

ІНСТИТУТ НАДТВЕРДИХ МАТЕРІАЛІВ ІМ. В.М.БАКУЛЯ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ ІМ. С.П. ТИМОШЕНКА
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЧЕРНОБАЙ ВОЛОДИМИР СЕРГІЙОВИЧ

УДК 539.3

ДИСЕРТАЦІЯ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТА ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ ВЛАСТИВОСТІ
КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛ З НЕІДЕАЛЬНИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ
ГРАНИЦЯМИ РОЗДІЛУ ЗА АНТИПЛОСКОГО ЗСУВУ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

113 – прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

В.С. Чернобай

Науковий керівник:

Кущ Володимир Іванович, доктор фізико-математичних наук

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Чернобай В.С. Напруженій стан та ефективні пружні властивості кусково-однорідних тіл з недосконалими еліптичними границями розділу за антипlosкого зсуву. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 «Механіка деформівного твердого тіла». - Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАН України, 2018.

Дисертацію присвячено дослідженню напружено-деформованого стану та визначенням ефективних пружних модулів кусково-однорідного тіла з неідеальними еліптичними границями розділу за антипlosкого зсуву. Розв'язано задачі про антипlosкий зсув пружного тіла зі скінченною множиною та періодичною системою довільно розташованих еліптичних включень у припущені неідеального механічного контакту на поверхнях поділу фаз. Аналітичний розв'язок одержано методом рядів з використанням техніки комплексних потенціалів. Шляхом розвинення зумовлених включеннями збурень поля переміщень у ряд Лорана за системою еліптичних гармонік, використання формул їхнього перерозкладу і повного виконання контактних умов крайову задачу теорії пружності зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Доведено застосовність до вказаної системи методу редукції, досліджено швидкість збіжності розв'язку. Модифіковані методи Максвела і Релея визначення ефективних сталих сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень. Виконано чисельний аналіз розглянутих задач та проведено порівняння з відомими літературними даними. Встановлено суттєву залежність концентрації напружень та ефективних пружних модулів від умов контакту на границях розділу, а також від форми, розміру, взаємного розташування і орієнтації включень.

Ключові слова:кусково-однорідне тіло, еліптичне включення, пружність, недосконала границя, комплексний потенціал, метод мультипольних розвинень,

дипольний момент, ефективні пружні властивості, модифікований метод Максвела.

Список публікацій здобувача

1. Kushch, V. I., Chernobai, V. S.: Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface. International Journal of Solids and Structures. (51), 2529-2538 (2014)
2. Kushch, V. I., Sevostianov, I., Chernobai V. S.: Effective conductivity of composite with imperfect contact between elliptic fibers and matrix: Maxwell's homogenization scheme. International Journal of Engineering Science. (83), 146-161 (2014)
3. Kushch, V. I., Mishuris, G. S., Chernobai V. S.: Longitudinal shear of a composite with elliptic nanofibers: local stresses and effective stiffness. International Journal of Engineering Science. (84), 79-94 (2014)
4. Чернобай, В.С., Кущ, В.І.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями за неідеального контакту на поверхнях поділу. Математичні методи та фізико-механічні поля. **59** (4), 72-81 (2016)
5. Чернобай, В.С.: Концентрація напружень на еліптичній нанопорі за антиплоского зсуву. Вісник Київського Національного університету ім. Т.Г. Шевченка, серія "Математика. Механіка". **2** (38), 48-53 (2017)
6. Кущ, В.І., Майстренко, А.Л., Чернобай, В.С.: Модифікований метод Максвела визначення ефективних сталіх структурно-неоднорідних матеріалів. Доповіді НАНУ, серія "Матеріалознавство". (2), 35-41 (2017)
7. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла, ослабленого системою нанорозмірних еліптичних пор чи тріщин. В: Збірник наукових праць 5-ї Міжнародної конференції "Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій", Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, 431-436 (2014) доповідь
8. Чернобай, В.С.: Залежність тепlopровідності алмазовмісних композитів від контактного опору міжфазної границі «алмаз-металева звязка». В: Тези

доповідей Восьмої конференції молодих вчених «Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості та застосування», Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, Київ (2014) доповідь

9. Chernobai, V.S., Bieliaiev, A.I.: Modeling the thermal conductivity of diamond composites. В: Тези Міжнародної конференції PRO-TECH-МА, Bezmiechowa, Poland (2016) заочна

10. Чернобай, В.С.:Модифікований метод Максвела визначення ефективної провідності композитів з урахуванням мікроструктури. В: Тези доповідей Дев'ятої конференції молодих вчених та спеціалістів, Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України, Київ (2016) доповідь

11. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями при неідеальному kontaktі фаз.В: Abstracts of conference reports XVIII International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2017), Київ (2017) доповідь

12. Чернобай, В.С. Модифікований метод Максвела визначення ефективної тепlopровідності композитних волокнистих матеріалів. В: Матеріали конференції КМН–2017, Львів (2017) доповідь

SUMMARY

Chernobai V.S. The stress field and effective elastic properties of a piecewise homogeneous solids with imperfect elliptic boundaries at anti-plane shear. – Qualification scientific thesis as a manuscript.

Thesis for a candidate degree in physical and mathematical sciences, specialty 01.02.04 "Mechanics of deformable solid". – S. P. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine, 2018.

This thesis is devoted to the investigation of the stress fields and the determination of effective elastic moduli of a piecewise homogeneous solids with imperfect elliptic interfaces in case of anti-plane shear. The problem of the anti-plane shear of an elastic solid with a finite set and a periodic system of arbitrary elliptic inclusions is solved in the assumption of imperfect mechanical contact on the interfaces. An analytical solution was obtained by the method of series using the technique of complex potentials. By expanding disturbances of the displacements field caused by the inclusions into a series in the system of elliptic harmonics, using the formulas for their re-expansion, and complete fulfillment of the contact conditions, the boundary-value problem of the theory of elasticity is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. Reduction method have been proven to be apply to this system and the rate of convergence of the solution was investigated. The modified Maxwell and Rayleigh methods for determining effective constants are formulated in terms of the induced dipole moments of elliptic inclusions. Parametric analysis of the problems was carried out and a comparison with known literature data was made. The interface conditions as well as the shape, size, relative location and orientation of the inclusions are found to have a profound effect on the stress concentration and effective elastic moduli.

Key words: piecewise homogeneous solid, elliptic inclusions, elasticity, imperfect interface, complex potential, dipole moment, effective elastic properties, modified Maxwell method.

ЗМІСТ

ВСТУП	8
1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ПО ПРОБЛЕМІ. МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ	14
1.1. Концентрація напружень на структурних неоднорідностях.....	15
1.2. Вплив умов з'єднання/зчеплення/контакту/адгезії.....	16
1.3. Методи прогнозування ефективних пружних сталих.....	19
1.4. Композити з еліптичними включеннями.....	26
1.5. Вибір мети роботи та постановка задач дослідження.....	28
2. АНТИПЛОСКИЙ ЗСУВ ПРОСТОРУ З ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВИ НЕІДЕАЛЬНОГО ПРУЖНОГО КОНТАКТУ	29
2.1. Постановка краєвої задачі. Типи неідеального контакту.....	29
2.2. Схема побудови аналітичного розв'язку в переміщеннях.....	35
2.3. Нескінчена система алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів A_k	38
2.4. Обґрунтування та аналіз збіжності розв'язку	45
2.5. Аналіз концентрації напружень навколо еліптичної неоднорідності з неідеальною границею розділу	49
3. ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРОСТОРУ З МНОЖИНОЮ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ	59
3.1. Постановка краєвої задачі та вид загального розв'язку.....	59
3.2. Формули перерозкладу еліптичних гармонік при переносі і повороті системи координат.....	63
3.3. Одержання нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь....	68
3.4. Простір з періодичною системою еліптичних включень.....	74
3.5. Дослідження збіжності розв'язку та взаємовпливу включень на концентрацію напружень	80

4. ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ МОДУЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ КОМПОЗИТА З ВОЛОКНАМИ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ФАЗ	93
4.1. Постановка задачі гомогенізації. Макроскопічні параметри	93
4.2. Індукований дипольний момент еліптичного включення	97
4.3. Модифікована схема Максвела для композита з еліптичними включеннями і недосконалим контактом фаз.....	100
4.4. Узагальнений метод Релея	108
4.5. Дослідження збіжності модифікованої схеми Максвела.....	109
4.6. Ефективні пружні модулі композита з недосконалими контактними умовами первого типу.....	113
4.7. Ефективні пружні модулі композита з недосконалими контактними умовами другого типу.....	120
ВИСНОВКИ.....	126
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	128
ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації.....	140

ВСТУП

Актуальність теми. Розробка нових структурно-неоднорідних матеріалів є одним з пріоритетних напрямків сучасного науково-технічного прогресу. Утворені поєднанням різнорідних фаз, такі матеріали мають високі фізико-механічні та експлуатаційні характеристики і знаходять дедалі ширше використання у різних галузях техніки. Як правило, створення композитного матеріалу є складною оптимізаційною проблемою. За наявності великої кількості чинників, які впливають на його властивості, вона не може бути розв'язана суто дослідним шляхом і вимагає розвитку теоретичних методів механіки композитів та використання сучасної обчислювальної техніки.

Для структурно-неоднорідних матеріалів властива значна концентрація напружень в фазах та на міжфазних поверхнях, яка є результатом взаємодії включень і визначає структурну чутливість макроскопічних властивостей. Іншим важливим фактором є недосконалість міжфазних границь, яка в реальних композитах зумовлена невідповідністю атомних граток, наявністю поверхневого окислення, дифузійних та реакційних міжфазних зон, міжфазних тріщин тощо. Недосконалість міжфазних границь з необхідністю породжує розмірний ефект, тобто залежність властивостей композита від характерного розміру мікроструктури. Це повною мірою стосується наноструктурованих та нанокомпозитних матеріалів, де вплив міжфазних границь є визначальним. Сказане обумовлює актуальність розробки теоретичних моделей і методів для адекватного врахування впливу мікроструктури і міжфазних границь на напружений стан і ефективні пружні властивості структурно-неоднорідних матеріалів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Результати дисертаційної роботи увійшли до звітів по держбюджетним науково-дослідним роботам Інституту надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України “Дослідження та комп’ютерне моделювання закономірностей формування структури, фізико-механічних і експлуатаційних властивостей композиційних алмазовмісних матеріалів (КАМ) для бурових інструментів на

основі багатокомпонентних систем при інтенсивному електроспіканні” (0967 III-114-12, № держреєстрації 0112U000737, 2012-2014 pp.); “Дослідження та комп’ютерне моделювання закономірностей впливу властивостей міжфазних границь алмаз-зв’язка на фізико-механічні властивості алмазовмісних композитів за критеріями працездатності та ресурсозберігання у породоруйнуючих інструментах” (0971 III-6-15, № держреєстрації 0114U007002, 2015-2017 pp.) та міжнародного наукового проекту 7-ї Рамкової Програми ЄС IRSES-GA-2013-610547 "Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations" (TAMER, 2014-2017).

Метою роботи є розвиток ефективного аналітично-чисельного методу розв’язання краївих задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з неідеальними еліптичними границями розділу та його застосування до аналізу напруженого стану і пружних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів матричного типу.

Досягнення вказаної мети передбачає

- розвиток методу розв’язання краївих задач теорії пружності в багатозв’язних областях з неідеальними еліптичними границями,
- постановку і розв’язання краївих задач пружності для простору з включеннями еліптичної форми і недосконалім контактом уздовж границі поділу,
- модифікацію методів Максвела і Релея і їх застосування до визначення макроскопічних пружних модулів зсуву композиту з еліптичними включеннями і недосконалими міжфазними границями;
- програмну реалізацію методу, одержання чисельних результатів, аналіз закономірностей впливу умов контакту на границях розділу, а також від форми, розміру, взаємного розташування і орієнтації включень на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі.

Об’єктом дослідження є кусково-однорідне лінійно пружне тіло з неідеальними еліптичними границями розділу в умовах антиплоского зсуву.

Предметом дослідження є напружено-деформований стан та ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву кусково-однорідного тіла з неідеальними еліптичними границями розділу.

Методи дослідження. Для побудови аналітичного розв'язку модельних крайових задач використано метод мультипольних розвинень у поєднанні з методом комплексних потенціалів та принципом суперпозиції. Для розв'язання нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовано метод редукції. Для визначення ефективних пружних модулів використано модифіковані методи Максвела і Релея.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що:

- розвинуто ефективний аналітичний метод розв'язання крайових задач теорії пружності в багатозв'язних областях з еліптичними границями;
- одержано строгий аналітичний розв'язок задач про антиплоский зсув пружного тіла зі скінченною множиною та періодичною системою еліптичних включень за умови неідеального пружного контакту на границях розділу;
- теоретично обґрунтовано застосовність методу редукції до нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, одержаних при розв'язанні крайових задач;
- методи Максвела і Релея визначення ефективних пружних сталіх сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень та запропоновано їх узагальнення на випадок багаточасткових моделей;
- шляхом аналізу значного об'єму розрахункових даних визначено закономірності впливу параметрів структури та умов контакту на границях розділу на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідних тіл з еліптичними включеннями.

Достовірність отриманих результатів. Достовірність результатів роботи забезпечується коректністю постановок розглянутих у роботі крайових задач, обґрунтованістю використаних фізичних і математичних моделей та методів, теоретичним обґрунтуванням та практичною перевіркою збіжності чисельних

результатів та узгодженням отриманих чисельних результатів з відомими для частинних випадків літературними даними.

Теоретична та практична цінність отриманих в роботі результатів.

Розвинутий метод може бути застосований до розв'язання широкого класу краївих задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з еліптичними поверхнями розділу та недосконалими поверхнями розділу. Одержані строгі розв'язки ряду модельних задач механіки композитів можуть бути використані у якості еталонних для оцінки точності та меж застосовності наближених підходів до визначення напруженого стану та макроскопічних властивостей композитних матеріалів. Розроблені програмні засоби дозволяють дослідити такі характерні для композитів явища як зумовлена взаємодією включень концентрація напружень, структурна чутливість макроскопічних властивостей, вплив недосконалості міжфазних границь і т.д., а отже, можуть бути використані при розробці нових композитів з підвищеними фізико-механічними характеристиками.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, виконаним під науковим керівництвом доктора фіз.-мат. наук В.І. Куща. Представлені до захисту результати отримано здобувачем особисто. В опублікованих у співавторстві роботах дисертанту належить отримання нескінчених систем алгебраїчних рівнянь для одно- та багаточасткових задач та їх асимптотичний аналіз, отримання виразів для індукованих дипольних моментів еліптичних включень, розробка програмних засобів та чисельний аналіз закономірностей впливу неідеального контакту фаз та структурних параметрів на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідного тіла. Науковому керівнику Кущу В.І. належить постановка задачі дослідження, ідея методу розв'язання багаточасткових задач, узагальнення методу Максвела для оцінки ефективних властивостей кусково-однорідних тіл, а також якісна оцінка і інтерпретація отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на VII конференції молодих вчених

«Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості та застосування» (Київ, 2014); 5-й Міжнародній конференції "Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій" (Львів, 2014); First Summer School on Micromechanics (Bezmiechowa, Poland, 2015); IX конференції молодих вчених та спеціалістів "Надтверді композиційні матеріали та покриття: отримання, властивості, застосування" (Київ, 2016); XVIII International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (Kyiv, 2017); XXV науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАН України (Львів, 2017).

Дисертаційна праця у повному обсязі обговорювалася на науковому семінарі відділу комп'ютерного моделювання та механіки композиційних матеріалів Інституту надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора технічних наук, професора А. Л. Майстренка, секції Вченої ради Інституту надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора технічних наук, професора А. Л. Майстренка та на семінарі з наукового напрямку «Механіка композитних і неоднорідних середовищ» Інституту механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом чл.-кор. НАНУ, доктора фізико-математичних наук, професора Я. Я. Рущицького.

Публікації. Результати дисертаційної роботи відображені у 12 наукових працях, серед яких 3 статті в міжнародних наукових журналах; 3 статті у вітчизняних фахових виданнях, які входять до міжнародних наукометричних баз; 6 робіт у матеріалах конференцій. Опубліковані роботи з достатньою повнотою відображають зміст дисертації. В працях, що надруковані у співавторстві, В.І. Кущу і I. Sevostianov належить постановка задачі, ідея методу розв'язання багаточасткових задач, узагальнення методу Maxwella для оцінки ефективних властивостей кусково-однорідних тіл; А.Л. Майстренку та G. S. Mishuris – систематизація та обговорення результатів. Особисто дисертанту належить отримання нескінчених систем алгебраїчних рівнянь для одно- та багаточасткових задач та їх асимптотичний аналіз, отримання виразів

для індукованих дипольних моментів еліптичних включень, розробка програмних засобів та чисельний аналіз закономірностей впливу неідеального контакту фаз та структурних параметрів на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідного тіла.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної літератури, що включає 129 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 120 сторінок тексту, 35 рисунків та графіків, 16 таблиць.

Автор висловлює ширу подяку науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук В.І. Кущу за постійну увагу та допомогу при підготовці дисертації.

Розділ 1.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ПО ПРОБЛЕМІ. МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретичне дослідження напруженого стану і пружних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів зазвичай поєднує два масштабні рівні розгляду. На мікрорівні, де у якості характерного лінійного розміру взято розмір неоднорідності, композит розглядається як деяка конструкція. Аналіз структурної моделі, яка імітує мікроструктуру композита (наприклад, рис. 1.1), дозволяє оцінити амплітуду та розподіл локальних полів переміщень,

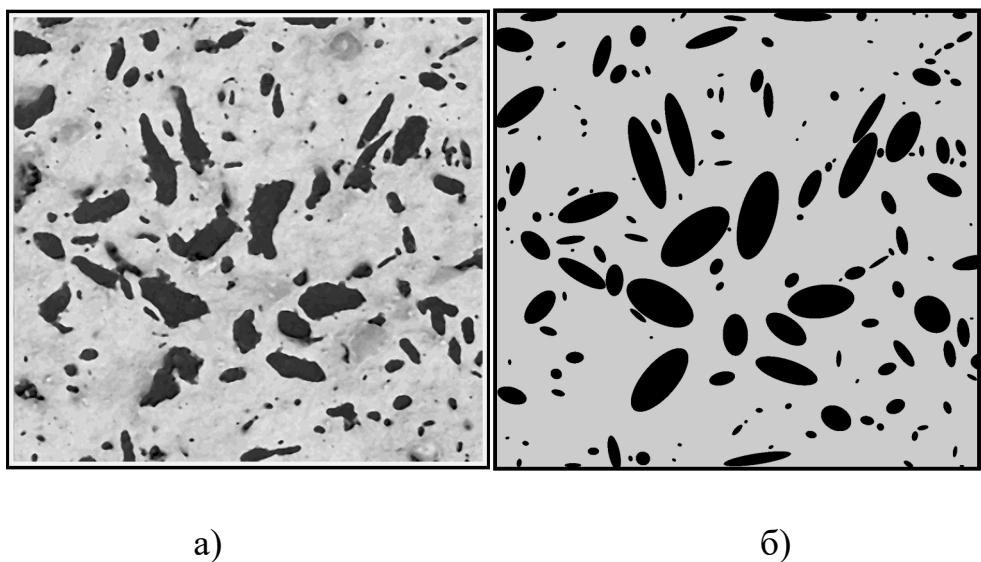


Рис. 1.1. Типова мікроструктура композиту AlN-Mo (а) і його модель (б)

деформацій та напружень в об'ємі фаз та на міжфазних поверхнях. При аналізі ж конструкцій з композитних матеріалів на макрорівні у якості моделі композиту вибирають однорідний матеріал з властивостями, які має макрооб'єм композитного матеріалу. Такі властивості композиту дістали в літературі назву макроскопічних або ефективних, а процедура їх визначення - задачі усереднення чи гомогенізації. Ця задача полягає у встановленні зв'язку між середніми в межах представницького об'єму композиту значеннями

відповідних локальних полів. Вказані середні, або макроскопічні, значення можуть бути одержані як інтегруванням розв'язку крайової задачі для деякої моделі мікроструктури, так і з інших міркувань - скажімо, з варіаційних принципів.

Для композитів з малим об'ємним вмістом дискретної фази та помірним співвідношенням властивостей фаз реалістичні оцінки локальних полів і ефективних параметрів забезпечуються аналізом простих одночасткових моделей. Навпаки, дослідження високонаповнених суттєво неоднорідних матеріалів, властивості яких є структурно-чутливими, вимагає використання складних структурних моделей і строгого підходу до їх аналізу. Ще більш нагальною є потреба в оцінці локальних напружень, коли мова йде про міцність композиту, яка визначається максимальними значеннями напружень в фазах та на міжфазних поверхнях. Концентраторами напружень, здатними ініціювати руйнування, є також дефекти типу пор та тріщин, причому ризик руйнування значно зростає за наявності їх взаємодії. Тому використання наближених до реального матеріалу багаточасткових структурних моделей і ефективних алгоритмів їх аналізу є необхідними при прогнозуванні міцності композитних матеріалів. У викладеному нижче огляді основну увагу приділено аналізу теоретичних моделей (переважно в двовимірній постановці) лінійно-пружних кусково-однорідних тіл, зокрема композитів матричного типу, пористих та тріщинуватих матеріалів з акцентом на вплив умов пружного контакту фаз.

1.1. Концентрація напружень на структурних неоднорідностях

Дослідження концентрації напружень на структурних неоднорідностях є однією з класичних проблем механіки, яка має значну бібліографію і є теоретичною основою розділу механіки композитів, присвяченого прогнозуванню деформаційних властивостей та міцності структурно-неоднорідних матеріалів. Обмежуючись в даному огляді двовимірними задачами лінійної теорії пружності, зазначимо, що успіхи в їх аналітичному дослідженні значною мірою пов'язані з розвитком методу комплексних

потенціалів Колосова-Мусхелішвілі [26]. З його використанням розв'язано широке коло задач про концентрацію напружень навколо включень, пор та тріщин в ізотропних та анізотропних тілах (наприклад, [24, 123, 32, 8, 27, 7, 28, 17, 34, 31, 5, 12, 71, 36, 13]). Аналіз цих та інших літературних джерел, присвячених дослідженню локальних полів та ефективних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів, доводить, що в абсолютній більшості робіт, постулюється (явно чи неявно) умова повного/досконалого контакту фаз.

В теорії пружності умова ідеального механічного контакту передбачає неперервність векторів переміщень і нормальніх напружень на межі поділу фаз і має вигляд

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)}; \quad \mathbf{T}^{(0)} = \mathbf{T}^{(1)}; \quad (1.1)$$

де $\mathbf{u}^{(i)}$ - вектор переміщень, $\sigma^{(i)}$ - тензор напружень, $\mathbf{T}^{(i)} = \sigma^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ - вектор нормальніх напружень: $i=0$ для матриці і $i=1$ для включень. Важливо розуміти, втім, що загальноприйняте в мікромеханіці поняття "досконалої міжфазної границі" є ідеалізацією, прийнятність якої не є очевидною і далеко не завжди можливою, оскільки міжфазні границі завжди є недосконалими. Причинами недосконалості є невідповідність атомних граток контакуючих матеріалів, поверхневе забруднення, окислення, міжфазні дифузійні чи реакційні шари, покриття на включеннях, міжфазні тріщини тощо. Доконаним фактом є те що вказані фактори мають суттєвий (часом визначальний) вплив на розподіл напружень і ефективні пружні властивості композиту і тому мають бути враховані в теоретичних моделях.

1.2. Вплив умов з'єднання/зчеплення/контакту/адгезії

На даний час в літературі є ряд публікацій, присвячених аналізу впливу умов контакту на розподіл напружень в околі включень. Обмежуючись в рамках даного дослідження двовимірною теорією пружності, вкажемо на роботу [47], де на підставі асимптотичного аналізу напружень в нескінченно тонкому проміжному шарі проведено класифікацію фізично можливих умов

пружного контакту на границі розділу. В залежності від співвідношення пружних властивостей тонкого шару та матеріалів, які він розділяє, сформульовано сім фізично можливих типів контактних умов, серед них вищезгаданий ідеальний контакт, два варіанти контакту пружинного ("м'якого", за термінологією [47]) типу та чотири варіанти контакту мембраниного, або "жорсткого" типу. Найбільш відомою в літературі умовою неідеального контакту є так званий "пружинний" контакт, при якому нормальні напруження неперервні, а стрибок переміщень (проковзування) на границі розділу лінійно пропорційний контактним напруженням:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(0)} &= \mathbf{T}^{(1)}; \quad \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = D_n (\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}; \\ \mathbf{T}^{(1)} - T_n \mathbf{n} &= D_t \{ \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^{(1)} - [(\mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{u}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Такі задачі досліджено в ряді публікацій ([46, 42, 68, 113, 74, 75, 120, 111] та ін.).

При "жорсткому" kontaktі, навпаки, має місце неперервність (когерентність) переміщень і стрибок нормальних напружень. Він очікується, зокрема, в наноструктурних матеріалах, де поверхневі напруження є суттєвим фактором. Зазначимо, що теорія поверхневих напружень [63, 64], яка наразі широко використовується при моделюванні таких матеріалів (див. огляд [126]), відповідає одному з варіантів "жорсткого" контакту, а саме

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)}; \quad \mathbf{T}^{(0)} - \mathbf{T}^{(1)} = -\nabla_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Sigma}. \quad (1.3)$$

Доданок $\nabla_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Sigma}$ в правій частині умови (1.2) є поверхнева дивергенція тензора поверхневих напружень

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Sigma} = \sigma_s \mathbf{I}_l + (\lambda_s + \sigma_s) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Sigma}) \mathbf{I}_l + 2(\mu_s - \sigma_s) \boldsymbol{\varepsilon}_{\Sigma} + \sigma_s \nabla_{\Sigma} \mathbf{u}, \quad (1.4)$$

де \mathbf{I}_l - одиничний "тангенційний" тензор, σ_s - поверхневий тиск, μ_s і λ_s - поверхневі пружні константи, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\Sigma})$ - слід тензора поверхневих деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}_{\Sigma}$ і $\nabla_{\Sigma} \mathbf{u}$ - поверхневий градієнт вектора переміщень. Поверхневі напруження зумовлені впливом поверхневої енергії вільних чи міжфазних границь.

Вказаній вплив є вкрай слабим на макрорівні і тому нехтується в класичній механіці, втім зростає зі збільшенням питомої міжфазної поверхні і стає суттєвим на нанорівні (як правило, коли локальний радіус кривизни менший за 100 нм).

Вплив поверхневої енергії на локальну концентрацію напружень, а отже і межу міцності наноструктурних матеріалів є цікавою і практично важливою, але до даного часу вкрай мало досліденою проблемою. Характер цього впливу вельми своєрідний і відрізняється від звичних уявлень макрорівня. Так, згідно [78], поверхневі напруження усувають відому з лінійної механіки руйнування кореневу особливість поля напружень в вершинах тріщини. Аналогічного висновку доходять і автори робіт [99, 87] на підставі розрахунку напружень в околі тонкої еліптичної пори. Втім, до даного часу в літературі відсутні як теоретичне обґрунтування даного важливого для механіки руйнування факту, так і систематичне дослідження концентрації напружень та їх поведінки в околі нанорозмірної пори. Робота [126] є ймовірно, єдиною (втім, безрезультатною) спробою асимптотичного аналізу даної проблеми.

Відомі в літературі розв'язки (наприклад, [56, 104]) стосуються переважно включень з постійною кривизною поверхні (сферичних та круглих), для яких врахування неідеального контакту в фізичній моделі не призводить до ускладнення відповідної математичної задачі. Для включень більш загальної еліптичної форми відомі лише окремі результати. Так, задачу антиплоского зсуву простору з одиничним еліптичним включенням і контактними умовами пружинного типу в [122] розв'язано методом конформних відображень. В [99] аналогічну задачу розглянуто для випадку контактних умов мембраниного типу. В [88, 90] одержано строгий розв'язок багаточасткової модельної задачі з метою визначення зсувної жорсткості волокнистого композиту за умови неідеального контакту волокон з матрицею.

1.3. Методи прогнозування ефективних пружних стальних

Проблема гомогенізації є центральною в механіці композитів принаймні в останні півсторіччя. Кількість робіт по методам прогнозування властивостей композиту є дуже великою, серед них багатотомні видання [1, 9, 11] та монографії ([2, 40, 38, 25, 18, 29, 5, 14, 39, 110]) та інші), які містять детальні огляди літератури. В цих та ряді інших робіт вітчизняних і зарубіжних авторів розглянуто різноманітні аспекти цієї проблеми, включаючи (a) структурні рівні, (c) розмір і форму представницького об'ємного елемента (RVE), (b) спосіб введення макропараметрів та ефективних властивостей композиту та ін., а також подано математичне обґрунтування основних методів гомогенізації.

Згідно [72], ефективний тензор пружності композитного матеріалу є тензор четвертого рангу $\mathbf{C}^* = \{C_{ijkl}^*\}$, визначений формулою

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad (1.5)$$

де в якості тензорів макроскопічних деформацій $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ та напружень $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ зазвичай приймаються усереднені по об'єму V представницького елемента (RVE) композитного матеріалу відповідні локальні величини:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV; \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (1.6)$$

Для композиту матричного типу $V = \sum_{q=0}^N V_q$ де V_q - об'єм q -го включення і V_0 - матричний об'єм всередині RVE.

В роботах по прогнозуванню макроскопічних властивостей композитів з певною долею умовності можна виділити такі основні напрями: а) одержання варіаційних оцінок (вилок) для ефективних параметрів; б) методи самоузгодження, які ґрунтуються на одночасткових моделях та апріорних гіпотезах; в) стохастичні методи, які базуються на методах теорії випадкових функцій; г) метод регуляризації, де композит моделюється періодичною структурою; д) метод мультипольних розвинень, який узагальнює класичні

схеми усереднення Максвела та Релея на випадок багаточасткових моделей; е) метод обчислюальної мікромеханіки та деякі інші. Розглянемо коротко ці підходи.

Верхні та нижні оцінки ефективних пружних модулів макроскопічно ізотропного композиту вперше одержано в роботах Фойгта та Рейса в припущені однорідного напруженого і деформованого стану усього середовища, вони відповідають моделям послідовного і паралельного з'єднання фаз. Суттєве уточнення цих оцінок одержано а роботах Хашина і Штрікмана [66], які використали варіаційний підхід і розглянули допустимі поля деформацій та напружень. Звуження вилки в [40] є наслідком врахування додаткових вимог, яким задовільняють віртуальні деформації в припущені однорідності поля в фазах.

Спільним для вказаних результатів є те, що вони одержані без конкретизації форми включень, а, отже, придатні для оцінки ефективних властивостей композитів незалежно від їх структури. Ця безсумнівна перевага методу, втім, перетворюється на недолік, коли виникає потреба в уточненні характеристик композиту; для цього необхідно враховувати структуру матеріалу. Так, в [52] оцінки пружних модулів середовища з випадково розташованими включеннями залежать в загальному випадку від структури через двохточкову кореляційну функцію, що забезпечує їх суттєве уточнення. Подальше звуження "вилки" базується на використанні додаткової інформації про структуру, тобто вищих кореляційних функцій; в [53] для скалярних властивостей композиту наведено оцінки, де врахована трьохточкова кореляція. Відзначимо, нарешті, роботу [119], де вказано шлях одержання оцінок більш високих порядків. Все ж, слід зазначити, що навіть у цьому випадку для суттєво неоднорідного композиту верхня та нижня оцінки відрізняються настільки, що це дає підстави говорити про головним чином теоретичне значення даного підходу.

Наступний, найбільш представницький клас публікацій присвячено одержанню наблизених формул для ефективних параметрів шляхом введення

спрощених геометричних моделей і апріорних гіпотез щодо характеру полів в фазах композиту. Піонерською в даному напрямі є робота Максвела [100] по визначення провідності середовища з малою об'ємною долею включень. Одержанна формула має порядок точності $O(c)$, де c - об'ємна доля дисперсної фази. Асимптотичні (лінійні по c) формулі для ефективних пружних модулів одержано в [54]; як і в формулі Максвела, коефіцієнти біля c не залежать від просторового розташування включень. Ясність і простота фізичних ідей, закладених в схемі Максвела, надихнули розвиток подібних підходів для оцінки інших властивостей неоднорідних матеріалів, зокрема ефективних пружних модулів [95].

Розвитком одночасткової моделі є методи ефективного середовища, в яких розглядається одиничне включення в нескінченний матриці, наділеній тими чи іншими властивостями. До таких належать метод самоузгодження [48, 72], в якому властивості матриці припускаються рівними шуканим властивостям композиту; метод ефективного поля [14, 23], де припускається статистично рівномірний розподіл частинок і постійність полів деформацій у включениях; диференційна схема [101]; підхід, пов'язаний з використанням апроксимації Морі-Танака [108] полів в фазах композиту (наприклад, [125]) та деякі інші. Застосування вказаних підходів базується, як правило, на використанні розв'язку Ешелбі [58] задачі про напруженій стан простору з еліпсоїдальним включением, в якому, при заданих на нескінченості однорідних умовах навантаження, деформації та напруження також є постійними. Широке коло проблем розглянуто в [109] на базі цієї моделі з використанням концепції "власних" деформацій, там же наведено вичерпну бібліографію з даного питання. Усі перераховані методи не враховують жодної інформації про мікроструктуру, крім форми включень. Як наслідок, їх застосовність обмежена статистично однорідними композитами з малою об'ємною долею включень. До того ж питання про точність одержаних результатів залишається відкритим; як правило, апріорі невідомо навіть, чи задовільняють вони варіаційним оцінкам.

Вельми загальний підхід до моделювання композитів стохастичної структури базується на використанні методів теорії випадкових функцій [37, 38, 39] і дозволяє врахувати статистичні параметри мікроструктури. Так, одноточкове наближення враховує одноточкові моменти усіх порядків [38] і приводить до розв'язку, який залежить лише від об'ємного вмісту фаз та їх властивостей, але не містить параметрів, що характеризують спосіб розміщення компонентів, їх форму, розміри, зв'язність і т. д. Уточнення одноточкового наближення шляхом врахування двохточкових моментів призводить до суттєвого ускладнення рівнянь [9]. Більш ефективним є запропонований в [37] метод умовних моментів, який дозволяє описати ускладнені структури, зокрема врахувати анізотропію властивостей композиту, пов'язану з особливостями геометрії структури. До переваг розглянутого підходу слід віднести можливість його застосування до вивчення широкого кола явищ в композитах, в тому числі й нелінійних. В той же час, його можливості щодо аналізу локальних полів на мікрорівні є обмеженими.

Альтернативний викладеному вище стохастичному підхід до моделювання композитів полягає в фіксації деякої частинної реалізації структури гетерофазного середовища і розгляді на ній відповідних краївих задач. Визначені шляхом їх розв'язання властивості такої (як правило, упорядкованої) структури і приймаються за властивості композиту, тому цей підхід дістав назву методу регуляризації. Даний метод широко використовується для дослідження шаруватих, волокнистих та дисперсно зміщених композитів, розроблено ефективні методи розв'язання модельних періодичних краївих задач (наприклад, [8, 7, 2, 17, 5]). Використання багаточасткової моделі забезпечує уточнене прогнозування, оскільки така модель (на відміну від одночасткової) дає, по-перше, принципову можливість вибрати для розрахунків структуру, наблизену до реального композиту. По-друге, розв'язанням краївої задачі, сформульованої на такій моделі, досягається врахування взаємодії частинок дискретної фази. Ці дві обставини є принциповими, коли мова йде про суттєво неоднорідні композити зі значним

вмістом дискретної фази. Як уже зазначалось, такі матеріали є структурно-чутливими, а взаємодія частинок дискретної фази спрямовує визначальний вплив на їх макроскопічні властивості, тому результати прогнозування залежать від того, наскільки враховуються особливості структури реального композиту і ефекти взаємодії фаз. Багаточасткова модель природнім чином враховує такі риси реальних композитів, як наявність у дискретній фазі частинок різних розмірів (полідисперсність), форми (поліформізм) та властивостей (багатофазність). За наявності ефективного методу аналізу таку модель може бути застосовано до вельми широкого класу структурно-неоднорідних матеріалів, при цьому можливо провести дослідження як макроскопічних характеристик, так і детального розподілу та концентрації напружень в фазах.

Варто зазначити, втім, що всі розглянуті вище методи усереднення базуються на припущеннях ідеального механічного контакту фаз (1.1) і, як наслідок, далеко не завжди є придатними для прогнозування поведінки реальних композитних матеріалів. Більше того, є проблеми навіть з бездоганним на перший погляд визначенням макроскопічних параметрів (1.6). Першим очевидним контрприкладом є пористий матеріал, де $\mathbf{u}^{(q)}$ не визначено. Як наслідок, рівняння (1.6) неможливо застосувати! - але при цьому інтегралами по об'єму пор не можна нехтувати. Загальноприйнятий спосіб обійти цю проблему полягає у розгляді пористого тіла як граничного випадку композиту, у якому жорсткість включень прямує до нуля. Формально це допомагає, але необхідність використання штучного прийому свідчить про недосконалість теорії. Інший, більш суттєвий контрприклад стосується композитів з недосконалими границями розділу фаз, для яких, як показано, наприклад в [73, 55], формули (1.6) є некоректними.

