Algorytmy Numeryczne - Zadanie 1

Aleksander Szewczak, 246749
Informatyka, III rok

14 października 2018

Zadanie **Sumowanie szeregów potęgowych** polega na obliczaniu wartości funkcji $\operatorname{arc\,tg}(x) \cdot \ln(x+1)$ na cztery różne sposoby:

- sumując elementy szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od początku,
- sumując elementy szeregu potęgowego obliczane bezpośrednio ze wzoru Taylora w kolejności od końca,
- sumując elementy szeregu potęgowego od początku ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego,
- sumując elementy szeregu potęgowego od końca ale obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego.

Otrzymane wyniki porównałem z wynikami otrzymanymi z bibliotecznych funkcji wbudowanych. Do obliczenia funkcji $\operatorname{arc\,tg}(x)$ skorzystałem z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \quad (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

oraz do obliczenia funkcji $\ln(x+1)$ skorzystałem z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \quad (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

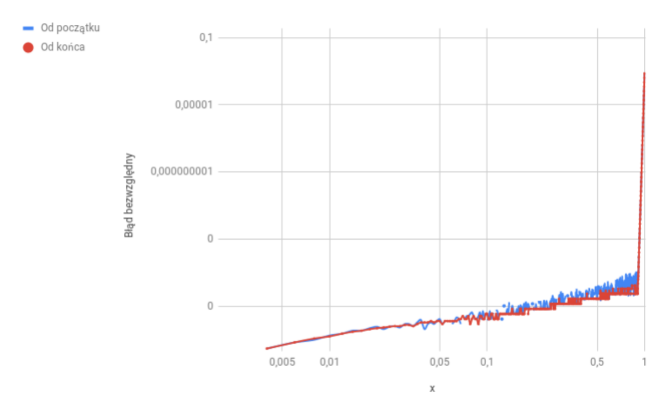
Do obliczenia funkcji $\ln(x+1)$ obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego skorzystałem z:

$$a_{n+1} = \frac{-ax(n-1)}{n}$$

Do obliczenia funkcji $\operatorname{arc\,tg}(x)$ obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego skorzystałem z:

$$a_{n+1} = \frac{-ax^2(n-2)}{n}$$

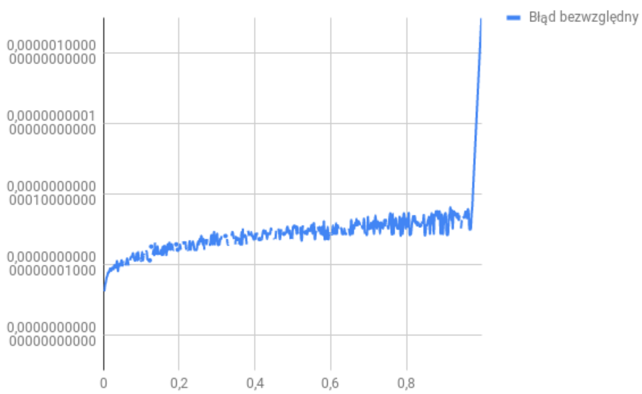
Hipoteza 1: Sumowanie od końca daje dokładniejsze wyniki niż sumowanie od początku



Rysunek 1: Wykres porównujący błędy bezwzględne

Jak można zauważyć na powyższym wykresie, sumowanie od końca ma mniejszy błąd bezwzględny niż sumowanie od początku, więc daje dokładniejsze wyniki, co potwierdza założenie hipotezy.

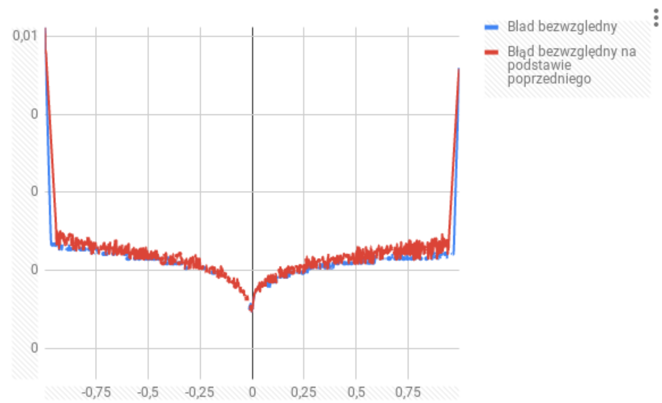
Hipoteza 2: używając rozwinięcia wokół 0 (szereg MacLaurina), przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy przy małych argumentach.



Rysunek 2: Wykres porównujący błędy o ilości argumentów 10 i 300

Jak można zauważyć na powyższym wykresie, błędy maleją wtedy gdy argumenty maleją, a gdy argumenty są większe, błędy również - więc przy tej samej liczbie składników szeregu dokładniejsze wyniki uzyskujemy przy małych argumentach, co potwierdza założenie hipotezy.

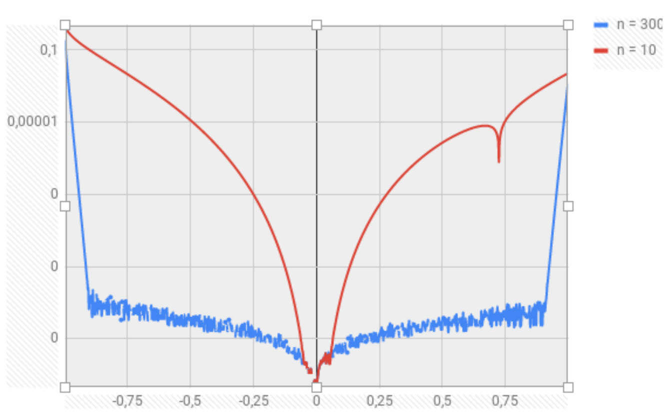
Hipoteza 3: sumowanie elementów obliczanych na podstawie poprzedniego daje dokładniejsze wyniki niż obliczanych bezpośrednio ze wzoru.



Rysunek 3: Wykres porównujący błędy obliczane bezpośrednio ze wzoru i błędy obliczając kolejny wyraz szeregu na podstawie poprzedniego

Jak można zauważyć na powyższym wykresie, błędy w dużej mierze pokrywają się, ale są miejsca gdzie błąd bezwzględny obliczany bezpośrednio ze wzoru jest mniejszy, co pokazuje, że hipoteza jest nieprawdziwa.

Q1: Jak zależy dokładność obliczeń (błąd) od liczby sumowanych składników?
Jak można zauważyć na poniższym wykresie, błąd maleje, jeżeli liczba sumowanych składników jest większa. Dla przykładu wziąłem liczby składników 10 oraz 300 i widać, że dla liczby 10 błędy są dużo większe niż dla 300.



Rysunek 4: Wykres porównujący błędy na podstawie liczby składników