та в 2 рази для  $h = 6$ , як для кругової, так і для еліптичної гофрованої оболонки.

На рис. 3.5 наведено графіки розподілу поздовжніх напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної на внутрішній поверхні (рис. 5. а) та товщини у западині гофрів (рис. 5. б) для кругової ( $\Delta = 0$ , штрихова лінія) та еліптичної ( $\Delta = 0,2$ , суцільна лінія) гофрованих оболонок, де вони набувають своїх максимальних значень.

Як видно з наведених графіків, у випадку еліптичних гофрованих оболонок порушується симетрія в розподілі поздовжніх напружень відносно перерізу  $\psi = \pi / 4$  (рис. 5. а). При цьому максимальні значення напружень збільшуються на 24,0 % для товщини  $h = 4$ ; на 25,7 % для товщини  $h = 5$ ; на 26,5 % для товщини  $h = 6$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою. Зміна товщини призводить до зменшення величини максимальних напружень  $\sigma_s$  приблизно в 1,5 рази для  $h = 5$  та в 2 рази для  $h = 6$ , як для кругової, так і для еліптичної гофрованої оболонки.

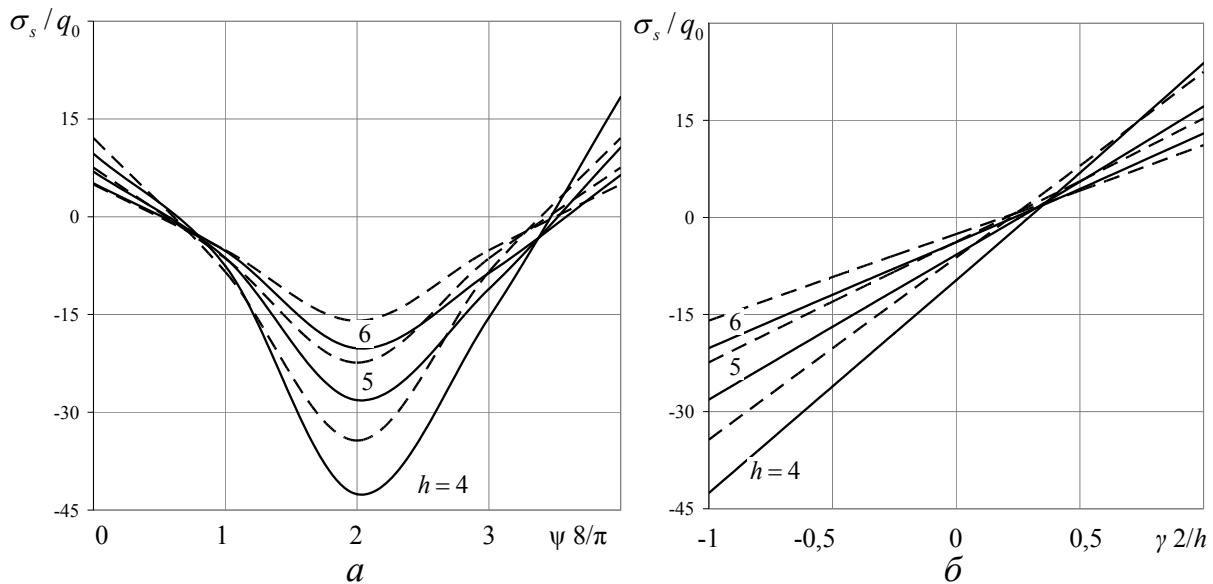


Рис. 3.5 Розподіл поздовжніх напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної та товщини для оболонок різної товщини

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної на зовнішній поверхні наведено на рис. 3.6 *a*, та вздовж товщини в перерізі  $\psi = 3\pi/8$  – на рис. 3.6 *б*, де вони приймають максимальних абсолютних значень.

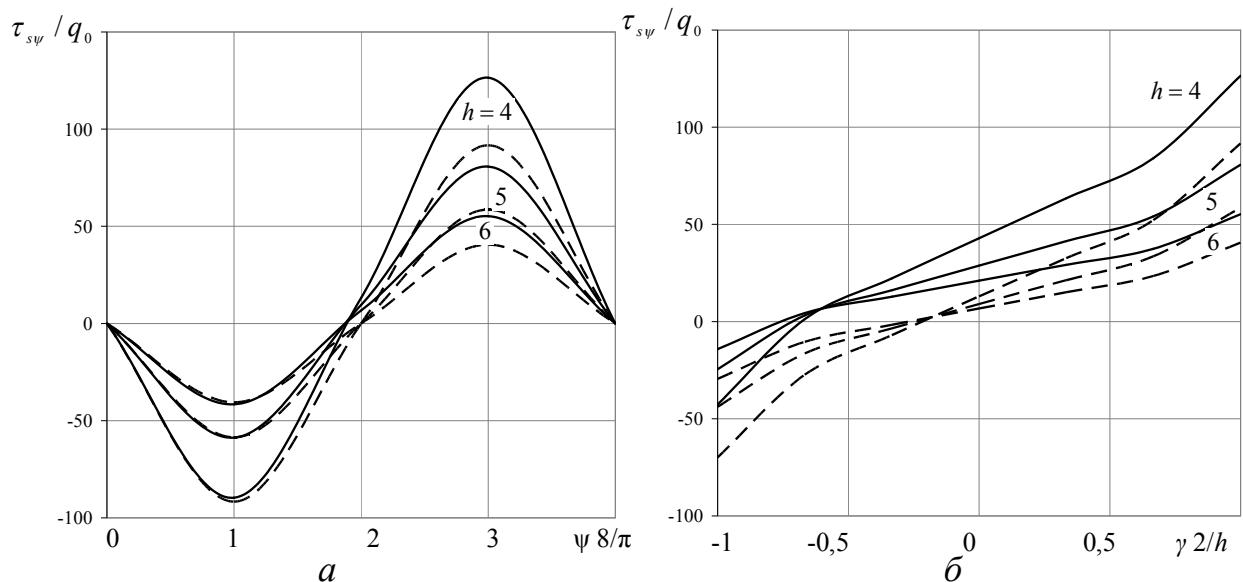


Рис. 3.6 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної та товщини оболонки в залежності від товщини

Криві для кругової гофрованої оболонки позначені штриховою лінією, для еліптичної гофрованої – суцільною лінією відповідно.

З графіків, наведених на рис. 3.6 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної та товщини оболонки носить нелінійний характер. При цьому, як в оболонках з товщиною  $h = 4$ , так і для більш товстих циліндричних оболонок ( $h = 6$ ) відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до порушення симетрії в розподілі абсолютних значень дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  відносно перерізу  $\psi = \pi/4$ .

На зовнішній поверхні наявність еліптичності більшою мірою впливає на збільшення величини напружень  $\tau_{s\psi}$  в 1,3 – 1,4 рази на інтервалі  $\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2$  для всіх значень товщини. В інтервалі зміни напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  значення

дотичних напруженень для кругової та еліптичної гофрованих оболонок близькі між собою.

Абсолютні максимальні значення дотичних напруженень у відповідних симетричних точках напрямної для оболонок всіх розглядуваних значень товщини відносно перерізу  $\psi = \pi/4$  збільшуються приблизно в 1,4 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою. При цьому збільшення товщини оболонки призводить до зменшення величини дотичних напруженень в 1,6 рази для товщини  $h = 5$  та у 2,3 рази – для товщини  $h = 6$  як для кругової, так і для еліптичної гофрованих оболонок.

### **3.3 Дослідження впливу степеня еліптичності на напружений стан еліптичних гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок**

Еліптичні гофровані в поперечному перерізі оболонки мають двопараметричне відхилення від кругової форми, яке характеризується степенем еліптичності з одного боку, а з іншого – параметрами гофрування.

Спочатку проведемо аналіз впливу на характеристики НДС гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок степеня їх еліптичності. Оболонки знаходяться під дією розподіленого навантаження, прикладеного на внутрішній поверхні, як в попередньому підрозділі. Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 4, 5, 7$  частота гофрування  $m = 3, 4, 8$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ ,  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ .

В силу симетрії поперечного перерізу оболонок, результати розв'язку вздовж напрямної на графіках наведено в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ . Результати розв'язків задачі в перерізі  $s = 0,5l$  твірної оболонки для нормальних переміщень  $u_\gamma$  наведені у вигляді кривих розподілу вздовж напрямної поверхні відліку на графіках рис. 3.7, рис. 3.8.

У табл. 3.6, 3.8 наведено значення напружень  $\sigma_\psi$  – на внутрішній поверхні оболонки ( $m = 4, 8, \alpha = 4, 7$ ) і у табл. 3.7, 3.9 – на зовнішній ( $m = 4, 8, \alpha = 4, 7$ ).

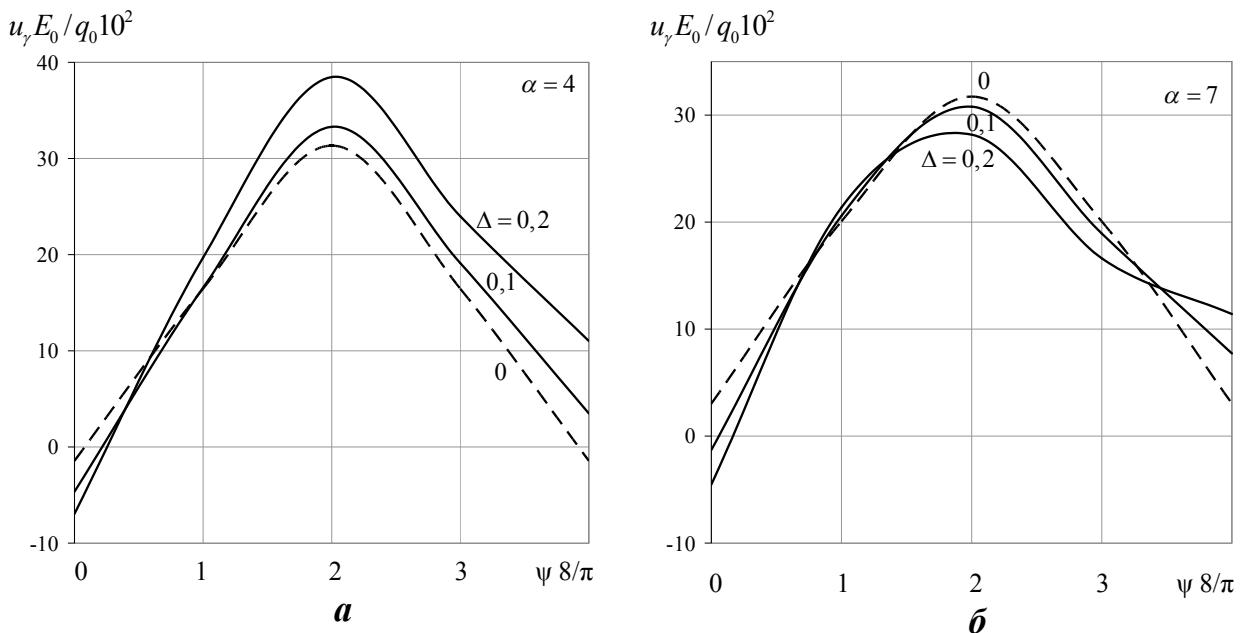


Рис. 3.7 Розподіл переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки в залежності від степеня еліптичності при чотирьох гофрах ( $m = 4$ )

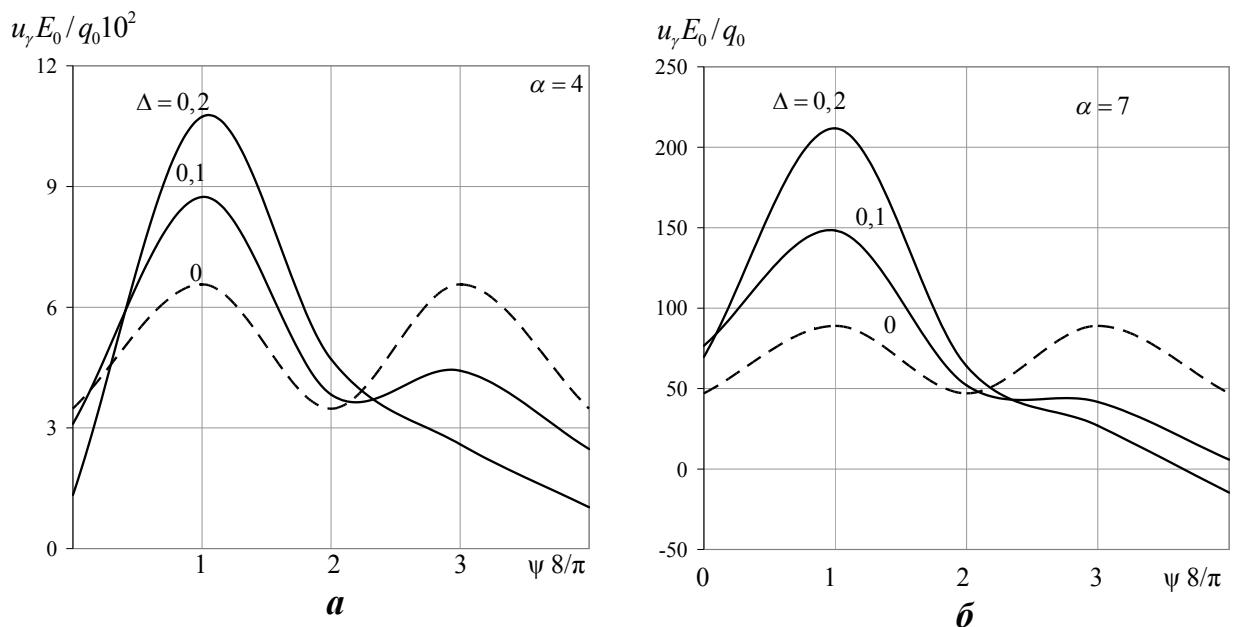


Рис. 3.8 Розподіл переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки в залежності від степеня еліптичності при восьми гофрах ( $m = 8$ )

Для кругових оболонок з чотирма гофрами в поперечному перерізі для амплітуди гофрування  $\alpha = 4, 7$  переміщення мають симетричну картину розподілу відносно перерізу  $\psi = \pi / 4$  як для чотирьох (рис. 3.7), так і для восьми гофрів (рис. 3.8). При зростанні степеня еліптичності спостерігається перерозподіл значень переміщень як у якісному, так і у кількісному плані.

Так для чотирьох гофрів при амплітуді гофрування  $\alpha = 4$  (рис. 3.7 *a*) в зоні западин гофрів ( $\psi = \pi / 4$ ) переміщення збільшуються на 6,2 % для  $\Delta = 0,1$  та на 22,8 % для  $\Delta = 0,2$ . При цьому для значення амплітуди гофрування  $\alpha = 7$  (рис. 3.7 *b*), значення переміщень, навпаки, зменшуються несуттєво для  $\Delta = 0,1$  та на 11,2 % для  $\Delta = 0,2$  відповідно. В зоні вершин гофрів меншої півосі ( $\psi = \pi / 2$ ) переміщення збільшуються зі збільшенням степеня еліптичності у 2,4 рази та у 7,6 рази при  $\alpha = 4$  і у 2,6 рази та у 3,6 рази при  $\alpha = 7$  для  $\Delta = 0,1$  і  $\Delta = 0,2$  відповідно.

Для восьми гофрів при збільшенні степеня еліптичності спостерігається така картина перерозподілу нормальних переміщень (рис. 3.8).

В перерізі  $\psi = \pi / 4$  у вершині гофрів при амплітуді  $\alpha = 4$  (рис. 3.8. *a*) величини переміщень збільшуються зі збільшенням степеня еліптичності в 1,3 рази для  $\Delta = 0,1$  і в 1,6 рази для  $\Delta = 0,2$ . В зоні вершини меншої півосі ( $\psi = \pi / 2$ ) переміщення зі збільшенням степені еліптичності зменшуються в 1,4 рази для  $\Delta = 0,1$  і в 3,4 рази для  $\Delta = 0,2$ .

Для амплітуди  $\alpha = 7$  (рис. 3.8 *b*) зона максимальних значень переміщень перебуває в перерізі  $\psi = \pi / 8$ , при цьому їх величина збільшується в 1,4 рази для  $\Delta = 0,1$  і у 2,0 рази для  $\Delta = 0,2$  відповідно. В зоні вершини гофрів в перерізі ( $\psi = \pi / 4$ ) переміщення мають приблизно однакові значення.

З табл. 3.6, табл. 3.7 для амплітуди гофрування  $\alpha = 4$  видно, що для кругової гофрованої оболонки спостерігається симетрія в розподілі напружень як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях для обох значень частоти гофрування ( $m = 4, 8$ ).

Збільшення степені еліптичності призводить до збільшення абсолютних значень напружень для оболонок з чотирма гофрами в перерізі  $\psi = \pi / 4$  та

$\psi = \pi / 2$  і зменшення в перерізі  $\psi = 0$ , як на зовнішній, так і на внутрішній поверхнях. При цьому максимальні абсолютні значення напруження мають в перерізі  $\psi = \pi / 2$  на внутрішній поверхні. При збільшенні степеня еліптичності максимальна величина напружень  $\sigma_\psi$  збільшується на 10 % для  $\Delta = 0,1$  і на 20 % для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

Таблиця 3.6 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки ( $\alpha = 4$ )

$m$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	46,07	2,62	-31,91	2,62	46,07
	0,1	43,84	3,56	-32,55	0,38	50,80
	0,2	44,46	1,88	-33,39	-2,27	55,46
8	0	45,11	-14,48	45,10	-14,48	45,10
	0,1	52,69	-17,89	42,45	-8,81	37,12
	0,2	57,56	-16,66	35,59	-2,89	28,91

Таблиця 3.7 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки ( $\alpha = 4$ )

$m$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	-20,87	12,59	45,36	12,59	-20,87
	0,1	-20,28	12,24	46,85	13,57	-23,68
	0,2	-22,43	13,83	50,23	13,78	-27,44
8	0	-7,97	-22,03	-7,97	-22,03	-7,97
	0,1	-13,97	-7,82	-7,29	-28,05	-5,07
	0,2	-21,53	10,82	-5,55	-28,53	-4,65

Для амплітуди гофрування  $\alpha = 7$  та частоти  $m = 4$  (табл. 3.8, табл. 3.9) максимальних значень напруження досягають на внутрішній поверхні в перерізі  $\psi = 0$ . З і збільшенням степеня еліптичності їх величина збільшується приблизно на 7 % для  $\Delta = 0,1$  та  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

Таблиця 3.8 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки ( $\alpha = 7$ )

$m$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	49,52	-9,24	-30,19	-9,24	49,52
	0,1	53,16	-6,27	-24,18	-13,60	40,52
	0,2	53,02	-5,97	-9,99	-17,09	27,27
8	0	27,18	5,52	27,18	5,52	27,18
	0,1	30,70	2,79	26,47	8,89	25,14
	0,2	34,71	2,98	26,83	9,14	25,51

Таблиця 3.9 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки ( $\alpha = 7$ )

$m$	$\Delta$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
4	0	-20,43	15,15	12,11	15,15	-20,43
	0,1	-20,85	19,34	14,56	9,11	-19,62
	0,2	-22,41	22,18	18,98	2,04	-17,42
8	0	-8,28	-65,48	-8,28	-65,48	-8,28
	0,1	-10,11	-46,93	-7,88	-47,12	-8,77
	0,2	-14,14	-27,03	-7,67	27,28	-10,07

Для циліндричних оболонок з вісімома гофрами картина змінюється.

Напруження  $\sigma_\psi$  максимальних значень набувають на зовнішній поверхні в перерізі  $\psi = 3\pi/8$ , при цьому їх величина зменшується із збільшенням степеня еліптичності в 1,4 рази для  $\Delta = 0,1$  і в 2,4 рази для  $\Delta = 0,2$ .

Для оболонок з трьома гофрами в поперечному перерізі ( $m = 3$ ), амплітудою гофрування  $\alpha = 5$  результати впливу еліптичності на фактори напруженого стану наведено для розподілу нормальних переміщень  $u_\gamma$  на рис. 3.9 та на рис. 3.10 для розподілу колових напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні в середньому перерізі по довжині.

З графіків, наведених на рис. 3.9 видно, що для кругової гофрованої оболонки ( $\Delta = 0$ ) маємо симетричне розподілення переміщень вздовж напрямної з періодом  $2\pi/3$ . При цьому в зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) оболонка прогинається в напрямку, протилежному прикладеному навантаженню, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi/3$ ) – навпаки.

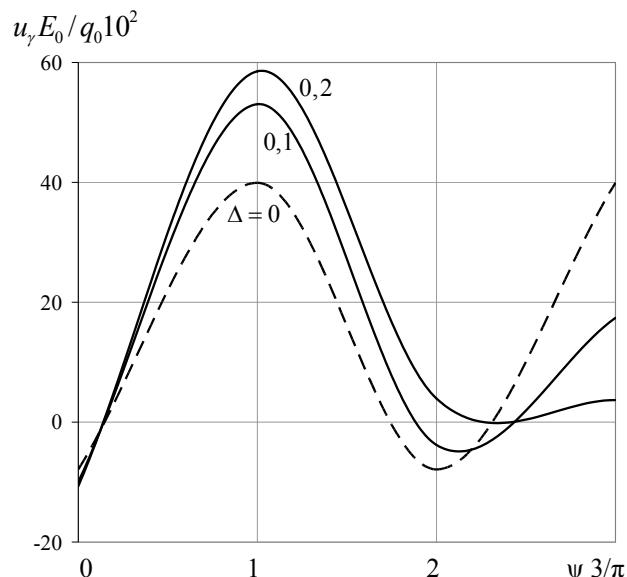


Рис. 3.9 Розподіл переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної на внутрішній поверхні оболонки ( $m = 3$ )

Для еліптичних гофрованих оболонок в зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) переміщення майже не відрізняється від переміщень кругової гофрованої оболонки, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi/3$ ) збільшується з ростом  $\Delta$ , зокрема, при  $\Delta = 0,2$  – майже на 50%. При  $\psi = \pi$  нормальне переміщення значно спадає зі збільшенням  $\Delta$ .

З графіків розподілу напружень  $\sigma_\psi$ , наведених на рис. 3.10, спостерігається наступна картина. В зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) маємо максимальні

значення напружень, а в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi / 3$ ) – мінімальні. При  $\psi = \pi$  і  $\Delta \neq 0$  величина напружень наближається до нуля.

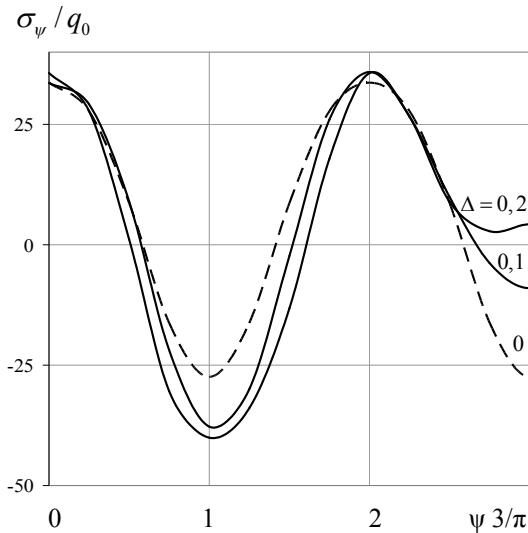


Рис. 3.10 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні вздовж напрямної оболонки ( $m = 3$ )

для частоти гофрування  $m = 3$ .

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної на внутрішній (суцільна лінія) та зовнішній (штрихова лінія) поверхні наведено на рис. 3.11 для частоти гофрування  $m = 4$ , на рис. 3.12 для частоти гофрування  $m = 8$  та на рис. 3.13

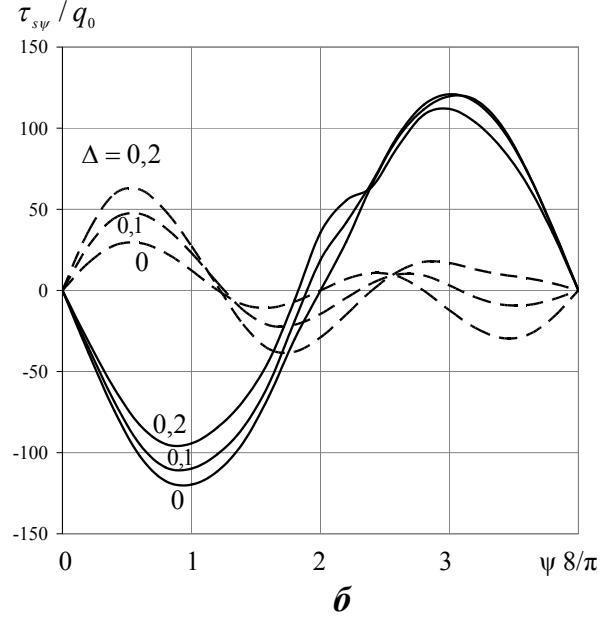
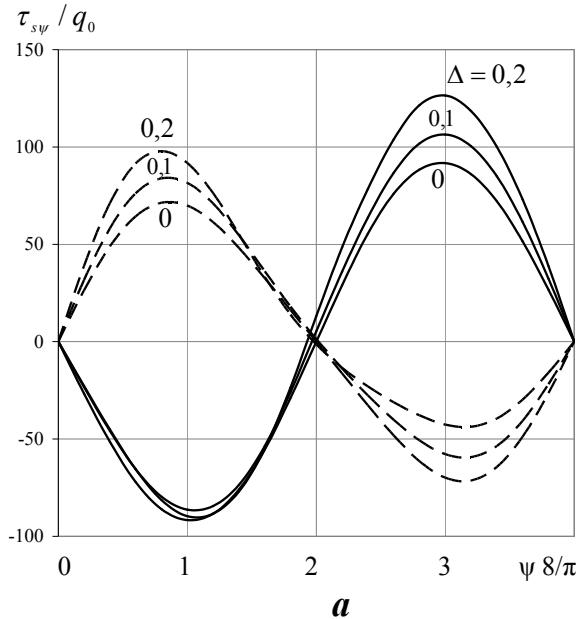


Рис. 3.11 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від параметру еліптичності ( $m = 4$ )

На рис. 3.11  $a$  та на рис. 3.14  $a$  наведено графіки для амплітуди гофрування  $\alpha = 4$ , а на рис. 3.11  $b$  та на рис. 3.12  $b$  – для амплітуди гофрування  $\alpha = 7$ . З

графіків видно, як впливає на розподіл дотичних напружень зміна параметру еліптичності на гофровані в поперечному перерізі циліндричні оболонки.

Для циліндричних оболонок з частотою гофрування  $m = 4$  та амплітудою  $\alpha = 4$  (рис. 3.11 *a*) збільшення параметру еліптичності  $\Delta$  призводить до збільшення відповідних максимальних значень дотичних напружень як на внутрішній так і на зовнішній поверхнях оболонки.

При цьому в інтервалі зміни напрямної  $\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2$  максимальні значення напружень  $\tau_{s\psi}$  на зовнішній поверхні оболонки збільшуються приблизно у 1,2 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,4 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою ( $\Delta = 0$ ). В інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  при  $\Delta = 0,1$  максимальні амплітудні значення дотичних напружень зменшуються на 5,8 % і при  $\Delta = 0,2$  – менш ніж 5 %.

Для оболонок з амплітудою гофрування  $\alpha = 7$  (рис. 3.11 *б*) збільшення еліптичності  $\Delta$  призводить до зменшення відповідних максимальних амплітудних значень дотичних напружень на внутрішній поверхні оболонки в перерізі  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  на 8 % для  $\Delta = 0,1$  и на 20 %, порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

При цьому на другому інтервалі напрямної  $\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2$ , максимальні значення дотичних напружень для всіх трьох значень параметра  $\Delta$  майже не відрізняються один від одного. На відміну від оболонок з амплітудою гофрування  $\alpha = 4$ , при  $\alpha = 7$  більший вплив степеня еліптичності на розподіл напружень  $\tau_{s\psi}$  простежується в інтервалі  $\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2$ .

Для циліндричних оболонок з вісімома гофрами ( $m = 8$ ) та амплітудою  $\alpha = 4$  (рис. 3.12 *a*) вплив збільшення параметру еліптичності  $\Delta$  на величину дотичних напружень носить такий характер.

На інтервалі зміни напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi/2$  дотичні напруження мають чотири максимальні амплітудні значення. Для кругової гофрованої оболонки зберігається симетрія в розподілі напружень відносно перерізу  $\psi = \pi/4$ .

Наявність еліптичності вносить свої корективи в розподіл дотичних напружень таким чином. На першій чверті зміни координати  $\psi$  максимальні амплітудні значення напружень  $\tau_{s\psi}$  для  $\Delta = 0,1$  збільшуються в 1,4 рази, а для  $\Delta = 0,2$  – в 1,7 рази порівняно з круговою гофрованою оболонкою.

У другій чверті напрямної зі збільшенням степеня еліптичності відбувається збільшення максимальних значень напружень в 1,3 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,5 рази для  $\Delta = 0,2$ . На двох наступних ділянках величина дотичних напружень зменшується, порівняно з відповідними величинами для кругової гофрованої оболонки. На третій ділянці в 1,4 рази для  $\Delta = 0,1$  та у 3,2 рази для  $\Delta = 0,2$ . Відповідно, на четвертій чверті зміни напрямної максимальні значення напружень зі збільшенням степеня еліптичності – зменшуються в 1,6 рази для  $\Delta = 0,1$  та у 2,8 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з оболонкою для  $\Delta = 0$ .

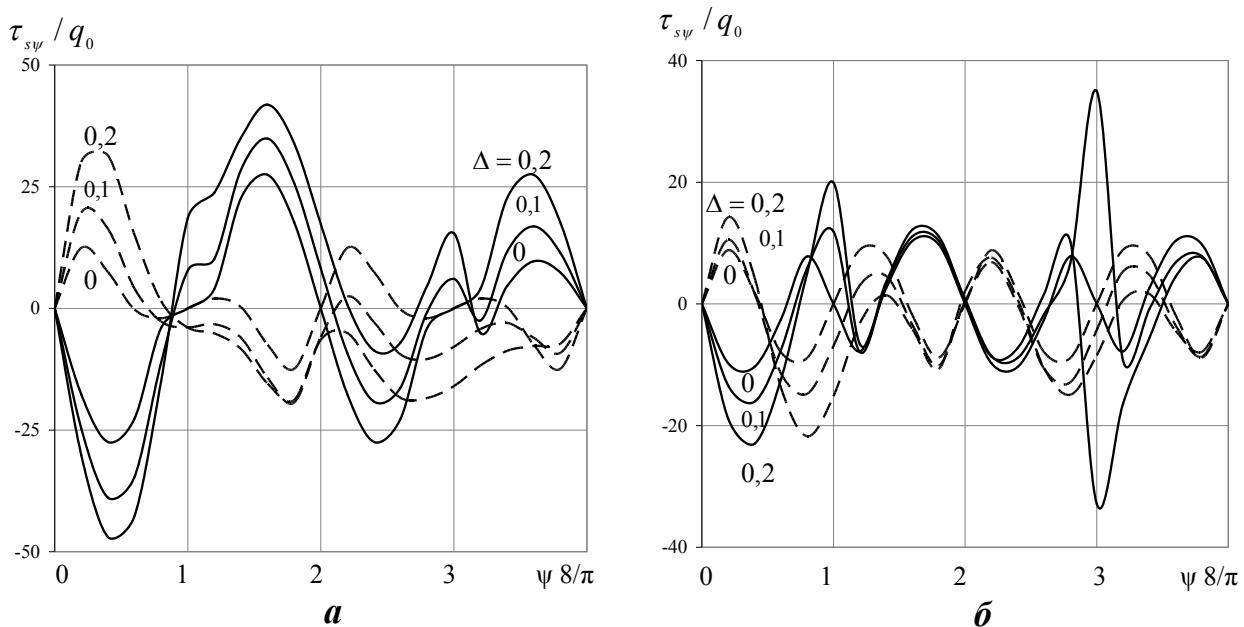


Рис. 3.12 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від еліптичності ( $m = 8$ )

Збільшення амплітуди гофрування призводить до зменшення величини дотичних напружень приблизно вдвічі на трьох ділянках зміни координати  $\psi$ . На четвертій ділянці має місце стрибок в значеннях дотичних напружень. На двох ділянках зміни координати  $\psi$  збільшення еліптичності призводить до збільшення величини дотичних напружень в 1,5; 1,1 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,2;

1,5 рази для  $\Delta = 0,2$  на інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/4$  та до зменшення величини напружень на інтервалі  $3\pi/8 \leq \psi \leq \pi/2$  в 1,3 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 2,3 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою. В інтервалі  $\pi/4 \leq \psi \leq 3\pi/8$  значення напружень стрибкоподібно збільшуються для  $\Delta = 0,1$  та стрибкоподібно зменшуються для  $\Delta = 0,2$ , що вдвічі перевищує максимальні значення напружень на всьому інтервалі зміни напрямної.

На рис. 3.13 наведено розподіл дотичних напружень для частоти гофрування  $m = 3$  та амплітуди  $\alpha = 5$  в інтервалі зміни напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi$  (в силу симетрії). Суцільними лініями позначені криві на зовнішній, штриховими – на внутрішній поверхні оболонки. Своїх максимальних значень дотичні напруження набувають на зовнішній поверхні в околі перерізу  $\psi = \pi/4$ , при цьому зі збільшенням степеня еліптичності максимальні амплітудні значення дотичних напружень збільшуються приблизно в 1,5 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 2 рази для  $\Delta = 0,2$ .

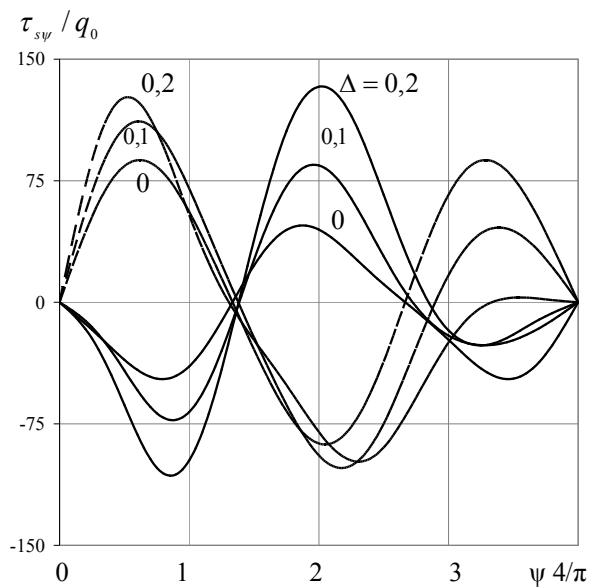


Рис. 3.13 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки ( $m = 3$ )

### 3.4 Вплив зміни параметрів гофрування на напружений стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Розглянемо далі вплив зміни параметрів гофрування – амплітуди та частоти на напружений стан еліптичних циліндричних оболонок. Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 4, 5, 6, 7$  частота гофрування  $m = 4, 8$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0,1; 0,2, E = E_0, \nu = 0,3$ .

Результати розв'язування задачі наведено в табл. 3.10 для розподілу полів переміщень  $u_\gamma$ , поверхні відліку і в табл. 3.11, табл. 3.12 для розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на бічних поверхнях в середньому перерізі довжини  $s = 0,5 l$ .

Табл. 3.10 Розподіл переміщень поверхні відліку вздовж напрямної оболонки в залежності від амплітуди та частоти гофрування

$m$	$\alpha$	$u_\gamma E_0 / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
		$\Delta=0,1$				
4	4	-464,4	1657,2	3329,2	1913,3	348,6
	5	-345,5	2030,7	3718,9	2195,7	582,3
	6	-211,3	2149,7	3578,4	2159,6	742,6
	7	-129,7	2057,9	3078,3	1893,1	772,1
8	4	310,2	659,6	874,1	629,1	383
	5	201,1	439,9	471,1	370,7	203,6
	6	122,9	319,2	255,5	240,1	105,7
	7	76,7	266,3	148,2	187,4	51,9
		$\Delta=0,2$				
4	4	-694,4	1969,8	3847,3	2399,4	1102,9
	5	-603,3	2261,2	3941,3	2436,8	1294
	6	-507,3	2282,5	3498,2	2122,3	1294,3
	7	-452,4	2135,7	2816,8	1660,7	1140,5
8	4	133,6	745,1	1073,3	705,1	471
	5	133,9	573,3	643,2	419,6	262,9
	6	100,8	437,8	359,5	250,2	130,9
	7	70,9	373,3	210,1	174,3	58,8

З табл. 3.10 видно, що для оболонок з чотирма гофрами ( $m = 4$ ), зміна амплітуди гофрування призводить до більш суттєвої зміни величини переміщень в перерізі  $\psi = \pi / 4$  для степеня еліптичності  $\Delta = 0,2$ , ніж для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$ .

При цьому, як для  $\Delta = 0,1$ , так і для  $\Delta = 0,2$  збільшення амплітуди спочатку призводить до збільшення величини переміщень, а потім – до їх зменшення в цьому перерізі. Так, при  $\Delta = 0,1$  переміщення збільшуються у 1,07 рази для  $\alpha = 5$ , у 1,12 рази для  $\alpha = 6$  і зменшуються у 1,08 рази для  $\alpha = 7$ , порівняно з амплітудою  $\alpha = 4$ .

При  $\Delta = 0,2$  переміщення збільшуються у 1,02 рази для  $\alpha = 5$  і потім зменшуються у 1,09 рази для  $\alpha = 6$  та у 1,37 рази для  $\alpha = 7$ , порівняно з амплітудою  $\alpha = 4$ .

Розподіл переміщень в оболонках з вісімома гофрами має іншу картину.

Максимальних значень переміщення набувають в перерізі  $\psi = \pi / 8$  для  $\alpha = 4$  і зі збільшенням величини амплітуди зменшуються, при цьому їх максимальні значення зміщуються ліворуч. Так при  $\Delta = 0,1$  переміщення зменшуються у 1,7 рази для  $\alpha = 5$ , у 2,7 рази для  $\alpha = 6$  і у 3,5 рази для  $\alpha = 7$ , порівняно з амплітудою  $\alpha = 4$ .

Аналогічна картина спостерігається і для степеня еліптичності  $\Delta = 0,2$ . Порівняно з амплітудою  $\alpha = 4$ , переміщення зменшуються у 1,5 рази для  $\alpha = 5$ , у 2,3 рази для  $\alpha = 6$  і у 2,9 рази для  $\alpha = 7$ . При цьому, на інтервалі  $\pi / 4 \leq \psi \leq \pi / 2$  для амплітуди  $\alpha = 4$  та  $\alpha = 5$  має місце більш плавний розподіл переміщень.

В табл. 3.11 та табл. 3.12 наведено значення напружень на внутрішній та зовнішній поверхнях оболонки для двох значень еліптичності  $\Delta = 0,1$  та  $\Delta = 0,2$  в залежності від величини частоти та амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки.

Табл. 3.11 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки вздовж напрямної в залежності від амплітуди та частоти гофрування

$m$	$\alpha$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
		$\Delta=0,1$				
4	4	43,84	3,56	-32,55	0,38	50,80
	5	50,18	-0,43	-35,67	-5,48	51,65
	6	53,05	-3,98	-31,94	-10,63	47,02
	7	53,16	-6,27	-24,18	-13,60	40,52
8	4	52,69	-17,90	42,45	-8,81	37,12
	5	41,19	-7,84	34,32	-1,16	29,95
	6	34,15	-1,39	29,30	3,90	26,49
	7	30,70	2,79	26,47	8,89	25,14
		$\Delta=0,2$				
4	4	44,46	1,88	-33,39	-2,27	55,46
	5	50,23	-2,06	-30,90	-9,47	48,87
	6	52,90	-4,80	-21,47	-14,92	37,51
	7	53,02	-5,97	-9,99	-17,09	27,27
8	4	57,56	-16,66	35,60	-2,89	28,91
	5	47,24	-7,65	31,79	2,36	24,52
	6	38,89	-1,31	27,66	6,68	24,01
	7	34,71	2,98	26,83	9,14	25,51

Табл. 3.12 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної в залежності від амплітуди та частоти гофрування

$m$	$\alpha$	$\sigma_\psi / q_0$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 8$	$\pi / 4$	$3\pi / 8$	$\pi / 2$
		$\Delta=0,1$				
4	4	-20,29	12,24	46,85	13,57	-23,68
	5	-22,88	14,93	43,68	12,40	-25,92
	6	-22,59	17,49	31,53	10,61	-23,85
	7	-20,85	19,34	14,56	9,11	-19,62
8	4	-13,96	-7,82	-7,30	-28,05	-5,07
	5	-10,49	-27,02	-6,33	-41,59	-5,12
	6	-9,57	-37,16	-6,73	-57,98	-6,29
	7	-10,11	-46,93	-7,88	-100,12	-8,77
		$\Delta=0,2$				
4	4	-22,43	13,83	50,23	13,78	-27,44
	5	-24,26	17,39	44,75	9,50	-27,63
	6	-23,77	20,42	32,84	5,02	-23,28
	7	-22,41	22,18	18,98	2,04	-17,42
8	4	-21,53	10,82	-5,55	-28,53	-4,65
	5	-16,90	-9,73	-5,55	-42,19	-4,67
	6	-14,49	-20,75	-6,28	-81,48	-6,47
	7	-14,44	-27,03	-7,67	-127,28	-10,07

Зі збільшенням величини амплітуди гофрування спостерігається зменшення максимальних значень напружень в перерізі  $\psi = \pi / 4$  на зовнішній поверхні як для  $\Delta = 0,1$  так і для  $\Delta = 0,2$ . При цьому для оболонок з меншим степенем еліптичності при збільшенні амплітуди гофрування, напруження зменшуються в 1,07 для  $\alpha = 5$ , в 1,49 рази для  $\alpha = 6$  і у 2,46 рази для  $\alpha = 7$ . Для більшого значення  $\Delta$ , напруження зменшуються в такій послідовності: в 1,12 рази для  $\alpha = 5$ , в 1,52 рази для  $\alpha = 6$  і у 2,27 рази для  $\alpha = 7$ .

В обох випадках, для найбільшого значення амплітуди ( $\alpha = 7$ ) максимальне значення напруження зміщується в сторону більшої півосі еліпса ( $\psi = \pi / 8$ ).

На внутрішній поверхні оболонки, максимальних абсолютних значень напруження набувають в перерізах  $\psi = 0$  та  $\psi = \pi / 2$ , тобто в зонах вершин гофрів для обох значень степеня еліптичності.

Для оболонок, що мають вдвічі більшу кількість гофрів ( $m = 8$ ) розподіл напружень  $\sigma_\psi$  набуває суттєво вираженого хвильового характеру. Своїх максимальних абсолютних значень напруження досягають у вершинах гофрів на внутрішній поверхні ( $\psi = 0; \pi / 4; \pi / 2$ ) і у западинах гофрів – на зовнішній ( $\psi = \pi / 8; 3\pi / 8$ ).

Збільшення величини амплітуди гофрування викликає збільшення значень напружень на зовнішній поверхні і зменшення їх величини – на внутрішній для обох значень степеня еліптичності.

Слід зазначити, що максимальні абсолютні значення на зовнішній поверхні напруження приймають в перерізі  $\psi = 3\pi / 8$ . При цьому збільшення амплітуди гофрування призводить до зменшення величини напружень в 1,4 рази для амплітуди  $\alpha = 5$ , у 2,1 рази для амплітуди  $\alpha = 6$  та у 3,6 рази для амплітуди  $\alpha = 7$  в циліндричних оболонках зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,1$ .

В оболонках зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,2$ , збільшення амплітуди гофрування призводить до збільшення величини напружень в такій послідовності: в 1,5 рази – для  $\alpha = 5$ , у 2,9 рази для амплітуди  $\alpha = 6$  та у 4,5 рази для амплітуди  $\alpha = 7$ .

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{sy}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної на внутрішній (суцільна лінія) та зовнішній (штрихова лінія) поверхні наведено на рис. 3.14 для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$ , на рис. 3.15 для степеня еліптичності  $\Delta = 0,2$  для двох значень частоти гофрування  $m = 4; 8$ .

З наведених графіків розподілу дотичних напружень  $\tau_{sy}$  видно, що в циліндричних оболонках для обох значень степеня еліптичності при збільшенні амплітуди гофрування максимальні амплітудні значення напружень  $\tau_{sy}$  збільшуються при менший кількості гофрів та зменшуються при більшій кількості гофрів.

При збільшенні частоти гофрування у 2 рази виникаючі дотичні напруження на інтервалі зміни напрямної збільшуються майже у 5 разів для амплітуди  $\alpha = 7$ , в 1,2 рази для  $\alpha = 6$  та зменшуються в 1,2 рази для  $\alpha = 6$ , в 1,7 рази для  $\alpha = 4$ . При цьому для  $m = 4$  максимальних значень дотичні напруження досягають в інтервалі  $\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2$ .

Для восьми гофрів, максимальні амплітудні значення дотичних напружень переміщуються в ліву частину напрямної ( $0 \leq \psi \leq \pi/4$ ).

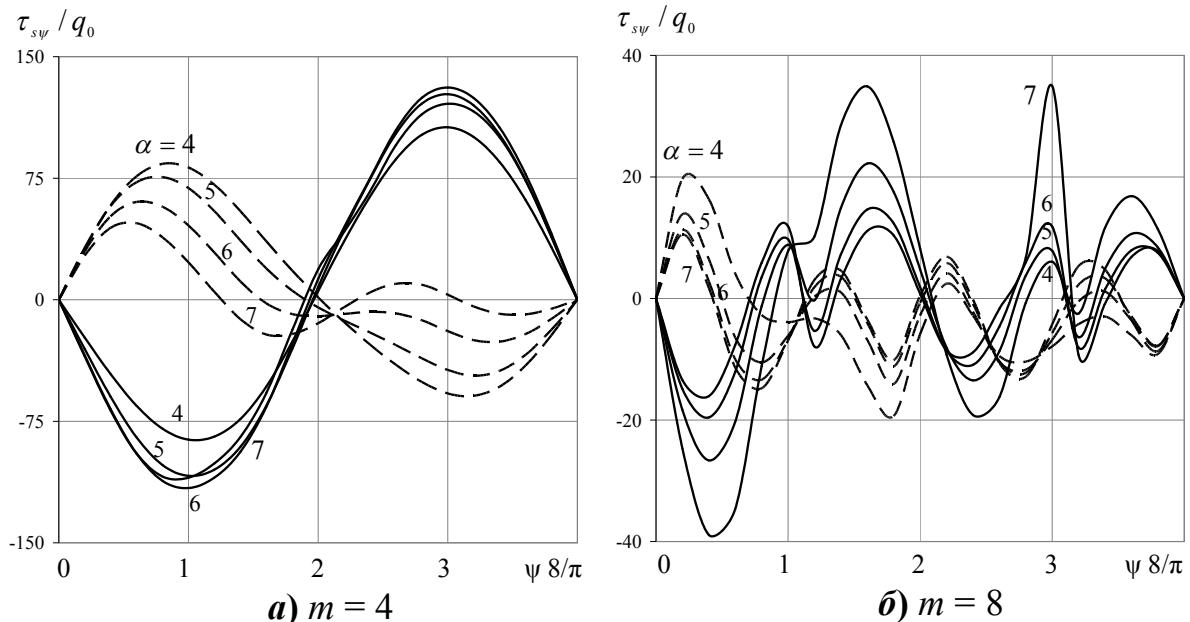


Рис. 3.14 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{sy}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від амплітуди гофрування ( $\Delta = 0,1$ )

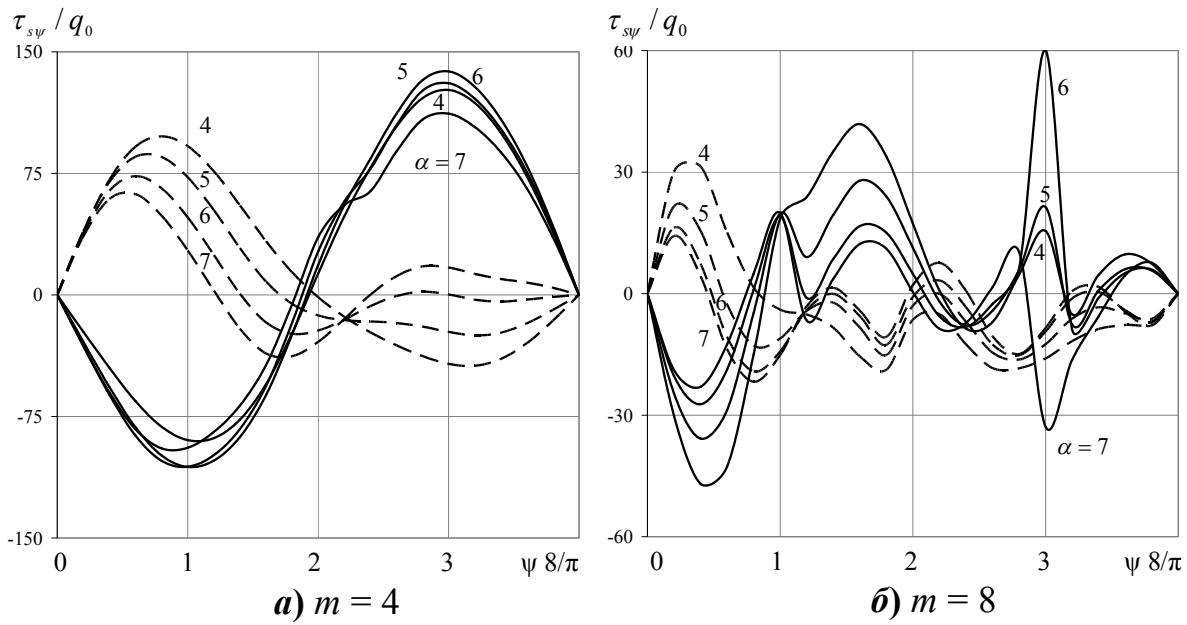


Рис. 3. 15 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{sy}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від амплітуди гофрування ( $\Delta = 0,2$ )

При збільшенні кількості гофрів, максимальні значення напружень зі збільшенням амплітуди гофрування зменшуються у 7,5 разів для  $\alpha = 7$ , у 6,7 разів для  $\alpha = 6$ , у 4,8 рази для  $\alpha = 5$ , в 2,7 рази для  $\alpha = 5$  для оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,1$ . Для циліндричних оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,2$  маємо такі показники зменшення: для  $\alpha = 7$  – у 3,5 рази, для  $\alpha = 6$  – у 2,2 разів, для  $\alpha = 5$  – у 3,7 рази та для  $\alpha = 4$  – у 2,7 рази.

Таким чином, одночасне врахування параметрів еліптичності та гофрування при дослідженні напружено-деформованого стану циліндричних оболонок даного класу дає можливість обирати раціональні параметри елементів конструкцій подібного типу.

### 3.5 Суперпозиція форм поперечних перерізів та деякі інженерні рекомендації щодо спрощення розрахункових геометричних схем

Під час аналізу напружено-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, що знаходяться під дією поверхневого навантаження, виникло питання про одночасний вплив двох

форм поперечних перерізів – еліптичної та гофрованої на поля переміщень та напружень, тобто, про ефект суперпозиції форм поперечних перерізів та міри впливу кожної з форм.

Розглядається ефект суперпозиції еліптичної та деяких гофрованих форм поперечних перерізів циліндричних оболонок при дії внутрішнього рівномірного тиску, як в попередніх підрозділах. Поперечний переріз розглядуваних оболонок описується рівнянням (3.1).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 60$ , радіус кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ , частота гофрування  $m = 4, 8$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ , механічні характеристики  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ . На рис. 3.16 наведено поперечні перерізи розглядуваних циліндричних оболонок, для яких досліджується ефект суперпозиції.

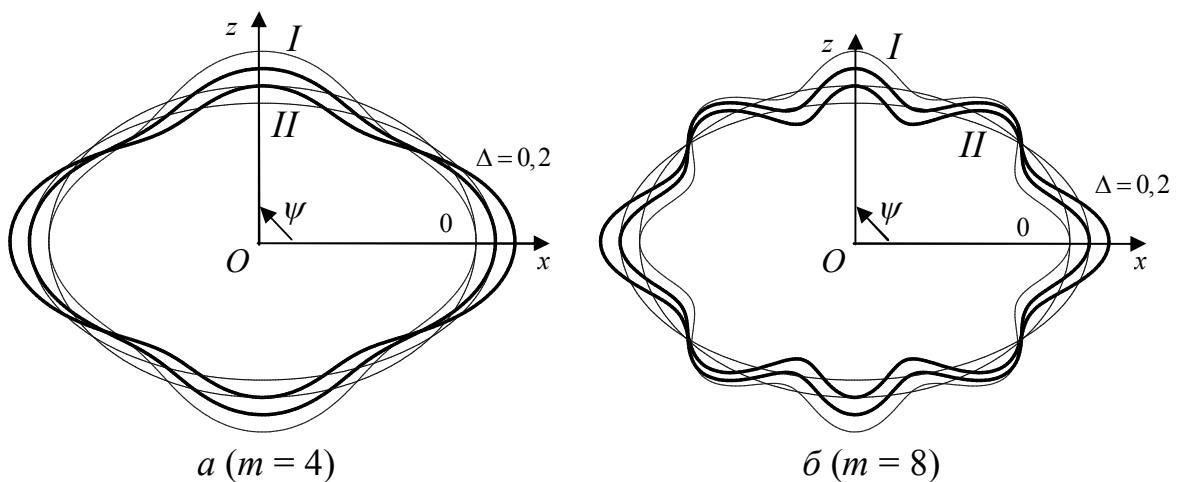


Рис. 3.16 Суперпозиція еліптичної (тонкі лінії II) та гофрованої (тонка лінія I) форм поперечних перерізів

Результати розв'язання задачі наведено для розподілу полів нормальних переміщень поверхні відліку на рис. 3.17 та максимальних значень напружень  $\sigma_y$  на внутрішній поверхні на рис. 3.18 в середньому перерізі довжини.

Ефект суперпозиції двох форм поперечних перерізів стосовно розподілу нормальних переміщень можна сформулювати у такий спосіб (рис. 3.17). На спільному симетричному інтервалі зміни напрямної ( $0 \leq \psi \leq \pi/2$ ) монотонні криві розподілу нормальних переміщень (пунктирні лінії

$\Delta = 0,1; 0,2$ ), що характерні для еліптичних форм, втрачають свою монотонність, набуваючи хвилеподібного вигляду (суцільні лінії). При цьому хвилеподібна крива, яка характерна для гофрованої кругової форми (пунктирна лінія  $\Delta = 0$ ) перестає бути симетричною відносно середини розглядуваного інтервалу зміни напрямної.

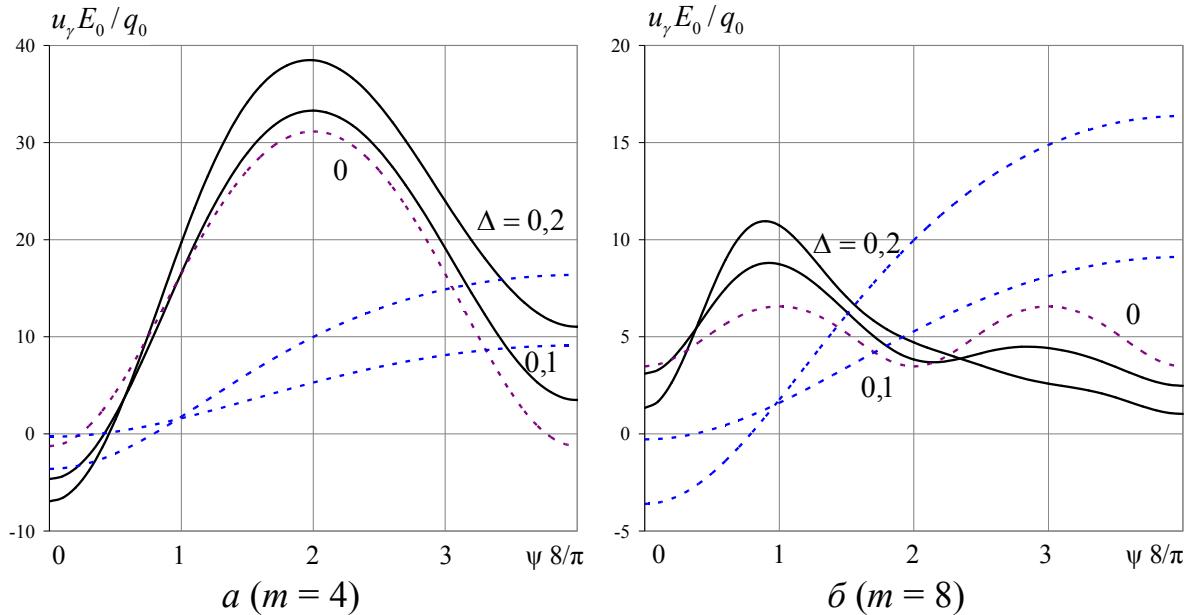


Рис. 3.17 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл нормальних переміщень вздовж напрямної

Зі збільшенням частоти гофрування спостерігається збільшення хвильостості і при збільшенні степеня еліптичності зростає відхилення кривих від симетричної форми.

Схожу картину мають графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$ .

Якщо своїх максимальних значень напруження  $\sigma_\psi$  в еліптичних оболонках досягають на зовнішній поверхні в зоні мінімальної жорсткості ( $\psi = \pi/2$ ), в гофрованих кругових оболонках – на внутрішній поверхні у вершинах гофрів, то в еліптичних гофрованих оболонках максимальні значення напружень  $\sigma_\psi$  припадають на внутрішню поверхню в перерізі  $\psi = \pi/2$  для оболонок з чотирма гофрами, та в перерізі  $\psi = 0$  – для оболонок з вісімома гофрами.

Якісно вплив двох форм поперечних перерізів на розподіл полів напружень  $\sigma_\psi$  зберігається.

Поздовжні напруження  $\sigma_s$  розподіляються аналогічно напруженням  $\sigma_\psi$  і за величиною приблизно в тричі менші за відповідні напруження  $\sigma_\psi$  (рис. 3.19).

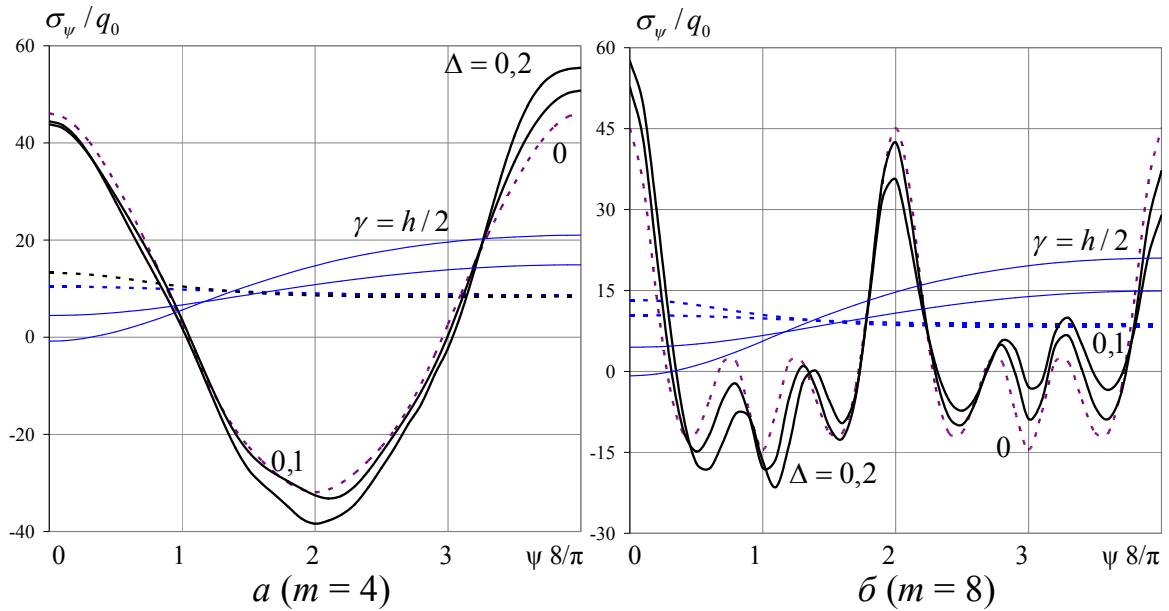


Рис. 3.18 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної на внутрішній поверхні оболонки

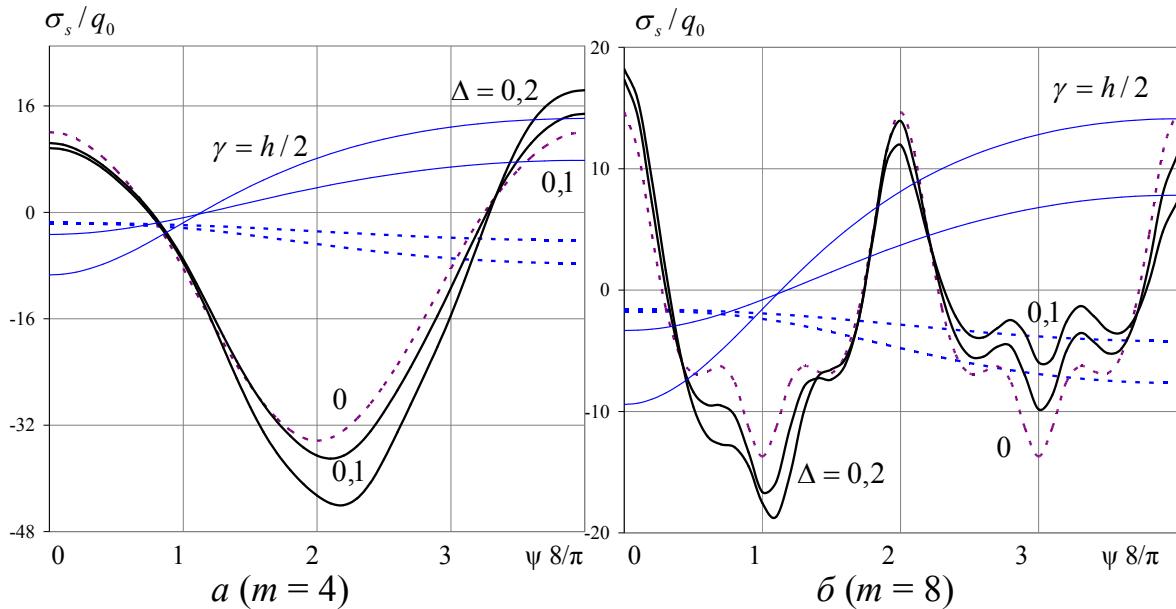


Рис. 3.19 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл поздовжніх напружень вздовж напрямної на внутрішній поверхні оболонки

На рис. 3.20 – рис. 3.23 наведені графіки розподілу вздовж напрямної полів нормальних переміщень  $u_\gamma$ , напружень  $\sigma_\psi$  в середньому перерізі довжини та дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки, що характеризують суперпозицію форм поперечних перерізів за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 2$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 1; 4$ , частота гофрування  $m = 4$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ , механічні характеристики  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ .

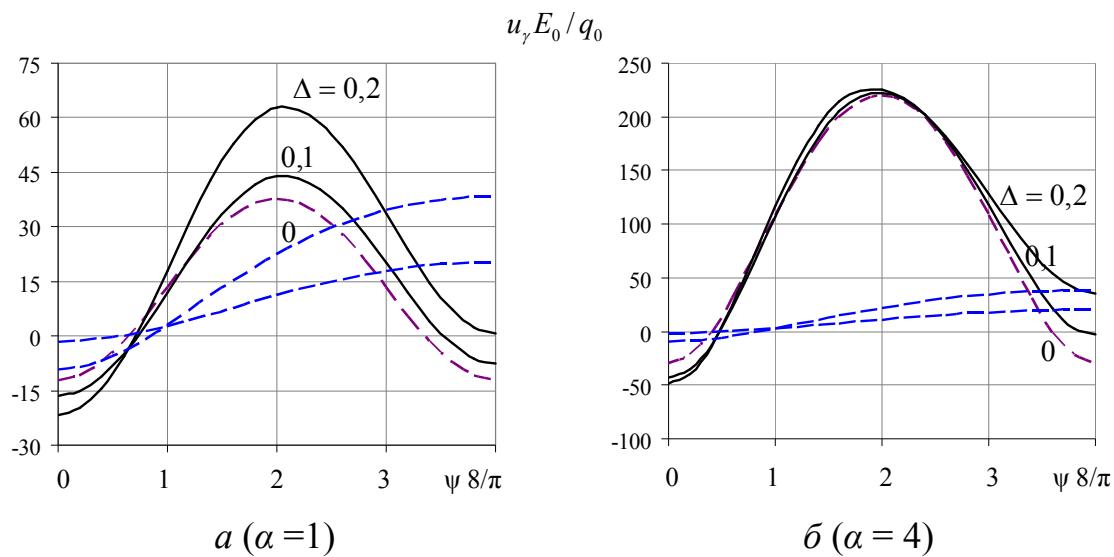


Рис. 3.20 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл нормальних переміщень поверхні відліку вздовж напрямної оболонки

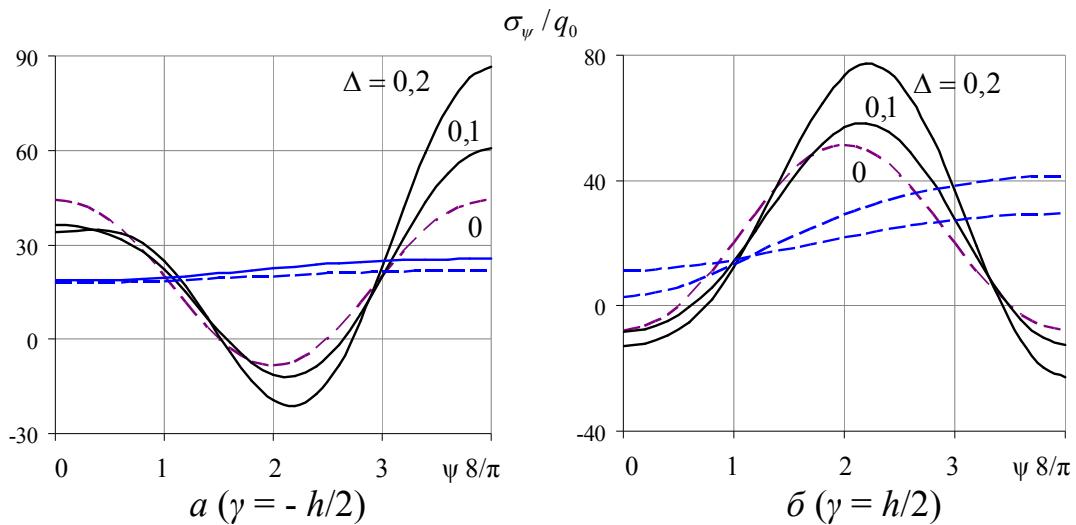


Рис. 3.21 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл напружень вздовж напрямної ( $\alpha = 1$ )

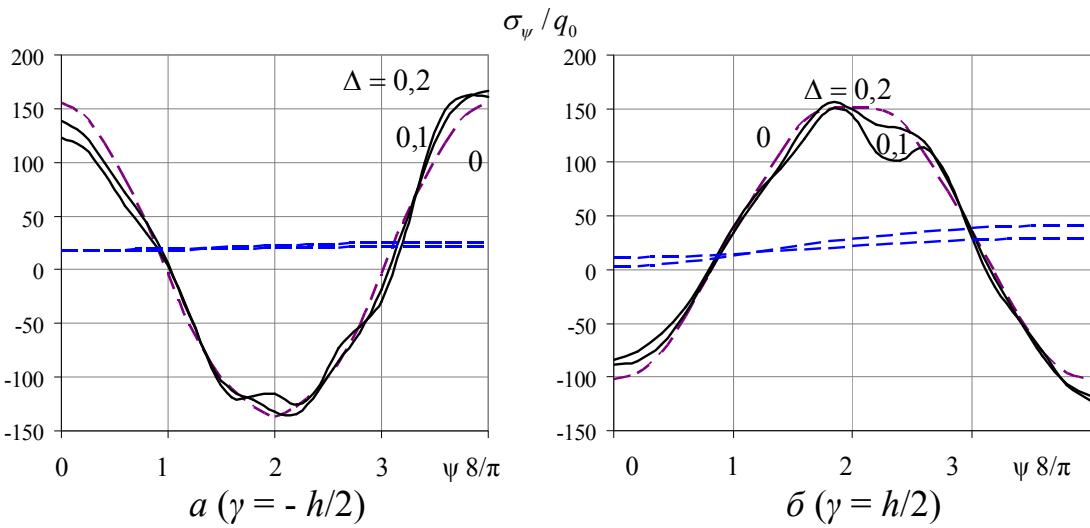


Рис. 3.22 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл напружень вздовж напрямної ( $\alpha = 4$ )

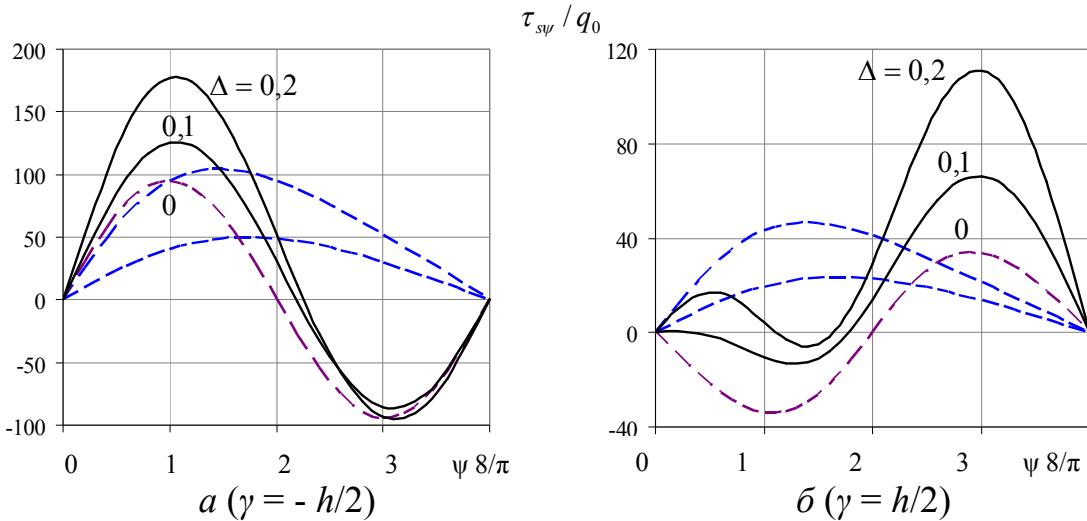


Рис. 3.23 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл дотичних напружень вздовж напрямної ( $\alpha = 1$ )

Аналіз наведених кривих розподілу полів переміщень та напружень наштовхнув на думку про доцільність визначення параметрів еліптичності та гофрування розглядуваних оболонок, за яких можливі спрощені схеми розрахунку для врахування максимальних значень напружень при застосуванні відповідних критеріїв міцності. Так, з рис. 3.21 – рис. 3.24 видно, що варіація амплітуди та степеня еліптичності впливає на максимальну величину нормальніх та дотичних напружень, наближаючи її до відповідних величин в круговій гофрованій оболонці (пунктирна лінія  $\Delta = 0$ ) (рис. 3.22, рис. 3.24).