Альтернативне визначення макроскопічних параметрів пружності (деформацій та напружень) базується на поверхневому усередненні і має вигляд [73, 47, 55, 91]

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2V} \int_{S_0} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}) dS; \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int_{S_0} \mathbf{r} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS; \quad (1.7)$$

Формули (1.7) є узагальненням (1.6) і є коректними для композитів з недосконалими міжфазними границями, зокрема визначеними умовами (1.2) і (1.3). Серед переваг даного визначення зазначимо те, що воно включає тільки "видимі" (вимірювані) величини (переміщення та сили) на поверхні композитного зразка. По суті, ми розглядаємо представницький об'єм як "чорний ящик", внутрішня структура якої може впливати на числові значення макропараметрів - але не на спосіб, в який вони були введені. Дано обставина робить це визначення найбільш загальним, придатним для композитів з довільною внутрішньою мікроструктурою та довільним міжфазним зв'язком, а також для пористих і тріщинуватих твердих тіл. За такого підходу чисельне моделювання стає подібним до типового лабораторного досліду, коли ми прикладаємо зусилля до протилежних поверхонь зразка та вимірюємо переміщення цих поверхонь: коефіцієнт пропорційності цих величин визначає макроскопічну пружність композиту.

Розмірний аналіз співвідношень (1.2) і (1.3) вказує, що параметри D_n і D_t мають розмірність [Н/м³], а σ_s , μ_s і λ_s - [Н/м]. Таким чином, недосконалість міжфазних границь з необхідністю породжує розмірну залежність властивостей композита (напр. [70]). Сказане повною мірою стосується наноструктурних (в т.ч. нанопористих) матеріалів та нанокомпозитів (напр., [99] та наведені там посилання), характерною рисою яких є дослідно підтверджена (напр. [103, 121]) залежність пружної поведінки від характерного розміру неоднорідностей. В таких матеріалах де питома площа поверхні розділу фаз дуже велика, обумовлює визначальний вплив міжфазної границі на їхні властивості.

Відомі в літературі дослідження композитів з недосконалою міжфазною границею стосуються в основному випадку включень з постійною кривизною поверхні (сфер та круглих циліндрів). Ймовірно, найвідомішою є робота [69], яка узагальнює формулу Максвела для ефективної провідності до волокнистого композиту з недосконалою міжфазною границею. В роботі [97] досліджено вплив міжфазних характеристик на ефективну провідність волокнистих

композитів періодичної структури. Наближений розв'язок для композиту з невпорядкованою структурою і недосконалим контактом волокон з матрицею [98] враховує функцію радіального розподілу волокон і їх парну взаємодію. В [60] використано багаточасткову коміркову модель у поєднанні з методом скінчених елементів. Ці та інші подібні (зокрема [43, 68, 59,117]) роботи базуються на припущеннях неперервності теплового потоку чи нормальних напружень на міжфазній границі, тоді як температура/переміщення є розривними.

Для врахування впливу поверхневої енергії вільних/міжфазних границь розділу фаз на пружні властивості нанокомпозитів в рамках континуального підходу зазвичай (див. огляд [126]) використовується уже згадана модель Гуртіна-Мердока [63, 64], згідно якої поверхневі напруження (1.3) залежать від пружних властивостей та геометрії (головним чином, кривизни) вільної чи міжфазної поверхні і обумовлюють так званий розмірний ефект макроскопічної пружності нанокомпозитів (наприклад, [50,56,104]). Базуючись на теорії Гуртіна-Мердока, ряд авторів модифікували відомі мікромеханічні моделі, включивши функцію поверхневої пружності [126]. Вивчено ефективну пружну жорсткість однонаправленого волокнистого нанокомпозиту з когерентним інтерфейсом за допомогою узагальненої самоузгодженої схеми [56, 57, 50].

Перспективною для дослідження композитів з недосконалими міжфазними границями є уже згадана вище схема усереднення Максвела. Відомі до останнього часу її застосування базувались на одночастковій моделі композита, яка не дозволяє врахувати вплив взаємодії включень. Втім, важливо розуміти, що нехтування взаємодією не є невід'ємною рисою схеми гомогенізації Максвела: за необхідності, вона може бути врахована. Наскільки нам відомо, робота [104, 105] є першою, де схему Максвела сформульовано з урахуванням взаємодії включень. У цій та наступних [106, 107, 85] публікаціях оригінальна концепція Максвела еквівалентної неоднорідності модифікована шляхом розв'язання задачі для скінченого кластера включень і показано, що врахування їхньої взаємодії неоднорідностей значно підвищує точність

прогнозування ефективних властивостей. З іншого боку, це призводить до збільшення обчислювальних зусиль, тому наявні результати обмежені композитами зі сферичними або круговими неоднорідностями, структура яких (випадкова або періодична з високим ступенем симетрії) забезпечує ізотропію макроскопічних властивостей.

Нешодавно схему Максвела сформульовано в термінах дипольних моментів [86] та показано [87] що за умови врахування взаємодії між неоднорідностями ця схема є асимптотично точною, тобто прогнозована ефективна властивість збігається до її точного значення зі збільшенням розміру кластера. Це є свідченням того що модифікована (багаточасткова) схема Максвела є строгим методом мікромеханіки і може бути застосована до широкого кола задач для композитів довільної мікроструктури, зокрема для оцінки ефективної провідності композитів з довільно орієнтованими еліптичними [92] та сфероїдальними [93] включеннями. В [94] цей підхід поширено на задачі двовимірної теорії пружності. Проведений там чисельний аналіз показує, що модифікована схема Максвела дозволяє оцінити ефективні властивості як періодичних, так і довільних структурних композитів з точністю, близькою до методу Релея. До того ж метод дозволяє аналізувати кластери довільної структури, що робить цю схему зручним інструментом для оцінки ефективних властивостей композитів за фрагментами мікроструктури, одержаними методами оптичної чи електронної мікроскопії.

1.4. Композити з еліптичними включеннями

Вищезазначені моделі є адекватними для композитів, в яких єдиним параметром довжини є радіус включення. Коли ж форма включення істотно відхиляється від кругової, потрібен додатковий параметр довжини: у цьому випадку еліпс є більш відповідною модельною формою включень (див. рис. 1.1). Що важливо, локальний радіус кривини еліпса може набувати малих значень. Вже згадувалося, що поверхневі ефекти обернено пропорційні локальному радіусу кривизни, тому можна очікувати їх більш істотного впливу

на механічну поведінку композиту. Крім іншого, тонка еліптична пора є зручною моделлю тріщини. Тому модель "твірде тіло з еліптичними включеннями" (рис. 1.1б) виглядає привабливим як у теоретичному, так і в практичному аспектах.

Розв'язок задачі для одного еліптичного включення добре відомий (див., наприклад, [33, 116] та посилання в ній). У той же час коло аналітичних розв'язків для задачі про взаємодію еліптичних включень (наприклад, [17, 12, 102, 112, 65]) є дуже обмеженим. Мультипольне розвинення потенціального поля одержано для скінченої множини [127] та періодичної гратки [128, 79] еліптичних циліндрів. Повні розв'язки задачі про пружну рівновагу площини [81] та напівплощини [82] зі скінченою множиною еліптичних включень отримано поєднанням методів мультипольних розвинень та комплексних потенціалів. Цей же підхід застосовано для оцінки коефіцієнтів інтенсивності напружень [83] та ефективної жорсткості [84] тріщинуватих тіл. Детально метод мультипольних розвинень у застосуванні до композитів з волокнами еліптичного перерізу викладено в монографії [85]. Серед числових підходів до аналізу даної проблеми зазначимо роботу [96], де застосовано метод поточкової колокації, а також [49], де методом скінчених елементів досліджено багаточасткову коміркову модель композитів періодичної та випадкової структури з круглими та еліптичними включеннями.

Дослідження пружної поведінки композитів з еліптичними волокнами з недосконалім контактом фаз в літературі практично відсутні, за винятком роботи [122] про одиничне еліптичне включение з однорідно недосконалою міжфазною границею та [99], де розглянуто поздовжній зсув площини з одним еліптичним нановключением. На даний час автору не відомі спроби застосування цих чи будь-яких інших моделей для оцінки ефективних пружних модулів композиту з нановключениями еліптичної форми.

1.5. Вибір мети роботи та постановка задач дослідження.

Висновок з проведеного огляду літературних джерел полягає у тому, що абсолютну більшість досліджень з даної проблеми проведено в припущені ідеального механічного контакту (неперервності векторів переміщень і нормальних напружень) включень з оточуючим матеріалом. Міжфазні границі реальних структурно-неоднорідних матеріалів є недосконалими, що суттєво обмежує практичну застосовність відомих розв'язків і вимагає розробки теоретичних моделей, здатних врахувати вплив стану міжфазних границь на концентрацію напружень в структурно-неоднорідних тілах та їх макроскопічні пружні властивості. Наведений аналіз літературних джерел свідчить про відсутність в даний час ефективного теоретичного методу прогнозування напруженого стану та пружних властивостей композитів, що базувався б на структурній моделі, наближеній до реального матеріалу і в той же час забезпечував строгий підхід до розв'язання сформульованих на ній модельних крайових задач, а також про актуальність проблеми створення такого методу.

Розділ 2.

АНТИПЛОСКИЙ ЗСУВ ПРОСТОРУ З ЕЛІПТИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВИ НЕІДЕАЛЬНОГО ПРУЖНОГО КОНТАКТУ

Фізичним об'єктом даного дослідження є структурно-неоднорідне тіло, яке являє собою простір (матрицю) з однонаправленими включеннями у вигляді нескінченно довгих еліптичних циліндрів (волокон). Їхній розмір, форма, просторове розташування і орієнтація є довільними, єдиним геометричним обмеженням є умова неперетину і неторкання жодних двох включень. Матеріали матриці і включень є ізотропними і лінійно пружними, їх механічний контакт є недосконалим. У випадку коли зовнішнє навантаження розглянутого тіла відповідає поздовжньому зсуву уздовж волокон, його напружений стан є двовимірним і може бути визначений шляхом розв'язання задачі про антиплоский зсув кусково-однорідного пружного тіла з еліптичними границями розділу.

Як зазначено у першому розділі, основною відмінністю розглянутої задачі від відомих в літературі є недосконалість контакту фаз, яка не може бути врахована в рамках усталених підходів. Основним змістом даного розділу є розвиток і апробація аналітично-чисельного методу на задачі про антиплоский зсув простору з еліптичним включенням за умови неідеального пружного контакту.

2.1. Постановка крайової задачі. Типи неідеального контакту

2.1.1. Геометрія задачі

Розглянемо пружний простір з одним включением у формі еліптичного циліндра. Введемо декартову систему координат так, щоби вісь x_3 співпала з віссю циліндра; напрямок осей x_1 та x_2 визначений головними півосяями еліпса l_1 та l_2 , рис. 2.1. Без обмеження загальності можемо покласти $l_2 < l_1$,

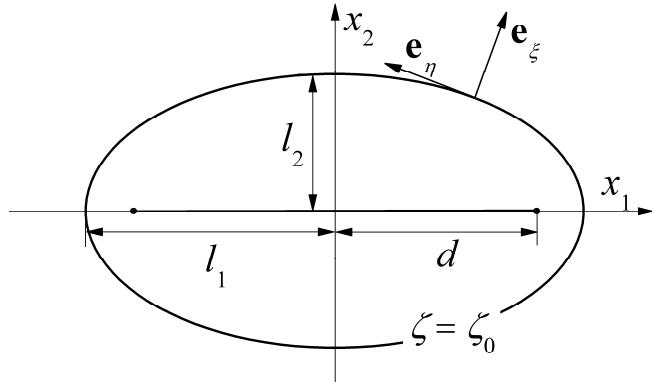


Рис. 2.1. Геометричні параметри задачі

тоді параметр форми $e = l_2/l_1 < 1$. Іншим геометричним параметром є міжфокальна відстань $2d$, де $d = \sqrt{l_1^2 - l_2^2}$. Контур включення L у вибраній декартовій системі координат задано рівнянням:

$$F(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{l_1^2} + \frac{x_2^2}{l_2^2} - 1 = 0 \quad (2.1)$$

В матриці $F(x_1, x_2) > 0$, у включенні $F(x_1, x_2) < 0$.

Поряд з декартовими системою координат, введемо еліптичні координати ζ та η , які пов'язані між собою відомими співвідношеннями:

$$x_1 = d \cosh \zeta \cos \eta, x_2 = d \sinh \zeta \sin \eta. \quad (2.2)$$

Координатна лінія $\zeta = \zeta_0$ визначає поверхню еліптичного включения L . Параметр ζ_0 пов'язаний з іншими геометричними величинами співвідношенням

$$\zeta_0 = \ln\left(\frac{l_1 + l_2}{d}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

У граничному випадку круглого ($e=1$) включение $d \rightarrow 0$, $v_0 \rightarrow \infty$, $v_0 d \rightarrow 2R$, $\eta \rightarrow \theta$ і $v d \rightarrow 2r \exp i\theta = 2z$ де r і θ - полярні координати, $v_0 = \exp \zeta_0$. Інший граничний випадок - це нескінченно тонкий ($e=0$) еліпс, де $d = l_1$ і $v_0 = 1$.

Метричні коефіцієнти еліптичної системи координат (коефіцієнти Ляме) дорівнюють

$$H_\zeta = H_\eta = d \sqrt{\sinh^2 \zeta + \sin^2 \eta}, \quad (2.3)$$

а частинні похідні по нормальні (n) та дотичній (τ) мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{H_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (2.4)$$

2.1.2. Визначальні спiввiдношення

Поздовжній зсув ізотропного волокнистого композитного матерiалу вiдповiдає задачi антиплоскої деформацiї двовимiрної теорiї пружностi, де u_3 є лише однiєю ненульовою компонентою вектора перемiщень

$$u_1 = u_2 = 0; \quad u_3 = w(x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Вiдповiдний йому тензор напружень

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

де μ - модуль зсуву, тобто маємо лише двi ненульовi компоненти тензора напружень $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ i $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Також рiвняння пружної рiвноваги $\nabla \cdot \sigma = 0$ приймає вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad (2.7)$$

а закон Гука спрощується до

$$\sigma_{i3} = 2\mu \varepsilon_{i3} = \mu \partial w / \partial x_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

Таким чином, модуль зсуву є єдиним матеріальним параметром даної задачі. Зазначимо також, що наслідком рівнянь (2.7) і (2.8) є умова гармонічності осьового переміщення $\nabla^2 w = 0$ та рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.9)$$

В еліптичних координатах рівняння Лапласа $\nabla^2 w = 0$ записується як

$$\frac{1}{H_\zeta^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{H_\eta^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2} = \frac{1}{H_\zeta^2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \eta^2} \right) = 0, \quad (2.10)$$

а рівняння сумісності деформацій -

$$\frac{1}{H_\eta} \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial \eta} = \frac{1}{H_\zeta} \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \frac{1}{H_\zeta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \eta}. \quad (2.11)$$

2.1.3. Умови контакту

Постановка крайової задачі для кусково-однорідного тіла включає формулювання умов контакту уздовж межі поділу. Традиційною для механіки є умова повного/досконалого контакту (1.1), яка в наших позначеннях приймає вигляд

$$[[w]]_L = [[\sigma_n]]_L = 0, \quad (2.12)$$

де $\sigma_n = 2\mu \nabla w \cdot \mathbf{n} = 2\mu \partial w / \partial n$ - нормальне напруження, а $[[f]]_L = (f^{(0)} - f^{(1)})|_L$ означає стрибок величини f на граници L . Тут і надалі індекс "0" стосується матриці, "1" – включення.

Для умови (2.12) розв'язок є елементарним і добре відомий (напр., [26]). Фізично можливі умови недосконалого контакту досліджено в [47], причому лише два з них відповідають випадку антиплоского зсуву. Один з них, вищезгаданий "м'який" контакт (у подальшому - контакт першого типу) відповідає пружинній моделі (1.2) і передбачає неперервність на граници

розділу нормального напруження σ_n , тоді як стрибок переміщення є пропорційним нормальному напруженню з коефіцієнтом h_1 розмірності [Н/м³]:

$$[\![\sigma_n]\!]_L = 0; \quad h_1 [\![w]\!]_L = \sigma_n. \quad (2.13)$$

Для ідеального контакту $h_1 = \infty$, відсутності контакту відповідає $h_1 = 0$.

"Жорсткий", або мембраний тип границі (у подальшому - контакт другого типу), навпаки, передбачає неперервність переміщень і стрибок нормальних напружень, величина якого пропорційна похідній уздовж контуру від дотичного напруження $\sigma_t = 2\mu\nabla w \cdot \mathbf{t} = 2\mu\partial w/\partial t$. Що важливо, ця умова є частинним випадком моделі Гуртіна-Мердока (1.3)-(1.4) [63] і має вигляд (напр., [99])

$$[\![w]\!]_L = 0; \quad [\![\sigma_n]\!]_L = -\frac{\partial \sigma_t^s}{\partial t}; \quad (2.14)$$

де поверхневе напруження $\sigma_t^s = 2(\mu^s - \tau^0)\partial w/\partial t$, μ^s і τ^0 - пружні модулі міжфазної поверхні розмірності [Н/м] [63]. В термінах переміщень друга з умов (2.14) виглядає як

$$\left[\left[\mu \frac{\partial w}{\partial n} \right] \right] + (\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2.15)$$

Зазначимо, що розмірність матеріальних параметрів міжфазної поверхні в обох випадках відрізняється від розмірності [Н/м²] пружних модулів як об'ємних властивостей матеріалу. Це обумовлює характерний для композиту з неідеальним зв'язком фаз "розмірний ефект", а саме залежність напруженого стану від розміру включень.

2.1.4. Формульовання в комплексних змінних

Викладений нижче аналітичний підхід суттєво використовує метод комплексних потенціалів, який є потужним інструментом розв'язання задач двовимірної теорії пружності [26]. Для його застосування необхідно сформулювати крайову задачу в термінах комплексних змінних і потенціалів.

По-перше, поряд з традиційною комплексною змінною $z = x_1 + ix_2$ введемо "еліптичну" комплексну змінну $\xi = \zeta + i\eta$

$$\begin{aligned} z = d \cosh \xi &= \frac{d}{2}(\nu + \nu^{-1}), \quad \nu = \exp \xi \\ (0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \eta < 2\pi). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Координатна крива $\zeta = \zeta_0$ визначає границю еліптичного включення.

Представимо переміщення w у вигляді $w = \operatorname{Re}\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ - комплексний потенціал. Відповідне комплексне напруження $\sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu\overline{\varphi'(z)}$, де модуль зсуву $\mu = \mu_0$ для площини і $\mu = \mu_1$ для включення. При запису умов контакту першого типу (2.13) в термінах комплексних потенціалів

$$[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_L = 0, \quad h_1 [\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L = \mu \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial n}, \quad (2.17)$$

враховано, що умова неперервності нормальних напружень $[\![\sigma_n]\!]_L = 0$ еквівалентна умові $[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_L = 0$ [26].

Умова другого типу (2.14) в термінах комплексних потенціалів має вигляд

$$[\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L = 0, \quad \left[\left[\mu \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial n} \right] \right]_L = (\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re}\varphi}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

Перетворення другої рівності (2.18) з використанням умови Коші-Рімана $\partial \operatorname{Re}\varphi / \partial n = \partial \operatorname{Im}\varphi / \partial t$ до

$$\left[\left[\mu \frac{\partial \operatorname{Im}\varphi}{\partial t} \right] \right]_L = (\mu^s - \tau^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re}\varphi}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

і наступне інтегрування по t уздовж L дає цілком аналогічний (2.17) вираз

$$[\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L = 0; \quad [\![\mu \operatorname{Im}\varphi]\!]_L = h_2 \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi}{\partial t}, \quad (2.20)$$

де $h_2 = (\mu^s - \tau^0)$.

2.1.5. Зовнішнє навантаження

Доповнюю постановку країової задачі умова зовнішнього навантаження. Стандартною умовою в задачах такого роду (зокрема, в задачі Ешелбі [58]) є задані на нескінченості постійні деформації $E = E_{13} + iE_{23}$ або напруження $S = S_{13} + iS_{23} = 2\mu_0 E$. Відповідне їм переміщення є лінійною функцією координат: $w^\infty = E_{13}x_1 + E_{23}x_2 = \operatorname{Re}(\bar{E}z)$. З фізичних міркувань при $z \rightarrow \infty$ для загального переміщення w маємо асимптотику $w \rightarrow w^\infty$. Ми розглядаємо більш загальну задачу, де навантаження задано регулярною в околі включення функцією w_{far} , яка не обов'язково є лінійною. Нарешті, для забезпечення однозначності розв'язку задачі в переміщеннях покладемо $w^{(1)}(0) = 0$.

2.2. Схема побудови аналітичного розв'язку в переміщеннях

2.2.1. Еліптичні гармоніки та їх властивості

Згідно (2.10), рівняння Лапласа в еліптичних координатах (2.2) має велими простий вигляд

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (2.21)$$

Стандартна процедура розділення змінних $\Phi = K(\zeta) \cdot N(\eta)$ дає диференційні рівняння для функцій K і N :

$$K''(\zeta) - \lambda K(\zeta) = 0, \quad N''(\eta) + \lambda N(\eta) = 0. \quad (2.22)$$

В загальному випадку константа λ є комплексною, а розв'язок представляється парою функцій:

$$\Phi_1(\zeta, \eta) = A_n \exp[\pm k(\zeta + i\eta)], \quad \Phi_2(\zeta, \eta) = B_n \exp[\pm k(\eta + i\zeta)], \quad (2.23)$$

де $\lambda = -k^2$, $n = \pm ik$. Φ_1 та Φ_2 є базисними функціями для рівняння Лапласа у еліптичних координатах. В нашому випадку змінна η є «кутовою» координатою, тому з необхідністю має виконуватись умова періодичності

$N(\eta + 2\pi) = N(\eta)$. Врахування цієї умови дає загальний розв'язок рівняння (2.21) у вигляді нескінченого ряду по еліптичним гармонікам:

$$\Phi(\zeta, \eta) = \sum_n A_n \exp[\mp n(\zeta + i\eta)] = \sum_n A_n v^{\mp n}. \quad (2.24)$$

Альтернативний підхід до побудови загального розв'язку [116] базується на конформному відображені еліпса на круг одиничного радіуса і розвиненні розв'язку в ряд Фур'є. Втім, метод конформного відображення є ефективним лише для задачі про одне еліптичного включення.

Коротко охарактеризуємо властивості та поведінку введених функцій. Згідно формули (2.16), $2z/d = v + 1/v$; обернена формула має вигляд $v = z/d \pm \sqrt{(z/d)^2 - 1}$, де знак біля кореня відповідає умові $\operatorname{Im} v \geq 0$. Що важливо, на контурі включення $L : \zeta = \zeta_0$ гармоніки є функцією лише кутової координати: $v = v_0 \tau$, де $\tau = \exp(i\eta)$. Відповідно, $v^k = v_0^k \tau^k = v_0^k \exp(ik\eta)$. Крім того, функція $v^n + v^{-n} = 2 \cosh[n \operatorname{Arc} \cosh(z/d)]$ є не що інше як поліном Чебишова 1-го роду n -го порядку від комплексної змінної z/d . Звідси випливає, по-перше, що такі функції є ортогональними на відрізку $[-1, 1]$; по-друге, ці функції є *регулярними* в довільній скінченій області, які включає початок системи координат. Навпаки, умові затухання на нескінченості задовільняють лише *іррегулярні* функції v^{-n} . Вказані властивості є принциповими при побудові загального розв'язку задачі в переміщеннях

2.2.2. Загальний вигляд розв'язку в переміщеннях

Згідно [26], загальний розв'язок в термінах комплексних потенціалів має вигляд

$$w = \frac{1}{2} [\varphi(z) + \bar{\varphi}(z)] = \operatorname{Re} \varphi(z), \quad \sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu \overline{\varphi'(z)} \quad (2.25)$$

Зокрема, переміщення точок включення $w^{(1)}$ відповідає комплексному потенціалу φ_1 і має вигляд:

$$w^{(1)} = \operatorname{Re} \varphi_1, \quad \varphi_1 = \sum_k B_k v^{-k}, \quad (2.26)$$

де $B_k = B_{-k}$ є умовою того що $w^{(1)}$ є скінченим в усіх точках включення [26].

Приймаючи з 2.1.5 умову $w^{(1)}(0) = 0$, маємо

$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k (v^k + v^{-k}). \quad (2.27)$$

Вказані міркування справедливі і для довільного "дальнього" поля w_{far} , яке за визначенням є регулярним в околі включення і тому

$$w_{far} = \operatorname{Re} \varphi_{far}, \quad \varphi_{far} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (v^k + v^{-k}), \quad (2.28)$$

де $a_k = a_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w_{far} \exp(ik\eta) d\eta$ - комплексні числа (коєфіцієнти Фур'є), які ми надалі вважаємо відомими. Як уже зазначалось, частинним випадком w_{far} є відповідне другій проблемі Ешелбі [58] лінійне переміщення $w^\infty = E_{13}x_1 + E_{23}x_2 = \operatorname{Re}(\overline{\varepsilon_{far}} z)$ де $\varepsilon_{far} = E$ - комплексна деформація, яка відповідає напруженню $\sigma_{far} = 2\mu_0 \varepsilon_{far}$. Звідси $a_k = \delta_{k1} d\overline{\varepsilon_{far}}$, де δ_{ij} - дельта Кронекера.

Переміщення точок матриці запишемо у вигляді суми $w^{(0)} = w_{far} + w_{dis}$, де w_{dis} - збурення поля, зумовлене включенням. Відповідно,

$$w^{(0)} = \operatorname{Re} \varphi_0, \quad \varphi_0 = \varphi_{far} + \varphi_{dis}. \quad (2.29)$$

Як відомо, збурення від включення носить локальний характер. Його асимптотична поведінка ($w_{dis} \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$) передбачає розклад φ_{dis} в ряд лише по від'ємним степеням v , тобто

$$\varphi_{dis} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k v^{-k}. \quad (2.30)$$

Втім, більш зручним є запис

$$\varphi_0 = \sum_k (A_k + a_k) v^{-k}, \quad (2.31)$$

де $A_k \equiv 0$ для $k \leq 0$ і $a_k = a_{-k}$.

2.3. Нескінчена система алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів A_k

2.3.1. Умова контакту першого типу

Розглянемо процедуру визначення коефіцієнтів в рядах (2.27) та (2.31), які представляють комплексні потенціал переміщення відповідно в еліптичному включені та матриці, для випадку недосконалого контакту першого типу (2.17). Почнемо з умови для нормальних напружень, переписавши її у вигляді

$$\tilde{\mu}_1(\varphi_1 - \overline{\varphi}_1) = \varphi_0 - \overline{\varphi}_0. \quad (2.32)$$

де $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 / \mu_0$. Як було зазначено в розділі 2.2, еліптичні гармоніки введено таким чином, що на поверхні контакту L вони є функцією лише кутової координати η . Конкретно, $v^k = v_0^k \tau^k$ і $\bar{v}^k = \bar{v}_0^k \tau^{-k}$. Підстановка виразів для φ_1 та φ_0 в (3.32) дає

$$\tilde{\mu}_1 \left(\sum_k B_k v_0^{-k} \tau^{-k} - \sum_k \overline{B}_k v_0^k \tau^{-k} \right) = \sum_k (A_k + a_k) v_0^{-k} \tau^{-k} - \sum_k (\overline{A}_{-k} + \overline{a}_k) \bar{v}_0^k \tau^{-k}. \quad (2.33)$$

Зазначимо, що $\tau^k = \exp(ik\eta)$ є не що інше як комплексні гармоніки Фур'є. Користуючись їх ортогональністю, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A_k і B_k :

$$\tilde{\mu}_1 (B_k v_0^{-k} - \overline{B}_k \bar{v}_0^k) = (A_k + a_k) v_0^{-k} - \overline{a}_k \bar{v}_0^k \quad (2.34)$$

для $k > 0$.

Враховуючи, що на еліптичній поверхні $\zeta = \zeta_0$ згідно (2.3)-(2.4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{d \sqrt{\sinh^2 \zeta_0 + \sin^2 \eta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad (2.35)$$

другу з умов (2.17) перепишемо у вигляді

$$\tilde{\mu}_1(\varphi_0 + \overline{\varphi_0}) = \tilde{\mu}_1(\varphi_1 + \overline{\varphi_1}) + \beta \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta}} \right), \quad (2.35)$$

де $\beta = \frac{\mu_1}{h_1 l_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}}$, $\alpha = \sinh^{-2} \zeta_0$ і $l_2 = d \sinh \zeta_0$ - менша піввісь еліптичного включення. Комбінуючи (2.35) з (2.32), маємо

$$(\tilde{\mu}_1 + 1)\varphi_0 + (\tilde{\mu}_1 - 1)\overline{\varphi_0} = 2\tilde{\mu}_1\varphi_1 + \beta \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta}} \right). \quad (2.36)$$

Підстановка сюди виразів для потенціалів φ_1 та φ_0 з урахуванням тотожності $\partial v / \partial \zeta = v$ дає

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1) \sum_n (A_n + a_n) v^{-n} + (\tilde{\mu}_1 - 1) \sum_n (\overline{A_n} + \overline{a_n}) \overline{v}^{-n} \\ &= 2\tilde{\mu}_1 \sum_n B_n v^{-n} - \beta \left[\sum_n n (A_n + a_n) v^{-n} + \sum_n n (\overline{A_n} + \overline{a_n}) \overline{v}^{-n} \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Зазначимо, що на відміну від (2.33), ми не можемо безпосередньо скористатись ортогональністю гармонік Фур'є $\tau^k = \exp(ik\eta)$, оскільки параметр β як метричний коефіцієнт поверхні змінної кривизни теж є функцією кутової координати. Тому перепишемо формулу (2.37) в інтегральній формі

$$\begin{aligned} & \int_L \left[(\tilde{\mu}_1 + 1) \sum_n (A_n + a_n) v^{-n} + (\tilde{\mu}_1 - 1) \sum_n (\overline{A_n} + \overline{a_n}) \overline{v}^{-n} \right] \tau^k dt \\ & \int_L \left\{ 2\tilde{\mu}_1 \sum_n B_n v^{-n} - \beta \left[\sum_n n (A_n + a_n) v^{-n} + \sum_n n (\overline{A_n} + \overline{a_n}) \overline{v}^{-n} \right] \right\} \tau^k dt \end{aligned} \quad (2.38)$$

яка по суті відповідає її розкладу в ряд Фур'є. Інтегрування по контуру і деякі подальші алгебраїчні перетворення дають систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1)(A_k + a_k) v_0^{-k} + (\tilde{\mu}_1 - 1) \overline{a_{-k}} v_0^k \\ &= 2\tilde{\mu}_1 B_k v_0^{-k} - \sum_n n (A_n + a_n) v_0^{-n} \beta_{k-n} - \sum_n n (\overline{A_n} + \overline{a_n}) \overline{v_0}^{-n} \beta_{k+n}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

де

$$\beta_k = \beta_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_L \beta \tau^k dt = -\frac{1}{2\pi} \tilde{h}_1 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ik\eta)}{\sqrt{1+\alpha \sin^2 \eta}} d\eta. \quad (2.40)$$

Тут $\tilde{h}_1 = \mu_1 / (h_1 l_2)$ - безрозмірний параметр для умови першого роду. Ефективну рекурентну процедуру обчислення інтегралів (2.40) викладено в підрозділі 2.3.3.

Системи (2.34) і (2.39) в сукупності складають замкнуту нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої для заданого w_{far} (чи, що те ж саме, коефіцієнтів a_k) дає значення коефіцієнтів A_k і B_k в рядах (2.27) та (2.31) відповідно, а отже і повний розв'язок задачі. Для чисельного розв'язання цієї системи (наприклад, методом редукції) бажано зменшити кількість змінних, що можна зробити, виключивши з розгляду коефіцієнти B_k . Для цього перетворимо (2.34) до вигляду

$$\tilde{\mu}_1 B_k = \frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} + \frac{\overline{A}_k}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} + a_k. \quad (2.41)$$

Підставивши в (2.39) визначені звідси вирази для B_k , отримаємо нескінчену систему рівнянь відносно невідомих A_k :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu}_1 + 1) A_k - 2 \frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} - 2 \frac{\overline{A}_k}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} + (\tilde{\mu}_1 - 1)(a_k + \overline{a}_k v_0^{2k}) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} n v_0^{k-n} (A_n \beta_{k-n} + \overline{A}_n \beta_{k+n}) + \sum_n n v_0^{k-n} (a_n \beta_{k-n} + \overline{a}_n \beta_{k+n}) = 0; \\ k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Вкажемо на три частинні (вироджені) випадки розглянутої задачі, які відповідають а) ідеальному механічному контакту $h_1 = \infty$, б) його повній відсутності $h_1 = 0$ і в) круглому включенню, де розв'язок є елементарним і у разі постійного зовнішнього навантаження A_1 є єдиним ненульовим коефіцієнтом розвинення (2.20). Зазначимо також, що викладена процедура забезпечує розв'язок і більш загальної задачі для включення з неоднорідно недосконалою границею розділу: $h_c = h_c(\eta)$. Різниця полягає лише в

необхідності чисельного інтегрування $\beta_k = \frac{1}{2\pi} \int_L \beta t^k dt$. Єдиним винятком є

$h_c(\eta) = K \sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}$ (K є константою), де $\beta_k = 0$ для $k \neq 0$, що робить розв'язок елементарним. Цей розв'язок відповідає випадку тонкого прошарку між включенням і матрицею з конфокальними внутрішньою та зовнішньою границями.

2.3.2. Умова контакту другого типу

Процедура виконання умов другого типу (2.20) цілком аналогічна викладеній вище. Так, підстановка розвинення комплексних потенціалів в ряди по еліптичним гармонікам (2.27) та (2.31) в умову $[\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_L = 0$, записану як

$$\varphi_1 + \overline{\varphi}_1 = \varphi_0 + \overline{\varphi}_0, \quad (2.43)$$

дає

$$\sum_k B_k v_0^{-k} \tau^{-k} + \sum_k \overline{B_{-k}} v_0^k \tau^{-k} = \sum_k (A_k + a_k) v_0^{-k} \tau^{-k} + \sum_k (\overline{A_{-k}} + \overline{a_{-k}}) v_0^k \tau^{-k}. \quad (2.44)$$

Звідси, з огляду на ортогональність гармонік Фур'є $\tau^k = \exp ik\eta$ одержуємо систему лінійних рівнянь

$$B_k v_0^{-k} + \overline{B_k} v_0^k = (A_k + a_k) v_0^{-k} + \overline{a_k} v_0^k \quad (2.45)$$

для $k \geq 0$.

Оскільки на еліптичній поверхні $\zeta = \zeta_0$ згідно (2.3)-(2.4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{d \sqrt{\sinh^2 \zeta_0 + \sin^2 \eta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad (2.46)$$

друга з умов (2.20) має вигляд

$$\tilde{\mu}_1 (\varphi_1 - \overline{\varphi}_1) - (\varphi_0 - \overline{\varphi}_0) = \beta \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta}} \right), \quad (2.47)$$

де $\beta = i \frac{h_2}{l_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}}$. Комбінація (2.47) з (2.43) і (3.3) дає

$$(\tilde{\mu}_1 + 1)\phi_0 + (\tilde{\mu}_1 - 1)\overline{\phi_0} = 2\tilde{\mu}_1\phi_1 + \beta\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\eta} + \frac{\overline{\partial\phi_0}}{\partial\eta}\right) \quad (2.48)$$

i, з огляду на тотожність $\partial v/\partial\eta = iv$, зводиться до

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1)\sum_n(A_n + a_n)v^{-n} + (\tilde{\mu}_1 - 1)\sum_n(\overline{A_n} + \overline{a_n})\overline{v^{-n}} \\ &= 2\tilde{\mu}_1\sum_nB_nv^{-n} + i\beta\left[\sum_n n(A_n + a_n)v^{-n} - \sum_n n(\overline{A_n} + \overline{a_n})\overline{v^{-n}}\right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Записавши формулу (2.49), по аналогії з (2.38), в інтегральній формі і проінтегрувавши в межах $0 \leq \eta \leq 2\pi$, отримаємо нескінченну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1)(A_k + a_k)v_0^{-k} + (\tilde{\mu}_1 - 1)\overline{a_k}v_0^k \\ &= 2\tilde{\mu}_1 B_k v_0^{-k} + \sum_n n(A_n + a_n)v_0^{-n}\beta_{k-n} - \sum_n n(\overline{A_n} + \overline{a_n})\overline{v_0^{-n}}\beta_{k+n}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

де

$$\beta_k = \beta_{-k} = -\frac{i}{2\pi} \int_L \beta \tau^k d\tau = -\frac{1}{2\pi} \tilde{h}_2 \int_0^{2\pi} \frac{\exp(ik\eta)}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}} d\eta, \quad (2.51)$$

а $\tilde{h}_2 = h_2/l_2$ - безрозмірний параметр для умов другого роду. Подальше перетворення системи рівнянь включає визначення B_k з (2.45)

$$B_k = \frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} - \frac{\overline{A_k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} + a_k \quad (2.52)$$

та їх підстановку в (2.50). Остаточний вигляд нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь дає формула

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1)A_k - 2\tilde{\mu}_1 \left[\frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} - \frac{\overline{A_k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} \right] + (\tilde{\mu}_1 - 1)(\overline{a_k}v_0^{2k} - a_k) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} n v_0^{k-n} (A_n \beta_{k-n} - \overline{A_n} \beta_{k+n}) - \sum_n n v_0^{k-n} (a_n \beta_{k-n} - \overline{a_n} \beta_{k+n}) = 0; \\ & k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Зазначимо, нарешті що у випадку ідеального контакту ($h_2 = 0$) доданки з множниками $\beta_{k-n, +n}$ зникають і система (2.53) спрощується до

$$(\tilde{\mu}_1 + 1)A_k - 2\tilde{\mu}_1 \left[\frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} - \frac{\overline{A}_k}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} \right] + (\tilde{\mu}_1 - 1)(\overline{a}_k v_0^{2k} - a_k) = 0; \quad (2.54)$$

$$k = 1, 2, \dots.$$

Ця ж система відповідає $h_1 = \infty$ для умови першого роду і може бути одержана як частинний випадок системи рівнянь (2.42).

