

Ієрархічні матриці у методі граничних елементів

Солук Олена

Львівський національний університет імені І.Франка

Зміст

1. Кластерне дерево і блочне кластерне дерево.
2. Умова допустимості.
3. Означення \mathcal{H} -матриці.
4. Модельна задача ВЕМ.
5. Побудова \mathcal{H} -матриці (n-вимірний простір).
6. Задача Діріхле для рівняння Лапласа.

Кластерне дерево

Означення

Дерево \mathbb{T}_I називається кластерне дерево над множиною індексів I з $root(\mathbb{T}_I) = I$, якщо наступні умови виконуються:

- $I \in V$ є коренем \mathbb{T}_I і $\forall v \in V, v \neq \emptyset \Rightarrow v \subseteq I$.
- Якщо $v \in V$ не є листком ($S(v) \neq \emptyset$), то він рівний об'єднанню своїх синів, тобто $v = \bigcup_{w \in S(v)} w$.

Блочные кластерные деревья

Означення

Нехай \mathbb{T}_I і \mathbb{T}_J - кластерні дерева над множинами індексів I та J відповідно. Кластерне дерево $\mathbb{T}_{I \times J} = \mathbb{T}_{\mathbb{T}_I \times \mathbb{T}_J} = (V, E)$ називається блочне кластерне дерево над добутком множини індексів $I \times J$, якщо $\forall v \in V$ виконуються наступні умови:

- $\mathbb{T}_{I \times J}^{(0)} = I \times J$
- Якщо $v \in \mathbb{T}_{I \times J}^{(l)}$, то існують $\tau \in \mathbb{T}_I^{(l)}$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J^{(l)}$ такі, що $v = \tau \times \sigma$.
- Для синів $v = \tau \times \sigma$, де $\tau \in \mathbb{T}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J$ виконується

$$S(v) = \begin{cases} \emptyset, & \text{якщо } S(\tau) = \emptyset \text{ або } S(\sigma) = \emptyset \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S(\tau), \sigma' \in S(\sigma)\}, & \text{інакше} \end{cases}$$

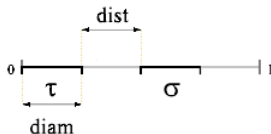
Умова допустимості

Стандартна умова допустимості

Блок $b = \tau \times \sigma$ задовольняє стандартину умову допустимості, якщо

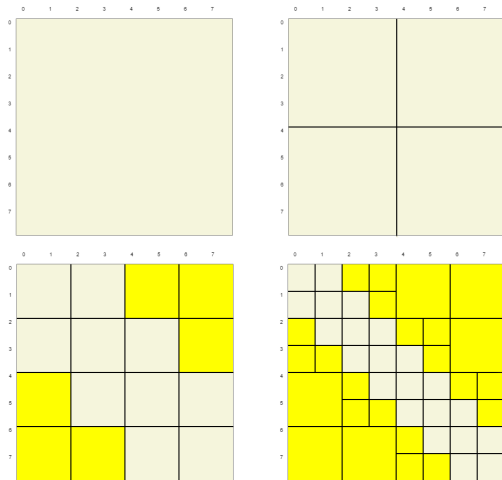
$$Adm(b) = true \Leftrightarrow \min(diam(\Omega_\tau), diam(\Omega_\sigma)) \leq \cdot dist(\Omega_\tau, \Omega_\sigma)$$

Для одновимірної проблеми:



$$diam(\tau) \leq dist(\tau, \sigma)$$

Приклад побудови блочного кластерного дерева



Означення \mathcal{H} -матриці

Означення

Нехай $\mathbb{T}_{I \times I}$ - блочне кластерне дерево над множиною індексів I .
Означаємо множину \mathcal{H} -матриць як

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_{I \times I}, k) := \{M \in \mathbb{R}^{I \times I} \mid \text{rank}(M|_{t \times s}) \leq k \text{ для всіх} \\ \text{допустимих листків } t \times s \text{ дерева } \mathbb{T}_{I \times I}\}$$

Метод граничних елементів

Нехай задано функцію $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Шукаємо функцію $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовільняє наступне інтегральне рівняння:

$$\int_0^1 \ln |x - y| u(y) dy = F(x), x \in [0, 1] \quad (1)$$

Метод Гальоркіна

$$V_n = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}\}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln |x - y| u(y) dy dx = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx \quad (2)$$

Потрібно знайти u_n в просторі V_n :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \varphi_j \quad (3)$$

таке, що вектор коефіцієнтів u є розв'язком лінійної системи

$$Gu = f$$

$$G_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln |x - y| \varphi_j(y) dy dx \quad (4)$$

$$f_i = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx$$

Базисні функції визначені як

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Шукаємо наближену матрицю \tilde{G} . Для цього заміняємо ядро $g(x, y) = \ln |x - y|$ на розкладене ядро

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x) h_v(y) \quad (5)$$

Будуємо локальні наближення на підобластях $[0, 1] \times [0, 1]$, де g є гладкою: $\tau := [a, b]$, $\sigma := [c, d]$, $\tau \times \sigma \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$.

Геометрична бісекція

Ділимо множину індексів $\hat{t} \in I$, що відповідає кластеру t . Для кожного індекса $i \in \hat{t}$, що відповідає точці $x_i \in \mathbb{R}^n$ можемо визначити

$$a_l := \min\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

$$b_l := \max\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

для кожного $l \in \{1, \dots, n\}$.

Таким чином всі точки знаходяться в паралельній осі коробці $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Обмежувальні коробки

Якщо $Q_t = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ і $Q_s = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n]$, то діаметр і відстань рахуємо за наступними формулами

$$\text{diam}(Q_t) = \left(\sum_{l=1}^n (b_l - a_l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{diam}(Q_s) = \left(\sum_{l=1}^n (d_l - c_l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{dist}(Q_t, Q_s) = \left(\sum_{l=1}^n \text{dist}([a_l, b_l], [c_l, d_l])^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Внутрішня задача Діріхле

Знайти $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega$$

$$u = f \text{ на } \Gamma$$

де $f \in C(\Gamma)$ - задана.

Потенціал простого шару

$$\Upsilon_{slp}[u](x) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log(|x - y|) u(y) dy$$

Інтерполяція

Внаслідок інтерпрляції отримуємо

$$\tilde{g}(x, y) := \sum_{v \in K} g(x_v, y) \mathcal{L}_v(x)$$

Відповідні матриці визначені наступним чином

$$A_{iv} := \int_{\Omega} \varphi_i(x) \mathcal{L}_v(x) dx$$

$$B_{jv} := \int_{\Omega} \varphi_j(x) \tilde{g}(x_v, y) dy$$

Дякую за увагу!