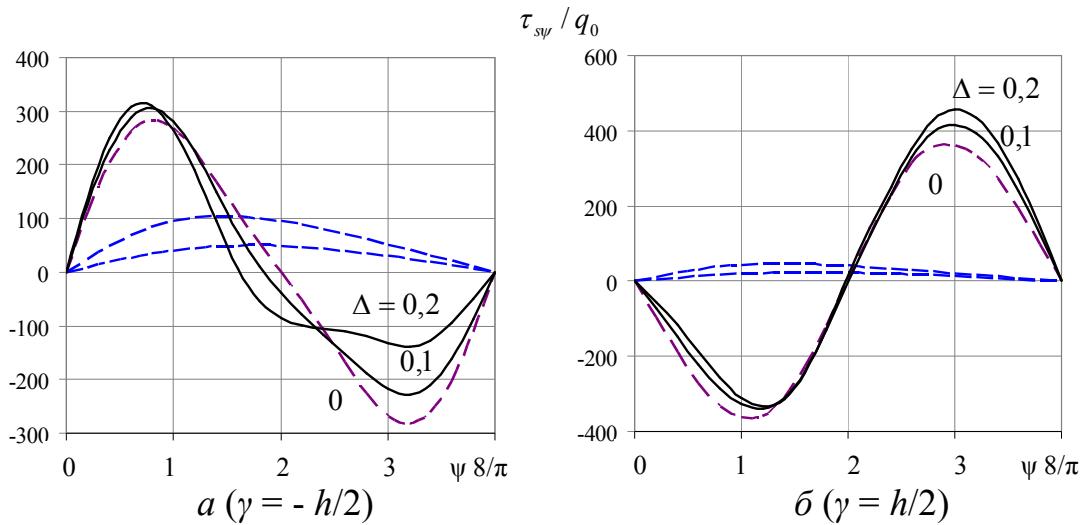


Рис. 3.24 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл дотичних напружень вздовж напрямної ( $\alpha = 4$ )

Як приклад, для визначення параметрів амплітуди гофрування та еліптичності оболонок, що мають двопараметричне відхилення від кругової форми, розглянемо циліндричні оболонки, що знаходяться під дією внутрішнього тиску з такими вихідними даними: довжина оболонок  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 2$ , частота гофрування  $m = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5; 1,75; 2,0; 2,125$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,1$ , механічні характеристики  $E = E_0$ ,  $\nu = 0,3$ .

За об'єкт дослідження обрано нетонкі циліндричні оболонки з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, коли у западині гофрів кривизна має додатній знак.

За критерій оцінки обрано відхилення радіуса кривизни поперечного перерізу поверхні відліку гофрованих еліпсів відносно радіуса кривизни гофрованого кола в перерізі  $\psi = 0$ . Результати порівняльного аналізу максимальних величин нормальних напружень в середньому перерізі довжини оболонки наведено в табл. 3.13 та для дотичних напружень на торцях – в табл. 3.16. В табл. 3.14 та табл. 3.17 наведено похибку отриманих результатів, порівняно з круговою гофрованою оболонкою ( $\Delta = 0$ ). Відповідно, в табл. 3.15

та табл. 3.18 наведено відхилення радіусів кривизни  $R_\psi$  поверхонь відліку еліптичних гофрованих поперечних перерізів відносно кругових гофрованих.

Табл. 3.13 Розподіл полів напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування

$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	34,538	35,875	36,884	37,946	39,065	41,475
0,75	42,750	43,874	45,273	46,281	47,963	50,962
1	51,422	52,815	53,428	54,747	56,573	60,512
1,25	60,843	62,434	63,133	64,543	65,650	70,293
1,5	71,004	72,784	73,566	74,488	75,551	80,433
1,75	81,917	83,704	84,727	85,737	86,899	91,019
2	93,517	95,613	96,531	97,211	97,753	102,061
2,125	105,620	107,809	108,764	109,887	111,176	114,228

Табл. 3.14 Похибка величини напружень в еліптичних гофрованих оболонках, порівняно з круговими гофрованими оболонками

Похибка (%)					
$\alpha \backslash \Delta$	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	4	7	10	13	20
0,75	3	6	8	12	19
1	3	4	6	10	18
1,25	3	4	6	8	16
1,5	3	4	5	6	13
1,75	2	3	5	6	11
2	2	3	4	5	9
2,125	2	3	4	5	8

Табл. 3.15 Радіуси кривизни поперечного перерізу поверхні відліку та похибка, порівняно з круговим гофрованим поперечним перерізом

$R_\psi$							Похибка (%)				
$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	33,82	30,53	28,91	28,78	28,07	26,68	9,7	14,5	14,9	17,0	21,1
0,75	31,48	28,53	27,23	26,98	26,72	25,52	9,4	13,5	14,3	15,1	18,9
1	29,49	26,92	26,56	26,05	25,53	24,48	8,7	9,9	11,7	13,4	17,0
1,25	27,78	25,78	25,35	24,91	24,46	23,24	7,2	8,7	10,3	12,0	16,3
1,5	26,29	24,64	24,27	23,89	23,2	22,16	6,3	7,7	9,1	11,8	15,7
1,75	24,99	23,5	23,3	22,97	22,33	21,2	6,0	6,8	8,1	10,6	15,2
2	23,84	22,69	22,42	22,14	21,84	21,02	4,8	6,0	7,1	8,4	11,8
2,125	23,31	22,27	22,02	21,75	21,48	20,89	4,5	5,5	6,7	7,9	10,4

Табл. 3.16 Розподіл полів напружень  $\tau_{sy}$  в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування

$\tau_{sy} / q_0$						
$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	46,7469	61,9602	65,5197	69,2537	73,1637	81,5121
0,75	70,5102	84,2551	87,5969	91,1397	94,881	102,961
1	94,6975	107,2	110,364	113,75	117,357	125,234
1,25	119,363	130,841	133,859	137,119	140,62	149,838
1,5	144,503	155,14	158,039	161,193	164,604	172,181
1,75	169,944	179,93	182,726	185,786	189,112	196,539
2	195,355	204,862	207,562	210,526	213,751	220,971
2,125	220,141	229,328	231,924	234,769	237,864	244,762

Табл. 3.17 Похибка величини дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  в еліптичних гофрованих оболонках, порівняно з круговими гофрованими оболонками

		Похибка (%)				
$\alpha \backslash \Delta$		0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	33	40	48	57	74	
0,75	19	24	29	35	46	
1	13	17	20	24	32	
1,25	10	12	15	18	26	
1,5	7	9	12	14	19	
1,75	6	8	9	11	16	
2	5	6	8	9	13	
2,125	4	5	7	8	11	

Табл. 3.18 Радіуси кривизни поперечного перерізу поверхні відліку та похибка, порівняно з круговим гофрованим поперечним перерізом

$R_\psi$							Похибка (%)				
$\alpha \backslash \Delta$	0	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1	0,05	0,06	0,07	0,08	0,1
0,5	33,82	30,53	28,91	28,78	28,07	26,68	9,7	14,5	14,9	17,0	21,1
0,75	31,48	28,53	27,23	26,98	26,72	25,52	9,4	13,5	14,3	15,1	18,9
1	29,49	26,92	26,56	26,05	25,53	24,48	8,7	9,9	11,7	13,4	17,0
1,25	27,78	25,78	25,35	24,91	24,46	23,24	7,2	8,7	10,3	12,0	16,3
1,5	26,29	24,64	24,27	23,89	23,2	22,16	6,3	7,7	9,1	11,8	15,7
1,75	24,99	23,5	23,3	22,97	22,33	21,2	6,0	6,8	8,1	10,6	15,2
2	23,84	22,69	22,42	22,14	21,84	21,02	4,8	6,0	7,1	8,4	11,8
2,125	23,31	22,27	22,02	21,75	21,48	20,89	4,5	5,5	6,7	7,9	10,4

З наведених у табл. 3.13 – табл. 3.15 даних видно, що похибка значень напружень  $\sigma_y$  до 5 % має місце для оболонок радіус кривизни яких в перерізі  $\psi = 0$  не перевищує 10 %; похибка в межах 5 % – 10 % має місце при похибці радіусів кривизни в межах 10 % – 15 %; похибка в межах 10 % – 20 % має місце за похибки радіусів кривизни більше 15 %.

Для значень дотичних напружень (табл. 3.16 – табл. 3.18) мають місце такі відношення. Похибка значень дотичних напружень до 5 % має місце для оболонок радіус кривизни яких в перерізі  $\psi = 0$  не перевищує 5,5 %; похибка в межах 5 % – 10 % має місце при похибці радіусів кривизни в межах 5,5 % – 8,5 %; похибка в межах 10 % – 20 % має місце за похибки радіусів кривизни в межах 8,5 % – 13 %; похибка більше 20 % має місце при похибці радіуса кривизни більше 13 %.

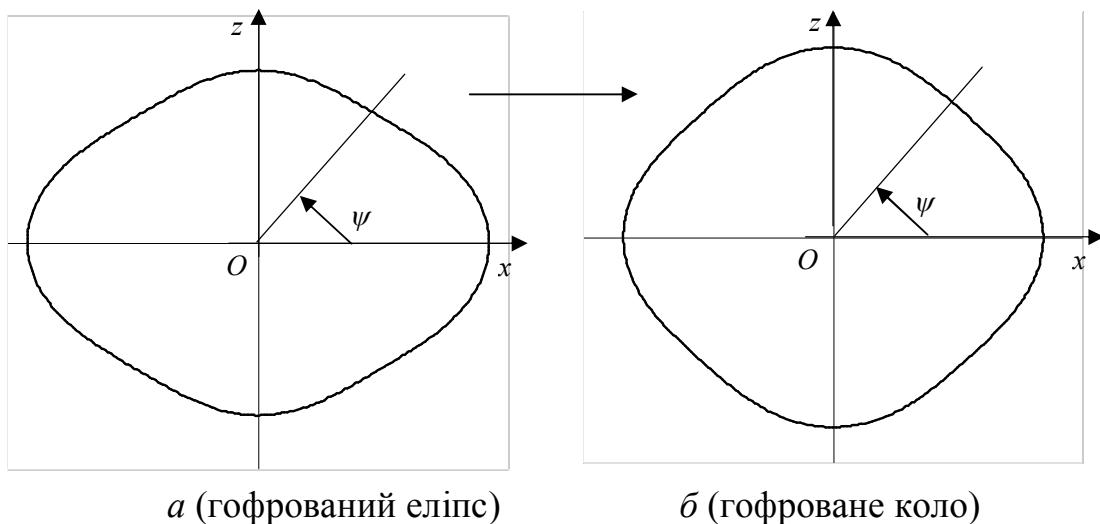


Рис. 3.26 Спрощена розрахункова форма поперечного перерізу

Таким чином, спрощену форму поперечного перерізу (рис. 3.26), без врахування еліптичності, можна застосовувати при використанні критеріїв міцності, що базується на максимальних значеннях нормальних переміщень, у випадку, коли радіус кривизни поперечного перерізу поверхні відліку в перерізі  $\psi = 0$  не перевищує 10 % та стосовно дотичних напружень – коли радіус кривизни не перевищує 5,5 % радіуса кривизни поверхні відліку відповідної кругової гофрованої оболонки.

### 3.6 Результати та висновки

1. На основі розробленого підходу, що базується на застосуванні просторової моделі із використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружене-деформований стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок, що мають двопараметричне відхилення форми поперечного перерізу від кругової. Поверхня відліку таких оболонок описується еліптичною кривою з гофрами в поперечному перерізі в полярній системі координат. При цьому, рівняння кривої має такий вигляд, що дає можливість розглядати одночасно чотири класи форм поперечного перерізу: кругову, з одно параметричним відхиленням від кругової форми – еліптичну та кругову гофровану і з двопараметричним відхиленням від кругової – гофровані еліпси. Обчислювальний процес побудований таким чином, що дозволяє дослідити вплив кожного з параметрів поперечного перерізу, що характеризує його відхилення від кругової форми на напружене-деформований стан циліндричних оболонок.
2. Проведено деякі оцінки достовірності отримуваних результатів, зокрема, збіжності розв'язків до відповідних величин кругової оболонки за умови незначного відхилення форми поперечного перерізу від кругової. Було показано, що при відхиленні значень радіуса кривизни поверхні відліку від радіуса відповідного кола в межах 3 %, похибка значень для переміщень та напружень не перевищує так само 3 %.
3. Для гофрованих циліндричних оболонок різної товщини досліджено вплив на розподіл полів переміщень та напружень степеня еліптичності. Було показано, що відхилення форми поперечного перерізу від кругової (збільшення степеня еліптичності) для оболонок з гофрами в поперечному перерізі призводить до суттєвого перерозподілу факторів напруженого стану для усіх значень товщини, що розглядалися. Крім того, було показано, що відношення товщини оболонок до радіусів кривизни в різних перерізах напрямної набуває значних величин, внаслідок чого нехтування такими членами при розв'язуванні задач може привести до суттєвих похибок.

Таким чином, застосування просторової моделі носить виправданий характер.

4. Проведено аналіз напруженого стану еліптичних гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок в залежності від зміни ступеня еліптичності для оболонок з різною кількістю гофрів та різних значень амплітуди гофрування. Були виявлені характерні особливості розподілу полів переміщень та напружень для оболонок такого класу. Зокрема, наявність еліптичності призводить до порушення симетрії в розподілі характеристик напруженого-деформованого стану циліндричних оболонок розглядуваного класу вздовж напрямної.
5. Було досліджено вплив параметрів гофрування – частоти та амплітуди гофрів, на напружений стан нетонких еліптичних оболонок. Було встановлено, що зі збільшенням кількості гофрів та збільшенням величини амплітуди гофрування, оболонка стає більш жорсткою і розподіл переміщень набуває менш симетричного хвилеподібного вигляду. При цьому напруження досягають свого максимального абсолютноного значення на зовнішній поверхні у западині гофрів, що знаходиться біжче до меншої півосі.
6. На основі проведеного аналізу розподілу полів переміщень та напружень нетонких циліндричних оболонок з двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової, встановлено ефект суперпозиції еліптичної та деяких гофрованих форм поперечних перерізів.
7. Для деяких значень амплітуди еліптичних гофрованих циліндричних оболонок знайдено відповідні значення ступеня еліптичності за яких, при розрахунках на міцність оболонок даного класу, можна використовувати спрощену форму поперечного перерізу без врахування еліптичності.

## Розділ 4

### ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ПОПЕРЕЧНИМ ПЕРЕРІЗОМ У ВИГЛЯДІ З'ЄДНАНИХ НАПІВГОФРІВ

З метою покращення характеристик міцності матеріалу конструкцій при їх експлуатації в складних умовах і здатності матеріалу чинити опір утворенню деформації, широкого застосування набули конструкції з гофрованими елементами. Знання напружено-деформованого стану дозволяє обирати раціональну форму гофрів при конструюванні та виготовленні елементів конструкцій подібного класу [264, 309, 343]. В деяких роботах хвилеподібний характер поперечного перерізу описується частиною сфери чи синусоїди, або дугами кіл, сполучення яких виконано таким чином, що кут нахилу дотичної до кривої змінюється без стрибків [293, 333]. Оскільки метою є отримання достатньо точного розв'язку, тому поперечний переріз має бути заданий неперервною кривою. Такою кривою є скорочена епіциколоїда та скорочена гіпоциколоїда [227], що складається з безперервно з'єднаних напівгофрів. Варіюючи параметрами такої кривої можна змінювати як кількість напівгофрів, так і їх амплітуду з метою вибору більш раціональної форми поперечного перерізу.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* В роботах [81, 90] досліджується напружений стан порожністих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих та увігнутих напівгофрів, що знаходяться під дією поверхневого навантаження різної товщини. При цьому проводиться порівняльний аналіз впливу кількості напівгофрів на параметри напруженого стану таких циліндрів.

В роботах [82, 86 – 89, 95, 96, 207, 211, 220] досліджується вплив на напруженій стан зміни кривизни, викликаних варіаціями кількості напівгофрів та їх амплітудою для циліндрів із з'єднаними опуклими та увігнутими напівгофрами.

В даному розділі розв'язано задачу та проведено дослідження напруженодеформованого стану нетонких циліндричних оболонок, поперечний переріз яких являє собою з'єднані опуклі (увігнуті) напівгофри. Постановка задачі та деякі оцінки достовірності отримуваних результатів наведено в підрозділі 4.1. Напруженодеформований стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних (опуклих та увігнутих) напівгофрів різної товщини розглянуто в підрозділі 4.2. В підрозділі 4.3 розглядається вплив зміни кривизни поперечного перерізу на характеристики напруженого стану циліндричних оболонок з опуклими з'єднаними напівгофрами в поперечному перерізі, а в підрозділі 4.4 – оболонок з увігнутими з'єднаними напівгофрами в поперечному перерізі. Характерні особливості розподілу полів переміщень та напружень в циліндричних оболонках з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів наведено в підрозділі 4.5.

Результати розв'язування задач отримано у вигляді графіків, діаграм та таблиць розподілу полів переміщень і напружень.

#### **4.1 Постановка задачі та оцінка достовірності отримуваних результатів**

Нехай поперечний переріз поверхні відліку ізотропних нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих (увігнутих) напівгофрів задано в параметричній формі у вигляді

$$\begin{aligned} x &= (A + a) \cos \psi - \lambda a \cos \left( \frac{A + a}{a} \psi \right), \\ z &= (A + a) \sin \psi - \lambda a \sin \left( \frac{A + a}{a} \psi \right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

де  $A$  – радіус нерухомого кола;  $a$  ( $a > 0$ ) – радіус рухомого кола;  $\lambda a$  ( $\lambda < 0$ ) – відстань до радіуса рухомого кола. Рівняння (4.1) описують сімейство кривих, утворених при русі точки рухомого кола вздовж поверхні нерухомого кола без проковзування. При русі зовні нерухомого кола, утворюється крива – епіциколоїда (рис. 4.1), при русі всередині – гіпоциколоїда (рис. 4.2), при цьому рівняння гіпоциколоїди можна отримати заміною  $a$  на  $(-a)$  в рівняннях (4.1). Крім того, параметр  $\lambda$  обирається таким чином, щоб крива належала до класу скорочених кривих ( $\lambda < 0$ ).

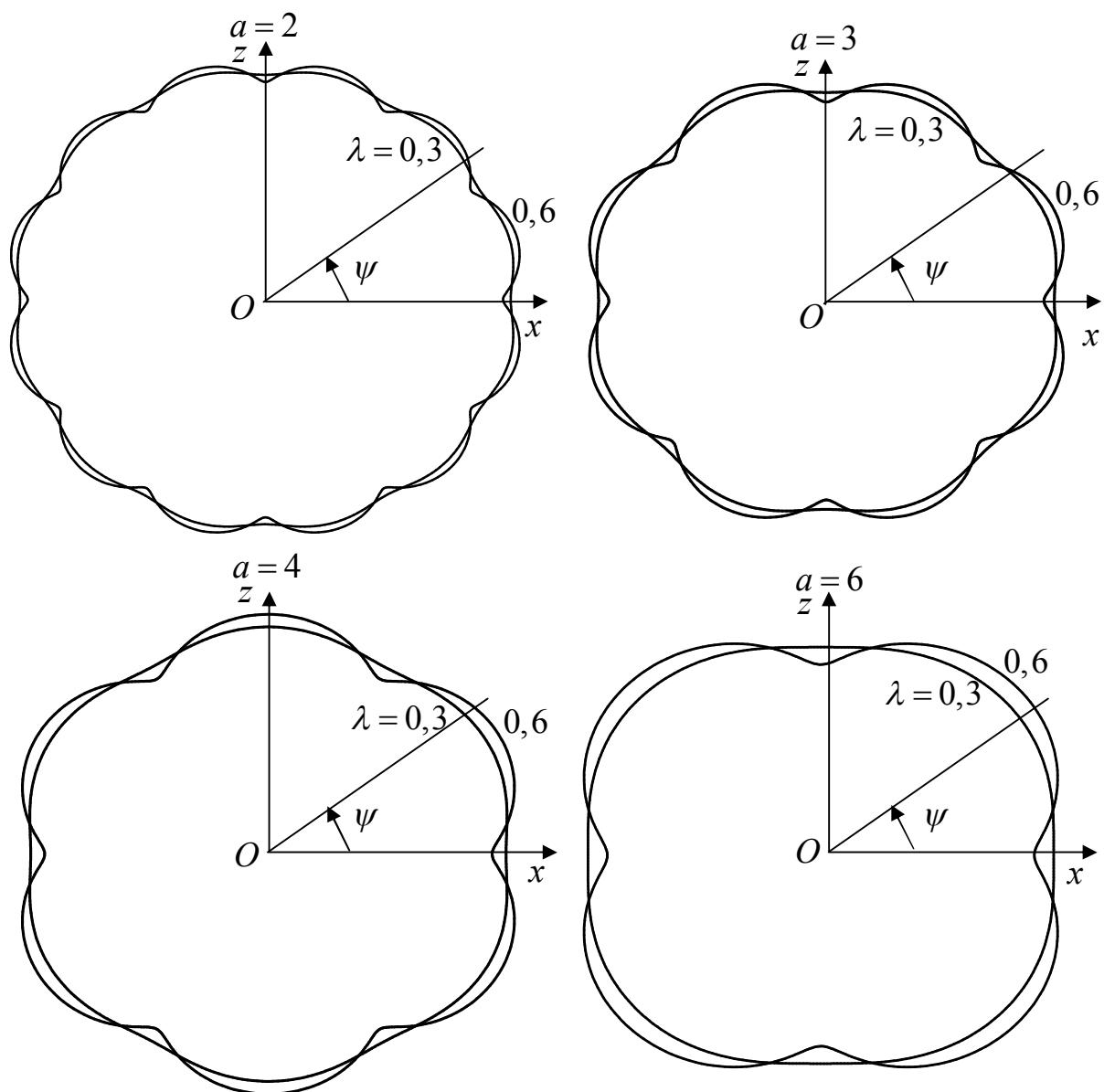


Рис. 4.1 Поперечний переріз поверхні відліку у вигляді скороченої епіциколоїди в залежності від кількості напівгофрів та їх амплітуди ( $A = 24$ )

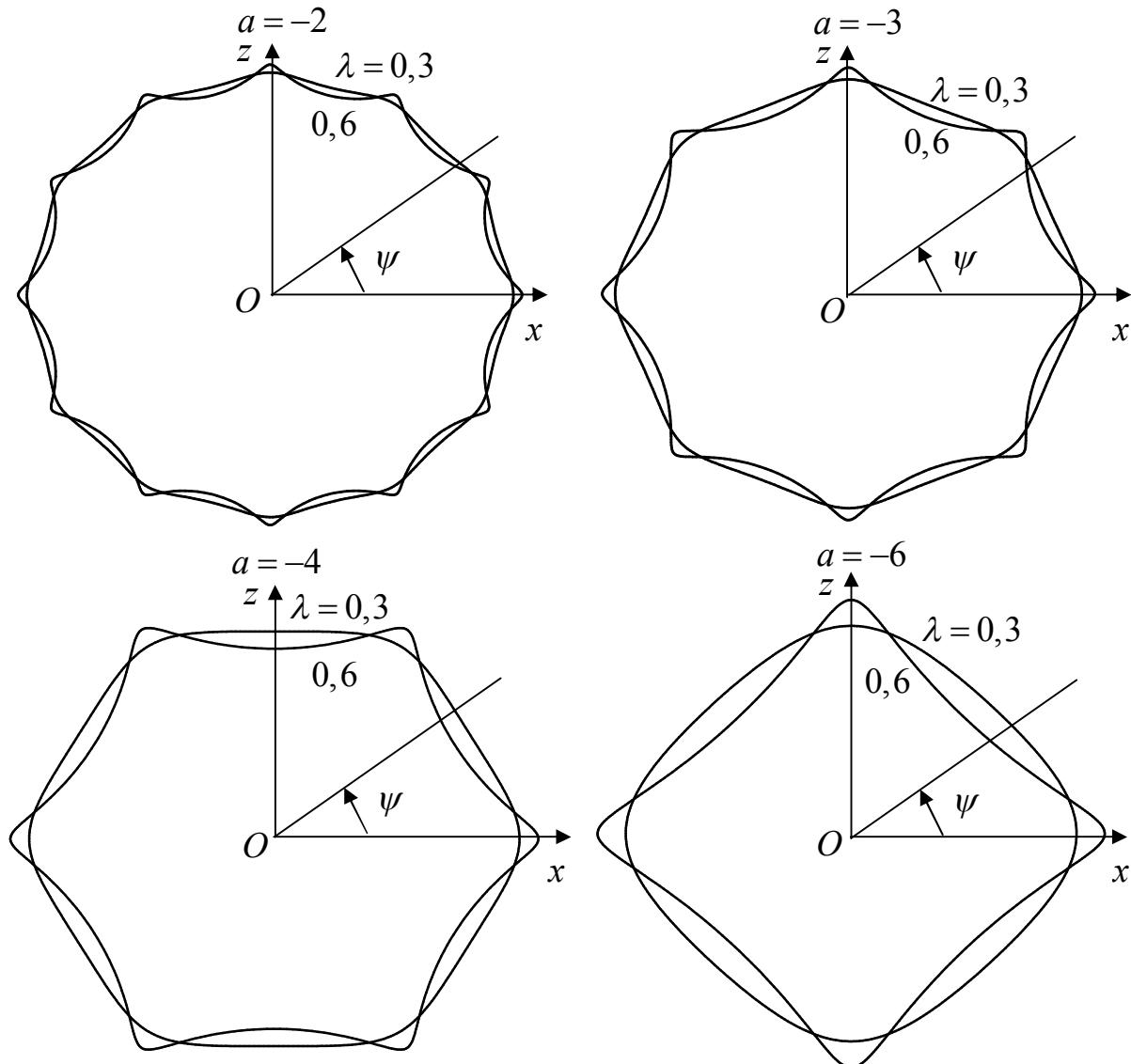


Рис. 4.2 Поперечний переріз поверхні відліку у вигляді скороченої гіпоциколоїди в залежності від кількості напівгофрів та їх амплітуди ( $A = 24$ )

Радіус кривизни поверхні відліку, що задана рівнянням (4.1), визначається таким чином

$$R_\psi = R(\psi) = \frac{(A+a)(1+\lambda^2 - 2\lambda \cos(A\psi/a))^{\frac{3}{2}}}{1 + \lambda^2 \left( \frac{A+a}{a} \right) - \lambda \left( \frac{A+2a}{a} \right) \cos(A\psi/a)}.$$

Щоб дістати певні оцінки достовірності отримуваних результатів при застосуванні розглянутої в розділі 2 методики до розв'язування задач подібного класу та описі поверхні відліку рівняннями (4.1), розглянемо задачу про напружений стан ізотропних нетонких циліндричних оболонок з опуклими (увігнутими) з'єднаннями напівгофрами в поперечному перерізі під дією внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ) за умови, коли параметр  $\lambda \rightarrow 0$ , тобто, коли поперечний переріз наближається до кругового і радіус кривизни наближається до радіуса відповідного кола (табл. 4.1). Серединна поверхня описується рівняннями (4.1).

Табл. 4.1 Значення радіуса кривизни  $R_\psi$  поверхні відліку при  $\lambda \rightarrow 0$

$a$	$R_o$	$\lambda$	$\psi$	$R_\psi$	Похибка, %
3	24	0,001	0	24,15	0,6
			$\pi/7$	23,86	
	18	0,002	0	24,29	1,2
			$\pi/7$	23,72	
-3	18	0,001	0	17,86	0,8
			$\pi/7$	18,14	
	18	0,002	0	17,72	1,6
			$\pi/7$	18,29	

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 60$ , товщина оболонок  $h = 2$ , радіус нерухомого кола  $A = 21$ , радіус рухомого кола для епіциколоїди  $a = 3$ , для гіпоциколоїди  $a = -3$  параметр  $\lambda = 0,001; 0,002$ , модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Результати розв'язування задачі наведено у табл. 4.2 в середньому перерізі довжини для значень нормальних переміщень  $u_\psi$  та напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхнях оболонки для двох значень напрямної: в зоні з'єднання напівгофрів та їх вершинах  $\psi = 0; \psi = \pi/7$ .

Табл. 4.2 Розподіл переміщень та напружень в оболонках із з'єднаними напівгофрами в поперечному перерізі при  $\lambda \rightarrow 0$

$\gamma$	$\psi$	$u_\gamma E_0 / q_0$			$\sigma_\psi / q_0$			Похибка, %	
		$\lambda$							
		0,0	0,001	0,002	0,0	0,001	0,002		
$a = 3$									
$-h/2$	0	282,93	284,05	285,18	11,75	11,64	11,53	0,4 – 1,8	
	$\pi/7$	282,93	281,82	280,71	11,75	11,85	11,96		
$h/2$	0	275,09	276,21	277,33	11,25	11,35	11,45		
	$\pi/7$	275,09	273,97	272,89	11,25	11,15	11,05		
$a = -3$									
$-h/2$	0	158,43	157,95	157,46	8,88	8,96	9,05	0,3 – 1,9	
	$\pi/7$	158,43	158,92	159,42	8,88	8,79	8,71		
$h/2$	0	152,39	151,91	151,42	8,16	8,08	8,01		
	$\pi/7$	152,39	152,88	153,38	8,16	8,23	8,31		

При  $\lambda = 0,0$  маємо кругову оболонку, для якої існує точний розв'язок. При цьому, якщо  $a = 3$ , то радіус поверхні відліку  $R = 24$ , якщо  $a = -3$ , то радіус  $R = 18$ . При розглядуваних значеннях параметру  $\lambda = 0,001; 0,002$ , відхилення форми поперечного перерізу поверхні від кругової в різних перерізах вздовж напрямної не перевищує 2 %.

Як видно з наведених в табл. 4.2 даних, значення переміщень  $u_\gamma$  та напружень  $\sigma_\psi$  при незначному відхиленні форми поперечного перерізу від кругової, за умови  $\lambda \rightarrow 0$  не перевищують 2 % порівняно з відповідними значеннями для кругової оболонки, як для оболонок із з'єднаними опуклими ( $a = 3$ ), так і зувігнутими ( $a = -3$ ) напівгофрами.

## 4.2 Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів різної товщини

Розглядаються ізотропні циліндричні оболонки з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів, описаних за допомогою скороченої епіциклоїди (гіпоциклоїди) рівняннями (4.1). Метою дослідження є визначення характеристик напружено-деформованого стану оболонок даного класу різної товщини. На торцях оболонки виконуються умови (2.9). Оболонки знаходяться під дією рівномірного навантаження  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ), прикладеного на внутрішній поверхні для оболонок зувігнутими напівгофрами та на зовнішній – з опуклими. Границі умови на бічних поверхнях (2.24) мають вигляд

$$\gamma = \gamma_p : \sigma_{\gamma,n,k} = a \cdot q_{\gamma,n,k}^-; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0; \quad (4.2)$$

$$\gamma = \gamma_q : \sigma_{\gamma,n,k} = b \cdot q_{\gamma,n,k}^+; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0,$$

де у випадку внутрішнього тиску  $a = 1$ ,  $b = 0$  і у випадку зовнішнього навантаження  $a = 0$ ,  $b = 1$ .

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ;

а) у випадку опуклих напівгофрів (скорочена епіциклоїда рис. 4.3 а) довжина оболонок  $l = 60$ , товщина приймає значень  $h = 0,25; 0,375; 0,5; 1$ , радіус нерухомого кола  $A = 20$ , радіус рухомого кола  $a = 2$ , параметр  $\lambda = 0,4$ ;

б) у випадкуувігнутих напівгофрів (скорочена гіпоциклоїда рис. 4.3 б) довжина оболонок  $l = 60$ , товщина приймає значень  $h = 0,8; 1,2$ , радіус нерухомого кола  $A = 20$ , радіус рухомого кола  $a = 2, 4$ , параметр  $\lambda = 0,4$ .

а) Спочатку розглянемо оболонки, поперечний переріз яких описується рівняннями скороченої епіциклоїди. Радіус кривизни  $R_\psi$  поверхні відліку в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/10$  приймає абсолютних значень  $R_\psi = 2,32$  для  $\psi = 0$ ;  $R_\psi = 40,48$  для  $\psi = \pi/30$ ;  $R_\psi = 7,99$ , для  $\psi = \pi/20$ . При цьому відношення

товщини оболонки до радіуса кривизни для  $h = 0,25$  знаходиться в межах, припустимих в теорії тонких оболонок; при  $h = 0,375$  – в теорії оболонок середньої товщини і для  $h = 0,5; 1,0$  – в теорії товстостінних оболонок.

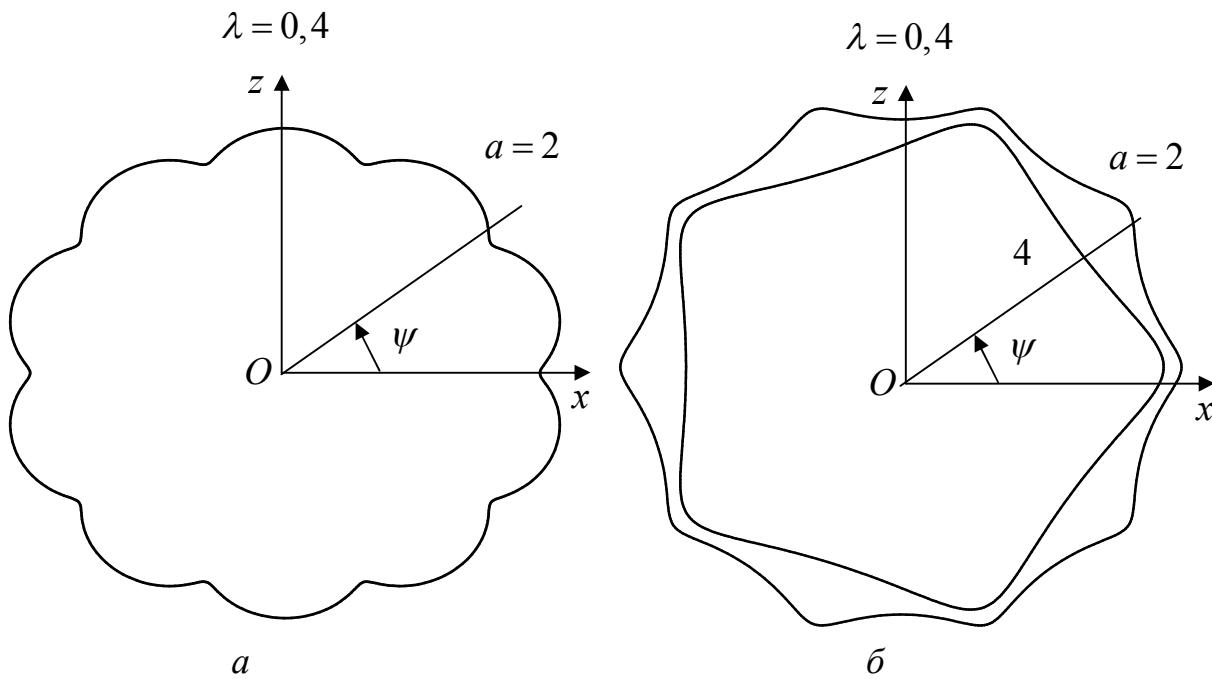


Рис. 4.3 Поперечний переріз скороченої епіциклоїди (a) та скороченої гіпоциклоїди (б) ( $A=20$ )

Результати розв'язку задачі наведено для поверхні відліку в середньому перерізі по довжині оболонки ( $s = 30$ ) у вигляді графіків на рис. 4.4, для нормальних переміщень  $u_\gamma$  та на графіках (рис. 4.5) на внутрішній поверхні оболонки для напруження  $\sigma_\gamma$ , в силу симетрії на інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 10$ .

На рис. 4.4 наведено графіки розподілу нормальних переміщень  $u_\gamma$  для оболонок різної товщини вздовж напрямної оболонки. З графіків видно, що зміна товщини оболонки призводить до незначного перерозподілу полів переміщень вздовж напрямної, так для  $h = 0,25; 0,375$  при переході із зони з'єднання до зони вершин напівгофрів переміщення збільшуються в 1,24 рази, а для  $h = 0,5; 1,0$  – в 1,25 рази, при цьому зі збільшенням товщини оболонки, вона стає більш жорсткою, що призводить до зменшення значень переміщень в

1,5 рази для  $h = 0,375$ ; в 2,0 рази для  $h = 0,5$  і в 4,1 рази для  $h = 1,0$ , порівняно з товщиною  $h = 0,25$ .

На рис. 4.5 представлени графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки.

З наведених графіків видно, що максимальних значень напруження досягають в перерізі  $\psi = 3\pi/10$  і при збільшенні товщини їх значення, порівняно з товщиною  $h = 0,25$  зменшуються в 1,5; 2,0; 5,1 рази для товщини  $h = 0,375$ ; 0,5; 1,0 відповідно.

В місцях з'єднання напівгофрів напруження змінюють знак на протилежний, зменшуючись при цьому в 1,4 рази порівняно з максимальним величинами для всіх значень товщини.

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{sy}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної наведено на рис. 4.6 на внутрішній (рис. 4.6 а) та зовнішній (рис. 4.6 б) поверхні. В силу симетрії розглядається інтервал напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi/5$ .

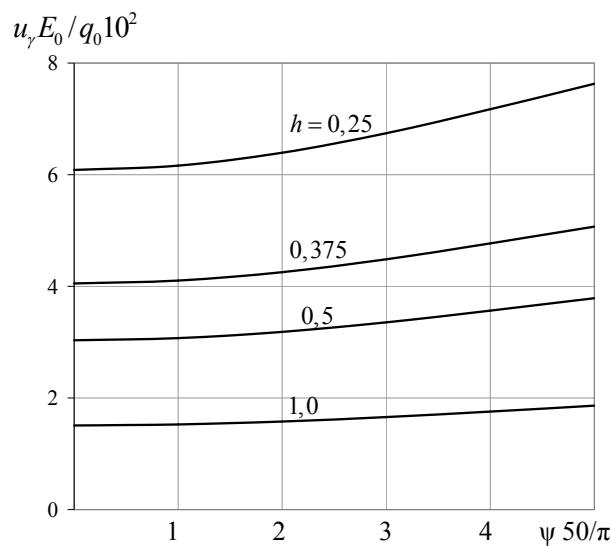


Рис. 4.4 Розподіл переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки для різних значень товщини

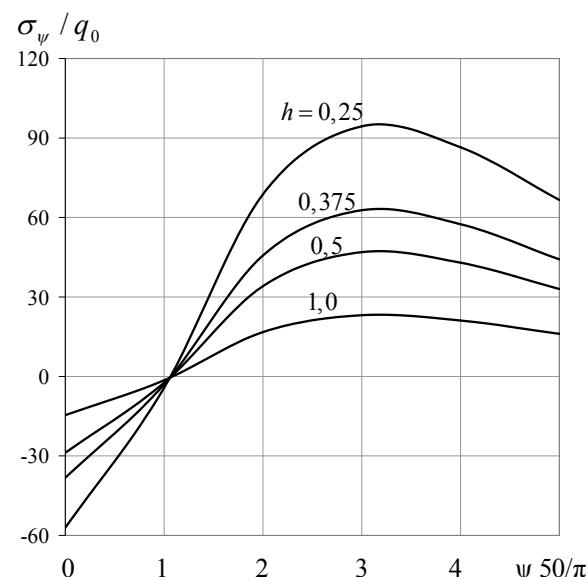


Рис. 4.5 Розподіл напружень  $\sigma_y$  вздовж напрямної оболонки для різних значень товщини

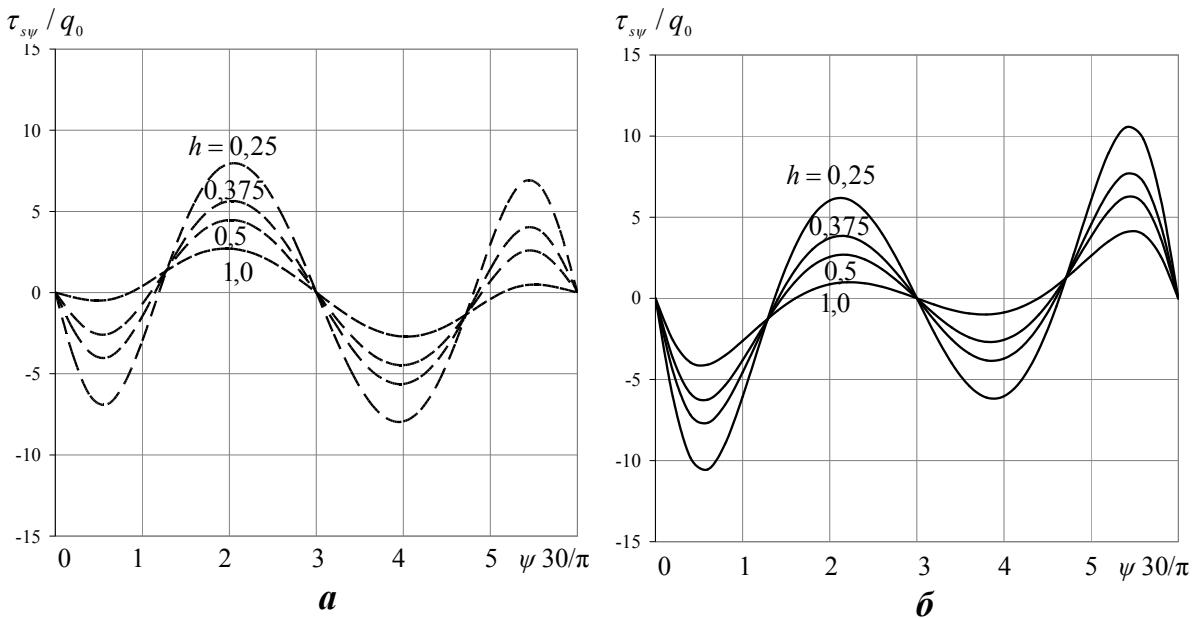


Рис. 4.6 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від товщини

З графіків, наведених на рис. 4.6 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки в розглядуваному інтервалі напрямної носить хвилястий синусоподібний характер. При цьому має місце антисиметрія відносно перерізу  $\psi = \pi/10$ , тобто відносно вершин напівгофрів, як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях оболонки.

Збільшення товщини сприяє збільшенню міцності всієї оболонки, що, в свою чергу, призводить до зменшення величини дотичних напружень. Максимальних амплітудних значень напруження  $\tau_{s\psi}$  досягають в інтервалах  $\pi/20 \leq \psi \leq \pi/10$ ,  $\pi/10 \leq \psi \leq 3\pi/20$  на внутрішній поверхні та в інтервалах  $0 \leq \psi \leq \pi/20$ ,  $3\pi/20 \leq \psi \leq \pi/5$  на зовнішній. При цьому на зовнішній поверхні величина максимальних амплітудних значень дотичних напружень приблизно в 1,3 – 1,5 разів більша, ніж на внутрішній.

При збільшенні товщини їх величина зменшується в 1,4 рази для  $h = 0,375$ , в 1,7 рази для  $h = 0,5$  та у 2,6 рази для товщини  $h = 1,0$ , порівняно з товщиною  $h = 0,25$  на обох бічних поверхнях .

б) Далі розглянемо оболонки, поверхня відліку поперечного перерізу яких, описується скороченою гіпоциклоїдою. Оболонки знаходяться під дією внутрішнього тиску.

Для розглядуваних оболонок, з поперечним перерізом у вигляді увігнутих з'єднаних напівгофрів, в місцях з'єднання напівгофрів, радіус кривизни серединної поверхні набуває значень  $R_\psi = 1,41$  для  $a = -2$  і  $R_\psi = 2,22$  для  $a = -4$ . Залишаючись в межах теорії оболонок середньої товщини та товстостінних оболонок, обрано два значення для товщини  $h = 0,8; 1,2$ .

На рис. 4.7 – рис. 4.9 наведено результати розв'язання задачі у вигляді графіків розподілу переміщень і напружень в середньому перерізі по довжині оболонки.

На рис. 4.7 показано графіки розподілу переміщень  $u_\gamma$  серединної поверхні оболонки для двох значень товщини вздовж напрямної в силу симетрії на інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/10$  для оболонок з 10-ма напівгофрами та в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/5$  – для оболонок з п'ятьма напівгофрами.

Криві на рис. 4.7 а відповідають оболонкам з 10-ма напівгофрами ( $a = -2$ ), на рис. 4.7 б – з 5-ма напівгофрами ( $a = -4$ ).

З рис. 4.7 видно, що при збільшенні товщини оболонки, величина переміщень зменшується у 2,7 в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , та в 2,9 рази у западині напівгофрів при  $\psi = \pi/10$  для  $a = -2$  і в 2,4 рази та у 3,3 рази відповідно при  $\psi = 0, \psi = \pi/5$  для  $a = -4$ . З іншого боку, зменшення кількості напівгофрів призводить до зменшення жорсткості оболонок, що викликає збільшення величини переміщень  $u_\gamma$  у 1,4 для  $h = 0,8$  та у 1,6 рази для  $h = 1,2$  в місцях з'єднання напівгофрів і у 5,5 рази для  $h = 0,8$  та у 4,9 рази для  $h = 1,2$  – в западині напівгофрів.

На рис. 4.8 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки вздовж напрямної.

Криві на рис. 4.8 а відповідають оболонкам з 10-ма напівгофрами ( $a = -2$ ), на рис. 4.8 б – з 5-ма напівгофрами ( $a = -4$ ).

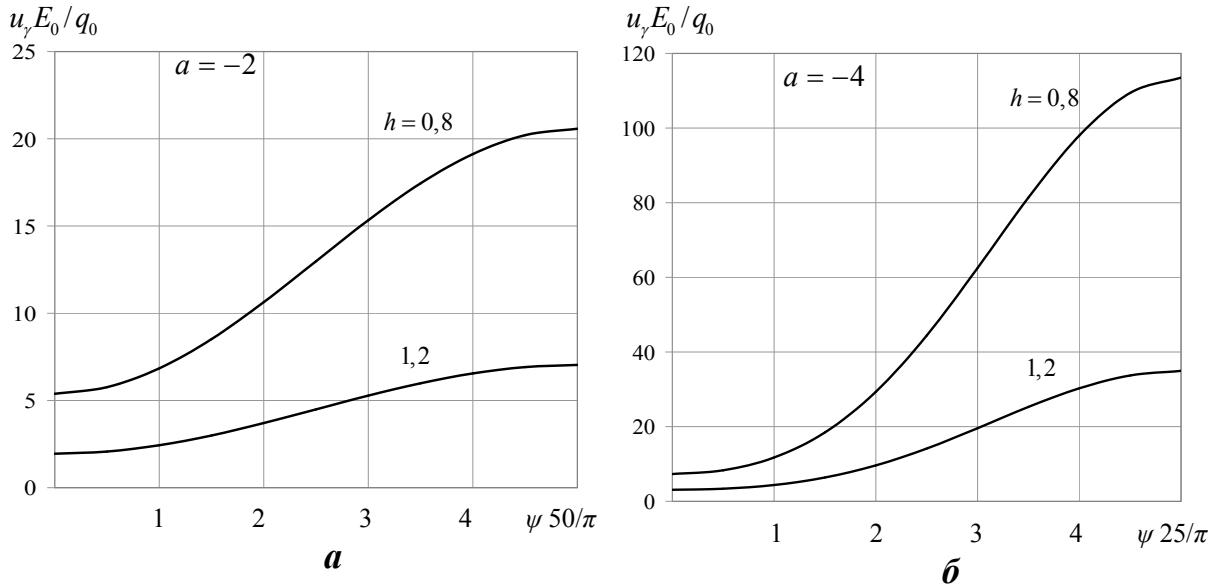


Рис. 4.7 Розподіл переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини оболонок

З рис. 4.8 видно, що при збільшенні товщини оболонки, величина напружень зменшується у 1,7 ( $a = -2$ ) і в 1,9 ( $a = -4$ ) рази в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , та у западині напівгофрів – в 2,3 ( $a = -2$ ) рази при  $\psi = \pi/10$  та в 2,4 ( $a = -4$ ) рази при  $\psi = \pi/5$ , змінюючи при цьому знак на протилежний.

При зменшенні кількості напівгофрів величина напружень  $\sigma_\psi$  зростає у 1,3 для  $h = 0,8$  та у 1,1 рази для  $h = 1,2$  в місцях з'єднання напівгофрів і у 2,6 рази для  $h = 0,8$  та у 2,5 рази для  $h = 1,2$  – в западинах напівгофрів.

На рис. 4.9 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної. Криві на рис. 4.9 а відповідають оболонкам з 10-ма напівгофрами ( $a = -2$ ), на рис. 4.9 б – з 5-ма напівгофрами ( $a = -4$ ).

З рис. 4.9 видно, що збільшення товщини оболонки, призводить до зменшення величини напружень у 2,3 ( $a = -2$ ) і в 2,5 ( $a = -4$ ) рази в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , та у западині напівгофрів – в 1,9 ( $a = -2$ ) рази

при  $\psi = \pi/10$  та в 2,1 ( $a = -4$ ) рази при  $\psi = \pi/5$ , змінюючи при цьому знак на протилежний.

При зменшенні кількості напівгофрів величина напруження  $\sigma_\psi$  збільшується у 2,2 для  $h = 0,8$  та у 2,0 рази для  $h = 1,2$  в місцях з'єднання напівгофрів і у 2,6 рази для  $h = 0,8$  та у 2,4 рази для  $h = 1,2$  – в западинах напівгофрів.

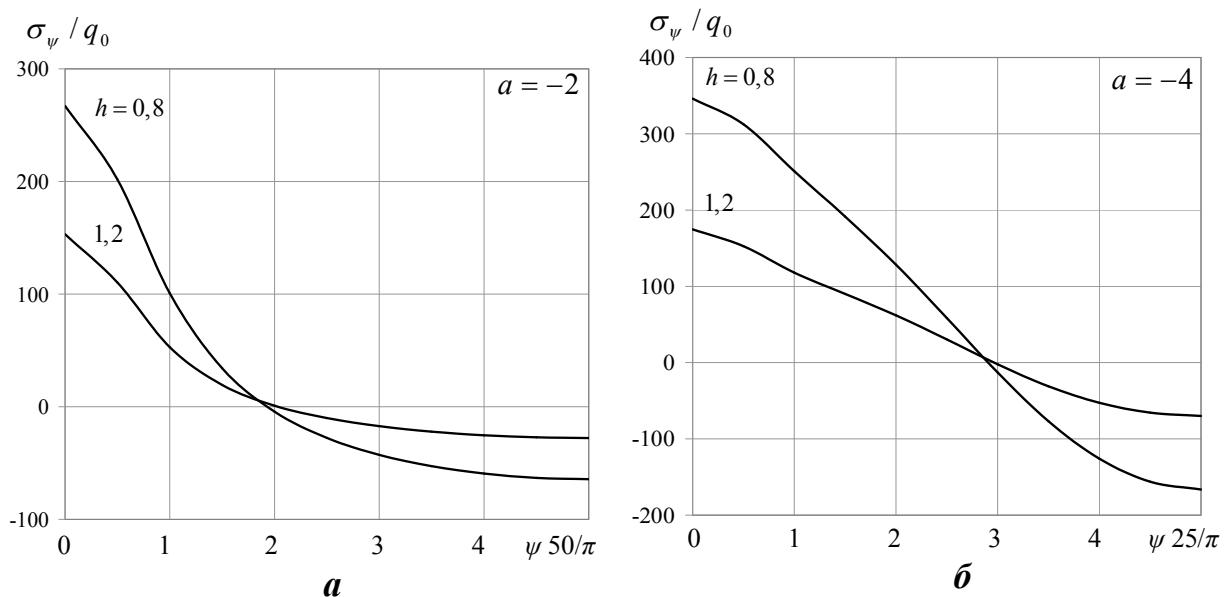


Рис. 4.8 Розподіл напруженень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини циліндрів

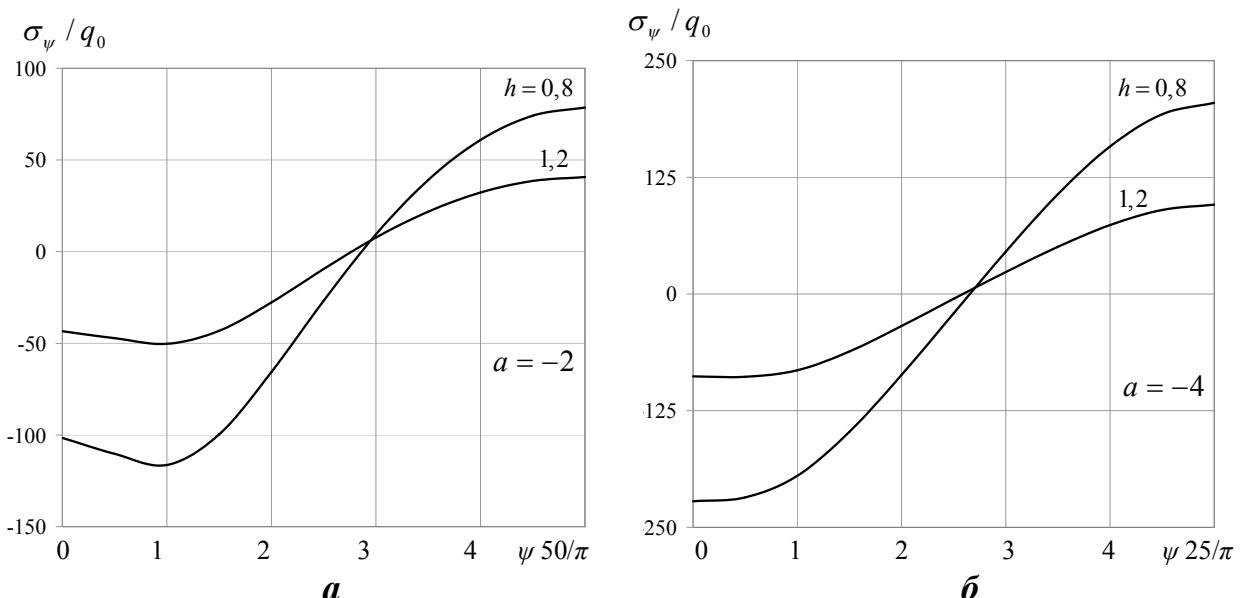


Рис. 4.9 Розподіл напруженень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини

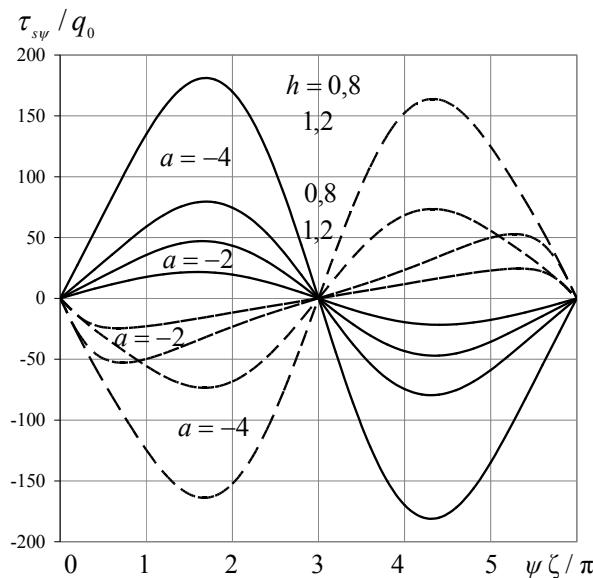


Рис. 4.10 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  різної товщини вздовж напрямної оболонки

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної наведено на рис. 4.10 для двох значень радіуса рухомого кола. Криві розподілу дотичних напружень на внутрішній поверхні позначені штриховою лінією, на зовнішній – суцільною. В силу симетрії розглядається інтервал напрямної  $0 \leq \psi \leq 2\pi/5$  для

$a = -4$ , та інтервал  $0 \leq \psi \leq \pi/5$  для  $a = -2$ . Величина  $\zeta = 30$  для меншого значення радіуса рухомого кола і  $\zeta = 15$  для більшого значення радіуса рухомого кола. Як видно з рис. 4.10 для оболонок з меншим значенням радіуса рухомого кола ( $a = -2$ ) максимальних значень на внутрішній поверхні дотичні напруження досягають в перерізах, біжчих до місць з'єднання напівгофрів. Для  $a = -4$  вони переміщуються в зону, близьку до чверті розглядуваного інтервалу напрямної.

Крім того, з графіків, наведених на рис. 4.10 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки в розглядуваному інтервалі напрямної носить хвилястий синусоподібний характер для обох значень радіуса рухомого кола. При цьому має місце анти симетрія відносно перерізу  $\psi = \pi/10$  для  $a = -2$ , та відносно перерізу  $\psi = \pi/5$  для  $a = -4$ , тобто відносно западин напівгофрів.

Збільшення товщини сприяє збільшенню міцності всієї оболонки, що, в свою чергу, призводить до зменшення величини дотичних напружень. Максимальних амплітудних значень напруження  $\tau_{s\psi}$  досягають в перерізах  $\psi = \pi/20$  та  $\psi = 3\pi/20$  для  $a = -2$  та в перерізах  $\psi = \pi/10$  та  $\psi = 3\pi/10$  для

$a = -4$ . При збільшенні товщини їх величина зменшується приблизно в 2,5 рази для обох значень радіуса рухомого кола.

Аналіз проведеного дослідження напруженого стану зазначеного класу оболонок показав, що збільшення кількості напівгофрів призводить до зменшення напруженості оболонок, внаслідок збільшення їх жорсткості. При зменшенні товщини оболонки спостерігається значне збільшення величин переміщень та напружень. Таким чином, впливати на зменшення параметрів, що характеризують напружене-деформований стан оболонок подібного класу можна за рахунок збільшення товщини, або кількості напівгофрів.

#### **4.3 Вплив зміни кривизни на напружений стан циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді опуклих з'єднаних напівгофрів**

Кривизна поверхні відліку оболонок у вигляді з'єднаних опуклих (увігнутих) напівгофрів залежить від кількості напівгофрів, що характеризується відношенням радіуса нерухомого кола до радіуса рухомого ( $A / a$ ) та від відстані до центра рухомого кола, що характеризує параметр  $\lambda$ .

Проведемо аналіз напруженого стану оболонок, що розглядаються в залежності від зміни кривизни поперечного перерізу, які знаходяться під дією навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні.

Задачу розв'язано за таких умов: довжина оболонок  $l = 60$ , товщина приймає значення  $h = 2$ , радіус нерухомого кола  $A = 21$ , радіус рухомого кола  $a = 3; 7$ , параметр  $\lambda = 0,4; 0,5$ . Модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ .

На рис. 4.11 наведено поперечний переріз поверхні відліку розглядуваних циліндричних оболонок.

Радіус кривизни поверхні відліку приймає своє мінімальне значення в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ .

В табл. 4.3 наведені значення радіусів кривизни та відношення товщини до радіусів кривизни для чотирьох варіантів оболонок, що розглядаються. З таблиці видно, що відношення  $h / |R_\psi|$  знаходиться в межах допустимих для

тovстостінних оболонок та оболонок середньої товщини, що виправдовує вибір просторової моделі при розв'язуванні даного класу задач.

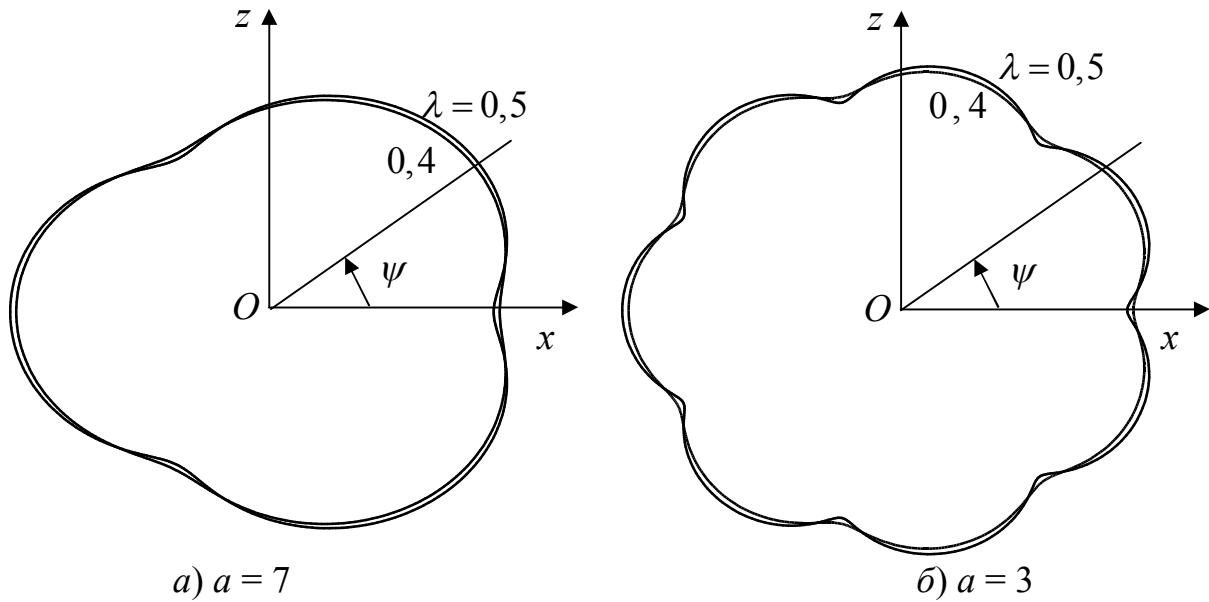


Рис. 4.11 Поперечний переріз скороченої епіциклоїди ( $A = 21$ ) в залежності від параметрів напівгофрів

Таблиця 4.3 Радіуси кривизни поверхні відліку та їх співвідношення з товщиною ( $A=21; h=2$ )

$a$	7		3	
кількість напівгофрів ( $A / a$ )	3		7	
$\lambda$	0,4	0,5	0,4	0,5
$ R_\psi $	3,9	2,0	16,8	7,0
$h /  R_\psi $	0,5	1	0,12	0,29

Результати розв'язку задачі наведені на рис. 4.12 для нормальних переміщень  $u_\gamma$ , на рис. 4.13 та в табл. 4.4 для напружень  $\sigma_\psi$  в середньому перерізі довжини оболонки.

На рис. 4.12 наведено графіки розподілу полів переміщень поверхні відліку вздовж напрямної оболонки. З аналізу кривих, наведених на графіках випливає, що для оболонок з трьома напівгофрами зі збільшенням параметра  $\lambda$  значення

переміщень збільшуються несуттєво як в перерізі  $\psi = 0$ , так і в перерізі  $\psi = \pi / 3$ . При цьому при переході з місця з'єднання напівгофрів до їх вершини переміщення зменшуються в чотири рази, змінюючи знак на протилежний.

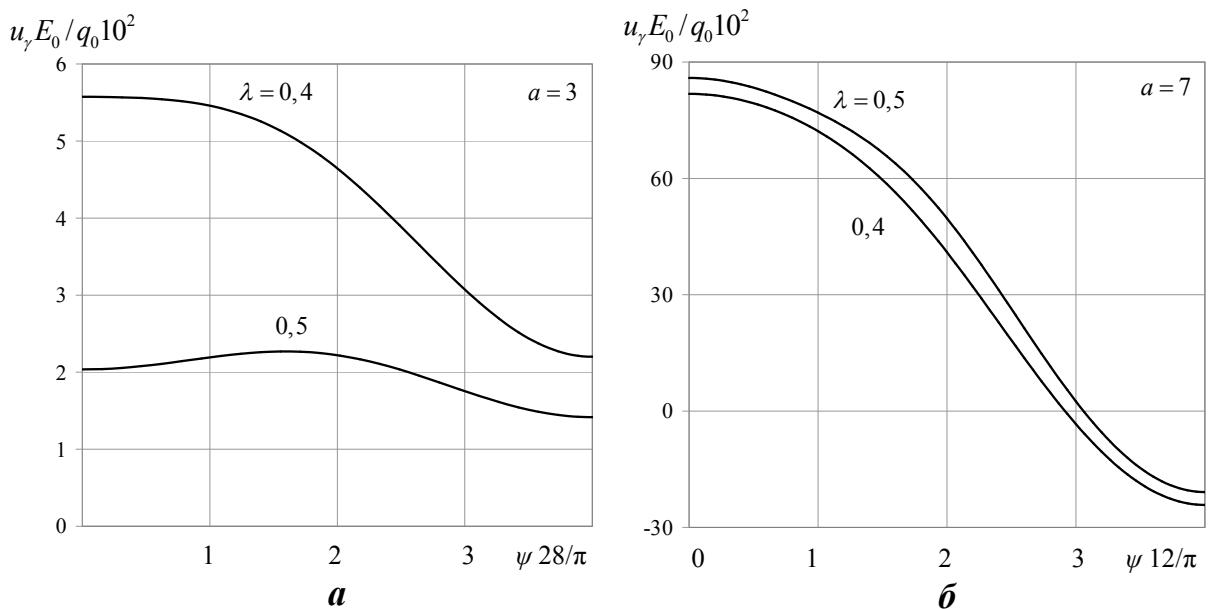


Рис. 4.12 Розподіл переміщень поверхні відліку в залежності від зміни параметрів кривизни

На рис. 4.12 *a* має місце інша картина розподілу переміщень для оболонок із сімома напівгофрами. Зі збільшенням відстані до центра рухомого кола значення переміщень зменшуються у 2,7 рази при  $\psi = 0$  та у 1,6 рази при  $\psi = \pi / 7$ . Збільшення кількості напівгофрів приводить до посилення жорсткості конструкції, з чим і пов'язане зменшення значень переміщень.

На рис. 4.13 наведені графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхні оболонки для  $a = 3$  вздовж напрямної та у табл. 4.4 на внутрішній та зовнішній поверхні оболонки для  $a = 7$ .

Аналіз результатів, наведених на рис. 4.13 та в табл. 4.4 свідчать про те, що максимальних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають для  $a = 7$  в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , а для  $a = 3$  – у вершині напівгофрів  $\psi = \pi / 7$ . При цьому для оболонок із сімома напівгофрами, за рахунок більшої жорсткості, напруження досягають значно менших значень при  $\psi = 0$ .

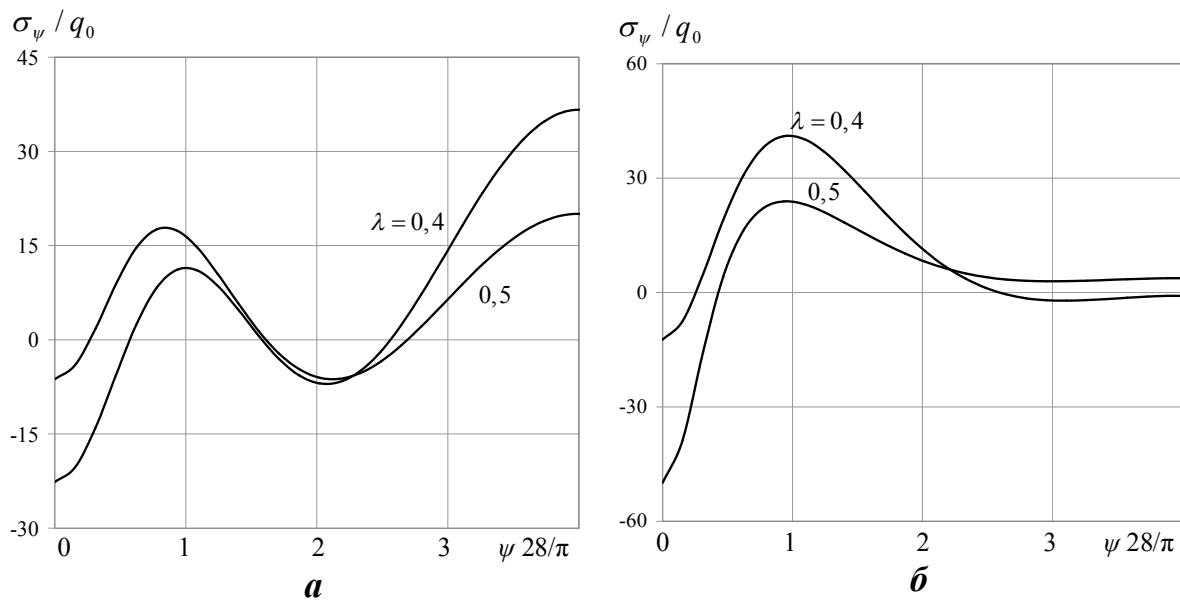


Рис. 4.13 Розподіл напружень на внутрішній (а) та зовнішній (б) поверхні вздовж напрямної оболонки в залежності від зміни параметрів

Для  $a = 3$  напруження досягають свого максимального абсолютноного значення на деякій віддалі від місця з'єднання напівгофрів при  $\lambda = 0,4$ , а в перерізі  $\psi = 0$  – при  $\lambda = 0,5$ . В вершині напівгофрів  $\psi = \pi / 7$  величини напружень близькі до нуля.

Крім того, при  $a = 7$  максимальних значень напруження  $\sigma_\psi$  набувають на деякій віддалі від перерізу  $\psi = 0$  та зі збільшенням параметра  $\lambda$  збільшуються приблизно в 1,2 рази.