2.3.3. Обчислення коефіцієнтів β_k .

В системи рівнянь (2.42) і (2.54) входять коефіцієнти β_k , які обчислюються за формулою:

$$\beta_k = \beta_{-k} = -\frac{i}{2\pi} \int_L \beta \tau^k d\tau = -\frac{i}{2\pi} \gamma \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}} d\eta, \quad (2.55)$$

де $\gamma = \tilde{h}_1$ для контакту першого роду та $\gamma = \tilde{h}_2$ – у для контакту другого роду.

Для зручності, перепишемо формулу (2.55) у вигляді

$$\beta_k = -\frac{i}{2\pi} \gamma \int_0^{2\pi} \frac{\cos k\eta - i \sin k\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta,$$

де $\Delta(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta}$. Очевидно, що для усіх цілих k

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin k\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta \equiv 0; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2k+1)\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta \equiv 0;$$

тому нам достатньо обчислити інтеграли типу

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2k\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta. \quad (2.56)$$

Для $k = 0$ і $k = 1$, ці інтеграли зводяться до повних еліптичних інтегралів першого і другого роду

$$K(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\Delta(-\alpha)} \quad i \quad E(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \Delta(-\alpha) dx$$

відповідно [41], а саме

$$I_0 = 4\sqrt{\alpha}K(-\alpha) \quad (2.57)$$

i

$$I_1 = 4\sqrt{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) K(-\alpha) - \frac{2}{\alpha} E(-\alpha) \right]. \quad (2.58)$$

Виведемо рекурентну формулу для I_k , $k \geq 2$. Стандартні тригонометричні перетворення дають

$$\frac{I_{k+1}}{\sqrt{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k\eta \cos 2\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta - \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2k\eta \sin 2\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta \quad (2.59)$$

i

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k\eta \cos 2\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta = \frac{I_{k+1} + I_{k-1}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Застосуємо формулі диференціювання

$$\frac{2}{a} d\Delta(\alpha) = \frac{\sin 2\eta d\eta}{\Delta(\alpha)}; \quad d\sin 2k\eta = 2k \cos 2k\eta d\eta;$$

i інтегрування частинами для перетворення другого інтегралу з (2.59)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2k\eta \sin 2\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta &= \frac{2}{\alpha} \int_0^{2\pi} \sin 2k\eta d\Delta(\alpha) \\ &= \frac{2}{\alpha} \left[\sin 2k\eta d\Delta(\alpha)^{1/2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \Delta(\alpha) d\sin 2k\eta \right] \\ &= -2k \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) \frac{I_k}{\sqrt{\alpha}} + 2k \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2k\eta \cos 2\eta}{\Delta(\alpha)} d\eta \end{aligned}$$

Комбінуючи наведені вище формулі, отримуємо рекурентну формулу

$$\left(\frac{1}{2} + k \right) I_{k+1} = \left(\frac{1}{2} - k \right) I_{k-1} + 2k \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) I_k. \quad (2.60)$$

Разом із виразами (2.57) та (2.58), формула (2.60) забезпечує ефективну процедуру обчислення I_k , а отже і коефіцієнтів β_k . Зазначимо нарешті, що для великих значень k слід користуватись «зворотною» рекурентною процедурою обчислення I_k .

2.4. Обґрунтування та аналіз збіжності розв'язку

2.4.1 Застосовність методу редукції.

За умови неідеального контакту включення-матриця навіть у випадку одного еліптичного включення лінійна система містить нескінчену кількість рівнянь і невідомих. Для її чисельного розв'язання зазвичай використовують метод редукції, який полягає в утриманні в системі певної скінченої кількості рівнянь. Застосовність такої процедури залежить від властивостей системи і має бути теоретично обґрунтована. Згідно [15], розв'язок нескінченої лінійної системи виду

$$x_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n = b_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.61)$$

може бути одержано з довільною точністю методом редукції за умови

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} (a_{kn})^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^2 < \infty. \quad (2.62)$$

Викладемо схему такого обґрунтування, взявши найбільш складний для чисельного аналізу випадок абсолютно жорсткого включення і поклавши, для конкретності, $\varepsilon^\infty = 1$. По-перше, для $\mu_1 = \infty$ з рівняння (2.34) маємо $D_k = 0$. По-друге, за вибраного навантаження $A_k = \overline{A_k}$, а $a_k = \delta_{k,\pm 1} d$. По-третє, заміною $x_k = k A_k v_0^{-k}$ нескінчена система (2.42) зводиться до виду (2.61) з коефіцієнтами

$$a_{kn} = -(\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})/n, \quad b_k = -\delta_{k1} D_1 v_0^{-1} + D_1 (\beta_{k-1} + \beta_{k+1})(v_0 + v_0^{-1}).$$

Оскільки для довільних $k, n > 0$ виконується $\beta_{q,k-n} < \beta_{q,k+n}$, має місце оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})^2 < 4 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n})^2 < 4 \sum_k (\beta_{qk})^2. \quad (2.63)$$

З рівності Парсеваля для суми квадратів коефіцієнтів Фур'є маємо також

$$\sum_k (\beta_{qk})^2 = (\tilde{h}_1)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q) d\eta_q = (\tilde{h}_1)^2 (1 + \alpha_q / 2), \quad (2.64)$$

тому

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} (a_{kn})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_{q,k-n} + \beta_{q,k+n})^2 < (\tilde{h}_1)^2 (1 + \alpha_q / 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty.$$

З огляду на формули (2.63)-(2.64) скінченність другої суми в (2.62) є очевидною.

2.4.2 Чисельний аналіз збіжності розв'язку.

Наведений вище аналіз доводить, що наближений (з довільною відносною точністю ε) чисельний розв'язок задачі може бути одержано методом редукції при утриманні в рядах (2.17) і (2.20) належної кількості гармонік n_{\max} . Втім, швидкість збіжності розв'язку не є постійною і суттєво залежить від вхідних параметрів задачі. З фізичних міркувань слід очікувати що швидкість збіжності зростає при наближенні до вироджених випадків, а саме $h_1 \rightarrow \infty$, $h_1 \rightarrow 0$ і $e = 1$ при довільному h_1 .

Для скінченого h_1 необхідна кількість гармонік n_{\max} зростає при $e \rightarrow 0$. Згідно [122], для забезпечення похибки обчислень порядку 1% $n_{\max} = 3$ при $1 > e > 1/3$, $n_{\max} = 5$ при $1/3 > e > 1/6$ і $n_{\max} = 7$ при $1/6 > e > 1/9$. Дані в табл. 2.1 демонструють збіжність першого (дипольного) коефіцієнта розвинення A_1 зі збільшенням кількості гармонік n_{\max} для включення з $e = 0.1$ і $\tilde{\mu}_1 = 1000$ при зовнішньому навантаженні $\varepsilon^\infty = 1$. Як видно з таблиці, $n_{\max} = 20$ забезпечує обчислення A_1 з відносною похибкою порядку 10^{-5} .

Табл. 2.1. Збіжність A_1 зі збільшенням кількості гармонік n_{\max}

h_1	n_{\max}					
	1	3	5	10	15	20
∞	1.09350	1.09350	1.09350	1.09350	1.09350	1.09350
10^3	1.08941	1.08942	1.08943	1.08944	1.08944	1.08944
10^2	1.05377	1.05476	1.05539	1.05596	1.05617	1.05620
10	0.78718	0.82314	0.83327	0.83714	0.83763	0.83767
1	0.16234	0.24290	0.24971	0.25130	0.25148	0.25149
10^{-1}	-0.07627	-0.06041	-0.05949	-0.05927	-0.05925	-0.05924
10^{-2}	-0.10704	-0.10532	-0.10522	-0.10520	-0.10520	-0.10520
10^{-3}	-0.11020	-0.11003	-0.11002	-0.11002	-0.11002	-0.11002
0	-0.11055	-0.11055	-0.11055	-0.11055	-0.11055	-0.11055

Табл. 2.2 містить обчислені при різних n_{\max} значення коефіцієнта концентрації напружень (ККН) $\tilde{\sigma}_{13} = \sigma_{13}^{(0)} / \sigma_{13}^{\infty}$ ($\sigma_{23}^{\infty} = 0$) в точці $z = l_1$ матриці на неідеальній границі первого типу ($h_1 = 10$) з майже абсолютно

Таблиця 2.2. Збіжність $\sigma_{13}^{(0)} / \sigma_{13}^{\infty}$ по кількості гармонік (жорстке включення)

n_{\max}	$e=0.5$	$e=0.2$	$e=0.1$	$e=0.05$
10	2.3719	3.2215	4.0077	5.3099
20	2.3709	3.1343	3.5597	4.0678

40	2.3709	3.1297	3.4834	3.6615	
60	2.3709	3.1297	3.4826	3.6451	
80	2.3709	3.1297	3.4823	3.6338	
100	2.3709	3.1297	3.4823	3.6311	
150	2.3709	3.1297	3.4823	3.6301	
200	2.3709	3.1297	3.4823	3.6300	

жорстким ($\tilde{\mu}_1 = \mu_1/\mu_0 = 10^6$) включенням. Як видно з таблиці, швидкість збіжності розв'язку суттєво залежить від форми включення $e = l_2/l_1$: зокрема, для $e = 0.05$ обчислення σ_{13} з відносною похибкою 0.001 вимагає $n_{\max} \geq 100$.

Табл. 2.3 містить значення нормованого напруження $\sigma_{23}^{(0)}/\sigma_{23}^\infty$ на еліптичній нанопорі ($z = l_1$) з параметрами $h_1 = 0.2$ нм і $l_1 = 100$ нм [99].

Таблиця 2.3. Збіжність $\sigma_{23}^{(0)}/\sigma_{23}^\infty$ по кількості гармонік (нанопора)

n_{\max}	aspect ratio, e				
	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02
10	2.982	5.857	10.46	19.30	44.63
20	2.982	5.820	10.10	17.61	36.94
30		5.815	9.968	16.62	31.64
40		5.814	9.923	16.11	28.36
50		5.814	9.908	15.86	26.36
60			9.904	15.74	25.12

70			9.902	15.68	24.33
80			9.902	15.65	23.83
100				15.63	23.26
150				15.62	22.83
200				15.62	22.74
250					22.72
300					22.71

Як видно з таблиці, для $e = 0.5$ уже $n_{\max} = 10$ забезпечує чотири вірні знаки для $\sigma_{23}^{(0)}$. Та ж точність для $e = 0.05$ і $e = 0.02$ досягається при утриманні в розв'язку відповідно 150 і 300 гармонік. Всі наступні обчисленні проведено з відносною похибкою 10^{-4} .

2.5 Аналіз концентрації напружень навколо еліптичної неоднорідності з неідеальною границею розділу

2.5.1 Неідеальний контакт першого типу

В літературі наявні дані щодо концентрації напружень на одиничному еліптичному включені з умовами неідеального контакту першого і другого типу, тому доречним є їх порівняння з одержаним нами строгим розв'язком. На рис. 2.2 подано ККН $\tilde{\sigma}_{13}$ в точці $z = l_1$ матриці на неідеальній границі першого типу як функцію \tilde{h}_1 для $\tilde{\mu}_1 = 30.17/1.02$ [122]. Криві 1 ($e = 1/2$) і 2 ($e = 1/3$) одержано викладеним вище методом, темні трикутники 3 ($e = 1/2$) і квадрати 4 ($e = 1/3$) - дані роботи [122]. З рисунку видно, що різниця порівнюваних даних занадто велика, щоб бути наслідком використаного в [122] наближеного підходу. Світлими трикутниками ($e = 1/2$) і квадратами ($e = 1/3$) показано

значення $\tilde{\sigma}_{13}$, одержані незалежно методом скінчених елементів. Їх практичне співпадіння з нашими даними підтверджує достовірність останніх, тоді як чисельні результати роботи [122] є очевидно помилковими. Зазначимо також, що оскільки \tilde{h}_1 є пропорційним l_2 , то наведені на рис. 2.2 дані демонструють уже згаданий у вступі "розмірний ефект", тобто залежність напружень від розміру включення.

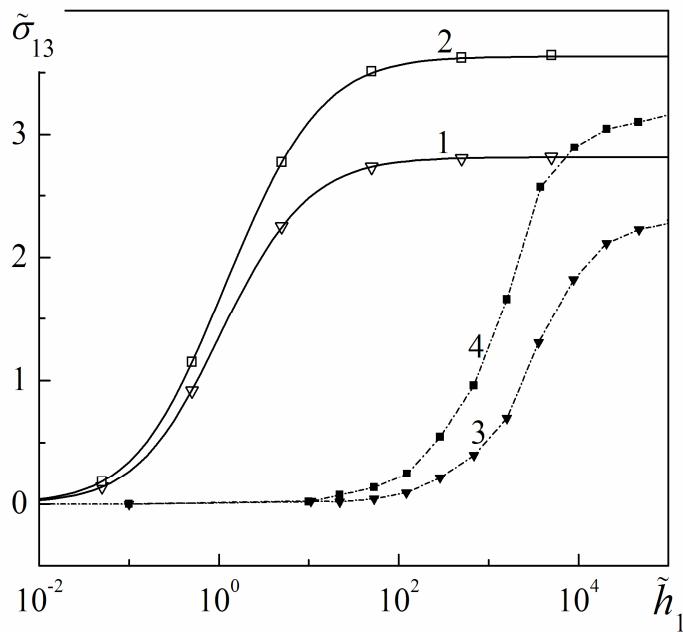


Рис. 2.2. Концентрація напружень у випадку
нідельного контакту першого типу

2.5.2. Неідеальний контакт другого типу

На рис. 2.3 подано значення ККН $\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{23}/\sigma_{23}^\infty$ ($\sigma_{13}^\infty = 0$) в точці $z = l_1$ на поверхні еліптичної пори за наявності поверхневих напружень (частинний випадок контактних умов другого типу (2)) як функцію форми e . Для $\tilde{h}_2 = 0$ і $e \rightarrow 0$, коли еліпс вироджується в тріщину з вільною від напружень поверхнею, ККН очікувано зростає до нескінченості (суцільна крива 1). За наявності поверхневих напружень ($\tilde{h}_2 = 0.001$, крива 2; $\tilde{h}_2 = 0.002$, крива 3; $\tilde{h}_2 = 0.004$,

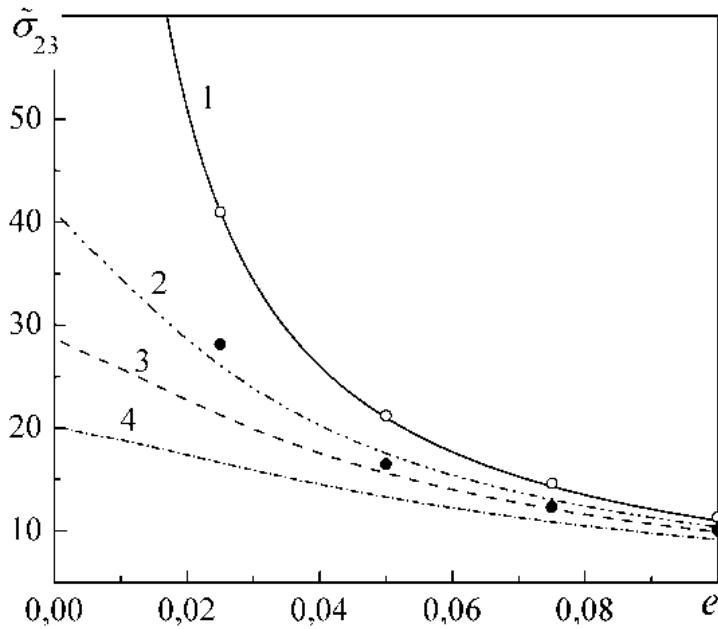


Рис. 2.3. Концентрація напружень у вершині еліптичної пори

крива 4) наші обчислення прогнозують обмеженість σ_{23} при $e \rightarrow 0$, що цілком узгоджується з даними аналізу напружень в околі тріщини з поверхневими напруженнями [78]. Світлими і темними кружками на рисунку показано дані роботи [99] для $\tilde{h}_2 = 0$ і $\tilde{h}_2 = 0.002$ відповідно. За відсутності поверхневих напружень розв'язок задачі є елементарним (у виразі (6) лише $A_1 \neq 0$), тому співпадіння наших даних з [99] є очікуваним. В той же час, для $\tilde{h}_2 = 0.002$ має місце розбіжність порівнюваних даних при $e \leq 0.05$. Ймовірною причиною розбіжності є використання при розрахунках в [99] значення n_{\max} , замалого для забезпечення збіжності розв'язку для $e \leq 0.05$ (див. [87]).

Окрім вказаного вище розмірного ефекту, наслідком неідеальності контакту є *неоднорідність* поля напружень у об'ємі включення, що і зумовлює необхідність врахування вищих гармонік. Це демонструють наведені на рис. 2.4 графіки розподілу $\tilde{\sigma}_{13}$ уздовж осі Ox_1 у включенні та матриці.

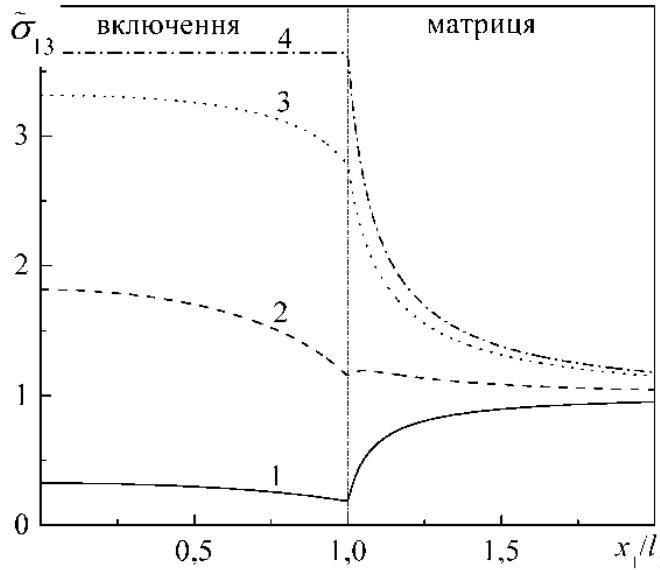


Рис. 2.4. Розподіл напружень у включенні та матриці

Тут параметри задачі ті ж, що і на рис. 2.2, $e = 1/3$. Криві 1-3 розраховано для значень $\tilde{h}_1 = 0.05$, 0.5 і 5 відповідно. Очікуваними винятками є $h_1 = \infty$ (ідеальний контакт, крива 4) і $h_1 = 0$ (відсутність контакту), для яких розв'язок задачі є елементарним. При нагідно зазначимо, що більшість інженерних формул механіки композитів базується на припущення постійності напружень у включеннях, тому їх застосування до прогнозування властивостей композитів з недосконалім контактом фаз є некоректним.

2.5.3. Концентрація напружень на еліптичній нанопорі

Розглянемо спочатку два частинних випадки, коли розв'язок даної задачі є елементарним: для простоти, покладемо $\varepsilon_{13}^\infty = 0$. Перший випадок відповідає еліптичній порі з вільною поверхнею ($h = 0$), коли маємо $A_k \equiv 0$ для усіх k крім $A_l = i\varepsilon_{23}^\infty v_0 d \cosh \zeta_0$. Як легко переконатись, за такого вибору A_l на поверхні порі $\text{Im}\varphi = 0$. Крім того, при $\eta = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \varepsilon_{23}^\infty l_1 (1 + e), \quad \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty} g_{11}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta} = (1 + 1/e), \quad (2.65)$$

де $g_{11} = g_{22} = d^2(\sinh^2 \zeta + \sin^2 \eta)$ - метричні коефіцієнти еліптичної системи координат.

Враховуючи, що радіус кривизни еліпса в точці $z = l_1$ дорівнює $R = e^2 l_1$, маємо $\sigma_{t3} = \sigma_{23}^\infty (1 + \sqrt{l_1/R})$. При $R \rightarrow 0$, коли еліпс вироджується в тріщину, напруження очікувано зростають як $\sigma_{t3} \sim R^{-1/2}$ [26]. Важливо зазначити, що для довільного e потенціал φ та його похідна $\partial\varphi/\partial\xi = \frac{1}{2}(\partial\varphi/\partial\zeta - i\partial\varphi/\partial\eta)$ в околі та на поверхні пори є скінченими, тоді як $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$ при $e \rightarrow 0$, тобто метричний коефіцієнт є єдиним чинником сингулярності розв'язку задачі про тріщину.

Іншим простим випадкам є кругла пора ($e = 1$), радіус кривизни якої є постійним: $g_{11}^{1/2} = R$. Тут маємо $\beta_k = -h^* \delta_{k0}$, де $h^* = h_2/R$ - безрозмірний параметр. Як наслідок, лише перше рівняння системи (2.53) є ненульовим: $B_1 = i\varepsilon_{23}^\infty R(1 - h^*)/(1 + h^*)$. Відповідно на поверхні пори маємо

$$w = \operatorname{Re} \varphi = \varepsilon_{23}^\infty \frac{2}{1 + h^*} R \sin \theta, \quad \operatorname{Im} \varphi = -\varepsilon_{23}^\infty \frac{2h^*}{1 + h^*} R \cos \theta. \quad (2.66)$$

За наявності поверхневих напружень ($h^* \neq 0$) уявна частина потенціалу $\operatorname{Im} \varphi$ теж відмінна від нуля. Вираз напруження σ_{t3} при $\theta = 0$

$$\frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = \frac{1}{\varepsilon_{23}^\infty R} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{2}{1 + h^*} \quad (2.67)$$

відрізняється від (2.65) лише виразом $(1 + h^*)$ у знаменнику і спадає від 2 до 0 по мірі зростання h (крива 1 на рис. 2.7).

У загальному випадку еліптичної пори з поверхневими напруженнями розв'язок задачі має форму ряду по еліптичним гармонікам. На рис. 2.5 показано розподіл нормального напруження σ_{n3} уздовж поверхні круглої (крива 1) і еліптичної пори з $e = 1/3$ (крива 2) та $e = 1/10$ (крива 3) для $h/l_1 = 1$. У випадку вільної поверхні ($h_2 = 0$) $\sigma_{n3} = 0$ незалежно від форми пори.

Характерно, що зі зменшенням e максимальне значення σ_{n3} зростає, а точка максимуму поступово зсувається від $\eta = \pi/2$ для круглої пори у бік зменшення η .

На відміну від σ_{n3} , дотичне напруження σ_{t3} є ненульовим на поверхні пори навіть для $h_2 = 0$ (криві 1 і 2 на рис. 2.6), при цьому його максимальне значення досягається при $\eta = 0$ і визначається формулою (2.65). За наявності поверхневих напружень (криві 3 і 4 на рис. 2.6) максимальне значення σ_{t3} зменшується (див. формулу (2.67)), тоді як точка максимуму залишається незмінною. З огляду на вказане, у подальшому ми зосередимся на дослідженні концентрації напруження $\sigma_{t3} = \sigma_{23}$ у вершині еліпса ($\zeta = \zeta_0, \eta = 0$).

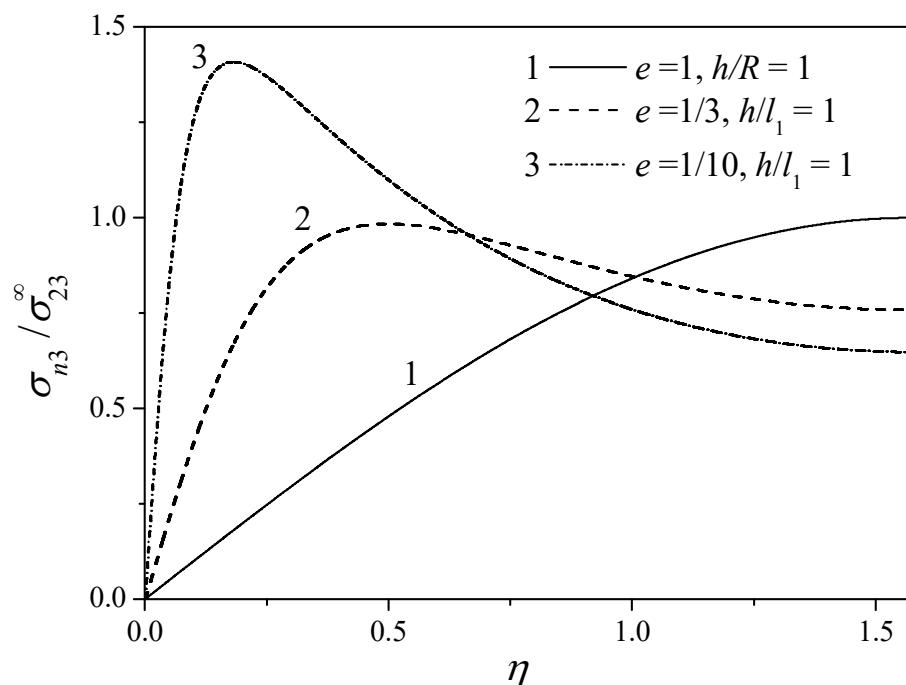


Рис. 2.5. Розподіл напружень навколо еліптичної пори різної форми

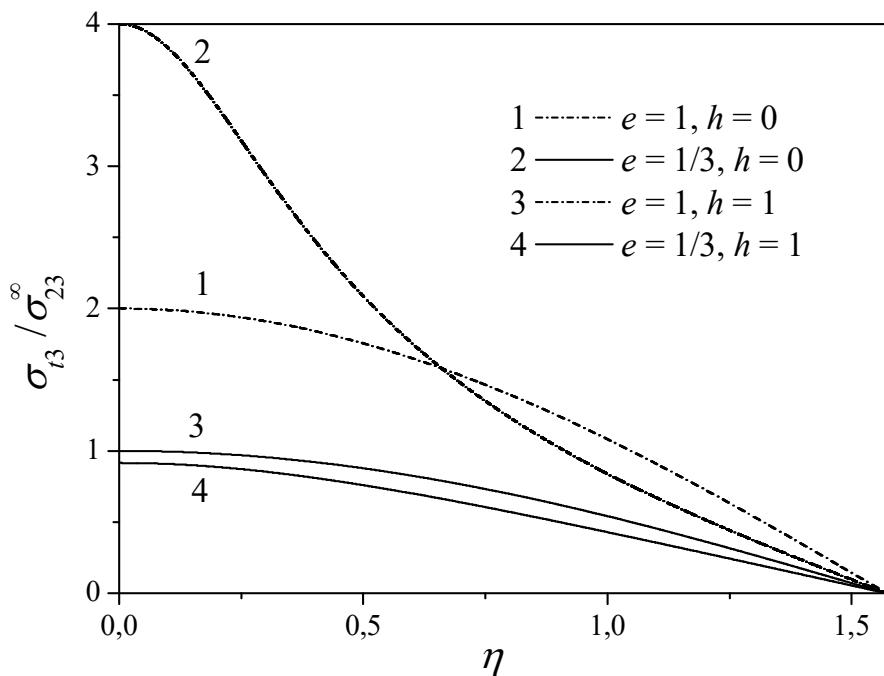


Рис. 2.6. Розподіл дотичних напружень навколо еліптичної пори

Таблиця 2.4. $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^\infty$ як функція e і h^*

h^*	$e = 1.0$	$e = 0.5$	$e = 0.2$	$e = 0.1$	$e = 0.05$	$e = 0.02$
0	2.000	3.000	6.000	11.00	21.00	51.00
0.05	1.905	2.892	5.814	10.67	20.39	49.87
0.1	1.818	2.796	5.652	10.39	19.85	48.83
0.5	1.333	2.264	4.778	8.858	16.98	42.48
1.0	1.000	1.866	4.140	7.756	14.92	37.45

В таблиці 2.4 подано значення коефіцієнта концентрації $\sigma_{23}(l_1)/\sigma_{23}^\infty$ для ряду значень параметра форми (співвідношення осей) еліптичної пори e і безрозмірного параметра $h^* = h_2/R$, де $R = e^2 l_1$ - радіус кривизни в вершині пори. Як видно з таблиці, вплив поверхневих напружень є слабким незалежно від форми пори при $h^* \ll 1$ і стає значним, коли h^* є порядку 1, що дозволяє говорити про критеріальну сутність даного параметра.

На рис. 2.7 наведено значення похідної $\partial w / \partial \eta$ в точці $z = l_1$ як функції h^* для ряду значень e при $\varepsilon_{23}^\infty = 1$. Згідно (2.65), при $h_2 = 0$ дана похідна пропорційна $(1+e)$: для забезпечення порівнюваності, графіки відповідно промасштабовано. Для круглої пори (крива 1) згідно формули (2.67) $\partial w / \partial \eta \sim 1/(1+h^*)$. Для інших значень e (0.5, крива 2; 0.1, крива 3; 0.01, крива 4; 0.001, крива 5) залежності цілком подібні і, за необхідності, з достатньою для інженерних розрахунків точністю можуть бути апроксимовані виразом $1/[1+\alpha(h^*)^\beta]$. В контексті нашого дослідження важливим є те, що має збіжність при $e \rightarrow 0$: так, крива 4 ($e = 0.01$) і крива 5 ($e = 0.001$) на рис. 2.7 практично співпадають.

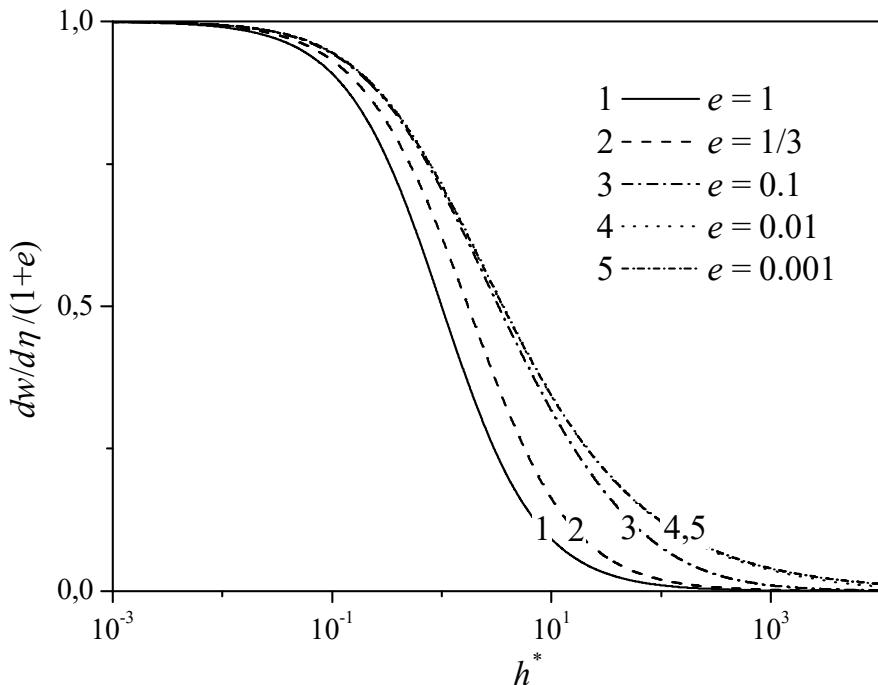


Рис. 2.7. Вплив поверхневих напружень та форми на напруженний стан у вершині пори

З умови (2.20), переписаної у вигляді

$$\operatorname{Im}\varphi = -h_2 \frac{\sigma_{t3}}{2\mu} = -h_2 g_{22}^{-1/2} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (2.68)$$

і згаданої вище скінченості $\text{Im}\varphi$ на поверхні та в околі еліптичної пори (в т.ч. $e = 0$) скінченість напруження σ_{t3} в вершині тріщини є очевидною. Оскільки ж при $e \rightarrow 0$ $g_{11}^{-1/2} \sim 1/e$, то для $\partial w / \partial \eta$ при $h^* \rightarrow \infty$ з необхідністю має місце асимптотика $\partial w / \partial \eta \sim (h^*)^{-1/2} = e\sqrt{l_1/h}_2$. Дійсно, апроксимація наведеної на рис 2.7 кривої 5 при великих h^* дає відповідно

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 1.243(h^*)^{-1/2}, \quad \frac{\sigma_{t3}}{\sigma_{23}^\infty} = 1.243 \left(\frac{h}{l_1} \right)^{-1/2}, \quad (2.69)$$

що є підтвердженням достовірності чисельних результатів даної роботи.

На завершення, проведемо порівняння одержаних нами даних з наявними в літературі аналогічними результатами. На рис. 2.8 показано розраховані значення концентрації напруження σ_{t3} (світлі кружечки) на дуже тонкій ($e = 0.001$) порі та їх апроксимація (2.69) (штрих-пунктирна крива). Тут же наведено дані роботи [78] (темні кружки), де задачу для тріщини з поверхневими напруженнями зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння Коші першого порядку, а для його розв'язання використано метод точкової коллокациї. В [78] відсутня інформація про деталі чисельної реалізації методу, однак з рисунку видно, що при $h_2/l_1 < 0.1$ точність числових даних роботи [78] є явно незадовільною.

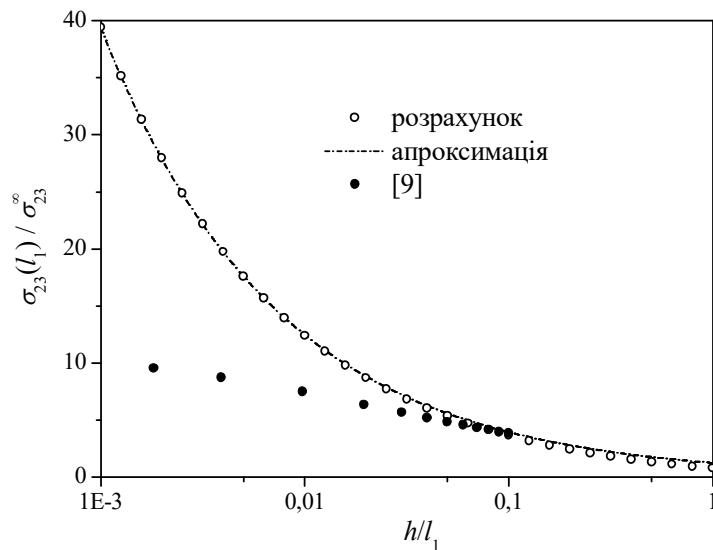


Рис. 2.8 Концентрація напружень на тонкій еліптичній порі

В [99] задачу для нанорозмірного включення/пори еліптичної форми розв'язано методом конформного відображення. Наведені в [99] значення концентрації напруження σ_{t3} на нанопорі з $h_2/l_1 = 0.002$ для нанопори показано на рис 2.9 чорними кружками. Тут же подано розраховані розвинутим методом залежності $\sigma_{t3}(e)$ для $h_2/l_1 = 0$ (крива 1), 0.002 (крива 2) і 0.004 (крива 3), а також асимптотичні значення згідно формули (2.69) (світлі кружечки). Має місце значне відхилення даних роботи [99] від кривої 2 для $e \leq 0.05$, найбільш ймовірною причиною якого є те, що ці дані одержано з урахуванням від 50 до 100 гармонік.

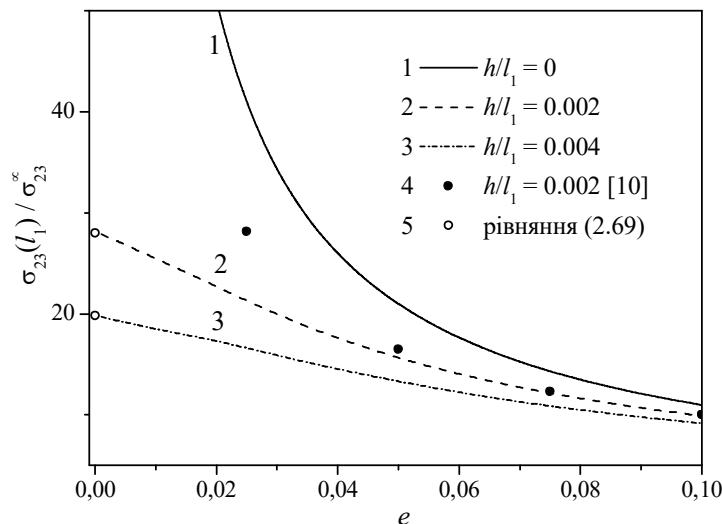


Рис. 2.9. Вплив форми на концентрацію напружень у вершині пори при наявності поверхневих напруженень

Така кількість гармонік є явно недостатньою: як показує практика обчислень, для визначення концентрації σ_{t3} на тонкій ($e = 0.001$) порі з точністю 0.1% необхідно врахувати до $n_{\max} = 5000$ членів ряду (2.31).

