Ієрархічні матриці у методі граничних елементів

Солук Олена

Львівський національний університет імені І.Франка

Зміст

1. Кластерне дерево і блочне кластерне дерево.
2. Умова допустимості.
3. Означення $\mathcal{H}$-матриці.
4. Модельна задача BEM.
5. Побудова $\mathcal{H}$-матриці(n-вимірний простір).
6. Задача Діріхле для рівняння Лапласа.

Кластерне дерево

Означення

Дерево $\mathbb{T}_I$ називається кластерне дерево над множиною індексів I з $root(\mathbb{T}_I) = I$, якщо наступні умови виконуються:

- $I \in V$ є коренем $\mathbb{T}_I$ і $\forall v \in V, v \neq \emptyset \Rightarrow v \subseteq I$.
- Якщо $v \in V$ не є листком $(S(v) \neq \emptyset)$, то він рівний об'єднанню своїх синів, тобто $v = \bigcup_{w \in S(v)} w$.

Блочне кластерне дерево

Означення

Нехай $\mathbb{T}_I$ і $\mathbb{T}_J$ - кластерні дерева над множинами індексів I та J відповідно. Кластерне дерево $\mathbb{T}_{I\times J} = \mathbb{T}_{\mathbb{T}_I \times \mathbb{T}_J} = (V, E)$ називається блочне кластерне дерево над добутком множини індексів $I \times J$, якщо $\forall v \in V$ виконуються наступні умови:

- $\mathbb{T}^{(0)}_{I\times J} = I \times J$
- Якщо $v \in \mathbb{T}^{(l)}_{I\times J}$, то існують $\tau \in \mathbb{T}^{(l)}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}^{(l)}_J$ такі, що $v = \tau \times \sigma$.
- Для синів $v = \tau \times \sigma$, де $\tau \in \mathbb{T}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J$ виконується S(v)=$\begin{cases} \emptyset, \text{якщо } S(\tau) = \emptyset \text{ або } S(\sigma) = \emptyset \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S(\tau), \sigma' \in S(\sigma)\}, \text{інакше} \end{cases}$

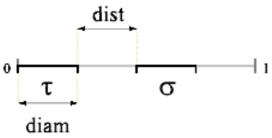
Умова допустимості

Стандартна умова допустимості

Блок $b = \tau \times \sigma$ задовольняє стандартину умову допустимості, якщо

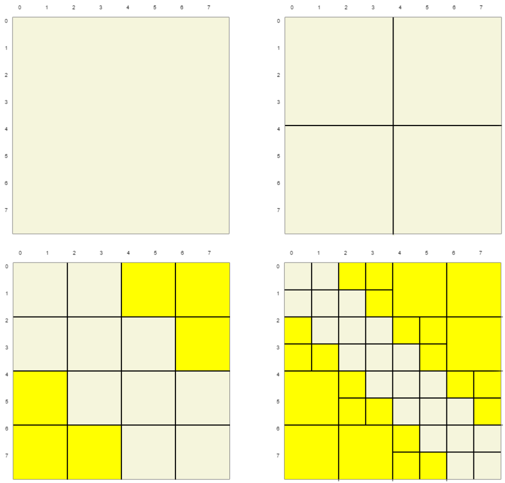
$$Adm(b) = true \Leftrightarrow min(diam(\Omega_\tau), diam(\Omega_\sigma)) \leq \cdot dist(\Omega_\tau, \Omega_\sigma)$$

Для одновимірної проблеми:



$$diam(\tau) \leq dist(\tau, \sigma)$$

Приклад побудови блочного кластерного дерева



Означення $\mathcal{H}$-матриці

Означення

Нехай $\mathbb{T}_{I\times I}$ - блочне кластерне дерево над множиною індексів I. Означаємо множину $\mathcal{H}$-матриць як

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_{I\times I}, k) := \{M \in \mathbb{R}^{I\times I} | rank(M|_{t\times s}) \leq k \text{ для всіх}$$

$$\text{допустимих листків } t \times s \text{ дерева } \mathbb{T}_{I\times I}\}$$

Метод граничних елементів

Нехай задано функцію $F : [0,1] \to \mathbb{R}$. Шукаємо функцію $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, яка задовільняє наступне інтегральне рівняння:

$$\int_0^1 \ln|x-y|u(y)dy = F(x), x \in [0,1] \tag{1}$$

Метод Гальоркіна

$V_n = span\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y|u(y)dydx = \int_0^1 \varphi_i(x)F(x)dx \tag{2}$$

Потрібно знайти u_n в просторі V_n:

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \varphi_j \tag{3}$$

таке, що вектор коефіцієнтів u є розв'язком лінійної системи

$$Gu = f$$

$$G_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y| \varphi_j(y) dy dx \tag{4}$$

$$f_i = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx$$

Базисні функції визначені як

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Шукаємо наближену матрицю $\tilde{G}$. Для цього заміняємо ядро $g(x,y) = \ln|x-y|$ на розкладене ядро

$$\tilde{g}(x,y) = \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x) h_v(y) \tag{5}$$

Будуємо локальні наближення на підобластях $[0,1] \times [0,1]$, де g є гладкою: $\tau := [a,b]$, $\sigma := [c,d]$, $\tau \times \sigma \subset [0,1] \times [0,1]$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$.

Геометрична бісекція

Ділимо множину індексів $\hat{t} \in I$, що відповідає кластеру t. Для кожного індекса $i \in \hat{t}$, що відповідає точці $x_i \in \mathbb{R}^n$ можемо визначити

$$a_l := \min\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

$$b_l := \max\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

для кожного $l \in \{1, ..., n\}$.
Таким чином всі точки знаходяться в паралельній осі коробці $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$.

Обмежувальні коробки

Якщо $Q_t = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ і $Q_s = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$, то діаметр і відстань рахуємо за наступними формулами

$$diam(Q_t) = \left(\sum_{l=1}^{n} (b_l - a_l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$diam(Q_s) = \left(\sum_{l=1}^{n} (d_l - c_l)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dist(Q_t, Q_s) = \left(\sum_{l=1}^{n} dist([a_l, b_l], [c_l, d_l])^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Внутрішня задача Діріхле

Знайти $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

$$\triangle u = 0 \text{ в } \Omega$$

$$u = f \text{ на } \Gamma$$

де $f \in C(\Gamma)$ - задана.

Потенціал простого шару

$$\Upsilon_{slp}[u](x) := -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log(|x - y|) u(y) dy$$

Інтерполяція

Внаслідок інтерпрляції отримуємо

$$\tilde{g}(x, y) := \sum_{v \in K} g(x_v, y)\mathcal{L}_v(x)$$

Відповідні матриці визначені наступним чином

$$A_{iv} := \int_{\Omega} \varphi_i(x)\mathcal{L}_v(x)dx$$

$$B_{jv} := \int_{\Omega} \varphi_j(x)\tilde{g}(x_v, y)dy$$

Дякую за увагу!