Табл. 4.4 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від амплітуди напівгофрів

$\psi$	$\sigma_\psi / q_0 (a = 7)$			
	- $h / 2$		$h / 2$	
	$\lambda$			
	0,4	0,5	0,4	0,5
0	-12,35	-49,90	103,44	31,87
$\pi/48$	40,98	23,91	77,72	66,72
$\pi/24$	10,84	8,09	22,58	36,09
$3\pi/48$	-2,02	2,95	-18,77	-16,07
$\pi/12$	-0,85	3,76	-30,46	-35,47

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  в залежності від амплітуди напівгофрів на торцях ( $s = 0$ ) вздовж напрямної оболонки на зовнішній (суцільна лінія) та внутрішній (штрихова лінія) поверхні, наведено на рис. 4.14 для двох значень радіуса рухомого кола  $a = 3$  (рис. 4.14 *а*) та  $a = 7$  (рис. 4.14 *б*).

В силу симетрії розглядається інтервал напрямної  $0 \leq \psi \leq 2\pi/7$  для  $a = 3$ , та інтервал  $0 \leq \psi \leq 2\pi/3$  для  $a = 7$ .

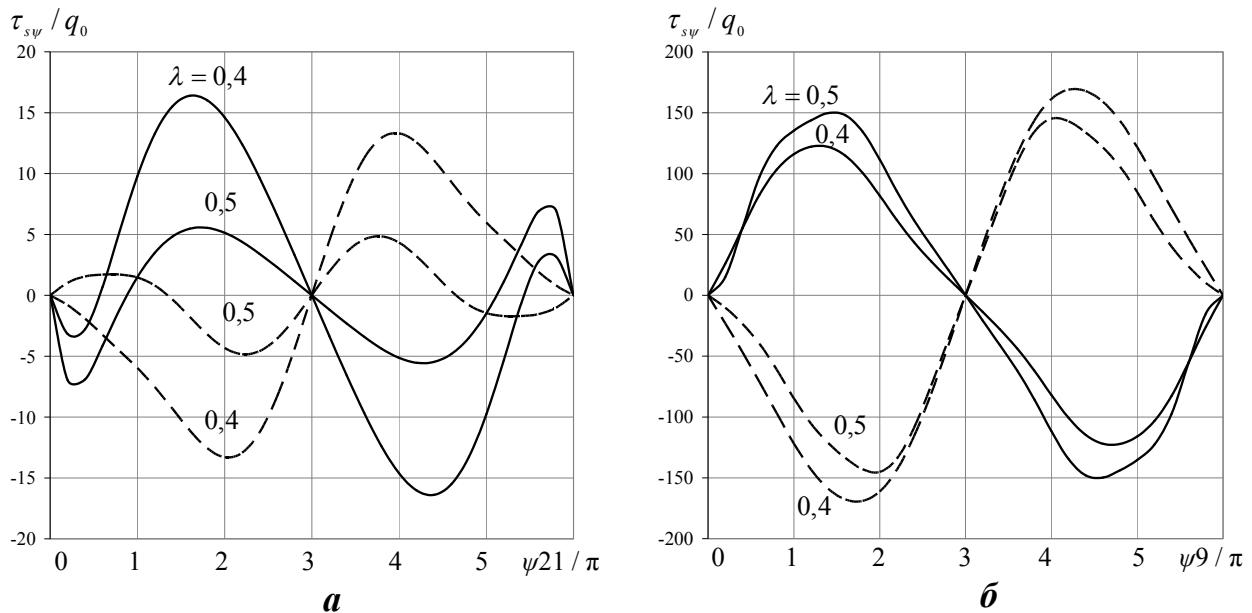


Рис. 4.14 Розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на внутрішній поверхні вздовж напрямної оболонки в залежності від товщини

З графіків, наведених на рис. 4.14 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки в розглядуваному інтервалі напрямної носить хвилеподібний характер для обох значень радіуса рухомого кола та обох значень амплітуди напівгофрів. При цьому має місце анти симетрія відносно перерізу  $\psi = \pi/7$  для  $a = 3$ , та відносно перерізу  $\psi = \pi/3$  для  $a = 7$ , тобто відносно вершин напівгофрів.

Збільшення амплітуди напівгофрів  $\lambda$  призводить до зменшення величини дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на внутрішній поверхні для обох значень радіуса рухомого кола та на зовнішній поверхні для оболонок з сімома напівгофрами і

до збільшення їх величини для оболонок із трьома напівгофрами на зовнішній, поверхні.

При цьому, як видно з рис. 4.14, в оболонках з радіусом рухомого кола  $a = 3$  графіки розподілу напружень  $\tau_{s\psi}$  мають чотири півхвилі, в той час як для оболонок з радіусом рухомого кола  $a = 7$  – по дві як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях.

Максимальних значень дотичні напруження  $\tau_{s\psi}$  досягають в інтервалі  $\pi/21 \leq \psi = 2\pi/21$  для  $\lambda = 0,4$  та в інтервалі  $0 \leq \psi = \pi/21$  для  $a = 3$  для  $\lambda = 0,5$  на зовнішній поверхні оболонок та в інтервалі  $\pi/9 \leq \psi = 2\pi/9$  для  $a = 7$  на внутрішній поверхні оболонок відповідно на половині інтервалу зміни напрямної.

При збільшенні параметру  $\lambda$  максимальна амплітудна величина напружень зменшується приблизно в 2,3 рази для  $a = 3$  в 1,3 рази для  $a = 7$ .

При збільшенні кількості напівгофрів значення напружень  $\tau_{s\psi}$  суттєво зменшуються для обох значень параметру амплітуди напівгофрів приблизно в 10 разів для  $\lambda = 0,4$  та у 19 разів для  $\lambda = 0,5$ .

Аналіз проведеного дослідження напруженого стану цього класу задач показує, що зі зміною величини радіуса рухомого кола і відстані до його центра збільшується жорсткість всієї оболонки, що суттєво впливає на розподіл полів переміщень та напружень.

#### **4.4 Вплив зміни кривизни на напружений стан порожнистих**

##### **циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді увігнутих з'єднаних напівгофрів**

Далі проведено дослідження впливу зміни параметрів кривизни, викликаних варіаціями радіуса рухомого кола, на напружений стан ізотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних увігнутих напівгофрів при дії внутрішнього тиску для двох значень товщини оболонки.

Задачу розв'язано за таких умов: довжина оболонок  $l = 80$ , товщина приймає значень  $h = 0,6; 0,9$ , радіус нерухомого кола  $A = 24$ , радіус рухомого кола  $a = -2; -3; -4; -6$ , параметр  $\lambda = 0,4$ , модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Поперечний переріз таких оболонок наведено на рис. 4.2.

В місцях з'єднання напівгофрів, радіус кривизни поверхні відліку приймає своїх абсолютнох значень  $R_\psi = 1,47; 1,99; 2,40; 3,20$  для значень радіуса нерухомого кола  $a = -2; -3; -4; -6$  відповідно. Вибір зазначених значень товщини дозволяє залишатись в межах оболонок середньої товщини.

Результати розв'язку задачі наведені на рисунках у вигляді графіків розподілу полів переміщень (рис. 4.15, рис. 4.16) та напружень (рис. 4.17, рис. 4.18) в середньому перерізі по довжині оболонки.

В силу симетрії результати розв'язування задачі вздовж напрямної наведені в інтервалі одного напівгофра.

На рис. 4.15, рис. 4.16 наведено графіки розподілу полів переміщень  $u_\gamma$  на внутрішній поверхні для чотирьох значень радіуса рухомого кола вздовж напрямної оболонки.

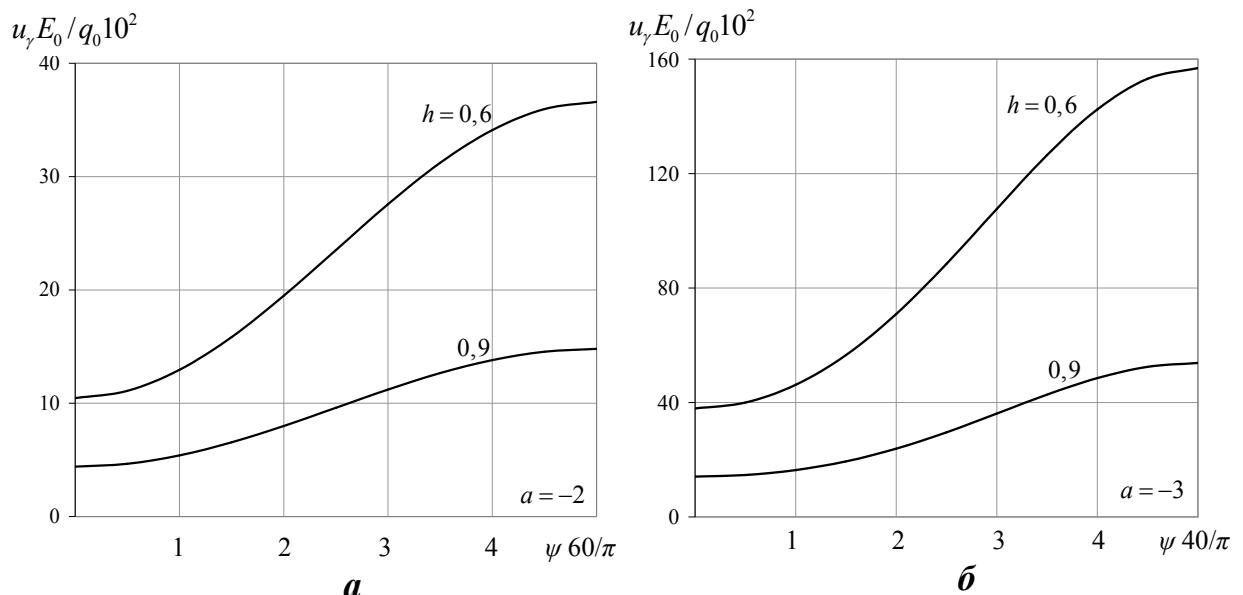


Рис. 4.15 Розподіл переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини ( $a = -2; -3$ )

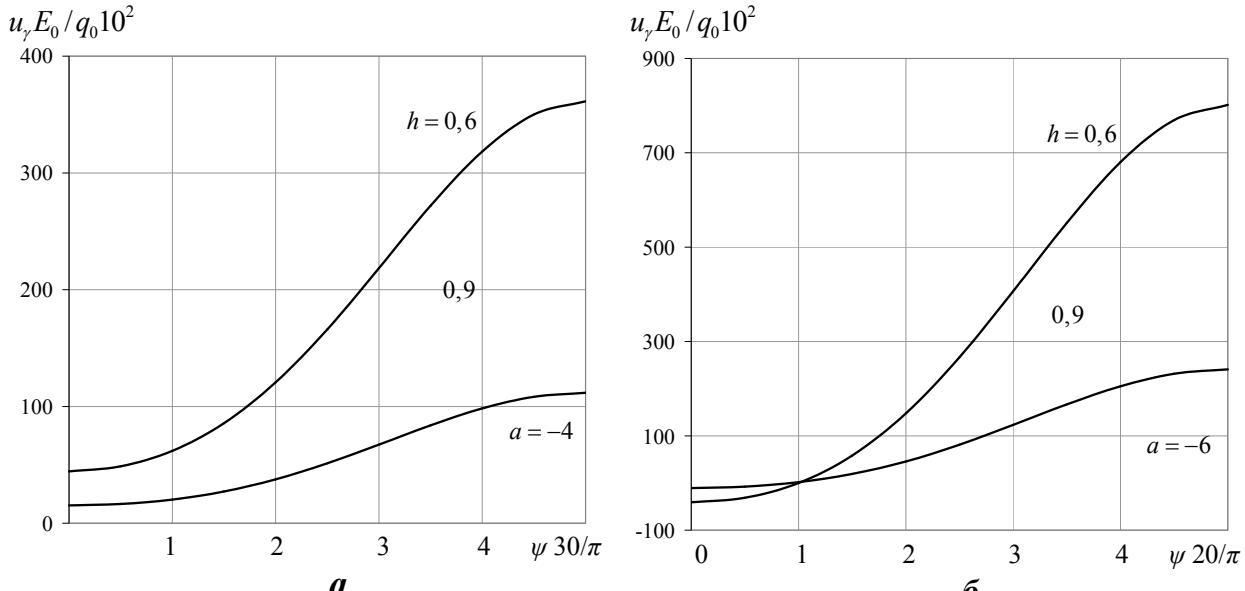


Рис. 4.16 Розподіл переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини циліндрів ( $a = -4; -6$ )

Відношення величини радіуса нерухомого кола до величини радіуса рухомого визначає кількість напівгофрів в поперечному перерізі оболонки. Так, для  $a = -2$  кількість напівгофрів дорівнює 12, для  $a = -3 - 8$ , для  $a = -4 - 6$  та для  $a = -6 - 4$ , відповідно.

Збільшення кількості напівгофрів призводить до збільшення жорсткості оболонки, що впливає на розподіл полів переміщень. Максимального значення переміщення  $u_\gamma$  досягають в западинах напівгофрів для оболонок з товщиною  $h = 0,6$  та  $h = 0,9$ . При цьому для більш тонких оболонок ( $h = 0,6$ ) зі зменшенням кількості напівгофрів величина переміщень зростає: у 22 рази для  $a = -2$ , у 5,1 рази для  $a = -3$ , у 2,2 рази для  $a = -4$  порівняно з аналогічними значеннями переміщень в оболонці при  $a = -6$ , а для більш товстих оболонок ( $h = 0,9$ ), відповідно, – у 16,3 рази; 4,5 рази; у 2,2 рази.

При переході із зони з'єднання ( $\psi = 0$ ) до западини напівгофрів переміщення зростають приблизно: у 3,5 рази для  $a = -2$ , у 4 рази для  $a = -3$ , у 7,5 рази для  $a = -4$  та у 20 разів для  $a = -6$ . Крім того, можна зазначити, що в межах одного значення величини рухомого кола, збільшення товщини впливає на зменшення переміщень у відповідних перерізах для менш жорстких оболонок.

На рис. 4.17, рис. 4.18 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки для чотирьох значень радіуса рухомого кола вздовж напрямної оболонки.

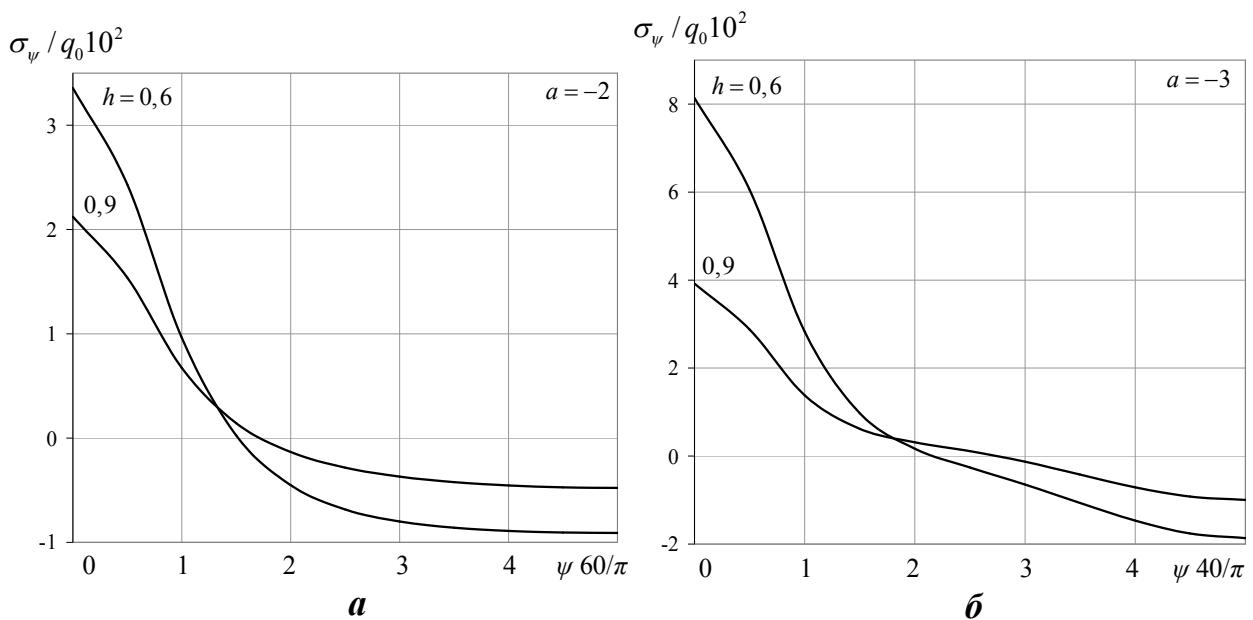


Рис. 4.17 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини ( $a = -2; -3$ )

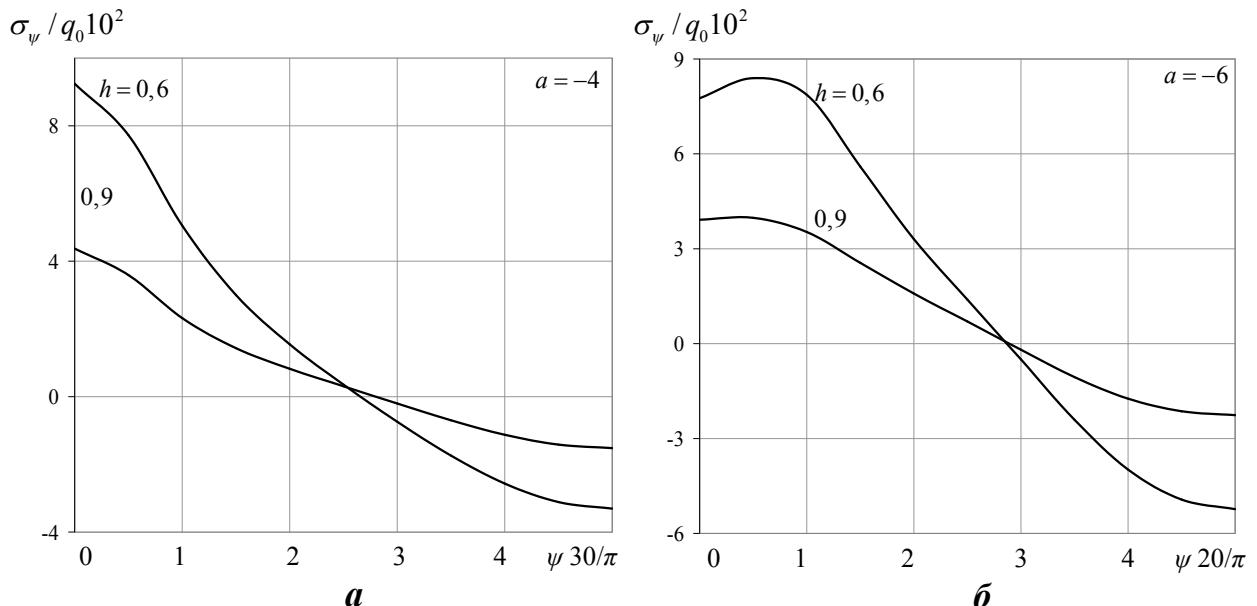


Рис. 4.18 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів та товщини ( $a = -4; -6$ )

Як видно з наведених графіків, максимальних значень напруження досягають в зонах з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ), при цьому при переході з цієї зони до зони западини напівгофрів напруження змінюють знак на протилежний і зменшуються, приблизно, у 4 рази для  $a = -2$  і в 1,7 рази для  $a = -6$ .

При зміні товщини оболонок абсолютні значення напружень зменшуються приблизно в 1,5 – 2,5 рази у відповідних перерізах для усіх значень величини радіуса рухомого кола.

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  в залежності від кількості напівгофрів на торцях ( $s = 0$ ) вздовж напрямної оболонки на внутрішній (штрихова лінія) та зовнішній (суцільна лінія) поверхні, наведено на рис. 4.19 для двох значень товщини  $h = 0,6$  (рис. 4.19 *а*) та  $h = 0,9$  (рис. 4.19 *б*). В силу симетрії розглядається інтервал напрямної в межах одного напівгофра. Параметр  $\zeta = 36$  для  $a = -2$ ;  $\zeta = 24$  для  $a = -3$ ;  $\zeta = 18$  для  $a = -4$  та  $\zeta = 12$  для  $a = -6$ .

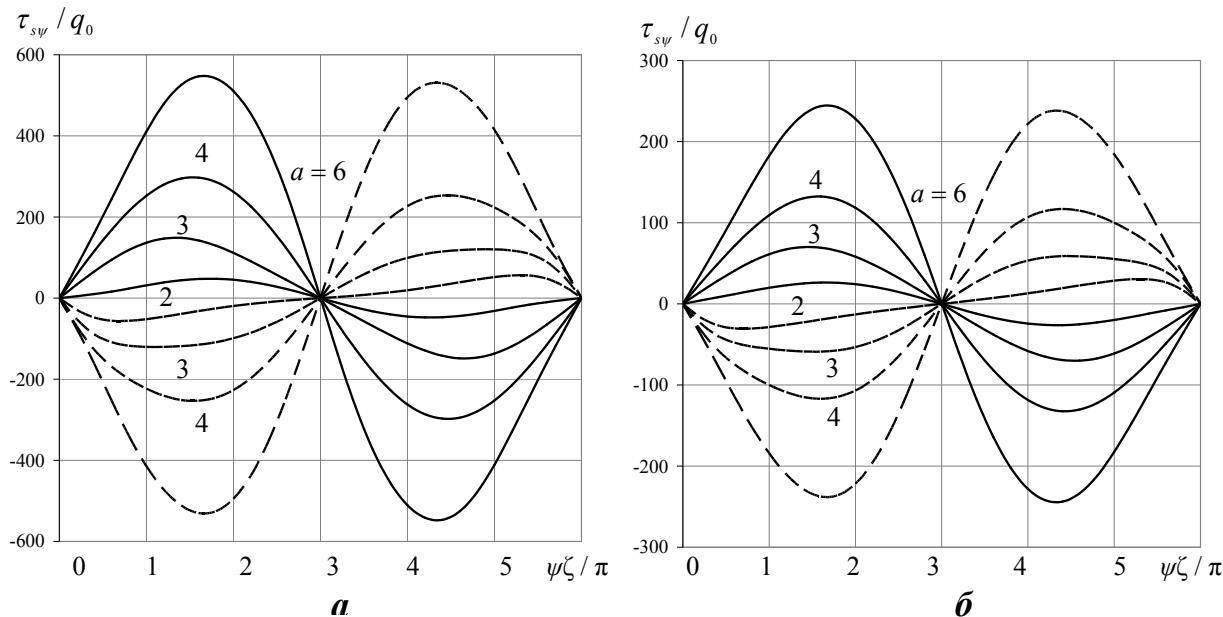


Рис. 4.19 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від кількості напівгофрів

З графіків, наведених на рис. 4.19 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки в розглядуваному інтервалі напрямної носить

хвилястий синусоподібний характер для обох значень товщини оболонок. При цьому має місце анти симетрія відносно перерізу  $\psi = \pi / 12$  для  $a = -2$ ,  $\psi = \pi / 8$  для  $a = -3$ ,  $\psi = \pi / 6$  для  $a = -4$  та відносно перерізу  $\psi = \pi / 4$  для  $a = -6$ , тобто відносно відповідних западин напівгофрів. Зменшення кількості напівгофрів при відповідному збільшенні величини радіуса рухомого кола, призводить до збільшення величини максимальних дотичних напружень  $\tau_{sy}$  на зовнішній поверхні в 3,3 рази для  $a = -3$ , у 6,6 рази для  $a = -4$  та в 12,1 рази для  $a = -6$ , порівняно з оболонкою для  $a = -2$  для товщини  $h = 0,6$ .

Така сама тенденція має місце і для оболонок з товщиною  $h = 0,9$ . Так, максимальні значення дотичних напружень при збільшенні величини радіуса рухомого кола збільшуються в 2,7 рази для  $a = -3$ , у 5,0 рази для  $a = -4$  та в 9,3 рази для  $a = -6$ , порівняно з оболонкою для  $a = -2$ . При збільшенні товщини, максимальні значення дотичних напружень в оболонках зменшуються приблизно в два рази для всіх значень величини рухомого кола.

Проведений аналіз свідчить про те, що зміна радіуса рухомого кола тягне за собою зміну кількості напівгофрів в поперечному перерізі оболонок, що впливає на зміну їх жорсткості, яка в свою чергу, суттєво впливає на розподіл полів переміщень та напружень.

#### **4.5 Характерні особливості розподілу показників напруженодеформованого стану циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів**

З метою виявлення характерних закономірностей в розподілі полів переміщень і напружень, що виникають внаслідок дії прикладеного поверхневого навантаження, розглянемо оболонки з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних опуклих таувігнутих напівгофрів з однаковими параметрами, що характеризують амплітуду та кількість напівгофрів. При цьому, для опуклих напівгофрів навантаження прикладене на зовнішній поверхні, дляувігнутих – на внутрішній. Поперечні перерізи поверхонь відліку для розглядуваних оболонок наведено на рис. 4.20.

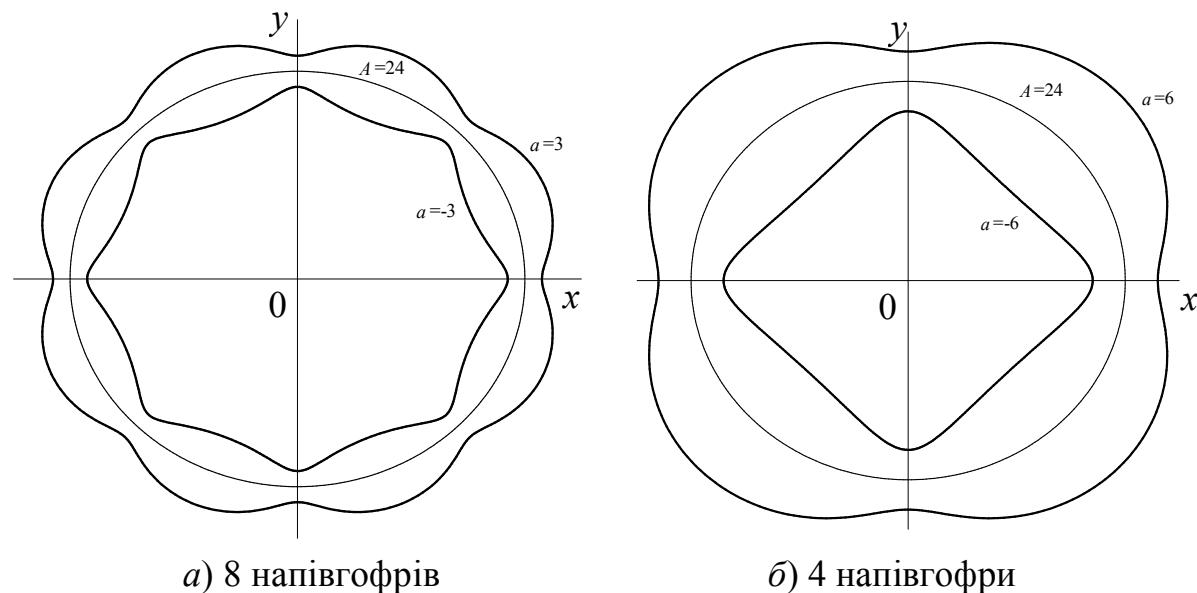


Рис. 4.20 Поперечний переріз поверхні відліку циліндричних оболонок у вигляді з'єднаних напівгофрів

Задачу розв'язано за таких вихідних даних:  $l = 60$ ,  $h = 2$ ,  $A = 24$ ,  $a = \pm 3; \pm 6$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $E = E_0$ ,  $v = 0,3$ .

В силу будови поперечного перерізу, кожна крива, яка описує поверхню відліку розглядуваних оболонок має ділянки додатної та від'ємної кривизни. Для оболонок з опуклими напівгофрами ділянки від'ємної кривизни припадають на місця з'єднання напівгофрів, тоді як для оболонок з увігнутими напівгофрами в місцях з'єднання напівгофрів мають місце ділянки додатної кривизни.

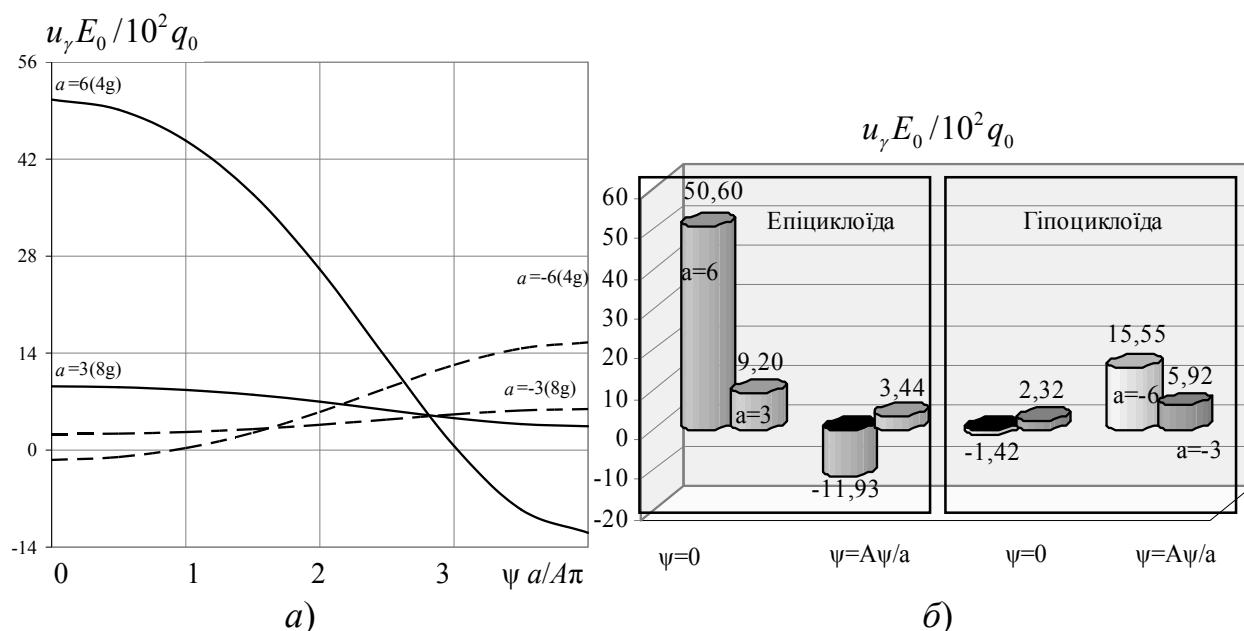


Рис. 4.21 Розподіл нормальних переміщень вздовж напрямної оболонок

Результати розв'язання задачі в середньому перерізі довжини для значень нормальних переміщень поверхні відліку наведено на рис. 4.21 вздовж напрямної.

Тут і надалі штриховою лінією показано криві розподілу для оболонок з увігнутими напівгофрами, суцільною – для опуклих напівгофрів. З наведених на рис. 4.21 графіків та діаграм розподілу переміщень видно, що своїх максимальних значень вони набувають в зонах від'ємної кривизни (в місцях з'єднання для опуклих напівгофрів та в середині напівгофрів – для увігнутих), при цьому, з даних діаграм випливає, що при збільшенні кількості напівгофрів максимальна величина переміщень зменшується приблизно в 5 разів для оболонок з опуклими напівгофрами та у 2,6 рази – з увігнутими.

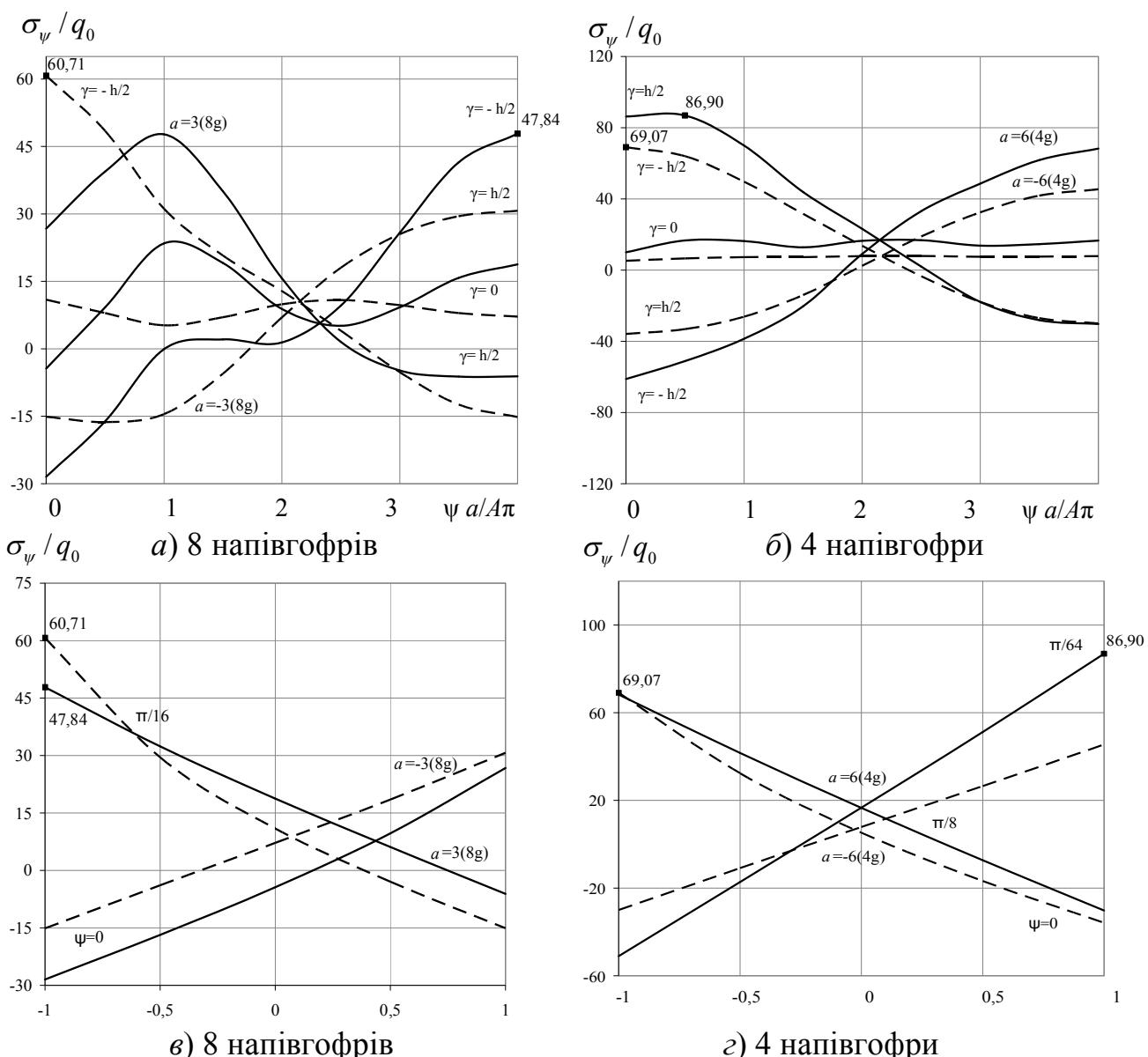


Рис. 4.22 Розподіл полів напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної та товщини оболонки

На рис. 4.22 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_y$  вздовж напрямної (рис. 4.22 *a*, *б*) та товщини (рис. 4.22 *в*, *г*). Максимальних значень напруження  $\sigma_y$  для оболонок з чотирма напівгофрами досягають в зоні з'єднання напівгофрів на навантаженій поверхні оболонок. У випадку восьми напівгофрів, максимальні значення напружень мають місце на внутрішній поверхні в зонах додатної кривизни.

Зазначений перерозподіл полів переміщень та напружень, пов'язаний зі зміною жорсткості оболонок, викликаних збільшенням кількості напівгофрів. При цьому оболонка з увігнутими з'єднанями напівгофрами виявляється більш жорсткою по відношенню до оболонки з опуклими напівгофрами.

#### 4.6 Результати та висновки

1. На основі розробленого підходу, що базується на застосуванні просторової моделі із використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є розв'язано задачу про напружено-деформований стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок, поперечний переріз яких являє собою опуклі або увігнуті з'єднані напівгофри. Поверхні відліку оболонок, що розглядаються, описуються неперервною кривою у вигляді скороченої епіциколоїди (опуклі напівгофри) або скороченою гіпоциколоїдою (увігнуті напівгофри). Рівняння кривої має такий вигляд, що дозволяє розглядати одночасно поперечний переріз як з опуклими, так і з увігнутими напівгофрами. При цьому поверхня відліку має значну змінну кривизну, що характеризується кількістю напівгофрів та їх амплітудою. Обчислювальний процес побудований таким чином, що дозволяє дослідити вплив кожного з параметрів кривизни поперечного перерізу на напружений стан оболонок даного класу.
2. Проведено деякі оцінки достовірності отримуваних результатів, зокрема, збіжності розв'язків до відповідних величин кругової оболонки за умови незначного відхилення форми поперечного перерізу від кругової. Було

показано, що при відхиленні значень радіуса кривизни поверхні відліку від радіуса відповідного кола в межах 2 %, похибка значень переміщень та напружень не перевищує так само 2 %.

3. Для оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів досліджено напружене-деформований стан при дії внутрішнього тиску при різних значеннях товщини. При цьому товщину оболонок обрано таким чином, щоб вони залишались в межах теорії оболонок середньої товщини.
4. Проведено аналіз впливу кривизни, викликаної варіаціями радіуса нерухомого кола та відстанню до його центра для оболонок з опуклими таувігнутими з'єднаннями напівгофрами в поперечному перерізі. Було показано, що варіація цих параметрів призводить до зміни жорсткості оболонок, що в свою чергу суттєво впливає на перерозподіл факторів напруженого стану оболонок даного класу.
5. Було з'ясовано, що максимальних значень нормальних переміщень досягають в місцях від'ємної кривизни: для оболонок з опуклими напівгофрами – в місцях їх з'єднання, для оболонок зувігнутими напівгофрами – в середині напівгофрів. При цьому зі збільшенням кількості напівгофрів величина переміщень зменшується.
6. Переважними в напруженому стані є напруження  $\sigma_{\psi}$ . Для оболонок з меншою кількістю напівгофрів, максимальних значень напруження досягають в зоні з'єднання напівгофрів на навантаженій поверхні як для оболонок з опуклими напівгофрами, так і для оболонок зувігнутими з'єднаннями напівгофрами. При збільшенні кількості напівгофрів вдвічі, максимальні значення напружень мають місце на внутрішній поверхні в зонах додатної кривизни для обох видів напівгофрів.

## Розділ 5

### РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНИХ НЕТОНКИХ ШАРУВАТИХ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Складні умови експлуатації конструкцій та їх елементів призводить до необхідності використання різноманітних композитних матеріалів, що здатні значно підвищити їх вагову ефективність [269, 275, 344]. Неоднорідність матеріалу суттєво впливає на напружене-деформований стан оболонок та оболонкових систем, який докорінно відрізняється від напруженого стану традиційних оболонок з однорідних ізотропних матеріалів. У зв'язку з цим, математична модель проектної конструкції повинна враховувати специфіку матеріалів, що використовуються для її виготовлення.

В просторовій постановці із використанням чисельно-аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та дискретної ортогоналізації проведено дослідження впливу параметрів ортотропії на напружене-деформований стан одношарових та тришарових нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* Напружений стан одношарових циліндрів з некруговою формою поперечного перерізу при дії прикладеного навантаження на зовнішній (внутрішній) бічній поверхні, виготовлених із ортотропного та з трансверсально-ізотропного матеріалу досліджується в роботах [82 – 85, 88, 93, 97, 99, 101, 105, 208, 213, 214, 283]. Вплив механічних характеристик середнього шару на напружений стан тришарових циліндрів з некруговою формою поперечного перерізу при дії рівномірного поверхневого навантаження досліджується в роботах [103 – 106, 108, 205, 215, 216, 223, 283, 284].

В даному розділі розв'язано задачу та проведено дослідження напруженого стану ортотропних нетонких циліндричних оболонок одно- та тришарових з некруговим поперечним перерізом в залежності від механічних характеристик матеріалу. Постановка задачі та деякі оцінки достовірності отримуваних результатів наведено в підрозділі 5.1. Напружений стан нетонких еліптичних та циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі в залежності від параметрів ортотропії досліжується в підрозділі 5.2. Аналіз напруженого стану ортотропних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом проведено в підрозділі 5.3. В підрозділі 5.4 розглядаються ортотропні циліндричні оболонки з поперечним перерізом вигляді з'єднаних напівгофрів та проводиться аналіз їх напружене-деформованого стану в залежності від параметрів ортотропії. Напружений стан шаруватих некругових циліндричних оболонок в залежності від механічних характеристик шарів досліжується в підрозділі 5.5. Дослідження суперпозиції деяких форм поперечних перерізів для ортотропних оболонок та тришарових з ортотропним середнім шаром наведено в підрозділі 5.6. Розрахунки щодо оптимізації геометричних параметрів автоцистерни для перевезення світлих нафтопродуктів проведено в підрозділі 5.7.

Результати розв'язків наведено у вигляді графіків, діаграм та таблиць розподілу характеристик напружене-деформованого стану.

## **5.1 Постановка задачі та деякі оцінки достовірності отримуваних результатів.**

Розглядаються, в загальному випадку, шаруваті некругові нетонкі циліндричні оболонки, що складені із шарів, які взаємодіють між собою без проковзування та відриву. На поверхні контакту  $i$ -того та  $i+1$ -ого шару виконується умова спряження шарів (2.2). Циліндричні оболонки знаходяться під дією розподіленого навантаження  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ), прикладеного на внутрішній чи на зовнішній бічній поверхні. Границні умови (2.24) для

розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.23) набувають такого вигляду:

а) якщо навантаження прикладене на внутрішній поверхні (внутрішній тиск)

$$\gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}^-; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0; \quad (5.1)$$

$$\gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0;$$

б) якщо навантаження прикладене на зовнішній поверхні

$$\gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0; \quad (5.2)$$

$$\gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}^+; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{t\gamma,n,k} = 0.$$

Розглядаються два варіанти для ортотропного матеріалу з такими механічними параметрами:

I)  $E_s = 1,90 E_0; E_t = 1,20 E_0; E_\gamma = 0,45 E_0; G_{st} = 0,30 E_0; G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = 0,23 E_0;$   
 $v_{st} = 0,15; v_{t\gamma} = 0,30; v_{s\gamma} = 0,07$  [21]; (5.3)

II)  $E_s = 3,68 E_0; E_t = 2,68 E_0; E_\gamma = 1,1 E_0; G_{st} = 0,5 E_0; G_{t\gamma} = 0,41 E_0; G_{s\gamma} = 0,45 E_0;$   
 $v_{st} = 0,105; v_{t\gamma} = 0,431; v_{s\gamma} = 0,405$  [156]. (5.4)

Для трансверсально-ізотропного матеріалу було обрано три варіанти механічних параметрів у вигляді:

I)  $E_s = E_t = E_0; E_\gamma = E' = 0,2 E_0; G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = G' = 0,1 E_0; G_{st} = 0,385 E_0;$   
 $v_{st} = v' = 0,6; v_{t\gamma} = v_{s\gamma} = v = 0,3$ ; (5.5)

II)  $E_s = E_t = 1,68 E_0; 2,68 E_0; 3,68 E_0; 4,68 E_0; E_\gamma = E' = 1,1 E_0; v_{t\gamma} = v_{s\gamma} = v = 0,405;$   
 $v_{st} = v' = 0,105; G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = G' = 0,415 E_0; G_{st} = 0,395 E_0$ ; (5.6)

III)  $E_s = E_t = E_0; E_\gamma = E' = \mu E_0; G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = G' = 0,1 E_0; G_{st} = \delta E_0; v_{st} = v' = 0,6;$   
 $v_{t\gamma} = v_{s\gamma} = v = 0,3$ ; при цьому розглядається 5 варіантів ортотропії:

- 1)  $\mu = 2; \delta = 0,3; v_{st} = v' = 0,075;$
- 2)  $\mu = 1,35; \delta = 0,125; v_{st} = v' = 0,122;$
- 3)  $\mu = 1; \delta = 0,385; v_{st} = v' = 0,3$  (ізотропний випадок); (5.7)

$$4) \mu = 0,741; \delta = 0,159; \nu_{st} = \nu' = 0,165;$$

$$5) \mu = 0,5; \delta = 0,125; \nu_{st} = \nu' = 0,15.$$

З метою оцінки достовірності отримуваних результатів, розглянуто задачу про деформацію кругової ортотропної циліндричної оболонки з такими геометричними та механічними параметрами: довжина оболонки  $l = 120$ , радіус кола поверхні відліку  $r_0 = 60$ , товщина оболонки  $h = 20$ , механічні характеристики матеріалу  $E_s = 10 E_0$ ;  $E_t = 2,5 E_0$ ;  $E_\gamma = E_0$ ;  $G_{st} = 2 E_0$ ;  $G_{t\gamma} = G_{s\gamma} = E_0$ ;  $\nu_{st} = 0,06$ ;  $\nu_{t\gamma} = 0,1$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,04$ . Оболонка знаходиться під дією внутрішнього рівномірного тиску  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ), на торцях мають місце умови (2.9). За таких умов можна отримати точний розв'язок задачі [74]. Результати розв'язування задачі наведено в табл. 5.1 для значень переміщень та напружень в середньому перерізі довжини на внутрішній та зовнішній поверхнях оболонки. Верхнє значення в кожному стовбці таблиці відповідає точному розв'язку задачі, а нижнє – отриманому за методикою, що розглядається. В останньому стовпчику таблиці наведено значення відносної похиби отриманих результатів в зоні їх екстремальних значень. З табл. 5.1 видно, що відносна похибка отриманих результатів не перевищує 5 %.

Табл. 5.1 Оцінка достовірності отримуваних результатів

$\gamma$	$u_\gamma E_0 / q_0$	$\sigma_s / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$	Похибка, %
$-h/2$	59,55	-3,516	2,517	1,07 – 4,79
	60,19	-3,348	2,559	
$h/2$	46,97	2,901	1,852	0,7 – 1,64
	47,57	2,762	1,865	

Також, розглянемо напружено-деформований стан кругової тришарової циліндричної оболонки симетричної будови під дією внутрішнього тиску  $q = q_0 \sin(\pi s/l)$  ( $q_0 = \text{const}$ ) з граничними умовами (2.9) на торцях. Зовнішні шари оболонки виготовлені з ізотропного матеріалу з модулем пружності  $E = 4 E_0$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu = 0,3$ , а внутрішній шар – з ортотропного

матеріалу, що має такі характеристики:  $E_s = E_0$ ;  $E_t = 0,25 E_0$ ;  $E_\gamma = 0,1 E_0$ ;  $G_{st} = E_0$ ;  $G_{t\gamma} = E_0$ ;  $G_{s\gamma} = 1/12 E_0$ ;  $\nu_{st} = 0,24$ ;  $\nu_{t\gamma} = 0,1$ ;  $\nu_{s\gamma} = 0,04$ .

Геометричні параметри оболонки приймають значень: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус кола поверхні відліку  $r_0 = 30$ , товщина несучих шарів  $h_1 = h_3 = 2$ , товщина середнього шару (заповнювача) –  $h_2 = 4$ .

Задачу розв'язано двома способами за допомогою розглядуваної методики (І) та із застосуванням аналітичного методу відокремлення змінних в двох координатних напрямках та методу дискретної ортогоналізації – в третьому (ІІ) [73].

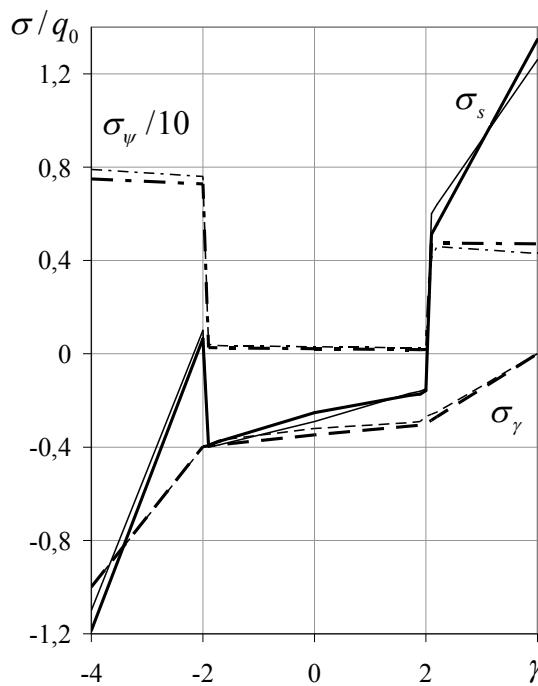


Рис. 5.1 Розподіл напружень вздовж товщини оболонки, отриманих за двома методиками

Результати розв'язування наведено на рис. 5.1 для значень напружень вздовж товщини циліндра в середньому перерізі довжини.

Суцільною лінією показані значення напружень  $\sigma_s$ , штриховою –  $\sigma_y$ , а штрих-пунктирною – напруження  $\sigma_\psi$ . Жирною лінією показані напруження, отримані за методикою І, тонкою – за методикою ІІ.

З графіків, наведених на рис. 5.1 видно, що криві результатів отриманих двома різними способами близькі між собою.

## 5.2 Вплив параметрів ортотропії на напружений стан еліптичних циліндричних оболонок та оболонок з гофрами в поперечному перерізі

Розглядаються нетонкі циліндричні оболонки з еліптичним поперечним перерізом, виготовлені з ортотропного матеріалу, механічні параметри якого

задовольняють першому випадку ортотропії (5.3) при дії поверхневого навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні (5.2).

Периметр поперечного перерізу поверхні відліку оболонок, що розглядаються, дорівнює довжині кола радіуса  $R$ , тобто має місце рівність

$$\pi(a+b)\left(1+\frac{\Delta^2}{4}+\frac{\Delta^4}{64}+\frac{\Delta^6}{256}+\dots\right)=2\pi R, \text{ тут } a, b - \text{півосі еліпса } (b > a).$$

Поверхня відліку задається в полярних координатах у вигляді (3.1), де  $r_0 = a$ .

Враховуючи, що  $\Delta = (b - a) / (b + a)$  і, утримуючи члени з  $\Delta^6$  включно, дістанемо

$$a = \frac{R}{f}(1 - \Delta); \quad b = \frac{R}{f}(1 + \Delta); \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256}; \quad \frac{a}{b} = \frac{1 - \Delta}{1 + \Delta}.$$

Геометричні параметри оболонки приймають таких значень: довжина  $l = 10$ ; радіус кола  $R = 10$ ; товщина оболонок  $h = 2, 3, 4$ ; степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ .

Результати розв'язків задачі наведено на рис. 5.2 та у табл. 5.2 в середньому перерізі довжини оболонки.

На рис. 5.2 зображені графіки, розподілу полів переміщень поверхні відліку оболонки в залежності від зміни степеня еліптичності для різних значень товщини.

Суцільною лінією зображені криві для  $\psi = 0$ , штриховою – для  $\psi = \pi/2$ .

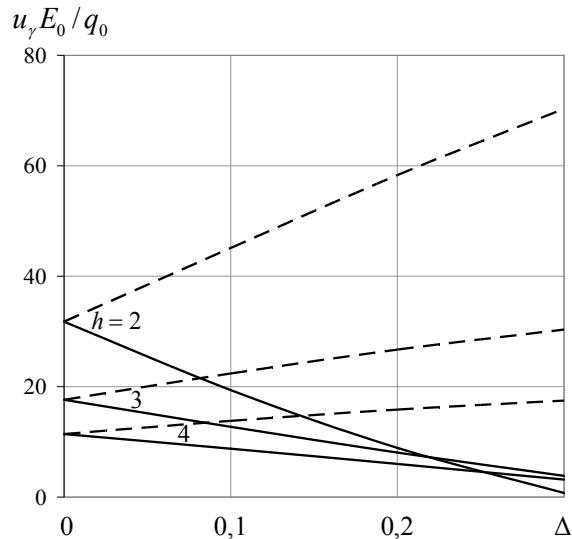


Рис. 5.2 Розподіл переміщень в залежності від степеня еліптичності та товщини оболонки

Таблиця 5.2. Розподіл переміщень та напружень в залежності від ступеня еліптичності та товщини оболонки

$h$	$\gamma$	$\Delta$	$u_\gamma E_0 / q_0$	$\sigma_s / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$		
			$\psi / \pi$				
			0	0,5	0	0,5	0
2	- $h / 2$	0,0	31,75	31,75	-4,96	-4,96	3,49
		0,1	19,38	45,09	-3,03	-7,06	4,47
		0,2	8,90	58,29	-1,41	-9,15	5,72
		0,3	0,75	70,92	-0,15	-11,07	7,43
	$h / 2$	0,0	28,70	28,70	4,49	4,49	4,61
		0,1	16,83	41,84	2,45	6,66	3,47
		0,2	7,14	55,12	0,67	8,78	2,17
		0,3	0,16	67,44	-0,74	10,70	0,82
3	- $h / 2$	0,0	17,61	17,61	-3,40	-3,40	1,98
		0,1	12,72	22,39	-2,44	-4,34	2,67
		0,2	8,06	26,71	-1,53	-5,19	3,56
		0,3	3,85	30,33	-0,69	-5,91	4,84
	$h / 2$	0,0	16,30	16,30	3,04	3,04	2,96
		0,1	11,67	21,09	2,12	3,98	2,48
		0,2	7,64	25,65	1,28	4,86	1,92
		0,3	4,50	29,65	0,61	5,62	1,35
4	- $h / 2$	0,0	11,41	11,41	-2,42	-2,42	1,35
		0,1	8,77	13,80	-1,86	-2,94	1,87
		0,2	5,99	15,84	-1,26	-3,38	2,57
		0,3	3,16	17,46	-0,62	-3,73	3,73
	$h / 2$	0,0	11,50	11,50	2,24	2,24	2,29
		0,1	9,07	13,94	1,73	2,75	2,05
		0,2	6,85	16,22	1,26	3,21	1,76
		0,3	5,03	18,19	0,86	3,62	1,48

В табл. 5.2 наведені значення переміщень  $u_\psi$  поверхні відліку та напружень  $\sigma_\psi$  і  $\sigma_s$  в перерізах  $\psi = 0$  та  $\psi = \pi / 2$  на внутрішній та зовнішній поверхнях оболонки для всіх варіантів товщини та степеня еліптичності.

З рис. 5.2 та табл. 5.2 видно, що порівняно з круговою оболонкою, в некругових оболонках зі збільшенням степеня еліптичності спостерігається зростання переміщень в зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi / 2$ ).

Так, відношення значень переміщень при  $\psi = \pi / 2$  та  $\psi = 0$  для  $\Delta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$  складає при  $h = 2: 1; 2,3; 6,5; 94$ ; при  $h = 3: 1; 1,8; 3,3; 7,9$ ; при  $h = 4: 1; 1,6; 2,6; 5,5$ . Звідси видно взаємний зв'язок еліптичності еліпса та його товщини на розподіл значень переміщень.

Як видно з табл. 5.2, напруження  $\sigma_s$  на бічних поверхнях оболонки зі збільшенням степеня еліптичності зростають та при  $\Delta = 0,3$  досягають найбільшого значення в зоні більшої податливості ( $\psi = \pi / 2$ ).

В зоні меншої податливості, тобто більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ), значення напружень  $\sigma_s$  значно зменшуються. Зі збільшенням товщини оболонки і заразом його жорсткості, напруження  $\sigma_s$  зменшуються.

Напруження  $\sigma_\psi$  (табл. 5.2) зі збільшенням степеня еліптичності на внутрішній поверхні оболонки зростають і досягають максимального значення в зоні меншої податливості, тобто більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ).

На зовнішній поверхні оболонки напруження  $\sigma_\psi$  зі збільшенням  $\Delta$  зростають і досягають максимальних значень при  $\psi = \pi / 2$ . Зі збільшенням товщини оболонки напруження зменшуються, проте характер їх розподілу зберігається.

Проведемо далі аналіз напруженого стану нетонких ортотропних та трансверсально-ізотропних оболонок з гофрованим поперечним перерізом, що знаходяться під дією внутрішнього тиску в залежності від товщини оболонок, частоти та амплітуди гофрування. Границі умови на торцях мають вигляд (2.9), на бічних поверхнях – (5.2).

Поверхня відліку задається в полярних координатах у вигляді (3.1), де степінь еліптичності  $\Delta = 0$ . Для інших геометричних параметрів оболонок

обрані такі величини: довжина оболонки  $l = 40$ ; радіус кола  $r_0 = 60$ ; товщина оболонки  $h = 3, 4$ ; частота гофрування  $m = 4; 8$ ; амплітуда гофрування  $\alpha = 2; 4; 6; 8$ .

Для матеріалу обрані такі механічні параметри: для ортотропного – (5.4), для трансверсально-ізотропного – чотири варіанти (5.7).

Результати порівняльного аналізу залежності отриманих характеристик напружено-деформованого стану від геометричних та механічних параметрів матеріалу для оболонок даного класу представлені у вигляді графіків на рис. 5.3, рис. 5.4 та у табл. 5.3, табл. 5.4.

На рис. 5.3 наведено графіки розподілу нормальних переміщень  $u_y$  при  $m = 4$ ,  $\alpha = 4$ ,  $h = 3, 4$  в середньому перерізі довжини оболонки для поверхні відліку в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$  для ортотропного матеріалу (жирна суцільна лінія) та чотирьох варіантів трансверсально-ізотропного матеріалу (штрихові лінії).

Цифрами 1, 2, 3, 4 позначені варіанти відповідно для чотирьох значень модулів Юнга  $E_s = E_\psi = 1,68E_0$  (1);  $2,68E_0$  (2);  $3,68E_0$  (3);  $4,68E_0$  (4).

З рис. 5.3 *a* видно, що у вершині гофрів переміщення  $u_y$  спрямовані в бік протилежний дії прикладеного навантаження, а в зоні западини гофрів значення переміщень близькі для ортотропної оболонки та варіанта 2 трансверсально-ізотропної; для варіанта 1 прогин в 1,5 рази більший, ніж в ортотропній оболонці; для варіанта 3 – прогин складає 0,72 та для варіанта 4 – 0,56 від прогину ортотропної оболонки.

З рис. 5.3 *b* випливає, що для оболонок, товщина яких  $h = 4$  величина переміщень практично вдвічі менша, ніж для оболонок з товщиною  $h = 3$  і при цьому в зоні вершини гофрів спостерігається така сама картина розподілу переміщень  $u_y$ , і близька до неї в зоні западини гофрів.

На рис. 5.4 показаний розподіл нормальних переміщень для оболонок з частотою гофрування  $m = 8$  при тих самих значеннях параметрів на інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 8$ .

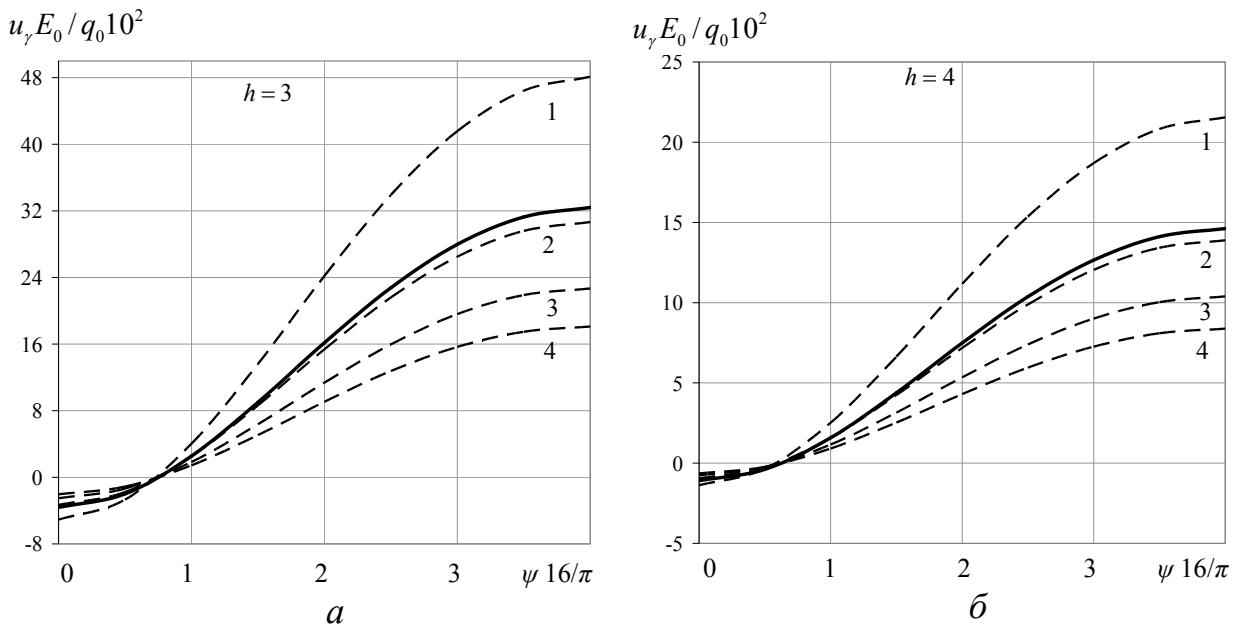


Рис. 5.3 Розподіл переміщень для п'яти варіантів ортотропії вздовж напрямної оболонки ( $m = 4$ )

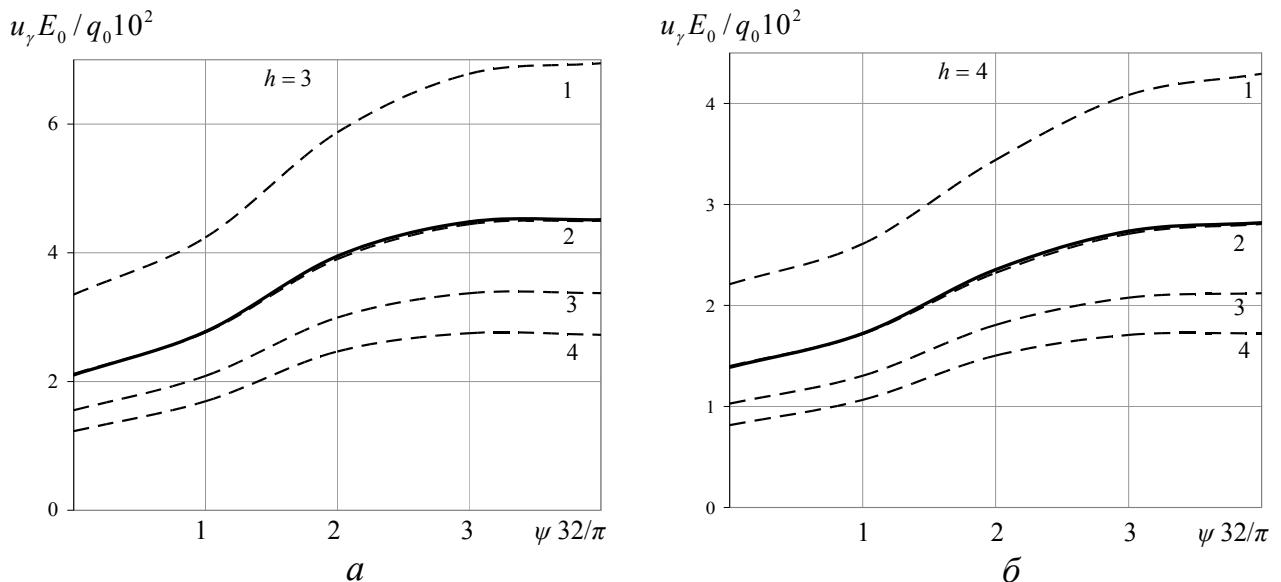


Рис. 5.4 Розподіл переміщень для п'яти варіантів ортотропії вздовж напрямної оболонки ( $m = 8$ )

Характерно (рис. 5.4 *a*), що переміщення для ортотропної та трансверсально-ізотропної (варіант 2) оболонок практично співпадають, а для варіантів 1, 3, 4 знаходяться практично в такому самому відношенні, як і для частоти гофрування  $m = 4$ . Аналогічна картина спостерігається і на рис. 5.4 *б*.

В табл. 5.3, 5.4 наведені значення напружень  $\sigma_\psi$  для ортотропної та трансверсально-ізотропної циліндричних оболонок (варіанти 1, 2, 3, 4) на зовнішній ( $\gamma = \gamma_2$ ) та внутрішній ( $\gamma = \gamma_1$ ) поверхнях оболонки в середньому перерізі довжини в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$  для  $m = 4$  (табл. 5.3) та в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 8$  для  $m = 8$  (табл. 5.4) при  $\alpha = 4$  та  $h = 3, 4$ .

Таблиця 5.3 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  для п'яти варіантів ортотропії ( $m = 4$ )

	$\psi$	0	$\pi / 16$	$\pi / 8$	$3\pi / 16$	$\pi / 4$
$h = 3$	$\gamma = \gamma_1$	орт	10,14	3,43	-19,20	-53,42
		1	8,44	4,33	-11,79	-38,23
		2	7,78	3,77	-12,23	-53,19
		3	7,12	3,21	-12,66	-53,78
		4	6,47	2,66	-13,08	-54,37
	$\gamma = \gamma_2$	орт	-16,86	0,72	31,99	44,93
		1	-10,15	2,43	23,14	29,06
		2	-10,24	2,50	23,37	29,20
		3	-10,33	2,56	23,60	29,34
		4	-10,43	2,62	23,83	26,80
$h = 4$	$\gamma = \gamma_1$	орт	4,94	0,31	-13,31	-31,55
		1	4,54	1,42	-8,49	-22,50
		2	3,96	0,92	-8,90	-22,98
		3	3,40	0,42	-9,31	-23,44
		4	2,83	-0,07	-9,71	-23,90
	$\gamma = \gamma_2$	орт	-7,51	1,52	18,28	27,01
		1	-4,01	2,23	13,02	17,28
		2	-4,01	2,34	13,26	17,45
		3	-4,01	2,45	13,49	17,62
		4	-4,02	2,55	13,71	17,78

Таблиця 5.4 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  для п'яти варіантів ортотропії ( $m = 8$ )

	$\psi$	0	$\pi / 32$	$\pi / 16$	$3 \pi / 32$	$\pi / 8$
$h = 3$	$\gamma = \gamma_1$	орт	10,68	0,45	-9,75	-13,10
		1	10,17	2,09	-6,65	-10,51
		2	9,87	1,79	-7,12	-11,15
		3	9,55	1,48	-7,58	-11,76
		4	9,23	1,16	-8,02	-12,35
	$\gamma = \gamma_2$	орт	7,04	7,50	8,15	5,14
		1	7,30	6,72	5,50	1,95
		2	7,52	6,99	5,68	1,99
		3	7,72	7,24	5,83	2,01
		4	7,89	7,46	5,96	2,03
$h = 4$	$\gamma = \gamma_1$	орт	5,96	-1,11	-7,25	-9,78
		1	6,01	0,49	-4,80	-7,59
		2	5,66	0,12	-5,30	-8,16
		3	5,31	-0,25	-5,77	-8,71
		4	4,96	-0,60	-6,21	-9,22
	$\gamma = \gamma_2$	орт	5,38	5,22	5,73	4,86
		1	5,35	4,58	3,79	2,34
		2	5,54	4,83	3,97	2,38
		3	5,71	5,05	4,13	2,40
		4	5,86	5,24	4,26	2,43

З таблиці видно, що зміна значень модуля пружності  $E_s$  не суттєво впливає на значення напружень  $\sigma_\psi$  як для  $h = 3$ , так і для  $h = 4$  при  $m = 4$  та  $m = 8$ .

На рис. 5.5 наведено графіки розподілу нормальних переміщень  $u_y$  поверхні відліку для ортотропної (рис. 5.5 а) та трансверсально-ізотропної (рис. 5.5 б) – варіант 3 оболонок для різних значень амплітуди гофрів  $\alpha = 2, 4, 6, 8$  в середньому перерізі довжини.

З рис. 5.5 *a* видно, що при  $\alpha = 2, 4, 6$ , тобто зі збільшенням опукlostі гофрів, величина прогинів в основному збільшується, що свідчить про більший опір дії прикладеному навантаженню.

Проте вже при  $\alpha = 8$  картина змінюється при віддаленні від вершини гофрів, що характеризує вплив форми гофрів на опір навантаженню.

Графіки, що наведені на рис. 5.5 *b* характеризують вплив характеристик матеріалу оболонки на зміну нормальних переміщень в трансверсально-ізотропній оболонці.

Наведені на рис. 5.6 графіки розподілу прогинів  $u_y$  показують як впливає збільшення частоти гофрування ( $m = 8$ ) на зміну величини прогинів та його розподіл вздовж напрямної. Тут вже для найменшої амплітуди ( $\alpha = 2$ ) має місце максимальне значення прогину за величиною, а для найбільшого значення амплітуди ( $\alpha = 8$ ) – мінімальне.

Цей факт, очевидно, можна пояснити тим, що зі збільшенням частоти гофрування оболонка стає більш жорсткою. Якщо для амплітуди  $\alpha = 2$  величини прогинів практично співпадають для  $m = 4$  та  $m = 8$ , проте для інших значень амплітуди починають виявлятися розбіжності в частоті гофрів.