Розділ 3.

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРОСТОРУ З МНОЖИНОЮ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Концентрація напружень в кусково-однорідному тілі з кількома/багатьма включеннями зумовлена як прикладеним до зовнішньої границі тіла навантаженням, так і взаємним впливом неоднорідностей. Останній полягає у тому, що збурення зовнішнього поля від одного окремо взятого включення є, по суті, додатковим зовнішнім навантаженням для решти включень - і навпаки, збурення від усіх інших включень входять в зовнішнє поле, яке діє на взяті нами включения. Іншими словами, напружений стан кусково-однорідного тіла з множиною включень є складною суперпозицією збурень на включениях і при постійному зовнішньому навантаженні може змінюватись в широких межах в залежності від відстані між включениями, їх розмірів, форми та взаємної орієнтації. В контексті даної роботи додатковим чинником, який впливає на розподіл та концентрацію напружень в кусково-однорідному тілі, є недосконала межа поділу. Побудова та аналіз розв'язків задач про пружну рівновагу простору з множиною еліптичних включень при антиплоскому зсуві за умови неідеального контакту фаз складає зміст даного розділу.

3.1. Постановка крайової задачі та вид загального розв'язку

3.1.1. Геометрія і граничні умови

Розглянемо площину, яка містить $N > 1$ еліптичних включень, контури яких не перетинаються. У загальному випадку включение є різними за розміром, формою, орієнтацією та модулем зсуву. Типовий вигляд кластера еліптичних включень подано на рис. 3.1. Геометрію q -го включения ($1 \leq q \leq N$) задають координати (X_{1q}, X_{2q}) центру O_q еліпса з півосями l_{1q} та l_{2q} ($l_{2q} < l_{1q}$, $e_q = l_{2q}/l_{1q}$), міжфокусна відстань $2D_q = 2\sqrt{l_{1q}^2 - l_{2q}^2}$ та кут Θ_q

$$l_{2q} < l_{1q}, e_q = l_{2q}/l_{1q}, \text{ міжфокусна відстань } 2D_q = 2\sqrt{l_{1q}^2 - l_{2q}^2} \text{ та кут } \Theta_q$$

($\|\Theta_q\| \leq \pi/2$) між l_{1q} і віссю Ox_1 глобальної декартової системи координат Ox_1x_2 . Введемо також локальні координатні системи $O_qx_{1q}x_{2q}$ з початком в центрі q -го включення, осі O_qx_{1q} та O_qx_{2q} яких паралельні відповідним осям глобальної системи координат. Відповідні глобальна $z = x_1 + ix_2$ та локальні $z_q = x_{1q} + ix_{2q}$ комплексні змінні пов'язані співвідношеннями $z = z_q + Z_q$ ($Z_q = X_{1q} + iX_{2q}$), взаємне положення центрів включень визначає параметр $Z_{pq} = Z_q - Z_p$, рис. 3.2.

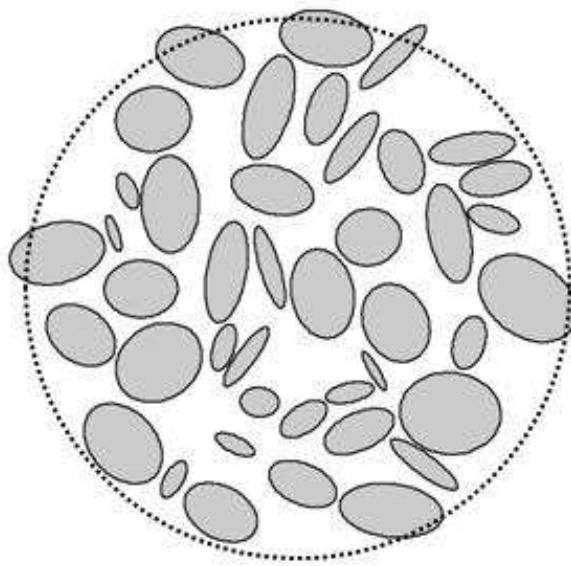


Рис. 3.1. Кластер еліптичних включень

Для кожного включения введемо пов'язану з ним еліптичну систему координат (ζ_q, η_q) та відповідні "еліптичні" комплексні змінні $\xi_q = \zeta_q + i\eta_q$ за формулою

$$z_q = d_q \omega(\xi_q) = D_q \Omega_q \cosh(\xi_q), \quad (3.1)$$

де

$$\omega(\xi) = \cosh(\xi) \text{ і } d_q = D_q \Omega_q = D_q \exp(i\Theta_q). \quad (3.2)$$

Альтернативний запис формулі (3.1) $2z_q = d_q(\nu_q + 1/\nu_q)$, а його обернення має вигляд

$$\nu_q = \exp(\xi_q) = z_q/d_q \pm \sqrt{(z_q/d_q)^2 - 1} \quad (\operatorname{Re}\nu_q > 0). \quad (3.3)$$

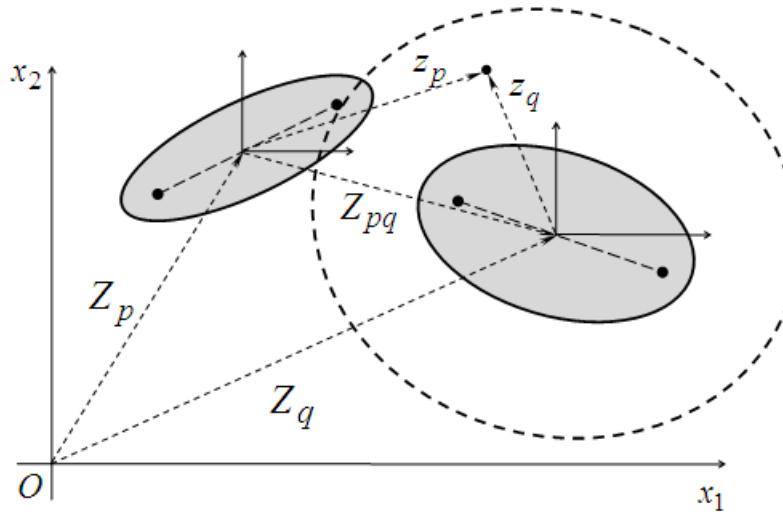


Рис. 3.2. Геометричні параметри задачі

Поверхня q -го включення L_q співпадає з координатною кривою

$$\zeta_q = \zeta_{0q} = \ln\left(\frac{l_{1q} + l_{2q}}{d_q}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + e_q}{1 - e_q}\right). \quad (3.4)$$

3.1.2. Границі умови і навантаження

Як і у випадку задачі з одним еліптичним включенням, розглядаємо два типи умов недосконалого контакту на границі L_q , а саме умови першого

$$h_{1q} [[w]]_{L_q} = \sigma_n, \quad [[\sigma_n]]_{L_q} = 0 \quad (3.5)$$

та другого

$$[[w]]_{L_q} = 0; \quad [[\sigma_n]]_{L_q} = -\frac{\partial \sigma_t^s}{\partial t_q} \quad (3.6)$$

типу. В (3.6) $\sigma_t^s = 2(\mu^s - \tau^0) \partial w / \partial t_q$ - поверхневе напруження, μ^s і τ^0 - пружні модулі міжфазної поверхні, які, як і h_{1q} в (3.5), можуть варіюватись від включення до включення. З метою спрощення подальшого викладу

припускаємо, що на всіх межах поділу задано контактні умови одного і того ж ((3.5) чи (3.6)) типу, а відповідні константи є однаковими для усіх включень.

Навантаження визначається заданими на нескінченності постійними деформаціями $\varepsilon^\infty = \varepsilon_{13}^\infty + i\varepsilon_{23}^\infty$ або напруженнями $\sigma^\infty = \sigma_{13}^\infty + i\sigma_{23}^\infty = 2\mu_0\varepsilon^\infty$. Відповідне їм лінійне переміщення має вигляд $w^\infty = \varepsilon_{13}^\infty x_1 + \varepsilon_{23}^\infty x_2 = \operatorname{Re}(\overline{\varepsilon^\infty} z)$. Оскільки збурення від скінченої множини включень прямує до нуля на нескінченності, то маємо асимптотичну умову $w \rightarrow w^\infty$ при $|z| \rightarrow \infty$. Нарешті, для забезпечення однозначності розв'язку в переміщеннях покладемо, як і в (2.1.5), $w^{(1)}(0) = 0$.

3.1.3. Принцип суперпозиції для побудови загального розв'язку багаточасткової задачі в переміщеннях

Напружений стан кусково-однорідного тіла з множиною включень є складною суперпозицією збурень на окремих включеннях і при постійному зовнішньому навантаженні може змінюватись в широких межах в залежності від відстані між включеннями, їх розмірів, форми та взаємної орієнтації. Збурення зовнішнього поля від одного окремо взятого включения ϵ , по суті, додатковим зовнішнім навантаженням для решти включень - і навпаки, збурення від усіх інших включень входять в зовнішнє поле, яке діє на взяті нами включения. Тому задача, аналогічна розглянутій в розділі 2, повинна бути розв'язана для всіх включень *одночасно*, з урахуванням згаданих вище ефектів взаємовпливу.

Для побудови загального розв'язку *багаточасткової* задачі використаємо відомий в літературі (наприклад, [35]) принцип суперпозиції. Цей принцип стверджує, що загальний розв'язок крайової задачі для багатозв'язної області може бути представлений як сума загальних розв'язків для однозв'язних областей, перетином яких є багатозв'язна область. У нашому випадку, загальний вираз для переміщення в матриці $w^{(0)}$ складається з дальнього поля w^∞ та суми збурень від включень:

$$w^{(0)} = \operatorname{Re} \varphi_0 = w^\infty + \sum_{p=1}^N w_s^{(p)} . \quad (3.7)$$

Переміщення в термінах комплексних потенціалів має вигляд (2.25), де

$$\varphi_0(z) = \varphi^\infty + \sum_{p=1}^N \varphi^{(p)} . \quad (3.8)$$

З огляду на асимптотичну поведінку полів збурень ($w_{dis} \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$) розвинення $\varphi^{(p)}$ в ряд містить лише від'ємні степені v_p :

$$\varphi^{(p)} = \sum_k A_k^{(p)} v_p^{-k} . \quad (3.9)$$

де $A_k^{(p)} \equiv 0$ для $k \leq 0$.

Переміщення точок включення $w^{(q)}$ відповідає комплексному потенціалу $\varphi^{(q)}$ і має вигляд:

$$w^{(q)} = \operatorname{Re} \varphi_q, \quad \varphi_q = \sum_k B_k^{(q)} v_q^{-k}, \quad (3.10)$$

де $B_k^{(q)} = B_{-k}^{(q)}$ є умовою того що $w^{(q)}$ є скінченим в усіх точках q -го включення [26]. Умова $w^{(1)}(0) = 0$ має наслідком $B_0^{(1)} = 0$, решта $B_0^{(q)}$ в загальному випадку відмінні від нуля і мають бути визначені як частина розв'язку краєвої задачі.

3.2. Формули перерозкладу еліптичних гармонік при переносі і повороті системи координат

Основною відмінністю багаточасткової задачі, зокрема виразу (3.8) від аналогічного виразу (формула (2.30)) для одночасткової задачі полягає у тому, що доданки в (3.8) є функціями змінних різних локальних криволінійних координатних систем. Так, для виконання контактних умов (3.5) чи (3.6) для q -го включення перепишемо у вигляді

$$\varphi^{(0)}(z) = \varphi_{far} + \varphi_s^{(q)}, \quad \varphi_{far} = \varphi^\infty + \sum_{p \neq q}^N \varphi_s^{(p)} . \quad (3.11)$$

Тут $\varphi_s^{(q)}$ уже записано в вигляді функції локальних еліптичних координат (ζ_q, η_q) , див. ф-лу (3.9). Для того, щоб остаточно звести багаточасткову задачу до системи одночасткових задач типу розглянутих в розділі 2, φ_{far} також має представлена записана формулою типу (2.28) в термінах змінних (ζ_q, η_q) . Математичною основою необхідних для цього алгебраїчних перетворень є викладені нижче формулі перерозкладу еліптичних гармонік при переносі і повороті системи координат.

3.2.1. Одержання розкладів та способи обчислення коефіцієнтів

Конкретно, проблема полягає у розвиненні зв'язаних з p -тим включенням еліптичних гармонік $(v_p)^{-n}$ в ряд по еліптичним гармонікам $(v_q)^{-m}$, які є функціями q -ї локальної системи координат (див. рис. 3.2). Відповідна формула перерозкладу для еліптичних гармонік з $n \geq 1$ має вигляд (наприклад, [85])

$$v_p^{-n} = \sum_m \eta_{nm}^{pq} v_q^{-m}, \quad (3.12)$$

де коефіцієнти перерозкладу $\eta_{nm}^{pq} = \eta_{nm}(Z_{pq}, d_p, d_q)$ і $Z_{pq} = Z_q - Z_p$. З огляду на (2.28), $\eta_{nm}^{pq} = \eta_{n,-m}^{pq}$; питання полягає у тому, як визначити коефіцієнти розкладу.

В частинному випадку двох колінеарних еліптичних систем координат з $D_p = D_q$ і $\operatorname{Im} Z_{pq} = 0$, η_{nm} записано [102] як невласний інтеграл першого роду від добутку функцій Бесселя. В [127] для довільно розташованих і однаково орієнтованих еліптичних систем координат з однаковим фокальним параметром $D_p = D_q$ η_{nm}^{pq} подано в термінах гіпергеометричних функцій і запропоновано зручну для чисельних розрахунків формулу. В наших позначеннях вона має вигляд

$$\eta_{nm}^{pq} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (v_p)^{-n} |_{\zeta_q=0} \cos(m \eta_q) d\eta_q, \quad (m \geq 1). \quad (3.13)$$

Дана формула ясно демонструє фізичний зміст коефіцієнтів η_{nm}^{pq} , які є нічим іншим, як коефіцієнтами Фур'є розкладу $(v_p)^{-n}$ в термінах η_q . В [81] показано, що даний розклад є актуальним для довільних, не обов'язково однакових, значень D_p та D_q . Що важливо, що всі вищезгадані формули дійсні (в межах своєї зони збіжності) для випадку довільно орієнтованих координатних систем за умови заміни там дійсних параметрів D_p і D_q їх комплексними аналогами d_p і d_q [85].

Вираз (3.13) є загальним і вірним для довільних значень геометричних параметрів, єдиним обмеженням є умова неперетину і неторкання еліпсів з індексами p і q . Втім, обчислення η_{nm}^{pq} за (3.13) вимагає певних обчислювальних зусиль, тому актуальним є пошук ефективних альтернативних методів оцінки η_{nm} . В [81] одержано вираз

$$\eta_{nm}^{pq} = (-1)^m n \left(\frac{d_p}{d_{pq}} \right)^n \sum_{j=0}^{\infty} v_{pq}^{-(n+m+2j)} \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l}}{(j-l)!} \left(\frac{d_p}{d_{pq}} \right)^{m+2l} M_{nml}(d_p, d_q) \frac{(n+m+l+j-1)!}{(j-l)!} \quad (3.14)$$

де $d_{pq} = d_p + d_q$, $v_{pq} = Z_{pq} / d_{pq} + \sqrt{(Z_{pq} / d_{pq})^2 - 1}$ і

$$M_{nml}(d_p, d_q) = \sum_{k=0}^l \frac{(d_p / d_q)^{2k}}{k!(l-k)!(k+n)!(m+l-k)!}. \quad (3.15)$$

Область збіжності ряду (3.12) з коефіцієнтами (3.14) є еліпс з центром Z_q і фокальним параметром d_{pq} (пунктирна лінія на рис. 3.2.). Вказана умова гарантовано виконується для довільних еліпсів, які не перетинаються. Для більш детального аналізу збіжності рядів типу (3.14) див. [127, 128].

Для достатньо віддалених ($|Z_{pq}| > |d_p + d_q|$) еліптичних координатних систем, формула (3.14) спрощується до

$$\eta_{nm}^{pq} = n d_p^n (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} d_q^{2l+m} M_{nml}(d_p, d_q) \frac{(n+m+2l-1)!}{(2Z_{pq})^{n+m+2l}}. \quad (3.16)$$

У частинному випадку однаково орієнтованих еліпсів $d_p = d_q$, формула (3.15) також спрощується до

$$M_{nml} = \frac{(n+m+l+1)_l}{l!(n+l)!(m+l)!}, \quad (3.17)$$

де $(n)_m = \prod_{k=1}^m (n+k-1) = (n+m-1)!/(n-1)!$ є число Похгаммера. Вираз (3.16) є

простим і високоефективним способом обчислення η_{nm}^{pq} . Таким чином, оптимальною стратегією є використання (3.13) або (3.14) для найближчих сусідніх включень і (3.16) - для решти включень.

3.2.2. Чисельне дослідження області збіжності

Для демонстрації чисельної збіжності розкладу (3.12), покажемо обчислення еліптичних гармонік для точки, показаної на рис. 3.3 темним кружком, в околі p -го включения в термінах q -го через запропоновані формули перерозкладу. Фактично, маємо 2 системи координат, які лежать на серединах «розрізів» d_p та d_q (рис. 3.3).

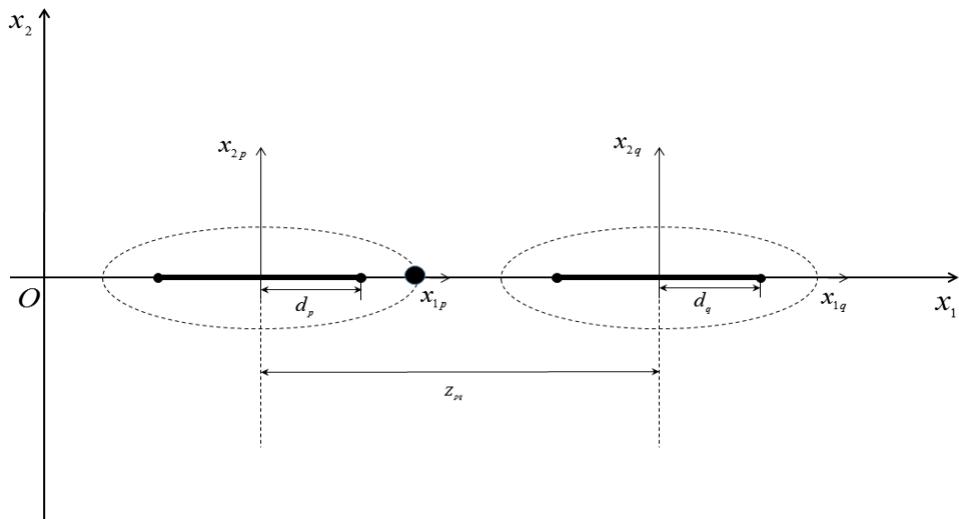


Рис. 3.3. Схема розташування двох сусідніх включень

Вважатимемо, що фокальні параметри ϵ однаковими, тобто $d_p = d_q = d$.

Таблиця 3.1. Збіжність перерозкладу еліптичних гармонік за формулою (3.14)

	$Z_{pq} = 5d$		$Z_{pq} = 2.5 d$		$Z_{pq} = 2.25 d$		$Z_{pq} = 2.1 d$	
n_{\max}	v_p^{-n}	$\sum_k \eta_{nk}^{pq} v_q^{-k}$	v_p^{-n}	$\sum_k \eta_{nk}^{pq} v_q^{-k}$	v_p^{-n}	$\sum_k \eta_{nk}^{pq} v_q^{-k}$	v_p^{-n}	$\sum_k \eta_{nk}^{pq} v_q^{-k}$
1	-0.1290	-0.1258	-0.4041	-0.3511	-0.5455	-0.4392	-0.7560	-0.5293
2	-0.1290	-0.1286	-0.4041	-0.3854	-0.5455	-0.4973	-0.7560	-0.6195
5	-0.1290	-0.1290	-0.4041	-0.4028	-0.5455	-0.5382	-0.7560	-0.7079
10	-0.1290	-0.1290	-0.4041	-0.4040	-0.5455	-0.5449	-0.7560	-0.7410
20	-0.1290	-0.1290	-0.4041	-0.4041	-0.5455	-0.5454	-0.7560	-0.7534
50	-0.1290	-0.1290	-0.4041	-0.4041	-0.5455	-0.5455	-0.7560	-0.7560

З Таблиці 3.1 видно, що для достатньо віддалених ($Z_{pq} \geq 5d$) координатних систем, перерозклад не є суттєво залежним від кількості гармонік. Тобто, на великих відстанях взаємодією між включеннями можна нехтувати, тому що вони не породжуватимуть локальних збурень в околах одиного. З іншого боку, для достатньо близького розташування, необхідно збільшувати кількість гармонік для отримання більш точного перерозкладу. Наприклад, при досить близькому взаємному розташуванні розрізів ($Z_{pq} = 2.1d$), необхідно щонайменше 50 гармонік для забезпечення точності $\epsilon = 0.001$.

Зрозуміло, що у випадку, коли «розрізи» будуть накладатись один на одного, то перерозклад взагалі кажучи, буде розбіжним, що є цілком очевидним.

В загальному, можна зробити висновок про збіжність перерозкладу в довільній точці деякої локальної системи координат, якщо виконуватиметься

умова $|Z_{pq}| > (d_p + d_q)$, швидкість збіжності зменшуватиметься, коли ми наблизатимемось до межі зони збіжності (пунктирна лінія на рис. 3.2). А для точного перерозкладу еліптичних гармонік точок, які знаходяться близько до межі зони збіжності, необхідно збільшувати кількість гармонік n_{\max} .

3.3. Одержання нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

3.3.1. Контактні умови першого типу

Подамо переміщення w у вигляді $w = \operatorname{Re}\varphi(z)$, де $\varphi(z)$ - комплексний потенціал. Відповідне комплексне напруження $\sigma = \sigma_{13} + i\sigma_{23} = \mu\overline{\varphi'(z)}$, де модуль зсуву матриці $\mu = \mu_0$ і $\mu = \mu_q$ для q -го включення. При запису умов контакту першого типу (3.5) на L_q в термінах комплексних потенціалів

$$[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_{L_q} = 0, \quad h_{1q} [\![\operatorname{Re}\varphi]\!]_{L_q} = \mu_0 \frac{\partial \operatorname{Re}\varphi_0}{\partial n} \quad (3.18)$$

по аналогії з (2.17) враховано, що умова неперервності нормальні напруження $[\![\sigma_n]\!]_{L_q} = 0$ еквівалентна $[\![\mu \operatorname{Im}\varphi(z)]\!]_{L_q} = 0$.

Користуючись принципом суперпозиції, представимо переміщення $w^{(0)}$ точок багатозв'язної області (матриці) у вигляді суми "далнього" поля w^∞ та збурень $w^{(p)}$ від кожного з включень. Згідно (3.7)-(3.9),

$$w^{(0)} = \operatorname{Re}\varphi_0, \quad \varphi_0 = \varphi^\infty + \sum_{p=1}^N \varphi^{(p)}, \quad (3.19)$$

де

$$\varphi^\infty = \overline{\varepsilon^\infty} z, \quad \varphi^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} (v_p)^{-n}, \quad (3.20)$$

$v_p = v(z_p) = \exp \xi_p$ і $A_n^{(p)}$ - невідомі комплексні сталі. Переміщення в q -му включенні має вигляд (3.10).

Загальний вираз $w^{(0)}$ (3.19) містить доданки (3.20), записані в різних координатних системах. Для виконання контактних умов (3.18) на L_q їх необхідно записати в термінах локальних еліптичних змінних q -го включення, v_q . Для φ^∞ таке перетворення є елементарним і дає

$$\varphi^\infty = 2\overline{\varepsilon}^\infty \left[Z_q + \frac{d_q}{2} (v_q + 1/v_q) \right]. \quad (3.21)$$

Потенціал $\varphi^{(q)}$ уже записаний в змінних q -тої системи і перетворень не потребує. Перетворення інших доданків $\varphi^{(p)}$ базується на формулах перерозкладу еліптичних гармонік $(v_p)^{-n}$ ($n > 0$) в термінах v_q (3.12). Після певних алгебраїчних перетворень отримуємо локальне розвинення

$$\varphi_0 = \sum_k (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) (v_q)^{-k}, \quad (3.22)$$

де $A_k^{(q)} \equiv 0$ для $k \leq 0$, а коефіцієнти регулярної частини розв'язку ($a_{-k}^{(q)} = a_k^{(q)}$) визначаються формулою

$$a_k^{(q)} = \sum_{\substack{p=1 \\ (p \neq q)}}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \eta_{nk}^{pq} + \delta_{k,\pm 1} \overline{\varepsilon}^\infty d_q, \quad (3.23)$$

де δ_{ij} - дельта-функція Кронекера.

Розглянемо детально виконання контактних умов (3.18) для q -го включення. З першої умови маємо

$$\tilde{\mu}_q (\varphi_q - \overline{\varphi}_q) = \varphi_0 - \overline{\varphi}_0, \quad (3.24)$$

де $\tilde{\mu}_q = \mu_q / \mu_0$. На L_q , $v_q = v_{0q} \tau$, $v_{q0} = \exp \zeta_{q0}$ і $\tau = \exp i \eta_q$; також, $\bar{v} = v_0 \tau^{-1}$.

Підстановка φ_q (3.10) і φ_0 (3.22) в (3.24) дає

$$\begin{aligned} & \tilde{\mu}_q \left(\sum_k B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} \tau^{-k} - \sum_k \overline{B_k^{(q)}} v_{0q}^k \tau^{-k} \right) \\ &= \sum_k (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} \tau^{-k} - \sum_k (\overline{A_{-k}^{(q)}} + \overline{a_k^{(q)}}) v_{0q}^k \tau^{-k}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

звідки з урахуванням ортогональності гармонік Фур'є τ^k одержуємо нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{\mu}_q \left(B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} - \overline{B_k^{(q)}} v_{0q}^k \right) = \left(A_k^{(q)} + a_k^{(q)} \right) v_{0q}^{-k} - \overline{a_k^{(q)}} v_{0q}^k \quad (3.26)$$

для $k > 0$.

Друга умова дає

$$\varphi_0 + \overline{\varphi_0} = \varphi_q + \overline{\varphi_q} - \frac{\mu_0}{h_{1q}} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial n}} \right). \quad (3.27)$$

Помноживши її на $\tilde{\mu}_q = \mu_q / \mu_0$ і скориставшись формулою (2.35), одержимо

$$\tilde{\mu}_q \left(\varphi_0 + \overline{\varphi_0} \right) = \tilde{\mu}_q \left(\varphi^{(q)} + \overline{\varphi^{(q)}} \right) + \beta_q \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta_q} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta_q}} \right), \quad (3.28)$$

де

$$\beta_q = -\frac{\mu_q}{h_{1q} l_{2q}} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \sin^2 \eta_q}}, \quad l_{2q} = d_q \sinh \zeta_{q0}, \quad \alpha = \sinh^{-2} \zeta_{q0}. \quad (3.29)$$

Комбінуючи (3.24) та (3.28), отримаємо

$$(\tilde{\mu}_q + 1) \varphi_0 + (\tilde{\mu}_q - 1) \overline{\varphi_0} = 2 \tilde{\mu}_q \varphi_q + \beta_q \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta_q} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta_q}} \right). \quad (3.30)$$

Підстановка сюди виразів для потенціалів дає нам

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_q + 1) \sum_n \left(A_n^{(q)} + a_n^{(q)} \right) v_q^{-n} + (\tilde{\mu}_q - 1) \sum_n \left(\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}} \right) \overline{v_q^{-n}} \\ &= 2 \tilde{\mu}_q \sum_n B_n^{(q)} v_q^{-n} - \beta_q \left(\sum_n n \left(A_n^{(q)} + a_n^{(q)} \right) v_q^{-n} + \sum_n n \left(\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}} \right) \overline{v_q^{-n}} \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Тепер інтегруванням помноженого на $\tau^k = \exp ik\eta_q$ ($k=1,2,\dots$) рівняння (3.31) по $0 \leq \eta_q \leq 2\pi$ отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_q + 1) \left(A_k^{(q)} + a_k^{(q)} \right) v_{0q}^{-k} + (\tilde{\mu}_q - 1) \overline{a_k^{(q)}} v_{0q}^k \\ &= 2 \tilde{\mu}_q B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} - \sum_n n \left(A_n^{(q)} + a_n^{(q)} \right) v_{0q}^{-n} \beta_{q,k-n} - \sum_n n \left(\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}} \right) \overline{v_{0q}^{-n}} \beta_{q,k+n}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

де

$$\beta_{qk} = \beta_{q,-k} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_q} \beta_q \tau^k dt = -\frac{1}{2\pi} \tilde{h}_{1q} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(i k \eta_q) d\eta_q}{\sqrt{1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q}}. \quad (3.33)$$

Тут $\tilde{h}_{1q} = \mu_q / (h_1 l_{2q})$ - безрозмірний параметр для умов першого типу.

Як останній крок, позбудемося коефіцієнтів $B_k^{(q)}$. Визначення їх (3.26)

$$\tilde{\mu}_q B_k^{(q)} = \frac{A_k^{(q)} v_{0q}^{-2k}}{(v_{0q}^{-2k} - v_{0q}^{2k})} + \frac{\overline{A_k^{(q)}}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} + a_k \quad (3.34)$$

і підстановка (3.34) в (3.32) дає систему рівнянь для випадку контактних умов першого типу. В компактному вигляді,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(q)} V_{nk}^{(1)} + \overline{A_n^{(q)}} V_{nk}^{(2)} + a_n^{(q)} v_{nk}^{(1)} + \overline{a_n^{(q)}} v_{nk}^{(2)} \right) = 0 \quad (3.35)$$

$$q = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots;$$

де

$$V_{nk}^{(1)} = -n v_{0q}^{-n} \beta_{k-n} + \delta_{nk} \left[(\tilde{\mu}_q + 1) - \frac{2 v_{0q}^{-2n}}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}} \right] v_{0q}^{-n}; \quad (3.36)$$

$$V_{nk}^{(2)} = n v_{0q}^{-n} \beta_{k+n} + \delta_{nk} \frac{2 v_{0q}^{-n}}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}};$$

$$v_{nk}^{(1)} = -n v_{0q}^{-n} \beta_{k-n} + n v_0^n \beta_{k+n} - \delta_{nk} (\tilde{\mu}_q - 1) v_{0q}^{-n}; \quad (3.37)$$

$$v_{nk}^{(2)} = n v_{0q}^{-n} \beta_{k+n} - n v_0^n \beta_{k-n} + \delta_{nk} (\tilde{\mu}_q - 1) v_{0q}^n.$$

Співвідношення (3.35)-(3.37) в сукупності з (3.23) утворюють замкнену нескінчену систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_k^{(q)}$. Їх визначення методами комп'ютерної алгебри завершує процедуру розв'язку.

3.3.2. Кон тактні умови другого типу

Умови другого типу (3.6) в термінах комплексних потенціалів мають вигляд, аналогічний (2.18), а саме

$$\llbracket \operatorname{Re} \varphi \rrbracket_{L_q} = 0; \quad \left[\left[\mu \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi}{\partial n} \right] \right]_{L_q} = (\mu_q^s - \tau_q^0) \frac{\partial^2 \operatorname{Re} \varphi_0}{\partial t_q^2}. \quad (3.38)$$

Описане у попередньому розділі перетворення другої з умов з використанням умови Коші-Рімана і наступним інтегруванням по t уздовж L_q дає вираз

$$\llbracket \mu \operatorname{Im} \varphi \rrbracket_{L_q} = (\mu_q^s - \tau_q^0) \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_0}{\partial t_q}. \quad (3.39)$$

Умову $\llbracket \operatorname{Re} \varphi \rrbracket_{L_q} = 0$ перепишемо у вигляді

$$\varphi_q + \overline{\varphi}_q = \varphi_0 + \overline{\varphi}_0. \quad (3.40)$$

Підстановка сюди граничних значень локальних розкладів потенціалів для матриці і q -го включення дає, після деяких перетворень,

$$\sum_k B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} \tau^{-k} + \sum_k \overline{B_{-k}^{(q)}} v_{0q}^k \tau^{-k} = \sum_k (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} \tau^{-k} + \sum_k (\overline{A_{-k}} + \overline{a_{-k}}) v_{0q}^k \tau^{-k}. \quad (3.41)$$

З огляду на ортогональність гармонік Фур'є $\tau^k = \exp ik\eta_q$ приходимо до нескінченої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} + \overline{B_k^{(q)}} v_{0q}^k = (A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} + \overline{a_k^{(q)}} v_{0q}^k \quad (3.42)$$

для $k \geq 0$.

З умови (3.39)

$$(\tilde{\mu}_q \operatorname{Im} \varphi_q - \operatorname{Im} \varphi_0)_{L_q} = h_{2q} \frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_0}{\partial t_q}, \quad (3.43)$$

де $\tilde{\mu}_q = \mu_q / \mu_0$ і $h_{2q} = (\mu_q^s - \tau_q^0) / \mu_0$.

На еліптичній кривій $\zeta_q = \zeta_{0q}$, згідно з (2.3)-(2.4),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_q} = \frac{1}{d_q \sqrt{\sinh^2 \zeta_{0q} + \sin^2 \eta_q}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_q},$$

звідки

$$\tilde{\mu}_q (\varphi_q - \overline{\varphi}_q) - (\varphi_0 - \overline{\varphi}_0) = \beta_q \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta_q} + \frac{\overline{\partial \varphi_0}}{\partial \eta_q} \right), \quad (3.44)$$

де

$$\beta_q = i \frac{h_{2q}}{l_{2q}} \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q}}, \quad (3.45)$$

$\alpha_q = \sinh^{-2} \zeta_{0q}$ і $l_{2q} = d_q \sinh \zeta_{0q}$ - менша піввісь еліптичного включення.

Комбінація (3.42) і (3.44) дає

$$(\tilde{\mu}_q + 1)\varphi_0 + (\tilde{\mu}_q - 1)\overline{\varphi}_0 = 2\tilde{\mu}_q \varphi_q + \beta_q \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta_q} + \frac{\overline{\partial \varphi_0}}{\partial \eta_q} \right), \quad (3.46)$$

звідки, з огляду на очевидну рівність $\partial v_q / \partial \eta_q = i v_q$,

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_q + 1) \sum_n (A_n^{(q)} + a_n^{(q)}) v_q^{-n} + (\tilde{\mu}_q - 1) \sum_n (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}}) \overline{v_q^{-n}} \\ &= 2\tilde{\mu}_q \sum_n B_n^{(q)} v^{-n} + i\beta_q \left[\sum_n (A_n^{(q)} + a_n^{(q)}) v_q^{-n} - \sum_n (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}}) \overline{v_q^{-n}} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Домноживши дві частини (3.47) на τ^k і проінтегрувавши в межах $0 \leq \eta \leq 2\pi$, отримаємо нескінченну систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_q + 1)(A_k^{(q)} + a_k^{(q)}) v_{0q}^{-k} + (\tilde{\mu}_q - 1) \overline{a_k^{(q)}} v_{0q}^k \\ &= 2\tilde{\mu}_q B_k^{(q)} v_{0q}^{-k} + \sum_n n (A_n^{(q)} + a_n^{(q)}) v_{0q}^{-n} \beta_{q,k-n} - \sum_n n (\overline{A_n^{(q)}} + \overline{a_n^{(q)}}) v_{0q}^{-n} \beta_{q,k+n}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

де

$$\beta_{qk} = \beta_{q,-k} = -\frac{i}{2\pi} \int_{L_q} \beta_q \tau^k d\tau = -\frac{1}{2\pi} \tilde{h}_{2q} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(i k \eta_q)}{\sqrt{1 + \alpha_q \sin^2 \eta_q}} d\eta_q,$$

а $\tilde{h}_{2q} = h_{2q} / l_{2q}$ - безрозмірний параметр для умов другого роду.

Для зменшення числа невідомих, позбудемося $B_k^{(q)}$. Визначимо їх із (3.42) як

$$B_k^{(q)} = \frac{A_k^{(q)} v_{0q}^{-2k}}{(v_{0q}^{-2k} - v_{0q}^{2k})} - \frac{\overline{A_k^{(q)}}}{(v_{0q}^{-2k} - v_{0q}^{2k})} + a_k^{(q)} \quad (3.49)$$

та підставимо у (3.48). У підсумку маємо

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mu}_1 + 1)A_k - 2\tilde{\mu}_1 \left[\frac{A_k v_0^{-2k}}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} - \frac{\overline{A}_k}{(v_0^{-2k} - v_0^{2k})} \right] + (\tilde{\mu}_1 - 1)(\overline{a}_k v_0^{2k} - a_k) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} n v_0^{k-n} (A_n \beta_{k-n} - \overline{A}_n \beta_{k+n}) - \sum_n n v_0^{k-n} (a_n \beta_{k-n} - \overline{a}_n \beta_{k+n}) = 0; \\ & k = 1, 2, \dots . \end{aligned} \quad (3.50)$$

У компактному запису система рівнянь (3.50) має вигляд (3.35), з заміною виразів для $V_{nk}^{(i)}$ (3.36) на

$$\begin{aligned} V_{nk}^{(1)} &= -n v_{0q}^{-n} \beta_{k-n} + \delta_{nk} \left[(\tilde{\mu}_q + 1) - \frac{2\tilde{\mu}_q v_{0q}^{-2n}}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}} \right] v_{0q}^{-n}, \\ V_{nk}^{(2)} &= n v_{0q}^{-n} \beta_{k+n} + \delta_{nk} \frac{2\tilde{\mu}_q v_{0q}^{-n}}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.4. Простір з періодичною системою еліптичних включень

3.4.1. Структурна модель

Розглянемо кусково-однорідний простір періодичної структури з періодом a уздовж осей Ox_1 і Ox_2 глобальної декартової системи координат. Елементарна комірка такої структури є квадрат, який містить скінченну множину з N еліптичних включень, які можуть відрізнятись за розміром, формою, орієнтацією та властивостями, рис. 3.4. Всередині комірки включення розташовані довільним чином, єдиною умовою є неперетин включень як всередині комірки, так і з включеннями сусідніх комірок, які одержані періодичним повторенням даної. В той же час, включення може перетинати границю структурної комірки: ми вважаємо, що включення належить до комірки, коли її центр лежить всередині квадрата зі стороною a , див. рис. 3.4. З іншого боку, ми можемо розглядати таку геометрію як простір з N простими періодичними гратками еліптичних включень. В механіці композитних матеріалів така структурна модель відома як "представницька комірка" (representative unit cell); вона має достатню кількість ступенів свободи для

апроксимації мікроструктури реальних неоднорідних матеріалів (див., напр. рис. 1.1.)