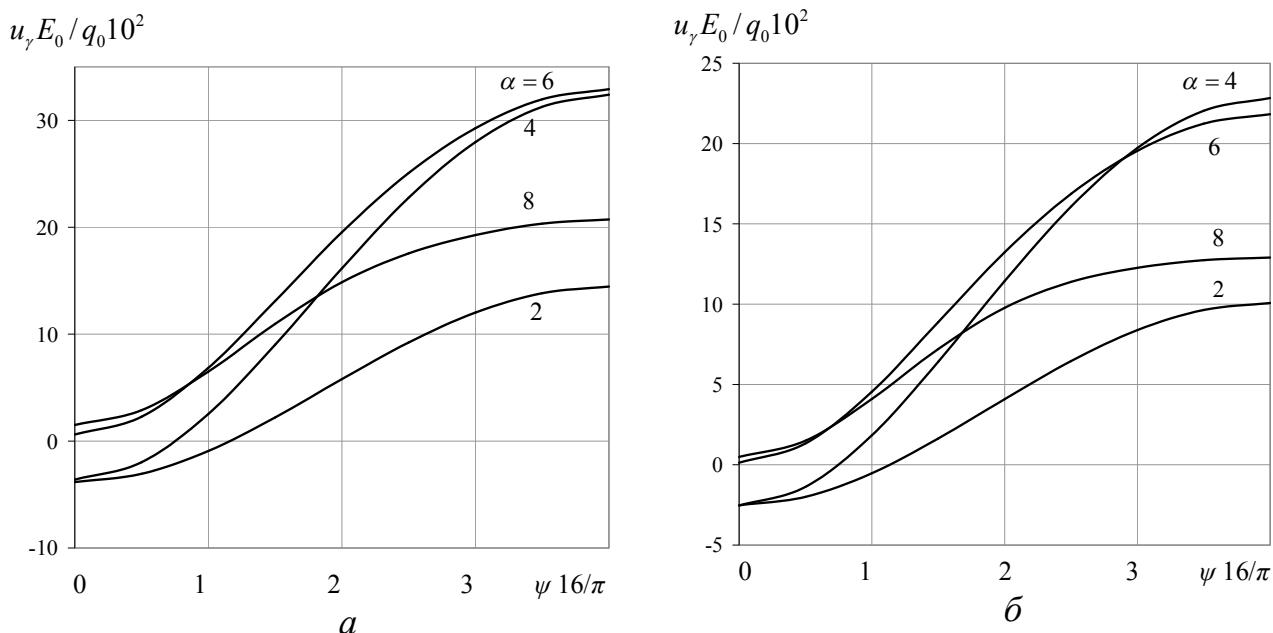


Рис. 5.5 Розподіл переміщень в залежності від амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки ( $m = 4$ )

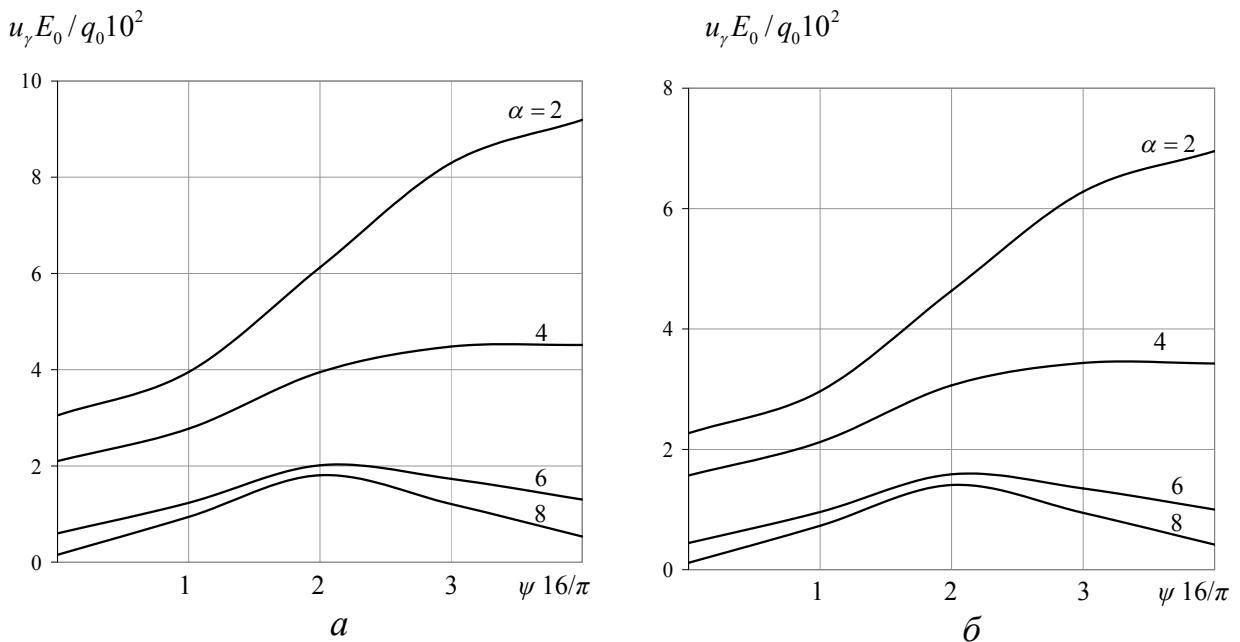


Рис. 5.6 Розподіл переміщень в залежності від амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки ( $m = 8$ )

Також спостерігаються певні розбіжності переміщень для ортотропної та трансверсально-ізотропної оболонок (рис. 5.6).

На рис. 5.7 показані графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній (штрихова лінія) та внутрішній (суцільна лінія) поверхнях ортотропної (рис. 5.7 *a*) та трансверсально-ізотропної (рис. 5.7 *б*) оболонок при різних значеннях амплітуди  $\alpha = 2, 4, 6, 8$  для  $m = 4, 8$ .

Для трансверсально-ізотропної оболонки, на відміну від ортотропної, величина напружень приблизно в півтора рази менша для даного варіанта. У випадку  $\alpha = 2$  на внутрішній поверхні оболонки напруження розподіляються більш плавно, ніж для  $\alpha = 4, 6, 8$ . На зовнішній поверхні оболонки більш плавно розподіляються напруження при  $\alpha = 2, 4$ .

Аналогічні графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  при  $m = 8$  наведені на рис. 5.7 *в* та рис. 5.7 *г*. При цьому видно, як впливає зміна амплітуди гофрів на характер розподілу напружень, величини яких зменшуються, що обумовлено збільшенням жорсткості оболонок.

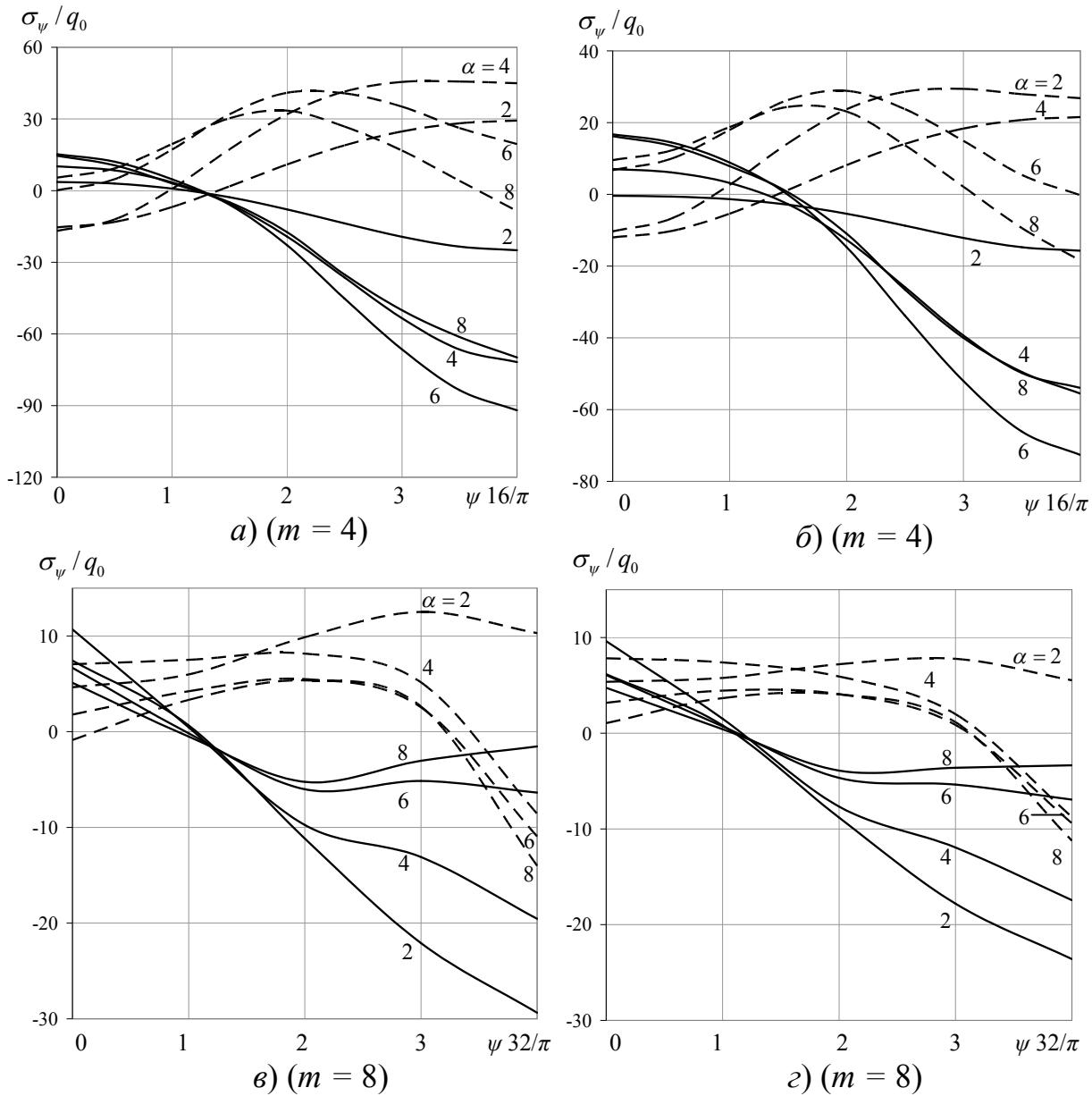


Рис. 5.7 Розподіл напружень в залежності від амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки

Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) для  $\alpha = 4$ ,  $m = 4$  для ортотропної та трансверсально-ізотропної оболонки (варіанти 1, 2, 3, 4) наведено в табл. 5.5, для  $m = 8$  – в табл. 5.6 в силу симетрії розподілу дотичних напружень, взято інтервал напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi/8$ .

З табл. 5.5, табл. 5.6 видно, що зміна величини модуля пружності  $E_s$  не суттєво впливає на величину дотичних напружень як для товщини  $h = 3$ , так і для товщини  $h = 4$  для обох значень частоти гофрування.

Зі збільшенням товщини величина дотичних напружень зменшується для обох значень частоти гофрування. Відповідно при збільшенні кількості гофрів дотичні напруження зменшуються приблизно в 2 – 3 рази для всіх варіантів ортотропії.

Таблиця 5.5 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  для п'яти варіантів ортотропії ( $m = 4$ )

	$\psi$	0	$\pi / 40$	$\pi / 20$	$3 \pi / 40$	$\pi / 10$	$\pi / 8$
$h = 3$	$\gamma = \gamma_1$	орт	0,00	3,76	6,96	9,13	10,00
		1		6,02	11,33	15,27	17,33
		2		3,68	6,79	8,89	9,71
		3		6,09	11,41	15,28	17,20
		4		4,13	7,64	10,05	11,04
	$\gamma = \gamma_2$	орт	0,00	-0,56	-1,54	-3,12	-5,17
		1		-1,40	-3,43	-6,37	-9,92
		2		-0,27	-0,94	-2,21	-3,97
		3		-1,76	-4,13	-7,33	-11,04
		4		-0,46	-1,35	-2,91	-5,00
$h = 4$	$\gamma = \gamma_1$	орт	0,00	1,92	3,51	4,55	4,91
		1		3,41	6,34	8,39	9,34
		2		1,91	3,52	4,56	4,93
		3		3,40	6,30	8,29	9,14
		4		2,17	4,00	5,20	5,64
	$\gamma = \gamma_2$	орт	0,00	-0,76	-1,64	-2,66	-3,74
		1		-1,49	-3,16	-5,04	-6,94
		2		-0,54	-1,21	-2,06	-3,01
		3		-1,72	-3,39	-5,63	-7,63
		4		-0,71	-1,55	-2,58	-3,71

Таблиця 5.6 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  для п'яти варіантів ортотропії ( $m = 8$ )

	$\psi$	0	$\pi / 40$	$\pi / 20$	$3 \pi / 40$	$\pi / 10$	$\pi / 8$
$h = 3$	$\gamma = \gamma_1$	орт	0,00	-0,45	-2,99	-5,51	-4,47
		1		1,42	-1,39	-5,29	-4,79
		2		-0,40	-2,79	-5,18	-4,22
		3		1,25	-1,68	-5,54	-4,86
		4		-0,30	-2,84	-5,44	-4,45
	$\gamma = \gamma_2$	орт	0,00	-8,05	-12,82	-12,44	-7,13
		1		-11,18	-17,24	-15,72	-8,02
		2		-7,15	-11,51	-11,33	-6,59
		3		-11,67	-17,94	-16,23	-8,08
		4		-8,03	-12,80	-12,38	-7,01
$h = 4$	$\gamma = \gamma_1$	орт	0,00	-0,29	-1,57	-2,78	-2,23
		1		1,00	-0,45	-2,57	-2,43
		2		-0,15	-1,39	-2,63	-2,17
		3		0,77	-0,80	-2,89	-2,57
		4		-0,11	-1,44	-2,80	-2,30
	$\gamma = \gamma_2$	орт	0,00	-4,84	-7,84	-7,76	-4,56
		1		-7,05	-11,08	-10,37	-5,48
		2		-4,33	-7,05	-7,04	-4,18
		3		-7,37	-11,56	-10,74	-5,55
		4		-4,92	-7,94	-7,81	-4,52

На рис. 5.8 *a*, *b* наведено розподіл дотичних напружень на торцях оболонки для третього варіанта ортотропії (*a*) та ортотропної оболонки (*b*) в залежності від амплітуди гофрів для частоти гофрування  $m = 4$  вздовж напрямної. На рис. 5.8 *c*, *г* аналогічні графіки для  $m = 8$ .

Штриховою лінією позначені графіки напружень на внутрішній поверхні, сущільною – на зовнішній.

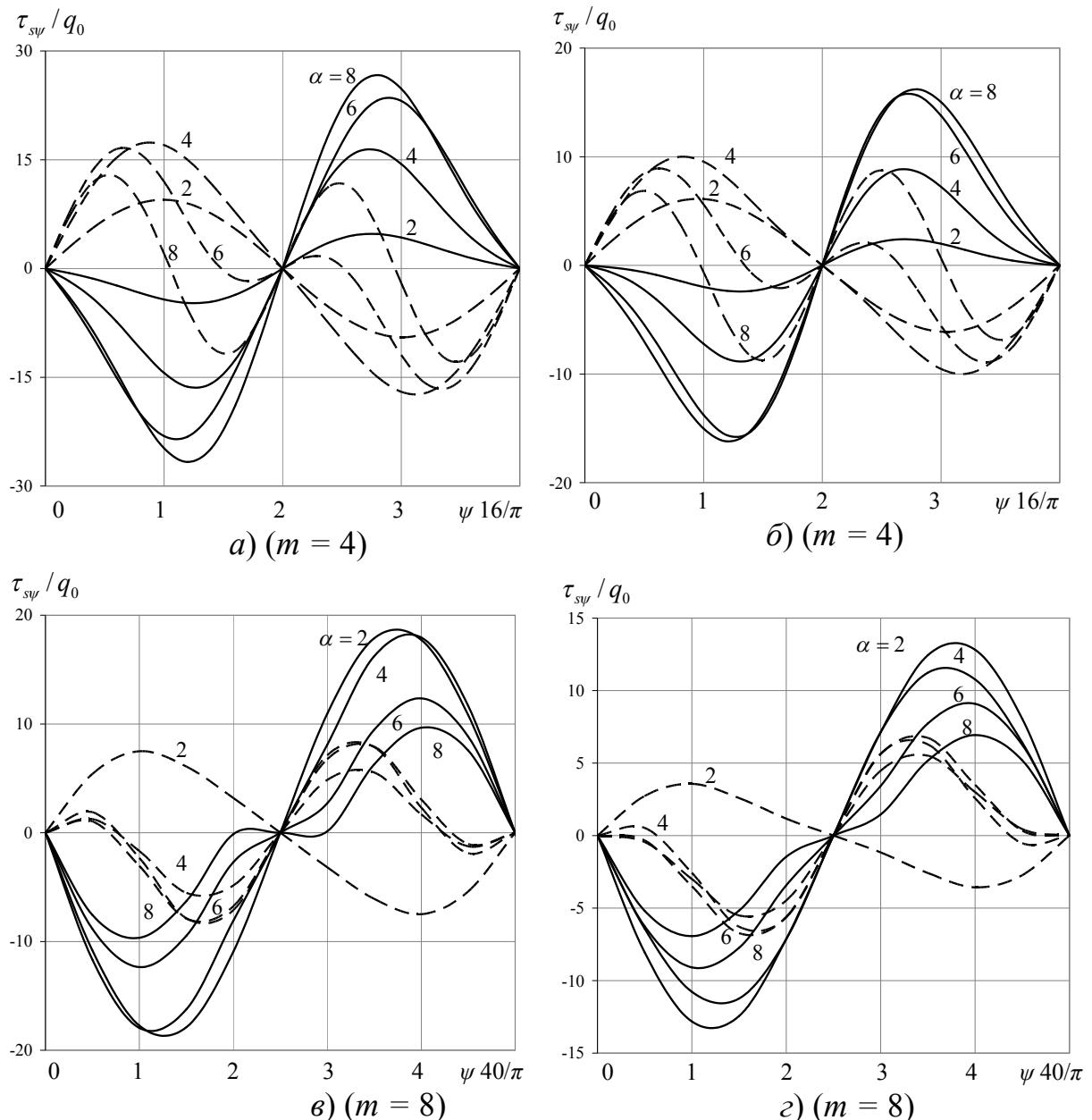


Рис. 5.10 Розподіл напружень  $\tau_{s\psi}$  в залежності від амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки

З рис. 5.8 видно, що якісно характер розподілу дотичних напружень для оболонки, виготовленої з ортотропного матеріалу та з матеріалу, що відповідає характеристикам третього варіанта ортотропії зберігається. При цьому зі збільшенням амплітуди гофрування спостерігається збільшення півхвиль на внутрішній поверхні оболонки.

Максимальних значень дотичні напруження досягають на зовнішній поверхні і при збільшенні амплітуди збільшуються в такій послідовності в 3,4 рази для  $\alpha = 4$ , в 5,6 рази для  $\alpha = 6$ , в 4,8 для  $\alpha = 8$  у випадку 3 варіанта ортотропії.

При збільшенні гофрів, збільшення амплітуди призводить до збільшення хвильастості як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях для ортотропної та оболонки для третього варіанта ортотропії. Максимальних значень дотичні напруження так само досягають на зовнішній поверхні і зі збільшенням амплітуди їх величина зменшується в межах 1,4 – 1,8 рази для обох матеріалів. Для ортотропного матеріалу зі збільшенням амплітуди гофрування дотичні напруження збільшуються в 3,6 рази для  $\alpha = 4$ , в 6,5 рази для  $\alpha = 6$ , в 6,8 для  $\alpha = 8$ .

### **5.3 Аналіз напруженого стану еліптичних циліндричних оболонок з гофрами в поперечному перерізі в залежності від параметрів ортотропії**

Для нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом, що має двопараметричне відхилення від кругової форми (гофровані еліпси) проводиться дослідження напруженено-деформованого стану з метою встановлення залежності між факторами напруженено-деформованого стану оболонок, виготовлених з ортотропного матеріалу, що має механічні характеристики (5.4) та геометричними параметрами таких оболонок, а саме – амплітуди гофрування і степеня еліптичності. Оболонки знаходяться під дією поверхневого розподіленого навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні (5.2), на торцях розглядаються умови простого обпирання (2.9).

Задачу розв'язано за таких геометричних параметрів оболонки: довжина  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина  $h = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ , частота гофрування  $m = 4$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ .

Результати розв'язування задачі в середньому перерізі довжини наведені на рис. 5.9 для значень переміщень  $u_\gamma$  і в табл. 5.7 для значень напружень  $\sigma_\psi$  та в табл. 5.8 для напружень  $\sigma_s$ .

На рис. 5.9 наведені графіки розподілу переміщень  $u_\gamma$  вздовж напрямної оболонки. З графіків видно, що у випадку, коли  $\Delta \neq 0$  значення переміщень збільшуються порівняно з круговою гофрованою оболонкою в западині гофрів ( $\psi = \pi / 4$ ) в 1,1 – 1,2 рази, у вершині, що відповідає більшій півосі еліпса ( $\psi = 0$ )

у 2,8 – 4 рази і у вершині гофра, що відповідає меншій півосі еліпса ( $\psi = \pi / 2$ ) у 1,8 – 5,8 разів, при цьому в останньому випадку змінюючи знак на протилежний.

В табл. 5.7 наведено значення напружень  $\sigma_\psi$  для певних значень товщини та напрямної оболонки.

З табл. 5.7 видно, що наявність еліптичності призводить до зменшення максимальних значень напружень в 1,1 рази в зоні  $\psi = 0$  на внутрішній поверхні оболонки та к збільшенню в 1,1 – 1,2 рази в перерізі  $\psi = \pi / 4$  на зовнішній поверхні та в перерізі  $\psi = \pi / 2$  – на внутрішній.

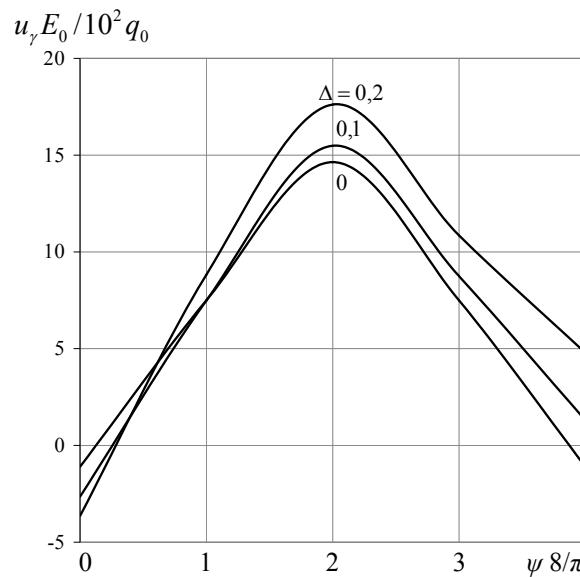


Рис. 5.9 Розподіл переміщень в залежності від ступеня еліптичності вздовж напрямної оболонки

Табл. 5.7 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від степеня еліптичності

$\Delta$	$\gamma / h$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 8$	$\psi = \pi / 4$	$\psi = 3\pi / 8$	$\psi = \pi / 2$
0	-1/2	50,96	4,22	-32,39	4,22	50,96
	0	9,20	8,87	5,62	8,87	9,20
	1/2	-23,80	12,06	48,78	12,06	-23,80
0,1	-1/2	48,12	5,36	-32,58	2,06	55,91
	0	8,37	9,35	5,96	7,94	9,46
	1/2	-22,36	11,78	49,95	12,44	-27,52
0,2	-1/2	47,66	3,90	-31,95	0,03	60,17
	0	6,73	9,47	6,99	6,28	8,68
	1/2	-23,58	13,17	52,21	11,43	-32,17

В табл. 5.8 наведено значення напружень  $\sigma_s$  для деяких значень товщини та напрямної оболонки. З табл. 5.8 видно, що наявність еліптичності призводить до збільшення максимальних абсолютних значень напружень  $\sigma_s$  в 1,8 – 2,4 рази в зоні  $\psi = 0$  на зовнішній поверхні оболонки.

Табл. 5.8 Розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від степеня еліптичності

$\Delta$	$\gamma / h$	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 8$	$\psi = \pi / 4$	$\psi = 3\pi / 8$	$\psi = \pi / 2$
0	-1/2	4,95	-13,32	-40,89	-13,32	4,95
	0	0,90	2,62	-5,77	2,62	0,90
	1/2	-7,52	18,31	27,99	18,31	-7,52
0,1	-1/2	4,71	-11,87	-43,63	-17,15	5,07
	0	-2,14	3,97	-6,73	1,40	5,50
	1/2	-13,22	19,53	28,72	19,73	0,81
0,2	-1/2	4,18	-12,96	-50,81	-22,82	5,15
	0	-4,42	5,65	-9,57	0,00	12,44
	1/2	-17,71	24,02	30,05	22,49	13,30

В інших перерізах напруження змінюються не суттєво.

При  $\Delta = 0,2$  в перерізі  $\psi = \pi / 2$  на зовнішній поверхні напруження  $\sigma_s$  змінюють знак на протилежний, збільшуючись за абсолютною величиною приблизно в 2 рази.

Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях ( $s = 0$ ) для ортотропної оболонки в залежності від степеня еліптичності вздовж напрямної (в силу симетрії взято інтервал напрямної  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ ) наведено на рис. 5.10, де штриховою лінією позначені криві на внутрішній поверхні оболонки, суцільною – на зовнішній. Як видно з графіків, наведених на рис. 5.10, розподіл дотичних напружень має хвилястий синусоподібний характер і при збільшенні степеня еліптичності порушується симетрія в розподілі дотичних напружень відносно перерізу  $\psi = \pi / 4$ . При цьому вплив еліптичності більшою мірою відчутний в інтервалі  $\pi / 4 \leq \psi \leq \pi / 2$  як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях.

Своїх максимальних амплітудних значень дотичні напруження досягають на зовнішній поверхні в інтервалі  $\pi / 4 \leq \psi \leq \pi / 2$  та на внутрішній – в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$ .

При цьому, зі збільшенням степеня еліптичності максимальні значення напружень  $\tau_{s\psi}$  збільшуються в 1,3 рази для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$  та в 1,5 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою на внутрішній поверхні, та в 1,2 рази для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$  та в 1,6 рази для  $\Delta = 0,2$ , порівняно з круговою гофрованою оболонкою на зовнішній поверхні оболонки.

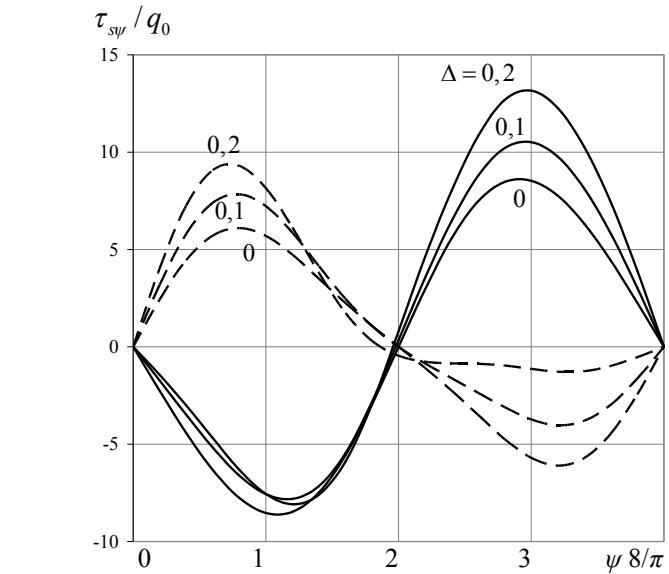


Рис. 5.10 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  в залежності від еліптичності вздовж напрямної

#### 5.4 Напруженено-деформований стан ортотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів

Проведемо аналіз напруженого стану нетонких ортотропних циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних напівгофрів в залежності від зміни параметрів ортотропії. Механічні параметри матеріалу обрано у вигляді третього трансверсально-ізотропного варіанту (5.7). На торцях циліндрів задано граничні умови (2.9).

Поверхню відліку задано рівнянням скороченої епіциклоїди у вигляді (4.1). Оболонки знаходяться під дією розподіленого зовнішнього навантаження. Граничні умови на бічних поверхнях задано у вигляді (5.2). При розв'язуванні задачі прийняті такі вихідні дані: довжина оболонок  $l = 80$ , товщина  $h = 3$ , радіус нерухомого кола  $A = 18$ , радіус рухомого кола  $a = 2, 3$  параметр  $\lambda = 0,5$ .

Результати розв'язку задачі наведено на рис. 5.11 – рис. 5.14 та у табл. 5.9 в середньому перерізі довжини оболонки.

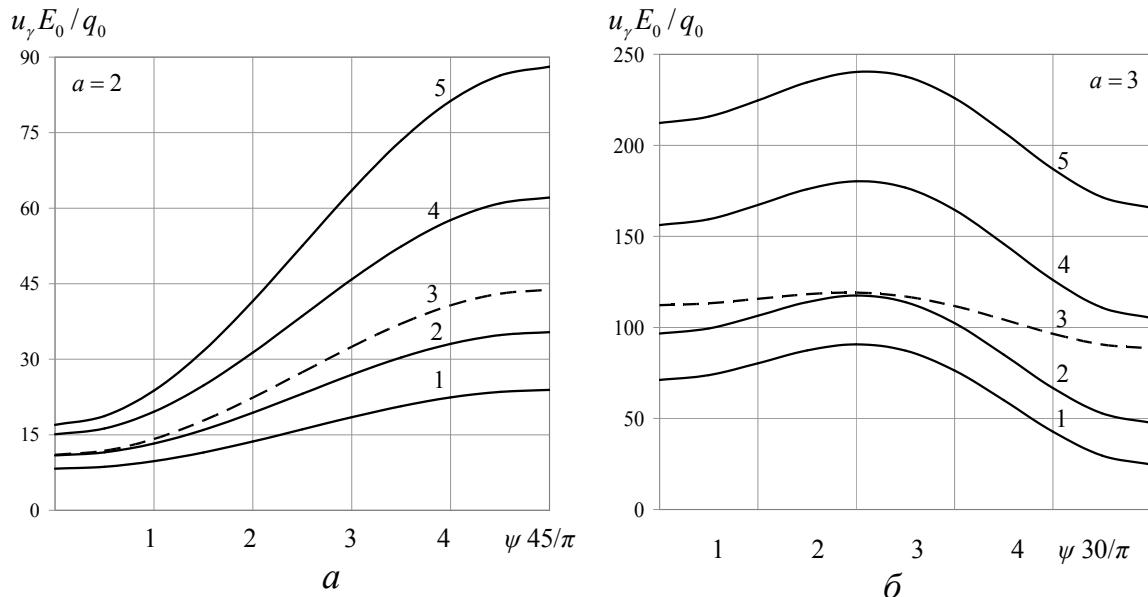


Рис. 5.11 Розподіл переміщень в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної оболонки

На рисунках графіки для п'яти варіантів параметрів ортотропії розташовані у відповідності до своїх номерів. Штриховою лінією позначені криві на графіках, що відповідають ізотропному варіанту 3.

На рис. 5.11 показані графіки розподілу полів переміщень поверхні відліку вздовж напрямної оболонки для двох значень радіуса рухомого кола  $a = 2$  (рис. 5.11 *а*) та  $a = 3$  (рис. 5.11 *б*).

З графіків, наведених на рис. 5.11 *а* видно, що максимальних значень переміщення досягають у вершинах напівгофрів при  $\psi = \pi / 9$  і відносяться як  $23,9 : 35,4 : 43,8 : 62,1 : 88,1$ , відповідно. При цьому, для 1 та 2 варіантів ортотропії величина переміщень зменшується в 1,8 та в 1,2 рази, а для 4 та 5 варіантів ортотропії – збільшуються в 1,4 та 2 рази, відповідно, порівняно з 3 варіантом для ізотропного матеріалу.

При переході із зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) до їх вершини ( $\psi = \pi / 9$ ) переміщення збільшуються у 2,9; 3,5; 3,9; 4,1; 5,5 рази відповідно, для п'яти варіантів ортотропії.

Для оболонок з шістьма напівгофрами ( $a = 3$ ) маємо якісно іншу картину розподілу переміщень (рис. 5.11 *б*). Так, максимального свого значення переміщення досягають в перерізі  $\psi = \pi / 15$  і відносяться як  $90,7 : 117,5 : 119,1 : 180,3 : 240,3$ .

Мінімальних значень переміщення досягають у вершинах напівгофрів в перерізі  $\psi = \pi / 6$ , при цьому зменшуючись у 3,7; 2,5; 1,3; 1,5 рази, відповідно, для п'яти варіантів ортотропії.

На рис. 5.12 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки, а на рис. 5.13 – на зовнішній вздовж напрямної оболонки. Дані, наведені на рис. 5.12 *а* відповідають значенню радіуса рухомого кола  $a = 2$ , а на рис. 5.12 *б* – значенню  $a = 3$ .

З графіків, наведених на рис. 5.12 *а* видно, що максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають в перерізі  $\psi = \pi / 30$ . При цьому вони зменшуються в 2,5 та 1,6 рази для 1 та 2 варіантів ортотропії і збільшуються в 1,2 та 1,9 рази для 4 та 5 варіантів ортотропії порівняно з ізотропним випадком 3.

На графіках, наведених на рис. 5.12 *б* спостерігається інша картина розподілу напружень.

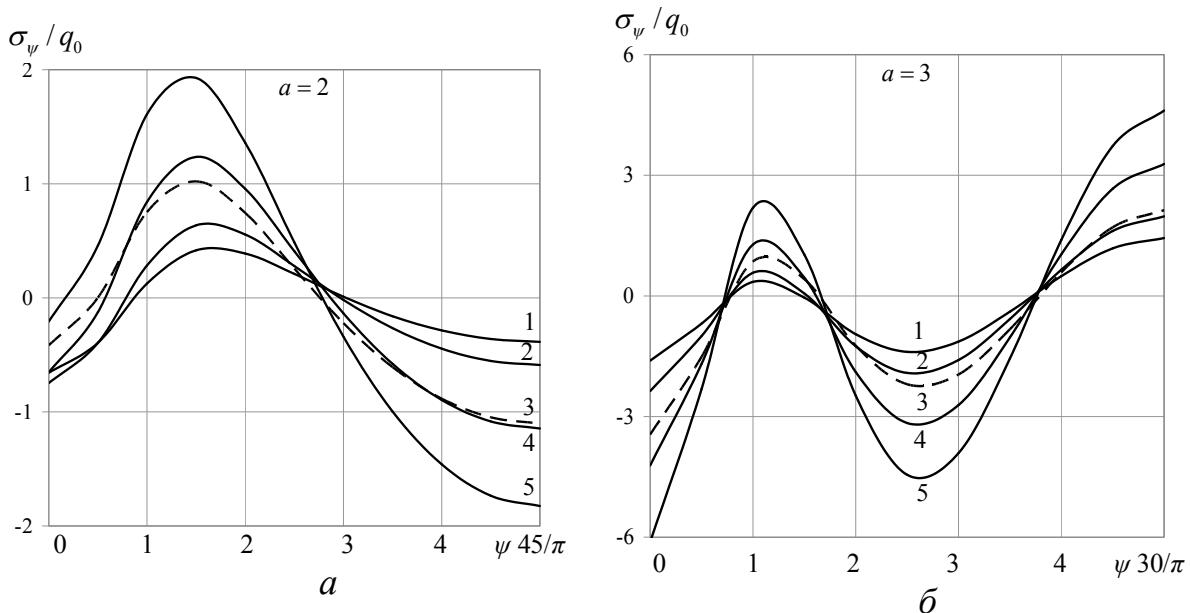


Рис. 5.12 Розподіл напружень в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної оболонки на внутрішній поверхні

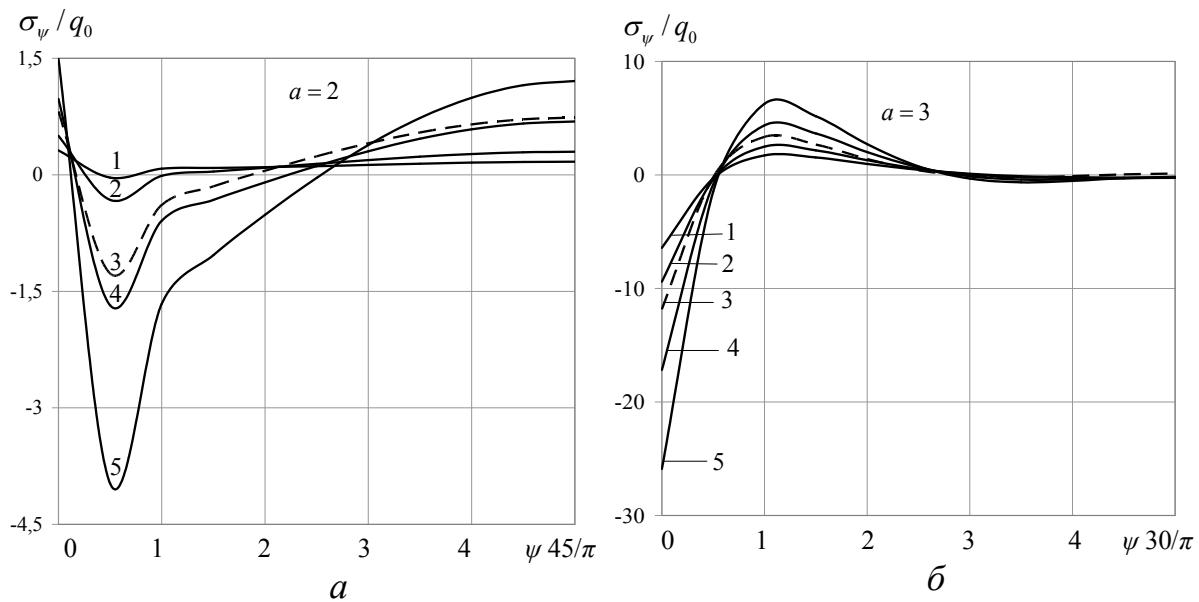


Рис. 5.13 Розподіл напружень в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної оболонки на зовнішній поверхні

Максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають в зоні з'єднання напівгофрів в перерізі  $\psi = 0$  і відносяться як  $1,6 : 2,4 : 3,4 : 4,2 : 6,1$ , відповідно.

На зовнішній поверхні циліндра (рис. 5.13 а) для перших двох варіантів ортотропії напруження досягають свого максимуму в перерізі  $\psi = 0$ , при цьому їх величина менша у 2,7 та 1,6 рази, відповідно, порівняно з величиною

напружень для варіанта 3. У випадку 4 та 5 варіантів ортотропії, максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають в перерізі  $\psi = \pi / 90$ , збільшуючись при цьому порівняно з ізотропним варіантом в 1,3 та 3,1 рази, відповідно.

З графіків, наведених на рис. 5.13 б видно, що максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають в зоні з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) і відносяться як 6,4 : 11,8 : 17,2 : 25,9 : 38,8. При цьому на інтервалі  $[\pi / 12; \pi / 6]$  напруження мають практично одинакові значення.

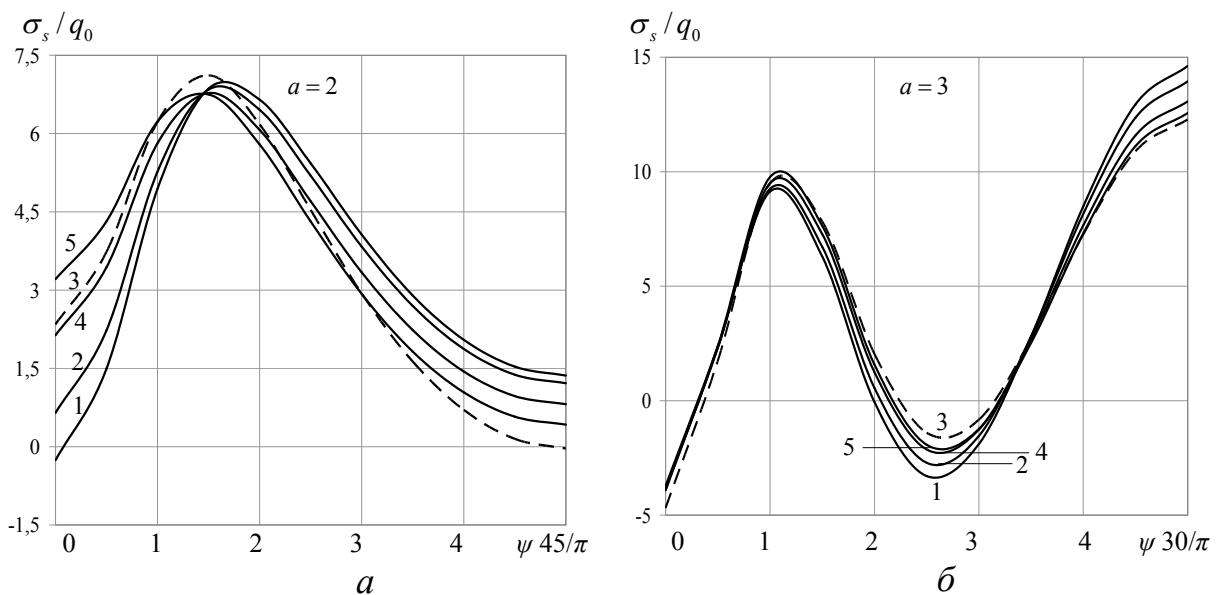


Рис. 5.14 Розподіл напружень  $\sigma_s$  на внутрішній поверхні в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної оболонки

Характер розподілу напружень  $\sigma_s$  на внутрішній поверхні оболонки для значення рухомого кола  $a = 2$  представлений на рис. 5.14 а та для  $a = 2$  – на рис. 5.14 б вздовж напрямної оболонки.

Для оболонок з дев'ятьма напівгофрами максимальних значень напруження  $\sigma_s$  досягають в околі  $\psi = \pi / 30$ , приймаючи приблизно одинакових значень, що дорівнюють 6,9; 6,8; 7,1; 6,8; 6,7 для п'яти варіантів ортотропії.

Для оболонок з шістьма напівгофрами напруження  $\sigma_s$  приймають максимальних значень у вершинах напівгофрів ( $\psi = \pi / 6$ ) і відносяться як 14,6 : 13,9 : 12,3 : 13,1 : 12,6, відповідно.

В табл. 5.9 наведені значення напружень  $\sigma_s$  на зовнішній поверхні оболонки в деяких перерізах напрямної для двох значень радіуса рухомого кола та для п'яти варіантів ортотропії.

З табл. 5.9 випливає, що максимальних абсолютних значень напруження досягають в місцях з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ), як для  $a = 2$ , так і для  $a = 3$ . При цьому зміна параметрів ортотропії несуттєво впливає на зміну значень напружень  $\sigma_s$ .

Таблиця 5.9 Розподіл напружень  $\sigma_s$  на зовнішній поверхні оболонки в залежності від параметрів ортотропії

$a$	$\psi$	$\sigma_s / q_0$				
		1	2	3	4	5
2	0	5,37	5,41	5,21	5,47	5,55
	$\pi/45$	3,76	3,04	1,15	1,56	0,25
	$2\pi/45$	3,76	3,38	2,50	2,66	2,05
	$\pi/15$	3,80	3,68	3,53	3,52	3,41
	$4\pi/45$	3,88	3,92	4,23	4,10	4,32
	$\pi/9$	3,91	4,00	4,47	4,31	4,63
3	0	-38,61	-38,10	-35,42	-38,13	-38,82
	$\pi/30$	15,37	15,17	15,03	14,87	14,62
	$\pi/15$	9,83	9,27	8,08	8,61	8,28
	$\pi/10$	3,73	3,38	2,66	3,00	2,85
	$2\pi/15$	1,81	1,96	2,44	2,20	2,37
	$\pi/6$	1,64	2,05	3,15	2,59	2,92

Нехай тепер поверхня відліку циліндричних оболонок задана скороченою гіпоциклідою у вигляді (4.1), де параметр  $a$  замінений на  $(-a)$ . Оболонки знаходяться під дією рівномірного внутрішнього тиску. Границі умови на торцях мають вигляд (2.9), на бічних поверхнях – (5.1).

Для механічних параметрів матеріалу обираємо п'ять варіантів ортотропії (5.7). Проведемо дослідження напруженого стану циліндричних оболонок з увігнутим гофрованим поперечним перерізом в залежності від зміни параметрів ортотропії.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: радіус нерухомого кола  $A = 18$ ; радіус рухомого кола  $a = -2; -3$ ; параметр  $\lambda = 0,4$ ; товщина оболонки  $h = 2,8$ ; довжина оболонки  $l = 60$ .

На рис. 5.15 – рис. 5.18 наведено результати розв'язання задачі у вигляді графіків розподілу переміщень і напружень в середньому перерізі по довжині оболонки. На графіках криві розподілу відповідних функцій для п'яти варіантів ортотропії розташовані відповідно до їх номерів. Штрихованою лінією показані криві для ізотропного випадку 3.

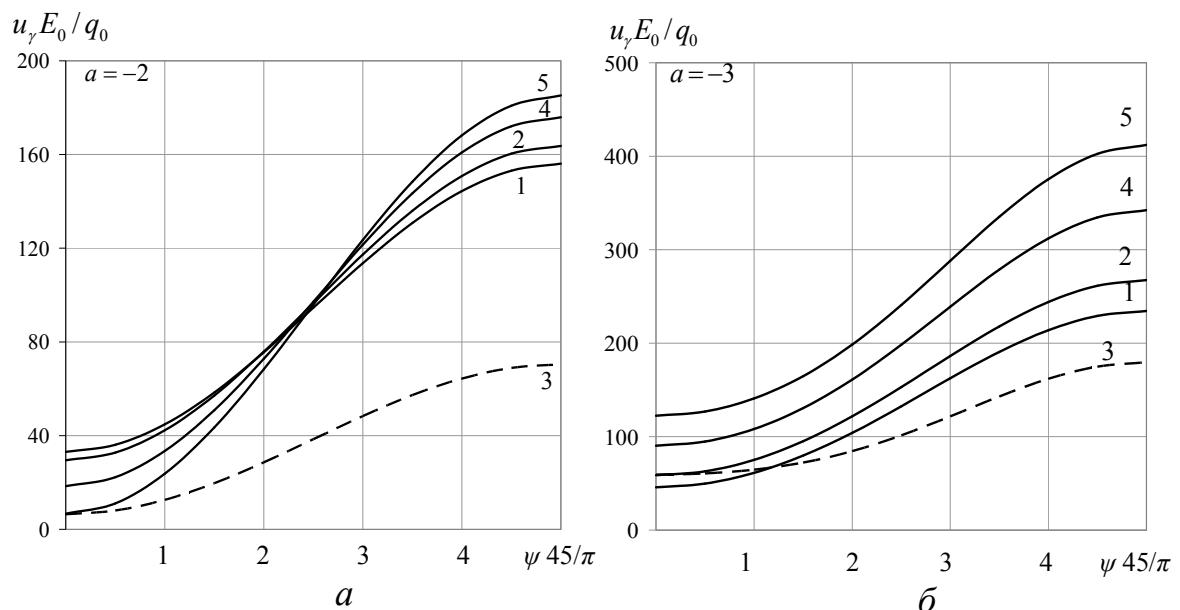


Рис. 5.15 Розподіл переміщень в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної оболонки

На рис. 5.15 наведено графіки розподілу переміщень  $u_y$  серединної поверхні вздовж напрямної оболонки. Криві на рис. 5.15 *a* відповідають оболонкам для  $a = -2$ , на рис. 5.15 *b* – для  $a = -3$ .

З рис. 5.15 *a* видно, що максимальних значень переміщення  $u_y$  досягають у зоні западини напівгофрів при  $\psi = \pi / 9$  і відносяться відповідно, як

$156,1 : 163,7 : 70,5 : 175,9 : 185,2$ . При цьому, порівняно з ізотропним варіантом, значення переміщень збільшуються у 2,2; 2,3; 2,5; 2,6 рази. При переході із зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) до їх западини ( $\psi = \pi / 9$ ) переміщення зростають у 4,7; 5,6; 11,2; 9,7; 30,8 рази відповідно для п'яти варіантів ортотропії.

Зменшення кількості напівгофрів при  $a = -3$  (рис. 5.15 б) призводить до збільшення значень переміщень  $u_y$  для всіх варіантів ортотропії в 1,5 – 2,5 рази. При цьому максимальні значення мають місце в западині напівгофрів при  $\psi = \pi / 6$  і, порівняно з ізотропним варіантом, їх величина збільшується у 1,3; 1,5; 1,9; 2,3 рази відповідно.

На рис. 5.16 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній поверхні оболонки вздовж напрямної. Криві на рис. 5.16 а відповідають оболонкам для  $a = -2$ , на рис. 5.16 б – для  $a = -3$ .

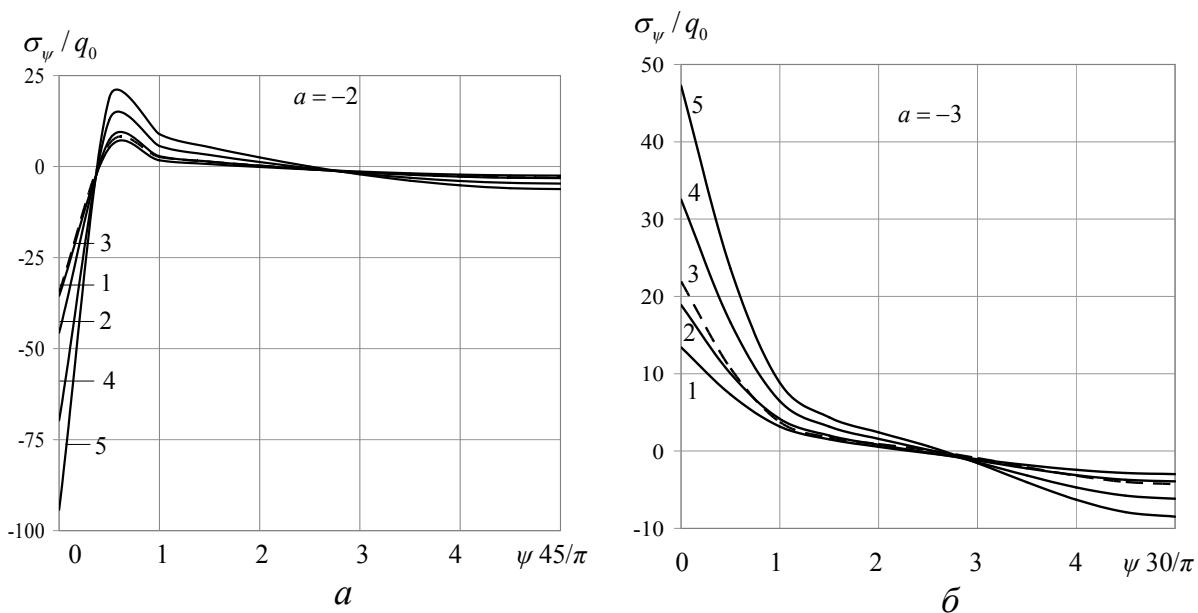


Рис. 5.16 Розподіл напружень в залежності від параметрів ортотропії

вздовж напрямної на внутрішній поверхні оболонки

З рис. 5.16 а видно, що максимальних абсолютних значень напруження  $\sigma_\psi$  досягають в місцях з'єднання напівгофрів при  $\psi = 0$ , при цьому вони збільшуються у 1,1; 1,3; 2,1; 2,7 рази відповідно, по відношенню до варіанта 3, що відповідає ізотропному випадку.

На рис. 5.16 б спостерігаємо іншу картину розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$ . Максимальні значення мають місце в перерізі  $\psi = 0$  і порівняно з ізотропним варіантом, для 1 і 2 варіантів напруження зменшуються у 1,6 і 1,2 рази, а для 4 і 5 варіантів – збільшуються у 1,5 та 2,2 рази відповідно.

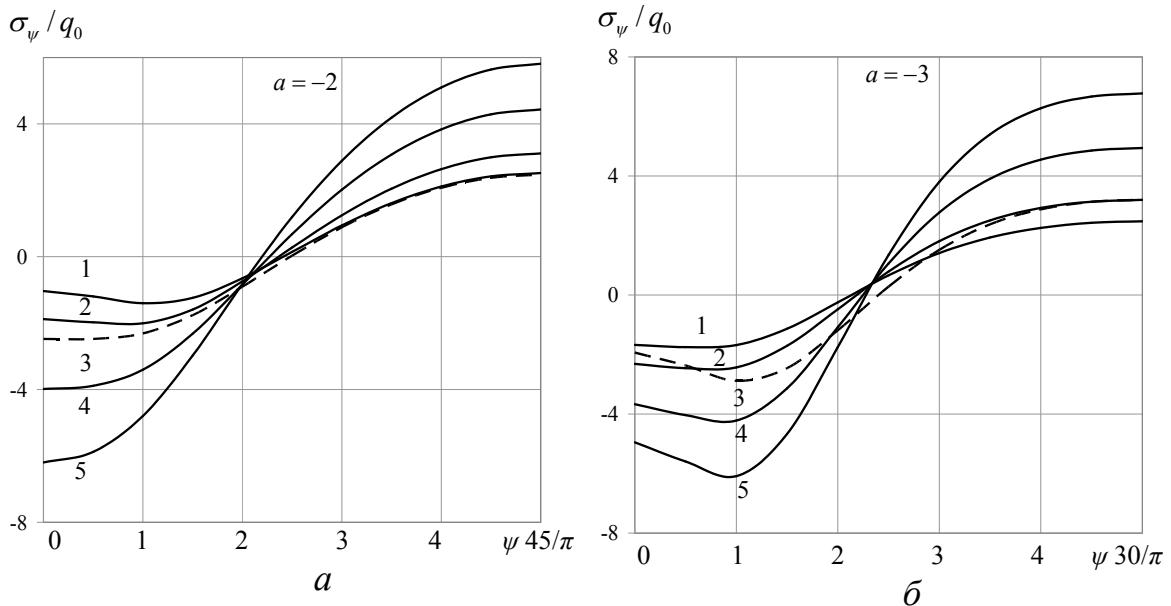


Рис. 5.17 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної на зовнішній поверхні оболонки

На рис. 5.17 наведено графіки розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної. Криві на рис. 5.19 а відповідають оболонкам для  $a = -2$ , на рис. 5.19 б – для  $a = -3$ .

З рис. 5.17 а видно, що для 1, 2 і 4 варіантів ортотропії напруження досягають максимальних абсолютних значень у западині напівгофрів і при цьому зменшуються для 1 і 2 варіантів у 1,1 та 1,3 рази і збільшуються у 1,8 рази для 4 варіанта ортотропії відповідно.

Для 5 варіанта, напруження досягають свого максимуму у зоні з'єднання напівгофрів і, порівняно з ізотропним варіантом, збільшуються у 2,5 рази.

Для оболонок зі значенням параметра  $a = -3$  (рис. 5.17 б), напруження  $\sigma_\psi$  приймають максимальних значень в западині напівгофрів при  $\psi = \pi / 6$  і відносяться як 2,48 : 3,20 : 3,20 : 4,94 : 6,78 відповідно для п'яти варіантів ортотропії.

В табл. 5.10 наведено значення напружень  $\sigma_s$  на внутрішній поверхні оболонки в деяких перерізах напрямної для двох значень рухомого радіуса  $a = -2; -3$  та п'яти варіантів ортотропії.

З табл. 5.10 видно, що максимальних абсолютних значень напруження досягають в зоні з'єднання напівгофрів ( $\psi = 0$ ) як для  $a = -2$ , так і для  $a = -3$ . При цьому, порівняно з ізотропним варіантом 3, значення напружень збільшуються у  $1,8 - 1,4$  рази для  $a = -2$  і в  $1,2 - 1,1$  рази для  $a = -3$ .

Починаючи з перерізу  $\psi = \pi / 45$  для  $a = -2$  та  $\psi = \pi / 30$  для  $a = -3$ , значення напружень мало відрізняються один від одного.

Таблиця 5.10 Розподіл напружень  $\sigma_s$  на внутрішній поверхні оболонки в залежності від параметрів ортотропії

$a$	$\psi$	$\sigma_s / q_0$				
		1	2	3	4	5
-2	0	-236,0	-205,2	-113,9	-172,7	-158,2
	$\pi/45$	12,54	13,08	9,97	13,47	13,83
	$2\pi/45$	0,86	1,82	2,03	2,77	3,30
	$\pi/15$	-6,79	-5,81	-3,60	-4,74	-4,24
	$4\pi/45$	-11,63	-10,67	-7,26	-9,54	-9,07
	$\pi/9$	-13,29	-12,33	-8,52	-11,19	-10,73
-3	0	94,16	89,42	77,23	84,17	82,19
	$\pi/30$	20,10	23,29	16,78	19,97	18,31
	$\pi/15$	9,69	9,12	7,79	8,50	8,13
	$\pi/10$	0,82	1,40	2,58	2,08	2,34
	$2\pi/15$	-6,31	-5,57	-4,17	-4,88	-4,66
	$\pi/6$	-9,20	-8,54	-7,38	-8,04	-7,93

Характер розподілу графіків напружень  $\sigma_s$  на зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної наведено на рис. 5.18. Криві на рис. 5.18 *a* відповідають оболонкам для  $a = -2$ , на рис. 5.18 *b* – для  $a = -3$ .

Для першого варіанту ортотропії (рис. 5.18 *a*), максимальних абсолютних значень, напруження досягають в зоні западини, а для інших варіантів – в зоні з'єднання напівгофрів. В порівнянні з ізотропним варіантом 3, величина максимальних напружень збільшується приблизно в 1,5 – 1,3 рази.

При  $a = -3$  (рис. 5.18 *b*) напруження  $\sigma_s$  приймають абсолютних максимальних значень в зоні западини напівгофрів і відносяться як 16,19 : 14,73 : 12,28 : 13,24 : 12,62 відповідно для п'яти варіантів ортотропії.

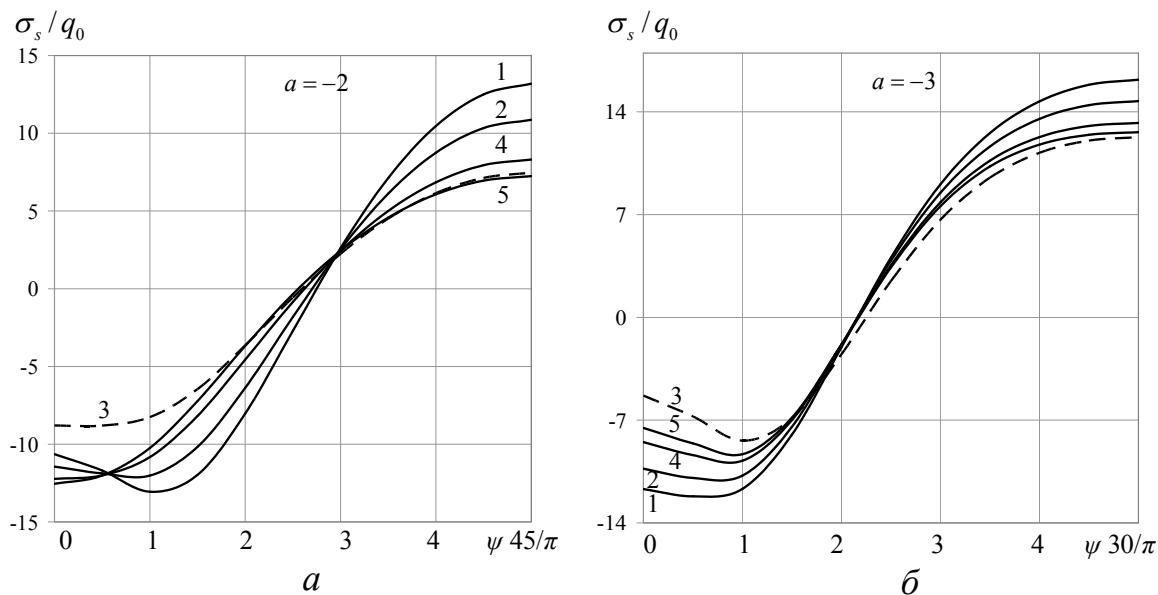


Рис. 5.18 Розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від параметрів ортотропії вздовж напрямної на зовнішній поверхні оболонки

Величина дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонок незначна, порівняно з величинами інших характеристик напруженості.

Аналіз проведеного дослідження напруженого стану зазначеного класу циліндрів показує одночасний вплив на напружений стан механічних та геометрических параметрів оболонок. Таким чином, змінюючи відповідні механічні чи геометричні параметри, можна суттєво впливати на параметри, що характеризують напружене-деформований стан розглядуваних оболонок, з метою вибору найбільш раціонального їх розподілу.

## 5.5 Дослідження напруженого стану шаруватих, неоднорідних по товщині некругових циліндричних оболонок

Розглянуто задачу про напруженний стан тришарових нетонких некругових циліндричних оболонок при дії поверхневого навантаження, з граничними умовами (5.1), або (5.2). На торцях оболонок має місце діафрагма, абсолютно жорстка в своїй площині і гнучка при виході з неї, тобто мають місце граничні умови (2.9). Несучі шари, товщина яких  $h_1$  та  $h_3$  – ізотропні, що мають модуль пружності  $E = E_0$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Матеріал середнього шару може бути трансверсально-ізотропним, чи ортотропним, його товщина  $h_2$ .

Досліджено напруженний стан еліптичних тришарових циліндричних оболонок при дії рівномірного навантаження, прикладеного на зовнішній поверхні (5.2), середній шар яких, виготовлено з трансверсально-ізотропного матеріалу, з механічними параметрами (5.5) симетричної та несиметричної будови. Поверхні відліку циліндричних оболонок, що розглядаються, визначаються аналогічно п. 5.2.

За геометричні параметри оболонки при розв'язуванні задачі було прийнято: довжина оболонки  $l = 60$ ; радіус кола  $R = 40$ ; товщина несучих шарів при симетричній будові  $h_1 = h_3 = 2$ , при несиметричній будові –  $h_1 = 3; 1, h_3 = 1; 3$ , товщина заповнювача  $h_2 = 4$ ; сумарна товщина шарів  $H = 8$ ; степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ . Розташування шарів показано на рис. 5.19.

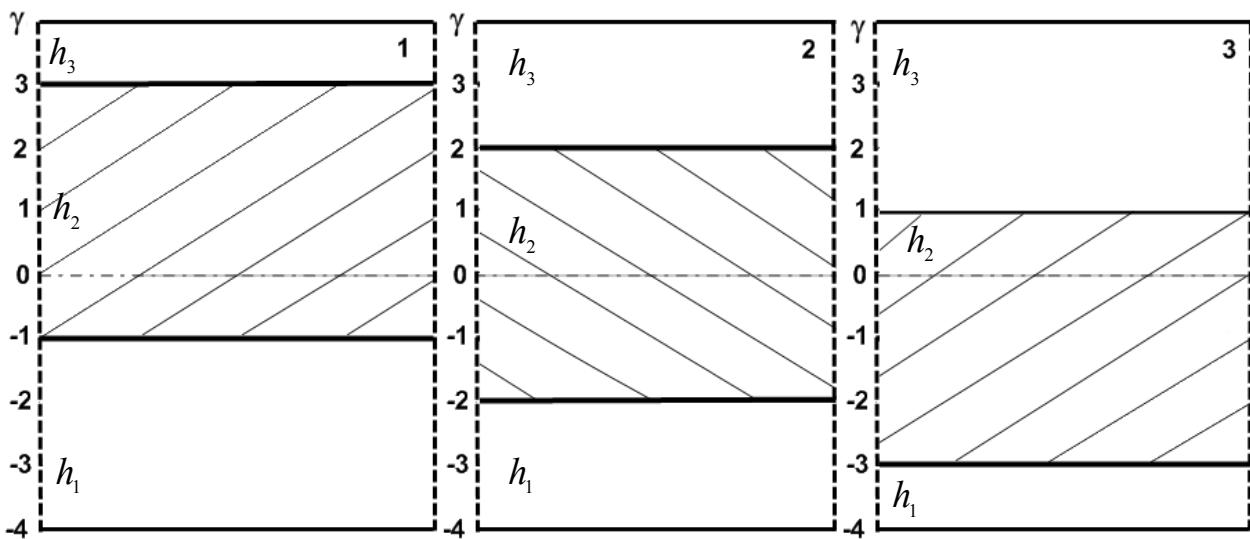


Рис. 5.19 Розташування шарів по товщині оболонки

Результати розв'язування задачі в середньому перерізі довжини оболонки наведені в табл. 5.11 – табл. 5.13.

В табл. 5.11 представлені значення нормальних переміщень, в табл. 5.12 значення напружень  $\sigma_\psi$ , а в табл. 5.13 значення напружень  $\sigma_s$  в деяких перерізах товщини оболонки для  $\psi = 0$  та  $\psi = \pi / 2$  в залежності від степеня еліптичності оболонок  $\Delta$  та розташування шарів по товщині.

З табл. 5.11 видно, що для симетрично розташованого середнього шару (варіант 2) зі збільшенням степеня еліптичності для  $\Delta = 0,1$  на зовнішній поверхні в зоні більшої жорсткості переміщення зменшуються у 2,8 рази, змінюючи свій знак на протилежний порівняно с переміщеннями на внутрішній поверхні. Для  $\Delta = 0,2$  та  $\Delta = 0,3$  переміщення змінюють свій знак на протилежний та збільшуються в 1,7 та 1,3 рази відповідно.

В зоні меншої жорсткості оболонки значення переміщень зменшуються при переході із зовнішньої до внутрішньої поверхні в 1,3 для  $\Delta = 0,1$ , в 1,2 рази для  $\Delta = 0,2$  та в 1,15 разів для  $\Delta = 0,3$ .

Зі збільшенням степеня еліптичності змінюється характер розподілу полів переміщень залежно від розташування середнього трансверсально-ізотропного шару.

Так, в околі більшої півосі еліпса для другого симетричного варіанта розташування середнього шару переміщення для  $\Delta = 0,1$  на зовнішній поверхні зменшуються у 2,8 рази, змінюючи свій знак на протилежний, порівняно з переміщеннями на внутрішній поверхні. Для першого варіанта розташування середнього шару напруження зменшуються в 1,7 разів, а для третього – у 14 разів. Для циліндрів із степенем еліптичності  $\Delta = 0,3$  напруження збільшуються за абсолютною величиною в 1,3 рази для варіанта 2 і у 1,8 рази – для варіанта 3. Для варіанта 1 переміщення практично не змінюються.

В зоні меншої півосі оболонки ( $\psi = \pi / 2$ ) при збільшенні степеня еліптичності збільшуються значення переміщень, при цьому зміна положення середнього шару призводить до зменшення величини переміщень приблизно в

1,4 – 1,2 рази для варіанта 1 і до збільшення величини переміщень в 1,1 – 1,3 рази для варіанта 3, порівняно з варіантом 2.

Табл. 5.11 Розподіл переміщень в залежності від степеня еліптичності та розташування шарів по товщині оболонки

$\gamma / H$	$u_\gamma E_0 / q_0$							
	$\Delta = 0$		$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0,2$		$\Delta = 0,3$	
	$\psi$							
	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$
1								
-1/2	190,86	190,86	34,34	381,10	-93,74	610,70	-194,51	882,27
-1/8	189,44	189,44	32,47	380,54	-95,66	611,50	-196,02	885,27
0	172,69	172,69	18,43	361,44	-107,05	590,73	-204,90	862,40
3/8	109,21	109,21	-21,87	274,49	-124,90	480,40	-201,46	727,42
1/4	108,73	108,73	-20,64	272,28	-121,94	476,40	-196,78	721,70
2								
-1/2	208,63	208,63	47,92	404,87	-81,47	641,78	-178,15	920,78
-1/4	207,32	207,32	45,96	404,56	-83,85	642,82	-180,52	923,69
0	172,70	172,70	12,40	369,20	-117,90	608,18	-220,36	891,51
1/4	128,63	128,63	-19,81	312,70	-140,18	539,36	-237,70	810,65
1/2	127,95	127,95	-17,34	308,98	-134,24	532,63	-227,61	800,99
3								
-1/2	223,90	223,90	70,07	415,16	-47,61	646,14	-125,04	917,86
-3/8	223,10	223,10	68,64	415,10	-49,56	647,01	-127,41	920,04
0	171,50	171,50	10,77	369,52	-118,55	610,08	-219,31	893,40
1/8	149,10	149,10	-8,25	343,06	-136,45	579,85	-240,51	858,32
1/2	147,65	147,65	-5,26	337,51	-128,27	570,36	-225,67	845,28

Табл. 5.12 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від степеня еліптичності та розташування шарів по товщині оболонки

$\gamma / H$	$\sigma_\psi / q_0$							
	$\Delta = 0$		$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0,2$		$\Delta = 0,3$	
	$\psi$							
	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$
1								
-1/2	-3,09	-3,09	-1,88	-4,82	-1,03	-7,13	-0,43	-10,10
-1/8	-1,45	-1,45	-2,06	-1,19	-3,07	-1,26	-4,57	-1,56
0	0,85	0,85	0,26	1,37	-0,29	1,76	-0,77	2,48
3/8	3,09	3,09	1,17	5,13	-0,62	7,35	-2,23	9,84
1/4	-0,29	-0,29	-2,92	2,45	-5,52	5,40	-8,13	8,53
2								
-1/2	-2,98	-2,98	-1,81	-4,70	-1,12	-7,05	-0,91	-10,04
-1/4	-1,76	-1,76	-1,86	-2,10	-2,43	-2,88	-3,52	-4,03
0	1,20	1,20	0,80	1,60	0,65	1,92	1,29	2,29
1/4	2,84	2,84	1,54	4,29	0,57	5,87	0,35	7,67
1/2	0,16	0,16	-2,75	3,14	-5,73	6,33	-8,99	9,78
3								
-1/2	-2,80	-2,80	-1,66	-4,52	-1,09	-6,84	-1,07	-9,92
-3/8	-2,13	-2,13	-1,61	-3,17	-1,59	-4,73	-2,09	-6,80
0	1,51	1,51	1,40	1,74	1,87	1,88	3,60	2,45
1/8	2,39	2,39	1,86	3,14	1,99	3,92	3,48	5,18
1/2	0,66	0,66	-2,40	3,80	-5,55	7,14	-8,97	10,69

З табл. 5.12 видно, що для симетричного розташування шарів (варіант 2) зі збільшенням степеня еліптичності абсолютні значення напружень на зовнішній поверхні в зоні більшої жорсткості збільшуються приблизно у 2,5 рази для  $\Delta = 0,1$ , в 5,2 рази для  $\Delta = 0,2$  та в 8,5 разів для  $\Delta = 0,3$ , порівняно з круговою оболонкою.

На внутрішній поверхні збільшення значення степеня еліптичності призводить до зменшення значень напружень, порівняно з круговою оболонкою приблизно в 1,2 – 2 рази.

В зоні меншої жорсткості ( $\psi = \pi / 2$ ) напруження збільшуються як на внутрішній, так і на зовнішній поверхні зі збільшенням степеня еліптичності.

В зоні більшої жорсткості оболонки ( $\psi = 0$ ) вплив розташування середнього шару відчувається в середньому перерізі по товщині. Так, для  $\Delta = 0,1$  напруження зменшуються в 3 і збільшуються в 1,8 рази для варіантів 1 і 3, порівняно з варіантом 2, для  $\Delta = 0,2$  – у 2,3 та 2,8 разів і для  $\Delta = 0,3$  – у 1,7 та 2,8 рази відповідно.

В табл. 5.13 наведено розподіл полів напружень  $\sigma_s$  для деяких значень товщини оболонок залежно від степеня еліптичності  $\Delta$  у вершині більшої півосі оболонки в перерізі  $\psi = 0$  та в околі меншої півосі оболонки в перерізі  $\psi = \pi / 2$  для трьох варіантів розташування шарів по товщині оболонки.

Також розглянемо задачу про напружений стан тришарових еліптичних циліндричних оболонок симетричної будови з гофрами в поперечному перерізі при дії внутрішнього тиску (5.1). Середній шар виготовлений з ортотропного матеріалу з механічними параметрами (5.4). Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус вихідного кола  $r_0 = 40$ , товщина несучих шарів  $h_1 = 1$ ,  $h_3 = 1$ , товщина заповнювача –  $h_2 = 2$ ; сумарна товщина шарів  $H = 4$ , амплітуда гофрування  $\alpha = 1; 3$  частота гофрування  $m = 3; 6$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0,1; 0,2$ .

Табл. 5.13 Розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від степеня еліптичності та розташування шарів по товщині оболонки

$\gamma / H$	$\sigma_s / q_0$							
	$\Delta = 0$		$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0,2$		$\Delta = 0,3$	
	$\psi$							
	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$	0	$\pi / 2$
1								
-1/2	4,37	4,37	6,02	3,12	8,48	1,95	12,08	0,51
-1/8	4,54	4,54	4,01	4,97	3,32	5,28	1,96	5,49
0	6,16	6,16	5,59	6,81	5,15	7,43	4,49	8,29
3/8	6,34	6,34	4,65	8,14	3,06	10,00	1,42	11,86
1/4	2,68	2,68	0,37	5,00	-2,04	7,32	-4,68	9,26
2								
-1/2	4,90	4,90	6,60	3,54	8,96	2,23	11,91	0,67
-1/4	5,01	5,01	5,16	4,87	5,29	4,62	5,07	4,23
0	6,47	6,47	6,05	7,04	5,90	7,62	5,98	8,23
1/4	6,59	6,59	5,32	8,02	4,29	9,51	3,42	11,08
1/2	3,26	3,26	0,53	5,84	-2,54	8,35	-6,57	10,71
3								
-1/2	5,38	5,38	7,23	3,83	9,55	2,38	12,44	0,23
-3/8	5,43	5,43	6,50	4,51	7,82	3,57	9,27	2,30
0	6,67	6,67	6,46	7,10	6,77	7,54	7,64	8,23
1/8	6,73	6,73	6,07	7,63	5,94	8,56	6,36	9,85
1/2	3,85	3,85	0,90	6,61	-2,51	9,27	-6,87	11,59

Результати розв'язку задачі приведені для максимальних значень переміщень  $u_\gamma$  на рис. 5.20, для напружень  $\sigma_s$  – на рис. 5.21 та напружень  $\sigma_\psi$  – на рис. 5.22, в середньому перерізі довжини оболонки. Суцільними лініями на графіках позначені криві для  $\alpha = 1$ , штрихованими – для  $\alpha = 3$ .

На рис. 5.20 показані графіки розподілу полів переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi$  для частоти гофрування  $m = 3$  (рис. 5.20 *a*) та для  $m = 6$  в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$  (рис. 5.20 *б*) в середньому перерізі по товщині ( $\gamma = 0$ ) для значень амплітуди гофрування  $\alpha = 1; 3$  та степеня еліптичності  $\Delta = 0,1; 0,2$ .

З графіків (рис. 5.20 *a*) видно, що для оболонок з частотою гофрування  $m = 3$  переміщення досягають максимальних значень в западині гофрів  $\psi = \pi / 3$ .

При цьому зміна степеня еліптичності веде до збільшення переміщень в 1,8 разів для  $\alpha = 1$  та в 1,5 рази для  $\alpha = 3$ . Зі збільшенням амплітуди гофрування, значення переміщень збільшуються у 2,6 рази для оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,1$  та у 2,3 рази – для  $\Delta = 0,2$ .

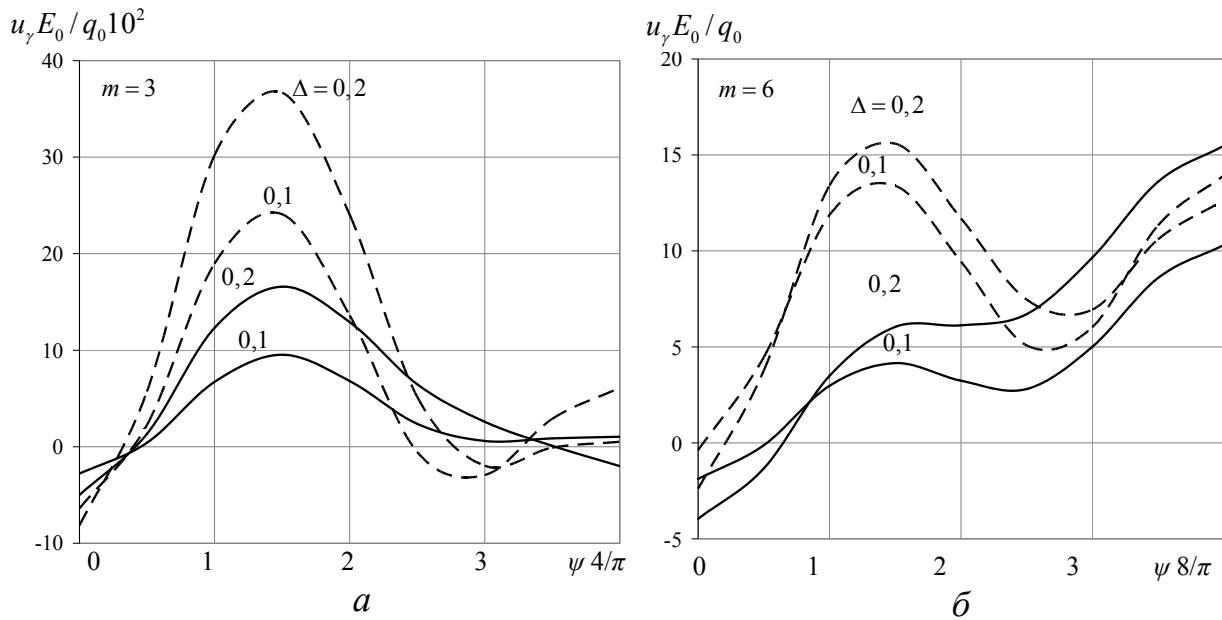


Рис. 5.20 Розподіл переміщень в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки ( $\gamma = 0$ )

Характер розподілу переміщень для оболонок з частотою гофрування  $m = 6$  представлений на рис. 5.20 *б*. Для значення  $\alpha = 1$  максимальних значень переміщень досягають у западині гофрів в перерізі  $\psi = \pi / 2$ , при цьому збільшення степеня еліптичності призводить до збільшенню переміщень в 1,5 рази. Для  $\alpha = 3$  переміщення досягають максимуму у западині гофрів, але в

перерізі  $\psi = \pi / 6$ , при цьому зміна степеня еліптичності веде до збільшення значень переміщень в 1,2 рази.

На рис. 5.21 наведені графіки розподілу полів напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної оболонки на зовнішній границі середнього шару ( $\gamma = h_2 / 2$ ) для частоти гофрування  $m = 3$  (рис. 5.21 *a*) та  $m = 6$  (рис. 5.21 *б*) для значень амплітуди гофрування  $\alpha = 1; 3$  та степеня еліптичності  $\Delta = 0,1; 0,2$ , де вони приймають максимальних значень.

З графіків (рис. 5.21 *a*) видно, що при  $m = 3$  максимальних значень напруження досягають в околі западини гофра ( $\psi = \pi / 3$ ).

Збільшення степеня еліптичності веде до збільшенню значень напружень в 2,1 рази для  $\alpha = 1$  та в 1,8 разів – для  $\alpha = 3$ . при цьому зі збільшенням амплітуди гофрування збільшуються значення напружень в 1,6 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,3 рази – для степеня еліптичності  $\Delta = 0,2$ .

Характер розподілу напружень  $\sigma_s$  для оболонок з частотою гофрування  $m = 6$  наведений на рис. 5.21 *б*. Збільшення амплітуди гофрування суттєво впливає на перерозподіл значень напружень. Так, для  $\alpha = 3$  напруження досягають максимальних абсолютних значень в перерізах  $\psi = \pi / 3; \psi = \pi / 2$ .

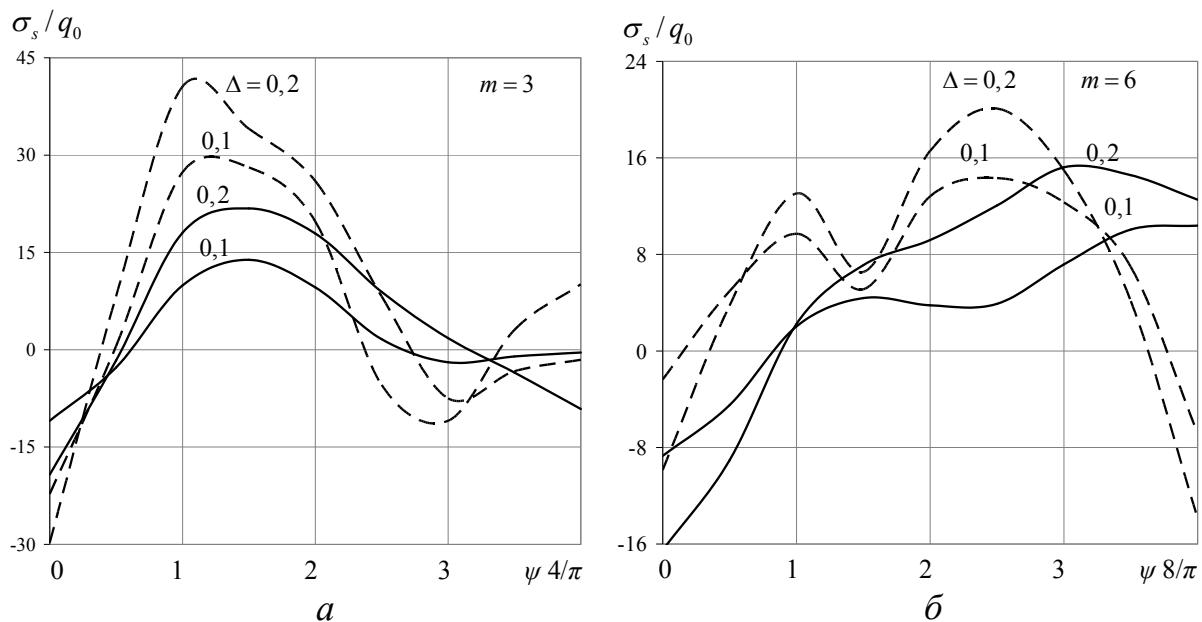


Рис. 5.21 Розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки

При цьому в западині гофрів  $\psi = \pi / 2$  напруження змінюють знак на протилежний. Збільшення степеня еліптичності веде до збільшення значень напружень в 1,4 рази в перерізі  $\psi = \pi / 3$ , та у 2 рази – при  $\psi = \pi / 2$ . Для оболонок з амплітудою гофрування  $\alpha = 1$  максимальних значень напруження досягають в околі  $\psi = \pi / 3$  і зі збільшенням степеня еліптичності вони збільшуються приблизно в 1,6 рази.

На рис. 5.22 показані графіки розподілу напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки на зовнішній границі середнього шару ( $\gamma = h_2 / 2$ ) для частоти гофрування  $m = 3$  (рис. 5.22 *a*) та  $m = 6$  (рис. 5.22 *б*) для значень амплітуди гофрування  $\alpha = 1; 3$  та степеня еліптичності  $\Delta = 0,1; 0,2$ .

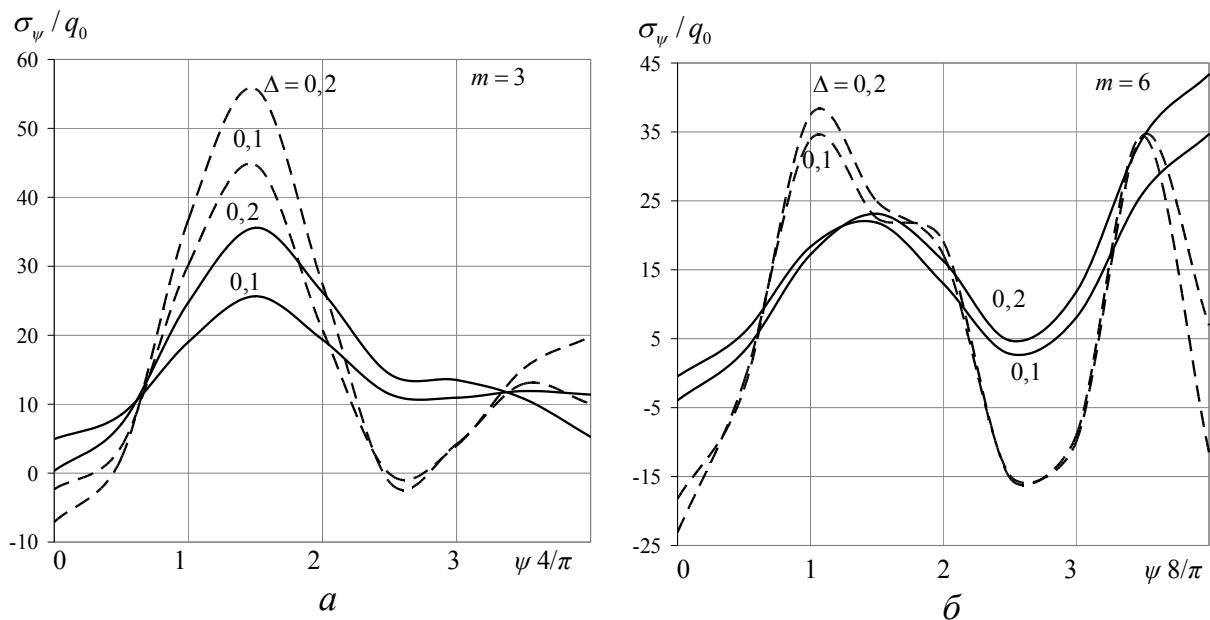


Рис. 5.22 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від степеня еліптичності та амплітуди гофрування вздовж напрямної оболонки

З графіків, представлених на рис. 5.22 *a* видно, що збільшення амплітуди гофрування призводить до збільшення значень напружень в 1,8 разів для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$  та в 1,6 рази для степеня еліптичності  $\Delta = 0,2$  в перерізі  $\psi = \pi / 3$ . Зміна степеня еліптичності призводить до збільшення значень напружень в 1,6 рази для  $\alpha = 1$  та в 1,25 рази – для  $\alpha = 3$ .

З графіків, приведених на рис. 5.22 *б* видно, що для амплітуди гофрування  $\alpha = 1$ , напруження досягають максимуму в перерізах  $\psi = \pi / 3$ , при цьому збільшення степеня еліптичності веде до збільшення значень напружень в 1,3

рази. Для амплітуди гофрування  $\alpha = 3$  максимальних значень напруження досягають в перерізі  $\psi = \pi / 2$  і зі збільшенням степеня еліптичності вони збільшуються приблизно в 1,26 рази.

Розподіл дотичних напружень на торцях (при  $s = 0$ ) вздовж напрямної оболонки в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi$ , в деяких перерізах товщини, що співпадають з граничними лініями шарів (суцільні лінії) та на поверхні відліку (штрихова лінія) для частоти  $m = 3$  і амплітуди гофрування  $\alpha = 1$  наведено на рис. 5.23 для двох значень степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$  (рис. 5.23 *a*) та  $\Delta = 0,2$  (рис. 5.23 *b*).

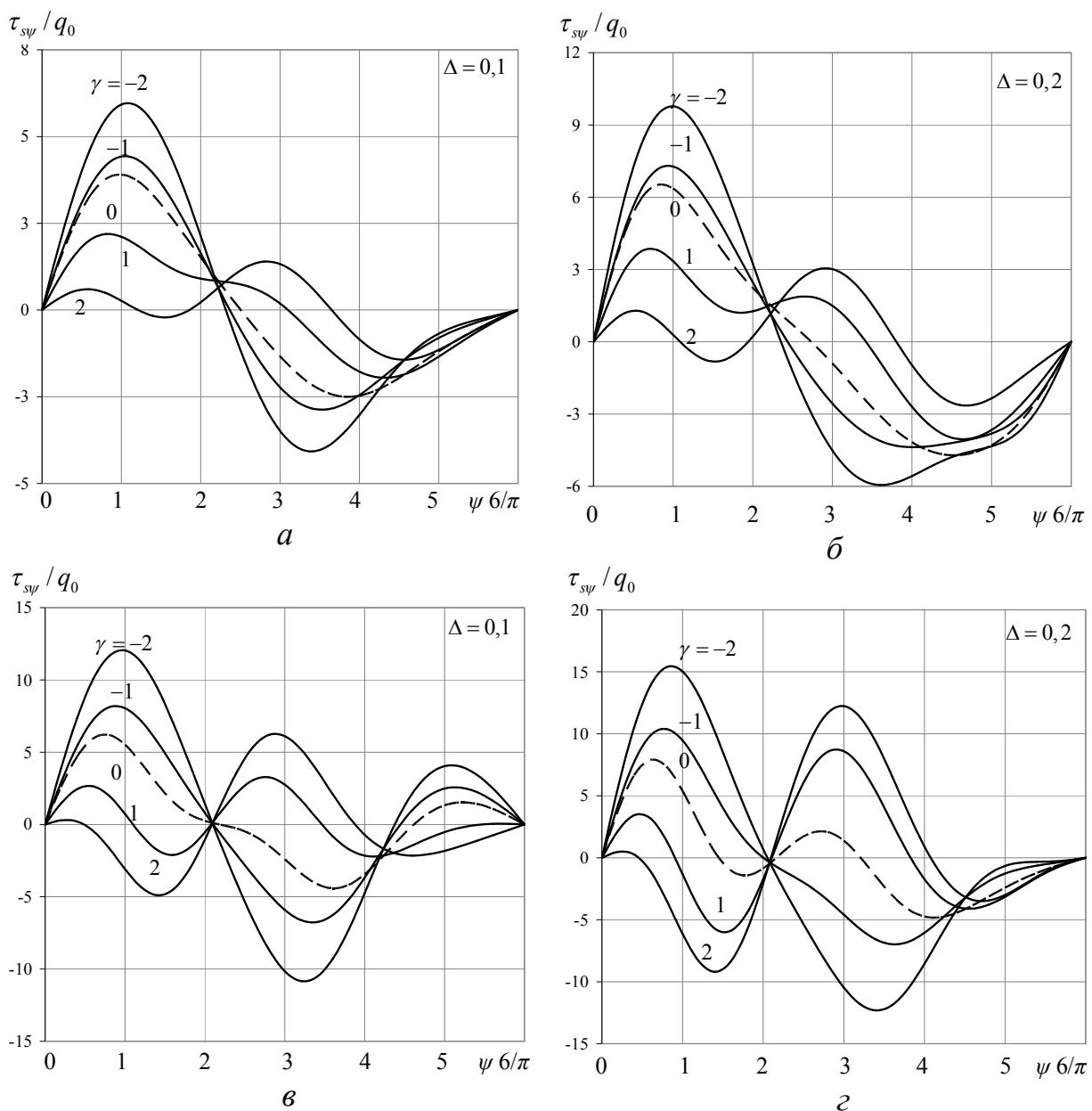


Рис. 5.23 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{sy}$  в залежності від степеня еліптичності вздовж напрямної оболонки

Відповідні графіки розподілу дотичних напружень для амплітуди гофрування  $\alpha = 3$  наведено на рис. 5.23 в, г.

Як видно з наведених графіків розподіл дотичних напружень носить хвилястий синусоподібний характер для всіх значень товщини оболонки.

Збільшення степеня еліптичності призводить до збільшення величини максимальних абсолютних значень напружень  $\tau_{s\psi}$ , що мають місце на внутрішній поверхні оболонки в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi/3$  як для оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,1$  так і для оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0,2$ .

При цьому збільшення амплітуди гофрування призводить до збільшення величини максимальних дотичних напружень майже в 2 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,6 рази для  $\Delta = 0,2$ .

Степінь еліптичності на величину гофрованих еліптичних оболонок впливає таким чином. Для амплітуди гофрування  $\alpha = 1$  при збільшенні параметра  $\Delta$ , відповідні величини напружень  $\tau_{s\psi}$  також збільшуються в 1,7 рази та в 1,3 рази для амплітуди гофрування  $\alpha = 3$ .

Аналогічні графіки для частоти гофрування  $m = 6$  наведені на рис. 5.24.

При збільшенні частоти гофрування вдвічі, збільшується і кількість півхвиль в розподілі дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$ . В їх розподілі спостерігається антисиметрія відносно перерізу  $\psi = \pi/2$ .

Зі збільшенням степеня еліптичності максимальна амплітудна величина дотичних напружень переміщується з внутрішньої на зовнішню поверхню. При цьому за величиною максимальні амплітудні значення дотичних напружень мало відрізняються одне від одного.

Далі проведемо дослідження впливу на напружене-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з поперечним перерізом у вигляді опуклих з'єднаних напівгофрів під дією зовнішнього розподіленого навантаження (5.2) наявності середнього шару, виготовленого з ортотропного матеріалу з

механічними параметрами (5.4). На торцях оболонок мають місце граничні умови (2.9).

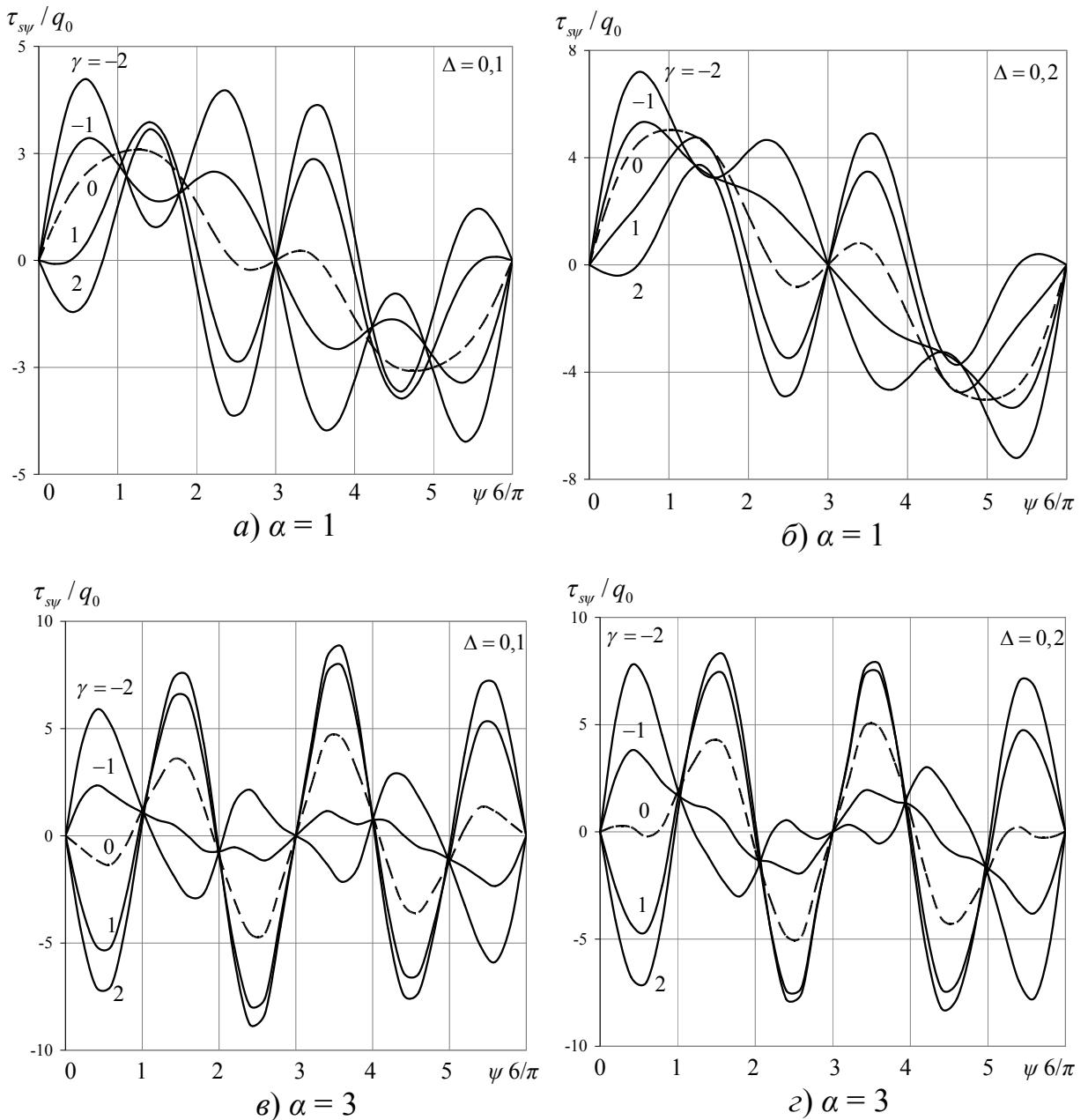


Рис. 5.24 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  в залежності від степеня еліптичності вздовж напрямної оболонки

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , товщина несучих шарів  $h_1 = h_3 = 2$ , товщина заповнювача –  $h_2 = 4$ ; сумарна товщина оболонки  $H = 8$ , радіус нерухомого кола  $A = 16$ , радіус рухомого кола  $a = 2, 4$ , параметр  $\lambda = 0,4$ .

Результати розв'язку наведено у табл. 5.14, табл. 5.15 в середньому перерізі по довжині оболонки. В табл. 5.14 представлені значення напружень  $\sigma_\psi$  в деяких точках товщини оболонки для  $a = 2$  в інтервалі  $\pi / 32 \leq \psi \leq 3 \pi / 32$  та для  $a = 4$  в інтервалі  $\pi / 16 \leq \psi \leq 3 \pi / 16$  для ізотропної оболонки (I) та тришарової оболонки з ортотропним середнім шаром (II). В табл. 5.15 представлені значення переміщень в деяких точках товщини оболонки для  $a = 2$  в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 8$  та для  $a = 4$  в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$  для ізотропної оболонки (I) та за наявності ортотропного середнього шару (II).

З табл. 5.14, табл. 5.15 видно, як наявність ортотропного середнього шару призводить до перерозподілу полів напружень та переміщень по товщині оболонки.

Табл. 5.14 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  в ізотропній та шаруватій оболонках

$\gamma$		$\sigma_\psi 10 / q_0$					
		$a=2$			$a=4$		
		$\psi$					
		$\pi / 32$	$\pi / 16$	$3 \pi / 32$	$\pi / 16$	$\pi / 8$	$3 \pi / 16$
I	-4	27,56	18,57	27,37	5,31	28,16	51,64
	-2	33,85	13,71	17,00	18,01	27,89	35,35
	0	34,55	12,96	16,48	26,33	29,28	27,20
	2	40,01	21,08	16,62	36,65	30,89	21,32
	4	32,99	31,47	19,31	51,13	30,44	16,17
II	-4	13,46	9,49	19,49	-5,81	14,18	35,13
	-2	19,24	7,40	10,20	6,64	14,74	21,46
	0	53,67	21,06	26,37	39,53	43,84	40,34
	2	25,56	11,78	9,24	23,87	18,16	10,22
	4	23,60	20,44	10,81	38,02	18,29	6,05

Табл. 5.15 Розподіл переміщень  $u_\gamma$  в ізотропній та шаруватій оболонках

$\gamma$		$u_\gamma / E_0^{-1} q_0$				
		$a=2$				
		$\psi$				
		0	$\pi / 32$	$\pi / 16$	$3 \pi / 32$	$\pi / 8$
I	-4	33,68	33,01	32,41	33,24	34,00
	-2	33,19	32,55	31,95	32,64	33,30
	0	32,49	32,26	32,22	32,88	33,36
	2	33,74	33,01	32,32	33,14	33,93
	4	26,60	29,68	34,12	34,31	33,15
II	-4	21,29	20,73	19,79	19,43	19,46
	-2	21,20	20,66	19,60	18,91	18,74
	0	20,20	19,82	18,84	17,79	17,33
	2	19,85	19,15	17,77	16,84	16,59
	4	16,15	17,72	19,47	18,37	17,08
$a=4$						
$\psi$						
I		0	$\pi / 16$	$\pi / 8$	$3 \pi / 16$	$\pi / 4$
	-4	81,73	76,60	68,72	56,88	50,62
	-2	82,50	77,01	68,03	55,04	48,33
	0	82,47	77,14	67,68	54,57	47,87
	2	82,25	77,03	67,31	54,71	48,21
	4	81,13	75,93	66,97	55,23	49,13
II	-4	57,47	53,05	44,10	31,15	24,52
	-2	58,56	53,77	43,73	29,81	22,78
	0	58,61	53,45	42,19	27,45	20,13
	2	56,18	51,23	40,11	26,15	19,18
	4	55,39	50,84	40,60	27,48	20,87

Наявність ортотропного середнього шару веде до зменшення показників напруженено-деформованого стану оболонок як для оболонок з чотирма ( $a = 4$ ), так і для оболонок з вісімома напівгофрами ( $a = 2$ ). Так, величина напружень (табл. 5.14) зменшується в 1,4 – 2 рази для  $a = 2$  і в 1,3 – 2,6 рази для  $a = 4$ .

При цьому зі збільшенням кількості напівгофрів величина напружень у їх вершинах на поверхні відліку зменшується майже у 1,5 рази і у 1,8 рази – на внутрішній поверхні та збільшується в 1,7 рази – на зовнішній.

Переміщення за наявності ортотропного середнього шару мають тенденцію до зменшення, незалежно від кількості напівгофрів (табл. 5.15). Так при  $a = 2$  значення переміщень зменшуються в 1,6 – 1,9 рази, а при  $a = 4$  – в 1,4 – 2,4 рази. При цьому збільшення кількості напівгофрів веде до зменшення величини переміщень в зоні з'єднання напівгофрів у 2,7 – 3,4 рази та до збільшення їх значень у вершинах напівгофрів в 1,2 – 1,3 рази.

Величина дотичних напружень, що виникають на торцях оболонок при заданих геометричних та механічних параметрах незначні, порівняно з величиною інших компонентів напруження.

## **5.6 Суперпозиція форм поперечних перерізів для циліндричних ортотропних та тришарових оболонок з ортотропним середнім шаром**

Ефект суперпозиції деяких форм поперечних перерізів для ортотропного матеріалу розглянемо на прикладі циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом при дії внутрішнього тиску, як в розділі 3. Задачу розв'язано за таких вихідних даних:  $l = 60$ ,  $r_0 = 40$ ,  $h = 4$ ,  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ ,  $m = 4$ ,  $a = 4$  з механічними характеристиками матеріалу (5.4).

Результати розв'язання задачі наведено на рис. 5.25 в середньому перерізі довжини вздовж напрямної, для значень нормальних переміщень поверхні відліку (рис. 5.25 *a*) та максимальних значень напружень на внутрішній поверхні оболонки (рис. 5.25 *b*).

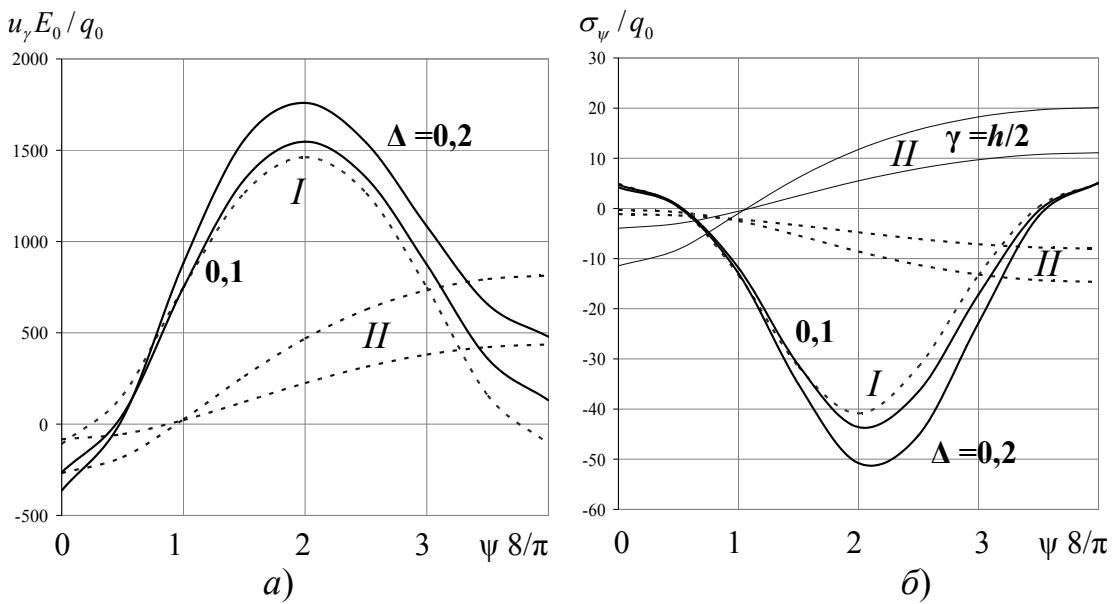


Рис. 5.25 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на НДС ортотропних еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Штриховою лінією I позначені криві для гофрованої кругової оболонки. Штриховою лінією II – для еліптичної оболонки. На рис. 5.25 б суцільною лінією II позначені криві розподілу напружень на зовнішній поверхні еліптичної оболонки, де вони приймають своїх максимальних значень.

Як видно з наведених графіків, порівнюючи їх з відповідними графіками, що характеризують суперпозицію форм поперечних перерізів для ізотропного тіла (рис. 3.17, рис. 3.18), якісно ефект зберігається. Мають місце певні відмінності в кількісному плані. На рис. 5.26 наведено діаграми розподілу переміщень та напружень в різних перерізах напрямної для двох матеріалів. Цифрою I позначені стовпчики для степеня еліптичності  $\Delta = 0,1$ , цифрою II – для  $\Delta = 0,2$ .

Ізотропному матеріалу відповідає суцільна заливка стовпчиків. З наведених діаграм випливає, що у випадку ортотропного матеріалу максимальні значення переміщень зменшуються приблизно в два рази, тоді як максимальні значення напружень збільшуються в півтора рази для розглядуваних значень степеня еліптичності.

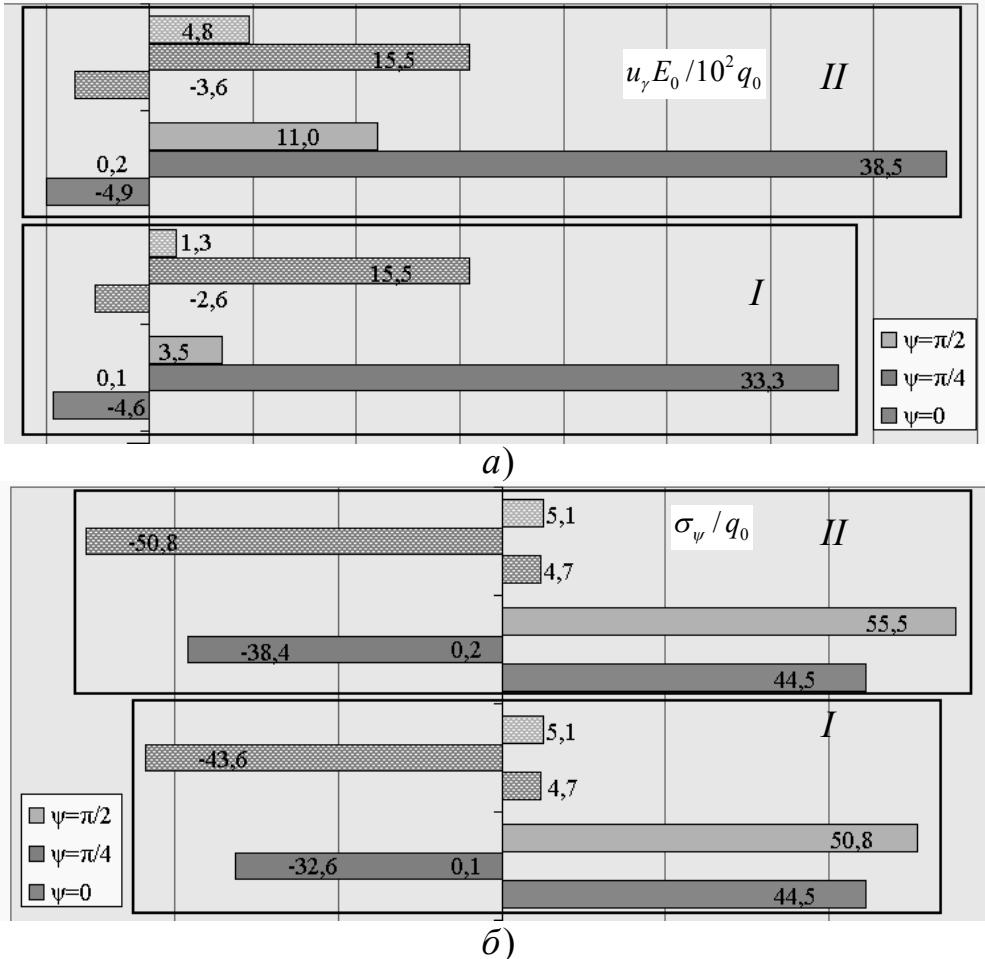


Рис. 5.26 Діаграма переміщень та напружень  $\sigma_\psi$  ефекту суперпозиції двох форм поперечних перерізів для ізотропного та ортотропного матеріалу оболонки

Суперпозицію форм поперечних перерізів для шаруватих оболонок при дії внутрішнього тиску розглянуто на прикладі циліндричної тришарової оболонки симетричної будови. Геометричні параметри оболонки обрано, як в попередньому прикладі. Несучі шари виготовлені з ізотропного матеріалу ( $\nu = 0,3; E = E_0$ ), матеріал заповнювача обрано ортотропним з механічними характеристиками, як в попередньому прикладі. При цьому товщина оболонки  $H = h_1 + h_2 + h_3$ , де  $h_1 = h_3 = 1; h_2 = 2$ .

На рис. 5.27 наведено результати дослідження ефекту суперпозиції двох форм поперечних перерізів для оболонок з двопараметричним відхиленням від кругової форми в середньому перерізі довжини для значень нормальних переміщень (рис. 5.27 a) поверхні відліку та нормальних напружень  $\sigma_\psi$  (рис. 5.27 б) на внутрішній поверхні середнього шару, де вони набувають свого

максимального значення. Analogічно попередній задачі, на графіках маємо такі самі позначення. Суцільні лінії  $\Pi$  на рис. 5.27 б відповідають максимальним значенням напружень еліптичної оболонки на зовнішній поверхні середнього шару.

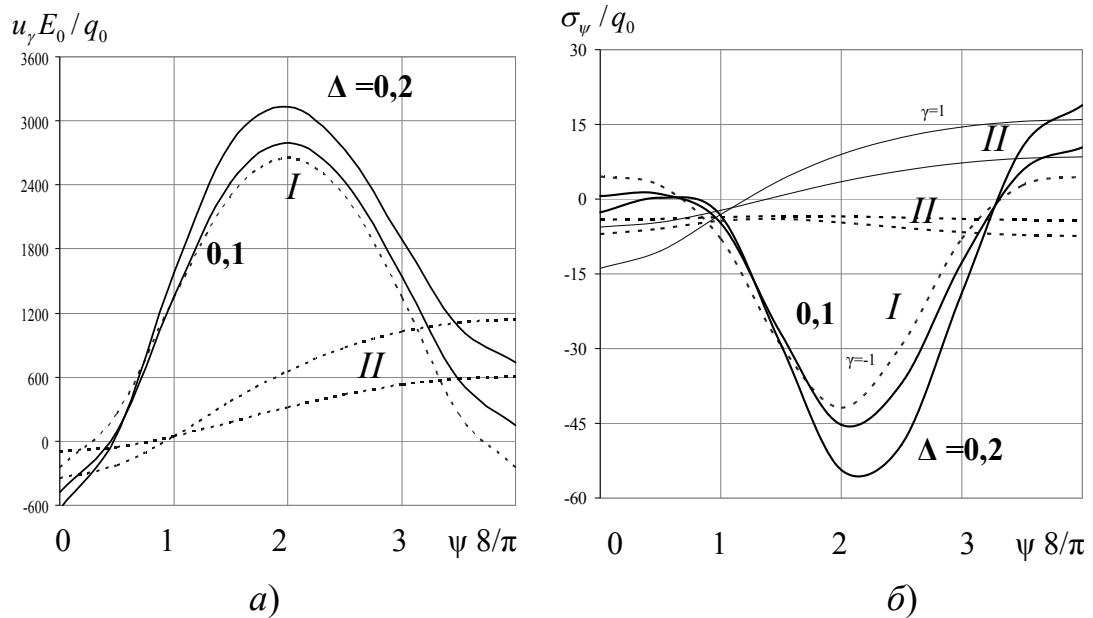


Рис. 5.27 Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на ндс шаруватих еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

З наведених графіків (рис. 5.27) видно, що якісно ефект суперпозиції гофрованої та еліптичної форм поперечних перерізів зберігається. При цьому має місце кількісна відмінність. На рис. 5.28 наведено діаграми розподілу нормальних переміщень та напружень в деяких перерізах напрямної для трьох варіантів матеріалу і структури оболонки – ізотропного і ортотропного матеріалу одношарової оболонки та тришарової з ортотропним середнім шаром.

Смугасті стовпчики діаграми відповідають значенням переміщень і напружень в шаруватих оболонках. З наведених діаграм випливає, що наявність ортотропного середнього шару призводить до зменшення максимальних значень нормальних переміщень в 1,2 рази, порівняно з ізотропним матеріалом і до збільшення їх величини приблизно в 1,8 рази, порівняно з ортотропною одношаровою оболонкою. Значення максимальних нормальних напружень, що

мають місце в шаруватих оболонках в 1,5 рази більші за відповідні значення в ізотропній циліндричній оболонці та на 10 % більші за відповідні значення ортотропної одношарової оболонки.

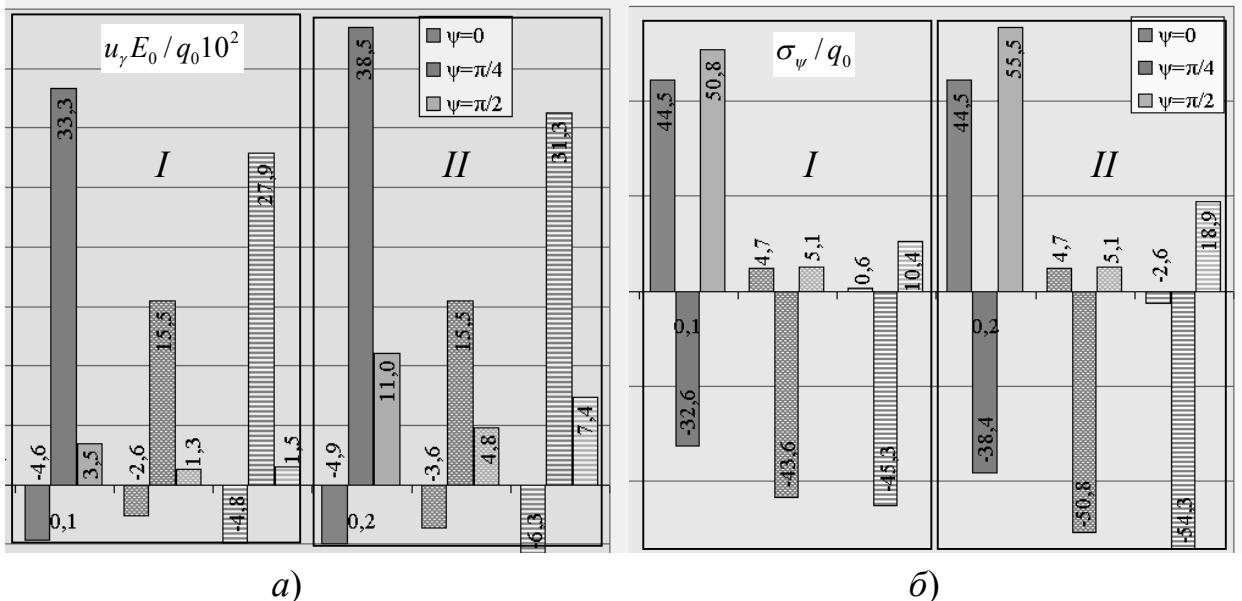


Рис. 5.28 Діаграма переміщень та напружень  $\sigma_\psi$  ефекту суперпозиції двох форм поперечних перерізів для ізотропного та ортотропного матеріалу оболонки

Таким чином, стосовно розподілу нормальних переміщень та напружень можна зробити такий висновок. Ізотропний матеріал характеризується максимальними значеннями нормальних переміщень та мінімальними значеннями нормальних напружень  $\sigma_\psi$ . Для ортотропного матеріалу характерними є мінімальні значення нормальних переміщень, а шаруватій структурі з ортотропним середнім шаром – максимальні значення нормальних напружень  $\sigma_\psi$ .

## 5.7 Оптимізація геометричних параметрів автоцистерни для перевезення світлих нафтопродуктів

На даний час для транспортування енергоносіїв використовують залізничний, водний, автомобільний та трубопровідний транспорт. Найбільш зручним та вигідним видом перевезень небезпечних вантажів є автомобільний транспорт.

Автотранспорт дозволяє перевозити всі види вуглеводневих рідин. Крім того, його використовують для транспортування нафтопродуктів та скраплених вуглеводневих газів.

Автомобільний транспорт використовується для завозу нафтопродуктів споживачам, віддаленим на невелику відстань від джерела постачання (наливних пунктів, складів, баз). Наприклад, автотранспортом відвантажуються нафтопродукти з нафтобаз до автогосподарств, на автозаправні станції та сільські склади пального.

Серед головних переваг автомобільних перевезень можна зазначити такі:

- висока маневреність, що дозволяє швидко зосереджувати транспортні засоби в необхідній кількості в потрібному місці;
- здатність доставки вантажу зі складу відправника до складу одержувача без додаткових перевалок в дорозі;
- більш висока швидкість доставки вантажів, а в деяких випадках і більш короткий шлях перевезення;
- широка сфера застосування за видами сполучень, можливість доставки вантажів невеликими партіями.

Одним із видів автомобільного транспорту, призначених для перевезення небезпечних вантажів, є автоцистерни, цистерни-паливозаправники, паливо-перевізники. До теперішнього часу створено велике розмаїття таких цистерн. Переважну їх частину складають цистерні великої місткості – цистерни з місткістю більш  $20\text{ m}^3$ .

Найчастіше автомобільна цистерна великої місткості являє собою напівпричіп для сідельного тягача, тобто цистерну несучого типу і конструктивно виконується у вигляді циліндричної оболонки зі ступінчастим змінюваним по довжині поперечним перерізом, або з конічним переходом від малого перерізу (в передній частині цистерни) до більшого (в задній частині). Якщо цистерна монтується на рамі автомобільного шасі [127], її поперечний переріз по довжині не змінюється.

Загальним для всіх видів цистерн даного призначення є той факт, що всі вони мають некругову форму поперечного перерізу (рис. 5.29). Така форма порівняно з круговою дозволяє більш раціональним чином використовувати допустиму ширину дорожнього габариту, завдяки чому висота цистерни та її ширина можуть бути меншими, ніж у цистерни такого самого об'єму, але з круговим поперечним перерізом. Цей факт є важливим при забезпеченні необхідних показників маневрування транспортного засобу та його стійкості від перекидання в поперечному перерізі.



Рис. 5.29 Автоцистерна для перевезення нафтопродуктів

В загальному випадку корпус цистерни складається з обичайки, днищ та хвилерізів, що з'єднані між собою кільцевими швами. Обичайка – конічний чи циліндричний барабан без днищ, що виготовляється з листового матеріалу, заготовка для цистерн, котлів, резервуарів та інших листових металоконструкцій (рис. 5.30).

Основна функція обичайки – бути огорожувальною конструкцією ємності для зберігання та перевезення будь-яких рідин та газів, або для здійснення певних технологічних процесів; труби для транспортування рідин, газів та сипучих тіл. В залежності від призначення визначаються і використовувані матеріали. Це можуть бути вуглецеві та низьколеговані сталі, теплотривкі, високоміцні, нержавіючі чи жароміцні сталі; двошарові сталі; кольорові сплави – алюмінієві або титанові; біметали "сталь-алюміній"; склопластики та ін.



Рис. 5.30 Виготовлення обичайки цистерни

Експлуатаційні характеристики зварювальних швів також мають відповідати основним функціям: з одного боку, вони мають забезпечити загальну міцність конструкції, а з іншого, вони повинні бути герметичними та витримувати відповідний тиск.

В даному розділі проводиться дослідження напруженого стану обичайок некругового (еліптичного) поперечного перерізу без технологічних властивостей з метою оптимізації форми поперечного перерізу при збереженні об'єму транспортуваних світлих нафтопродуктів, виготовлених з різних матеріалів.

Серед основних властивостей матеріалів для виготовлення обичайки можна виділити наступні.

1. Сталь 09Г2С (17ГС, ST-52). В основному ця марка сталі призначена для застосування її у зварювальних конструкціях. Перевага цієї марки сталі полягає в тому, що вона не схильна до відпускої крихкості, іншими словами її в'язкість не зменшується після процесу відпуску. Сталь також більш стійко переносить перегрівання та менш схильна до появи тріщин. Серед сфер застосування випуск елементів та деталей зварювальних металевих конструкцій, які можуть використовуватись за значних температурних перепадах; виробництво листових конструкцій в нафтовій та хімічній промисловості, суднобудуванні та машинобудуванні.

2. Сталі AiSi 304, AiSi 321, AiSi 316T та корозійностійкі. Це аустенітна сталь, до складу якої входить зменшена кількість вуглецю. Сталь цієї марки використовується найбільш часто, тому що вона виділяється певною універсальністю характеристик, що розширяють спектр використання сталі. Вона застосовується при випуску оснащення для перевезення і зберігання субпродуктів, молока, пива, вина та інших напоїв. Подібна сталь – найбільш використовуваний матеріал для ремонту, наприклад, невідкладного зварювання на шляху руху автопоїздів, наварювання ребер жорсткості, капітального ремонту. Одночасно, використання такого матеріалу призводить до великої маси причепів, проте, така сталь достатньо економічний матеріал, товщина стінки може сягати 4 – 5 мм.

3. Алюміній (5083 Alcoa). Стінки автомобільних цистерн, виконаних з алюмінієвого сплаву, значно товщі стальних аналогів. В середньому їх товщина може доходити до 6 мм. Порівняно зі сталлю, алюміній має певні переваги, серед яких: незначна вага, гарний опір процесам корозії, велика степінь надійності, довгий строк служби та зносостійкість. Серед недоліків – алюмінієва цистерна у випадку термінового ремонту та нестандартних ситуаціях менше піддається ремонту.

4. Склопластик. Склопластики мають велику стійкість до впливу агресивних середовищ (кислот, їдкого калію, хлорного заліза тощо); велику питому механічну міцність; гарну ремонтопридатність; стійкість до біообростання пліснявою та мохом; гарну стійкість до дії ультрафіолету.

Механічні характеристики розглянутих матеріалів наведені в табл. 5.17.

Розглянемо цистерну кругового та еліптичного поперечного перерізу (рис. 5.31) для перевезення світлих нафтопродуктів з максимальним об'ємом перевезеного вантажу  $17\text{ m}^3$ .

Згідно загальних положень технічного нагляду за цистернами для зберігання та перевезення світлих нафтопродуктів, цистерни мають бути випробувані на міцність внутрішнім тиском, що складає не менше 1,5 від розрахункового тиску.

Табл. 5.17 Механічні характеристики матеріалів цистерни

Матеріал	Границя текучості $\sigma_m$ , МПа	Тимчасовий опір розриву $\sigma_s$ , МПа	Модуль Юнга $E \cdot 10^6$ МПа	Коефіцієнт Пуассона, $\nu$
Сталь 09Г2С	345	490	0,2119	0,29
Нержавіюча сталь AiSi 304	310	600	0,2	0,3
Алюмінієвий сплав (АМГ 5М)	230	315	0,071	0,33
Склопластик (КАСТ-В)	245	-	2,3536	0,15

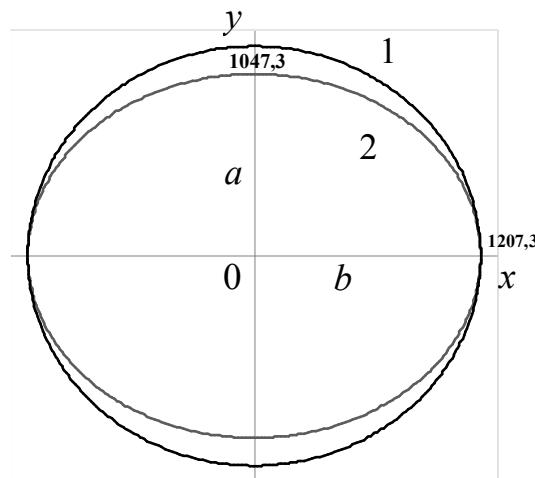


Рис. 5.31 Поперечний переріз цистерни круговий (1) та еліптичний (2)

Поперечний переріз поверхні відліку визначається рівняннями в параметричній формі (2.29) у відповідній системі координат  $s, \theta, \gamma$ , як у розділі 2.4. Вважаємо цистерну шарнірно закріпленою на торцях.

Для визначення розрахункового тиску в цистерні приймаємо, що цистерна встановлена на шасі автомобіля МАЗ. Згідно розрахунків, наведених в [226],

геометрична місткість цистерни складає  $V_\Gamma = 21,9518 \text{ m}^3$ . Для визначення необхідної довжини цистерни скористаємося формулою

$$l = \frac{V_\Gamma}{S}, \quad (5.8)$$

де  $S = \pi a b$  – площа поперечного перерізу цистерни.

В табл. 5.18 наведено геометричні характеристики цистерни в залежності від відхилення поперечного перерізу від кругової форми, відсоток зменшення габаритів цистерни за висотою (%), площа поперечного перерізу ( $S$ ), довжина  $l$ , обчислена за формулою (5.8) та прийнята довжина цистерни  $L$ .

Табл. 5.18 Геометричні характеристики цистерни (внутрішня поверхня)

№	$b$	$a$	%	$S$	$V_\Gamma$	$l$	$L$
1	1207,3	1207,3	-	4,596076	21,95178	4,7762	<b>5</b>
2	1207,3	1187,3	2	4,445339	21,95178	4,938156	<b>5</b>
3	1207,3	1167,3	3	4,297116	21,95178	5,108492	<b>5</b>
4	1207,3	1147,3	5	4,151405	21,95178	5,287795	<b>5</b>
5	1207,3	1127,3	7	4,008208	21,95178	5,476707	<b>5</b>
6	1207,3	1107,3	8	3,867524	21,95178	5,675926	<b>6</b>
7	1207,3	1087,3	10	3,729353	21,95178	5,886216	<b>6</b>
8	1207,3	1067,3	12	3,593696	21,95178	6,108413	<b>6</b>
9	1207,3	1047,3	13	3,460552	21,95178	6,343434	<b>6</b>

Для матеріалу цистерни оберемо спочатку низьколеговану вуглеводневу сталь 09Г2С з відповідними механічними характеристиками (табл. 5.17). Допустимі напруження визначаються таким чином

$$[\sigma] = \eta \cdot \sigma, \quad (5.9)$$

де  $\sigma$  - нормативне допустиме напруження,  $\eta$  - коефіцієнт, що враховує умови експлуатації цистерни.

Для розрахунків приймаємо  $\eta = 0,8$ . За нормативне допустиме напруження обираємо найбільше з двох значень

$$\sigma_1 \leq 0,75 \cdot \sigma_m \text{ та } \sigma_2 \leq 0,5 \cdot \sigma_e.$$

Тоді  $\sigma_1 = 0,75 \cdot 345 = 258,75 \text{ MPa}$ ;  $\sigma_2 = 0,5 \cdot 490 = 245 \text{ MPa}$ , таким чином  $\sigma \leq 258,75 \text{ MPa}$ . Згідно формули (5.9) допустиме напруження буде  $[\sigma] = 0,8 \cdot 258,75 = 270 \text{ MPa}$ .

Виходячи з відповідних параметрів розрахунку робочого тиску для цистерн з геометричними характеристиками (табл. 5.18) та норм необхідного внутрішнього тиску, приймаємо для внутрішнього тиску  $q_0 = 0,28 \text{ MPa}$  ( $q = q_0 \sin \pi s/L$ ).

Для товщини стінки цистерни (обичайки), діаметр якої перевищує 1,8 м [127] приймаємо 6 мм на корозію – 3 мм, тобто остаточна товщина стінки  $h = 9 \text{ mm}$ .

Результати напруженого стану розглядуваних цистерн для значень нормальніх напружень наведені в табл. 8.3 в середньому перерізі довжини, де вони приймають максимальних значень на зовнішній поверхні в околі перерізу максимальної жорсткості. Для перевірки цистерни на міцність використовується четверта теорія міцності – критерій питомої потенціальної енергії, де еквівалентні напруження обчислюються таким чином

$$\sigma_{IV} = \sqrt{0,5 \left[ (\sigma_\theta - \sigma_s)^2 + (\sigma_s - \sigma_\gamma)^2 + (\sigma_\gamma - \sigma_\theta)^2 \right]}.$$

З результатів, наведених у табл. 5.19 видно, що умова міцності виконується для 8 варіантів поперечних перерізів. Таким чином, при використанні сталеної

обичайки можна зменшити геометричні розміри поперечного перерізу по висоті на 12 %.

Табл. 5.19 Значення напружень та виконання умови міцності для стальної цистерни

№	$L, m$	$\sigma_{\theta}, MPa$	$\sigma_s, MPa$	$\sigma_{\gamma}, MPa$	$\sigma_{IV}, MPa$	$[\sigma], MPa$	Умова міцності
1	<b>5</b>	37,447	0,088	0,28	37,402	207	$37,402 \leq 207$
2		40,199	5,779	0,28	37,643	207	$37,643 \leq 207$
3		44,572	12,028	0,28	39,941	207	$39,941 \leq 207$
4		50,798	18,926	0,28	44,466	207	$44,466 \leq 207$
5		59,110	26,518	0,28	51,281	207	$51,281 \leq 207$
6	<b>6</b>	113,078	61,466	0,28	98,052	207	$98,052 \leq 207$
7		147,164	79,824	0,28	127,601	207	$127,601 \leq 207$
8		189,493	100,786	0,28	164,217	207	$164,217 \leq 207$
9		241,092	124,663	0,28	208,832	207	$208,832 > 207$

Далі, в якості матеріалу обичайки, оберемо алюмінієві сплави АМГ 5М з механічними параметрами, що наведені в табл. (5.17). Згідно формули (5.9) допустимі напруження будуть

$$\sigma_1 = 0,75 \cdot 230 = 172,5 MPa; \sigma_2 = 0,5 \cdot 315 = 157,5 MPa,$$

таким чином  $\sigma \leq 172,5 MPa$ . Тоді  $[\sigma] = 0,8 \cdot 172,5 = 138 MPa$ .

Результати, наведені в табл. 5.20 свідчать про те, що не порушуючи критерію міцності можливо зменшити висоту цистерни, виготовленої з алюмінієвого сплаву на 7 %.

Розглянемо далі цистерни, виготовлені із склопластику з відповідними механічними параметрами (табл. 5.17). Таким характеристикам відповідають склопластики КАСТ-В (ГОСТ 10292-62). В табл. 5.21 наведено характеристики напруженого стану розглядуваних цистерн.

Табл. 5.20 Значення напружень та виконання умови міцності для алюмінієвої цистерни

№	$L, m$	$\sigma_{\theta}, MPa$	$\sigma_s, MPa$	$\sigma_{\gamma}, MPa$	$\sigma_{IV}, MPa$	$[\sigma], MPa$	Умова міцності
1	<b>5</b>	56,231	0,091	0,28	56,186	138	$56,186 \leq 138$
2		61,081	9,474	0,28	56,939	138	$56,939 \leq 138$
3		69,569	20,222	0,28	61,984	138	$61,984 \leq 138$
4		82,153	32,495	0,28	71,662	138	$71,662 \leq 138$
5		99,340	26,470	0,28	86,090	138	$86,090 v \leq 138$
6	<b>6</b>	169,750	96,518	0,28	147,518	138	$147,518 > 138$

Табл. 5.21 Значення напружень та виконання умови міцності для цистерни, виготовленої із склопластику

№	$L, m$	$\sigma_{\theta}, MPa$	$\sigma_s, MPa$	$\sigma_{\gamma}, MPa$	$\sigma_{IV}, MPa$	$[\sigma], MPa$	Умова міцності
1	<b>5</b>	56,213	0,083	0,28	56,172	68	$56,172 \leq 68$
2		60,694	8,660	0,28	56,861	68	$56,861 \leq 68$
3		68,521	17,909	0,28	61,553	68	$61,553 \leq 68$
4		80,115	27,901	0,28	70,438	68	$70,438 \geq 68$

Таким чином, використовуючи склопластик для виготовлення цистерн із розглядуваними параметрами, можна зменшити висоту цистерни лише на 3 %.

Для транспортування нафтопродуктів з метою запобігання надмірного нагріву продуктів, що перевозяться, використовують цистерни з теплоізоляційним корпусом. Термоізоляція дозволяє збільшити відстань транспортування нафтопродуктів по відношенню до існуючих на сьогоднішній день. При цьому, незважаючи на збільшену термоізоляцію (товщина термоізоляції 50 мм), загальна вага цистерни змінюється не суттєво (рис. 5.32).

Для термоізоляції автоцистерн для нафтопродуктів останнім часом широко використовують поліуретанові матеріали. Пінополіуретанове безшовне покриття володіє найнижчим коефіцієнтом теплопровідності, порівняно з іншими матеріалами.



Рис. 5.32 Будова поперечного перерізу цистерни

Теплоізоляція відбувається шляхом заливання піни, така технологія дозволяє гарантувати якісне заповнення всього простору між зовнішньою обшивкою та внутрішньою оболонкою цистерни. На відміну від технології утеплення за допомогою мінеральної вати дана "сендвіч-конструкція" цистерни отримує додаткову міцність і кращу ремонтопридатність. Володіючи гарною адгезією до металу, поліуретанова піна добре тримається на внутрішній поверхні ємності, забезпечує додаткову гідроізоляцію та запобігає виникненню конденсату. Утеплювач виконує роль ефективного повітряного бар'єра, запобігає проходженню теплого повітря через конструкцію, попереджає корозію металевих поверхонь та розвиток грибка і плісняви між ємністю та зовнішньою обшивкою. Крім того, поліуретанова піна екологічно безпечний продукт и не викликає алергії.

Для зовнішньої обшивки обрано нержавіючу сталь AISI 304. Згідно формули (5.9) допустимі напруження для нержавіючої сталі будуть (табл. 5.17)

$$\sigma_1 = 0,75 \cdot 310 = 232,5 \text{ MPa}; \sigma_2 = 0,5 \cdot 600 = 300 \text{ MPa},$$

таким чином

$$\sigma \leq 300 \text{ MPa}. \text{ Тоді } [\sigma] = 0,8 \cdot 300 = 240 \text{ MPa}.$$

Для середнього шару – теплоізоляції (пінопласт ПС-1) прийнято такі механічні характеристики: модуль Юнга  $E = 98 \text{ MPa}$  [44, 197], коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ . Коефіцієнт Пуассона для пінопластів залежить не тільки від уявної густини, але і від видовженості комірок. Замість коефіцієнта Пуассона використовують коефіцієнт поперечної деформації, що зумовлене специфікою їх коміркової структури. Для полістирольних пінопластів його значення знаходиться в межах  $0,1 - 0,35$  і залежить від уявної густини коміркової будови.

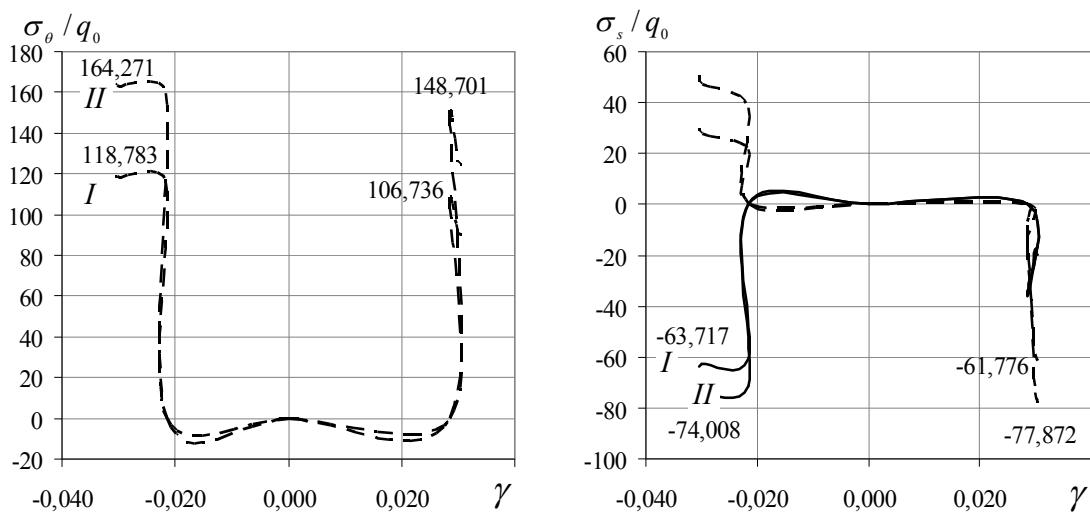


Рис. 5.33 Показники напруженого стану цистерни з теплоізоляцією

На рис. 5.33 наведено графіки розподілу напружень  $\sigma_\theta$  та  $\sigma_s$  в середньому перерізі по довжині цистерни, де вони приймають своїх максимальних значень в зоні максимальної жорсткості для  $\theta = 0$  (суцільна лінія) та в зоні мінімальної жорсткості  $\theta = \pi / 2$  (штрихована лінія) вздовж товщини. Максимальних значень напруження  $\sigma_\theta$  досягають в зоні мінімальної жорсткості на внутрішній частині обичайки та обшивки. При цьому напруження  $\sigma_s$  досягають максимальних значень в зоні максимальної жорсткості на внутрішній поверхні обичайки та в зоні мінімальної жорсткості на зовнішній поверхні обшивки цистерни. Цифрами позначені криві, що відповідають двом варіантам меншої півосі еліпса:  $I$  – для  $a = 1067,3 \text{ mm}$ ;  $II$  – для  $a = 1047,3 \text{ mm}$ . Умова міцності зберігається як для сталевої внутрішньої частини, так і для нержавіючої

зовнішньої обшивки для варіанту I і порушується для варіанту II для сталевої обичайки (табл. 5.21).

Табл. 5.21 Максимальні значення напружень та виконання умови міцності для цистерни, з теплоізоляцією

Шар	Варіант	$\sigma_{\theta}$ , МПа	$\sigma_s$ , МПа	$\sigma_{\gamma}$ , МПа	$\sigma_{IV}$ , МПа	$[\sigma]$ , МПа	Умова міцності
Обичайка							
Без ізоляції		189,493	100,786	0,28	164,217	207	$164,217 \leq 207$
1	I	118,783	- 67,717	0,28	160,219	207	$160,219 \leq 207$
2	II	164,271	-74,008	0,28	211,233	207	$211,233 > 207$
Обшивка							
1	I	86,112	- 61,776	0,28	128,651	240	$128,651 \leq 240$
2	II	119,659	-77,872	0,28	172,338	240	$172,338 \leq 240$

## 5.8 Результати та висновки

- Із використанням підходу, що базується на використанні чисельно-аналітичних методів відокремлення змінних, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та дискретної ортогоналізації, який буде адаптовано до розв'язування задач про напруженій стан некругових нетонких циліндричних оболонок, що мають шарувату неоднорідну по товщині структуру, розв'язано задачу та проведено аналіз напруженого стану оболонок зазначеного класу в залежності від механічних параметрів матеріалу та геометричних характеристик оболонок, що розглядаються. Обчислювальний процес побудований таким чином, що дозволяє дослідити напружено-деформований стан оболонок як одношарових так і багатошарових, враховуючи параметри ортотропії та геометричні характеристики оболонок. При цьому за рахунок вибору розв'язувальних функцій умови спряження шарів виконуються автоматично.

2. Проведено деякі оцінки достовірності отримуваних результатів, зокрема, для циліндричних оболонок з круговим поперечним перерізом, виготовлених з ортотропного матеріалу, для яких існує точний розв'язок. Було показано, що застосування розглядуваної методики дозволяє отримати розв'язок задачі, похибка обчислень якої не перевищує 5 %. З іншого боку, розв'язано задачу про напружений стан тришарової оболонки симетричної будови з ізотропними зовнішніми шарами та ортотропним середнім шаром на основі двох підходів. При цьому отримано розв'язки з похибкою, що не перевищує 5 %.
3. Було досліджено напружене-деформований стан циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом (еліптичних, гофрованих, еліптичних гофрованих, та у вигляді з'єднаних напівгофрів), виготовлених з трансверсально-ізотропного та ортотропного матеріалу. Проведено аналіз впливу параметрів ортотропії на напружений стан таких оболонок.
4. Розглянуто тришарові циліндричні оболонки складної геометрії, що складені з шарів, які взаємодіють без проковзування та відриву з середнім шаром, виготовленим з трансверсально-ізотропного чи ортотропного матеріалу. Для еліптичних циліндричних оболонок досліджено вплив розташування шарів на характеристики їх напружене-деформованого стану.
5. Досліджено суперпозицію еліптичної та гофрованої форм поперечних перерізів для циліндричних оболонок з двопараметричним відхиленням поперечного перерізу від кругової форми, виготовлених з ортотропного матеріалу, та тришарових оболонок з ортотропним середнім шаром симетричної будови, при дії внутрішнього тиску.
6. Встановлено, що для ізотропного матеріалу мають місце максимальні нормальні переміщення та мінімальні нормальні напруження; для ортотропного матеріалу – мінімальні нормальні переміщення, а для шаруватої структури – максимальні нормальні напруження.
7. З використанням розробленої методики до розв'язання задач статики лінійної теорії пружності для циліндричних оболонок складної геометрії та структури, що базується на використанні апроксимації функцій дискретними

- рядами Фур'є, розв'язано задачу про напружений стан цистерни некругового поперечного перерізу, що знаходиться під дією внутрішнього тиску без врахування технологічних властивостей.
8. Розглянуто еліптичні форми поперечного перерізу обичайки цистерни при збереженні горизонтальних габаритів кругової форми з метою оптимізації розмірів цистерни за її висотою, при цьому довжину відповідної цистерни обрано таким чином, щоб загальний об'єм кругової і еліптичної цистерн зберігався.
  9. На основі четвертої теорії міцності (критерії питомої потенціальної енергії) перевірено обрані обичайки цистерни еліптичної форми на міцність та встановлено можливі граници зменшення висоти цистерни для трьох видів матеріалу обичайки: сталі, алюмінієвого сплаву та склопластику.
  10. Розраховано напружений стан тришарової цистерни із стальною обичайкою, теплоізоляцією та нержавіючою обшивкою, при цьому показано, що наявність додаткових шарів збільшує міцність обичайки цистерни.