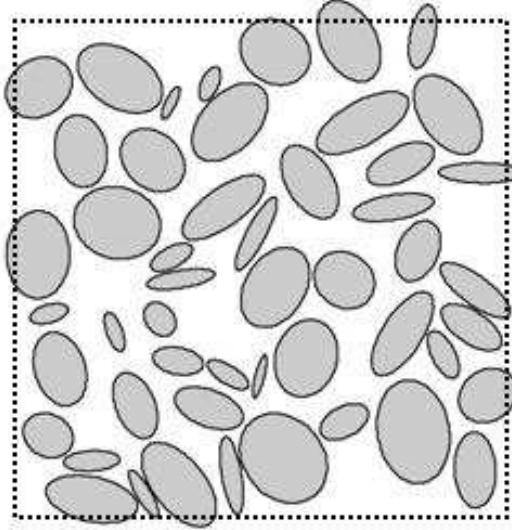


Рис. 3.4. Елементарна комірка узагальненої періодичної структури

Таким чином, геометрія структурної моделі визначається розміром комірки a , координатами (X_{1q}, X_{2q}) центра O_q q -го включення ($1 \leq q \leq N$), відношенням осей $e_q = l_{2q}/l_{1q}$, відстанню між фокусами $2D_q = 2\sqrt{l_{1q}^2 - l_{2q}^2}$ та кутом Θ_q ($\|\Theta_q\| \leq \pi/2$) між l_{1q} і віссю Ox_1 глобальної декартової системи координат Ox_1x_2 , $d_q = D_q \Omega_q = D_q \exp(i\Theta_q)$. По суті, структурна комірка є не чим іншим як скінченим кластером включень (див. підрозділ 3.1), а увесь кусково-однорідний простір одержано її повторенням у двох ортогональних напрямках, уздовж осей Ox_1 і Ox_2 . Об'ємний вміст включень $c = a^{-2} \sum_{q=1}^N l_{1q} l_{2q}$. Данна модель однаково придатна як для періодичних, так і невпорядкованих структур: так, зображена на рис. 3.4 геометрія одержана з використанням викладеного в [49] алгоритму, який базується на методі Монте-Карло.

По аналогії з задачею для скінченого кластера, введемо локальні координатні системи $O_q x_{1q} x_{2q}$ з початком в центрі q -го включення та осями $O_q x_{1q}$ та $O_q x_{2q}$, паралельними відповідно Ox_1 і Ox_2 . Положення q -го включення в комплексній площині центр задає число $Z_q = X_{1q} + iX_{2q}$, взаємне

положення центрів включень визначає параметр $Z_{pq} = Z_q - Z_p$. Глобальна $z = x_1 + ix_2$ та локальні $z_q = x_{1q} + ix_{2q}$ комплексні змінні пов'язані співвідношеннями $z = z_q + Z_q$. Локальні еліптичні системи координат (ζ_q, η_q) та відповідні "еліптичні" комплексні змінні $\xi_q = \zeta_q + i\eta_q$ введено формулами (3.1)-(3.3), поверхню q -го включения L_q задано рівнянням (3.4). Як і в підрозділі 3.1, недосконалій контакт на границі L_q описується умовою першого (3.5) чи другого (3.6) типу.

Як відомо (напр., [3, 6, 8]), за умови макроскопічної однорідності деформацій і напружень та періодичності структури матеріалу поле переміщень є квазіперіодичною функцією координат:

$$w(z+a) - w(z) = E_{13}a; \quad w(z+ia) - w(z) = E_{23}a, \quad (3.52)$$

де $E_{13} = \langle \varepsilon_{13} \rangle$ - макроскопічні деформації поздовжнього зсуву. Аналітичний розв'язок цієї задачі у цілому аналогічний викладеному у попередніх підрозділах. Основна відмінність полягає у використанні у якості базисних функцій системи періодичних комплексних потенціалів.

3.4.2. Періодичні комплексні потенціали

В [84], двоякоперіодичні комплексні функції \hat{v}_n введено як подвійні граткові суми:

$$\hat{v}_n(z) = \sum_{\mathbf{k}} [v(z + W_{\mathbf{k}})]^{-n} \quad (n \geq 1), \quad (3.53)$$

де $W_{\mathbf{k}} = a\mathbf{k} = a(k_1 + ik_2)$, $-\infty < k_1, k_2 < \infty$. Ряд (3.53) почленно диференційовний, тому \hat{v}_n задовільняють рівняння Лапласа і можуть розглядатись як періодичні комплексні потенціали. Механічний зміст введених функцій є цілком очевидним: вони описують сумарне збурення поля двоякоперіодичною системою еліптичних включень. Втім, при такому підході виникає питання сумування ряду в правій частині (3.53), який при $n=1$ є умовно збіжним [85].

Альтернативний спосіб введення функцій \hat{v}_n , вільний від вказаного недоліку, базується на їх локальному розвиненні в ряд

$$\hat{v}_n = v^{-n} + \sum_k \hat{\eta}_{nk}(0) v^{-k}, \quad (3.54)$$

де

$$\hat{\eta}_{nk}(z) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \eta_{nm}(z + W_{\mathbf{k}}), \quad (3.55)$$

а η_{nm} - визначені в підрозділі 3.2 коефіцієнти формули перерозкладу (3.12). Для $n > 1$ формули (3.54) і (3.55) є еквівалентними. Введені таким чином функції визначені всюди, за винятком множини розрізів з центрами в точках $W_{\mathbf{k}}$ і задовільняють умовам періодичності

$$\begin{aligned} \hat{v}_n(z + a) - \hat{v}_n(z) &= 0; \\ \hat{v}_n(z + ia) - \hat{v}_n(z) &= \delta_{n1} \frac{\pi d i}{a}; \end{aligned} \quad (3.56)$$

Для виконання контактних умов на q -му включення нам потрібен локальний розклад $\hat{v}_n(z_p)$ в степеневий ряд по v_q . Для його одержання достатньо скористатись формулами перерозкладу (3.12): їх застосування до кожного з доданків ряду (3.53) дає

$$\hat{v}_n(z_p) = \sum_m (\eta_{nm}^{pq} + \hat{\eta}_{nm}^{pq}) v_q^{-m}, \quad (3.57)$$

де $\eta_{nm}^{pq} = \eta_{nm}(Z_{pq})$ і $\hat{\eta}_{nm}^{pq} = \hat{\eta}_{nm}(Z_{pq})$. В (3.57) під Z_{pq} розуміємо мінімальну відстань між включеннями, які належать до p -ї та q -ї граток, а саме $Z_{pq} = \min(Z_q - Z_p \pm a \pm ia)$. Перший доданок в правій частині (3.57) обчислюємо згідно формули (3.13) або (3.14). Щодо другого доданку, визначеного формулою (3.55), то для його обчислення можливо скористатись спрощеною формулою (3.16), взявши до уваги що для структурної комірки завжди виконується умова $a \gg d_q$. Після деяких перетворень одержимо

$$\hat{\eta}_{nm}^{pq} = n(-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{d}{2}\right)^{n+m+2l} M_{nml} \Gamma(n+m+2l) \Sigma_{n+m+2l}^*(Z_{pq}), \quad (3.58)$$

де Σ_n^* - стандартна граткова сума

$$\Sigma_n^*(z) = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} (z + W_{\mathbf{k}})^{-n}. \quad (3.59)$$

Методи обчислення таких сум добре розвинуто (див. напр., [61]).

3.4.3. Аналітичний розв'язок

Процедура побудови аналітичного розв'язку сформульована в підрозділі 3.4.1 задачі цілком аналогічна такій для скінченного кластера (підрозділ 3.2), з заміною еліптичних гармонік v_n їх періодичними аналогами \hat{v}_n . Використання принципу суперпозиції дає загальний розв'язок для матриці $w^{(0)} = \text{Re} \hat{\phi}_0$ у вигляді

$$\hat{\phi}_0(z) = \varphi_{far} + \sum_{p=1}^N \hat{\phi}^{(p)}. \quad (3.60)$$

Тут, як і раніше, $\varphi_{far} = \bar{\Gamma} z$ - потенціал лінійного (макро) переміщення,

$$\hat{\phi}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \hat{v}_n(z_p) \quad (1 \leq p \leq N), \quad (3.61)$$

де функції \hat{v}_n - періодичні комплексні потенціали (3.54), Γ і $A_n^{(p)}$ - невідомі коефіцієнти розвинення. Властивості (3.54) функцій \hat{v}_n забезпечують автоматичне виконання умов періодичності (3.52). Крім того, підстановка (3.60) і (3.61) в (3.52) та врахування (3.56) дає

$$\Gamma = E_{13} + iE_{23} + \frac{\pi i}{a^2} \sum_{p=1}^N \text{Im}(d_p A_1^{(p)}). \quad (3.62)$$

З огляду на періодичність структури і розв'язку (3.52), виконання контактних умов (3.5) чи (3.6) для включень в межах структурної комірки означає одночасне виконання цих умов для усієї нескінченої множини

включень. Все що нам для цього необхідне - це локальне розвинення $\hat{\varphi}_0$ в околі q -того включення (точніше, в околі його центру O_q) в степеневий ряд по v_q .

Для лінійного доданка φ_{far} ця процедура є елементарною:

$$\varphi_{far} = \bar{Z}_q + \frac{\bar{\Gamma}d_q}{2}(v_q + 1/v_q). \quad (3.63)$$

Розвинення в ряд періодичних збурень $\hat{\varphi}^{(p)}$ використовує формулу (3.54) для доданка з $p = q$ і (3.57) для решти доданків. Опускаючи проміжні перетворення, запишемо остаточний вираз

$$\hat{\varphi}_0 = \sum_k \left(A_k^{(q)} + a_k^{(q)} \right) (v_q)^{-k}, \quad (3.64)$$

де

$$a_k^{(q)} = \sum_{p=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \eta_{nk}^{*pq} + \delta_{k,\pm 1} \bar{\Gamma}d_q / 2 \quad (3.65)$$

і $\eta_{nk}^{*pq} = \eta_{nk}^{pq} + \hat{\eta}_{nk}^{pq}$. Явний вигляд η_{nk}^{pq} і $\hat{\eta}_{nk}^{pq}$ визначено у попередньому параграфі, коефіцієнти розвинення регулярної частини розв'язку $a_k^{(q)}$ з необхідністю задовільняють умові $a_{-k}^{(q)} = a_k^{(q)}$.

Зазначимо, що вираз (3.64) є цілком аналогічним (3.22); як наслідок, процедура виконання контактних умов матриці-включень повністю повторює описану в підрозділі 3.3. Таким чином, маємо нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення $A_n^{(p)}$ вигляду (3.35) для умов первого типу і (3.50) - для умов другого типу, де для визначення $a_k^{(q)}$ замість (3.23) слід використати формулу (3.65). Розв'язання тієї чи іншої системи лінійних рівнянь методами комп'ютерної алгебри завершує побудову розв'язку задачі.

3.5. Дослідження збіжності розв'язку та взаємовпливу включень на концентрацію напружень

3.5.1. Теоретична та чисельна збіжність розв'язку

Для доведення теоретичної збіжності розв'язку багаточасткової задачі, розглянемо, наприклад, умови 1-го типу. У випадку ідеального контакту маємо для довільного включения:

$$(\tilde{\mu}_1^q + 1)A_n^q - 2A_n^q \frac{v_{0q}^{-2n}}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}} - 2 \frac{\bar{A}_n^q}{v_{0q}^{-2n} - v_{0q}^{2n}} + (\tilde{\mu}_1^q - 1)(a_n^q + \bar{a}_n^q v_{0q}^{2n}) = 0 \quad (3.66)$$

Скористаємося підходом, описаним у розділі 2. Фактично, хочемо прийти до такого вигляду системи рівнянь:

$$x_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n = b_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.67)$$

Тоді, матиме місце оцінка

$$\sum_{k,n=1}^{\infty} (a_{kn})^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^2 < \infty$$

Покладемо $\tilde{\mu}_1^q = \infty$ (абсолютно жорстке включение), попередньо розділивши на цю величину систему (1). Зробивши ряд алгебраїчних перетворень, отримаємо:

$$\begin{aligned} A_n^q + a_n^q + \bar{a}_n^q v_{0q}^{2n} &= 0; \\ A_n^q + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{k=1}^{\infty} A_k^p \eta_{kn}^{pq} + \delta_{k,\pm 1} d_q + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{A}_k^p \eta_{kn}^{pq} + \delta_{k,\pm 1} \bar{d}_q) v_{0q}^{2n} &= 0; \\ A_n^q + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{k=1}^{\infty} A_k^p \eta_{kn}^{pq} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k^p \eta_{kn}^{pq} v_{0q}^{2n} &= -\delta_{k,\pm 1} d_q - \delta_{k,\pm 1} \bar{d}_q v_{0q}^{2n}; \\ A_n^q + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^N \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^p + \bar{A}_k^p v_{0q}^{2n}) \eta_{kn}^{pq} &= -\delta_{k,\pm 1} (d_q + \bar{d}_q v_{0q}^{2n}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Далі, поклавши зовнішнє навантаження таким, що $\varepsilon^{\infty} = 1$, отримаємо $d_q = \bar{d}_q$, $A_k^p = \bar{A}_k^p$. Отже,

$$A_n^q + \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ p \neq q}}^{\infty} A_k^p \eta_{kn}^{pq} (1 + \nu_{0q}^{2n}) = -\delta_{k,\pm 1} d_q (1 + \nu_{0q}^{2n}) \quad (3.69)$$

Домножимо (4) на d_q^{2n} :

$$A_n^q d_q^{2n} + d_q^{2n} (1 + \nu_{0q}^{2n}) \sum_{p=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ p \neq q}}^{\infty} A_k^p \eta_{kn}^{pq} = -\delta_{k,\pm 1} d_q^{2n+1} (1 + \nu_{0q}^{2n}) \quad (3.70)$$

Зauważмо, що величини d_q^{2n} та $d_q^{2n} (1 + \nu_{0q}^{2n})$ в загальному випадку є обмеженими. Шляхом заміни $x_n^q = A_n^q / (1 + \nu_{0q}^{2n})$ система (3.70) зводиться до системи вигляду (3.67) з наступними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} a_{kn} &= \eta_{kn}^{pq}; \\ b_n &= -\delta_{k,\pm 1} d_q \end{aligned} \quad (3.71)$$

Розглянемо коефіцієнти a_{kn} :

$$a_{kn} = \eta_{kn}^{pq} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\nu_p)^{-k} |_{\zeta_q=0} \cos(n\eta_q) d\eta_q, \quad (n \geq 1) \quad (3.72)$$

Як уже зазначалось раніше, ці коефіцієнти є нічим іншим, як коефіцієнтами Фур'є розкладу $(\nu_p)^{-k}$ в термінах η_q , а саме тому маємо право стверджувати обмеженість a_{kn} , тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_{kn})^2 < \infty \quad (3.73)$$

Обмеженість коефіцієнтів b_n є також очевидною, тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^2 < \infty \quad (3.74)$$

Чисельний аналіз збіжності розв'язку

В таблицях нижче наведені результати швидкості збіжності розв'язку для контактних умов першого та другого типу в залежності від взаємного розташування включень та кількості гармонік n_{max} . Схема розташування включень представлена рис. 3.5.

Таблиця 3.2. Швидкість збіжності $\sigma_{13}^{(0)}/\sigma_{13}^{\infty}$ по кількості гармонік
 $(h_1 = 10, e = 0.1, \tilde{\mu}_1 = 1000)$

n_{max}	$Z_{12}/2l_1 = 2.55$	$Z_{12}/2l_1 = 1.55$	$Z_{12}/2l_1 = 1.05$	$Z_{12}/2l_1 = 1.025$
10	4.064	4.298	5.858	6.385
20	3.609	3.819	5.198	5.661
50	3.532	3.737	5.086	5.538
100	-	3.736	5.085	5.536
150	-	-	5.085	5.536

Таблиця 3.3. Швидкість збіжності $\sigma_{23}^{(0)}/\sigma_{23}^{\infty}$ по кількості гармонік
 $(h_2 = 0.2 \text{ нм}, e = 0.1, \tilde{\mu}_1 = 0)$

n_{max}	$Z_{12}/2l_1 = 2.55$	$Z_{12}/2l_1 = 1.55$	$Z_{12}/2l_1 = 1.05$	$Z_{12}/2l_1 = 1.025$
10	11.274	12.225	22.266	28.840
20	11.289	12.241	22.487	29.876
50	11.299	12.253	22.516	29.972
100	-	12.255	22.522	29.978
150	-	-	22.520	29.976
200	-	-	-	29.974

В обох випадках збіжність покращується при збільшенні кількості гармонік, причому, більш повільніше збігається розв'язок для контактних умов другого типу. Для усіх подальших практичних розрахунків використовували $n_{max} = 100$.

Для чисельного аналізу концентрації напружень у випадках контактних умов першого та другого типу, розглянемо однаково орієнтовані еліптичні включення, центри яких лежать на осі Ox_1 (рис. 3.5). Будемо припускати, що: включення мають однакову форму та розміри; на контурах включень діють ідентичні умови контакту з матрицею; пружні властивості включень є сталими.

Відстань між включеннями характеризуватиметься безрозмірною величиною $Z_{12}/2l_1$, де Z_{12} – відстань між центрами еліптичних включень.

Домовимось також, якщо не вказано додаткових зауважень, що при розгляді величини $\sigma_{13}^{\infty}/\sigma_{13}^{\infty}$ вважатимемо дальнє поле напружень заданим як $\sigma_{13}^{\infty} = 1, (\sigma_{23}^{\infty} = 0)$, а для $\sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ задано $\sigma_{23}^{\infty} = 1, (\sigma_{13}^{\infty} = 0)$.

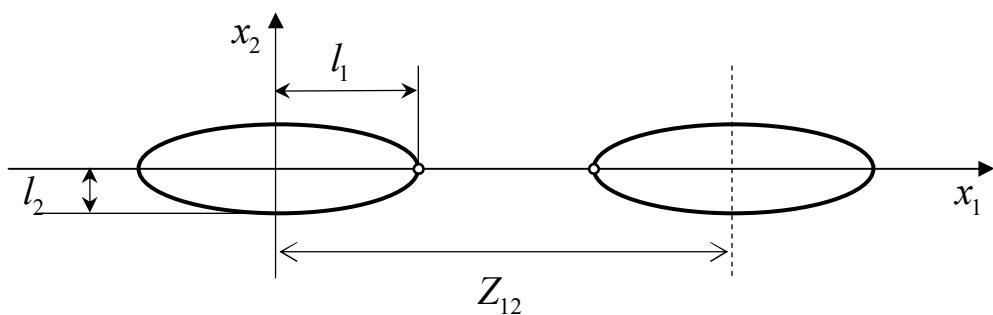


Рис. 3.5. Взаємне розташування включень

3.5.2 Контактні умови першого типу

З огляду на симетрію задачі та еквівалентність пружних характеристик включень, можна обмежитись розглядом концентрації напружень на контурі лише одного включения. Для підтвердження такого припущення, на рис. 3.6 подано розподіл концентрації напружень $\sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ на контурах двох сусідніх ($Z_{12}/2l_1=1.05$) еліптичних включень з , матеріал включень є жорсткішим за матеріал матриці $\tilde{\mu}_1=10$, $e=1/3$. Рівність значень $\sigma_{23}/\sigma_{23}^{\infty}$ для першого включения при $\eta=0..\pi/2$ та для другого включения при $\eta=\pi/2..\pi$ при різних величинах контактної пружності значно спрощує параметричний аналіз багаточасткової задачі, а тому, надалі розглядатимемо напруження лише на одному включенні.

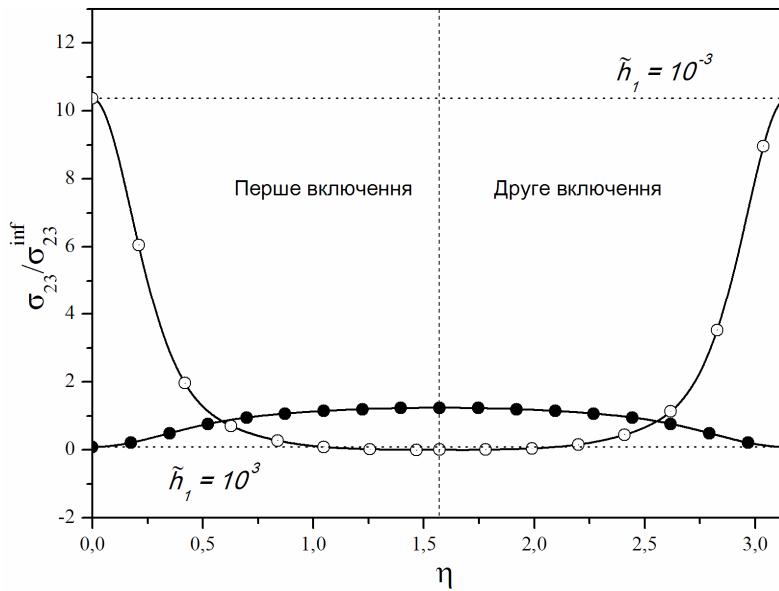


Рис. 3.6. Розподіл напружень на контурах еліптичних включень

Будемо обмежуватись аналізом концентрації напружень на контурах включень, матеріал яких є жосткішим або таким же, як і матеріал матриці, тобто вважатимемо, що матриця є армована волокнами еліптичного профілю.

На рис. 3.7 подано залежності концентрації напружень $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ на контурі включения для умов первого типу.

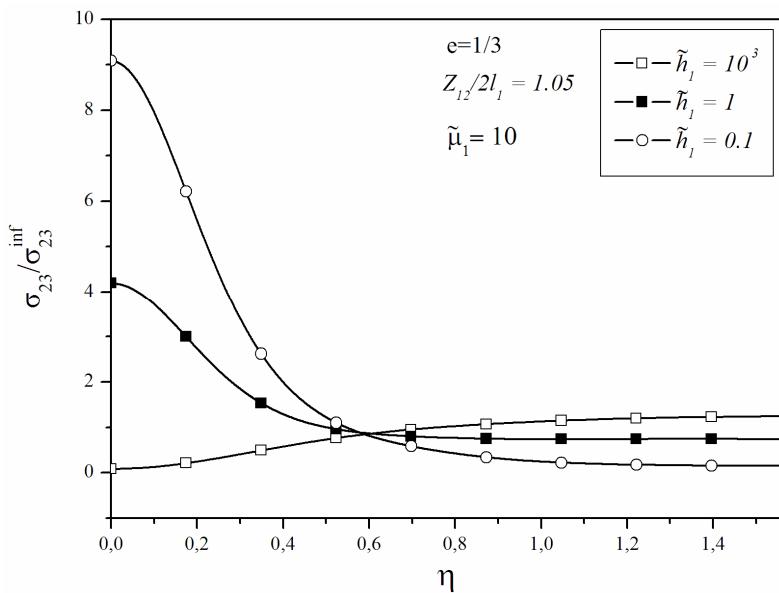


Рис. 3.7. Розподіл напружень навколо еліптичного включения

Тут, $e = 1/3$, $\tilde{\mu}_1 = 10$, а відстань між включениями є такою, що $Z_{12}/2l_1 = 1.05$.

Очікувано, що напруження зростають по мірі зменшення параметра \tilde{h}_1 , який характеризує ступінь недосконалості контакту між матрицею та включениями.

Параметр \tilde{h}_l найбільш суттєво впливає на величину напружень при наближенні контурів включень, коли він лежить в межах [0.1..1]. Зокрема, це підтверджують дані із рис. 3.8, де можна побачити залежність концентрації напружень $\sigma_{23}/\sigma_{23}^\infty$ в точці $z = l_1$ при різній відстані між центрами еліптичних включень. Геометрія неоднорідностей та пружні властивості є такими ж, як і на рис. 3.7. Ефект від взаємодії включень починає проявлятись у зростанні величини напружень при $Z_{12}/2l_1 \leq 1.55$ (суцільні лінії на рис. 3.8), а його відсутність досягається далеким взаємним розміщенням центрів еліпсів (що рівносильно випадку одного включения) і показана пунктирною лінією на рис. 3.8.

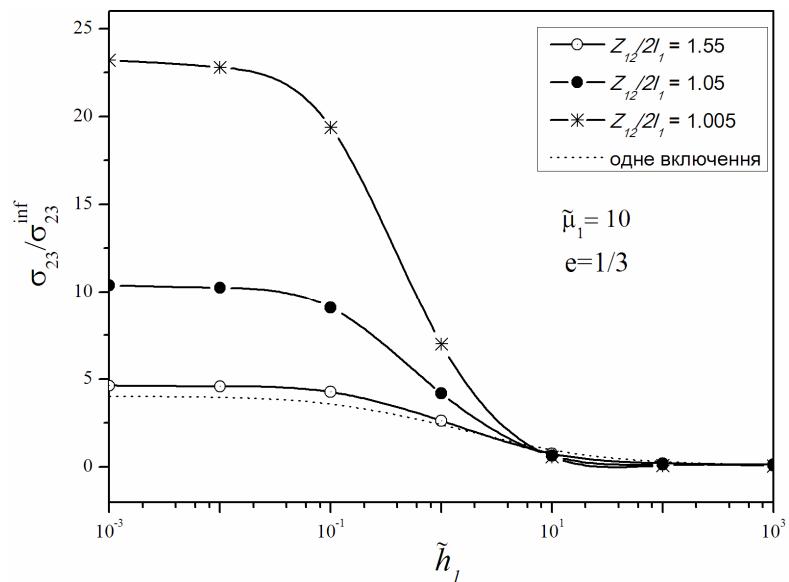


Рис. 3.8. Вплив недосконалості контакту на концентрацію напружень

Розглянемо концентрацію напружень в тій же точці еліптичного контуру ($z = l_1$) як функцію відстані між центрами включень. Зокрема, на рис. 3.9 показано випадки для різних співвідношень осей еліпса. Так, при доволі близькому розташуванні контурів сусідніх включень ($Z_{12}/2l_1 = 1.005$), концентрація напружень при $e = 1/5$ є більшою майже у 3 рази ніж у випадку $e = 1/2$. Також, найбільш суттєвий вплив форми включень спостерігається на

проміжку $Z_{12}/2l_1 \in [1.005..1.1]$, при збільшенні відстані величина напружень не суттєво змінюється.

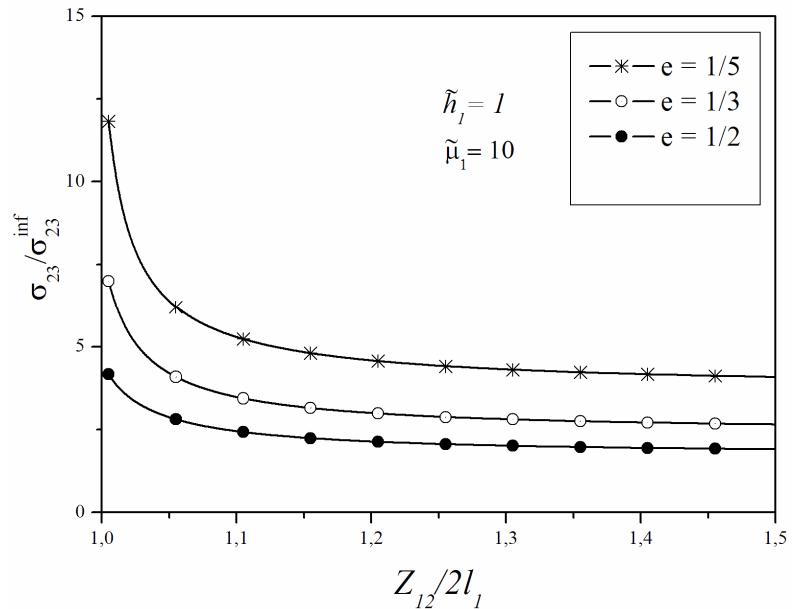


Рис. 3.9. Вплив відстані між центрами включень на концентрацію напружень

Більш детальніше вплив форми включень та їх взаємного розташування на локальну концентрацію напружень показаний у таблиці 3.4, де вхідні параметри жорсткості та величини контактної пружності взяті такими ж, як і на рис. 3.9.

Таблиця 3.4. Вплив форми і відстані між включеннями

e	$Z_{12}/2l_1$				
	1.005	1.01	1.05	1.1	1.5
1	1.18	1.18	1.14	1.11	1.07
1/2	4.16	3.88	2.86	2.44	1.90
1/3	6.99	6.29	4.19	3.47	2.65
1/10	21.54	18.11	11.33	9.56	7.56
1/100	166.83	143.27	98.03	85.28	69.61

З таблиці 3.4. видно, що при поганому kontaktі між матрицею та включеннями ($\tilde{h}_1 = 1$), виродження еліпсів у лінійні розрізи сприяє зростанню напружень, а найбільше цей вплив спостерігається при наближенні контурів включень, тобто виникає ефект від їх взаємодії.

Ще одним параметром, який характеризує «армуючий» ефект волокон еліптичного профілю, є співвідношення жорсткості матриці та включень $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 / \mu_0$. На рисунку нижче подано залежності концентрації напружень $\sigma_{23} / \sigma_{23}^{\infty}$ в точці $z = l_1$ при близькому розташуванні сусідніх еліптичних включень ($Z_{12} / 2l_1 = 1.005$, $e = 1/3$) як функції параметра $\tilde{\mu}_1$ для різних значень \tilde{h}_1 .

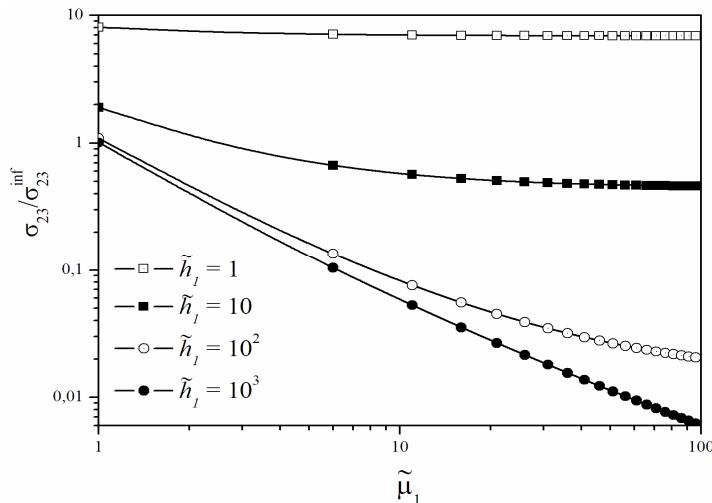


Рис. 3.10. Вплив жорсткості включень на концентрацію напружень

З рис. 3.10 видно, що армуючий ефект волокон спостерігається у випадках, коли ступінь недосконалості контакту є незначним, в іншому випадку (світлі квадрати на рис. 3.10) включения поводять себе як еліптична шайба, яка ніяким чином не взаємодіє з матрицею (відсутність контакту на границі). При хорошому kontaktі (наприклад, темні круги на рис. 3.10) відслідковується суттєвий вплив жорсткості включень на локальну концентрацію напружень.

Узагальнюючи вплив взаємного розташування включень при умовах контакту другого типу, можна виділити наступні твердження:

- відстань між включеннями найбільш суттєво проявляється у випадках виродження жорсткого еліптичного включения у стрічкове та при малих значеннях контактної пружності \tilde{h}_1 . Критичним випадком є поєднання поганого контакту між жорстким стрічковим включением та матрицею при $Z_{12} / 2l_1 \in [1,005..1,1]$;

- при досить далекому взаємному розташуванні центрів включень, ефект від взаємодії пропадає;
- армуючий ефект, як відношення пружних властивостей матриці та включень, досягається при наявності хорошого контакту на границях, та є домінантним навіть у випадках близького взаємного розташування.

3.5.3. Кон тактні умови другого типу

Як і для умов первого типу, покажемо симетричність даної задачі. На Рис. 3.11 подано розподіл концентрації напружень $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ на контурах двох сусідніх ($Z_{12} / 2l_1 = 1.05$) еліптических пор з $e = 1/3$. Спостерігається рівність значень $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ для первого включения при $\eta = 0.. \pi / 2$ та для другого включения при $\eta = \pi / 2.. \pi$ при різних величинах контактної пружності.

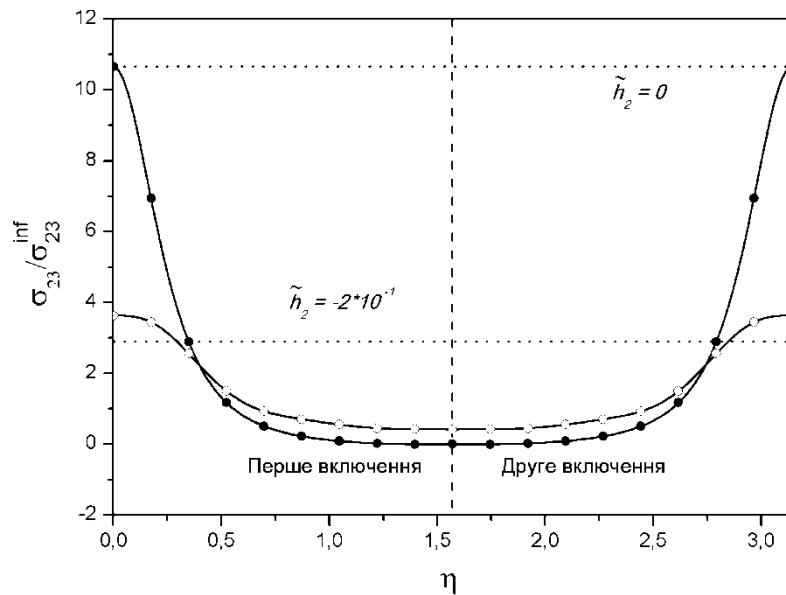


Рис. 3.11. Розподіл напружень на еліптических включениях

При розгляді умов контакту другого роду та демонстрації поверхневих ефектів, зосередимось на аналізі багаточасткової задачі для еліптических неоднорідностей у вигляді пор.

На рис. 3.12 показаний розподіл концентрації напружень $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ навколо еліптичної пори $e = 1/3$ у випадку багаточасткової задачі.

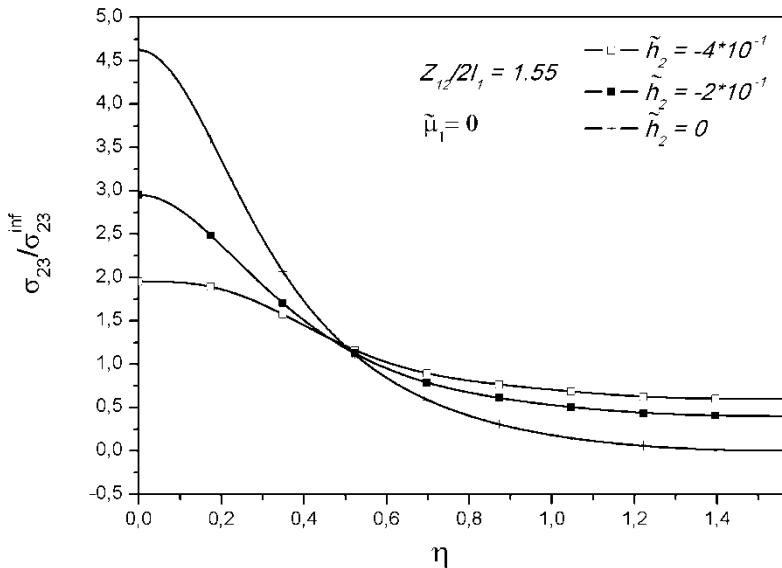


Рис. 3.12.Розподіл $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ на еліптичній нанопорі

Безрозмірний параметр \tilde{h}_2 був отриманий як $\tilde{h}_2 = \frac{\mu^s - \tau^0}{\mu_0 l_2}$, де l_2 – менша піввісь еліпса (нм) і значення $\mu^s - \tau^0$ (Н/м) взяті із [99]. Як бачимо, наявність поверхневих напружень очікувано зменшує величину локальних напружень у точці з найбільшою кривизною поверхні ($z=l_1$), така поведінка співпадає із результатами одночасткової задачі. В той же час, спостерігається наявність ненульових напружень уздовж усього контура включення. При тих же умовах на нескінченості ($\sigma_{23}^\infty = 1$, $\sigma_{13}^\infty = 0$) на рис. 3.13 показана поведінка напружень σ_{13} на контурі пори. Знову ж таки, поверхневі напруження сприяють зменшенню локальних, які, як видно з рисунку є від'ємними, тобто стискаючими в таких умовах навантаження.

Безрозмірний параметр $Z_{12}/2l_1 = 1.55$, що характеризує положення центрів включень (відстань між контурами сусідніх включень у цьому випадку дорівнює $0.1l_1$) є одним із основних параметрів задачі, його вплив показаний на рис. 3.14.

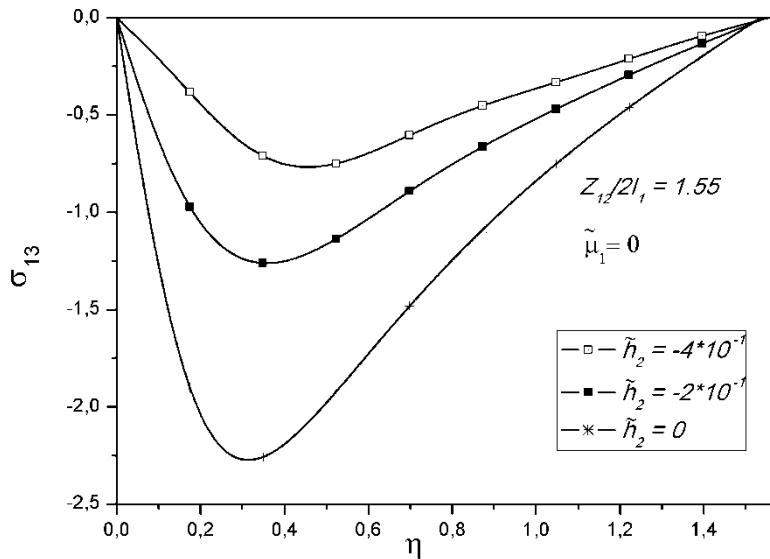


Рис. 3.13. Розподіл напружень σ_{13} на еліптичній нанопорі

Як видно з рис. 3.14, вплив відстані між центрами включень є суттєвим, коли включения розташовані надто близько один до одного, найбільш критичні значення напружень спостерігаються на проміжку $Z_{12}/2l_1 \in (1.005, 1.1]$. Слід зауважити, що випадок контакту контурів включень тут не розглядається, бо порушується збіжність розв'язку. А отримання розв'язку при наближенні берегів включень вимагає збільшення кількості гармонік n_{\max} .

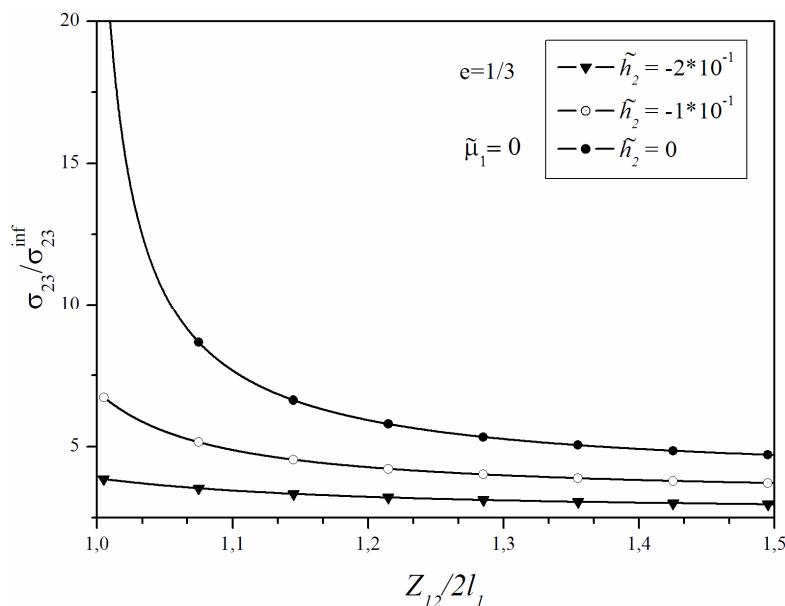


Рис. 3.14. Залежність концентрації напружень від взаємного розташування включень.

При наявності поверхневих напружень (світлі круги та темні трикутники на Рис. 3.14), маємо обмеженість значень локальних напружень, навіть коли пори

безмежно наближаються. У випадку відсутності напружень на поверхні (темні круги) спостерігається прямування до нескінченності напружень у вершині еліптичної пори при наближенні контурів включень, що цілком узгоджується із відомими результатами.

У таблиці 3.5 наведено значення $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ у точці $z=l_1$ при різних значеннях $Z_{12} / 2l_1$ та \tilde{h}_2 , $e=1/3$. В таблиці \tilde{h}_2 є від'ємними величинами, що у фізичному трактуванні пояснює наявність поверхневих напружень, які є більшими за поверхневий модуль пружності. В загальному випадку, згідно теорії Гуртіна-Мердока, величина $\mu^S - \tau^0$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Таблиця 3.5. Значення $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ в точці $z=l_1$.

\tilde{h}_2	$Z_{12} / 2l_1$				
	5	2	1,55	1,05	1,005
-0,4	1.71	1.74	1.75	1.80	1.98
-0,3	2.17	2.22	2.26	2.21	2.57
-0,2	2.70	2.79	2.88	3.24	3.64
-0,1	3.33	3.48	3.66	5.27	6.23
0	4.03	4.28	4.62	10.65	37.79

З таблиці 3.5 видно, що при достатньо далекому взаємному розташуванні центрів включень ($Z_{12} / 2l_1 > 5$) спостерігається відсутність так званої взаємодії між включеннями і отримуються результати одночасткової задачі. Проте, коли контури включень зближаються, напруження прогнозовано зростають, і найбільші їх значення очікувано з'являються при відсутності поверхневих напружень. Варто відмітити, що навіть при достатньому зближенні включень умова наявності поверхневих напружень на порі призводить до обмеженості локальних напружень і таким чином підтверджує визначальний вплив цих ефектів на нанорівні.

Для вичерпного дослідження, проаналізуємо вплив форми на концентрацію напружень. Знову ж таки, розглядається величина $\sigma_{23} / \sigma_{23}^\infty$ в точці $z=l_1$. Припустимо, що на порі присутні поверхневі напруження, причому $\tilde{h}_2 = -0.2$.

Напруження зростають по мірі виродження пор у розрізи та їх взаємному зближенні. Слід відмітити, що найбільш “критичними” є пори із співвідношенням осей меншим від $e = 1/10$, наочне представлення концентрації напружень для яких подано на рис. 3.15. Коли еліпси вироджуються у лінійні розрізи, поведінка напружень у критичній точці $z = l_1$ є майже однаковою для різних взаємних положень центрів включень.

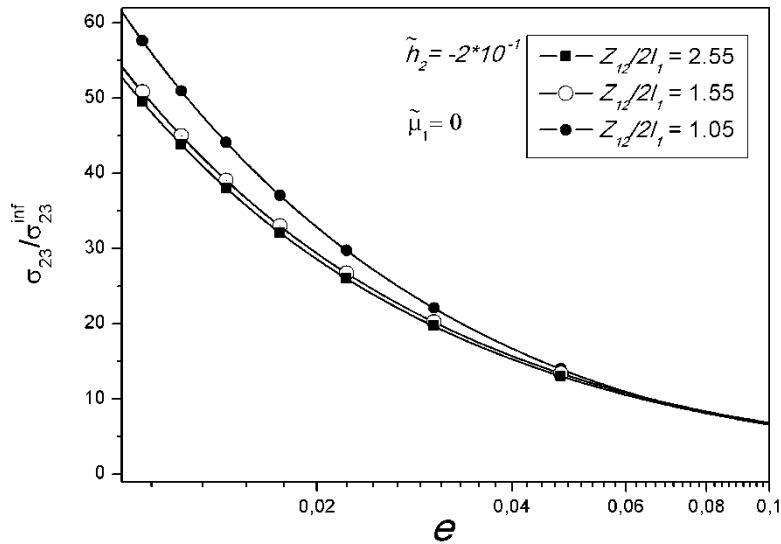


Рис. 3.15. Вплив форми пори на концентрацію напружень

Підсумовуючи вище сказане, можемо виділити такі основні положення:

- як і у випадку одночасткової задачі, наявність поверхневих напружень усуває стрибок локальних напружень до нескінченності;
- відстань між центрами включень та величина поверхневих напружень є домінантними параметрами для еліптичних включень з невиродженою геометрією ($e > 0.1$);
- При виродженні еліпсів у розрізи, відстань між центрами включень не впливає суттєвим чином на концентрацію напружень, але накладає додаткові труднощі в силу необхідності розгляду більшої кількості гармонік для точнішого представлення розв’язку.

Розділ 4.

ЕФЕКТИВНІ ПРУЖНІ МОДУЛІ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ КОМПОЗИТА З ВОЛОКНАМИ ЕЛІПТИЧНОГО ПРОФІЛЮ ЗА НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ ФАЗ

4.1. Постановка задачі гомогенізації. Макроскопічні параметри

Задача гомогенізації є центральною в механіці композитів принаймні в останні півсторіччя і полягає у визначенні макроскопічних, або ефективних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів. Короткий огляд основних теоретичних робіт та відомих методів прогнозування ефективних пружних сталих композиту викладено в підрозділі 1.3, там же вказано на особливості процедури усереднення для композитів з недосконалими межами поділу.

Загальновживаним в літературі визначенням ефективного тензора пружності композита є формула (1.5), яка для задачі антиплоского зсуву спрощується до двох скалярних співвідношень:

$$\langle \sigma_{i3} \rangle = 2C_{i3j3}^* \langle \varepsilon_{j3} \rangle = C_{i3j3}^* \left\langle \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\rangle, \quad i = 1, 2. \quad (4.1)$$

Для подальшого викладу більш зручним є векторно-тензорний запис формул (4.1) у вигляді

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = 2\boldsymbol{\mu}^* \cdot \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\mu}^* \cdot \langle \nabla w \rangle, \quad (4.2)$$

де $\boldsymbol{\mu}^* = \begin{pmatrix} \mu_{11}^* & \mu_{12}^* \\ \mu_{21}^* & \mu_{22}^* \end{pmatrix}$ і $\mu_{ij}^* = C_{i3j3}^*$. В (4.2), $\langle \nabla w \rangle = \{\partial w / \partial x_1, \partial w / \partial x_2\}^T$, $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \{\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$

і $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$ є відповідно макроскопічним (називаються також середнім або усередненим) градієнтом переміщень, вектором деформацій зсуву і вектором зсувних напружень.

В більшості публікацій макроскопічні параметри вводяться як усереднені по об'єму значення відповідних локальних параметрів (1.6). Для двовимірного випадку вони мають такий вигляд в наших позначеннях:

$$\langle \nabla w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_S \nabla w dS, \quad \langle \sigma \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_S \sigma dS, \quad (4.3)$$

де площа представницького елемента композитного матеріалу $S = \sum_{q=0}^N S_q$, S_q - площа q -го включення і S_0 - площа матричної фази. Інтеграли в (4.3) є сумою внесків кожної з фаз:

$$S \langle \nabla w \rangle = \sum_{q=0}^N \int_{S_q} \nabla w^{(q)} dS, \quad (4.4)$$

де $w^{(q)}$ - переміщення точок q -го включення. Як уже було сказано в першому розділі, формули (4.3) є коректними лише для композитів з досконалими міжфазними границями. Альтернативне визначення макроскопічних параметрів, справедливе для довільних умов на межі поділу базується на поверхневому усередненні [73, 47, 55, 91], формула (1.7). Для задачі антипlosского зсуву вона виглядає таким чином:

$$\langle \nabla w \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_{L_0} w \mathbf{n} dL, \quad \langle \sigma \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{S} \int_{L_0} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} dL, \quad (4.5)$$

де L_0 - зовнішня границя представницького елемента S , $\mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k$ - радіус-вектор і $\mathbf{n} = n_k \mathbf{i}_k$ - одиничний вектор нормалі.

Для порівняння виразів $\langle \nabla w \rangle$, обчислених за рівняннями (4.3) і (4.5), використаємо теорему про градієнт

$$\int_S \nabla w dS = \int_L w \mathbf{n} dL, \quad (4.6)$$

де \mathbf{n} - одиничний вектор нормалі до границі L елемента S . Його застосування до рівняння (4.4) дає

$$\frac{1}{S} \int_S \nabla w dS = \frac{1}{S} \int_{L_0} w^{(0)} \mathbf{n} dL + \frac{1}{S} \sum_{q=1}^N \int_{L_q} (w^{(q)} - w^{(0)}) \mathbf{n} dL, \quad (4.7)$$

де L_q - лінія контакту включення S_q і матриці. Як видно з рівняння (4.7), порівнювані вирази співпадають лише у випадку неперервності переміщення ($w^{(0)} = w^{(q)}$) на міжфазній границі.

Щоб порівняти два визначення $\langle \sigma \rangle$, (4.3) і (4.5), використаємо тотожність $\sigma = \nabla \cdot (\sigma \otimes \mathbf{r})$ та теорему про дивергенцію

$$\int_S \nabla \cdot \sigma dS = \int_L \sigma \cdot \mathbf{n} dL, \quad (4.8)$$

що дає

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \int_S \sigma dV &= \frac{1}{S} \sum_{q=0}^N \int_{S_q} \nabla \cdot (\sigma \otimes \mathbf{r}) dS \\ &= \frac{1}{S} \int_{L_0} (\sigma^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} dL + \frac{1}{S} \sum_{q=1}^N \int_{L_q} [(\sigma^{(q)} \cdot \mathbf{n}) - (\sigma^{(0)} \cdot \mathbf{n})] \mathbf{r} dL. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Очевидно, що (4.3) і (4.5) співпадають лише у випадку неперервності на міжфазній поверхні нормального напруження $\sigma_n = \sigma \cdot \mathbf{n}$, при цьому визначення (4.5) є справедливим для композитів з недосконалою межею поділу.

Тепер одержимо формулу для визначення ефективних модулів зсуву композита з обчислювального експерименту. Почнемо з узагальненої теореми Гріна

$$\int_V (u L v - v L u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial M} - v \frac{\partial u}{\partial M} \right) dS, \quad (4.10)$$

де

$$L u = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial M} = \sum_{i,j=1}^m \lambda_{ij} n_j \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (4.11)$$

Ці формулі записано для m -вимірного евклідового простору: у нашому випадку, $m = 2$. Фізичний зміст диференційних операторів (4.11) є зрозумілим з огляду на формули

$$\begin{aligned} L u &= \nabla \cdot (\mu \cdot \nabla u) = \nabla \cdot \sigma(u); \\ \frac{\partial u}{\partial M} &= (\mu \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n} = \sigma_n(u). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Застосуємо рівняння (4.10) та (4.12) до матричної частини (S_0) представницького елементу. Без втрати загальності, вважаємо зовнішню

границю L_0 такою що цілком належить до матриці. В наших позначеннях (4.10) приймає вигляд

$$\int_{S_0} [w^{(0)} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(w') - w' \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(w^{(0)})] dS = \sum_{q=0}^N \int_{L_q} [w^{(0)} \sigma_n(w') - w' \sigma_n(w^{(0)})] dL, \quad (4.13)$$

де $w^{(0)}$ - переміщення точок матричної фази, w' - "пробне" переміщення, яке, як і $w^{(0)}$, задовільняє рівнянню пружної рівноваги

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(w) = 0 \quad (4.14)$$

в кожній точці S_0 . Як наслідок, поверхневий інтеграл в лівій частині рівняння (4.13) тотожно дорівнює нулю.

В правій частині рівняння (4.13) покладемо $w' = x_k$ (за такого вибору w' очевидно задовільняє (4.14)) і множенням на одиничний декартовий вектор \mathbf{i}_k отримаємо

$$\sum_{q=0}^N \int_{L_q} [w^{(0)} \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \mathbf{n} + \sigma_n(w^{(0)}) \mathbf{r}] dL = 0. \quad (4.15)$$

З урахуванням $\sigma_n(w^{(0)}) = \boldsymbol{\sigma}(w^{(0)}) \cdot \mathbf{n}$ і рівняння (4.5) приходимо до формули

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \boldsymbol{\mu}_0 \cdot \langle \nabla w \rangle + \frac{1}{S} \sum_{q=1}^N \int_{L_q} [w^{(0)} \sigma_n(\mathbf{r}) - \sigma_n(w^{(0)}) \mathbf{r}] dL, \quad (4.16)$$

де $\sigma_n(\mathbf{r}) = \sigma_n(x_k) \mathbf{i}_k$.

Отримана нами формула є корисною в кількох аспектах. Перше і найважливіше, (4.16) разом з (4.2) і (4.5) забезпечують оцінку зсувних компонент ефективного тензора пружності композита. При її одержанні не було накладено жодних обмежень на форму включень та їх взаємодію, тому рівняння (4.16) є застосовним до композитів з анізотропними складовими і довільним формою включень та типом їх контакту з матрицею. Формула містить лише інтеграли від переміщення по матричній фазі, причому ці інтеграли відмінні від нуля лише для дипольного члена мультипольного розвинення поля в околі кожного включення і дають внесок цих включень в

тензор ефективної пружності. В методі мультипольних розвинень, де переміщення в матриці з самого початку записано у вигляді мультипольного ряду, аналітичне інтегрування в (4.16) є можливим і дає точні скінчені вирази для тензора ефективної пружності.

4.2. Індукований дипольний момент еліптичного включення

Важливим параметром задачі гомогенізації є так званий індукований дипольний момент включения, який зазвичай (наприклад, [22]) вводиться як параметр який визначає асимптотичну поведінку збурення від цього включения. В наших позначеннях,

$$w_{dis} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{2\pi\mu_0 r^2} + O(r^{-2}), \quad (4.17)$$

де \mathbf{r} - радіус-вектор, $r = \|\mathbf{r}\|$, μ_0 - модуль зсуву матриці і $\mathbf{p} = p_j \mathbf{i}_j$ - індукований дипольний момент включения. Більш зручною для використання є формула [45, 124]

$$\mathbf{p} = (\mu_1 - \mu_0) \int_S \nabla w dS, \quad (4.18)$$

де μ_1 - модуль зсуву включения. Втім, суттєвим недоліком формули (4.18) є те, що вона одержана в припущені ідеального механічного контакту включения-матриця і тому не може бути застосована до композитів з недосконаловою міжфазною границею. Вільним від вказаних обмежень і, ймовірно, найбільш загальним результатом є сформульований в [87] закон збереження дипольного моменту.

4.2.1. Закон збереження дипольного моменту

Розглянемо одиничне включение S_1 довільної форми в необмеженій однорідній матриці. Для довільної скінченої області S з границею L має місце рівність [87]

$$\int_L [w^{(0)} \sigma_n(\mathbf{r}) - \sigma_n(w^{(0)}) \mathbf{r}] dL = \begin{cases} \mathbf{p}, & \text{коли } S_1 \subset S \\ 0 & \text{в протилежному випадку.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Ця формула цілком аналогічна закону Гауса в електростатиці, але стосується збереження не монополів (зарядів), а дипольних моментів. З іншого боку, (4.19) можна розглядати як визначення дипольного моменту, яке є справедливим для довільного (не обов'язково постійного) зовнішнього навантаження, загального типу анізотропії матричного матеріалу і довільних (за формою, структурою, властивостями і міжфазним зв'язком) включень. З (4.19) також очевидно, що інтеграл по області, яка містить множину включень, дорівнює сумі дипольних моментів цих включень. Нарешті, порівняння (4.19) з формулою (4.16) пояснює фізичний зміст доданків в правій частині і дозволяє переписати її у вигляді

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mu_0 \cdot \langle \nabla w \rangle + \frac{1}{S} \sum_{q=1}^N \mathbf{p}^{(q)}, \quad \mathbf{p}^{(q)} = \int_{L_q} [w^{(0)} \sigma_n(\mathbf{r}) - \sigma_n(w^{(0)}) \mathbf{r}] dL. \quad (4.20)$$

Тепер перепишемо формулу (4.19) в термінах комплексних змінних і потенціалів. Маємо

$$p = \mu_0 \int_L \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial n} z - n w^{(0)} \right) dL, \quad (4.21)$$

де $p = p_1 + i p_2$ - комплексний дипольний момент, $n = n_1 + i n_2$ - комплексний відповідник вектора нормалі \mathbf{n} і L - довільний замкнений контур, який оточує включения. Оскільки значення інтегралу (4.21) не залежить від контуру інтегрування, виберемо L у вигляді кола радіуса R . У визначених формулою $z = r \exp(i\varphi)$ полярних координатах (r, φ)

$$p = \mu_0 R \int_0^{2\pi} \left(R \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} - w^{(0)} \right) \Big|_{r=R} \exp(i\varphi) d\varphi. \quad (4.22)$$

Розкладемо $w^{(0)}$ при $|z| \geq R$ в ряд Лорана

$$w^{(0)}(z) = \operatorname{Re} \varphi_0(z), \quad \varphi_0(z) = \sum_n a_n z^{-n}. \quad (4.23)$$

Оскільки $\partial z/\partial r = z/r$ і $z = R \exp(i\varphi)$ для $r = R$, інтегрування в (4.22) не складає проблеми і дає просту формулу для наведеного дипольного моменту p довільного включення:

$$p = 2\pi\mu_0 a_1. \quad (4.24)$$

Формула (4.24) містить лише один коефіцієнт ряду Лорана, при z^{-1} . Як відомо [напр., 21], цей коефіцієнт є не чим іншим як простим лишком функції, яка має ізольовану особливу точку (простий полюс) всередині контурна інтегрування, а індукований дипольний момент включения є йому пропорційним, що дозволяє використовувати теорію лішків для його ефективного обчислення.

4.2.2. Дипольний момент еліптичного включения

В контексті даної роботи нас цікавить в першу чергу вираз для дипольного моменту еліптичного включения. Для його знаходження скористаємось представленням комплексного потенціалу переміщення $w^{(0)}$ в околі включения степеневим рядом по еліптичним гармонікам v (2.31). У якості контура інтегрування, виберемо еліптичну границю L матриці з включением З урахуванням співвідношень

$$z = d \cosh \xi, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{d|\sinh \xi|} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad n = \frac{\sinh \xi}{|\sinh \xi|}, \quad dL = d|\sinh \xi| d\eta,$$

рівняння (4.21) зводиться до

$$p = \mu_0 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} \varphi_0}{\partial \zeta} \cosh \xi - \operatorname{Re} \varphi_0 \sinh \xi \right) d\eta. \quad (4.25)$$

Підстановка сюди виразу $\varphi_0 = \sum_k (A_k + a_k) v^{-k}$ після простих перетворень дає

$$p = \mu_0 \pi d A_1. \quad (4.26)$$

Зазначимо, що інтегрування проведено по матричній стороні границі L , тому формула (4.26) є інваріантною щодо вибору умов контакту матриці з включением.

Цей же результат легко одержати і без інтегрування, якщо взяти до уваги асимптотичну поведінку еліптичних гармонік. Їх розвинення в ряд Лорана має вигляд [81]

$$\nu^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+2k} C_{n+2k}^k \left(\frac{d}{2z} \right)^{n+2k} \quad (\|z\| > d), \quad (4.27)$$

звідки видно, що лише для ν^{-1} асимптотика на нескінченості має порядок z^{-1} , а саме $\nu^{-1} \approx d/(2z)$. Формула (4.26) є очевидним наслідком цього факту і загального результату (4.24).

4.3. Модифікована схема Максвела для композита з еліптичними включеннями і недосконалим контактом фаз

4.3.1. Формульовання схеми Максвела в термінах дипольних моментів

Запропонований Максвеллом в 1873 р. спосіб визначення ефективної електропровідності середовища зі сферичними включеннями іншого матеріалу є ймовірно, історично першим методом мікромеханіки. В припущення, що об'ємний вміст включень c є настільки малим, що їх взаємодією можна безпечно знехтувати, Максвел визначив асимптотики збурень, спричинених кластером включень та сферичним еквівалентним включенням (такого ж розміру що і кластер) в матричному матеріалі з невідомою провідністю k^* . Умова рівності вказаних асимптотик визначає ефективну провідність композиту

$$k^* = k_0 \frac{1 + (d - 1)\alpha}{1 - \alpha}, \quad (4.28)$$

де $\alpha = c(k_1 - k_0)/[k_1 + (d - 1)k_0]$ і $d = 2$ для двовимірного композиту. Формула (4.28) відома в літературі також як рівняння Максвела-Гарнета, Клаузіуса-Мозотті, Лоренца, Кернера і т.д. Ясність і простота схеми Максвела надихнули на розробку аналогічних підходів до визначення інших фізико-механічних властивостей структурно-неоднорідних матеріалів [77].

De-facto ф-лу (4.28) одержано з одночасткової моделі композиту, тому її точність складає $O(c)$. Важливо розуміти, втім, що нехтування взаємодією включень не є обов'язковою рисою даного підходу: цитуючи Максвела, "...when the distance between the spheres is not great compared with their radii ... then other terms enter into the result" [100]. На відміну від формули Максвела, яка являє собою частинний (хоча і вельми корисний) результат, запропонована Максвелом схема гомогенізації є універсальним і, як показано в роботах останнього часу (напр., [91]), строгим методом мікромеханіки. Ця схема базується на аналізі асимптотичної поведінки збурення від скінченого кластера включень (фрагмента реального композита) та еквівалентного однорідного включения з невідомими ефективними властивостями композита.

Як було зазначено вище, асимптотика зумовленого включенням збурення однозначно визначається його індукованим дипольним моментом, див. формулу (4.17), тому рівність асимптотик збурення поля переміщень від кластера включень і еквівалентного включения означає рівність їхніх дипольних моментів. До того ж з (4.19) випливає, що дипольний момент кластера включень дорівнює сумі дипольних моментів окремих включень. Зауважимо також, що цей результат є також прямим наслідком теореми про лишки [21]. Сказане обґрунтовує формальний запис схеми Максвела у вигляді

$$\sum_{q=1}^N \mathbf{p}^{(q)} \left(\mu_q / \mu_0 \right) = \mathbf{p} \left(\mu^* / \mu_0 \right), \quad \sum_{q=1}^N V_q = c V_{eq}, \quad (4.29)$$

де c - об'ємний вміст включень, V_{eq} - об'єм еквівалентного включения. Формула (4.29) є, по суті, альтернативною загальновживаній (1.5) дефініцією ефективних властивостей композита і зводить задачу гомогенізації до знаходження дипольних моментів включень з тієї чи іншої моделі. Що важливо, формула (4.29) є вірною для довільних умов пружного контакту фаз.

Для матеріалів з малим об'ємним вмістом включень, де взаємодія останніх є слабкою, використання одночасткової моделі є віправданим і дозволяє одержати скінчений вираз для ефективних властивостей аналогічний

формулі Максвела (наприклад, [87]). В загальному ж випадку на дипольний момент кожного окремого включення мають вплив поля збурень від інших включень, тому для його адекватної оцінки необхідне використання багаточасткової моделі композиту. Викладений тут підхід є аналогічним версії методу еквівалентного включення, розвинутого в [105]. Його також можна розглядати як пряме узагальнення схеми гомогенізації Максвела шляхом врахування взаємодії в скінченій множині включень.

Варто зазначити, що у розглянутому Максвелом випадку сферичних (круглих у двовимірному випадку) включень і макроскопічної ізотропії композиту природнім є вибір еквівалентного включення у формі сфери (у двовимірному випадку - круга). У випадку композиту з еліптичними включеннями при наявності їх переважної орієнтації у певному напрямку слід очікувати *анізотропії* ефективних властивостей. Відповідно, еквівалентне включение також має бути анізотропним. Іншим важливим питанням при застосуванні *одночасткової* схеми Максвела до таких матеріалів є *форма* еквівалентного включения. В [90] запропоновано спосіб її вибору, виходячи з форми та орієнтаційного розподілу еліптичних (еліпсоїдальних, у загальному випадку) включень. Зокрема, для композиту з однаковими і однаково орієнтованими еліптичними включеннями оптимальною формою еквівалентного включения буде еліпс з таким же відношенням півосей, як і у окремих включень. Як буде показано нижче, питання форми еквівалентного включения не виникає при використанні строгого підходу до аналізу багаточасткової моделі: втім, для загальності ми розглянемо.

4.3.2. Дипольний момент еквівалентного анізотропного еліптичного включения

Позначимо вибрані з тих чи інших міркувань більшу і меншу півосі еквівалентного еліптичного включения через L_1 і L_2 відповідно. Схема Максвела (4.29) в комплексних змінних має вигляд

$$\sum_{q=1}^N p^{(q)} \left(\mu_q / \mu_0 \right) = p_{eq} (\mu^* / \mu_0), \quad \sum_{q=1}^N S_q = c S_{eq}, \quad (4.30)$$

де $p^{(q)} = p_{1q} + i p_{2q}$ - комплексний дипольний момент q -го включення, p_{eq} - комплексний дипольний момент еквівалентного включення, $S_{eq} = \pi L_1 L_2$ - його площа. Міжфазна відстань $2D = \sqrt{L_1^2 - L_2^2}$, еліптична система координат і комплексна змінна $\xi = \zeta + i\eta$ визначені рівнянням (2.16), де d змінено на D і $z = x_1 + i x_2$ - глобальна комплексна змінна. Границя еквівалентного включення задано умовою $\zeta = \Psi_0$, де

$$\Psi_0 = \ln \left(\frac{L_1 + L_2}{D} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+E}{1-E} \right)$$

$E = L_2/L_1$ і $\Upsilon_0 = \exp \Psi_0 = \left(\frac{1+E}{1-E} \right)^{1/2}$. Тензор пружності еквівалентного включення

$\mathbf{c}^* = \mu_{jj}^* \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j$ є одночасно тензором ефективної пружності (4.2)

Поле переміщень $w^{(1)}$ у включенні задане комплексним потенціалом $\varphi_1 = \overline{H}z$ як

$$w^{(1)} = \operatorname{Re}(\varphi_1) = H_1 x_1 + H_2 x_2, \quad (4.31)$$

де ми поклали $w^{(1)}(0) = 0$. Нормальне напруження

$$\sigma_n^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mu_{11}^* H_1 n_1 + \mu_{22}^* H_2 n_2, \quad (4.32)$$

де комплексний аналог одиничного вектора нормалі

$$\mathbf{n} = n_1 + i n_2 = \frac{\partial z / \partial \zeta}{|\partial z / \partial \zeta|} = \frac{\sinh(\Psi_0 + i\eta)}{\sqrt{\sinh^2 \Psi_0 + \sin^2 \eta}}. \quad (4.33)$$

Умова неперервності переміщень на границі матриці і включення $w^{(0)} = w^{(1)}$ в термінах комплексних потенціалів має вигляд

$$\varphi_0 + \overline{\varphi_0} = \varphi_1 + \overline{\varphi_1}, \quad (4.34)$$

де φ_0 має вигляд (2.31). У випадку досконалого контакту розв'язок містить лише перші гармоніки:

$$\varphi_0 = A_1 v^{-1} + \frac{D}{2} \bar{E}(v + v^{-1}); \quad \varphi_1 = \frac{D}{2} \bar{H}(v + v^{-1}), \quad (4.35)$$

де $v = \exp \xi$ і $E = E_{13} + iE_{23}$. На міжфазній границі $\zeta = \Psi_0$ маємо $v = \sinh(\Psi_0 + i\eta) = Y_0 t$ і $v^{-1} = Y_0^{-1} t^{-1}$. Після простих перетворень знаходимо

$$\frac{2}{D} A_1 + (\bar{E} - \bar{H}) + (E - H) Y_0^2 = 0. \quad (4.36)$$

З рівнянь (4.32) і (4.33) маємо

$$\sigma_n^{(0)} = -\frac{\mu_0}{D \sqrt{\sinh^2 \Psi_0 + \sin^2 \eta}} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} + \overline{\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta}} \right). \quad (4.37)$$

Підстановка (4.36) і (4.32) в умову неперервності нормальних напружень $\sigma_n^{(0)} = \sigma_n^{(1)}$ дає

$$\frac{2}{D} A_1 + \bar{E} - E Y_0^2 = \frac{\mu_{11}^*}{\mu_0} H_1 (1 - Y_0^2) - \frac{\mu_{22}^*}{\mu_0} i H_2 (1 + Y_0^2) \quad (4.38)$$

Комбінуючи рівняння (4.36) і (4.38), одержимо

$$A_1 = \frac{D}{2 Y_0^2} (Y_0^4 - 1) (E_{13} P_1^* + i E_{23} P_2^*), \quad (4.39)$$

де

$$P_1^* = \frac{(\mu_{11}^* / \mu_0 - 1) Y_0^2}{(\mu_{11}^* / \mu_0 + 1)(1 - Y_0^2) - 2}; \quad P_2^* = -\frac{(\mu_{22}^* / \mu_0 - 1) Y_0^2}{(\mu_{22}^* / \mu_0 + 1)(1 + Y_0^2) - 2}. \quad (4.40)$$

Нарешті, врахування умови (4.26) дає

$$p_{eq} = 2 \mu_0 S_{eq} (E_{13} P_1^* + i E_{23} P_2^*) \quad (4.41)$$

де

$$S_{eq} = \pi L_1 L_2 = \pi \frac{D^2}{4\Upsilon_0^2} (\Upsilon_0^4 - 1). \quad (4.42)$$

В частинному випадку ізотропного круглого включення рівняння (4.41) спрощується, як і слід було очікувати, до відомої формули

$$p_{eq} = 2\mu_0 S_{eq} \frac{(\mu^* - \mu_0)}{(\mu^* + \mu_0)} (E_{13} + iE_{23}). \quad (4.43)$$

4.3.3. Ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву композита

За умови що P_1^* і P_2^* відомі, ефективні пружні модулі композита обчислюють за формулами, оберненими до (4.40), а саме

$$\frac{\mu_{11}^*}{\mu_0} = \frac{(1 + \Upsilon_0^2)P_1^* - \Upsilon_0^2}{(1 - \Upsilon_0^2)P_1^* - \Upsilon_0^2}; \quad \frac{\mu_{22}^*}{\mu_0} = \frac{(1 - \Upsilon_0^2)P_2^* + \Upsilon_0^2}{(1 + \Upsilon_0^2)P_2^* + \Upsilon_0^2}. \quad (4.44)$$

В загальному випадку, P_1^* і P_2^* визначають з рівнянь (4.30) та (4.41) за відомими дипольними моментами окремих включень, одержаними з розв'язку задачі для простору зі скінченою множиною включень. Для композиту з малим об'ємним вмістом включень можливо, знехтувавши їх взаємодією, одержати в одночастковому наближенні аналітичні вирази для ефективних модулів.

Так, для композиту невпорядкованої структури, у якому орієнтацію одинакових еліптичних включень задано щільністю ймовірності $p_\sigma(\Theta)$, рівняння (4.30) приймає вигляд

$$p_{eq}(E, \mu^*) = p^*(E, \mu_1) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p(E, \mu_1, \Theta) P_\sigma(\Theta) d\Theta, \quad (4.45)$$

де дипольний момент включения $p(E, \mu_1, \Theta)$ визначено формулою (4.26), записаною у вигляді

$$p(E \exp(-i\Theta), \mu_1) = \pi d \mu_0 A_l [E \exp(-i\Theta), \mu_1] \quad (4.46)$$

а $A_l [E \exp(-i\Theta), \mu_1]$ одержано з системи лінійних рівнянь (3.35) чи (3.50).

У випадку однаково орієнтованих включень $P_\sigma(\Theta) = \delta(\Theta)$, де $\delta(\cdot)$ - дельта функція, тому $p^*(E, \mu_1) = p(E, \mu_1)$ і відповідно

$$P_1 + iP_2 = \frac{\pi dc}{2S_1} \left(\frac{\operatorname{Re} A_1}{E_{13}} + i \frac{\operatorname{Im} A_1}{E_{23}} \right). \quad (4.47)$$

Інший частинний випадок відповідає однорідному орієнтаційному розподілу еліпсів $P_\sigma(\Theta) = 1/\pi$. Такий композит є макроскопічно однорідним з ефективним модулем зсуву $\mu_{13}^* = \mu_{23}^* = \mu^*$, визначенням формулою

$$\frac{(\mu^* - \mu_0)}{(\mu^* + \mu_0)} = \frac{\pi dc}{2S_1 E} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A_1 [E \exp(-i\Theta), \mu_1] \exp(i\Theta) d\Theta. \quad (4.47)$$

Зокрема, граничний перехід $e \rightarrow 1$ (чи, що те ж саме, $v_0^2 \rightarrow \infty$) в рівнянні (4.47) дає відому формулу Хасельмана-Джонсона [69] для композиту з круглими включеннями у недосконалим контактом фаз:

$$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mu^* + \mu_0} = c \frac{\mu_1 - \mu_0 + \beta \mu_0}{\mu_1 + \mu_0 - \beta \mu_0}, \quad (4.48)$$

де $\beta = \mu_1 / h_1 R$ є граничним значенням відповідного параметра формули (2.35).