## Розділ 6

### АНАЛІЗ ВПЛИВУ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕКРУГОВИХ НЕТОНКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

В багатьох застосуваннях разом з рівномірним та нерівномірним навантаженням, що діють на елементи конструкцій у вигляді оболонок та оболонкових систем різної товщини, приходиться мати справу з дією локального навантаження, тобто, коли розміри ділянки прикладання навантаження незначні порівняно з загальними розмірами оболонки [58]. В роботах [125, 123, 130, 267], розглядалися задачі про деформацію оболонок при дії зосередженого навантаження, розв'язок яких було знайдено за допомогою асимптотичного методу. При цьому вважалось, що інформація, яка отримана в результаті розв'язування останньої задачі, може бути використана для певної оцінки напруженого стану оболонок при локальному навантаженні. Однак, в книзі В. Феодос'єва [245] було зазначено, що заміна розподіленого навантаження зосередженою силою можлива лише в тих випадках, коли аналізується напружений стан всієї системи.

Задачі про вплив на оболонку локального навантаження досить складні [123]. Збіжність рядів Фур'є, за допомогою яких апроксимується задане локальне навантаження та шукані величини, може виявитись повільною. Тому для досягнення необхідної точності, потрібно враховувати значну кількість членів рядів.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* В роботах [97, 212, 209, 221, 225] досліджено вплив виду локального навантаження та інтервалу його прикладення на напружений стан гофрованих в поперечному перерізі ізотропних однорідних і неоднорідних по товщині циліндрів. В роботі [219]

розглянуто напружений стан еліптичних порожнистих циліндрів з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження в залежності від кількості ділянок його прикладання. Задачу про вплив локального навантаження на напружене-деформований стан овальних порожнистих циліндрів розв'язано в роботі [206].

Додатково питання про дію локального навантаження на розподіл факторів напружене-деформованого стану некругових порожнистих циліндрів розглядались в роботах [204, 217, 224]

В даному розділі розв'язано задачу та проведено дослідження впливу локального навантаження на напружений стан одно- та тришарових нетонких циліндричних оболонок некругової форми поперечного перерізу, виготовлених з ізотропного та ортотропного матеріалу. В підрозділі 6.1 наведено постановку задачі та проведено деякі оцінки достовірності отримуваних результатів. Дію локального навантаження на характеристики напруженого-деформованого стану гофрованих в поперечному перерізі циліндричних оболонок розглянуто в підрозділі 6.2. Вплив зміни проміжку прикладання локального навантаження на напружений стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок досліджується в підрозділі 6.3. Аналіз напружене-деформованого стану нетонких циліндричних оболонок з увігнутим гофрованим поперечним перерізом при дії локального навантаження проведено в підрозділі 6.4. Дію локального навантаження на овальні циліндричні оболонки розглянуто в підрозділі 6.5.

Результати розв'язування задач отримано у вигляді графіків та таблиць розподілу полів переміщень і напружень.

## **6.1 Постановка задачі та оцінка точності отримуваних результатів**

В загальному випадку розглядаються шаруваті некругові нетонкі циліндричні оболонки, що складені із шарів, які взаємодіють між собою без проковзування та відриву. На поверхні контакту  $i$ -того та  $i+1$ -ого шару виконується умова спряження шарів (2.1). На торцях оболонок мають місце граничні умови (2.9),

що відповідають наявності діафрагми, абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкої при виході з неї.

Оболонки знаходяться під дією локального навантаження  $q_\gamma = q_\gamma(s, \psi)$ , прикладеного на частині зовнішньої бічної поверхні. Границі умови (2.24) для розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь (2.23) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0; \\ \gamma = \gamma_q : \quad \sigma_{\gamma,n,k} &= q_{\gamma,n,k}^+(\psi); \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Розглянуто два варіанти прикладання локального навантаження: на двох та на чотирьох ділянках бічної поверхні.

Локальне навантаження, прикладене на двох ділянках бічної поверхні має вигляд

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} -q_0(\cos\psi - \cos\beta), & 2\pi - \beta \leq \psi \leq \beta; \\ 0, & \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ q_0(\cos\psi + \cos\beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases} \quad (6.2)$$

де  $\psi$  – центральний кут в поперечному перерізі. Таке навантаження можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q_\gamma(\psi) = \frac{2q_0}{\pi} \left[ \sin\beta - \beta \cos\beta + \sum_{k=2,4,\dots}^{2K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2\sin k\beta \cos\beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right]. \quad (6.3)$$

Параметр  $\beta$  характеризує інтервал прикладання локального навантаження. Якщо розглядається чотири ділянки прикладання локального навантаження

$$q_\gamma(\psi) = \begin{cases} q_0(\cos\psi - \cos\beta), & 0 \leq \psi \leq \beta; 2\pi - \beta \leq \psi \leq 2\pi; \\ 0, & \beta \leq \psi \leq \pi/2 - \beta; \\ q_0(\sin\psi - \cos\beta), & \pi/2 - \beta \leq \psi \leq \pi/2 + \beta; \\ 0, & \pi/2 + \beta \leq \psi \leq \pi - \beta; \\ -q_0(\cos\psi + \cos\beta), & \pi - \beta \leq \psi \leq \pi + \beta; \\ 0, & \pi + \beta \leq \psi \leq 3\pi/2 - \beta; \\ -q_0(\sin\psi + \cos\beta), & 3\pi/2 - \beta \leq \psi \leq 3\pi/2 + \beta; \\ 0, & 3\pi/2 + \beta \leq \psi \leq 2\pi - \beta, \end{cases} \quad (6.4)$$

то його можна подати у вигляді ряду Фур'є таким чином:

$$q_\gamma(\psi) = \frac{4q_0}{\pi} \left[ \sin\beta - \beta \cos\beta + \sum_{k=4,8,\dots}^{4K} \left( \frac{\sin(k-1)\beta}{k-1} - \frac{2 \sin k\beta \cos\beta}{k} + \frac{\sin(k+1)\beta}{k+1} \right) \cos k\psi \right]. \quad (6.5)$$

На рис. 6.1 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при двох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 6.1 *a*) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 6.1 *б*) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/2]$ . На рис. 6.2 наведено графіки частини локального навантаження дійсного та апроксимованого рядами Фур'є при чотирьох ділянках прикладання для інтервалу  $\beta = \pi/8$  (рис. 6.2 *a*) та  $\beta = \pi/32$  (рис. 6.2 *б*) в області зміни кутового параметра  $\psi \in [0; \pi/4]$ .

Як видно з наведених на рис. 6.1 та рис. 6.2 графіків, більшої кількості членів рядів (6.3), (6.5) апроксимоване навантаження потребує не для способу його прикладання, а для довжини інтервалу. Чим менший інтервал прикладання локального навантаження, тим більшої кількості членів відповідних рядів Фур'є він потребує.

При врахуванні 20 – 22 членів рядів (6.3), (6.5) для інтервалу  $\beta = \pi/8$  максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,84 % – 0,78 %, що свідчить про достатню точність такого подання.

Для інтервалу  $\beta = \pi / 32$  при врахуванні 28 членів рядів (6.3), (6.5) максимальне значення навантаження при  $\psi = 0$  відрізняється від заданого на 0,75 %, що свідчить про достатню точність такого подання.

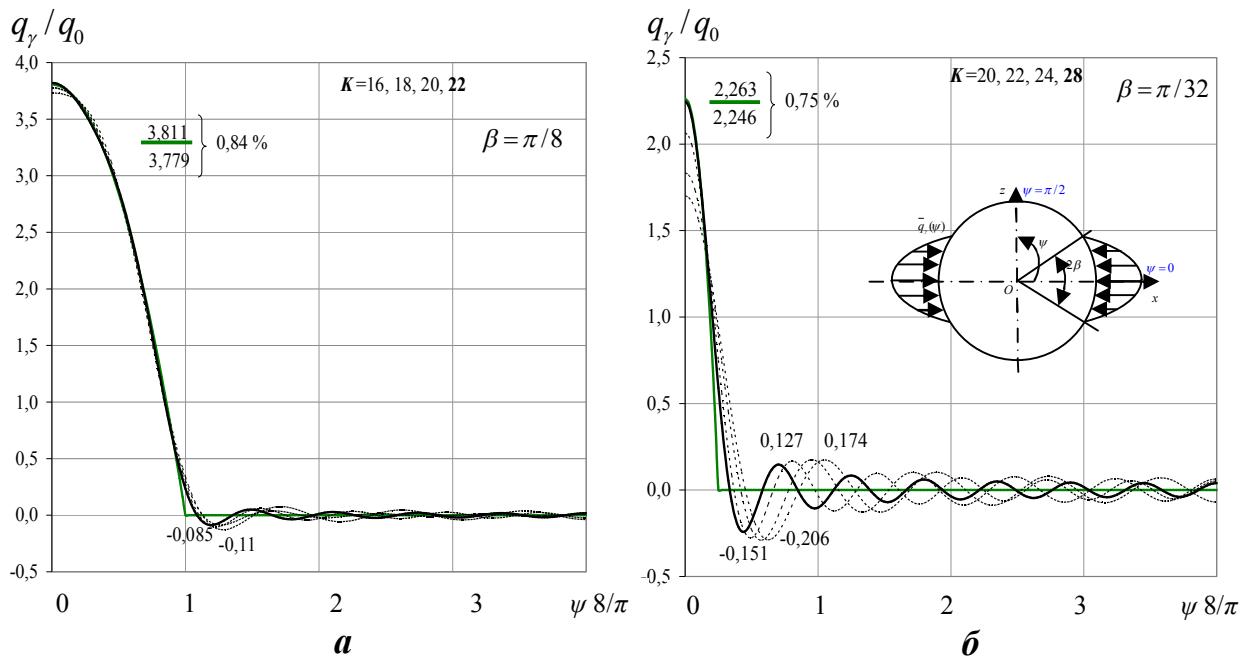


Рис. 6.1 Локальне навантаження дійсне та апроксимоване рядом Фур'є для двох ділянок прикладання

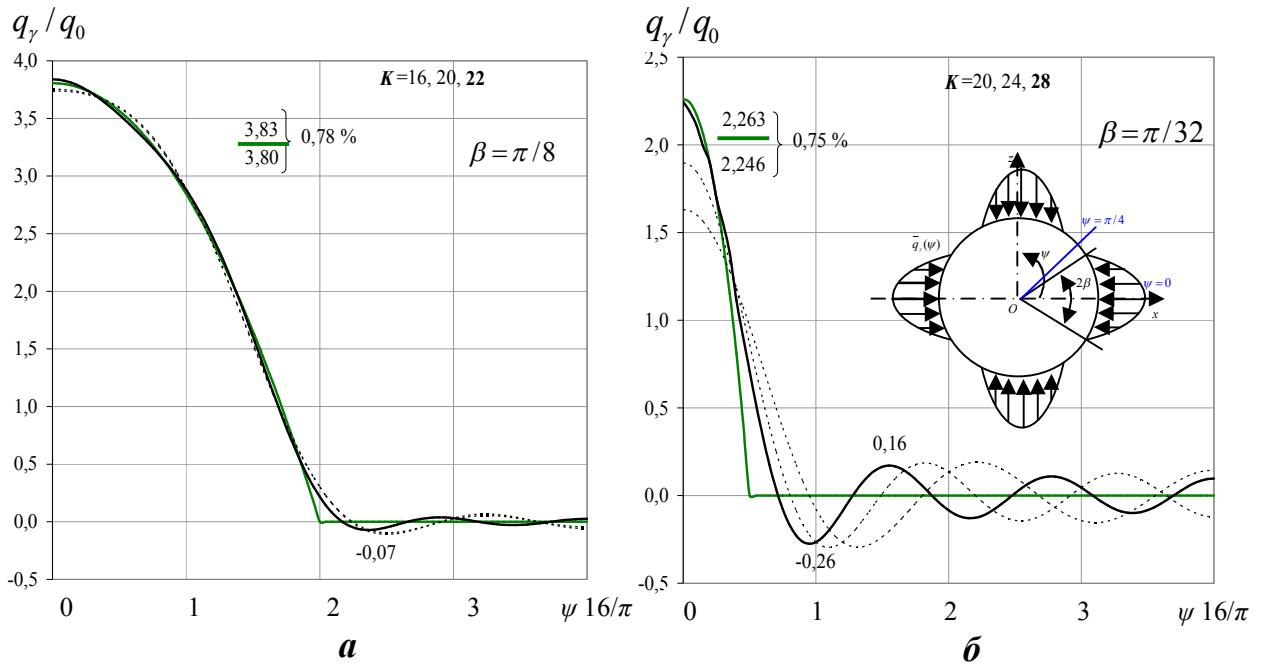


Рис. 6.2 Локальне навантаження дійсне та апроксимоване рядом Фур'є для чотирьох ділянок прикладання

З метою оцінки точності отримуваних результатів, розглянемо задачу про напружений стан кругової ізотропної циліндричної оболонки, що знаходиться під дією локального навантаження, прикладеного в околі перпендикулярних діаметрів поперечного перерізу спочатку на двох ділянках (6.2), а потім – на чотирьох (6.4) в залежності від кількості утримуваних членів рядів (6.3) і (6.5) та інтервалу прикладеного навантаження  $\beta$ .

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 60$ , радіус кола поверхні відліку  $r_0 = 40$ , товщина оболонки  $h = 4$ , механічні параметри матеріалу  $E = E_0$ ;  $\nu = 0,3$ .

Результати оцінки точності отримуваних результатів для значень нормальних переміщень  $u_\gamma$ , напружень  $\sigma_\psi$  та  $\sigma_s$  наведено в табл. 6.1, табл. 6.2 в залежності від кількості утримуваних членів рядів (6.3) і (6.5) для двох значень інтервалу прикладеного навантаження  $\beta = \pi / 32$ ,  $\beta = \pi / 8$ .

Значення нормальних переміщень наведено на поверхні відліку, а відповідних напружень – на зовнішній поверхні, де прикладене локальне навантаження, в двох перерізах напрямної в зоні максимального значення локального навантаження  $\psi = 0$  для обох способів та в зоні вільній від навантаження для першого способу при  $\psi = \pi / 2$ , та при  $\psi = \pi / 4$  – для другого.

Як видно з даних, наведених у табл. 6.1 *a*, *b* та табл. 6.2 *a*, *b* на збіжність отримуваних результатів більше впливає не спосіб прикладання локального навантаження (дві чи чотири ділянки бічної поверхні), а інтервал прикладеного навантаження  $\beta$ .

Так, якщо для більшого інтервалу  $\beta = \pi / 8$  достатній степінь точності спостерігається вже при 20–22 членах рядів (6.3), (6.5), то для меншого інтервалу ( $\beta = \pi / 32$ ) необхідно враховувати не менше 28 членів відповідних рядів.

Таблиця 6.1 (а) Оцінка точності отримуваних результатів для першого способу прикладення локального навантаження при  $\beta = \pi / 8$

$N$	$\psi$	$u_y E_0 / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$	$\sigma_s / q_0$	Похибка, %
16	0	63,505	0,929	1,262	--
	$\pi/2$	-7,067	-0,092	0,093	
18	0	63,501	0,922	1,256	0,5 – 7,2
	$\pi/2$	-7,071	-0,100	0,087	
20	0	63,512	0,916	1,253	0,2 – 4,4
	$\pi/2$	-7,046	-0,104	0,088	
22	0	63,524	0,913	1,252	0,2 – 3,0
	$\pi/2$	-7,034	-0,107	0,088	
24	0	63,528	0,913	1,254	0,1 – 1,6
	$\pi/2$	-7,036	-0,108	0,086	

Таблиця 6.1 (б) Оцінка точності отримуваних результатів для другого способу прикладення локального навантаження при  $\beta = \pi / 8$

$N$	$\psi$	$u_y E_0 / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$	$\sigma_s / q_0$	Похибка, %
16	0	56,438	0,837	1,355	--
	$\pi/4$	-32,323	-0,565	-0,542	
20	0	56,467	0,811	1,341	0,1 – 4,3
	$\pi/4$	-32,294	-0,590	-0,556	
24	0	56,493	0,805	1,340	0,1 – 1,2
	$\pi/4$	-32,272	-0,597	-0,558	

Таблиця 6.2 (а) Оцінка точності отримуваних результатів для першого способу прикладення локального навантаження при  $\beta = \pi / 32$

$N$	$\psi$	$u_y E_0 / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$	$\sigma_s / q_0$	Похибка, %
20	0	79,404	1,218	2,026	--
	$\pi/2$	-4,702	-0,157	0,076	
22	0	79,518	1,243	2,067	0,1 - 8,8
	$\pi/2$	-4,866	-0,150	0,083	
24	0	79,586	1,266	2,099	0,1 - 6,4
	$\pi/2$	-4,799	-0,146	0,089	
28	0	79,622	1,286	2,126	0,01 - 4,0
	$\pi/2$	-4,889	-0,150	0,093	

Таблиця 6.2 (б) Оцінка точності отримуваних результатів для другого способу прикладення локального навантаження при  $\beta = \pi / 32$

$N$	$\psi$	$u_y E_0 / q_0$	$\sigma_\psi / q_0$	$\sigma_s / q_0$	Похибка, %
20	0	74,314	1,003	2,042	--
	$\pi/4$	-41,137	-0,934	-0,758	
24	0	74,653	1,079(76)	2,150	0,5 - 8,4
	$\pi/4$	-40,798	-0,862	-0,725	
28	0	74,734	1,136	2,218	0,1 - 4,8
	$\pi/4$	-41,088	-0,860	-0,706	

## 6.2 Гофровані в поперечному перерізі циліндричні оболонки при дії локального навантаження

Розглядаються ізотропні циліндричні оболонки з гофрованим поперечним перерізом, поверхня відліку яких задається в полярних координатах у вигляді (3.1), де степінь еліптичності  $\Delta = 0$ . Інші геометричні параметри оболонки приймають значень: довжина  $l = 60$ ; радіус кола  $r_0 = 40$ ; товщина  $h = 4$ ; частота

гофрування  $m = 4$ ; амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ . В околі вершин гофрів задане локальне навантаження (6.4), яке при розв'язуванні задачі подається рядом (6.5). Змінюючи параметр  $\beta$ , можна змінювати інтервал прикладання навантаження (рис. 6.3).

Розглядаються три варіанти інтервалу:  $\beta = \pi / 8$ ;  $\beta = \pi / 16$ ;  $\beta = \pi / 32$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi / 8$ .

На рис. 6.4, рис. 6.5 наведено графіки розподілу переміщень  $u_y$  і напружень  $\sigma_\psi$  відповідно, вздовж напрямної на зовнішній поверхні оболонки в середньому перерізі довжини залежно від зміни інтервалу прикладеного локального навантаження.

З графіків наведених на рис. 6.4 видно, що зменшення зони прикладання навантаження призводить до значного перерозподілу переміщень.

Так, для  $\beta = \pi / 8$  при переході з вершини гофрів до їх западини, переміщення зменшуються плавно, приблизно у 2,5 рази. Для  $\beta = \pi / 16$ ;  $\beta = \pi / 32$  переміщення  $u_y$  зменшуються приблизно в 2 рази, але при цьому змінюють знак на протилежний.

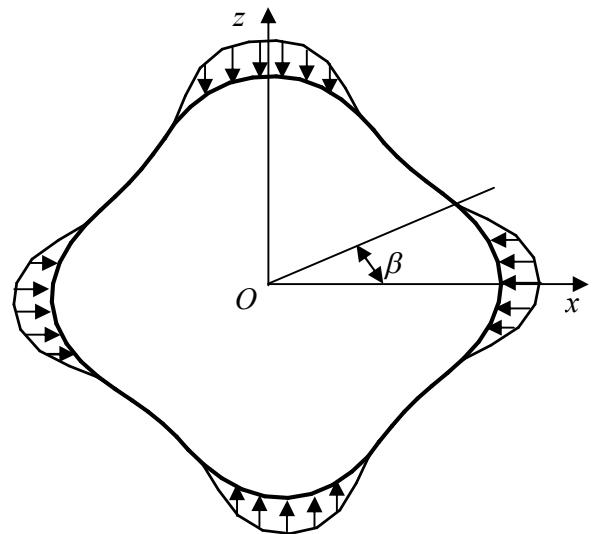


Рис. 6.3 Поперечний переріз циліндричної оболонки з прикладеним локальним

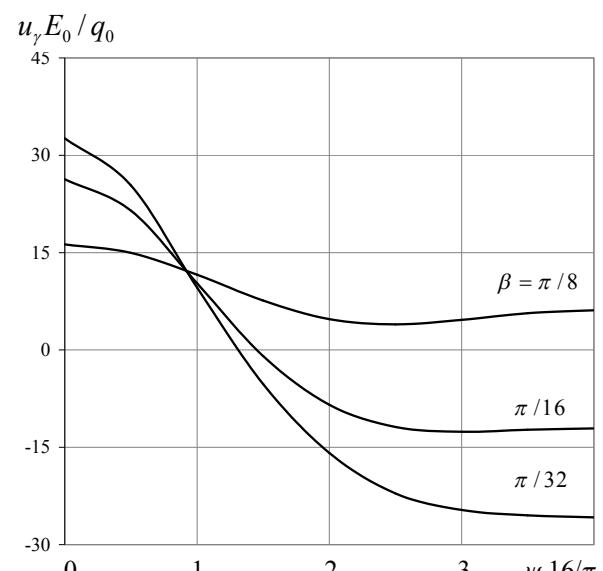


Рис. 6.4 Розподіл переміщень вздовж напрямної циліндра

але при цьому змінюють знак на

3 графіків, наведених на рис. 6.5 видно, що зменшення інтервалу прикладання навантаження веде до збільшення значень напружень  $\sigma_\psi$  у вершинах гофрів.

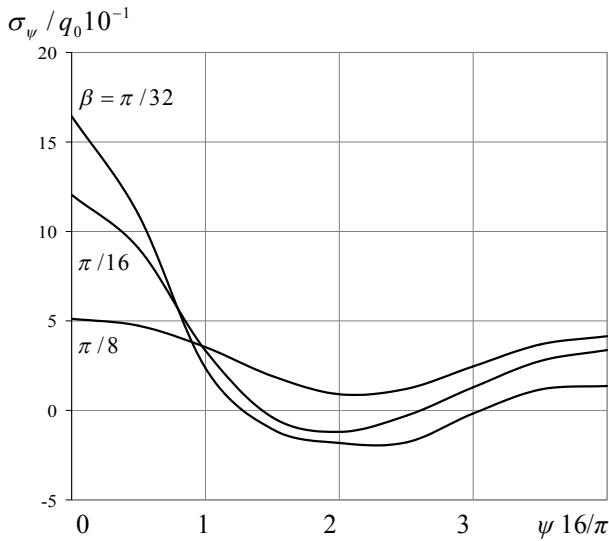


Рис. 6.5 Розподіл напружень вздовж напрямної оболонки

нечистої напруження в западині гофрів.

При переході з вершини гофрів ( $\psi = 0$ ) до їх западини ( $\psi = \pi / 4$ ) для інтервалу локального навантаження  $\beta = \pi / 8$ , значення напружень зменшуються в 1,2 рази. При зменшенні інтервалу, напруження зменшуються у 3,6 рази для  $\beta = \pi / 16$  і у 4,6 рази – для  $\beta = \pi / 32$ .

Далі розглядаються шаруваті циліндричні оболонки з гофрами в поперечному перерізі симетричної будови, які складені з трьох шарів: несучих – ізотропних, та середнього шару, виготовленого з трансверсально-ізотропного матеріалу з механічними параметрами (5.5).

При розв'язуванні задачі приймалось: довжина оболонки  $l = 60$ ; радіус кола  $r_0 = 40$ ; товщина несучих шарів  $h_1 = h_3$ ; товщина середнього шару (заповнювача)  $h_2 = 1; 3$ ; загальна товщина оболонки  $H = 4$ ; частота гофрування  $m = 4$ ; амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ .

Приклади розташування шарів наведено на рис. 6.6.

В околі вершини гофрів задане локальне навантаження (6.4), яке при розв'язуванні задачі подається рядом (6.5). Вигляд прикладеного локального

Так, для  $\beta = \pi / 16$  напруження зростають приблизно у 2,5 рази, а для  $\beta = \pi / 32$  – в 3,2 рази, порівняно з напруженнями для  $\beta = \pi / 8$ . У западині гофрів напруження зменшуються несуттєво. При цьому чим меншим буде інтервал прикладання навантаження, тим менше будуть відріз-

навантаження наведено на рис. 6.3. Розглядаються три варіанти для інтервалу прикладання локального навантаження  $\beta = \pi / 8; \beta = \pi / 12; \beta = \pi / 16$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi / 8$ .

На рис. 6.7 – рис. 6.10 наведено результати розв'язання задачі в середньому перерізі по довжині оболонки для  $s = l / 2$ .

Рис. 6.7 ілюструє розподіл переміщень  $u_y$  на внутрішній поверхні оболонки вздовж напрямної в залежності від інтервалу прикладання локального навантаження, коли товщина середнього шару  $h_2 = 1$ . Характер розподілу переміщень для випадку  $h_2 = 3$  зберігається. З рис. 6.7 видно, що при зменшенні інтервалу прикладання навантаження  $\beta$ , переміщення  $u_y$  збільшуються як у вершинах, так і у западинах гофрів. При цьому в западинах гофрів переміщення змінюють знак на протилежний.

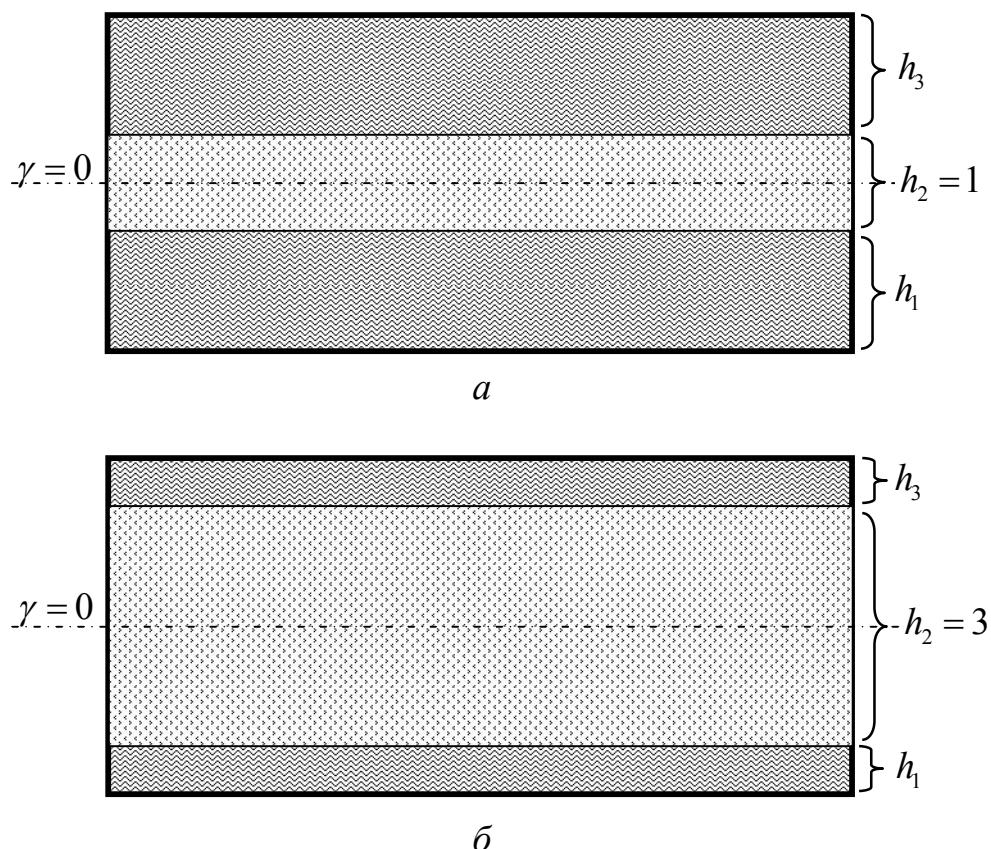


Рис. 6.6 Розташування шарів по товщині оболонки

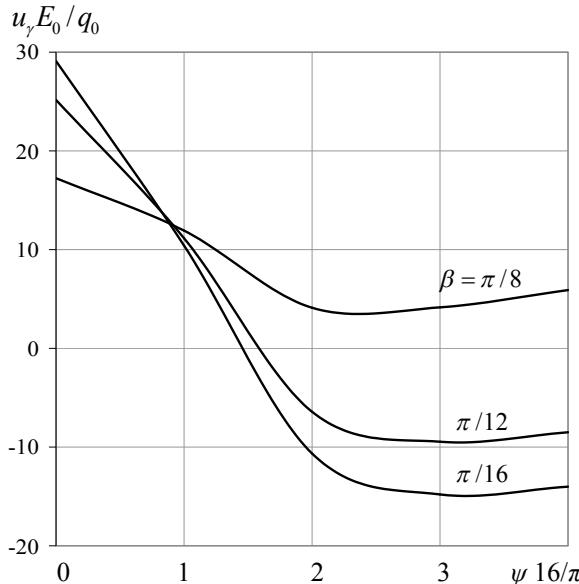


Рис. 6.7 Розподіл переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки ( $h_2 = 1$ )

Збільшення інтервалу прикладеного локального навантаження веде до зменшення абсолютної величини переміщень як в зоні вершин, так і в зоні западин гофрів в 1,7 рази для  $\beta = \pi / 16$  та в 1,5 рази для  $\beta = \pi / 16$  порівняно з інтервалом  $\beta = \pi / 8$  в перерізі  $\psi = 0$ , та у 2,4 рази для  $\beta = \pi / 16$  і в 1,4 рази для  $\beta = \pi / 16$  порівняно з інтервалом  $\beta = \pi / 8$  в перерізі  $\psi = \pi / 4$ . В

межах одного інтервалу прикладання величина між значеннями переміщень в вершині та западині гофрів зменшується приблизно в 2,5 – 3 рази.

На рис. 6.8 наведено розподіл полів переміщень  $u_y$  по товщині оболонки в залежності від зміни інтервалу прикладання локального навантаження  $\beta$  для товщини середнього шару  $h_2 = 1$  (суцільна лінія) та для товщини середнього шару  $h_2 = 3$  (штрихова лінія).

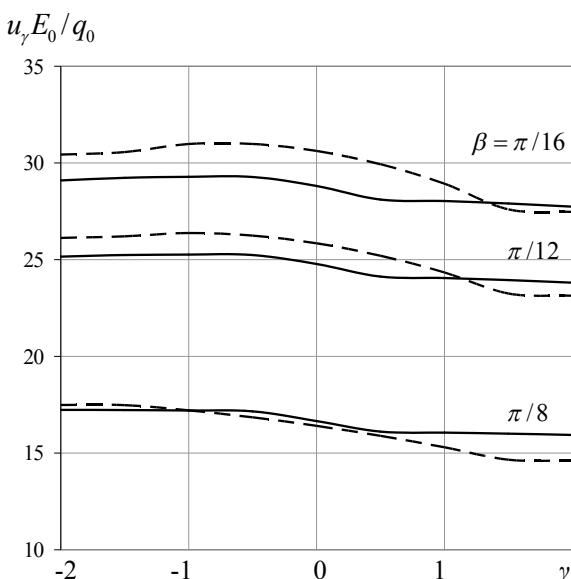


Рис. 6.8 Розподіл переміщень вздовж товщини оболонки

З графіків видно, що зменшення інтервалу прикладання навантаження більше впливає на перерозподіл переміщень при збільшенні товщини середнього шару на внутрішній поверхні оболонки.

На рис. 6.9 подано графіки розподілу напруження  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки для випадку коли товщина середнього шару

$h_2 = 1$  на внутрішній поверхні (суцільна лінія) та на зовнішній поверхні (штрихова лінія) в залежності від зміни параметра  $\beta$ .

З графіків, наведених на рис. 6.9 видно, що зміна інтервалу прикладання локального навантаження більше впливає на зміну величини напружень у вершині гофрів та в перерізі  $\psi = \pi / 8$ , ніж в западині гофрів.

Так, на внутрішній поверхні оболонки в перерізі  $\psi = \pi / 8$  збільшення інтервалу прикладання навантаження веде до зменшення величини напружень в 1,5 рази для  $\beta = \pi / 16$  та у 1,4 рази для  $\beta = \pi / 12$ , порівняно з інтервалом  $\beta = \pi / 8$ . При цьому у вершині гофрів напруження зменшуються за абсолютною величиною в 14 разів для  $\beta = \pi / 16$  та у 8,7 разів для  $\beta = \pi / 12$  відносно напружень для  $\beta = \pi / 8$ .

На зовнішній поверхні оболонки максимальних значень напруження досягають у вершинах гофрів ( $\psi = 0$ ) і їх значення зі збільшенням інтервалу прикладання навантаження зменшуються відповідно у 2,5 рази для  $\beta = \pi / 16$  та у 1,6 рази для  $\beta = \pi / 12$ , порівняно з інтервалом навантаження для  $\beta = \pi / 8$ .

На рис. 6.10 наведено графіки розподілу по товщині оболонки напружень  $\sigma_\psi$  для випадку  $h_2 = 1$  (рис. 6.10 а) та для  $h_2 = 3$  (рис. 6.10 б) залежно від зміни параметра  $\beta$  у вершині гофрів.

Видно, як впливає на розподіл напружень зміна інтервалу прикладання навантаження та збільшення товщини середнього шару. Так, в перерізі  $-2 \leq \gamma \leq 0$  напруження мають однакову картину розподілу.

Якісна відмінність в характері кривих спостерігається в перерізі  $0 \leq \gamma \leq 2$ . Збільшення товщини середнього шару веде до появи більш вираженої хвилястості.

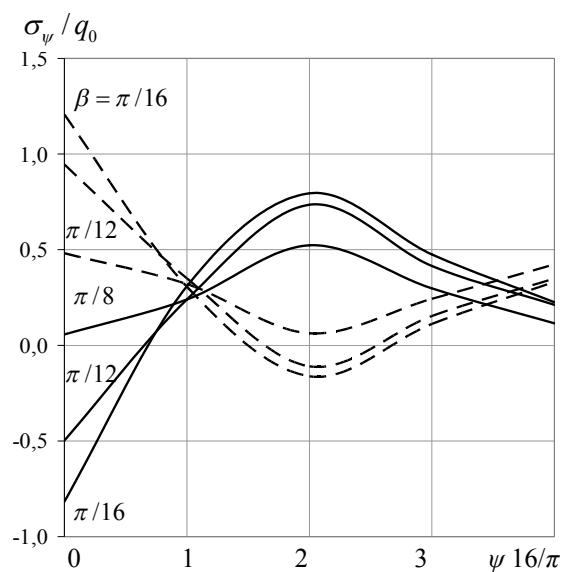


Рис. 6.9 Розподіл напружень вздовж напрямної оболонки ( $h_2 = 1$ )

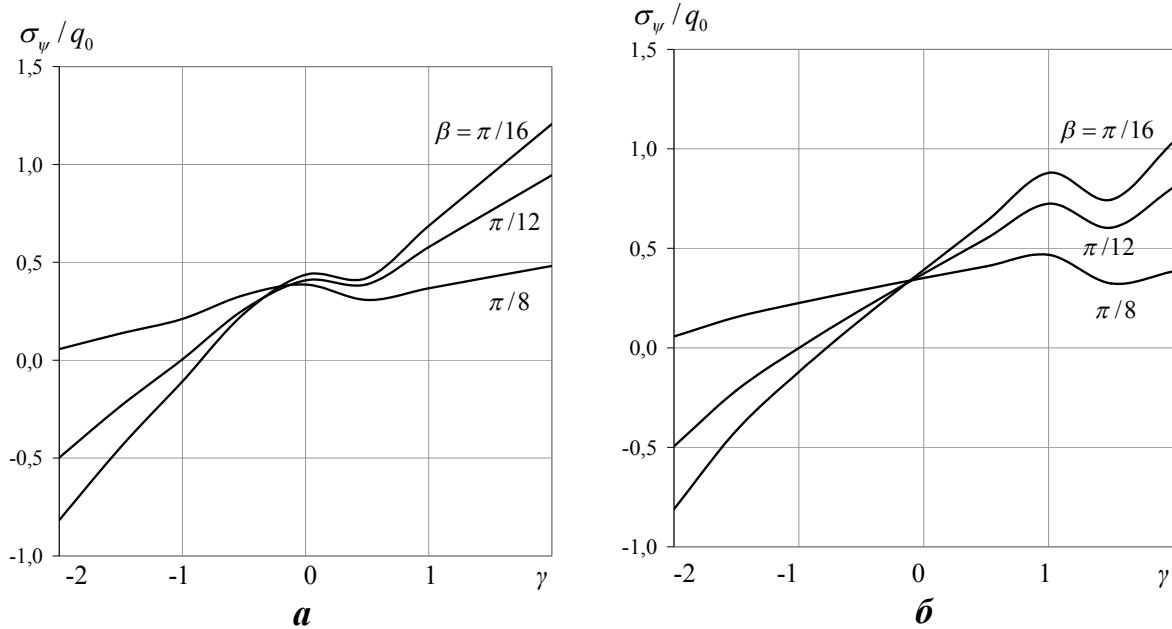


Рис. 6.10 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  по товщині оболонки в залежності від інтервалу прикладання навантаження

### 6.3 Вплив зміни проміжку прикладання локального навантаження на напруженено-деформований стан еліптичних гофрованих циліндричних оболонок

Для ізотропних циліндричних оболонок з еліптичним гофрованим поперечним перерізом, поверхня відліку яких задається у вигляді (3.1) проведено аналіз впливу локального навантаження на параметри напруженено-деформованого стану.

Розглянуто два способи прикладання локального навантаження: в околі більшої та меншої півосі еліпса (6.4), яке подається рядом (6.5) та в околі більшої півосі – (6.2), яке подається рядом (6.3). На рис. 6.11 показаний поперечний переріз розглядуваних оболонок з прикладеним навантаженням.

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонки  $l = 40$ ; радіус кола  $r_0 = 60$ ; товщина оболонки  $h = 4$ ; частота гофрування  $m = 4$ ; амплітуда гофрування  $\alpha = 4$ , степінь еліптичності  $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ .

Для параметра  $\beta$  розглядаються два варіанти:  $\beta = \pi/8; \beta = \pi/16$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi/8$ .

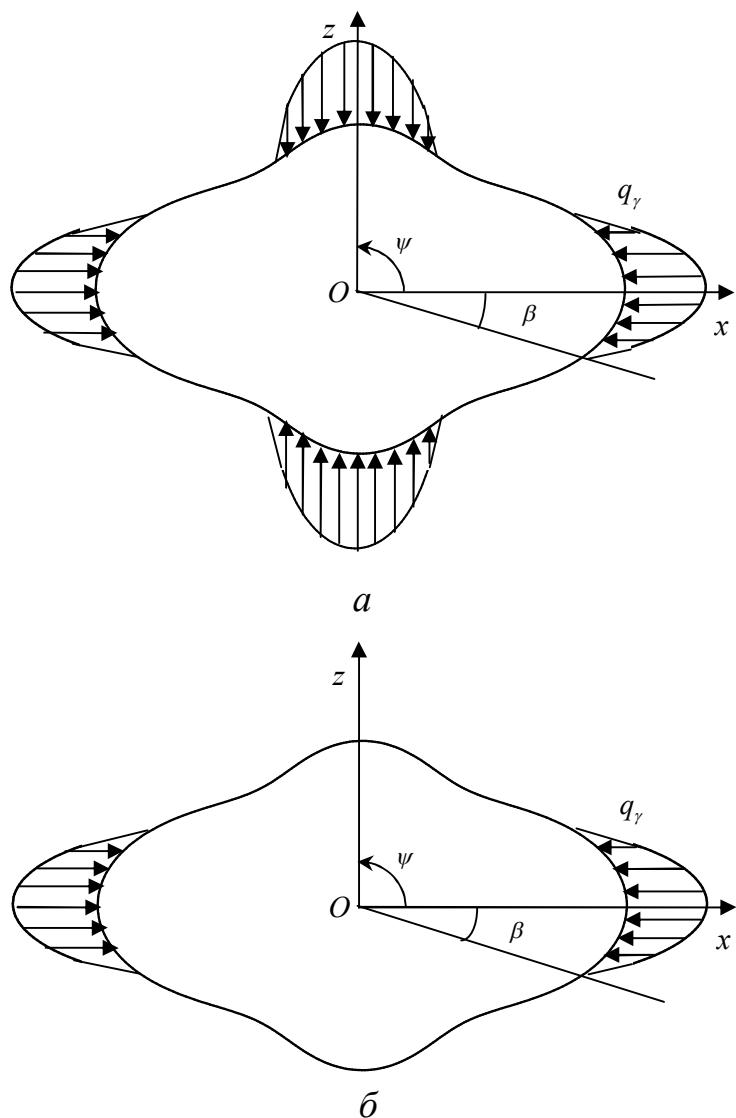


Рис. 6.11 Поперечний переріз поверхні відліку з прикладеним локальним навантаженням

На рис. 6.12 – рис. 6.14 наведено результати розв'язку задачі у вигляді графіків в середньому перерізі по довжині оболонки вздовж напрямної для двох варіантів прикладення навантаження: в околі чотирьох гофрів (рис. 6.12 *a* – рис. 6.14 *a*) та в околі гофрів більшої півосі еліпса (рис. 6.12 *б* – рис. 6.14 *б*). Суцільною лінією позначені криві для параметра  $\beta = \pi / 16$ , штриховою – для  $\beta = \pi / 8$ .

Рис. 6.12 ілюструє розподіл переміщень  $u_\gamma$ , рис. 6.13 – розподіл напружень  $\sigma_\psi$ , рис. 6.14 – розподіл напружень  $\sigma_s$  в залежності від степеня еліптичності  $\Delta$ .

З рис. 6.12 *a* – рис. 6.14 *a* видно, що зі збільшенням еліптичності порушується симетрія відносно перерізу  $\pi / 4$  в розподілі полів як переміщень так і напружень в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ .

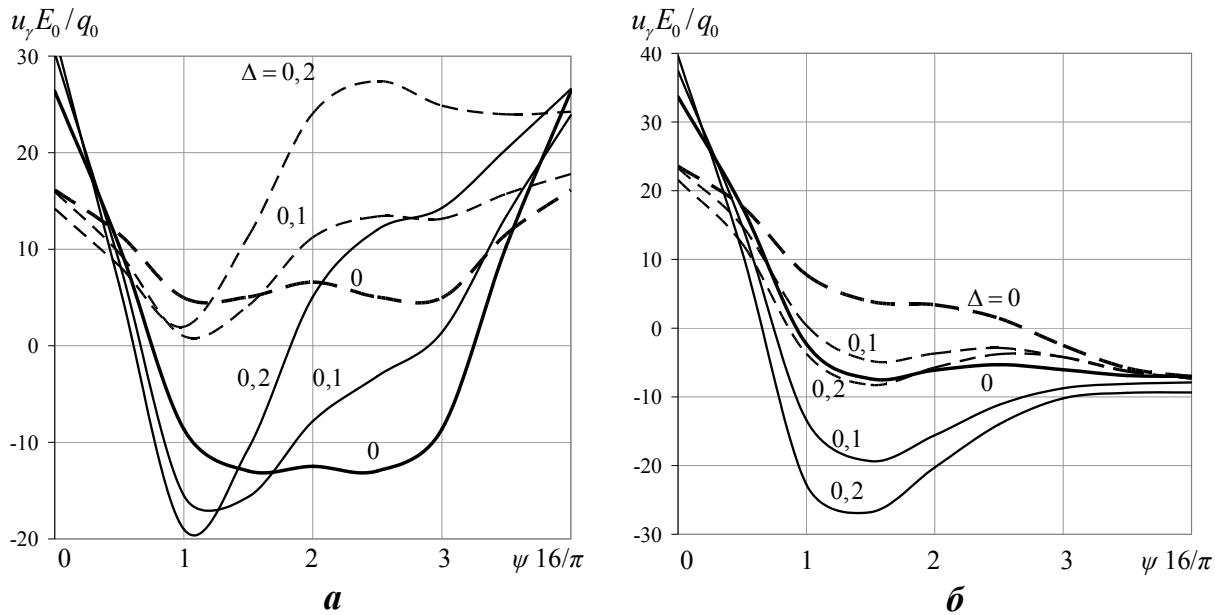


Рис. 6.12 Розподіл переміщень  $u_y$  вздовж напрямної оболонки в залежності від ступеня еліптичності

Вплив еліптичності на розподіл переміщень (рис. 6.12 *a*) при першому варіанті прикладання навантаження більше відчувається в інтервалі  $\pi / 8 \leq \psi \leq 3\pi / 8$ . Так, якщо при  $\Delta = 0,1$  значення переміщень зменшуються в 1,5 – 4 рази, то при  $\Delta = 0,2$  – приблизно в 1,5 – 2,5 рази, при цьому вони змінюють знак на протилежний для  $\beta = \pi / 16$ . Для  $\beta = \pi / 8$  переміщення збільшуються приблизно в 1,5 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 4 рази – для  $\Delta = 0,2$ .

При другому способі прикладання навантаження (рис. 6.12 *b*) максимальний перерозподіл переміщень відбувається в перерізі  $\pi / 8 \leq \psi \leq \pi / 4$ . Тут відхилення форми поперечного перерізу від кругової гофрованої призводить до збільшення величини переміщень від 0,9 разів для  $\Delta = 0,1$  до 2,4 рази для  $\Delta = 0,2$  при  $\beta = \pi / 16$ . Для  $\beta = \pi / 8$  величина переміщень збільшується в 0,5 – 1,4 рази, при цьому вони змінюють знак на протилежний.

З рис. 6.13 *a* видно, що хвильовий характер розподілу напружень вздовж всього інтервалу  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$  зберігається, незалежно від значення степеня еліптичності як для  $\beta = \pi / 16$ , так і для  $\beta = \pi / 8$ .

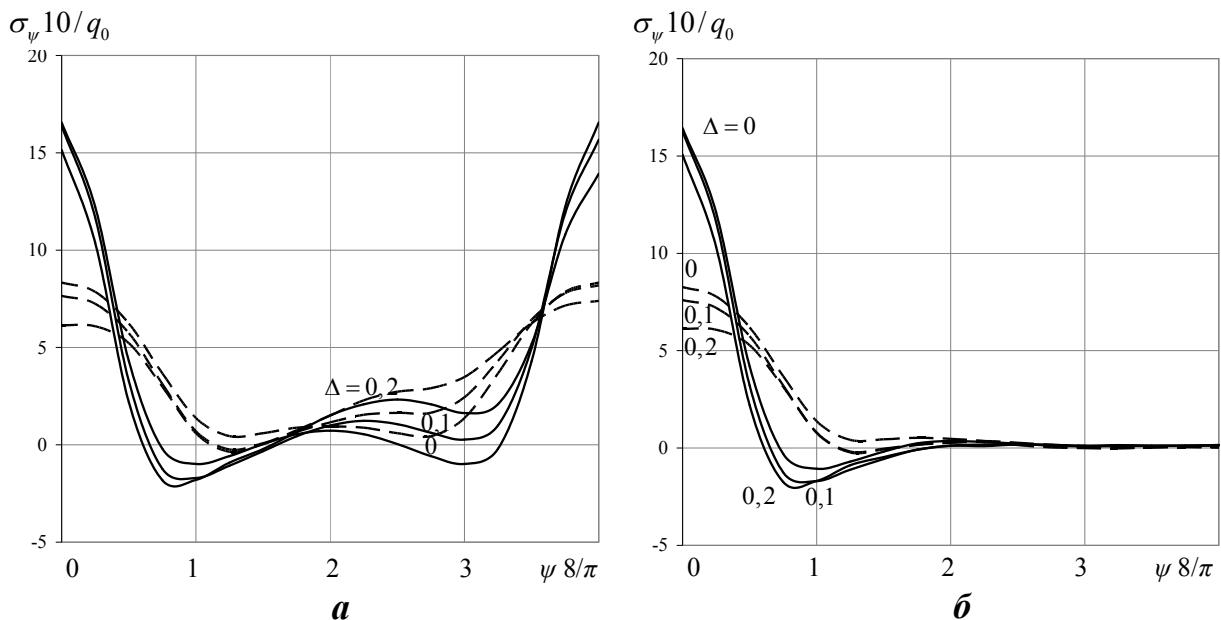


Рис. 6.13 Розподіл напружень  $\sigma_\psi$  вздовж напрямної оболонки в залежності від степеня еліптичності оболонки

Проте зі збільшенням степеня еліптичності  $\Delta$  для  $\beta = \pi / 16$  (рис. 6.13 *a*) значення напружень в перерізі  $\psi = 0$  збільшуються приблизно в 1,1 рази для  $\Delta = 0,1; 0,2$  і зменшуються в 1,2 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,6 рази для  $\Delta = 0,2$  в перерізі  $\psi = \pi / 2$ , а на інтервалі  $\pi / 16 \leq \psi \leq 3\pi / 16$  змінюють знак на протилежний.

При збільшенні інтервалу прикладання навантаження ( $\beta = \pi / 8$ ) напруження досягають своїх максимальних значень в перерізі  $\psi = \pi / 4$  і при збільшенні степеня еліптичності їх значення збільшуються в 1,1 рази для  $\Delta = 0,1$  та в 1,5 рази для  $\Delta = 0,2$ .

Для другого способу прикладання навантаження (рис. 6.13 *b*) максимальних значень напруження набувають в перерізі  $\psi = 0$  для обох значень параметра  $\beta$ . При цьому збільшення зони прикладання навантаження веде до зменшення максимальних значень напружень у 2,1 – 2,5 рази для всіх значень  $\Delta$ .

Характер розподілу напружень  $\sigma_s$ , що наведений на рис. 6.14 схожий з характером розподілу напружень  $\sigma_\psi$ .

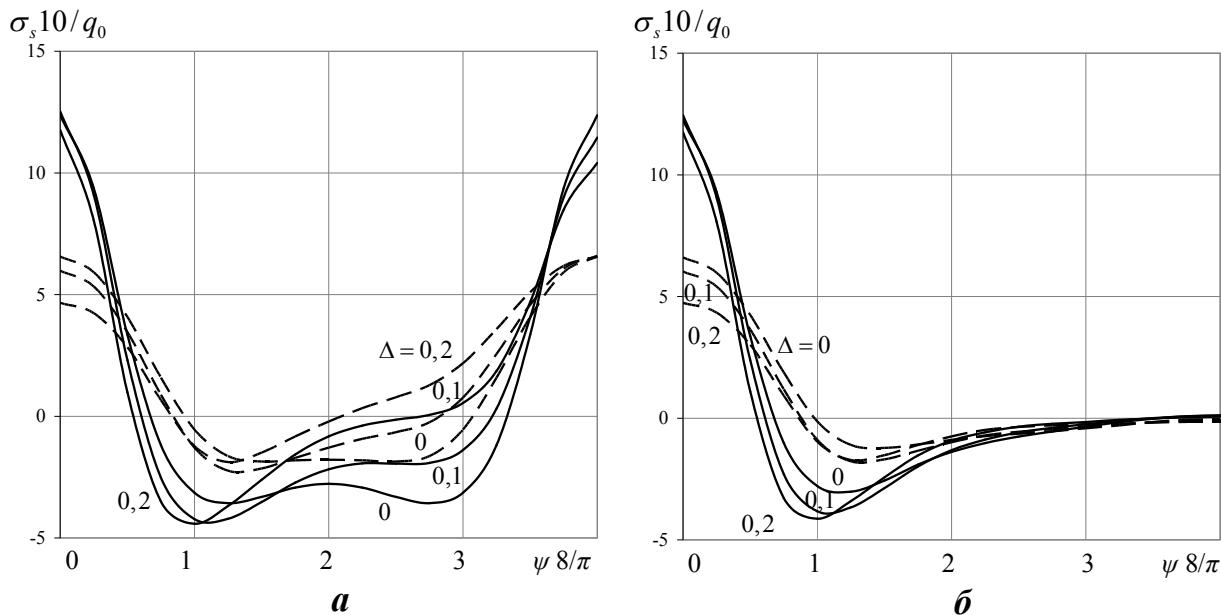


Рис. 6.14 Розподіл напружень  $\sigma_s$  вздовж напрямної оболонки в залежності від степеня еліптичності оболонки

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної на внутрішній поверхні, де вони набувають своїх максимальних амплітудних значень, наведено на рис. 6.15, де криві для  $\beta = \pi / 16$  позначені суцільною лінією, для  $\beta = \pi / 8$  – штриховою лінією відповідно.

На рис. 3.15 *a* наведено графіки напружень  $\tau_{s\psi}$  для першого варіанту прикладання навантаження, а на рис. 3.15 *b* – для другого.

З графіків, наведених на рис. 3.15 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки носить більш виражений хвилястий характер при чотирьох ділянках локального навантаження. При цьому, при збільшенні інтервалу локального навантаження, величина дотичних напружень зменшується.

У випадку першого способу прикладання навантаження (на чотирьох ділянках) при збільшенні степеня еліптичності спостерігається порушення симетрії в розподілі дотичних напружень, яка характерна для кругових оболонок зі степенем еліптичності  $\Delta = 0$ .

Зі збільшенням степеня еліптичності максимальних абсолютних значень дотичні напруження набувають в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 8$  для  $\beta = \pi / 16$  та в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$  для  $\beta = \pi / 8$ . За величиною максимальні значення дотичних напружень близькі між собою. Вплив еліптичності більшою мірою відчутний на розподілі напружень в інтервалі  $\pi / 4 \leq \psi \leq \pi / 2$  та в середній зоні, вільній від навантаження.

При другому способі (на двох ділянках) прикладання локального навантаження вплив степеня еліптичності так само, більш помітний в зоні вільній від навантаження та для інтервалу  $\beta = \pi / 8$ . При цьому зі збільшенням параметра  $\Delta$  спостерігається зменшення амплітудної величини дотичних напружень.

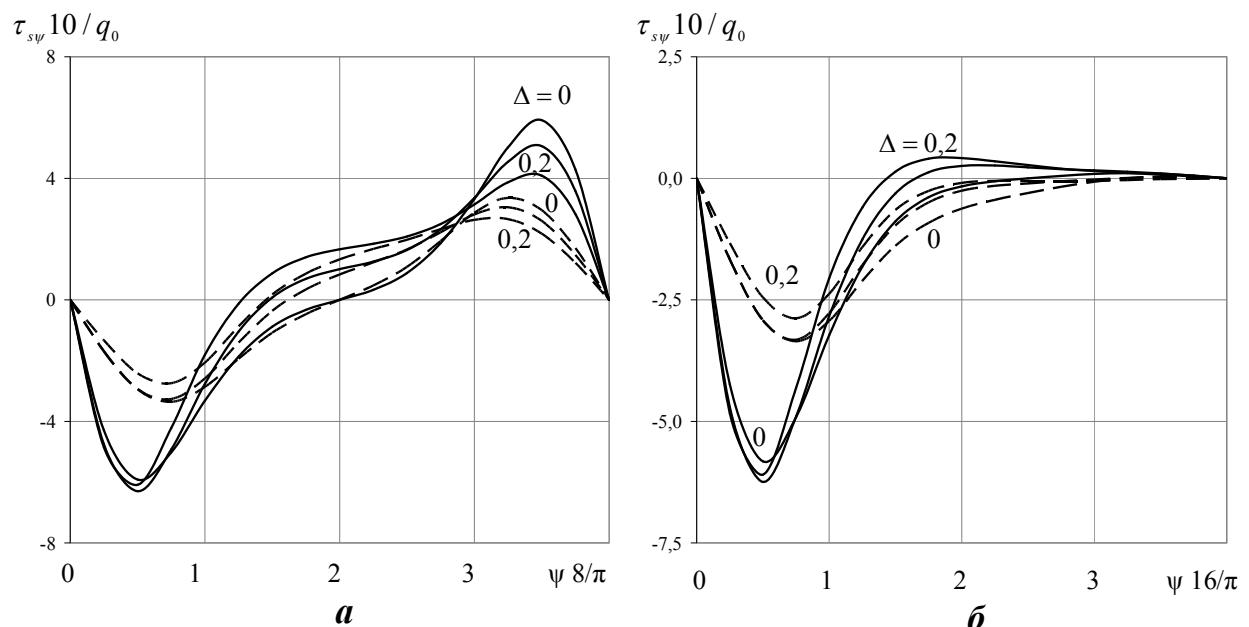


Рис. 6.15 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від еліптичності

#### 6.4 Дослідження напруженено-деформованого стану циліндричних оболонок з увігнутим гофрованим поперечним перерізом при дії локального навантаження

Розглянуто вплив локального навантаження на напружений стан нетонких ізотропних циліндричних оболонок з увігнутим гофрованим поперечним перерізом, поверхня відліку яких задається в параметричній формі рівнянням скороченої гіпоциклоїди у вигляді (4.1). При розв'язуванні задачі прийняті такі вихідні дані: довжина оболонки  $l = 40$ , товщина  $h = 2$ , радіус нерухомого кола  $A = 24$ , радіус рухомого кола  $a = -6$ , параметр  $\lambda = 0,4$ .

Було обрано два способи прикладання локального навантаження: з двома інтервалами прикладання (6.2), яке подається рядом (6.3) та з чотирма – (6.4), яке подається рядом (6.5). На рис. 6.16 показаний поперечний переріз розглядуваних оболонок з прикладеним навантаженням.

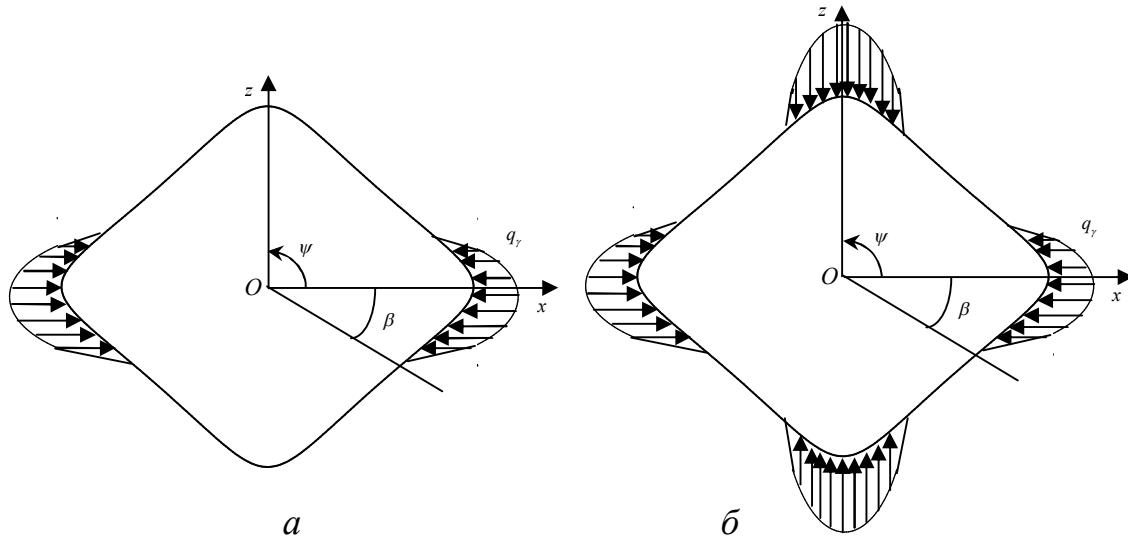


Рис. 6.16 Поперечний переріз оболонки та способи прикладання локального навантаження

Для параметра  $\beta$  розглядаються два значення:  $\beta = \pi / 8; \beta = \pi / 16$ . При цьому коефіцієнт  $q_0$  обирається таким чином, щоб загальне навантаження залишалось однаковим, рівним навантаженню при  $\beta = \pi / 16$ .

Результати розв'язку задачі в середньому перерізі довжини оболонки наведені на рис. 6.17 для полів переміщень  $u_y$  та для полів напружень  $\sigma_\psi$  – на

рис. 6.18. Суцільною лінією показані криві для двох ділянок прикладання локального навантаження, штриховою – для чотирьох.

З рис. 6.17, рис. 6.18 видно, що при чотирьох ділянках локального навантаження переміщення та напруження розподіляються симетрично відносно зони з'єднання напівгофрів ( $\psi = \pi / 8$ ).

З наведених графіків випливає, що зі збільшенням інтервалу прикладання навантаження, значення переміщень зменшуються в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) в 1,2 рази для двох інтервалів навантаження та для чотирьох інтервалів прикладання локального навантаження.

Крім того, збільшення інтервалу прикладання навантаження для  $\beta = \pi / 8$ , при чотирьох ділянках прикладання веде до більш плавного перерозподілу значень переміщення, в той час, коли для

$\beta = \pi / 16$  при переході з зони вершин напівгофрів ( $\psi = 0; \pi / 4$ ) до зони з'єднання ( $\psi = \pi / 8$ ) переміщення зменшуються майже в 40 разів.

Для двох ділянок прикладання навантаження (рис. 6.18) зміна інтервалу  $\beta$  призводить до суттєвого перерозподілу полів напружень в перерізі  $0 \leq \psi \leq \pi / 4$  на внутрішній поверхні оболонки.

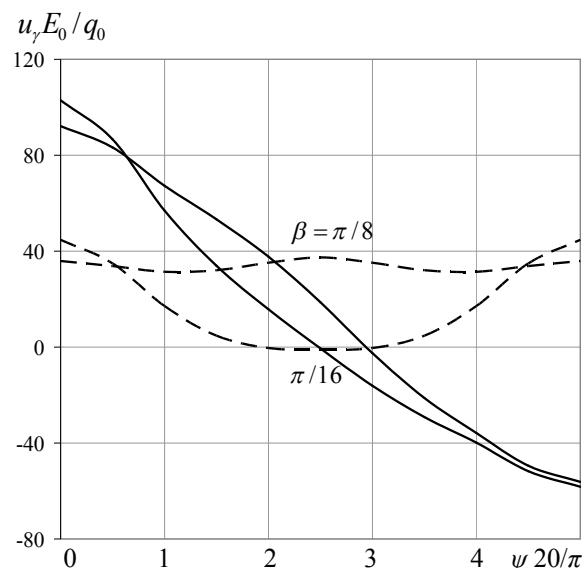


Рис. 6.17 Розподіл переміщень в залежності від прикладеного навантаження

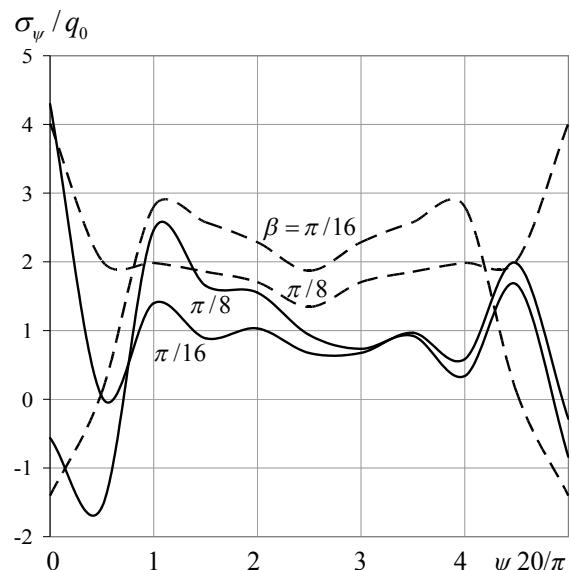


Рис. 6.18 Розподіл напружень в залежності від прикладеного навантаження

При цьому в зоні вершини напівгофрів ( $\psi = 0$ ) величина напружень збільшується в 7,6 рази при зменшенні інтервалу  $\beta$ , а для чотирьох ділянок навантаження – напруження збільшуються майже в 3 рази.

На зовнішній поверхні оболонки збільшення зони прикладання навантаження веде до зменшення величини напружень як для двох так і для чотирьох ділянок. При цьому для першого способу навантаження в зоні вершини гофрів ( $\psi = 0$ ) напруження зменшуються у 2,3 рази а для другого способу – у 3,5 рази.

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної наведено на рис. 6.19 де криві для двох ділянок прикладання локального навантаження позначені суцільною лінією, для чотирьох – штриховою лінією.

На рис. 6.19 *a* наведено графіки напружень  $\tau_{s\psi}$  для першого варіанту прикладання навантаження, а на рис. 6.19 *b* – для другого.

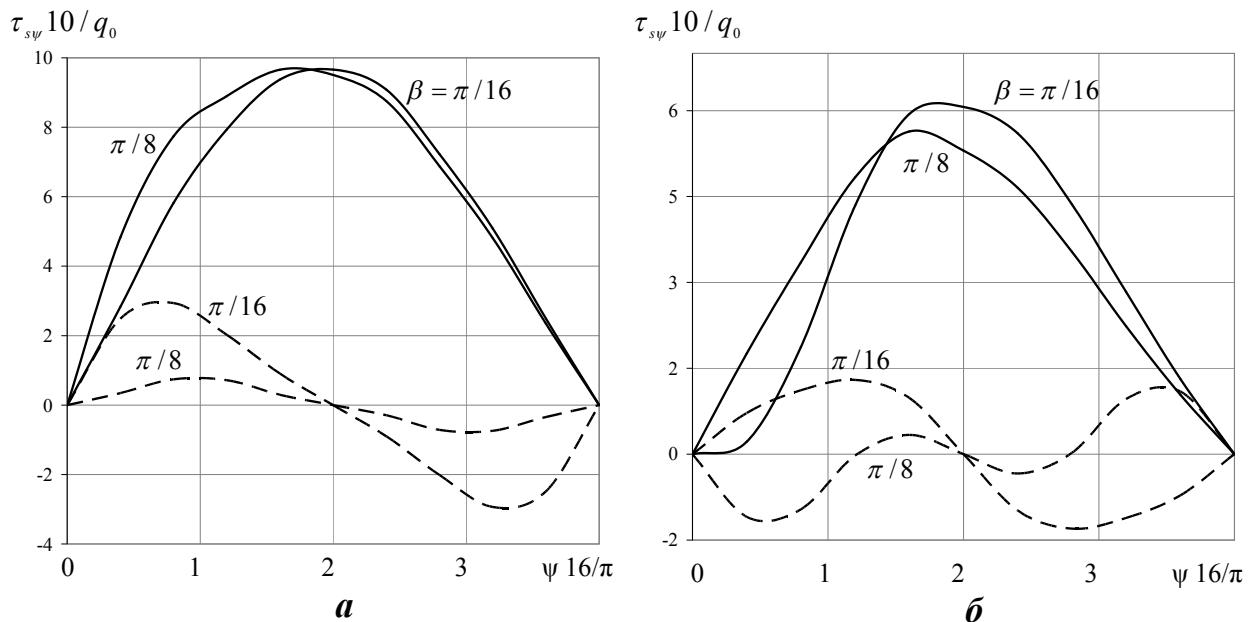


Рис. 6.19 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від еліптичності

З графіків, наведених на рис. 6.19 видно, що розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки носить більш виражений хвилястий

характер при чотирьох ділянках локального навантаження. При цьому, при збільшенні інтервалу локального навантаження, величина дотичних напружень зменшується приблизно в чотири рази.

При двох ділянках прикладання локального навантаження амплітудна величина максимальних дотичних напружень збільшується майже втрічі для  $\beta = \pi / 16$  та майже в 13 разів для  $\beta = \pi / 18$ .

Зміна інтервалу прикладання локального навантаження більшою мірою відчутина для чотирьох ділянок його прикладання, ніж для двох.

## **6.5 Розв'язування задачі про напруженій стан овальних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією локального навантаження**

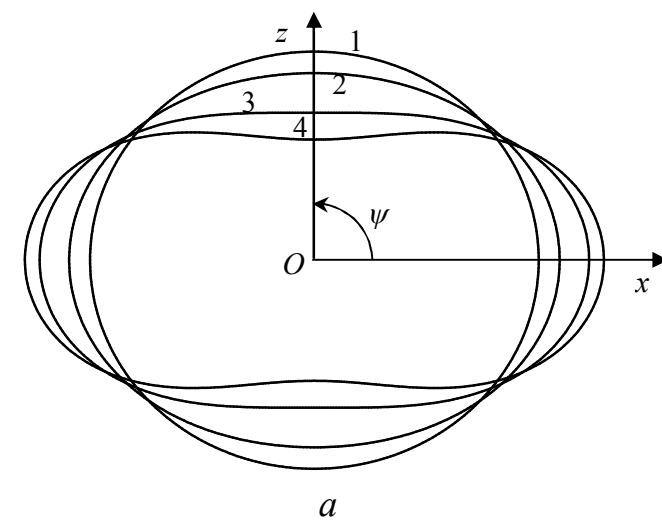
Розвиток авіаційної техніки пов'язаний із використанням оболонок з некруговим поперечним перерізом на етапі проектування фюзеляжів літаків та корпусів ракет. Застосування саме таких оболонок є більш вигідним, оскільки подібний поперечний переріз володіє кращими аеродинамічними властивостями. Останнім часом у вантажопасажирських літаках все частіше використовують оболонки з еліптичним та овальним поперечним перерізом, яке дозволяє збільшити їх економічні показники за рахунок підвищення пасажиромісткості, комфортності та використання внутрішнього об'єму гермокабін. Прикладом може слугувати суперлітак А-380 на 500 пасажирських місць з двопалубною гермокабіною овального поперечного перерізу.