Зазначимо ще кілька частинних випадків формули (4.44) для композиту з ідеальним контактом фаз. У цьому випадку нескінчені системи лінійних рівнянь (3.35) та (3.50) спрощуються для (2.54), яка, в свою чергу, за умови постійного зовнішнього навантаження зводиться до одного рівняння

$$(\tilde{\mu}_1 + 1)A_1 - \frac{2A_1 v_0^{-2}}{(v_0^{-2} - v_0^2)} - \frac{2\bar{A}_1}{(v_0^{-2} - v_0^2)} = \frac{d}{2} (1 - \tilde{\mu}_1) (E v_0^2 + \bar{E}) \quad (4.49)$$

Його розв'язання не складає проблеми і дає

$$A_1 = \frac{d}{2v_0^2} (v_0^4 - 1) (E_{13} P_1 + i E_{23} P_2), \quad (4.50)$$

де

$$P_1 = \frac{(\tilde{\mu}_1 - 1)\nu_0^2}{(1 - \nu_0^2)(\tilde{\mu}_1 + 1) - 2}; \quad P_2 = -\frac{(\tilde{\mu}_1 - 1)\nu_0^2}{(1 + \nu_0^2)(\tilde{\mu}_1 + 1) - 2}. \quad (4.51)$$

Як і слід було очікувати, вираз для дипольного моменту включення є *ізотропним* випадком (4.41)

$$p = 2\mu_0 S_1 (E_{13} P_1 + i E_{23} P_2), \quad (4.52)$$

де взято до уваги що

$$S_1 = \pi l_1 l_2 = \pi \frac{d^2}{4\nu_0^2} (\nu_0^4 - 1). \quad (4.53)$$

Для композита з однаково орієнтованими включеннями схема Максвела (4.30) дає

$$S_1 (E_{13} P_1 + i E_{23} P_2) = S_{eq} (E_{13} P_1^* + i E_{23} P_2^*); \quad (4.54)$$

з огляду на довільність E_{13} і E_{23} ,

$$P_1^* = cP_1, \quad P_2^* = cP_2. \quad (4.55)$$

Формула (4.47) визначає ізотропний пружний модуль композита з повністю розорієнтованими включеннями. З огляду на (4.50) інтегрування в (4.47) є елементарним і дає $p^*(E, \mu_1) = \mu_0 S_1 (P_1 + P_2) E$, звідки

$$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mu^* + \mu_0} = \frac{c}{2} (P_1 + P_2), \quad (4.56)$$

де P_1 і P_2 визначені (4.51). Формула (4.56) ідентична одержаній в [129].

У випадку круглих ($\nu_0^2 \rightarrow \infty$) включень ми очікувано одержуємо формулу Максвела [100] у вигляді

$$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mu^* + \mu_0} = c \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0}. \quad (4.56)$$

Інший крайній випадок - це нескінченно тонкі еліптичні пори, які моделюють прямі тріщини: $\nu_0^2 \rightarrow 1$, $\mu_1 = 0$. Об'ємний вміст таких пор (пористість)

дорівнює нулю, тому їх кількісною мірою є щільність тріщин $\rho = Nd^2$, де N - кількість тріщин на одиницю площі [76]. Дипольний момент тріщини, орієнтованої уздовж осі Ox_1 , дорівнює $\pi d^2 \mu_0 i E_{23}$, а вирази для пружних модулів поздовжнього зсуву тіла з однаково орієнтованими тріщинами

$$\mu_{11}^* = \mu_0; \quad \frac{\mu_0 - \mu_{22}^*}{\mu_0 + \mu_{22}^*} = \frac{\pi}{2} \rho. \quad (4.57)$$

аналогічні наведеним в [76].

4.4. Узагальнений метод Релея

Підхід Релея до визначення макроскопічних сталих структурно-неоднорідних матеріалів полягає у їх моделюванні деякою періодичною структурою і усередненні відповідних локальних полів, одержаних розв'язанням крайової задачі на комірці періодичності цієї структури. Релей [115] розглянув найпростіші періодичні структури, а саме кубічну гратку сферичних включень і квадратну гратку круглих включень. Наразі цей підхід поширено (наприклад, [119, 120, 49, 85]) на випадок узагальнених періодичних структур, елементарна структурна комірка яких містить скінчену множину включень, що дає можливість розгляду геометричної моделі, близької до реальної мікроструктури матеріалу.

Розглянемо композит, елементарна комірка узагальненої періодичної структури якого зображена на рис. 3.4 і скористаємося розв'язком задачі, розглянутої в підрозділі (3.5). Ефективні модулі такого композиту визначено законом Гука (4.2) для макроскопічних деформацій і напружень. Для обчислення останніх використовується процедура поверхневого усереднення (4.5), де в нашому випадку представницьким об'ємом є квадрат зі стороною a . Відповідно L_0 - це периметр квадрата, а його площа $S = a^2$. В комплексних змінних формула (4.5) має вигляд

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2S} \int_{L_0} w n \, dL, \quad \langle \sigma \rangle = \frac{1}{S} \int_{L_0} \operatorname{Re}(\sigma \bar{n}) z \, dL \quad (4.58)$$

Обчислення інтегралів (4.58) є елементарним. Врахувавши у першому з них умову квазіперіодичності переміщень (3.52) (відповідні цим переміщенням напруження є періодичними функціями координат), одержимо $\langle \varepsilon \rangle = E$, тобто використаний в підрозділі 3.4 параметр навантаження дійсно є макроскопічна деформація. Вираз для макроскопічного комплексного напруження $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle + i\langle \sigma_{23} \rangle$ є прямим наслідком рівнянь (4.20) і (4.26):

$$\frac{\langle \sigma \rangle}{2\mu_0} = \langle \varepsilon \rangle + \frac{1}{2\mu_0 a^2} \sum_{q=1}^N p^{(q)} = \langle \varepsilon \rangle + \frac{\pi}{2a^2} \sum_{q=1}^N d_q A_1^{(q)}. \quad (4.59)$$

Разом з (4.2) формула (4.59), в якій коефіцієнти $A_1^{(q)}$ обчислені з задачі для простір з періодичною системою еліптичних включень (підрозділ 3.5) є достатніми для визначення тензора ефективних пружних модулів μ^* .

4.5. Дослідження збіжності модифікованої схеми Максвела

Як зазначено вище, стандартна (одночасткова) схема Максвела прогнозує ефективні властивості з точністю $O(c)$. Точність розвинутої нами модифікованої (багаточасткової) схеми є вищою і контролюється двома параметрами - розміром кластера N і кількістю гармонік n_{\max} , врахованих при чисельному аналізі задачі. Для оцінки ступеню впливу вказаних параметрів розглянемо композит з квадратною граткою (рис. 4.1а) високомодульних ($\tilde{\mu}_1 = \infty$) включень, маючи на увазі що при тих же N і n_{\max} точність розв'язку для композита зі скінченим значенням контрасту фаз $\tilde{\mu}_1$ є більшою. Форма кластера - кругла (радіусом R_{eq}) та квадратна (розміром $2R_{eq}$), включення розташовані періодичним (рис. 4.1а) або випадковим (рис. 4.1б) чином, їх контакт з матрицею є ідеальним. В обох випадках припускаємо, що композит є ізотропним на макрорівні: $\mu_{11}^* = \mu_{22}^* = \mu^*$.

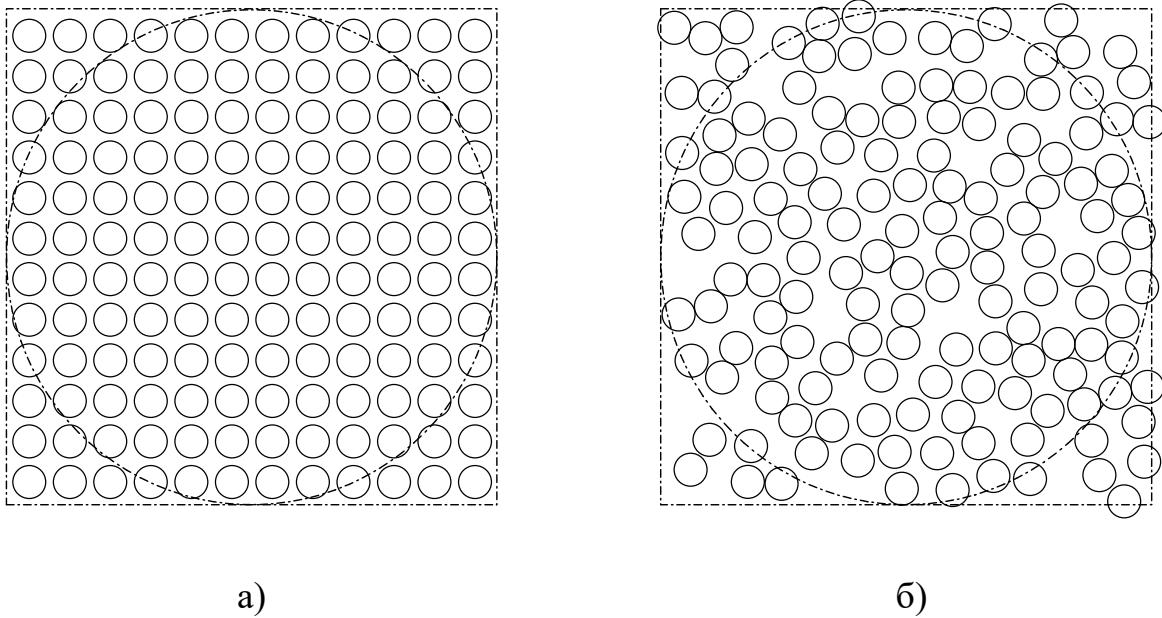


Рис. 4.1. Геометрія багаточасткової моделі волокнистого композита

В табл. 4.1 подано нормалізовані значення $\tilde{\mu}^* = \mu^* / \mu_0$ ефективного модуля поздовжнього зсуву для ряду значень об'ємного вмісту c і n_{\max} , одержані для квадратного кластера розміром $N = l^2 = 100$ (l - кількість включень уздовж сторони кластера). Як видно з таблиці, принаймні для $c \leq 0.5$ значення $n_{\max} = 10$ забезпечує повну збіжність розвязку.

Табл. 4.1. Збіжність $\tilde{\mu}^*$ зі збільшенням n_{\max}

n_{\max}	$c = 0.1$	$c = 0.3$	$c = 0.5$	$c = 0.7$
1	1.2222	1.8570	2.9989	5.6583
3	1.2222	1.8599	3.0716	6.9764
5	1.2222	1.8599	3.0727	7.1525
10	1.2222	1.8599	3.0729	7.2157
15	1.2222	1.8599	3.0729	7.2180
20	1.2222	1.8599	3.0729	7.2180

Для високонаповненого композиту з $c = 0.7$ ($c_{\max} = \pi/4 \approx 0.78$) при $n_{\max} = 10$ відносна похибка складає лише $3 \cdot 10^{-4}$, тобто (як побачимо нижче) значно

менше похибки, зумовленої скінченим розміром кластера. З огляду на сказане, $n_{\max} = 10$ прийнято для подальших розрахунків.

Табл. 4.2 демонструє збіжність розвязку в термінах розміру кластера: $N = l^2$ для квадратного, $N \approx 0.8l^2$ для круглого кластера. Відповідні дані в табл.4.2 позначено номером формули для p_{eq} круглого

$$p_{eq}(E, \tilde{\mu}^*) = -2\pi R_{eq}^2 \mu_0 \frac{1 - \tilde{\mu}^*}{1 + \tilde{\mu}^*} E \quad (4.60)$$

і квадратного [20]

$$p_{eq}(E, \tilde{\mu}^*) = \mu_0 R_{eq}^2 (\tilde{\mu}^* - 1) \frac{2.18844(\tilde{\mu}^{*2} + 1) + 4.99543\tilde{\mu}^*}{\tilde{\mu}^{*3} + 3.68598(\tilde{\mu}^{*2} + \tilde{\mu}^*) + 1} E \quad (4.61)$$

еквівалентного включення. З метою порівняння в останньому рядку таблиці наведено точні значення $\tilde{\mu}^*$ одержані в [114] методом Релея.

Табл. 4.2. Збіжність $\tilde{\mu}^*$ зі збільшенням розміру кластера

l	$c = 0.3$		$c = 0.5$		$c = 0.7$	
	(4.60)	(4.61)	(4.60)	(4.61)	(4.60)	(4.61)
4	1.8642	1.8584	3.1130	3.0525	7.7477	6.8337
8	1.8627	1.8597	3.1013	3.0701	7.6510	7.1548
16	1.8619	1.8601	3.0957	3.0765	7.6122	7.3032
24	1.8616	1.8602	3.0929	3.0781	7.5923	7.3491
32	1.8612	1.8602	3.0892	3.0788	7.5417	7.3710
[114]	1.8602		3.0802		7.4327	

Наведені дані переконливо доводять збіжність $\tilde{\mu}^*$ по розміру як круглого, так і квадратного кластера, при цьому принаймні для даної геометрії композита швидкість збіжності є більшою у випадку квадратного кластера. Для $c = 0.3$ (4.61) забезпечує повну збіжність уже при $l = 16$; для $c = 0.7$ і $l = 32$ відносна похибка визначення $\tilde{\mu}^*$ складає 0.8% для квадратного і 1.5% для круглого

кластера. Таким чином, модифікований метод Максвела забезпечує обчислення ефективних сталих з довільною бажаною точністю і тому має підстави розглядатись як строгий метод мікромеханіки.

В табл. 4.3 наведено значення $\tilde{\mu}^*$ для композитів періодичної (рис. 4.1а) і випадкова (рис. 4.1б) структури, одержані за класичною схемою Максвела (4.56) та її модифікаціями (4.60) і (4.61). Для порівняння тут же наведено точні дані для періодичного [114] і невпорядкованого [51] композитів з високомодульними включеннями. Для розрахунків взято $l = 32$ і $n_{\max} = 10$. Розрахункові дані для невпорядкованого композиту (колонки 6 і 7) є півсумою ефективних провідностей в напрямах x_1 та x_2 , усередненою по 100 реалізаціям випадкової структури. Для генерації останньої використано алгоритм, описаний в [51].

Табл. 4.3. Ефективний модуль $\tilde{\mu}^*$ композитів періодичної і невпорядкованої структури з високомодульними круглими включеннями

c	періодична структура				випадкова структура		
	(4.56)	(4.60)	(4.61)	[114]	(4.60)	(4.61)	[51]
0.1	1.2222	1.2223	1.2222	1.2222	1.231	1.231	1.231
0.2	1.5000	1.5005	1.5003	1.5003	1.543	1.542	1.543
0.3	1.8571	1.8612	1.8602	1.8602	1.976	1.974	1.977
0.4	2.3333	2.3541	2.3509	2.3510	2.605	2.601	2.607
0.5	3.0000	3.0892	3.0788	3.0802	3.565	3.558	3.571
0.6	4.0000	4.3685	4.3336	4.3418	5.143	5.112	5.164
0.7	5.6667	7.5417	7.3710	7.4327	7.672	7.629	7.834

Наведені дані свідчать, що на відміну від класичного методу Максвела (4.56) (друга колонка таблиці), запропонований модифікований метод належно враховує вплив мікроструктури композиту на його макроскопічні властивості. Як і у попередньому прикладі, варіант (4.61) забезпечує покращену збіжність

по N у випадку композиту періодичної структури; для невпорядкованого композиту, навпаки, кластер круглої форми забезпечує краще узгодження з [51]. Втім, обидва варіанти забезпечують достовірне прогнозування ефективних сталих в усьому діапазоні зміни об'ємного місту включень. При $c = 0.7$ відносна похибка складає близько 1% для періодичного і 2% для невпорядкованого композиту, тоді як для стандартної схеми Максвела вона дорівнює відповідно 24% і 28%. Крім іншого, одержані результати кладуть край довготривалій дискусії (наприклад, [107,77]) стосовно належної форми еквівалентного включения в методі Максвела. За умови належного врахування взаємодії включень, об'єм і форма еквівалентного включения мають бути такими ж, як і у фрагмента реального композиту, вибраного у якості структурної моделі.

4.6. Ефективні пружні модулі композита з недосконалими контактними умовами першого типу

Розглянута нами модель композита має значну кількість параметрів, кожен з яких впливає на його ефективну пружність. Це об'ємний вміст включень c , їх розташування (Z_q), розмір і форма (l_1 і l_2), фазовий контраст $\tilde{\mu}_1$ і нормалізована контактна пружність \tilde{h}_1 . Без обмеження загальності, покладемо $l_1 = 1$ і $\mu_0 = 1$ і обмежимо розгляд двома моделями композита. Одна з них - це прямокутний періодичний масив включень з періодами a_1 і a_2 , пропорційними півосям еліптичних включень: $l_1/a_1 = l_2/a_2$; інша - це квазівипадкова структура, показана на рис. 4.2. Ця комірка може також моделювати періодичні структури у випадку коли відношення a_1/a_2 є раціональним числом, див. наприклад рис. 4.3 і 4.4. Інший спосіб полягає у виборі елементарної комірки у вигляді прямокутника зі сторонами a_1 і a_2 , який містить одне включение. Для обох типів структур $\mu_{12}^* = \mu_{21}^* = 0$

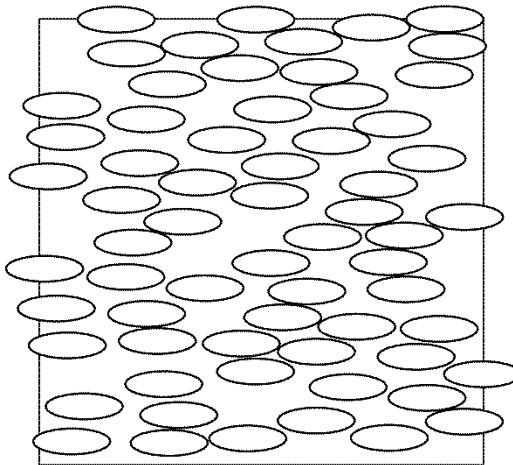


Рис. 4.2. Елементарна комірка квазівипадкої структури, $N = 48$

Багаточасткова модельна крайова задача породжує нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь навіть у випадку досконалого контакту фаз. Як наслідок, точність чисельного (наближеного, по суті) розв'язку, як і у попередніх прикладах, залежить від кількості n_{\max} рівнянь і невідомих утриманих при розв'язання нескінченої системи (3.35) методом редукції. Деяке уявлення про точність наведених нижче числових даних дає табл. 4.4, де подано значення безрозмірного ефективного пружного модуля $\tilde{\mu}_{22}^* = \mu_{22}^* / \mu_0$ періодичного композита як функції n_{\max} для об'ємного вмісту еліптичних включень $c = 0.7$ і $\tilde{\mu}_1 = 1000$.

Табл. 4.4. Збіжність $\tilde{\mu}_{22}^*$ по n_{\max} для періодичного композиту з еліптичними включеннями, $e = l_2 / l_1$

n_{\max}	$e = 0.5$			$e = 0.2$		
	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$
1	0.15696	2.49917	5.10142	0.13860	1.38832	4.71613
3	0.12590	2.64753	6.66346	0.10420	1.45461	6.37850
5	0.12428	2.65092	6.98261	0.10178	1.45310	6.82303
10	0.12396	2.65141	7.08665	0.10175	1.45340	6.95565
15	0.12394	2.65141	7.09175	0.10174	1.45342	6.96353

20	0.12394	2.65141	7.09181	0.10174	1.45342	6.96363
MCE	0.12394	2.6514	7.0918	0.1017	1.4534	6.9637

Як видно з таблиці, швидкість збіжності залежить головним чином від об'ємного вмісту включень або, що те ж саме, від мінімальної відстані між ними. З збільшенням n_{\max} одержані з рівняння (4.59) значення $\tilde{\mu}_{22}^*$ збігаються до отриманих незалежно шляхом аналізу задачі для елементарної комірки методом скінчених елементів (останній рядок таблиці 4.4). Для $c = 0.7 \approx 0.9c_{\max}$ де $c_{\max} = \pi/4$ відповідає щільній упаковці високомодульних включень, $n_{\max} = 20$ забезпечує оцінку ефективної пружності композита з мінімум 5-значною точністю. Що важливо в контексті нашого дослідження, швидкість збіжності практично не залежить від \tilde{h}_1 .

На рис. 4.3 і 4.4 подано ефективні пружні модулі, $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ відповідно, періодичного композита як функцію \tilde{h}_1 .

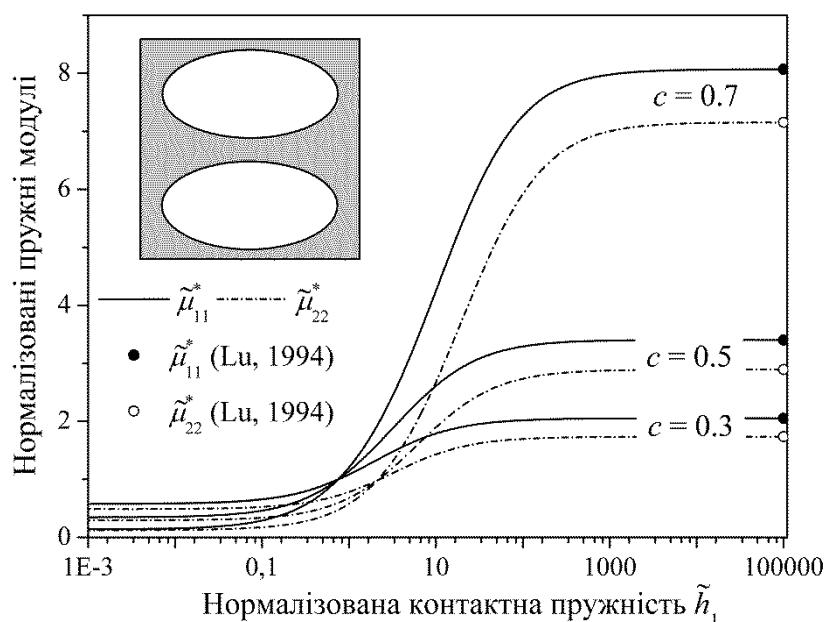


Рис. 4.3. Ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ періодичного композита з жорсткими еліптичними включеннями, $e = 0.5$

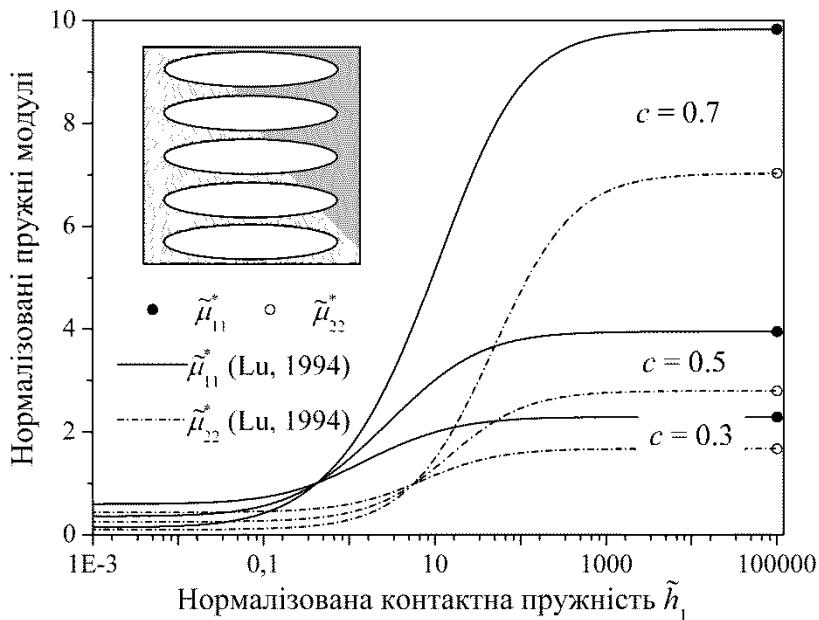


Рис. 4.4. Ефективні пружні модулі поздовжнього зсуву $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ періодичного композита з жорсткими еліптичними включеннями, $e = 0.2$

Композит містить абсолютно жорсткі еліптичні включення ($\tilde{\mu}_i = \infty$) з параметром форми $e = 0.5$ (рис. 4.3) і $e = 0.2$ (рис. 4.4); об'ємний вміст включень $c = 0.3, 0.5$ і 0.7 .

Наші обчислення показують, що макроскопічна пружність при $\tilde{h}_1 \geq 100$ близька до пружності композита з ідеальним контактом фаз ($h_1 = \infty$). У цьому граничному випадку наші результати очікувано збігаються з даними роботи [96], показаними темними і світлими кружками, що свідчить про коректність як теоретичних формул, так і чисельного алгоритму розвинутого методу. Для $\tilde{h}_1 < 0.1$ пружні модулі композита близькі до таких пористого тіла попри абсолютну жорсткість включень. Цей приклад чітко вказує, що міжфазна границя суттєво впливає на ефективну пружність композиту, і тому має бути врахована при його моделюванні.

Табл. 4.5. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$ як функція об'ємного вмісту c , фазового контрасту $\tilde{\mu}_1$ і нормалізованої контактної пружності \tilde{h}_1

c	$\tilde{\mu}_1 = 1$			$\tilde{\mu}_1 = 10$			$\tilde{\mu}_1 = 1000$		
	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$
0.1	0.8611	0.9937	1.0	0.8611	1.2084	1.2559	0.8611	1.2836	1.3564
0.2	0.7213	0.9874	1.0	0.7213	1.4148	1.5144	0.7213	1.5641	1.7189
0.3	0.5890	0.9812	1.0	0.5890	1.6409	1.8110	0.5890	1.8825	2.1595
0.4	0.4661	0.9749	1.0	0.4661	1.9021	2.1753	0.4661	2.2715	2.7509
0.5	0.3528	0.9688	1.0	0.3528	2.2165	2.6500	0.3528	2.7762	3.6256
0.6	0.2466	0.9626	1.0	0.2466	2.6107	3.3155	0.2466	3.4769	5.1175
0.7	0.1412	0.9566	1.0	0.1412	3.1321	4.3849	0.1412	4.5514	8.6142

Таблиці 4.5 і 4.6 містять обчислені ефективні модулі поздовжнього зсуву,

$\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ відповідно, періодичного композита в залежності від об'ємного вмісту включень, фазового контрасту $\tilde{\mu}_1$ і нормалізованої контактної пружності \tilde{h}_1 . Параметр форми включень $e = 1/3$. Тут ми знову спостерігаємо суттєвий вплив міжфазної границі на макроскопічну пружність композита. Для $c = 0.5$, $\tilde{\mu}_1 = 10$ і $\tilde{h}_1 = \infty$ ці дані добре узгоджуються з наведеними в [49], для $\tilde{\mu}_1 = 1000$ і $\tilde{h}_1 = \infty$ (досконалий контакт) - практично співпадають з результатами роботи [96].

Табл. 4.6. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{22}^*$ як функція об'ємного вмісту c , фазового контрасту $\tilde{\mu}_1$ і нормалізованої контактної пружності \tilde{h}_1

c	$\tilde{\mu}_1 = 1$			$\tilde{\mu}_1 = 10$			$\tilde{\mu}_1 = 1000$		
	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 10$	$\tilde{h}_1 = \infty$
0.1	0.7366	0.9687	1.0	0.7366	1.0692	1.1368	0.7366	1.0859	1.1611
0.2	0.5809	0.9391	1.0	0.5809	1.1496	1.3177	0.5809	1.1894	1.3853
0.3	0.4621	0.9108	1.0	0.4621	1.2413	1.5533	0.4621	1.3114	1.6962
0.4	0.3626	0.8834	1.0	0.3626	1.3451	1.8641	0.3626	1.4545	2.1419

0.5	0.2747	0.8567	1.0	0.2747	1.4622	2.2866	0.2747	1.6227	2.8276
0.6	0.1944	0.8307	1.0	0.1944	1.5942	2.8926	0.1944	1.8212	4.0373
0.7	0.1149	0.8048	1.0	0.1149	1.7433	3.8503	0.1149	2.0574	7.0149

Тепер ми перейдемо до композитів випадкової структури. Подані нижче дані отримано з використанням коміркової моделі (рис.4.2) з однаково орієнтованими еліптичними включеннями. В частинному випадку кругових включень і ідеального контакту така модель розглядалась в ряді робіт (наприклад [51, 49]), тому ми почнемо з порівняння. В табл. 4.7 подано ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}^*$ композита з випадково

Табл. 4.7. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}^*$ композита з випадково розташованими круглими абсолютно жорсткими включеннями як функцію їх вмісту та нормованої контактної пружності \tilde{h}_1 .

c	(3.35)				[51]	[49]
	$\tilde{h}_1 = 0$	$\tilde{h}_1 = 1$	$\tilde{h}_1 = 5$	$\tilde{h}_1 = \infty$		
0.1	0.813	0.991	1.115	1.182	1.182	1.182
0.2	0.651	0.981	1.246	1.410	1.410	1.410
0.3	0.508	0.972	1.393	1.698	1.698	1.697
0.4	0.388	0.963	1.56	2.07	2.067	2.068
0.5	0.285	0.953	1.75	2.55	2.546	2.543
0.6	0.200	0.944	1.98	3.18	3.186	3.170
0.7	0.131	0.935	2.23	4.00	4.020	3.945

розміщеними круглими ($e = 1$) абсолютно жорсткими включеннями як функцію їх вмісту та нормованої контактної пружності \tilde{h}_1 . Останні два стовпці цієї таблиці містять дані, отримані іншими авторами для випадку досконалого контакту $h_1 = \infty$. Як показує порівняння, наші результати для двох крайніх випадків ($h_1 = 0$ і $h_1 = \infty$) узгоджуються з літературними даними. Для

композитів невпорядкованої структури і недосконалим контактом фаз в літературі наявні лише наближені розв'язки [98]. Стаття [49] є ймовірно єдиною роботою, де розглянуто коміркову модель композита з еліптичними включеннями. Ефективні властивості композиту з еліптичними включеннями і недосконалим контактом фаз раніше не розглядалася навіть наблизено.

Концентраційні залежності $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ композита з $e = 1/3$ і $\tilde{\mu}_1 = 10$ подано відповідно на рис. 4.5 і 4.6. Криві 1-4 відповідають значенням $\tilde{h}_1 = 0, 5, 10$ і ∞ . Наведені результати для $\tilde{h}_1 = \infty$ узгоджуються з даними роботи [49] показаними світлими кружками на рис. 4.5 і 4.6. Числові дані для випадку скінченої контактної пружності \tilde{h}_1 одержано вперше.

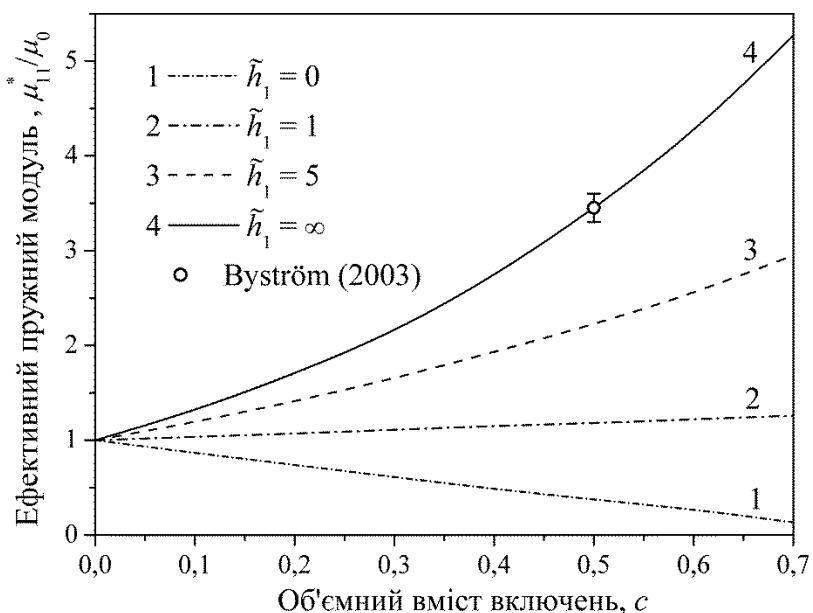


Рис. 4.5. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$ композита з випадково розташованими однаково орієнтованими еліптичними включеннями, $e = 1/3$

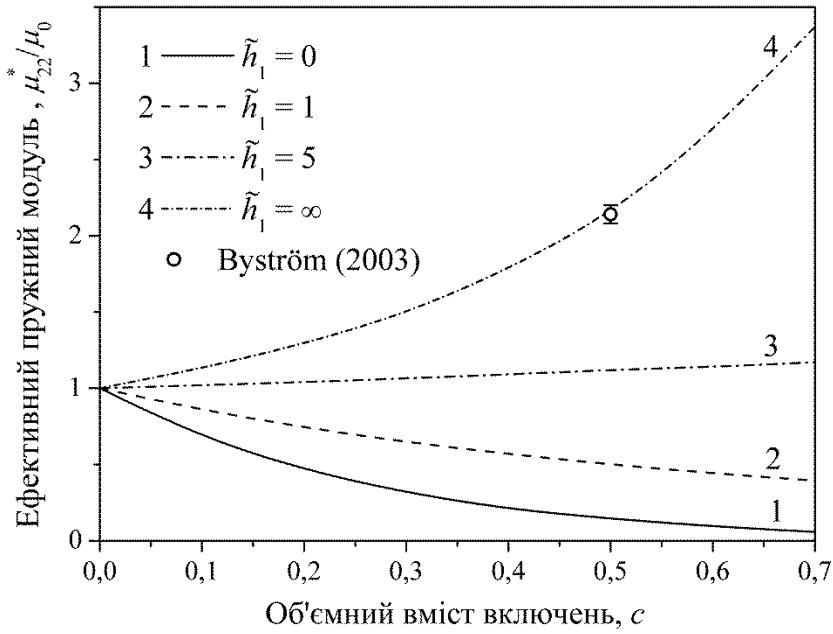


Рис. 4.6. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{22}^*$ композита з випадково розташованими однаково орієнтованими еліптичними включеннями, $e = 1/3$

4.7. Ефективні пружні модулі композита з недосконалими контактними умовами другого типу

Для чисельного аналізу пружних властивостей композита з властивими наноматеріалами недосконалими границями розділу фаз другого типу ($\tilde{h}_2 \neq 0$) використаємо ті ж структурні моделі що і у попередньому підрозділі, а саме періодичну і квазівипадкову. Результати проведеного в [89] аналізу збіжності розв'язку даної задачі є цілком аналогічними викладеним у попередньому підрозділі; тут ми наведемо лише деякі характерні результати, які демонструють вплив поверхневих напружень на ефективні пружні властивості композита.

На рис. 4.7 зображене ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{22}^*$ пористого тіла періодичної структури, де параметр форми пор $e = 0.1$. Для макро рівня, коли $\tilde{h}_2 = 0$, наші дані одержані методом Релея (суцільна лінія) співпадають з

точністю до чотирьох знаків з даними роботи [96] одержаних в припущеннях вільної від напружень поверхні пор і показаних на рисунку світлими кружками.

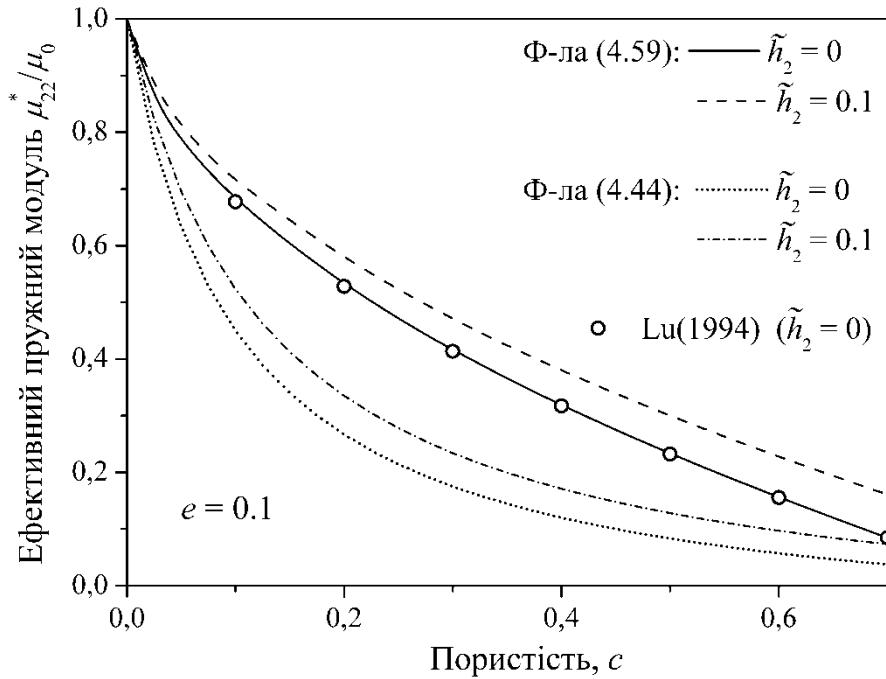


Рис. 4.7. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{22}^*$ як функція пористості (періодична структура)

Поверхневі напруження збільшують ефективну пружність пористого тіла: числові дані для $\tilde{h}_2 = 0.1$ показано штриховою лінією.

Одночасткова схема Максвела (рівняння(4.44)) також передбачає збільшення $\tilde{\mu}_{22}^*$ при $\tilde{h}_2 \neq 0$, але в цілому дає значно занижені значення ефективної пружності пористого тіла. Аналогічні дані для ефективного пружного модуля $\tilde{\mu}_{11}^*$ наведено на рис. 4.8. Знову ж, для $\tilde{h}_2 = 0$ наші дані співпадають з даними роботи [96], тоді як стандартна схема Максвела дає завищені значення.

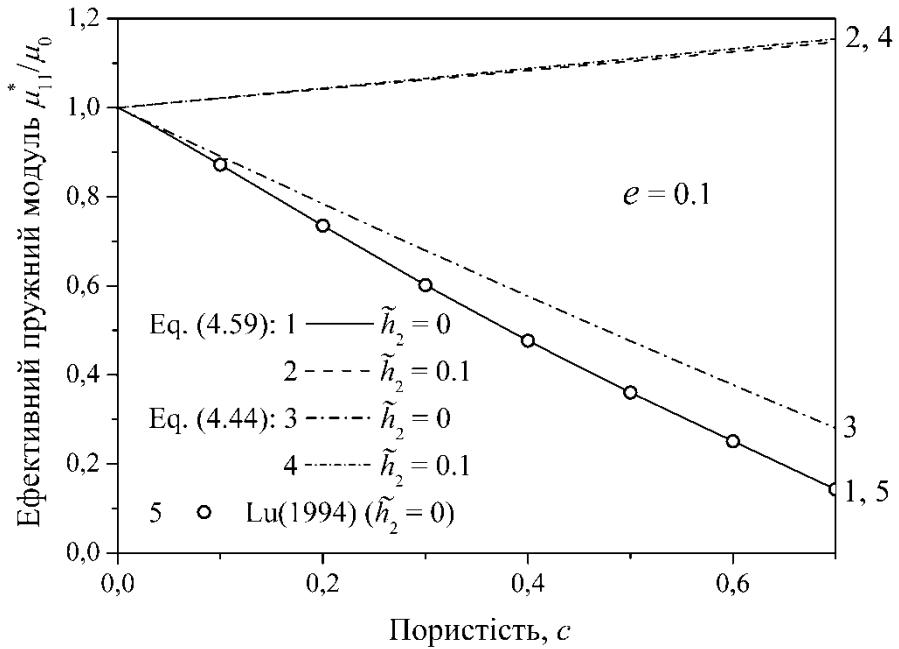


Рис. 4.8. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$ як функція пористості (періодична структура)

Як показують розрахунки, \tilde{h}_2 має більш суттєвий вплив на $\tilde{\mu}_{11}^*$, ніж на $\tilde{\mu}_{22}^*$. Для $\tilde{h}_2 = 0.1$ ефективний модуль пружності пористого тіла є більшим за модуль суцільного матеріалу. Цікаво, що в цьому випадку передбачення методів Релея та Максвела є близькими. Ці приклади яскраво демонструють, що поверхневі ефекти суттєво впливають на макроскопічну жорсткість наноструктурованих матеріалів.

На рис. 4.9 показано залежність ефективних пружних модулів $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ пористого тіла з $c = 0.5$ від параметра контактної умови \tilde{h}_2 . Очікувано, для $e = 1$ (круглі пори) $\tilde{\mu}_{11}^* = \tilde{\mu}_{22}^*$ є повільно зростаючою функцією \tilde{h}_2 (крива 1 і світлі кружки). Для $e < 1$ $\mu_{22}^*(e) < \mu_{22}^*(1)$, тоді як $\mu_{11}^*(e) < \mu_{11}^*(1)$ і їхня різниця зростає при $e \rightarrow 0$. Для прикладу, параметр анізотропії μ_{11}^*/μ_{22}^* дорівнює 1.38 для $e = 0.5$ і 2.33 для $e = 0.2$.

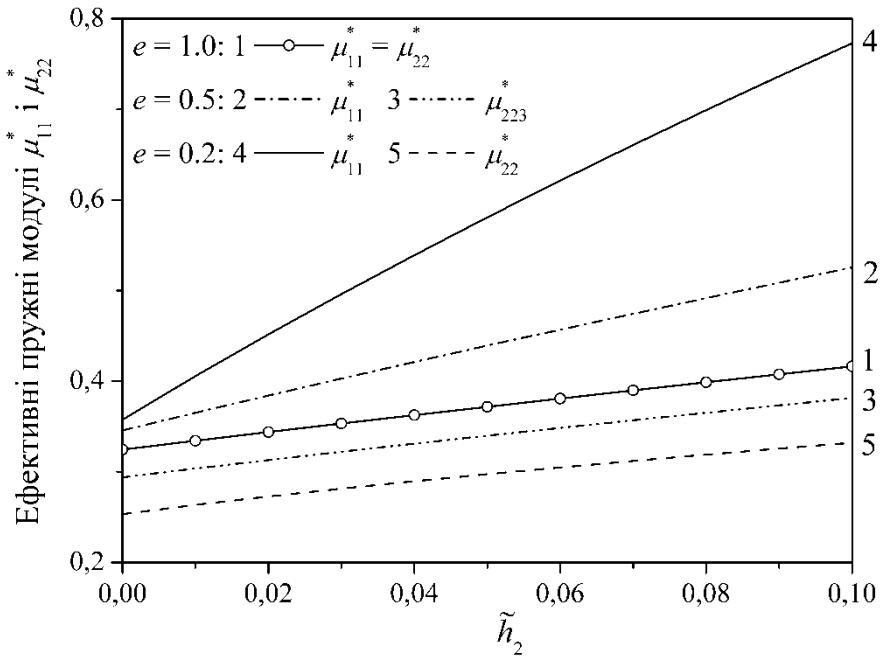


Рис. 4.9. Ефективні пружні модулі $\tilde{\mu}_{11}^*$ і $\tilde{\mu}_{22}^*$ як функція \tilde{h}_2 : $c = 0.5$; $e = 0.2, 0.5$ і 1.0 .

На завершення наведемо два приклади впливу поверхневих/міжфазних напружень на пружні модулі періодичного і випадкового композитів з $c = 0.5$ і $e = 1/3$. В табл. 4.8 ефективні модулі $\mu_{11}^*(\tilde{h}_2)$ і $\mu_{22}^*(\tilde{h}_2)$ показані як функція $0 \leq \tilde{\mu}_1 \leq 10$ для $\tilde{h}_2 = 0$ і $\tilde{h}_2 = 0.2$. Останнє значення взято достатньо великим щоби ілюструвати вплив \tilde{h}_2 . Розрахунки показують що μ_{ii}^* є майже лінійними функціями \tilde{h}_2 , тому можлива їх оцінка для $0 < \tilde{h}_2 < 0.2$ за табулюваними даними. Як видно з таблиці, вплив \tilde{h}_2 є більш помітний для $\tilde{\mu}_1 < 1$ тоді як при $\tilde{\mu}_1 = 1$ різниця $\mu_{11}^*(0.2)$ і $\mu_{11}^*(0)$ складає 2% і є ще меншою для $\tilde{\mu}_{22}^*$.

Таблиця 4.8 Ефективні пружні модулі $\mu_{11}^*(\tilde{h}_2)$ і $\mu_{22}^*(\tilde{h}_2)$ періодичного і випадкового композитів з $c = 0.5$ і $e = 1/3$

$\tilde{\mu}_1$	періодична структура				випадкова структура			
	$\mu_{11}^*(0)$	$\mu_{22}^*(0)$	$\mu_{11}^*(0.2)$	$\mu_{22}^*(0.2)$	$\mu_{11}^*(0)$	$\mu_{22}^*(0)$	$\mu_{11}^*(0.2)$	$\mu_{22}^*(0.2)$
0,0	0,353	0,275	0,835	0,427	0,368	0,143	0,845	0,341

0,25	0,552	0,515	0,975	0,628	0,575	0,466	0,977	0,594
0,5	0,720	0,706	1,100	0,796	0,731	0,690	1,100	0,785
0,75	0,868	0,865	1,212	0,939	0,871	0,862	1,216	0,937
1,0	1,0	1,0	1,314	1,062	1,0	1,0	1,326	1,062
2,0	1,417	1,388	1,646	1,424	1,45	1,369	1,722	1,404
4,0	1,946	1,818	2,085	1,829	2,141	1,741	2,335	1,756
6,0	2,271	2,041	2,364	2,052	2,646	1,940	2,810	1,948
8,0	2,491	2,186	2,557	2,194	3,070	2,073	3,214	2,080
10,0	2,650	2,287	2,700	2,292	3,484	2,128	3,567	2,141

На рис. 4.10 ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$ показано як функцію $\tilde{\mu}_1$. Дані для композитів періодичної і випадкової структур представлено кривими 1 і 2 відповідно. Криві 3 відповідають розрахунку за структурно-нечутливою схемою Максвела. Суцільні криві відповідають $\tilde{h}_2 = 0.2$, штрих-пунктирні подають розв'язок для макрорівня ($\tilde{h}_2 = 0$).

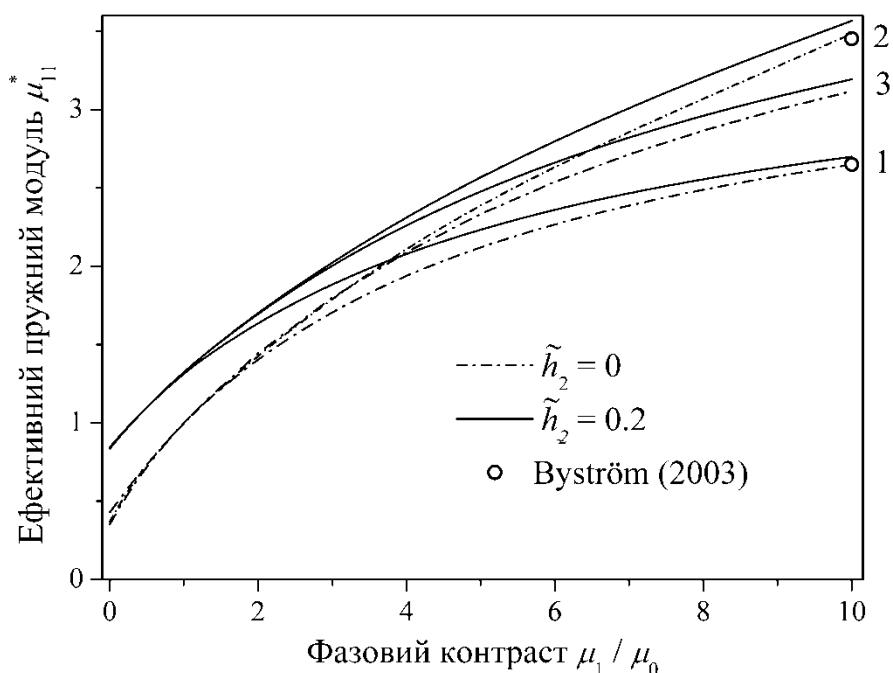


Рис. 4.10. Ефективний пружний модуль $\tilde{\mu}_{11}^*$ як функція $\tilde{\mu}_1$ для $\tilde{h}_2 = 0$ (суцільні криві) і $\tilde{h}_2 = 0.2$ (штрих-пунктирні криві).

Як бачимо, для $0 \leq \tilde{\mu}_1 < 2$ передбачення усіх трьох моделей практично співпадають. При $\tilde{\mu}_1 > 2$ вплив \tilde{h}_2 зменшується і основним фактором стає мікроструктура. Світлі кружки на рис. 4.10 представляють дані для $\tilde{\mu}_1 = 10$ одержані в [49] методом скінчених елементів. Наведені там значення складають $\tilde{\mu}_{11}^* = 2.650$ для періодичного і $\tilde{\mu}_{11}^* = 3.452$ для невпорядкованого композита практично співпадають з одержаними нами значеннями $\tilde{\mu}_{11}^* = 2.650$ для періодичного і $\tilde{\mu}_{11}^* = 3.484$ для невпорядкованого композита з $\tilde{\mu}_1 = 10$ і $\tilde{h}_2 = 0$, див. табл. 4.8. Таке гарне узгодження можна розглядати як додатковий доказ коректності розвинутого методу та точності відповідних чисельних алгоритмів.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вперше в строгій постановці розв'язано задачі визначення напруженого стану та макроскопічних пружних властивостей кусково-однорідних тіл з неідеальними еліптичними границями розділу за антиплоского зсуву.

Основні результати роботи полягають у тому, що:

1. Розвинuto ефективний аналітичний метод розв'язання краївих задач теорії пружності в багатозв'язких областях з еліптичними границями, який базується на принципі суперпозиції, методі комплексних потенціалів та формулах перерозкладу еліптичних гармонік при ортогональному перетворенні координат;

2. В строгій постановці розв'язано задачі про напружене-деформований стан кусково-однорідних тіл зі скінченою множиною та періодичною системою включень еліптичної форми за неідеального механічного контакту на границях розділу. При цьому:

- формулюванням краївих задач в термінах комплексних потенціалів забезпечено уніфікований вигляд розв'язку для неідеальних умов пружного контакту першого і другого роду;

- в результаті точного виконання контактним умов кожну з розглянутих краївих задач зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів мультипольного розкладу виразу для переміщень;

- подано математичне обґрунтування методу, зокрема досліджено асимптотичні властивості коефіцієнтів алгебраїчних систем та доведено можливість їх розв'язання методом редукції.

3. Схеми Максвела і Релея визначення ефективних пружних сталих сформульовано в термінах індукованих дипольних моментів еліптичних включень та запропоновано їх узагальнення на випадок багаточасткових моделей, що дає можливість врахування реальної мікроструктури структурно-

неоднорідного матеріалу, одержано точний вираз для ефективних модулів пружності композиту узагальненої періодичної структури;

4. Здійснено програмну реалізацію методу, проведено чисельний аналіз впливу параметрів структури та умов контакту на границях розділу на концентрацію напружень та ефективні пружні модулі кусково-однорідних тіл.

5. Одержано значний об'єм розрахункових даних та встановлено, що

- в зонах між включеннями має місце значна концентрація напружень, яка залежить від відстані між включеннями, їх форми, властивостей, взаємної орієнтації та способу навантаження;

- недосконалість контакту між матрицею та включеннями обумовлює залежність напруженого стану і макроскопічних пружних властивостей кусково-однорідного тіла від розміру включень, зокрема на нанорівні;

- врахування поверхневих напружень згідно моделі Гуртіна-Мердока усуває сингулярність поля напружень в вершині нескінченно тонкої еліптичної пори;

- ефективні пружні властивості кусково-однорідних тіл є структурно-чутливими параметрами, для періодичних та частково орієнтованих структур має місце анізотропія ефективних властивостей;

- макроскопічна пружність композита при $\tilde{h}_1 \geq 100$ близька до такої за умови ідеального контакту фаз, для $\tilde{h}_1 < 0.1$ близька до пружності пористого тіла.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Браутман, Л., Крок, Р.: Механика композиционных материалов. Композиционные материалы: В 8-и т.; т. 2. Мир, Москва (1978)
2. Ван Фо Фы, Г. А.: Теория армированных материалов. Наукова думка, Киев(1971)
3. Ванин, Г. А.: Микромеханика композиционных материалов. Наукова думка, Киев(1985)
4. Вишневский, К.В., Кушнир, Р.М.: Границные интегральные уравнения для тела с инородными включениями. Мат. методы и физ.–мех. поля. **39** (1), 37–41(1996)
5. Головчан, В.Т.: Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. Наукова думка, Киев (1987)
6. Головчан, В.Т., Гузь, А.Н., Коханенко, Ю.В., Кущ, В.И.: Статика материалов . Механика композитов: в 12 т.; т.1. Наукова думка, Киев(1993)
7. Григолюк, Э.И. Фильшинский, Л.А.: Перфорированные пластины и оболочки .Наука, Москва (1970)
8. Гузь, А.Н.: О решении двумерных и трехмерных задач механики сплошной среды для многосвязных областей. Концентрация напряжений.(2), 54-58, Наукова думка, Киев (1968)
9. Гузь, А.Н.: Механика композитных материалов и элементов конструкций: в 3-х т. Наукова думка, Киев (1982)
10. Гузь, А.Н., Рущицкий, Я.Я., Гузь, И.А.: Введение в механику нанокомпозитов. Ин-т механики им. С.П. Тимошенко, Киев (2010)
11. Гузь, А.Н., Космодамианский, А.А., Шевченко, В.П.: Концентрация напряжений. Механика композитов: в 12 т.;т.7. «А.С.К.»,Киев (1998)

12. Калоеров, С.А., Горянская, Е.С.: Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами. Теорет. и прикладная механика.(25), 45-56(1995)
13. Калоеров, С.А., Авдюшина, Е.В., Мироненко, А.Б.: Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах. Изд-во ДонНУ, Донецк (2013)
14. Канаун, С.К., Левин, В.М.: Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Изд-во ун-та, Петрозаводск(1993)
15. Канторович,Л. В., Крылов,В. И.: Приближенные методы высшего анализа. Физматлит, Москва(1962)
16. Коляно, Ю.М., Кулик, О.М., Кушнір, Р.М.: Про постановку узагальненої задачі спряження для рівнянь термопружності кусково–однорідних тіл. Доповіді АН УРСР. Серія: А.(2), 43–47(1980)
17. Космодамианский, А.С.: Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. Вища школа, Киев (1976)
18. Кристенсен, Р.: Введение в механику композитов. Мир, Москва(1982)
19. Кушнір, Р.М.: Використання методу узагальнених задач спряження в термопружності кусково–однорідних тіл при неідеальному kontaktі. Мат. методи та фіз.–мех. поля.41(1), 108–116 (1998)
20. Кущ, В.І., Майстренко, А.Л., Чернобай, В.С.:Модифікований метод Максвела визначення ефективних сталих структурно-неоднорідних матеріалів. Доповіді НАН України. Серія: Матеріалознавство. (2), 35-41 (2017)
21. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В.: Методы теории функций комплексного переменного. Наука, Москва (1965)
22. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М.: Теория поля. Издание 8-е, стереотипное. Физматлит, Москва (2001)

23. Левин, В.М.: О концентрации напряжений на включениях в композитных материалах. Прикл. математика и механика. **41** (5), 735-743 (1977)
24. Лехницкий, С. Г.: Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, Москва (1951)
25. Малмейстер, А.К., Тамуж, В.П., Тетерс, Г.А.: Сопротивление жестких полимерных материалов. Зинатне, Рига (1980)
26. Мусхелишвили, Н. И.: Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, Москва (1966)
27. Панасюк, В. В.: Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Наукова думка, Киев (1968)
28. Панасюк, В.В., Саврук, М.П., Дацышин, А.П.: Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Наукова думка, Киев (1976)
29. Победря, Б.Е.: Механика композиционных материалов. Изд-во Моск. ун-та, Москва (1984)
30. Побережный, О. В., Кит, Г.С.: Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними. ИФЖ. **15** (4), 703-709 (1968)
31. Подстригач, Я. С., Ломакин, В.А, Коляно, Ю. М.: Термоупругость тел неоднородной структуры. Наука, Москва (1984)
32. Савин, Г. Н.: Распределение напряжений около отверстий. Киев, (1968)
33. Савин, Г.Н., Ван Фо Фы, Г.А.: Распределение напряжений около эллиптического отверстия в пластинке из волокнистых материалов. Прикладная механика. **2** (5), (1966)
34. Саврук, М.П.: Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Наукова думка, Киев (1981)
35. Слободянский, М.Г.: Общие формы решений уравнений теории упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через

- гармонические функции. Прикл.математика и механика. **18** (1), 55-74 (1954)
36. Сулим, Г. Т.: Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Досл.-вид. центр НТШ, Львів (2007)
37. Хорошун, Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред. Прикл. механика.**14** (2), 3-17 (1978)
38. Хорошун, Л.П., Маслов, В.П.: Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов. Наукова думка, Киев (1980)
39. Хорошун, Л. П. и др.: Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Механика композитов: в 12 т.; т.3. Наукова думка, Киев (1993)
40. Шермергор, Т.Д.: Теория упругости микронеоднородных сред. Наука, Москва(1977)
41. Abramovitz, M., Stegun, I.A.: Handbook for mathematical functions. NBS Applied Mathematics Series, vol. 55. Flammarion (1964)
42. Aboudi, J.: Damage in Composites-Modeling of Imperfect Bonding. Composites Science and Technology. (28), 103-128 (1987)
43. Achenbach, J.D., Zhu, H.: Effect of interfacial zone on mechanical behaviour and failure of fibre-reinforced composites. J. Mech. Phys. Solids, (37), 381-393(1989)
44. Bakhvalov, N.S., Panasenko, G.P.: Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials. Kluwer Academic Publishers (1989)

45. Batchelor, G.K.: Transport properties of two-phase materials with random structure. *Annu. Rev. Fluid Mech.* (6), 227-255 (1974)
46. Benveniste, Y.: The effective mechanicsl behaviour of composite materials with imperfect contect between the constituents. *Mechanics of Materials .* (4), 197-208 (1985)
47. Benveniste, Y., Miloh, T.:Imperfect soft and sti ϵ interfaces in two-dimensional elasticity. *Mechanics of Materials.* (33), 309-323 (2001)
48. Budiansky, B.: On the elastic moduli of some heteroheneous materials. *J. Mech. Phys. Solids.* **13** (1), 223-227 (1965)
49. Byström, J.: Influence of the inclusions distribution on the effective properties of heterogeneous media. *Composites: Part B.*(34), 587-592 (2003)
50. Chen, T., Dvorak, G.J., Yu, C.C.: Size-dependent elastic properties of unidirectional nano-composites with interface stresses. *Acta Mechanica.* (188), 39-54 (2007)
51. Cheng, H., Greengard, L.: On the numerical evaluation of electrostatic fields in dense random dispersions of cylinders. *Journal of computational physics.* (136), 629-639 (1997)
52. Deiner, G., Hurrich, A., Weissbarth, J.: Bounds for the non-local effective elastic properties of composites. *J.Mech.Phys. Solids.***32** (1), 21-36 (1984)
53. Deiner, G., Raabe, Ch., Weissbarth, J.: Bounds for the non-local effective properties of random media. *J. Mech. Phys. Solids.* **29** (3), 181 (1981)
54. Dewey, J.M.: The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers. *J. Appl. Phys.* (18), 578 (1947)
55. Duan, H.L., Wang, J., Huang, Z.P, Karihaloo, B.L.: Size dependent effective elastic constants of solids containing nanoinhomogeneities with interface stress. *J. Mech. Phys. Solids.*(53), 1574-1596 (2005)
56. Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J.: A unified scheme for prediction of

- effective moduli of multiphase composites with interface effects: Part I-theoretical framework. *Mechanics of Materials.*(39), 81-93 (2007)
57. Duan, H.L., Yi, X., Huang, Z.P., Wang, J.: A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects: Part II-application and scaling laws. *Mechanics of Materials.*(39), 94-103 (2007)
58. Eshelby, J.D.: The elastic field outside the ellipsoidal inclusion. *Proc. R. Soc. Lond.* (A252), 561-569 (1959)
59. Gao, J.: A circular inclusion with imperfect interface: Eshelby s tensor and related problems. *J .Appl. Mech.* (62), 860-866 (1995)
60. Graham, S., McDowell, D.L.: Numerical analysis of the transverse thermal conductivity of composites with imperfect interfaces. *Journal of Heat Transfer.*(125), 389-393 (2003)
61. Greengard, L.: Fast algorithms for classical physics. *Science,* (265), 909-914(1994)
62. Gurtin, M.E.: *The Linear Theory of Elasticity.* Springer-Verlag. (1972)
63. Gurtin, M.E., Murdoch, A.I.: A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Ration. Mech. Anal.*(57), 291-323 (1975)
64. Gurtin, M.E., Murdoch, A.I.: Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures.*(14), 431-440 (1978)
65. Han, X., Wang, T.: Elastic fields of interacting elliptic inhomogeneities. *International Journal of Solids and Structures.* (36), 3412-3430 (1999)
66. Hashin, Z., Schtrikman, S.: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids.* **11** (2-3), 27 (1963)
67. Hashin, Z.: Analysis of Composite Materials. *J. Appl.Mech.*(50), 481-505 (1983)
68. Hashin, Z.: Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mech. Mater.* (8), 333-348 (1990)

69. Hasselman, D. P. H., Johnson, L. F.: Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance. *J. Comp. Mater.* (21), 508-515 (1987)
70. Hasselman, D.P.H., Donaldson, K.Y., Liu, J., Gauckler,L.J., Ownby,P.D.: Thermal conductivity of a particulate-diamond-reinforced cordierite matrix composite. *J. Amer. Ceram. Soc.* (77), 1757-1760 (1994)
71. Helsing, J., Jonsson, A.: Stress Calculations on Multiply Connected Domains. *Journal of Computational Physics.*(176), 456-482 (2002)
72. Hill, R.A.: A self-consistent mechanics of composite materials.*J. Mech. Phys. Solids.***13**(5), 213-222 (1965)
73. Hori, M., Sia Nemat-Nasser, S.: On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids *Mechanics of Materials.* (31), 667-682 (1999)
74. Jasiuk ,I., Chen, J., Thorpe, M.F.: Elastic Moduli of Composites with Rigid Sliding inclusions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*(40), 373-391(1992)
75. Jun, S., Jasiuk, I.: Elastic Moduli of Two-Dimensional Composites with Sliding inclusions-A Comparison of Effective Medium Theories. *International Journal Solids and Stuctures.*(30),2501-2523 (1993)
76. Kachanov,M.: Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews* (45), 305-336(1992)
77. Kachanov,M., Sevostianov, I.: *Effective Properties of Heterogeneous Materials.* Springer(2013)
78. Kim, C.I., Schiavone, P., Ru, C.-Q.: The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode-III crack: complete solution . *ASME Journal of Applied Mechanics.* (77), 021011-1/7 (2010)
79. Kuo, H.-Y.: Electrostatic interactions of arbitrarily dispersed multicoated elliptic

- cylinders. International Journal of Engineering Science. (48), 370-382 (2010)
80. Kushch, V.I., Sevostianov, I.: Effective elastic properties of the particulate composite with transversely isotropic phases. Int. J. Solids Struct. (41), 885-906 (2004)
 81. Kushch, V.I., Shmegera, S.V., Buryachenko, V.A.: Interacting elliptic inclusions by the method of complex potentials. Int. J. Solids Struct. (42), 5491-5512 (2005)
 82. Kushch, V.I., Shmegera, S.V., Buryachenko, V.A.: Elastic equilibrium of a half plane containing a finite array of elliptic inclusions. Int. J. Solids Struct. (43), 3459-3483 (2006)
 83. Kushch, V.I., Shmegera, S.V., Sevostianov, I.: SIF statistics in micro cracked solid: effect of crack density, orientation and clustering. Int. J. Eng. Sci. (47), 192-208 (2009)
 84. Kushch, V.I., Sevostianov, I., Mishnaevsky, L. Jr.: Effect of crack orientation statistics on effective stiffness of microcracked solid. Int. J. Solids Struct. (46), 1574-1588 (2009)
 85. Kushch, V.I.: Micromechanics of composites: multipole expansion approach. Elsevier (2013)
 86. Kushch, V.I., Mogilevskaya, S.G., Stolarski, H.K., Crouch, S.L.: Evaluation of the effective elastic moduli of particulate composites based on Maxwell's concept of equivalent inhomogeneity: Microstructure-induced anisotropy. Journal of Mechanics of Materials and Structures. (8), 283-303 (2013)
 87. Kushch, V.I., Sevostianov, I.: Dipole moments, property contribution tensors and effective conductivity of anisotropic particulate composites. International Journal of Engineering Science. (74), 15-34 (2014)
 88. Kushch, V.I., Chernobai, V.S.: Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface. International Journal of Solids and Structures. (51), 2529–2538 (2014)

89. Kushch, V.I., Chernobai, V.S., Mishuris, G.S.: Longitudinal shear of elliptic nanofiber composite: local stress and effective stiffness. *International Journal of Engineering Science.* (84), 79–94 (2014)
90. Kushch, V.I., Sevostianov, I., Chernobai ,V.S.: Effective conductivity of composite with imperfect contact between elliptic fibers and matrix: Maxwell's homogenization scheme. *International Journal of Engineering Science.* (83), 146-161 (2014)
91. Kushch, V.I., Sevostianov, I.: Effective elastic moduli of a particulate composite in terms of the dipole moments and property contribution tensors. *International Journal of Solids and Structures.* (53), 1-11 (2015)
92. Kushch, V.I., Knyazeva, A.G.: Finite cluster model and effective conductivity of a composite with non-randomly oriented elliptic inclusions. *Acta Mechanica.* (227), 113-126 (2016)
93. Kushch, V.I., Sevostianov, I.: Maxwell homogenization scheme as a rigorous method of micromechanics: Application to effective conductivity of a composite with spheroidal particles. *International Journal of Engineering Science.* (98), 36-50 (2016)
94. Kushch, V.I.,Sevostianov, I.: The “rigorous” Maxwell homogenization scheme in 2D elasticity: Effective stiffness tensor of composite with elliptic inhomogeneities.*Mechanics of Materials.* (103), 44-54 (2016)
95. Kuster, G.T., Toksöz, M.N.: Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media. I. Theoretical formulations. *Geophysics.* (39), 587-606 (1974)
96. Lu, S.-Y.: Anisotropy in effective conductivities of rectangular arrays of elliptic cylinders. *J. Appl. Phys.* (76), 2641-2647 (1994)
97. Lu, S.-Y., Lin, H.-C.: Effect of interfacial characteristics on effective conductivities of isotropic two-dimensional periodic composites. *Chem. Eng. Sci.* (50), 2611-2631 (1995)
98. Lu, S.-Y., Song, J.-L.: Effect of interfacial characteristics on effective

- conductivities of composites containing randomly distributed aligned long fibers. *Chem. Eng. Sci.*(51), 4393-4404 (1996)
99. Luo, J., Wang, X.: On the anti-plane shear of an elliptic nano inhomogeneity. *Eur. J. Mech. A – Solids.* (28), 926-934 (2009)
100. Maxwell, J.C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon, London (1873)
101. McGlaughlin, R.: A study of the differential scheme for composite materials. *Int. J. Eng. Sci.* (15), 237 (1977)
102. Meissner, M.J. and Kouris, D.A.: Interaction of two elliptic inclusions. *Int. J. Solids Struct.*(32), 451-466 (1995)
103. Miller, R.E., Shenoy, V.B.: Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology.*(11), 139-147 (2000)
104. Mogilevskaya, S.G., Crouch, S.L., La Grotta, A., Stolarski, H.K.: The effects of surface elasticity and surface tension on the transverse overall elastic behavior of unidirectional nanocomposites. *Composites Science and Technology.* (70), 427-434 (2010)
105. Mogilevskaya, S.G., Crouch, S.L., Stolarski, H.K., Benusiglio, A.: Equivalent inhomogeneity method for evaluating the effective elastic properties of unidirectional multi-phase composites with surface/interface effects. *International Journal of Solids and Structures.* (47), 407-418 (2010)
106. Mogilevskaya, S.G., Kushch, V.I., Koroteeva, O., Crouch, S.L.: Equivalent inhomogeneity method for evaluating the effective conductivities of isotropic particulate composites. *Journal of Mechanics of Materials and Structures.*(7), 103-117 (2012)
107. Mogilevskaya, S.G., Stolarski H.K., Crouch, S.L.: On Maxwell's concept of equivalente inhomogeneity: when do the interactions matter? *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.*(60), 391-417(2012)

108. Mori, T., Tanaka, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*. **21** (5), 571 (1973)
109. Mura, T.: *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht (1987)
110. Nemat-Nasser ,S., Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Amsterdam (1999)
111. Nie, S., Basaran, C.: A micromechanical model for effective elastic properties of particulate composites with imperfect interfacial bonds. *International Journal of Solids and Structures.*(42), 4179–4191 (2005)
112. Noda, N.-A., Matsumo, T.: Singular integral equation method for interaction between elliptic inclusions. *ASME J. Appl. Mech.* (65), 310–319(1998)
113. Pagano, N.J., Tandon, G.P.: Modeling of Imperfect bonding in Fiber Reinforced Brittle Matrix Composites. *Mechanics of Materials.*(9),49-64 (1990)
114. Perrins, W.T., McKenzie, D.R., McPhedran, R.C.: Transport properties of regular arrays of cylinders. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A.* Vol. 369, 207-225 (1979)
115. Rayleigh, Lord.: On the influence of obstacles arranged in rectangular order on the properties of a medium. *Philos. Mag.* (E34), 481-502 (1892)
116. Ru, C.Q., Schiavone, P.: On the elliptic inclusion in anti-plane shear. *Math. Mech. Solids.* (1), 327-333 (1996)
117. Ru, C.Q., Schiavone, P.: A circular inclusion with circumferentially inhomogeneous interface in antiplane shear. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*(453), 2551-2572 (1997)
118. Russel, W.B., Acrivos, A.: On the effective moduli of composite materials: slender rigid inclusions at dilute concentrations. *J Appl Math Phys (ZAMP)*. (23), 434-464 (1972)
119. Sangani, A.S., Yao, C.: Bulk thermal conductivity of composites with spherical

- inclusions. *J. Appl. Phys.* (65), 1334-1341 (1988)
120. Sangani, A.S., Mo, G.: Elastic interactions in particulate composite with perfect as well as imperfect interfaces. *J. Mech. Phys. Solids.* (45), 2001-2031 (1997)
121. Sharma, P., Ganti, S.: Interfacial elasticity corrections to size-dependent strain-state of embedded quantum dots. *Phys. Stat. Sol.* (234), 10-12 (2002)
122. Shen, H., Schiavone, P., Ru, C.Q., Mioduchowski, A.: An elliptic inclusion with imperfect interface in anti-plane shear. *Int. J. Solids Struct.* (37), 4557-4575(2000)
123. Sherman, D. I.: On the problem of plane strain in non-homogeneous media. *Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*. Pergamon, Elonsford, NY (1959)
124. Sihvola, A.: Homogenization of a dielectric mixture with anisotropic spheres in anisotropic background. *Electromagnetics.*(17), 269-286 (1997)
125. Tandon, G.P., Weng, G.J.: The effect of aspect ratio of inclusion on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. *Polymer Composites.* (5), 327 (1984)
126. Wang, J., Huang, Z., Duan, H., Yu, S., Feng, X., Wang, G., Zhang, W., Wang, T.: Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica.*(24), 52-82 (2011)
127. Yardley, R.C., McPhedran, J.G., Nicorovici, N.A.: Addition formulas and the Rayleigh identity for arrays of elliptical cylinders. *Phys. Rev., E.*(60), 6068-6080 (1999)
128. Yardley, J.G., Reuben, A.J., McPhedran, R.C.: The transport properties of layers of elliptical cylinreds. *Proc. R. Soc. Lond.* (A457), 395-423 (2001)
129. Zimmerman, R.W.: Effective conductivity of a two-dimensional medium containing elliptical inhomogeneities. *Proceedings of the Royal Society of London.*(A452), 1713-1727 (1996)

ДОДАТОК: Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Kushch, V. I., Chernobai, V. S.: Transverse conductivity and longitudinal shear of elliptic fiber composite with imperfect interface. International Journal of Solids and Structures. (51), 2529-2538 (2014)
2. Kushch, V. I., Sevostianov, I., Chernobai V. S.: Effective conductivity of composite with imperfect contact between elliptic fibers and matrix: Maxwell's homogenization scheme. International Journal of Engineering Science. (83), 146-161 (2014)
3. Kushch, V. I., Mishuris, G. S., Chernobai V. S.: Longitudinal shear of a composite with elliptic nanofibers: local stresses and effective stiffness. International Journal of Engineering Science. (84), 79-94 (2014)
4. Чернобай, В.С., Кущ, В.І.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями за неідеального контакту на поверхнях поділу. Математичні методи та фізико-механічні поля. **59** (4), 72-81 (2016)
5. Чернобай, В.С.: Концентрація напружень на еліптичній нанопорі за антиплоского зсуву. Вісник Київського Національного університету ім. Т.Г. Шевченка, серія "Математика. Механіка". **2** (38), 48-53 (2017)
6. Кущ, В.І., Майстренко, А.Л., Чернобай, В.С.: Модифікований метод Максвела визначення ефективних сталих структурно-неоднорідних матеріалів. Доповіді НАНУ, серія "Матеріалознавство". (2), 35-41 (2017)
7. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла, ослабленого системою нанорозмірних еліптичних пор чи тріщин. В: Збірник наукових праць 5-ї Міжнародної конференції "Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій", Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, 431-436 (2014) доповідь
8. Чернобай, В.С.: Залежність тепlopровідності алмазовмісних композитів від контактного опору міжфазної границі «алмаз-металева звязка». В: Тези доповідей Восьмої конференції молодих вчених «Надтверді композиційні

- матеріали та покриття: отримання, властивості та застосування», Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, Київ (2014) доповідь
9. Chernobai, V.S., Bieliaiev, A.I.: Modeling the thermal conductivity of diamond composites. В: Тези Міжнародної конференції PRO-TECH-MA, Bezmiechowa, Poland (2016) заочна
10. Чернобай, В.С.: Модифікований метод Максвела визначення ефективної провідності композитів з урахуванням мікроструктури. В: Тези доповідей Дев'ятої конференції молодих вчених та спеціалістів, Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України, Київ (2016) доповідь
11. Чернобай, В.С.: Антиплоский зсув пружного тіла з еліптичними включеннями при неідеальному kontaktі фаз. В: Abstracts of conference reports XVIII International Conference "Dynamical System Modeling and Stability Investigations" (DSMSI-2017), Київ (2017) доповідь
12. Чернобай, В.С. Модифікований метод Максвела визначення ефективної тепlopровідності композитних волокнистих матеріалів. В: Матеріали конференції КМН–2017, Львів (2017) доповідь