Крім того, доцільним буде провести аналіз напруженого стану оболонок подібного поперечного перерізу, що знаходяться під дією локального навантаження.

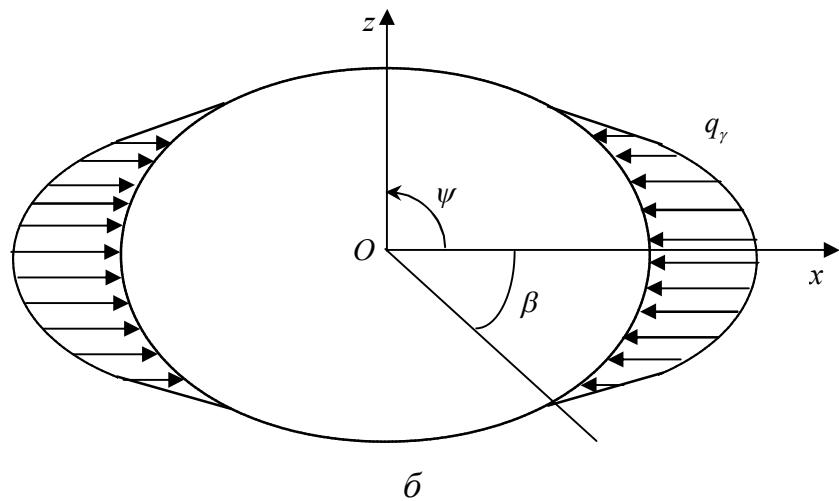
Будемо розглядати оболонки, з еліптичним та двома видами овального поперечного перерізу. В роботі [41] такі поперечні перерізи було описано трьома різними кривими. Подібні форми поперечного перерізу можна описати одним рівнянням для овалів Касині [227] в полярній системі координат [218]

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi), \quad 0 \leq \frac{c}{a} < 1, \quad a \neq 0, \quad (6.6)$$

де  $\rho$  – полярний радіус,  $c$  – половина відстані між фокусами,  $a$  – добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів  $c$  та  $a$  характеризує форму поперечного перерізу (рис. 6.20 а). Так, якщо  $c = 0$  – маємо коло (1), при  $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$  – еліпс (2),  $c = a\sqrt{2}$  – овал (3),  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$  – сплюснутий овал (4).



a



б

Рис. 6.20 Поперечний переріз поверхні відліку (а) та зовнішня поверхня з прикладеним локальним навантаженням (б)

Досліжується напружений стан ізотропних циліндричних оболонок, зазначеної форми поперечного перерізу, що знаходиться під дією локального навантаження, прикладеного на двох ділянках у вигляді (6.2), як показано на рис. 6.20 б. При розв'язуванні задачі локальне навантаження (6.2) подається у вигляді ряду (6.3).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина оболонок  $l = 80$ , товщина оболонок  $h = 4$ ; параметри поверхні відліку –  $a = 20$ ;  $c = 0$  (коло 1),  $c = 8$  (еліпс 2),  $c = 14,14$  (овал 3),  $c = 16$  (сплюснутий овал 4). Ділянка прикладеного локального навантаження  $\beta = \pi / 8$ ;  $\beta = \pi / 16$ . Значення сталої навантаження  $q_0$  обирається таким чином, щоб максимальне навантаження було однаковим, як при  $\beta = \pi / 8$ .

Результати розв'язку задачі подано в середньому перерізі по довжині  $s = 40$  у табл. 6.3 для розподілу полів переміщень  $u_\gamma$  поверхні відліку та у табл. 6.4 для розподілу полів напружень  $\sigma_\psi$  на внутрішній та зовнішній поверхні оболонки вздовж напрямної в інтервалі  $0 \leq \psi \leq \pi / 2$ .

З табл. 6.3 видно як впливає зміна ділянки прикладання локального навантаження на розподіл переміщень  $u_\gamma$  в залежності від форми поперечного перерізу поверхні відліку. Так, більш суттєві зміни спостерігаються для оболонок зі сплюснутим овальним поперечним перерізом (4), порівняно з круговою циліндричною оболонкою (1). Абсолютні значення переміщень зменшуються в 1,5 рази для  $\beta = \pi / 16$  та в 1,7 рази для  $\beta = \pi / 8$ .

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової, призводить до збільшення жорсткості оболонок в зоні більшої півосі ( $\psi = 0$ ), де мають місце максимальні значення локального навантаження.

Характер розподілу напружень  $\sigma_\psi$  в залежності від зміни ділянки прикладеного навантаження та варіацій форми поперечного перерізу наведено у табл. 6.4. Збільшення інтервалу прикладання навантаження призводить до зменшення величини напружень на внутрішній поверхні оболонки приблизно в 1,1 – 1,3 рази для усіх форм поперечного перерізу оболонок. При цьому

спостерігається в зоні більшої жорсткості ( $\psi = 0$ ) вплив зміни форми поперечного перерізу на розподіл значень напружень.

Табл. 6.3 Розподіл переміщень в залежності від інтервалу прикладеного локального навантаження

$\gamma$	$\psi$	$u_\gamma E_0 / q_0$							
		$\beta = \pi / 16$				$\beta = \pi / 8$			
		$c$							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
0	0	50,11	46,39	37,84	33,44	47,08	42,53	32,31	27,24
	$\pi/10$	37,93	31,48	16,69	9,98	36,30	29,58	14,99	8,82
	$3\pi/10$	-14,50	-23,36	-39,41	-41,67	-13,64	-21,64	-34,41	-34,72
	$\pi/2$	-40,15	-43,82	-49,20	-47,12	-38,61	-41,22	-43,31	-39,38

Табл. 6.4 Розподіл напружень в залежності від інтервалу прикладеного локального навантаження

$\gamma$	$\psi$	$10\sigma_\psi / q_0$							
		$\beta=\pi/16$				$\beta=\pi/8$			
		$c$							
		0	8	14,14	16	0	8	14,14	16
$h/2$	0	-11,62	-11,89	-12,84	-13,40	-9,99	-9,95	-10,05	-10,05
	$\pi/10$	-5,63	-12,99	-17,74	-13,67	-5,62	-12,43	-16,08	-12,10
	$3\pi/10$	4,30	-0,97	-22,43	-32,13	4,25	-0,64	-19,14	-26,21
	$\pi/2$	6,42	5,23	2,17	0,90	6,48	5,27	2,32	1,13
$-h/2$	0	11,49	11,42	11,37	11,18	10,09	9,81	9,21	8,72
	$\pi/10$	6,36	0,21	-5,26	-3,55	6,34	0,51	-4,28	-2,72
	$3\pi/10$	-2,43	-6,75	-22,21	-28,04	-2,39	-6,36	-19,52	-23,46
	$\pi/2$	-4,61	-5,14	-5,89	-4,80	-4,64	-5,04	-5,29	-3,96

Порівняно з круговою формою поперечного перерізу, напруження зменшуються в 1,2 рази для  $c = 16$ , в 1,1 рази для  $c = 14,14$  та в 1,03 рази для  $c = 8$ .

Графіки розподілу дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  на торцях оболонки ( $s = 0$ ) вздовж напрямної наведено на рис. 6.21, де криві на внутрішній поверхні оболонки позначені суцільною лінією, на зовнішній – штриховою лінією.

На рис. 3.21 *a* наведено графіки напружень  $\tau_{s\psi}$  для інтервалу  $\beta = \pi / 16$  прикладання навантаження, а на рис. 3.21 *b* – для інтервалу  $\beta = \pi / 8$ .

З графіків, наведених на рис. 3.21 видно, що криві дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної для кругової оболонки розподіляються за параболічним законом. Для овальної форми поперечного перерізу параболічний закон порушується і розподіл дотичних напружень набуває хвилястого вигляду.

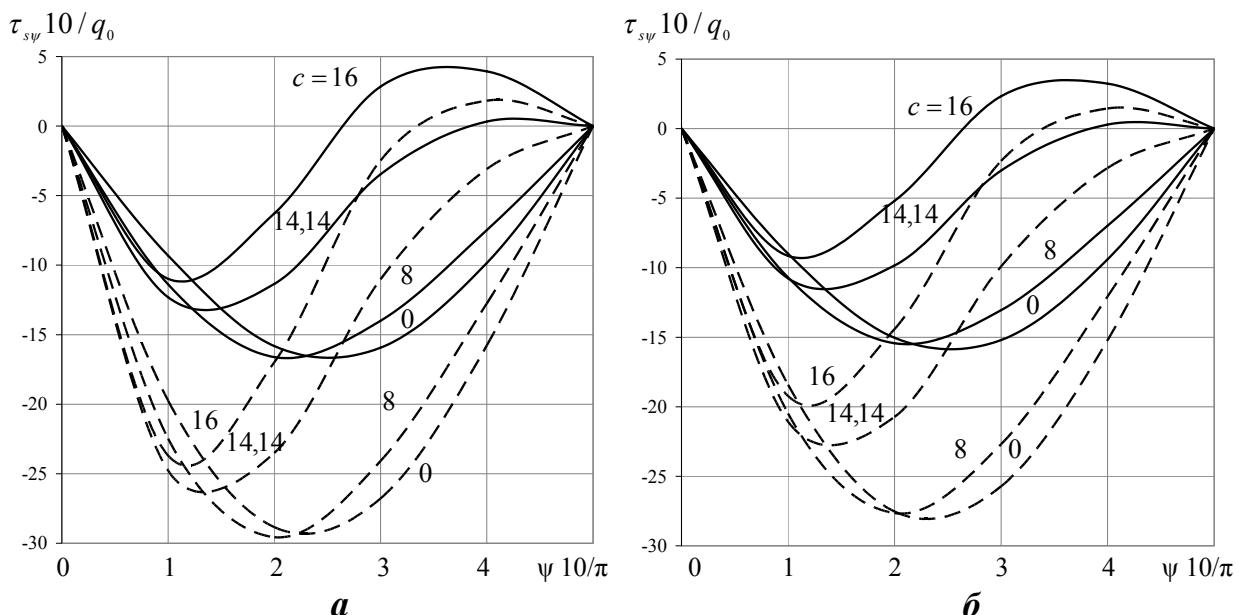


Рис. 6.21 Розподіл дотичних напружень  $\tau_{s\psi}$  вздовж напрямної оболонки в залежності від еліптичності

При цьому, при збільшенні інтервалу локального навантаження, величина дотичних напружень змінюється несуттєво. Перерозподіл величини дотичних напружень спостерігається при зміні форми поперечного перерізу для обох

значень інтервалу прикладеного локального навантаження, як на внутрішній, так і на зовнішній поверхні.

Максимальних амплітудних значень дотичні напруження набувають на внутрішній поверхні оболонки і їх величина зменшується, порівняно з круговою та еліптичною оболонками.

Так, для  $c = 14,14$  величина напружень зменшується в 1,3 рази, для  $c = 16$  – в 1,9 рази при  $\beta = \pi / 8$  та у 1,2 рази для  $c = 14,14$ , в 1,7 рази для  $c = 16$  при  $\beta = \pi / 16$  порівняно з круговою оболонкою ( $c = 0$ ). При цьому у випадку оболонки з еліптичним поперечним перерізом максимальна амплітудна величина дотичних напружень майже не залежить від інтервалу прикладеного навантаження.

Таким чином, проведений аналіз впливу локального навантаження на напружене-деформований стан циліндричних оболонок для чотирьох форм поперечного перерізу показав, що більш суттєвий перерозподіл полів переміщень та напружень має місце для овальних оболонок, порівняно з круговими та еліптичними.

## 6.6 Результати та висновки

1. Розв'язано задачу та досліджено вплив локального навантаження на напружене-деформований стан нетонких циліндричних оболонок з некруговим поперечним перерізом з використанням чисельно-аналітичного підходу, що базується на методі відокремлення змінних у двох координатних напрямках, апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та методу дискретної ортогоналізації.
2. Проілюстрована збіжність отримуваних результатів за рахунок збільшення членів рядів Фур'є, що використовувались для апроксимації відповідного локального навантаження при розв'язуванні задачі. Розглядалися два способи прикладання локального навантаження – на двох та чотирьох ділянках бічної поверхні для інтервалів різної довжини. Було показано, що

зменшення інтервалу прикладання локального навантаження, потребує збільшення кількості членів відповідних рядів. Обчислювальний процес побудований таким чином, що дозволяє дослідити вплив на напруженодеформований стан оболонок як способу і величини інтервалу прикладання навантаження, так геометричних та механічних параметрів оболонок, що розглядаються.

3. Досліджено напружено-деформований стан гофрованих кругових і еліптичних, ізотропних та шаруватих циліндричних оболонок з трансверсально-ізотропним середнім шаром, а також оболонок з угнутими з'єднанями напівгофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження в залежності від способу та інтервалу його прикладання.
4. Розглянуто задачу про напружений стан циліндричних оболонок, що знаходяться під дією локального навантаження, з овальним поперечним перерізом, поверхня відліку яких, описана рівняннями овалів Касині. Досліджено залежність характеристик напружено-деформованого стану – переміщень та напружень в залежності від інтервалу прикладання локального навантаження.

## Розділ 7

### **ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ПРО НАПРУЖЕНИЙ СТАН СУЦІЛЬНИХ КРУГОВИХ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРІВ**

Розв'язуванню осесиметричної задачі про напруженний стан суцільного кругового циліндра скінченої довжини було присвячено цілу низку робіт, про що зазначено в роботах [1, 112, 160, 200]. Це зумовлено складністю побудови точного розв'язку даної задачі, який би строго задовольняв граничним умовам на торцях, що виявляє теоретичну зацікавленість.

Практичне значення розв'язування зазначеного класу задач полягає в потребі дослідження напруженого стану деяких елементів конструкцій різного призначення, які необхідно розглядати в просторовій постановці.

В монографіях [112, 160] наведено відомості про різні підходи до розв'язування даного класу задач. В роботі [200] розглядається підхід до розв'язування осесиметричної задачі про рівновагу товстостінного циліндра на основі застосування однорідних розв'язків, в якому отримані числові результати.

Інший підхід до розв'язування цього класу задач запропоновано в статті [78], який базується на використанні нескінченої системи рівнянь, при цьому доводиться їх регулярність. Однак залишаються труднощі, пов'язані із точним задоволенням граничних умов на торцях.

Деякі результати розв'язування задач даного класу в просторовій постановці наведені в роботах [273, 285, 320]. В статтях [78, 79] отримано розв'язки задачі про напруженний стан порожністих кругових ізотропних та ортотропних циліндрів скінченої довжини для жорстко закріплених торців.

*Огляд робіт автора, на основі яких викладено розділ.* В роботі [75] розглянуто осесиметричну задачу про напружений стан суцільних ізотропних кругових циліндрів при дії навантаження, прикладеного на бічній поверхні за різних граничних умовах на торцях із застосуванням методу відокремлення змінних, що базується на апроксимації сплан-функціями.

В даному розділі розв'язано задачу про напружений стан суцільних ізотропних кругових циліндрів за різних граничних умов на торцях на основі методу сплайн-апроксимації. В підрозділі 7.1 на основі основних рівнянь лінійної теорії пружності для осесиметричного тіла побудовано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в переміщеннях. Для розв'язування отриманої країової задачі застосовано метод сплайн-функцій. В підрозділі 7.2 наведено основні відомості про сплайн-функції. В підрозділі 7.3 за допомогою методу сплайн-апроксимації отримано розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь. При цьому розкрито невизначеність в геометрично особливій точці – центрі циліндра.

Достовірність результатів, отриманих на основі методу сплайн-апроксимації перевірено у випадку шарнірного закріплення з використанням методу відокремлення змінних на основі розкладу розв'язувальних функцій в ряди Фур'є вздовж твірної. Дослідження напруженого стану суцільних ізотропних циліндрів на основі двох підходів – сплайн-апроксимації та дискретних рядів Фур'є при різних граничних умовах на торцях наведено в підрозділі 7.4.

Результати розв'язання задачі наведено у вигляді графіків та таблиць розподілу полів переміщень та напружень.

## 7.1 Постановка задачі та побудова розв'язувальної системи диференціальних рівнянь для суцільних циліндрів в переміщеннях

Розв'язується осесиметрична задача лінійної теорії пружності. Суцільні цилінди, що розглядаються віднесено до ортогональної циліндричної системи

координат  $r, \theta, z$  (рис. 7.1), де  $r$  – полярний радіус,  $\theta$  – центральний кут в поперечному перерізі,  $z$  – поздовжня координата.

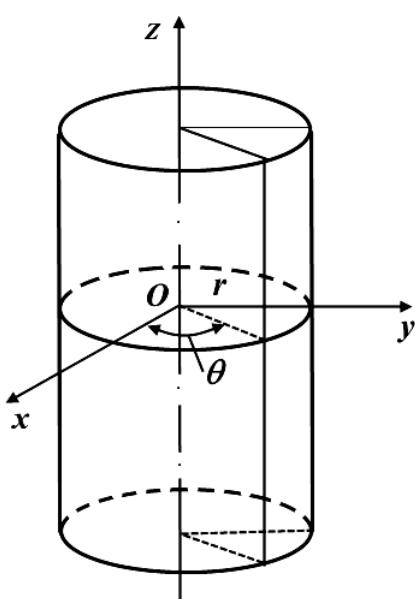


Рис. 7.1 Циліндрична система координат

Координатними поверхнями будуть кругові цилінди  $r = const$ , площини  $\theta = const$ , що проходять через вісь  $z$ , площини  $z = const$ , які перпендикулярні осі  $z$ . При цьому мають місце співвідношення

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta; z = z. \quad (7.1)$$

Коефіцієнти Ляме приймуть значень

$$H_1 = 1; H_2 = r; H_3 = 1. \quad (7.2)$$

Вихідні рівняння лінійної теорії пружності для ізотропного осесиметричного тіла в циліндричній системі координат, з врахуванням (7.1), (7.2) приймуть такого вигляду:

співвідношення Коші

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad (7.3)$$

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0; \quad (7.4)$$

співвідношення закону Гука для ізотропного тіла

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\theta + \sigma_r)], \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{rz} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq l),\end{aligned}\tag{7.5}$$

де  $u_r, u_z$  – переміщення в радіальному та поздовжньому напрямку;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – деформації;  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  – напруження у відповідних напрямках;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Додаючи до рівнянь (7.3) – (7.5) навантаження на бічній поверхні  $r = R$  та граничні умови на торцях  $z = 0; l$ , прийдемо до двовимірної крайової задачі.

Нехай на торцях циліндра мають місце граничні умови шарнірного чи жорсткого закріплення. У випадку шарнірного закріплення торців граничні умови мають вигляд

$$\sigma_z = 0, u_r = 0 \text{ при } z = 0; l.\tag{7.6}$$

З врахуванням другої умови (7.6), граничні умови можна подати в такому вигляді

$$u_r = 0, \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0; l.\tag{7.7}$$

У випадку жорсткого закріплення торців, граничні умови набувають вигляду

$$u_r = 0, u_z = 0 \text{ при } z = 0; l.\tag{7.8}$$

Для розв'язування задачі в інтервалі  $0 \leq r \leq R$  необхідно сформулювати граничні умови при  $r = 0$ . Виходячи з фізичних міркувань, за такі граничні умови можна прийняти

$$\tau_{rz} = 0, u_r = 0 \text{ при } r = 0. \quad (7.9)$$

Границі умови на бічній поверхні  $r = R$  за рахунок прикладеного навантаження мають вигляд

$$\sigma_r = q_r, \tau_{rz} = 0 \text{ при } r = R. \quad (7.10)$$

Для побудови розв'язувальної системи диференціальних рівнянь в переміщеннях, яку отримаємо з вихідних рівнянь (7.3) – (7.5), оберемо за розв'язувальні функції компоненти переміщень  $u_r, u_\theta$ . Після деяких перетворень розв'язувальна система в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u_r, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} &= -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ &\quad (0 \leq r \leq R; 0 \leq z \leq l). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Границі умови при  $r = const$  (7.9), (7.10) в переміщеннях мають вигляд

$$u_r = 0, \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{u_r}{r} + \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= q_r, \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} &= 0 \quad \text{при } r = R. \end{aligned}$$

Для зниження розмірності системи диференціальних рівнянь в частинних похідних застосовується підхід, що базується на сплайн-апроксимації розв'язку в напрямку твірної [74, 78, 79].

## 7.2 Загальні відомості про сплайн-функції та їх застосування до розв'язування краївих задач

Нехай необхідно знайти розв'язок країової задачі

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (7.13)$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) = \gamma_2. \quad (7.14)$$

Задамо на відрізку  $[a, b]$  сітку  $\Delta$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ . Будемо шукати наближений розв'язок країової задачі (7.13), (7.14) у вигляді кубічного сплайну  $S(x)$  класу  $C^2$  з вузлами на сітці  $\Delta$ . Довільним чином обираємо на відрізку  $[a, b]$  точки  $\xi_k \in [a, b]$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ). Ці точки називаються точками колокації. Підставимо сплайн  $S(x)$  до рівняння (7.13) та граничні умови (7.14) і будемо вимагати, щоб нев'язка рівняння (7.13) дорівнювала нулю в точках колокації. Тоді дістанемо таку систему алгебраїчних рівнянь

$$S''(\xi_k) + p(\xi_k)S'(\xi_k) + q(\xi_k)S(\xi_k) = f(\xi_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (7.15)$$

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 S(a) + \beta_2 S'(a) = \gamma_2. \quad (7.16)$$

Отримана система рівнянь має  $N + 3$  невідомих коефіцієнтів кубічного сплайну  $S(x)$  класу  $C^2$ . Оскільки обраний сплайн  $S(x)$  задовольняє двом граничним умовам (7.14) в точках  $x = a$  та  $x = b$ , кількість вузлів колокації має бути рівною  $N + 3$ . В цьому випадку система алгебраїчних рівнянь (7.15), (7.16) має  $N + 3$  рівняння і стільки ж невідомих. Розв'язавши отриману систему

рівнянь і визначивши шукані коефіцієнти, дістанемо аналітичний розв'язок крайової задачі (7.13), (7.14). Цей метод має назву методу сплайн-колокацій.

Розміщення точок колокації на відрізку  $[a, b]$  не може бути довільним. Оскільки розв'язок крайової задачі шукається у вигляді кубічного сплайну, на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  не може бути більше трьох вузлів. Структура системи рівнянь (7.15), (7.16) залежить від вибору точок колокації.

Розширимо рівномірну сітку  $\Delta$  на відрізку  $[a, b]$  допоміжними точками  $x_{-m} < \dots < x_{-1} < a, b < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$  та будемо розглядати сітку  $\Delta_1$  у вигляді  $x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$ .

Розглянемо функцію  $\varphi_m(x, t) = (-1)^{m+1}(m+1)(x-t)^m$  і побудуємо розділену різницю  $(m+1)$ -го порядку відносно значень аргументу  $t = x_i, \dots, x_{i+m+1}$ . В результаті дістанемо функції змінної  $x$

$$\tilde{B}_m^i = \varphi_m[x; x_i, \dots, x_{i+m+1}], i = -m, \dots, N-1. \quad (7.17)$$

Такі функції називаються базисними сплайнами, або  $B$ -сплайнами степеня  $m$  дефекту 1 на розширеній сітці  $\Delta_1$ . Якщо використати тотожність

$$(x-t)_+^m = (x-t)^m + (-1)^{m+1}(t-x)_+^m,$$

то можна отримати інший вигляд для запису (7.17), а саме:

$$\tilde{B}_m^i = (m+1) \sum_{p=i}^{i+m+1} \frac{(x_p - x)_+^m}{\omega'_{m+1,i}(x_p)}, i = -m, \dots, N-1, \quad (7.18)$$

де

$$\omega_{m+1,i}(t) = \prod_{j=i}^{i+m+1} (t - x_j).$$

Практично, при розрахунках, зручно користуватись не самими сплайнами, а нормалізованими сплайнами, що мають вигляд

$$B_m^i(x) = \frac{x_{i+m+1} - x_i}{m+1} \tilde{B}_m^i(x).$$

Для нормалізованих  $B$ -сплайнів має місце рекурентне спiввiдношення

$$B_m^i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+m} - x_i} B_{m-1}^i(x) + \frac{x_{i+m+1} - x_i}{x_{i+m+1} - x_{i+1}} B_{m-1}^{i+1}(x),$$

яке можна використовувати для визначення  $B$ -сплайнів. При цьому

$$B_0^i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i; x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i; x_{i+1}). \end{cases}$$

Функцiї  $B_m^i(x)$  являють собою сплайни степеня  $m$  дефекту 1 зi скiнченими носiями мiнiмальної довжини.

Крiм того, система функцiй  $B_m^i(x)$  ( $i = -m, \dots, N - I$ ) є лiнiйно незалежною i утворює базис у просторi  $S_m(\Delta)$ . Це означає, що кожний сплайн  $S_m(x) \in S_m(\Delta)$  може бути записаний єдиним способом у виглядi

$$S_m(x) = \sum_{i=-m}^{N-1} b_i B_m^i(x),$$

де  $b_i$  – деякi сталi коефiцiенти.

Розглянемо розширену рiвномiрну сiтку  $\Delta_1$   $x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < \dots < x_N < x_{N+1} < \dots < x_{N+m}$  ( $x_{k-1} - x_k = h = const$ ).

$B$ -сплайни третього степеня мають вигляд

$$B_3^i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_{i-2}, \\ t^3, & x_{i-2} \leq x < x_{i-1}, \\ -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, & x_{i-1} \leq x < x_i, \\ 3t^3 - 6t^2 + 4, & x_i \leq x < x_{i+1}, \\ (1-t)^3, & x_{i+1} \leq x < x_{i+2}, \\ 0, & x_{i+2} \leq x < \infty, \end{cases}$$

де  $t = (x_k - x)/h$  на проміжку

$$[x_k; x_{k+1}], k = i = -\frac{m+1}{2}, i + \frac{m+1}{2} - 1; i = -\frac{m+1}{2} + 1, N + \frac{m+1}{2} - 1; m = 1, 3, 5.$$

На рис. 7.2 показані  $B$ -сплайні третього степеня в просторі  $S_3(\Delta)$ . В табл. 7.1 наведені значення сплайнів  $B_3^i(x)$  та їх похідних у вузлах, що належать їх носіям.

Повертаючись до крайової задачі (7.13), (7.14), шукатимемо її розв'язок за допомогою кубічних  $B$ -сплайнів. Для цього розширимо рівномірну сітку  $\Delta$  на відрізку  $[a, b]$  вузлами  $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$ .

Тоді на розширеній сітці  $\Delta_1$  система  $B$ -сплайнів третього степеня  $B_3^i(x)$  ( $i = -1, 0, \dots, N+1$ ) утворює базис в просторі  $S_3(\Delta)$ .

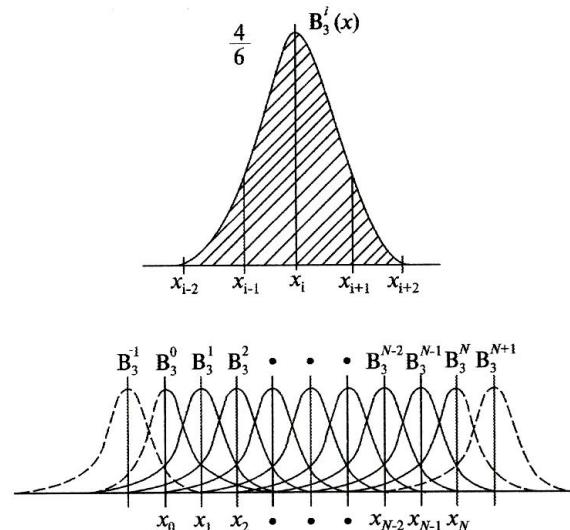


Рис. 7.2 Кубічні  $B$ -сплайні та базис  $B$ -сплайнів у просторі  $S_3(\Delta)$

Табл. 7.1 Значення кубічних  $B$ -сплайнів та їх похідних

$x$	$B_3^i(x)$	$B_3^i'(x)$	$B_3^i''(x)$
$x_{i-2}$	0	0	0
$x_{i-1}$	1/6	1/2h	1/h <sup>2</sup>
$x_i$	4/6	0	-2/h <sup>2</sup>
$x_{i+1}$	1/6	-1/2h	1/h <sup>2</sup>
$x_{i+2}$	0	0	0

Шукатимемо розв'язок крайової задачі (7.13), (7.14) у вигляді

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_3^i(x). \quad (7.19)$$

Розглянемо випадок, коли вузли колокації співпадають з вузлами сплайну сітки  $\Delta$ , тобто  $\xi_i = x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Після підстановки (7.17) до (7.19) з врахуванням властивостей та значень у вузлових точках (табл. 7.1) дістанемо рівняння

$$b_{i-1}A_i + b_iC_i + b_{i+1}B_i = D_i \quad (i = 0, 1, \dots, N), \quad (7.20)$$

де

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{3h} \left( 1 - \frac{1}{2} p(x_i)h + \frac{1}{6} q(x_i)h^2 \right); \\ B_i &= \frac{1}{3h} \left( 1 + \frac{1}{2} p(x_i)h + \frac{1}{6} q(x_i)h^2 \right); \\ C_i &= -A_i - B_i + \frac{1}{6} q(x_i)h; \quad D_i = \frac{1}{3} f(x_i)h. \end{aligned}$$

Границні умови крайової задачі (7.14) з врахуванням (7.17) перетворюються у рівняння

$$\begin{aligned} b_{-1}A_{-1} + b_0C_{-1} + b_1B_{-1} &= D_{-1}, \\ b_{N-1}A_{N+1} + b_NC_{N+1} + b_{N+1}B_{N+1} &= D_{N+1}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

тут

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \alpha_1 h - 3\beta_1; B_{-1} = \alpha_1 h + 3\beta_1; C_{-1} = 4\alpha_1; D_{-1} = 6\gamma_1 h; \\ A_{N+1} &= \alpha_1 h - 3\beta_2; B_{N+1} = \alpha_1 h + 3\beta_2; C_{N+1} = 4\alpha_2; D_{N+1} = 6\gamma_2 h. \end{aligned}$$

Рівняння (7.20), (7.21) утворюють систему  $N+3$  алгебраїчних рівнянь відносно  $N+3$  невідомих  $b_i$ . Якщо з системи (7.20) вилучити невідомі  $b_{-1}$  та  $b_{N+1}$  за допомогою рівнянь (7.21), то дістанемо систему з тридіагональною матрицею

$$\begin{aligned} b_0\tilde{C}_0 + b_1\tilde{B}_0 &= \tilde{D}_0, \\ b_{0i-1}A_{i-1} + b_iC_i + b_{i+1}B_i &= D_i \quad (i=1,2,\dots,N-1), \\ b_{N-1}\tilde{A}_N + b_N\tilde{C}_N &= \tilde{D}_N, \end{aligned} \quad (7.22)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= C_0 - \frac{C_{-1}A_0}{A_{-1}}, \quad \tilde{B}_0 = B_0 - \frac{B_{-1}A_0}{A_{-1}}, \quad \tilde{D}_0 = D_0 - \frac{D_{-1}A_0}{A_{-1}}, \\ \tilde{C}_N &= C_N - \frac{C_{N+1}A_N}{A_{N+1}}, \quad \tilde{B}_N = B_N - \frac{B_{N+1}A_N}{A_{N+1}}, \quad \tilde{D}_N = D_N - \frac{D_{N+1}A_N}{A_{N+1}}. \end{aligned}$$

Якщо виконуються умови

$$\beta_1 \leq 0; \beta_2 \geq 0; \alpha_j \geq 0; |\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0, j=1,2; f(x) \leq q(x) < 0$$

і шаг  $h$  достатньо малий, такий, що

$$1 - \frac{1}{2}p(x_i)h + \frac{1}{6}q(x_i)h^2 \geq 0; 1 + \frac{1}{2}p(x_i)h + \frac{1}{6}q(x_i)h^2 \geq 0,$$

то система рівнянь (7.22) є системою з діагональною перевагою.

Якщо вузли колокацій не співпадають з вузлами розбиття відрізка  $[a, b]$ , то структура системи алгебраїчних рівнянь буде визначатися розміщенням вузлів колокацій. Якщо на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  присутні не більше двох вузлів колокацій, то матриця системи рівнянь буде п'яти-діагональною.

Нехай кількість вузлів сітки  $\Delta$  парне, тобто  $N = 2n + 1$ , а вузли колокації  $\xi_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) задовольняють умовам

$$\xi_{2i} \in [x_{2i}, x_{2i+1}], \quad \xi_{2i+1} \in [x_{2i}, x_{2i+1}] \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Тоді на кожному відрізку  $[x_{2i}, x_{2i+1}]$  буде два вузли колокацій, а на сусідніх відрізках  $[x_{2i+1}, x_{2i+2}]$  їх не буде взагалі. На кожному з відрізків  $[x_{2i}, x_{2i+1}]$  точки колокацій оберемо наступним чином

$$\xi_{2i} = x_{2i} + t_1 h, \quad \xi_{2i+1} = x_{2i} + t_2 h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

де  $t_1$  і  $t_2$  – корені полінома Лежандра другого порядку на відрізку  $[0, 1]$

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \quad t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Такі вузли колокацій називаються оптимальними [74]. Якщо в першому випадку, коли вузли колокацій співпадають з вузлами сітки  $\Delta$ , метод сплайн-колокацій дозволяє отримати наблизений розв'язок задачі (7.13), (7.14) з точністю  $O(h^2)$ , то застосування останньої схеми розташування точок колокацій – з точністю  $O(h^3)$ .

В деяких випадках раціонально вилучити невідомі  $b_{-1}$  та  $b_{N+1}$  на першому етапі розв'язування задачі. Для цього будемо шукати розв'язок крайової задачі у вигляді

$$S(x) = \sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(x), \quad (7.23)$$

де  $\varphi_i(x)$  – лінійні комбінації  $B$ -сплайнів третього степеня, що задовільняють заданим граничним умовам.

Таким чином, шуканий сплайн  $S(x)$ , що апроксимує розв'язок крайової задачі, наперед точно задовільнить граничні умови. В такому поданні розв'язку міститься  $N + 1$  невідомий параметр  $b_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ). Тому при використанні методу необхідно мати  $N + 1$  вузол колокації.

Функції  $\varphi_i(x)$  будуються з врахуванням конкретних видів граничних умов та значень сплайнів  $B_3^i(x)$  у вузлах сітки  $\Delta$ , що містяться в табл. 7.1.

### 7.3 Визначення напруженого стану суцільних кругових циліндрів на основі методу сплайн-функцій

Повертаючись до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (7.11), подамо її розв'язок у вигляді сплайн-функцій

$$u_r(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{1i}(r) \varphi_{1i}(z), \quad u_z(r, z) = \sum_{i=0}^N u_{2i}(r) \varphi_{2i}(z), \quad (7.24)$$

де  $u_{1i}(r), u_{2i}(r)$  – шукані функції, а  $\varphi_{1i}(z), \varphi_{2i}(z)$  – функції, що побудовано за допомогою лінійних комбінацій  $B$ -сплайнів третього степеня, які дозволяють точно задовільнити граничні умови та торцях циліндра (7.8).

У випадку жорсткого закріплення торців, функції  $\varphi_{ij}(z)$  ( $i = 1, 2; j = 0, N$ ) мають вигляд

$$\begin{aligned}
\varphi_{i0}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); \\
\varphi_{il}(z) &= B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z); \\
\varphi_{ij}(z) &= B_3^j \quad (j = 2, 3, \dots, N-2); \\
\varphi_{iN-1}(z) &= B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \\
\varphi_{iN}(z) &= -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z).
\end{aligned}$$

У випадку шарнірного закріплення торців –

$$\begin{aligned}
\varphi_{10}(z) &= -4B_3^{-1}(z) + B_3^0(z); & \varphi_{20}(z) &= B_3^0(z); \\
\varphi_{11}(z) &= B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z); & \varphi_{21}(z) &= B_3^{-1}(z) - 0,5B_3^0(z) + B_3^1(z); \\
\varphi_{1j}(z) &= B_3^j \quad (j = 2, 3, \dots, N-2); & \varphi_{2j}(z) &= B_3^j \quad (j = 2, 3, \dots, N-2); \\
\varphi_{1N-1}(z) &= B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); & \varphi_{2N-1}(z) &= B_3^{N-1}(z) - 0,5B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z); \\
\varphi_{1N}(z) &= -4B_3^N(z) + B_3^{N+1}(z). & \varphi_{2N}(z) &= B_3^{N+1}(z).
\end{aligned}$$

Після підстановки виразів (7.24) до системи диференціальних рівнянь (7.11), необхідно задовольнити їх в точках колокації  $z = z_k$  ( $k = \overline{0, N}$ ). Таким чином отримуємо систему  $2(N+1)$  звичайних диференціальних рівнянь. Аналогічно чинять з граничними умовами на краях  $r = const$  (7.12).

Розв'язувальна система звичайних диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) &= -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}''(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \\
&+ \sum_{i=0}^N \frac{1}{r^2} u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}'(z_k),
\end{aligned} \tag{7.25}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}'(z_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} u_{1i} \varphi_{1i}'(z_k) - \\
&- \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi_{2i}''(z_k) - \sum_{i=0}^N \frac{1}{r} \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) \quad (k = 2(N+1));
\end{aligned}$$

з граничними умовами

$$\sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) = 0, \sum_{i=0}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0 \text{ при } r = 0, \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi_{1i}(z_k) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi_{1i}(z_k) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi'_{2i}(z_k) = q_r, \\ & \sum_{i=0}^N u_{1i} \varphi'_{1i}(z_k) + \sum_{i=1}^N \frac{du_{2i}}{dr} \varphi_{2i}(z_k) = 0 \quad \text{при } r = R. \end{aligned}$$

Отримана система звичайних диференціальних рівнянь (7.25) з граничними умовами (7.26) утворює двоточкову крайову задачу в інтервалі  $0 \leq r \leq R$ . При цьому, в системі рівнянь (7.25) коефіцієнти деяких членів містять множники  $1/r$ , які при  $r = 0$  обертаються на нескінченість.

Оскільки разом зі знаменником до нуля прямують і деякі розв'язувальні функції, то має місце невизначеність  $0/0$ . Для розкриття цієї невизначеності, скористаємося граничними переходами при  $r \rightarrow 0$

$$\frac{u_{1i}}{r} \rightarrow \frac{du_{1i}}{dr} \quad (i = \overline{0, N}), \quad (7.27)$$

тоді рівняння (7.25) в критичній точці ( $r = 0$ ) приймають вигляд

$$\sum_{i=1}^N \frac{d^2 u_{1i}}{dr^2} \varphi_{1i}(z_k) = 0,$$

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^2 u_{2i}}{dr^2} \varphi_{2i}(z_k) = -\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N u_{2i} \varphi''_{2i}(z_k) - \frac{1+2\nu}{1-2\nu} \sum_{i=0}^N \frac{du_{1i}}{dr} \varphi'_{1i}(z_k). \quad (7.28)$$

Додаючи до систем рівнянь (7.25), (7.28) граничні умови (7.26), приходимо до крайової задачі, яку можна розв'язати чисельно. При цьому для  $r = 0$  використовується система рівнянь (7.28), а потім – система рівнянь (7.25).

Введемо позначення  $y_{1i} = u_{1i}$ ,  $y_{2i} = \frac{du_{2i}}{dr}$ ,  $y_{3i} = u_{2i}$ ,  $y_{4i} = \frac{du_{1i}}{dr}$  ( $i = \overline{0, N}$ ). Тоді розв'язувальну систему диференціальних рівнянь (7.25) можна подати у векторному вигляді

$$\frac{d\bar{Y}}{dr} = A(r)\bar{Y} + \bar{f}, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (7.29)$$

де  $\bar{Y} = \{y_{10}, \dots, y_{1N}; y'_{10}, \dots, y'_{1N}; y_{20}, \dots, y_{2N}; y'_{20}, \dots, y'_{2N}; y_{30}, \dots, y_{3N}; y'_{30}, \dots, y'_{3N}; y_{40}, \dots, y_{4N}; y'_{40}, \dots, y'_{4N}\}^T$ ;  $A(r)$  – квадратна матриця порядку  $4(N+1)$ ,  $\bar{f}$  – вектор правої частини. Граничні умови можна записати аналогічно

$$B_1 \bar{Y}(0) = \bar{b}_1, \quad B_2 \bar{Y}(R) = \bar{b}_2. \quad (7.30)$$

Розв'язок крайової задачі (7.29), (7.30) здійснюється стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

#### 7.4 Дослідження напруженого стану суцільних ізотропних циліндрів за різних граничних умов на торцях

Деякі оцінки достовірності отримуваних результатів дістанемо, розв'язавши задачу про напружений стан суцільних циліндрів за шарнірного закріплення торців, двома способами із застосуванням методу відокремлення змінних з використанням рядів Фур'є та за допомогою сплайн-функцій.

При застосуванні методу відокремлення змінних на основі розкладу розв'язувальних функцій в ряди Фур'є вздовж твірної, за розв'язувальні функції

обираємо компоненти напружень  $\sigma_r, \tau_{rz}$  та переміщень  $u_r, u_z$ . Після деяких перетворень, розв'язувальна система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в частинних похідних набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{u_r}{r^2} + \frac{Ev}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{Ev}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_r}{r} - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq l). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Нехай навантаження на бічній поверхні можна подати у вигляді ряду Фур'є вздовж координати  $z$ . Враховуючи цей факт та граничні умови (7.7), подамо розв'язувальні функції у вигляді аналогічних до навантаження рядів Фур'є вздовж твірної, які запишуться таким чином

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \sum_{n=0}^N \sigma_{r,n}(r) \sin \lambda_n z, \quad \tau_{rz}(r, z) = \sum_{n=0}^N \tau_{rz,n}(r) \cos \lambda_n z, \\ u_r(r, z) &= \sum_{n=0}^N u_{r,n}(r) \sin \lambda_n z, \quad u_z(r, z) = \sum_{n=0}^N u_{z,n}(r) \cos \lambda_n z, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = 0, 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Аналогічний вигляд має і відповідне навантаження  $q(z)$ , прикладене на бічній поверхні. Після підстановки рядів (7.32) до розв'язувальної системи диференціальних рівнянь (7.31) та відокремлення змінних, приходимо до розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно амплітудних значень рядів (7.32) (індекс  $n$  в позначеннях розв'язувальних функцій опустимо)

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_r}{dr} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_r}{r} + \lambda_n \tau_{rz} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{u_r}{r^2} - \frac{Ev\lambda_n}{1-\nu^2} \frac{u_z}{r}, \\
\frac{d\tau_{rz}}{dr} &= -\frac{\nu\lambda_n}{1-\nu} \sigma_r - \frac{1}{r} \tau_{rz} - \frac{Ev}{1-\nu^2} \frac{\lambda_n}{r} u_r + \frac{E\lambda_n^2}{1-\nu^2} u_z, \\
\frac{du_r}{dr} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_r}{r} + \frac{\nu\lambda_n}{1-\nu} u_z, \\
\frac{du_z}{dr} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} - \lambda_n u_r \quad (0 \leq r \leq R) \quad (n = 0, 1, \dots, N).
\end{aligned} \tag{7.33}$$

При цьому задовольняються граничні умови на торцях (7.7).

Таким чином, отримано двоточкову крайову задачу для системи рівнянь (7.33) в інтервалі  $0 \leq r \leq R$  з граничними умовами на кінцях інтервалу  $r = 0$  та  $r = R$ . При цьому в рівняннях системи (7.33) коефіцієнти деяких членів містять множники  $1/r$ , які при  $r = 0$  обертаються на нескінченість. Оскільки разом зі знаменником до нуля прямують і деякі розв'язувальні функції, то має місце невизначеність  $0/0$ . Для розкриття цієї невизначеності, аналогічним чином, скористаємося граничними переходами при  $r \rightarrow 0$

$$\frac{\tau_{rz}}{r} \rightarrow \frac{d\tau_{rz}}{dr}, \quad \frac{u_r}{r} \rightarrow \frac{du_r}{dr}. \tag{7.34}$$

З врахуванням (7.34), рівняння системи (7.33) при  $r = 0$  набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_r}{dr} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\sigma_r}{r} + \lambda_n \tau_{rz} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{Ev\lambda_n}{1-\nu^2} \frac{u_z}{r}, \\
\frac{d\tau_{rz}}{dr} &= -\frac{\nu\lambda_n}{1-\nu} \sigma_r - \frac{d\tau_{rz}}{dr} - \frac{Ev\lambda_n}{1-\nu^2} \frac{du_r}{dr} + \frac{E\lambda_n^2}{1-\nu^2} u_z,
\end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{du_r}{dr} + \frac{\nu \lambda_n}{1-\nu} u_z,$$

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz} - \lambda_n u_r.$$

Після деяких перетворень, з врахуванням (7.34), систему (7.35) при  $r = 0$  запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{dr} &= 0, & \frac{d\tau_{rz}}{dr} &= -\nu \lambda_n \sigma_r + \frac{E \lambda_n^2}{2} u_z, \\ \frac{du_r}{dr} &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \sigma_r + \nu \lambda_n u_z, & \frac{du_z}{dr} &= 0. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Додаючи до систем рівнянь (7.33), (7.36) граничні умови при  $r = const$  у вигляді

$$u_r = 0, \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad (7.37)$$

$$\sigma_r = q_r, \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = R,$$

отримуємо одномірну країову задачу, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. При цьому, на першому кроці застосування чисельного методу, використовується система рівнянь (7.36), а потім застосовується система рівнянь (7.33).

Задачу розв'язано за таких умов: радіус циліндра  $R=5$ , довжина циліндра приймає значень  $l_{1,2} = 1,2; 2,1$ , модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . Результати розв'язування задачі для переміщень  $u_r$  та напружень  $\sigma_r, \sigma_\theta$  наведено в табл. 7.2 на зовнішній поверхні вздовж твірної циліндра. Цифрою I позначені розв'язки, отримані на основі методу відокремлення змінних із

застосуванням рядів Фур'є, цифрою II – на основі сплайн-функцій. Як видно із наведених результатів, похибка не перевищує 1 %.

Табл. 7.2 Збіжність розв'язку, отриманого за двома підходами

$l$	$z$	I			II		
		$u_r E_0 / q_0$	$\sigma_\gamma / q_0$	$\sigma_\theta / q_0$	$u_r E_0 / q_0$	$\sigma_\gamma / q_0$	$\sigma_\theta / q_0$
1,2	$l/7$	3,0880	4,3388	3,2484	3,0852	4,3434	3,2498
	$2l/7$	5,5644	7,8183	5,8534	5,5602	7,8195	5,8496
	$3l/7$	6,9387	9,7493	7,2991	6,9332	9,7533	7,2965
	$l/2$	7,1172	10,0089	7,4868	7,1107	10,0091	7,4892
2,1	$l/7$	5,4342	4,3388	3,7162	5,4292	4,3432	3,7171
	$2l/7$	9,7920	7,8183	6,6963	9,7844	7,8195	6,6919
	$3l/7$	12,2104	9,7493	8,3501	12,2003	9,7532	8,3467
	$l/2$	12,5245	10,0071	8,5649	12,5126	10,0087	8,5661

На основі викладеного підходу розв'язано задачу про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів при дії нормального розподіленого навантаження для двох способів закріплення торців.

Задачу розв'язано за таких умов: радіус циліндра  $R_{1,2} = 0,9; 5,0$ ; довжина циліндра приймає значень  $l_{1,2} = 1,2; 2,1$ ; навантаження  $q = q_0 \sin(\pi z / l)$ ,  $q_0 = 10$ ; модуль Юнга  $E = E_0$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ . При цьому розглядались два варіанти граничних умов на торцях: шарнірного та жорсткого закріплення.

Характер розподілу полів переміщень та напружень залежить як від способу закріплення торців, так і від геометричних параметрів розглядуваних циліндрів. В табл. 7.3 наведено відношення довжини до відповідних діаметрів суцільних циліндрів.

З наведених в табл. 7.3 даних випливає, що цилінди з радіусом  $R_2 = 5,0$  для обох значень довжини та циліндр з радіусом  $R_1 = 0,9$  довжини  $l_1 = 1,2$  належать до коротких циліндрів. Циліндр, радіуса  $R_1 = 0,9$  довжини  $l_2 = 2,1$  – до циліндрів середньої довжини.

Табл. 7.3 Відношення довжини до діаметрів розглядуваних циліндрів

$l/2R$		
$l$	$R$	
	0,9	5,0
1,2	0,67	0,12
2,1	1,17	0,21

Результати розв'язування задач наведено на рис. 7.3 – 7.6. Для жорсткого закріплення торців, графіки розподілу полів переміщень, нормальних та колових напружень наведені на рис. 7.3 *a* – 7.6 *a*, для шарнірного – на рис. 7.3 *b* – 7.6 *b* відповідно.

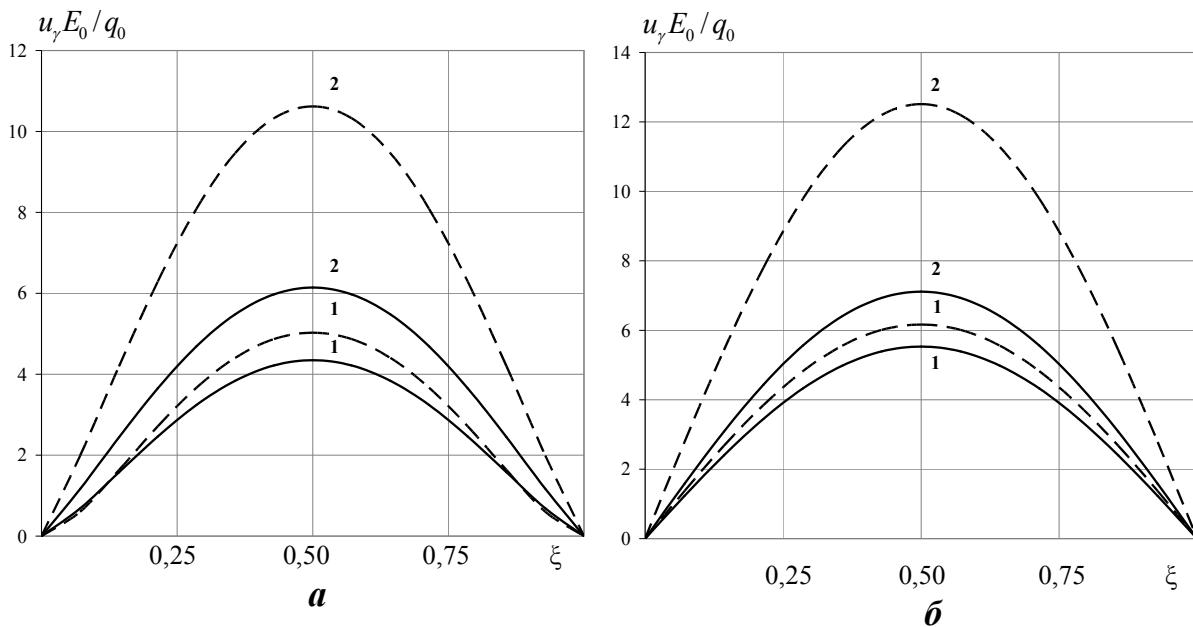


Рис. 7.3 Розподіл переміщень вздовж твірної циліндра в залежності від граничних умов на торцях

Цифрами позначені криві, що відповідають відповідному радіусу циліндра, суцільна лінія характеризує криві розподілу для циліндрів довжиною  $l_1 = 1,2$ , штрихова – для  $l_2 = 2,1$  відповідно. По осі абсцис відкладено величину  $\zeta = z/l_n$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$  ( $n = 1, 2$ ), тобто відношення значення координати  $z$  до довжини  $l_n$  кожного циліндра. Це дозволяє дослідити зміну радіального

переміщення  $u_r$  та напружень  $\sigma_r, \sigma_\theta$  біля торців в залежності від довжини циліндра.

На рис. 7.3 наведено графіки розподілу радіального переміщення  $u_r$  при  $r = R$  вздовж твірної циліндра. Як видно з рис. 7.3 максимальних значень переміщення набувають в середньому перерізі довжини незалежно від способу закріплення торців. При цьому збільшення довжини циліндра призводить до збільшення величини переміщень в 1,2 рази для радіуса  $R_1 = 0,9$  і в 1,8 рази для  $R_1 = 5,0$ .

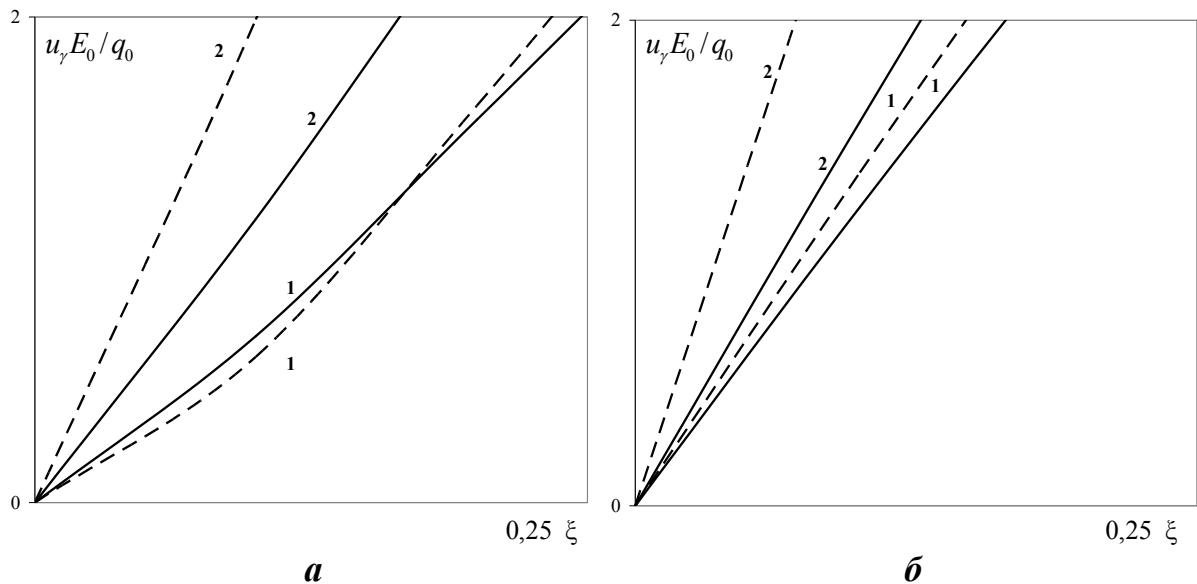


Рис. 7.4 Розподіл переміщень вздовж твірної циліндра в околі торців

На рис. 7.4 наведено графіки розподілу нормальних переміщень в околі торців. Як видно з наведених графіків, якщо для шарнірного закріплення торців (рис. 7.4 *б*) має місце лінійний закон розподілення, то у випадку жорсткого закріплення торців ця лінійність дещо порушується. При цьому для циліндрів, які можна віднести до циліндрів середньої довжини та близьких до них (радіуса  $R_1 = 0,9$ , довжини  $l_{1,2} = 1,2; 2,1$ ) порушення лінійності має більш виражений характер.

На рис. 7.5 наведено графіки розподілу колових напружень  $\sigma_\theta$  при  $r = R$  вздовж твірної циліндра. Як видно з наведених графіків, при шарнірному закріпленні торців (рис. 7.5 *б*), максимальні значення колових напружень мають місце в середньому перерізі довжини.

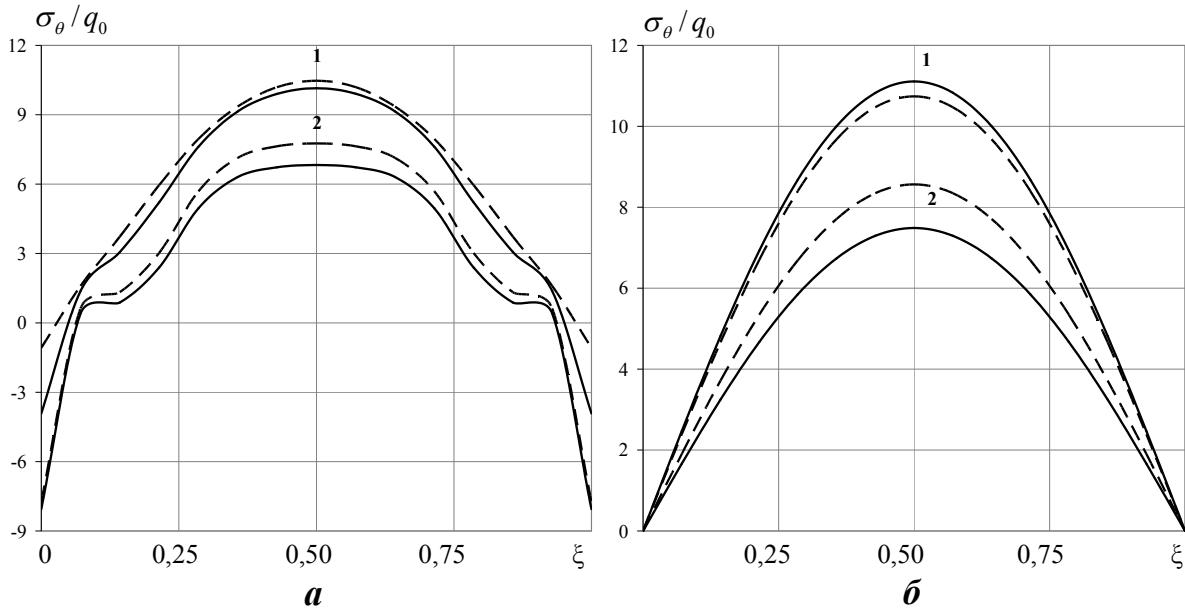


Рис. 7.5 Розподіл колових напружень  $\sigma_\theta$  вздовж твірної циліндра в залежності від способу закріплення торців

При зміні довжини циліндра, величина колових напружень в цьому перерізі для циліндрів, радіус яких  $R_1 = 0,9$ , змінюється не суттєво. Для циліндрів, радіус яких  $R_2 = 5,0$ , за шарнірного закріплення торців максимальна величина напружень збільшується приблизно на 14 %. Для жорсткого закріплення торців (рис. 7.5 а) в середньому перерізі довжини має місце аналогічна картина. При цьому, максимальних значень колові напруження набувають в місцях закріплення. Параболічна форма розподілу колових напружень вздовж твірної у випадку жорсткого закріплення порушується.

Характерним в розподілі радіальних напружень вздовж твірної суцільних циліндрів (рис. 7.6) є той факт, що при шарнірному закріпленні торців, величина напружень не залежить від геометричних параметрів циліндрів. У випадку жорсткого закріплення торців спостерігається порушення параболічної форми кривих при наближенні до торців. При цьому відхилення від параболічної форми більш помітне для циліндрів, що відносяться до класу коротких ( $R_2 = 5,0$ ,  $l_{1,2} = 1,2; 2,1$ ). При наближенні до торців спостерігаються крайові ефекти в розподілі колових та радіальних напружень, які проявляються в тенденції прямування їх величини до нескінченності для коротких циліндрів.

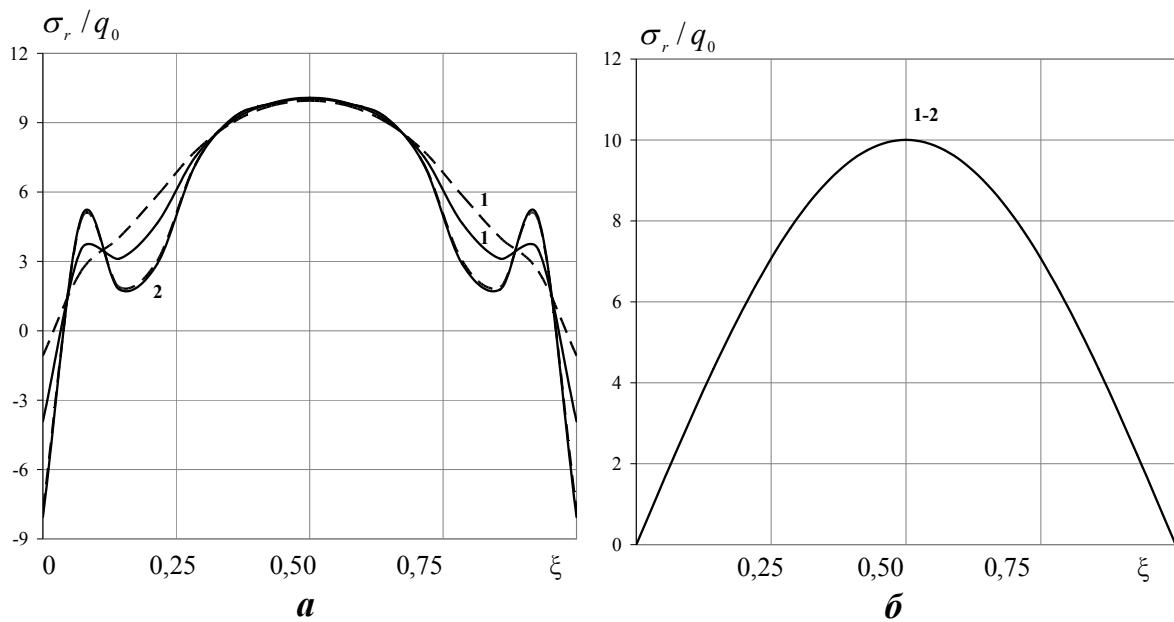


Рис. 7.6 Розподіл радіальних напружень  $\sigma_r$  вздовж твірної циліндра в залежності від способу закріплення торців

На рис. 7.7 – рис. 7.9 наведено графіки розподілу нормальних переміщень, колових та радіальних напружень вздовж радіуса в різних перерізах твірної. Цифрами 1, 2, 3, 4 позначені криві в перерізах  $z = 0; l/14; l/7; 3l/14$  відповідно.

Криві на рис. 7.7 *a*, *б* відповідають шарнірному закріпленню торців, на рис. 7.7 *в*, *г* – жорсткому. Суцільною лінією позначені криві для циліндрів довжиною  $l_1 = 1,2$ , штриховою – для  $l_2 = 2,1$  відповідно. Рис. 7.7 *a*, *в* відповідають циліндрам радіуса  $R_1 = 0,9$ , рис. 7.7 *б*, *г* – радіуса  $R_2 = 5$ . На рис. 7.8 – рис. 7.9 аналогічні позначення.

З графіків, наведених на рис. 7.7 видно, що при збільшенні радіуса циліндра спостерігається якісна зміна розподілу полів переміщень. Так, якщо для  $R_1 = 0,9$  має місце прямолінійний закон розподілу переміщень, то при  $R_2 = 5$  прямолінійність порушується, при цьому, приблизно з середини величини вздовж радіуса спостерігається суттєве зростання величини нормальних переміщень в усіх перерізах твірної як для шарнірного так і для жорсткого закріплення торців.

Для розподілу вздовж радіуса колових напружень мають місце такі закономірності.

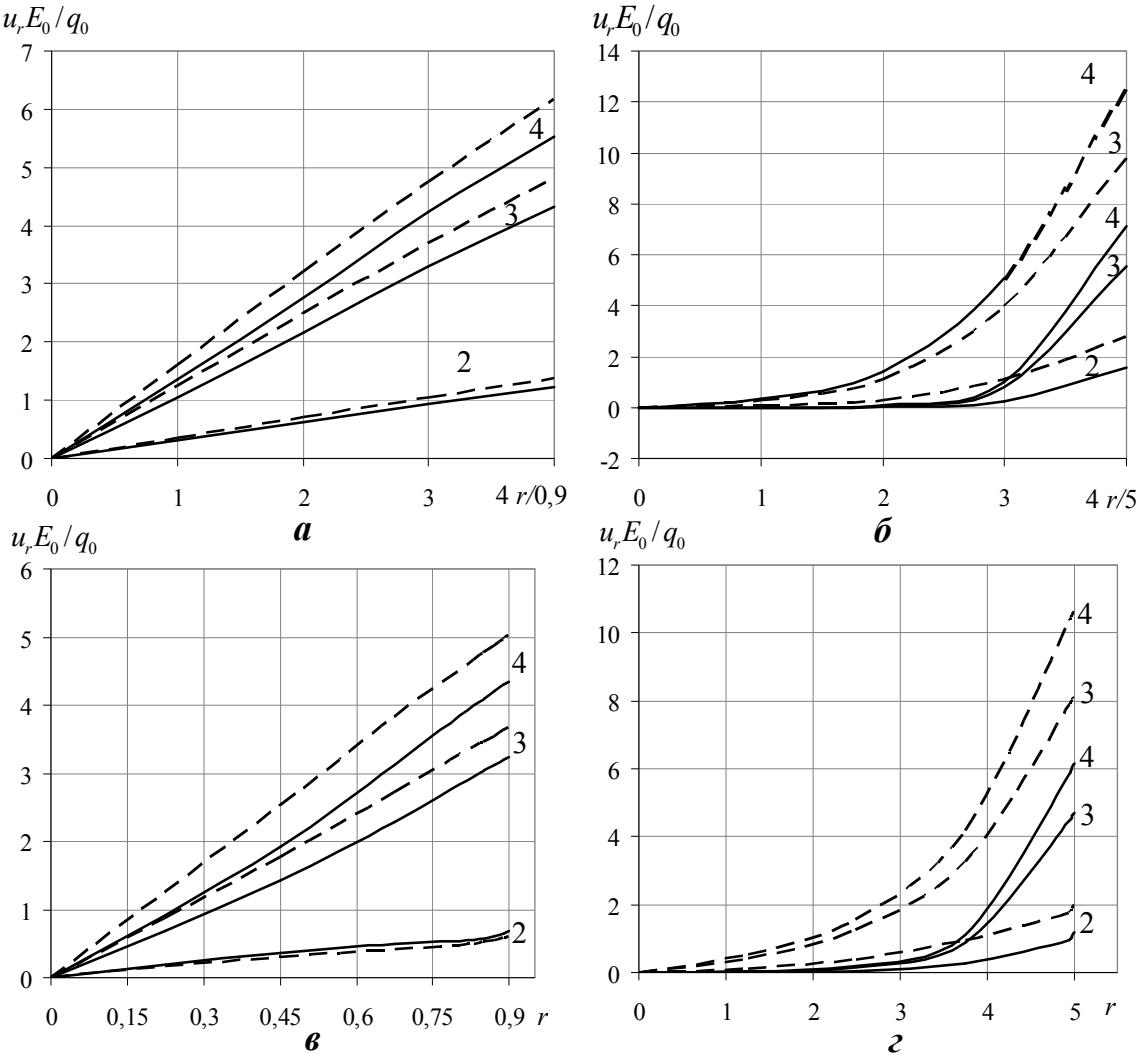


Рис. 7.7 Розподіл радіальних переміщень вздовж радіуса циліндра за різних способів закріплення торців

При шарнірному закріпленні торців для циліндрів меншого радіуса (рис. 7.8 *a*) меншої довжини розподіл напружень носить більш плавний характер, ніж для довших циліндрів. При цьому, для циліндрів більшого радіуса вплив довжини не такий суттєвий. Аналогічно розподілу переміщень, в розподілі колових напружень так само помітне стрімке зростання величини, починаючи з середнього перерізу вздовж радіуса (рис. 7.8 *b*).

Для жорсткого закріплення торців спостерігаються крайові ефекти, що більшою мірою виражені в циліндрах більшого радіуса, меншої довжини (рис. 7.8 *c*).

Схожа картина має місце і для розподілу полів радіальних напружень. Таким чином, з наведених на рис. 7.3 – 7.9 результатів випливає, що при

жорсткому закріпленні торців суцільних циліндрів мають місце відповідні крайові ефекти.

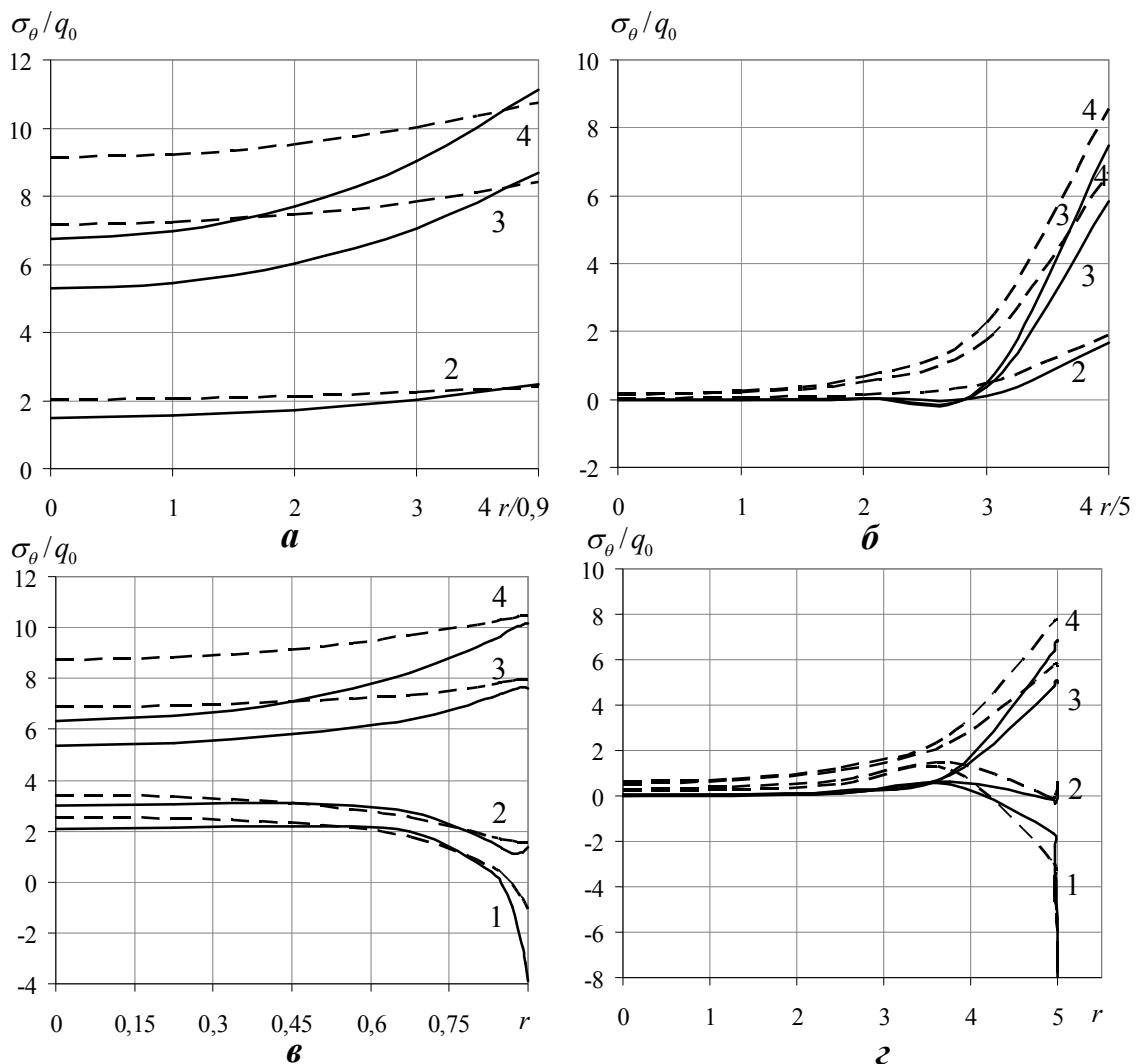


Рис. 7.8 Розподіл колових напружень вздовж радіуса циліндра за різних способів закріплення торців

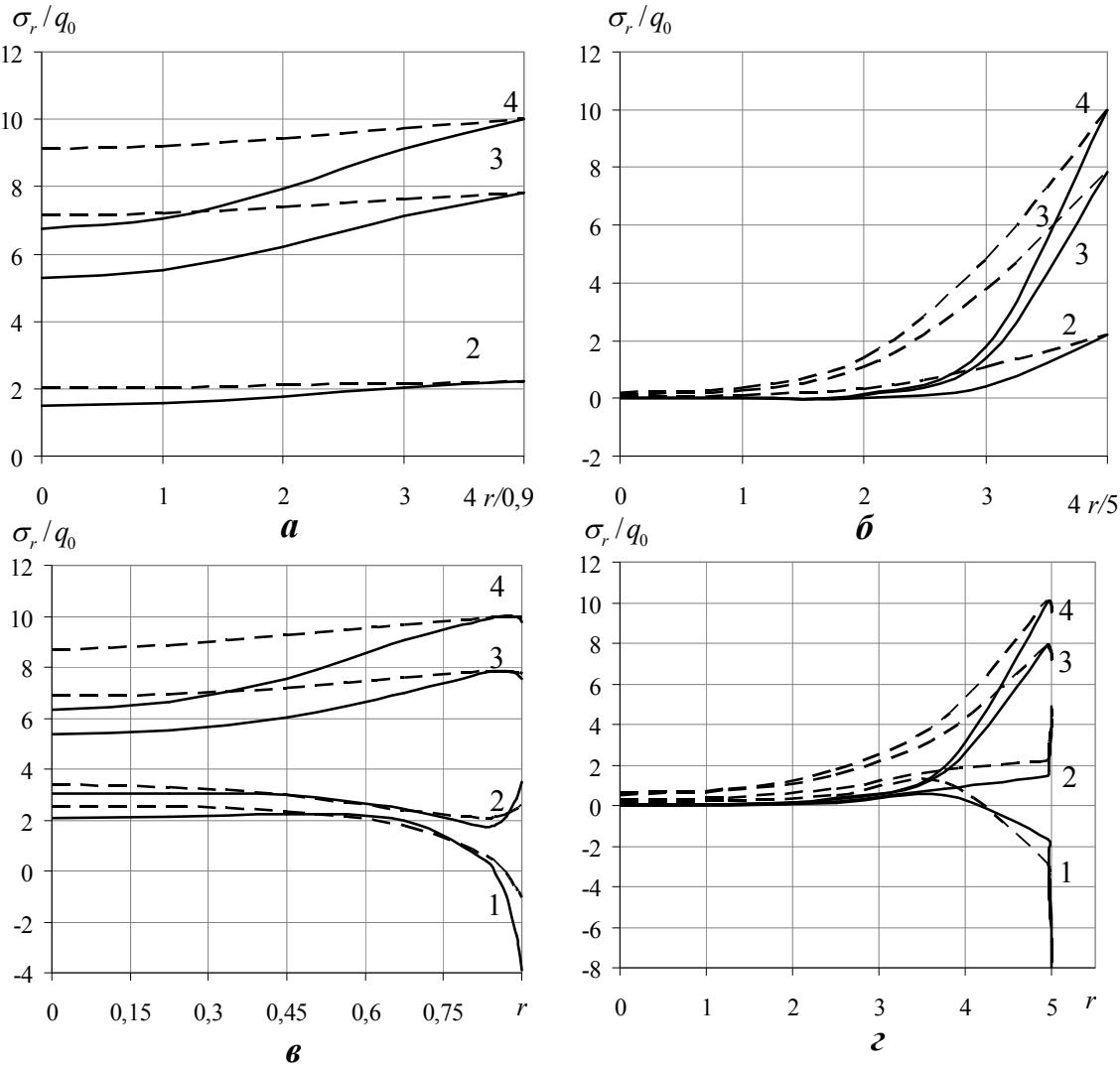


Рис. 7.9 Розподіл радіальних напружень  $\sigma_r$  вздовж радіуса циліндра за різних способів закріплення торців

## 7.5 Результати та висновки

- Побудовано розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в переміщеннях, що описує осесиметричну задачу про напружений стан суцільних ізотропних циліндрів за різних граничних умов на торцях.
- Розв'язано осесиметричну задачу про напужений стан суцільних ізотропних циліндрів під дією рівномірного поверхневого навантаження за різних граничних умов на торцях з використанням чисельно-аналітичного підходу, що базується на методі відокремлення змінних на базі сплайн-функцій та методу дискретної ортогоналізації, при цьому розкрито невизначеність в геометрично особливій точці ( $r = 0$ ).

3. Проведено оцінку достовірності отримуваних результатів. Розв'язано задачу про напружений стан суцільних циліндрів при шарнірному закріпленні торців на основі двох підходів, з використанням методу відокремлення змінних на базі рядів Фур'є та сплайн-функцій, при цьому похибка отриманих результатів не перевищує 1 %.
4. Досліджено напружений стан суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців та в залежності від геометричних параметрів суцільних циліндрів.
5. Було показано, що при зменшенні довжини циліндрів мають місце країові ефекти в розподілі полів колових та радіальних напружень поблизу торців при жорсткому закріпленні. В зоні віддаленій від торців, спосіб їх закріплення майже не впливає на розподіл характеристик напруженого стану суцільних циліндрів.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему лінійної просторової теорії пружності – розробка та удосконалення чисельно-аналітичної методики для дослідження напруженого-деформованого стану циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях та ізотропних суцільних циліндрів за різних способів закріплення торців, що знаходяться під дією прикладеного поверхневого навантаження.

На основі запропонованої методики побудовані розв'язки нових задач про напруженого-деформованій стан розглядуваних класів циліндричних тіл в просторовій постановці; розроблені алгоритми їх чисельного розв'язання, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах та пакетах прикладних програм; проведено дослідження напруженого-деформованого стану та встановлено закономірності в розподілі полів переміщень та напружень, що характерні для даних класів циліндричних тіл, при цьому встановлені нові ефекти пов'язані з геометричними та механічними характеристиками циліндричних тіл першого типу.

Отримані основні наукові результати полягають у наступному:

1. Розроблено спільну чисельно-аналітичну методику розв'язання просторових задач лінійної теорії пружності для циліндричних тіл двох типів: нетонких циліндричних оболонок зі складною геометрією та структурою за певних граничних умов на торцях і суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців, що базується на застосуванні ефективних аналітичних методів зведення вихідної краєвої задачі до одномірної, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації; при цьому отримав розвиток метод апроксимації функцій дискретними рядами

Фур'є для циліндричних тіл первого типу та вперше застосовано метод сплайн-функцій для циліндричних тіл другого.

2. На основі розробленої методики побудовано розв'язки нових просторових задач статики для циліндричних тіл, що знаходяться при дії розподіленого та локального навантаження таких класів: нетонких ізотропних циліндричних оболонок зі знакозмінною кривизною поперечного перерізу (з двопараметричним відхиленням від кругової форми та у вигляді з'єднаних напівгофрів), при цьому використані рівняння гладких кривих для опису поверхні відліку поперечного перерізу (гофрованого еліпса та скороченої епі- (гіпо-) циклоїди); нетонких некругових циліндричних оболонок, виготовлених з анізотропного матеріалу з врахуванням шарів по товщині; суцільних ізотропних циліндрів за різних способів закріплення торців.
3. Проведено оцінки достовірності і точності отримуваних результатів на основі порівняльного аналізу з точними розв'язками в тих випадках, коли вони існують; з розв'язками, отриманими іншими авторами; контролю точності на базі індуктивних оцінок.
4. Розроблено алгоритми, які реалізовані в проблемно-орієнтованих обчислювальних комплексах, що дозволяють проводити обчислювальний процес в широкому діапазоні зміни геометричних та механічних параметрів розглядуваних тіл.
5. Проведено аналіз розподілу полів переміщень та напружень для циліндричних тіл двох типів в залежності від: зміни кривизни поперечного перерізу поверхні відліку з врахуванням анізотропії використовуваних матеріалів, локальності прикладеного навантаження за наявності шарів по товщині для циліндричних тіл первого типу; способу закріплення торців для циліндричних тіл другого типу.
6. Встановлено характерні закономірності в розподілі факторів напруженодеформованого стану циліндричних тіл двох типів та виявлено ряд нових ефектів, пов'язаних з геометричними та механічними характеристиками циліндричних тіл первого типу, зокрема, досліджено ефект суперпозиції

деяких форм поперечних перерізів та надано інженерні рекомендації щодо можливості застосування спрощених схем в залежності від геометричних характеристик при розрахунках на міцність.

Дані дослідження можуть бути основою при проектуванні функціональних елементів авіакосмічної галузі, машинобудування, будівництва споруд, трубопровідної промисловості тощо. Крім того, розроблена методика може бути використана для індуктивних оцінок результатів, отриманих з використанням різних моделей теорії оболонок.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР. 19 (1), 3–12 (1954)
2. Абрамян Б.Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР 26 (2), 65–72 (1958)
3. Абрамян Б.Л., Александров А.Я. Осесимметричные задачи теории упругости. В: Труды II Всесоюзн. съезда по теорет и прикл. механике. Механика твердого тела, Москва, 7–37 (1966)
4. Аврамов К.В., Морачковский О.К., Тонконоженко А.М., Кожарин В.Ю., Кочуров Р.Е. Полуаналитический метод конечных элементов для расчета напряженно-деформируемого состояния цилиндрических оболочек с продольными ребрами жесткости. Проблемы машиностроения. 17(1), 33–41 (2014)
5. Абросов Ю.Ю., Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Влияние эллиптичности поперечного сечения на деформирование длинной цилиндрической оболочки. Прикладная механика. 52 (5), 106–111 (2016)
6. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины. Прикл. математика и механика, 27 (6), 1057 – 1074 (1963)
7. Аксентян О.К., Щепкин Г.Г. Изгиб толстой плиты с шарнирно закрепленным отверстием. В: Труды VII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластинок. Москва, 33–37 (1970)
8. Алберг Д., Нилсон Э., Уолш Д. Теория сплайнов и ее приложения. Мир, Москва (1972).
9. Александров А.Я. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задачи теории упругости и решение осесимметричных задач при помощи аналитических функций. Докл. АН СССР. 129 (4), 754 –757 (1959)
10. Александров А.Я. Некоторые соответствия между функциями напряжений осесимметричной и плоской задачи теории упругости для бесконечного полого тяжелого конуса. Изв. Сибирского отд. АН СССР. (2), 15–24 (1962)

11. Александров А.Я. О решении основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы. В: Аннотации докл. на XIII Междунар. конгрессе по теор. и прикл. механике. Москва, 27 (1972)
12. Александров А.Я. Бородин И.Я., Павлов В.В. Конструкции с заполнителем из пенопластов. Машиностроение, Москва (1972)
13. Александров А.Я., Куршин Л.М. Многослойные пластиинки и оболочки. В: Тр. VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Наука, Москва (1970)
14. Алибаев С.Г., Галиев М.Д., Матросов А.В. Трехмерные модели неоднородных пластин, плит и оболочек В: Актуальные проблемы механики оболочек: Тез. докл. междунар. конф., посвящ. 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Изд-во Ин-та мех. и машиностр. КНЦ РАН, Казань (2000)
15. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек. Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 17 (3), 29–53 (1964)
16. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва (1974)
17. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Наука, Москва (1987)
18. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки. Наук. думка, Киев (1973)
19. Андреев С.В. Расчет фрагмента трехслойной конической оболочки со сложным контуром. Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных и монолитных авиационных конструкций. КАИ, Казань (1983)
20. Андреев С.В., Кузьмин А.А. Расчет одного класса трехслойных несущих и управляющих поверхностей. Прочность, устойчивость и колебания монолитных авиационных конструкций. КАИ, Казань (1983)
21. Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации. Наука, Москва (1988)
22. Ашkenази Е.К., Гольфман И.Б., Рожков Л.П., Сидоров Н.П. Детали из стеклопластика в судовом машиностроении. Судостроение, Ленинград (1974)

23. Бабич И.Ю., Гузь А.Н. Устойчивость стержней, пластин и оболочек из композитных материалов (трехмерная постановка): Обзор. Прикл. механика. **19** (10), 3–19 (1983)
24. Баблоян А.А. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала. Изв. АН Арм. ССР, сер. ф.-м.н. (14), 61–70 (1961)
25. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Анализ трехмерного напряженного и деформированного состояния круговых цилиндрических оболочек. Прикл. математика и механика. **33** (3), 495–511 (1969)
26. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. Прикл. математика и механика. **29** (6), 1035–1053 (1965)
27. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. Мир, Москва (1968)
28. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – Машиностроение, Москва (1977)
29. Блох В. И. Функции напряжений в теории упругости. Прикл. математика и механика. **14** (4), 415–423 (1950)
30. Бояршинов С.В. Ресчет толстостенных полых цилиндров, находящихся под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Расчеты на прочность, жесткость и ползучесть элементов машиностроительных конструкций. Машиностроение, Москва (1953)
31. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. Машиностроение, Москва (1980)
32. Бранков Г.И. Некоторые особенности при исследовании волнообразных оболочек. В: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – Наука, Москва. 79 – 88 (1972)
33. Брюккер Л.Э., Рахин А.С. Испытание трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах. В: Динамика и прочность авиационных конструкций. НГУ-НЭТИ, Новосибирск 73–79 (1978)

34. Валов Г.М. Контактная задача об упругой осесимметричной деформации сплошного и полого кругового цилиндра. В: Труды Сибир. металлург. ин-та. Прикл. математика и механика. (4/А), 19 – 28 (1957)
35. Василенко А.Т., Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Напряженное состояние толстостенных сферических оболочек под несимметричной нагрузкой. Прикл. механика. **18** (4), 22–8 (1982)
36. Васильев В.З. Осесимметричная деформация элементов строительных конструкций. Стройиздат, Ленинград (1988)
37. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. Машиностроение, Москва (1988)
38. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. Наука, Москва (1982)
39. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Вища школа. Киев (1978)
40. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Гостехиздат, Москва (1949)
41. Влайков Г.Г., Григоренко А.Я., Шевченко С.Н. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением. Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Тех. центр НАН Украины, Киев (2001)
42. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. Наука, Москва (1974)
43. Галимов Н.К., Муштари Х.М. Изгиб трехслойных круглых пластин переменной жесткости. В.: Труды семинара по теории оболочек. Казанск. физ.-тех. ин-т АН СССР, Казань (1), 37–47 (1969)
44. Гарбар М. И., Акутин М. С., Егорова Н. М. Справочник по пластическим массам. Химия, Москва (1967)
45. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции, I. Физматгиз, Москва (1959.)

46. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 16 (3), 171–174 (1961)
47. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. – ФИЗМАТЛИТ, Москва (2008)
48. Григорюк Э.И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. Изв.АН СССР, ОНТ. (1), 26–34 (1958)
49. Григорюк Э.И. Коган Е.А. Современное состояние теории многослойных оболочек. Прикл. механика. 8 (6), 3–17 (1972)
50. Григорюк Э.И., Коган Е.А. Статика упругих слоистых оболочек. – НИИ механики Моск. ун-та, Москва (1999)
51. Григорюк Э.И., Корнев В.М. Анализ уравнений трехслойных оболочек несимметричной структуры с жестким заполнителем. Прикл. механика. 4 (3), 1–10 (1968)
52. Григорюк Э.И., Корнев В.М. К формулировке уравнений трехслойных пластин и оболочек. Прочность и пластичность. Наука, Москва (1971)
53. Григорюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. – Машиностроение, Москва (1988)
54. Григорюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассическая теория колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Т. 5. Наука, Москва (1971)
55. Григорюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. Научные труды ин-та МГУ. Московск. гос. ун-т, Москва (1973)
56. Григорюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. Машиностроение, Москва (1973)
57. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. Наука, Москва (1976)
58. Григоренко А.Я. Расчет собственных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины методом сплайн-коллокации. Прикл. механика. 27 (2), 123–126 (1990)

59. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Наук. думка, Киев (1973)
60. Григоренко Я.М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках. Прикл. механика. **32** (6), 3–40 (1996)
61. Григоренко Я.М. Решение задач теории оболочек методами численного анализа. Прикл. механика. 20 (10), 3–22 (1984)
62. Григоренко Я.М., Беренов М.Н. Решение двумерных задач об изгибе прямоугольных пластин на основе сплайн-аппроксимации. Доп. АН УРСР. Сер. А. (8), 22–25 (1987)
63. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т., Петрова Л.Н. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении В: Тр. IV Всесоюз. конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике. Наук. думка, Киев. 46–51 (1968)
64. Григоренко Я.М., Беспалова О.І., Урусова Г.П. Динамічна стійкість оболонок обертання з гофрованою формою твірної. Доповіді НАН України (10), 61– 6 (2011)
65. Григоренко Я.М. Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. Наука, Москва (1992)
66. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Методы расчета оболочек. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости. Наук. думка, Киев (1981)
67. Григоренко Я.М. Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. В: Методы расчёта оболочек: В 5-ти т., Т.4. Наук. думка, Киев (1981)
68. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Численное решение на ЭЦВМ краевых задач о напряженном состоянии оболочек вращения: Аннот. докл. V Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Наука, Москва (1965)
69. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Наук. думка, Киев (1987)
70. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Емельянов Н.Г. и др. Статика элементов конструкций. (Механика композитов: В 12-ти т; Т.8). «А.С.К.», Киев (1999)

71. Григоренко Я.М. Василенко А.Т., Панкратова Н.Д Задачи теории упругости неоднородных тел . Наук. думка, Киев (1991)
72. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Расчет некруговых цилиндрических оболочек. Наукова думка, Киев (1977)
73. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – Вища шк. Головное изд-во, Киев (1985)
74. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. Академпериодика, Киев (2006)
75. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **42** (6), 24 – 31 (2006)
76. Григоренко Я.М., Захарийченко Л.И. Исследование влияния изменения частоты и амплитуды гофрировки цилиндрических оболочек на их напряженно-деформированное состояние. Прикл. механика. **39** (12), 78–86 (2003)
77. Григоренко Я.М., Кокошин С.С. Численный анализ напряженного состояния анизотропных оболочек на базе смешанной модели МКЭ. Прикл. механика. **18** (2), 3–6 (1982)
78. Григоренко Я. М., Крюков Н.Н. Исследование на основе сплайн-аппроксимации полей перемещений и напряжений в цилиндрах при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **33** (12), 30–39 (1997)
79. Григоренко Я. М., Крюков Н.Н. Исследование несимметричного напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **34** (7), 3–10 (1998)
80. Григоренко Я.М. Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Вища школа, Киев (1983)
81. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз.–мех. поля. 58 (4), 70 – 77 (2015)

82. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз впливання змінення кривизни на напружене становище пустотих циліндрів з некруговим поперечним сечением складної форми. Прикл. механіка. 46 (7), 3 – 10 (2010)
83. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз впливання змінення параметров ортотропії на напружене становище пустотих циліндрів з випуклим гофрованим поперечним сечением. Прикл. механіка. 52 (2), 55 – 63 (2016)
84. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого становища пустотих ортотропних циліндрів з гофрованим поперечним сечением. Прикл. механіка. 42 (12), 87 – 96 (2006)
85. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого становища пустотих ортотропних циліндрів з гофрованим еліптическим поперечним сечением. Прикл. механіка. 46 (3), 15 – 24 (2010)
86. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив змінення параметров кривизни на напружене становище пустотих циліндрів з поперечним сечением в виде вогнутых полугофров. Прикл. механіка. 54 (3), 27 – 35 (2018)
87. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив кривизни на напружене становище пустотих циліндрів з поперечним сечением в виде випуклих полугофров. Прикл. механіка. 52 (1), 78 – 85 (2016)
88. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив змін параметрів ортотропії на напруженій стан порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. – мех. поля. 59 (1), 132 – 140 (2016)
89. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Дослідження напруженого станову некругових порожнистих циліндрів складної форми різної кривизни. Мат. методи та фіз. – мех. поля. 56 (3), 122 – 128 (2013)
90. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статики пружних тіл неканонічної форми. Мат. методи та фіз. – мех. поля. 48 (2), 79 – 100 (2005)
91. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є при чисельному розв'язуванні крайових задач. В: Тези доповідей XI Всеукраїнської

- наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 56 (2004)
92. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. 40 (2), 67 – 73 (2004)
93. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Моделювання та дослідження напруженого стану ортотропних циліндрів з некруговим поперечним перерізом. В: Тези доповідей міжнародної конференції "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем", Київ, 272 (2005)
94. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напряженное состояние полых слоистых цилиндров при поверхностной нагрузке. Прикл. механика. 38 (9), 87 – 96 (2002)
95. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. –мех. поля. 55 (4), 125 – 130 (2012)
96. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напряженное состояние полых цилиндров с вогнутым гофрированным поперечным сечением разной кривизны. Прикл. механика. 52 (6), 26 – 33 (2016)
97. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Некругові порожнисті цилінди при дії локального навантаження. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки – 2006", Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 43 (2006)
98. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Об одном подходе к решению задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров. Прикл. механика. 38 (5), 61 – 71 (2002)
99. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. 43 (12), 82 – 90 (2007)

100. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние. Прикл. механика. 40 (9), 87 – 93 (2004)
101. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. 40 (6), 99 – 106 (2004)
102. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. 50 (2), 3 – 26 (2014)
103. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Расчет напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. 47 (6), 48 – 56 (2011)
104. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Расчет напряженного состояния полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Прикл. механика. 38 (12), 72 – 81 (2002)
105. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Прикл. механика. 41 (3), 62 – 69 (2005)
106. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних порожнистих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Доповіді НАН України. (3), 57 – 62 (2011)
107. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 35 – 39 (2016)
108. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Слоистые неоднородные полые цилиндры с вогнутым гофрированным поперечным сечением под действием внутреннего давления. Прикл. механика. 54 (5), 47 – 54 (2018)
109. Григоренко Я.М., Тимонин А.М. Об одном подходе к численному решению двумерных задач теории пластин и оболочек с переменными параметрами. Прикл. механика. 23 (6), 54 – 61 (1987)

110. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Анализ влияния кривизны на напряженное состояние полых эллиптических цилиндров по двум моделям. Вісник Донецького ун-ту. Сер А: Природн. науки. (1), 55 – 58 (2006)
111. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках. Прикл. механика. 42 (8), 44 – 57 (2006)
112. Гринченко В.Т.: Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Наук. думка, Киев (1978)
113. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.: Равновесие упругих тел канонической формы. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т.; Т. 3). Наук. думка, Киев (1985)
114. Гудрамович В.С.: Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики. Техническая механика. (4), 97–104 (2013)
115. Гузь А.Н.: Механика разрушения при сжатии композитных материалов. Наук. думка, Киев (1990)
116. Гузь А.Н.: Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Наук. думка, Киев (1971)
117. Гузь А.Н., Бабич И.Ю.: Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т.; Т. 4). Наук. думка, Киев (1985).
118. Гузь А.Н., Бабич И.Ю.: Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Вища школа, Киев (1980)
119. Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю.: Механика элементов конструкций. Наук. думка, Киев (1983)
120. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.: Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Вища школа, Киев (1982)

121. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.: Статика упругих тел неканонической формы. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т.; Т.2). Наук.думка, Киев (1984)
122. Гуляев В.И. Баженов В.А., Лизунов П.П.: Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. Изд-во при Львов. ун-те, Львов (1978)
123. Даревский В.М.: Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки). – В: Труды VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку (1966)
124. Даревский В.М.: Оболочки под действием локальных нагрузок. Справочник "Прочность, устойчивость, колебания". Машиностроение, Москва (1968)
125. Даревский В.М.: Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках. В кн.: Прочность и динамика авиационных двигателей. Машиностроение, Москва (1964)
126. Донелл Л.Г.: Балки, пластины и оболочки. Наука, Москва (1982)
127. ДСТУ 3850-99 Средства транспортные дорожные. Прицепы и полуприцепы специализированные. Общие технические условия. Введ. 01.01. 2000. Госстандарт Украины, Киев (1999)
128. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф.: Анизотропные многослойные пластины и оболочки. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела (ВИНТИ). (15), 3 – 68 (1983)
129. Емельянов И.Г.: Определение напряженного состояния оболочечных конструкций с применением дискретных рядов Фурье. Вычисл. мех. сплош. сред. 8 (3), 245 – 253 (2015)
130. Жигалко Ю.П.: Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результаты). В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек, IV. Изд-во Казанского универ-та, Казань (1966)
131. Жилин П. А.: Прикладная механика. Основы теории оболочек: Учеб. пособие. Изд-во Политехн. ун-та, Санктпетербург (2006)

132. Ивенс Г.И. Скейлак З.: Механика и термодинамика биологических мембран. Мир, Москва (1982)
133. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В.: Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. Наука, Москва (1977)
134. Ионов В.Н., Огибалов П.М.: Прочность пространственных элементов конструкций. Высшая школа, Москва (1972)
135. Капшивий О.О.: Про розвязання осесиметричної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною. Вісн. Київ. ун-ту. 1 (4), 96–106 (1961)
136. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И., Фролов А.Н.: Статика и динамика тонкостенных оболочных конструкций. Машиностроение, Москва (1975)
137. Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Козлов В.И., Луц В. К. Влияние диссипации и вызванного ею виброразогрева на характеристики колебаний трехслойных пьезоэлектрических оболочек вращения. Акуст. вісн. 4 (3), 39–52 (2001)
138. Кильчевский Н.А.: Механика континуальных систем: Избр. тр. – Наук. думка, Киев (1984)
139. Киричок І.Ф., Жук Я.О., Карнаухова Т.В. Резонансні коливання і дисипативний розігрів гнучкої в'язкопружної балки з п'єзоактуаторами при врахуванні деформацій зсуву. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 60 (2), 66–74 (2017)
140. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Пасько Д.А.: Прочность полых цилиндров. Машиностроение, Москва (1981)
141. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А.: Упругость и прочность цилиндрических тел. Высш. школа, Москва (1975)
142. Колчин Г.Б.: Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. Картя молдовеняскэ, Кишинев (1971)
143. Корн Г., Корн Т.: Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, Москва (1968)
144. Королев В.И.: Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Машиностроение, Москва (1965)

145. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.: Толстые многосвязные пластины. Наук. думка, Киев (1978)
146. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. О моделировании процессов нелинейного взаимодействия стоячих и бегущих изгибных волн в цилиндрических оболочках с жидкостью в условиях внутренних резонансов. Прикл. механика. 50 (4), 3–15 (2014)
147. Кук Р.: О некоторых допущениях при исследовании трехслойных пластин. Прикл. механика. 2 (1), 45–51 (1966)
148. Куликов Г.М., Плотникова С.В.: Решение трехмерных задач для толстых упругих оболочек на основе метода отсчетных поверхностей. Изв. РАН. МТТ. (4), 54–64 (2014)
149. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г. Башелейшвили М.О.: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Наука, Москва (1976)
150. Куранов Б.А., Бобель Н.Т., Игнатьева Э.В.: Устойчивость и колебания составных многослойных и многосвязных оболочек. Расчеты на прочность. (22), 174 – 190 (1981)
151. Курпа Л.В., Осетров А.А.: Решение задач изгиба многослойных пологих оболочек с применением метода R-функций и сплайн-апроксимации. Проблемы машиностроения 13 (2), 38 – 59 (2010)
152. Кушнір Р., Процук Ю. Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплообміну. Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. (8), 103–112 (2008)
153. Кушнір Р., П'янило Я., П'янило А. Особливості застосування числового методу скінчених різниць при моделюванні фізичних процесів. Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. (2), 58–69 (2005)
154. Ланцош К.: Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, Москва (1961)
155. Лехницкий С.Г.: Анизотропные пластины. Изд-во техн.-теор. лит., Москва (1957)
156. Лехницкий С.Г.: Теория упругости анизотропного тела. Наука, Москва (1977)

157. Лисицын Б.М.: Об одном методе решения задач теории упругости. Прикл. механика. 3 (4), 85 – 92 (1967)
158. Луговой П. З., Скосаренко Ю. В.: Исследование деформированного состояния цилиндрической оболочки при действии локальных импульсных нагрузок. Проблеми обчисл. механіки і міцн. констр. (24), 152–163 (2015)
159. Лурье А.И.: Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ. 4 (2), 7–34 (1940)
160. Лурье А.И.: Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, Москва (1955)
161. Лурье А.И.: Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, Москва (1947)
162. Лурье А.И.: Теория упругости. Наука, Москва (1970)
163. Ляв А.: Математическая теория упругости. ОНТИ, Москва – Ленинград (1935)
164. Марчук М.В., Тучапский Р.И.: Динамика упругих геометрически нелинейных нетонких анизотропных оболочек переменной толщины. Прикл. механика. 53 (6), 57–70 (2017)
165. Мейш В.Ф., Павлюк А.В. Динаміка тришарових циліндрических оболонок еліптичного перерізу з поздовжнім ребристим наповнювачем при нестационарних навантаженнях. Доповіді Національної академії наук України. (4), 28–32 (2017)
166. Механика композитных материалов и элементов конструкций : В 3-х т., Т.2. Механика элементов конструкций / Гузь А.Н., Григоренко Я.М., Бабич И.Ю. и др. Наук, думка, Киев (1983)
167. Миленин А. С., Великоиваненко Е. А., Розынка Г. Ф., Пивторак Н. И., Химич А. Н., Сидорук В. А.: Высокопроизводительные методы численных исследований для решения задач экспертизы работоспособности дефектных конструкций. Техническая диагностика и неразрушающий контроль. (1), 27–33 (2018)
168. Михлин С.Г.: Численная реализация вариационных методов. Наука, Москва (1966)

169. Мольченко Л. В., Лоос И. И. Термомагнитоупругое деформирование гибких изотропных оболочек вращения с учетом джоулевого тепла. Прикл. механика. 55 (1), 78 – 90 (2019)
170. Мольченко Л. В., Федорченко Л. Н., Васильева Л. Я. О нелинейной теории магнитоупругости оболочек вращения с учетом джоулева тепла. Прикл. механика. 54 (3), 71– 80 (2018)
171. Мольченко Л., Федорченко Л., Васильєва Л. Напружено-деформований стан ортотропної зрізаної сферичної оболонки змінної жорсткості. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Математика. Механіка. (2), 44–48 (2017)
172. Морс Ф., Фешбах Г.: Методы теоретической физики. Т. 2. Изд-во иностр. лит., Москва (1960)
173. Мусхелишвили Н.И.: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, Москва (1966)
174. Муштари Х.М.: Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия. Прикл. математика и механика. 2 (14), 439–456 (1939)
175. Муштари Х.М.: Об области применимости приближенных теорий трехслойных пластин несимметричного строения с заполнителем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностр. (5), 176–178 (1969)
176. Муштари Х.М., Галимов К.З.: Нелинейная теория упругих оболочек. Таткнигоиздат, Казань (1957)
177. Мяченков В.И., Григорьев И.В.: Расчет оболочных конструкций на ЭВМ. Машиностроение, Москва (1981)
178. Немиш Ю.Н.: Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел. Прикл. механика. 36 (2), 3–38 (2000)
179. Немиш Ю.Н.: Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела. Наук.думка, Киев (1989)
180. Немиш Ю.Н., Блошко Н.М.: Напряженное состоянние упругих цилиндров с выточками. Наук. думка, Киев (1987)

181. Немиш Ю.Н., Чернопиский Д.И.: Упругое равновесие гофрированных тел. Наук. думка, Киев (1983)
182. Никишин В.С., Шапиро Г.С.: Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред. ВЦ АН СССР, Москва (1970)
183. Новожилов В.В.: О погрешности одной из гипотез теории оболочек. Докл. АН СССР. (33), 5–6 (1943)
184. Новожилов В. В.: Развитие метода комплексного преобразования в линейной теории оболочек за 50 лет. Теория оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван (1964)
185. Новожилов В.В.: Теория тонких оболочек. Судопромгиз, Ленинград (1962)
186. Ободан Н.И., Гук Н.А. Обратные задачи в теории тонких оболочек. LAPLAMBERT Academic publishing. (2012)
187. Папкович П.Ф.: Теория упругости. Оборонгиз, Москва (1939)
188. Парトン В.З., Перлин П.И.: Методы математической теории упругости. Наука, Москва (1981)
189. Петушков В.Г.: Применение взрыва в сварочной технике. Наук. думка, Киев (2005)
190. Подильчук Ю.Н.: Граничные задачи статики упругих тел. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т.; Т. 1). Наук. думка, Киев (1984)
191. Подстригач Я.С. Ломакин В.А., Коляно Ю.М.: Термоупругость тел неоднородной структуры. Наука, Москва (1984)
192. Подстригач Я.С., Швец Р.Н.: Термоупругость тонких оболочек. Наукова думка, Киев (1978)
193. Положий Г.Н.: О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод р-аналитических функций комплексного переменного. Укр. мат. журн. 15 (1), 25–45 (1963)
194. Положий Г.Н.: Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Изд-во Киев. ун-та, Киев (1965)

195. Попов Г.Я., Процеров Ю.С.: Осесимметрична задача для упругого цилиндра конечной длины с защемленной боковой поверхностью и с учетом собственного веса. Мат методы и физ.-мат. поля. 57 (1), 57–68 (2014)
196. Попов Г.Я., Процеров Ю.С., Гончар И.А.: Точное решение некоторых осесимметричных задач для упругих цилиндров конечной длины с учетом удельного веса. Прикл. механика. 51 (4), 31–44 (2015)
197. Пособие по физико-механическим характеристикам пенопластов и сотопластов. Стройиздат, Москва (1977)
198. Приказчиков В. Г., Химич А. Н.: Асимптотическая оценка точности собственных чисел эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями. Кибернетика и системный анализ. 53 (3), 32–40 (2017)
199. Приказчиков В. Г., Химич А. Н.: Сравнение по энергии сходимости одношагового и двухшагового итерационных методов. Кибернетика и системный анализ. 53 (1), 26–30 (2017)
200. Прокопов В.К.: Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра. ПММ. 13 (2), 135–144 (1949)
201. Рвачев В.Л.: Геометрические приложения алгебры логики. Техніка, Київ (1967)
202. Рвачев В.Л., Учишвили Л.А.: Об одном методе решения задачи изгиба пластинки, защемленной по контуру. Прикл. механика. 4 (4), 123–128 (1968)
203. Реморов Н.В., Смоловик И.И.: Продольное сжатие полого кругового цилиндра при заданных смещениях на боковой поверхности. – Учен. зап. Кемеров. пед. ин-та. (7), 26–32 (1963)
204. Рожок Л.С.: Визначення напруженого стану порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Вісник НТУ (18), 240 – 243 (2009)
205. Рожок Л.С.: Вплив зміни кривизни поперечного перерізу на напружений стан шаруватих неоднорідних порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному

технічному університеті: матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 92 – 95 (2017)

206. Рожок Л.С.: Вплив локального навантаження на напружений стан некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 125 – 128 (2018)
207. Рожок Л.С.: Вплив параметрів кривизни на напружений стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. В: LXXIII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2017)
208. Рожок Л.С. Вплив форми поперечного перерізу на напружений стан трансверсально-ізотропних некругових порожнистих циліндрів. В: *Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports*, Київ, 131 (2017)
209. Рожок Л.С.: Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів. Доповіді НАН України. (7), 56 – 59 (2006)
210. Рожок Л.С.: Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом. Вісник Київськ. університету. Сер. фіз –мат. науки. (3), 134 – 141 (2002)
211. Рожок Л.С.: Дослідження рівноваги пружних порожнистих неоднорідних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів. В: LXX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2014)
212. Рожок Л.С.: Моделювання напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів при дії локального навантаження. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. Т. 1, Львів, 123 – 124 (2018)

213. Рожок Л.С.: Напружений стан ортотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі. Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2 (21), 358 – 361 (2010)
214. Рожок Л.С.: Напружений стан пружних порожнистих некругових циліндрів в залежності від їх геометричних та механічних параметрів. В: LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2018)
215. Рожок Л.С.: Напружений стан тришаруватих еліптичних циліндрів. Вісник НТУ (9), 420 – 424 (2004)
216. Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних шаруватих порожнистих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. В: LXVII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2011)
217. Рожок Л.С.: Рівновага неоднорідних гофрованих в поперечному перерізі циліндрів при дії локального навантаження. Вісник НТУ (17), 346 – 349 (2008)
218. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. (1), 21 – 24 (2017)
219. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (3), 90 – 94 (2009)
220. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з некруговим поперечним перерізом в залежності від зміни кривизни. В: LXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2010)
221. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів при дії локального навантаження. В: LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету, Київ, 384 – 385 (2008)

222. Рожок Л.С.: Рівновага пружних циліндрів канонічної та неканонічної форми поперечного перерізу. Вісник НТУ (13), 279 – 281 (2006)
223. Рожок Л.С.: Рівновага шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі, циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Вісник НТУ: В 2-х частинах: Частина 2 (26), 457 – 461 (2012)
224. Рожок Л.С.: Трансверсально-ізотропні порожнисті циліндри під дією локального навантаження. Вісник НТУ (11), 163 – 166 (2006)
225. Рожок Л.С.: Шаруваті порожнисті циліндри з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (12), 70 – 75 (2007)
226. Рыбаков К.В., Савин В.Д., Митягин В.А. Автомобильные цистерны для транспортирования нефтепродуктов. Транспорт, Москва (1979)
227. Савелов А.А.: Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство). ФИЗМАТЛИТ, Москва (1960)
228. Савин Г.Н.: Распределение напряжений около отверстий. Наук. думка, Киев (1968)
229. Саркисян В.С.: Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ерев. ун-та, Ереван (1976)
230. Семенюк Н.П., Несходовская Н.А.: Применение теории типа Тимошенко к исследованию устойчивости гофрированных цилиндрических оболочек. Прикл. механика. 38 (6), 99–107 (2002)
231. Сенченков И.К., Рябцев И.А., Турый Э., Червінко О.П. Использование теории растущих тел при расчете напряженно-деформированного состояния деталей, изготавливаемых с применением аддитивных наплавочных технологий. Автоматическая сварка. 5-6 (753), 135–140 (2016)
232. Слободянский М.Г.: Общие формы решения уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. Прикл. математика и механика. 18 (1), 55–75 (1954)
233. Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В., Шупіков О.М. Математичне моделювання фізичних і технологічних процесів і технічних систем. Вісник ХНТУ 58 (3), 408 – 413 (2016)

234. Соляник-Красса К.В.: Осесимметрична задача теории упругости. – Стройиздат, Москва (1987)
235. Соляник-Красса К.В.: Функции напряжений осесимметричной задачи теории упругости. Прикл. математика и механика. 2 (2), 285–267 (1957)
236. Стеклов В.А.: О равновесии упругих тел вращения. Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер.2. 3 (4–5), 173 – 251 (1982)
237. Сумцов В.С.: К вопросу о напряженном состоянии упругого цилиндра конечной длины. Труды Харьк. политехн. ин-та. (25), 99–119 (1959)
238. Тимошенко С.П.: Курс теории упругости. Наук. думка, Киев (1975)
239. Тимошенко С.П., Гудьєр Дж.: Теория упругости. Наука, Москва (1975)
240. Тер-Мкртчян Л.Н.: Осесимметричные задачи теории упругости. – Науч. труды Ленингр. лесотехн. акад. (96), 51–67 (1961)
241. Улітко А.Т.: Загальна задача про рівновагу пружного конуса. Прикл. механіка. 6 (3), 302–307 (1960)
242. Улітко А.Т.: Про однорідний розв'язок для визначення напружень в сферичній оболонці. Прикл. механіка. 8 (3), 282–285 (1962)
243. Улитко А.Ф.: Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Наук. думка, Киев (1979)
244. Успехи механики: В 3-х томах / Под редакцией А.Н. Гузя. Т. 2. Литера ЛТД, Киев (2017)
245. Феодосьев В.И.: Десять лекций – бесед по сопротивлению материалов. "Наука", Москва (1969)
246. Феппль А., Феппль Л.: Сила и деформация. Т. 2. ОНТИ, Москва (1936)
247. Фідрівська Н.М., Слєпужніков Є.Д., Чернишенко О.В.: Визначення напружень в циліндричній трьохшаровій конструкції. Машинобудування. (14), 59–63 (2014)
248. Фilonенко-Бородич M.M.: Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. Прикл. математика и механика. 15 (2), 137–149 (1951)

249. Филоненко-Бородич М.М.: Некоторые решения задачи Ламе для упругого параллелепипеда. Прикл. математика и механика. 17 (4), 465–470 (1953)
250. Фихтенгольц Г.М.: Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. Наука, Москва (1949)
251. Харченко В.М., Марчук М.В., Пакош В.С.: Варіант уточненої теорії мінімального порядку податливих до зсуву та стиснення пластин. Прикладні проблеми механіки і математики. (14), 107–112 (2016)
252. Хемминг Р.В.: Численные методы. MG Graw-Hill, New-York (1962)
253. Черных К.Ф.: Линейная теория оболочек. Часть 2. Изд-во Ленингр. ун-та, Ленинград (1964)
254. Химич А.Н., Декрет В.А., Попов А.В., Чистяков А.В. Численное исследование устойчивости композитных материалов на компьютерах гибридной архитектуры. Проблемы управления и информатики. (4), 73–88 (2018)
255. Хома И.Ю., Дащко О.Г. О решении третьей однородной краевой задачи деформирования трансверсально-изотропной пластины с криволинейным отверстием при всестороннем растяжении. Прикл. механика. 52 (6), 58–70 (2016)
256. Хорошун Л. П., Назаренко Л. В. Нелинейные деформативные свойства композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами. Прикл. механика. 50 (3), 31–41 (2014)
257. Чернопиский Д.И.: О напряженно-деформированном состоянии толстостенных цилиндрических оболочек, ограниченных гофрированными поверхностями. Проблемы прочности. (1), 58–74 (2012)
258. Шацький І.П., Струк А.Б.: Напружений стан трубопроводу в зонах локального руйнування ґрунту. Проблемы прочности. (5), 127–133 (2009)
259. Шевченко Ю.Н.: Численные методы решения прикладных задач. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т.; Т. 6). Наук. думка, Киев (1986)
260. Шевченко В. П., Удовиченко А. Ю.: Исследование напряженно-деформированного состояния оболочек при локальных нагрузках по

уточненным теориям. Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. (1) 94–98( 2014)

261. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. Наук. думка, Киев (1981)
262. Andreev V.I.: Numerical-analytical solution of two-dimensional problem for elastic radially inhomogeneous thick-walled cylinder. Appl. Mech. and Mater. (752 – 753), 642–647 (2015)
263. Beaumont Peter W. R.: On the Problems of Cracking and the Question of Structural Integrity of Engineering Composite Materials. Appl. Composite Materials. 21 (1), 5–43 (2014)
264. Beben Damian: Field Performance of Corrugated Steel Plate Road Culvert under Normal Live-Load Conditions. J. of Performance of Constructed Facilities. 27 (6), 807–817 (2013)
265. Bespalova E. I., Urusova G. P.: Stress State of Branched Shells of Revolution Subject to Transverse Shear and Reduction. Int. Appl .Mech. 51 (4), 410–419 (2015)
266. Bespalova E. I., Urusova G. P.: Vibrations of Shells of Revolution with Branched Meridian. Int. Appl. Mech. 52 (1), 82–89 (2016)
267. Bijlaard P.P.: Stresses from local loading in cylindrical pressure vessels. Trans. ASME. (77) 6. 1955
268. Chan K.T., Wei X.X.: Finite solid circular to arbitrary surface load. Part I. Analytic solution. Int. J. Solids Struct. 37 (40), 5707–5732 (2000)
269. Chernopiskii D.I.: On stress-strain state in thick-walled cylindrical shells bounded by corrugated surfaces. Strength of Materials. 44 (1), 40–52 (2012)
270. Conte S. D., Miller K. Z., Sensenig C. B. The numerical solution of axisymmetric problems in elasticity // In: Ballistic missile and space technology. New York–London: Acad. Press. (4), 173–202 (1960)
271. De Leo A , Contento A , Di Egidio A.: Parametric study of the distribution of the tensile stresses in pavilion structures constituted by four sectors of barrel shells. Meccanica. 52 (10), 2293–2305 (2017)
272. Donnel L.H.: Beams, Plates, and Shells. McGraw-Hill, New York (1976)

273. Fil'shtinskii L.A., Kovalev Yu.D.: Solving the Three – Dimensional Elastic Problem for a Cylinder of Finite Length Subject to Bending. *Int. Appl. Mech.* **40** (5), 532–536 (2004)
274. Flugge W.: *Stresses in Shells*. Springer, Berlin (1967)
275. Fung-Bao Liu, Ying-Chi Tsai: An experimental and numerical investigation of fluid flow in a cross-corrugated channel. *Heat and Mass Transfer*. **46** (5), 585–593 (2010)
276. Galishin A. Z. , Zolochevskii A. A., Sklepus S. N.: Feasibility of Shell Models for Determining Stress–Strain State and Creep Damage of Cylindrical Shells. *Int. Appl. Mech.* **53** (4), 498 – 406 (2017)
277. Grigorenko Ya.M.: Some approaches to modelling and numerical solution of the deformation problems of the flexible shells of revolution. In: *Eur. Mech. Colloq. EUROMECH 292, Modelling of Shells with Nonlinear Behavior* (Germany, Sept. 2 – 4, 1992). Germany (1992)
278. Grigorenko Ya.M.: Some approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problem on deforming of elastic shell systems In: *The 3 Snt.Congr. Industr. and Appl. Math.* (Germany, Hamburg, 3 – 7 July 1995). Germany, Hamburg (1995)
279. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.: Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review). *Int. Appl. Mech.* **49** (2), 123–197 (2013)
280. Grigorenko A.Ya., Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Mechanical Behavior of Elastic Cylinder with Various Cross-Section. In: *77 Annual Meeting of the Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Berlin, 128 (2006)
281. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Application of discrete Fourier series in the boundary value problems of plates and shells. In: *Shell Structures: Theory and Applications* (Vol. 2). – Proceedings of the 9th SSTA Conference, Jurata, Poland, 14 – 16 (2009)
282. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Discrete Fourier-series method in problems of bending variable-thickness rectangular plates. *J. Eng. Math.* **46** (3–4), 269–280 (2003)

283. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. *J. Eng. Math.* (54), 145–157 (2006)
284. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semi-corrugations. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 57 (4), 109 – 120 (2014)
285. Grigorenko Ya. M., Savula Ya.G., Kossak O.S.: Stress – Strain Analysis of Elastic Bodies on the Basis of a Heterogeneous Mathematical Model. *Int. Appl. Mech.* **36** (12), 1595–1604 (2000)
286. Grigorenko Ya.M., Tumashova O.V.: Computation of flexible finite-size cylindrical panels of noncircular cross section. *Int. Appl. Mech.* 28 (12), 839–842 (1992)
287. Grinczenko W.T. Ulitko A.F.: Metoda funkcji własnych w zagadnieniach termosprzeżystosci I elektrosprzeżystosci. *Rozpr. inż.* 20 (1), 83–102 (1972)
288. Gulkowski P.M., Reismann H.: The spherical sandwich shells under axisymmetrical static and dynamic loading. *J.of Sound and Vibration.* 14 (2), 229–240 (1971)
289. Gulkowski P.M., Reismann H.: The spherical sandwich shells under axisymmetrical static and dynamic loading. *J.of Sound and Vibration.* 14 (2), 229–240 (1971)
290. Hart E.L., Hudramovich V.S., Ryabokon S.A., Samarskaya E.V.: Numerical simulation of stress-strain state for nonhomogeneous shell-type structures based on the finite element method. *Modeling and Numerical Simulation of Material Science.* (3), 155 – 157 (2013)
291. Hatanaka K. , Rao S. M. V., Saito T., Mizukaki T.: Numerical investigations on shock oscillations ahead of a hemispherical shell in supersonic flow. *Shock Waves.* 26 (3), 299 –310 (2016)
292. Hashemi M., Zhuk Y. The influence of strain amplitude, temperature and frequency on complex shear moduli of polymer materials under kinematic harmonic loading. *Mechanics and Mechanical Engineering.* 21 (1), 157–170 (2017)
293. He Z., Liu, G., Jiang W., Huang Z., and Zhang D.: Nonlinear Dynamic Responses of a Corrugated Shell Structure under Uniform Load. *J. of Eng. Mech.* 140 (6), 2014
294. Horvay G., Mirobal J.A.: The end problem of cylinders. *Trans. ASME.* E 80 (4), 561–570 (1958)

295. Iyengar K.T., Sundara Raja, Chandrashekara K.: Thermal stress in a finite hollow cylinder to an axicymmetric temperature field at the end surface. *Nucl. Eng. and Des.* 3 (3), 21–31 (1966)
296. Iyengar K.T., Sundara Raja, Yogananda C.V.: Comparison of elasticity and shell theory solutions for long circular cylindrical shells. *AIAA Journal*. 4 (12), 2090–2096 (1966)
297. Iyengar K.T., Sundara Raja, Yogananda C.V.: The end problem of hollow cylinders. *Trans. ASME. E* 33 (3), 237–240 (1966)
298. Janz R. F., Ozpetek S., Ginzton L. E., and Laks M. M.: Regional stress in a noncircular cylinder. *Biophys J.* 55 (1), 173–182 (1989)
299. Javad Hazrati Marangalou, Keita Ito, Bert van Rietbergen: A novel approach to estimate trabecular bone anisotropy from stress tensors. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 14 (1), 39–48 (2015)
300. Kassegne Samuel Kinde, Chun Kyoung-Sik: Buckling characteristic of multi-laminated composite elliptical cylindrical shells. *IJASE*. (7), 1–10 (2015)
301. Khimich A.N., Popov A. V. and Chistyakov O. V.. Hybrid algorithms for solving the algebraic eigenvalue problem with sparse matrix. *Cybernetics and Systems Analysis* (53), 132–146 (2017)
302. Koiter W.T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. In: *Proc. IUTAM Symp. on the theory of thin elastic shells*. Delft. (1959)
303. Kwanghyun Ahn, In-Gyu Lim, Jonghun Yoon, Hoon Huh: A simplified prediction method for the local buckling load of cylindrical tubes. *Int. J. of Precision Eng. and Manufacturing*. 17 (9), 1149–1156 (2016)
304. Leonenko D. V. , Starovoitov E. I.: Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads. *Int.l Appl. Mech.* 52 (4) 359–367 (2016)
305. Librescu L.: *Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*. Noordhoff Inter. Publishing. Leyden, Netherlands (1975)
306. Librescu L., Hause T.: Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructs: a survey. *Composite structures*. (48), 1–17 (2000)

307. Lempriere B.M.: Poissons's ratio in orthotropic materials. – AIAA Jurn. 9 (11), 2216–2221 (1968)
308. Lugovoi P. Z., Sirenko V. N., 3. Starovoitov E. I. , Leonenko D. V.: Vibrations of Circular Composite Plates on an Elastic Foundation Under the Action of Local Loads. Mechanics of Composite Materials. 52 (5), 665–672 (2016)
309. Ma Lei, Zhou Lin-yun, and Wan Shui: Study of the Calculation Method of Lateral Load Distribution on a Continuous Composite Box Girder Bridge with Corrugated Steel Webs. J. of Highway and Transportation Research and Development (English Edition). 8 (2), 42–46 (2014)
310. Maksimyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S.: Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). Int. App. Mech. 48 (6), 613–687 (2012)
311. Malek S., Williams Chr.: The Equilibrium of Corrugated Plates and Shells. Nexus Netw. J. (2017). doi.org /10.1007/s00004-017-0347-7.
312. Marchuk A. V., Gnidash S. V.: Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions. Int. Appl. Mech. 52 (4), 368–377 (2016)
313. Marguerre K.: Anzätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Z. anwer. Math.und Mech. 35 (6 -7), 242–263 (1955)
314. Mashat Daoud S., Carrera E., Zenkour Ashraf M., Al Khateeb Sadah A., Lamberti A.: Evaluation of refined theories for multilayered shells via Axiomatic. Asymptotic method. J. of Mechanical Science and Technology. 28 (11), 4663–4672 (2014)
315. Meleshko V.V.: Equilibrium of an elastic finite cylinder Filon's problem revisited. J. Eng. Math. (40), 355–376 (2003)
316. Mironova L. I. , Fedik I. I.: The local thermal loading of two intersecting cylindrical rotational shells with a variable wall thickness. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 44 (8), 720–725 (2015)
317. Navadeh N., Goroshko I.O., Zhuk Y.A., Fallah A.S. An FEM-based AI approach to model parameter identification for low vibration modes of wind turbine composite

- rotor blades. European Journal of Computational Mechanics. 26 (5-6), 541–556 (2017)
318. Nomachi Sumio G.: On a method of solving axisymmetrical stress problem by means of finite Fourier-Hankel transforms. Annular cylindrical column. In: Proc. 10-th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech, Tokyo (1961)
319. Noor A.K. Burton W.S., Bert C.W.: Computational models for sandwich panels and shells. Appl. Mech. Rev. 9 (3), 155–199 (1996)
320. Podil'chuk Yu.N., Rubtsov Yu. K.: Development of the Boundary – Element Method for Three - Dimensional Problems of Static and Nonstationary Elasticity. Int. Appl. Mech. 40 (2), 160–168 (2004)
321. Popov G. Ya. , Protserov Yu. S. , Gonchar I. A.: Exact Solution of Some Axisymmetric Problems for Elastic Cylinders of Finite Length Taking Into Account Specific Weight. Int. Appl. Mech. 51 (4), 391–402 (2015)
322. Preissner E.C., Vinson J.R.: Application of Theorem of Minimum Potential Energy to a Complex Structure Part I: Two-Dimensional Analysis. Int. J. of solids and structures. 40 (5), 1089–1108 (2003)
323. Piskunov V.G., Rasskazov A.O.: Evolution of the Theory of Laminated Plates and Shells. Int. Appl. Mech. 38 (2), 135–166 (2002)
324. Ramm E., Wall W.A.: Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics. Int. J. for Numerical Methods in Engineering. (60), 381–427 (2002)
325. Ramm E., Wall W.A.: Computational methods for shells. Special Issue of Comput. Methods Appl. Mech. Eng. (184) 2285–2707 (2005)
326. Saito H.: Axisymmetric strain of a finite circular cylinder and disk. Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 18 (68), 58–63 (1952)
327. Shibahara Masao, Oda Juhachi: Problems on the finite hollow cylinders under the axially symmetrical deformations. Bull. JSME. 11 (48), 1000–1014 (1968)
328. Shibahara Masao, Oda Juhachi: Three-dimensional stress analysis of rotating hollow cylinders. Bull. JSME. 12 (53), 976–983 (1969)
329. Shiff P.A.: Sur l'équilibre d'un cylindre élastique. J. math. pures et appl. 3 (9), 407–421 (1883)

330. Sanders J.L.: Nonlinear theories for thin shells. *Quart. Appl. Math.* (21), 21–36 (1963)
331. Sakata K., Ben G.: Fabrication method and compressive properties of CFRP ISOGRID cylindrical shells. *Advanced Composite Materials.* 22 (5 – 6), 445–457 (2012)
332. Semenyuk N. P., Zhukova N. V., Ostapchuk V. V.: Stability of corrugated composite noncircular shells under external pressure. *Int. Appl. Mech.* 43 (12), 1380–1389 (2007)
333. Semenyuk N.P., Zhukova N.B.: Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels Under External Pressure. *Int. Appl. Mech.* 49 (6), 702–714 (2013)
334. Shokrollahi H., Kargarnovin M. H., Fallah F.: Deformation and stress analysis of sandwich cylindrical shells with a flexible core using harmonic differential quadrature method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* 37 (1), 325–337 (2015)
335. Skosarenko Yu.V., Batutina T.Ya.: Dynamics of a Discretely Reinforced Cylindrical Shell Under a Local Impulsive Load. *Int. Appl. Mech.* 52 (2), 173–180 (2017)
336. Soldatos K. P.: Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey. *Appl. Mech. Rev.* 52 (8), 237–274 (1999)
337. Stier B., Simon J.-W., Reese S.: Finite Element Analysis of Layered Fiber Composite Structures Accounting for the Material's Microstructure and Delamination. *Applied Composite Materials.* 22 (2), 171–187 (2015)
338. Storozhuk E. A., Yatsura A. V.: Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells. *Int. Appl. Mech.* 52 (4), 386–397 (2016)
339. Sun X.S., Tan V. B. C., Chen Y., Tan L. B., Jaiman R. K., Tay T. E.: Stress analysis of multi-layered hollow anisotropic composite cylindrical structures using the homogenization method. *Acta Mechanica.* 225 (6), 1649–1672 (2014)
340. Timoshenko S.P.: History of the Strength of Materials. McGraw-Hill Book Company, New York (1953)

341. Vasiliev T.A., Shaldyryan V.A.: Study of Local Singularities of a Stress Field in the Mixed Axisymmetric Problems of Bending of Circular Cylinders. *Int. Appl. Mech.* 48 (2), 74–86 (2012)
342. Wei X.X., Chan K.T.: Three – dimensional analytical solution for finite circular cylinders subjected to indirect tensile test. *Int. J. Solids Struct.* 50 (14), 2395–2406 (2000)
343. Z. Zee Manko and Beben D.: Research on Steel Shell of a Road Bridge Made of Corrugated Plates during Backfilling . *J. of Bridge Eng.* 10 (5), 592–603 (2005)
344. Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V.: Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure. *Russian Aeronautics (Iz VUZ).* 57 (2), 118–126 (2014)
345. Zheng M., Zhao Y., Teng H., Hu J., Yu L.: Elastic Limit Analysis for Elliptical and Circular Tubes Under Lateral Tension. *Arab. J. Sci. and Eng.* 40 (6), 1727–1732 (2015)

## **ДОДАТОК: список публікацій здобувача за темою дисертації**

1. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (2), 67 – 73 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Solving the Stress Problem for Hollow Cylinders with Corrugated Elliptical Cross Section. Int. App. Mech. **40** (2), 169 – 175 (2004))
2. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Определение напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **40** (6), 99 – 106 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Analysis of Orthotropic Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **40** (6), 679–685 (2004))
3. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии частоты и амплитуды гофрировки полых эллиптических цилиндров на их напряженное состояние. Прикл. механика. **40** (9), 87 – 93 (2004) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of corrugation frequency and amplitude on the stress state of hollow elliptic cylinders. Int. App. Mech. **40** (9), 1012–1017 (2004))
4. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Прикл. механика. **41** (3), 62 – 69 (2005) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **41** (3), 277 – 282 (2005))
5. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання краївих задач статики пружних тіл неканонічної форми. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **48** (2), 79 – 100 (2005)
6. Рожок Л.С.: Дослідження впливу локального навантаження на напружений стан гофрованих порожнистих циліндрів. Доповіді НАН України. (7), 56 – 59 (2006)
7. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. J. Eng. Math. **54**, 145–157 (2006)

8. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я., Рожок Л.С.: К решению задачи о напряженном состоянии сплошных цилиндров при различных граничных условиях на торцах. Прикл. механика. **42** (6), 24 – 31 (2006) (Grigorenko Ya.M., Grigorenko A. Ya., Rozhok L.S. Solving the stress problem for solid cylinders with different end conditions. Int. App. Mech. **42** (6), 629 – 635 (2006))
9. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Исследование напряженного состояния нетонких цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением в уточненной и пространственной постановках. Прикл. механика. **42** (8), 44 – 57 (2006) (Grigorenko Ya.M., Urusova G. P., Rozhok L.S. Stress analysis of nonthin elliptic cylindrical shells in refined and spatial formulations . Int. App. Mech. **42** (8), 886 – 894 (2006))
10. Григоренко Я.М., Урусова Г.П., Рожок Л.С.: Анализ влияния кривизны на напряженное состояние полых эллиптических цилиндров по двум моделям. Вісник Донецького ун-ту. Сер А: Природн. науки. (1), 55 – 58 (2006)
11. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **42** (12), 87 – 96 (2006) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of circumferentially corrugated hollow orthotropic cylinders. Int. App. Mech. **42** (12), 1389 – 1397 (2006))
12. Рожок Л.С.: Шаруваті порожнисті цилінди з гофрами в поперечному перерізі при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (12), 70 – 75 (2007)
13. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: О влиянии параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **43** (12), 82 – 90 (2007) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of orthotropy parameters on the stress state of hollow cylinders with elliptic cross-section. Int. App. Mech. **43** (12), 1372 – 1379 (2007))
14. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з гофрованим еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. Доповіді НАН України. (3), 90 – 94 (2009)

15. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным эллиптическим поперечным сечением. Прикл. механика. **46** (3), 15 – 24 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress analysis of longitudinally corrugated hollow orthotropic elliptic cylinders. Int. App. Mech. **46** (3), 255 – 263 (2010))
16. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с некруговым поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **46** (7), 3 – 10 (2010) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of curvature on the stress state of hollow cylinders with complex-shaped noncircular cross-section. Int. App. Mech. **46** (7), 737 – 743 (2010))
17. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних порожністих тришаруватих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. Доповіді НАН України. (3), 57 – 62 (2011)
18. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Расчет напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с поперечным сечением сложной формы. Прикл. механика. **47** (6), 48 – 56 (2011) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. Int. App. Mech. **47** (6), 645 – 652 (2011))
19. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напружений стан порожністих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **55** (4), 125 – 130 (2012) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress state of layered hollow cylinders with irregularly shaped cross-section. J. Math. Sci. 198 (2), 158 – 165 (2014))
20. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Дослідження напруженого стану некругових порожністих циліндрів складної форми різної кривизни. Мат. методи та фіз. –мех. поля. **56** (3), 122 – 128 (2013) (Hryhorenko Ya.M., Rozhok L.S. Investigation of the stress state of noncircular hollow cylinders of complex shapes with different curvatures J. Math. Sci. 205 (5), 635 – 643 (2015))

21. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **50** (2), 3 – 26 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders. Int. App. Mech. **50** (2), 105 – 127 (2014))
22. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semi-corrugations. Mat. методи та фіз.–мех. поля. **57** (4), 109 – 120 (2014) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders with cross sections in the form of convex semicorrugations. J. Math. Sci. **220** (2), 133 – 148 (2017))
23. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Аналіз напруженого стану порожнистих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз.–мех. поля. **58** (4), 70 – 77 (2015) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Analysis of the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. **228** (1), 80 – 89 (2018))
24. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Применение дискретных рядов Фурье к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (1), 78 – 85 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of Curvature on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (1), 49 – 55 (2016))
25. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Анализ влияния изменения параметров ортотропии на напряженное состояние полых цилиндров с выпуклым гофрированным поперечным сечением. Прикл. механика. **52** (2), 55 – 63 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Orthotropy on the Stress State of Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **52** (2), 147 – 154 (2016))
26. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Напряженное состояние полых цилиндров с вогнутым гофрированным поперечным сечением разной кривизны. Прикл. механика. **52** (6), 26 – 33 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress State of

- Longitudinally Corrugated Hollow Cylinders with Different Cross-Sectional Curvature. Int. App. Mech. **52** (6), 581 – 586 (2016))
27. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Вплив зміни параметрів ортотропії на напруженій стан порожністих циліндрів з угнутим гофрованим поперечним перерізом. Мат. методи та фіз.-мех. поля. **59** (1), 132 – 140 (2016) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Influence of the Variations of Orthotropy Parameters on the Stress State of Hollow Cylinders with Concave Corrugated Cross Sections. J. Math. Sci. 228 (3), 268 – 279 (2018))
28. Рожок Л.С.: Рівновага порожністих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу. Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. (1), 21 – 24 (2017)
29. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Влияние изменения параметров кривизны на напряженное состояние полых цилиндров с поперечным сечением в виде вогнутых полугофров. Прикл. механика. **54** (3), 27 – 35 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Effect of Change in the Curvature Parameters on the Stress State of Concave Corrugated Hollow Cylinders. Int. App. Mech. **54** (3), 266 – 274 (2018))
30. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Слоистые неоднородные полые цилиндры с вогнутым гофрированным поперечным сечением под действием внутреннего давления. Прикл. механика. **54** (5), 47 – 54 (2018) (Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Layered Inhomogeneous Hollow Cylinders with Concave Corrugations Under Internal Pressure. Int. App. Mech. **54** (5), 531 – 539 (2018))
31. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Застосування дискретних рядів Фур'є при чисельному розв'язуванні краївих задач. В: Тези доповідей XI Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 56 (2004) (заочно)
32. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Моделювання та дослідження напруженого стану ортотропних циліндрів з некруговим поперечним перерізом. В: Тези доповідей міжнародної конференції "Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем", Київ, 272 (2005) (заочно)

33. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Некругові порожнисті цилінтри при дії локального навантаження. В: Тези доповідей міжнародної наукової конференції "Математичні проблеми технічної механіки – 2006", Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 43 (2006) (заочно)
34. Grigirenko A.Ya., Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Mechanical Behavior of Elastic Cylinder with Various Cross-Section. In: 77 Annual Meeting of the Gesellschaft fur Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, 128 (2006) (заочно)
35. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів при дії локального навантаження. В: LXIV науково-практична конференція науково-педагогічних працівників, аспірантів, студентів та структурних підрозділів університету, Київ, 384 – 385 (2008) (доповідь)
36. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Application of discrete Fourier series in the boundary value problems of plates and shells. In: Shell Structures: Theory and Applications (Vol. 2). – Proceedings of the 9th SSTA Conference, Jurata, Poland, 14 – 16 (2009) (заочно)
37. Рожок Л.С.: Рівновага порожнистих циліндрів з некруговим поперечним перерізом в залежності від зміни кривизни. В: LXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2010) (доповідь)
38. Рожок Л.С.: Рівновага еліптичних шаруватих порожнистих циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. В: LXVII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 376 (2011) (доповідь)
39. Рожок Л.С.: Дослідження рівноваги пружних порожнистих неоднорідних циліндрів з поперечним перерізом у вигляді опуклих напівгофрів. В: LXX наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів,

студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 431 (2014) (доповідь)

40. Григоренко Я.М., Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 35 – 39 (2016) (заочно)
41. Рожок Л.С.: Ряди Фур'є в задачах про рівновагу некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали V Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 92 – 95 (2017) (заочно)
42. Рожок Л.С.: Вплив параметрів кривизни на напруженій стан порожнистих циліндрів з опуклим гофрованим поперечним перерізом. В: LXXIII наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 472 (2017) (доповідь)
43. Рожок Л.С.: Вплив форми поперечного перерізу на напруженій стан трансверсально-ізотропних некругових порожнистих циліндрів. В: Dynamical system modeling and stability investigation: XVIII International Conference: Abstract of Conf. reports, Київ, 131 (2017) (доповідь)
44. Рожок Л.С.: Вплив локального навантаження на напруженій стан некругових порожнистих циліндрів. В: Математика в сучасному технічному університеті: матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф., Київ, 125 – 128 (2018) (заочно)
45. Рожок Л.С.: Напруженій стан пружних порожнистих некругових циліндрів в залежності від їх геометричних та механічних параметрів. В: LXXVI наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів, студентів та працівників відокремлених структурних підрозділів університету, Київ, 482 (2018) (доповідь)
46. Рожок Л.С.: Моделювання напруженого стану порожнистих циліндрів з поперечним перерізом у вигляді з'єднаних угнутих напівгофрів при дії локального навантаження. В: Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. Т. 1, Львів, 123 – 124 (2018) (доповідь)

47. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.: Discrete Fourier-series method in problems of bending variable-thickness rectangular plates. *J. Eng. Math.* **46** (3–4), 269–280 (2003)
48. Рожок Л.С.: Напружений стан тришаруватих еліптичних циліндрів. *Вісник НТУ* (9), 420 – 424 (2004)
49. Рожок Л.С.: Трансверсально-ізотропні порожнисті циліндри під дією локального навантаження. *Вісник НТУ* (11), 163 – 166 (2006)
50. Рожок Л.С.: Рівновага пружних циліндрів канонічної та неканонічної форми поперечного перерізу. *Вісник НТУ* (13), 279 – 281 (2006)
51. Рожок Л.С.: Рівновага неоднорідних гофрованих в поперечному перерізі циліндрів при дії локального навантаження. *Вісник НТУ* (17), 346 – 349 (2008)
52. Рожок Л.С.: Визначення напруженого стану порожнистих циліндрів з еліптичним поперечним перерізом при дії локального навантаження. *Вісник НТУ* (18), 240 – 243 (2009)
53. Рожок Л.С.: Напружений стан ортотропних порожнистих еліптичних циліндрів з гофрами в поперечному перерізі. *Вісник НТУ*: В 2-х частинах: Частина 2 (21), 358 – 361 (2010)
54. Рожок Л.С.: Рівновага шаруватих порожнистих, гофрованих в поперечному перерізі, циліндрів з трансверсально-ізотропним середнім шаром. *Вісник НТУ*: В 2-х частинах: Частина 2 (26), 457 – 461 (2012)