Ієрархічні матриці

Солук Олена

Львівський національний університет імені І.Франка

Зміст

Cluster Tree

Означення

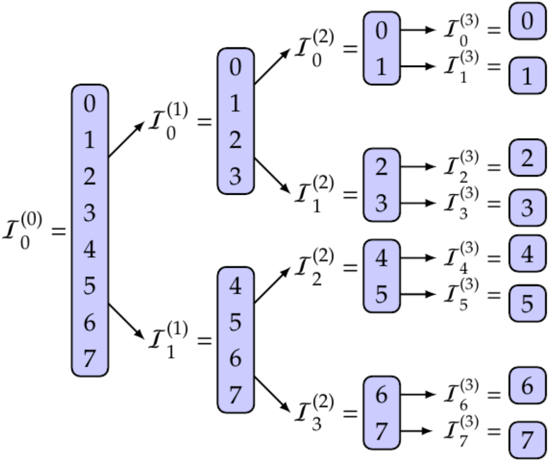
Дерево $\mathbb{T}_I$ називається cluster tree над множиною індексів I з $root(\mathbb{T}_I) = I$, якщо наступні умови виконуються:

- $I \in V$ є коренем $\mathbb{T}_I$ і $\forall v \in V, v \neq \emptyset \Rightarrow v \subseteq I$.
- Якщо $v \in V$ не є листком $(S(v) \neq \emptyset)$, то він рівний об'єднанню своїх синів, тобто $v = \bigcup_{w \in S(v)} w$.

$v \in V$ називають кластером.

В одновимірному випадку cluster tree - збалансоване бінарне дерево.

Приклад побудови cluster tree



Block Cluster Tree

Означення

Нехай $\mathbb{T}_I$ і $\mathbb{T}_J$ - cluster trees над множинами індексів I та J відповідно. Cluster tree $\mathbb{T}_{I\times J} = \mathbb{T}_{\mathbb{T}_I\times\mathbb{T}_J} = (V, E)$ називається block cluster tree над добутком множини індексів $I \times J$, якщо $\forall v \in V$ виконуються наступні умови:

- $\mathbb{T}_{I\times J}^{(0)} = I \times J$
- Якщо $v \in \mathbb{T}_{I\times J}^{(l)}$, то існують $\tau \in \mathbb{T}_I^{(l)}$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J^{(l)}$ такі, що $v = \tau \times \sigma$.
- Для синів $v = \tau \times \sigma$, де $\tau \in \mathbb{T}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J$ виконується

$$\mathrm{S(v)}=\begin{cases}\emptyset,\text{якщо } S(\tau) = \emptyset \text{ або } S(\sigma) = \emptyset \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S(\tau), \sigma' \in S(\sigma)\},\text{інакше}\end{cases}$$

Умова допустимості

Означення

Умова допустимості є булівською функцією

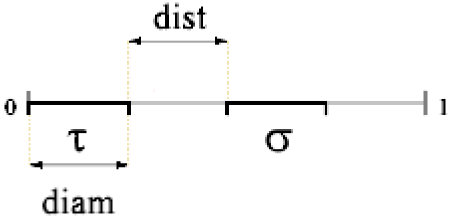
$$Adm : \mathbb{T}_{I\times J} \to \{true, false\}$$

для якої виконуються умови

$$Adm(b) \Rightarrow Adm(b'), \quad \text{для всіх синів } b' \subseteq b \in \mathbb{T}_{I\times J}$$

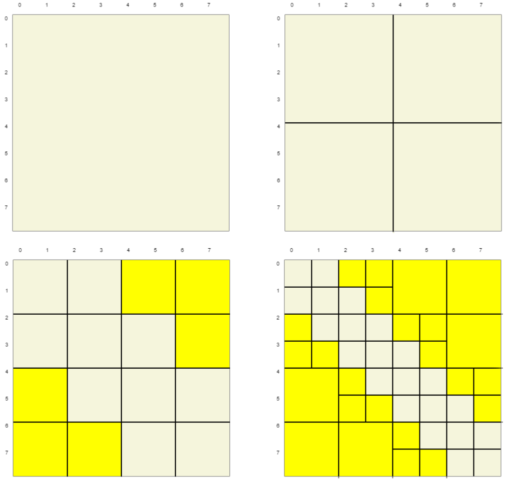
$$Adm(b) = true, \quad \text{для всіх листків } b \in \mathbb{T}_{I\times J}$$

В подальшому для одновимірної проблеми ми будемо використовувати стандартну умову допустимості в такому вигляді



$$diam(\tau) \le dist(\tau, \sigma)$$

Приклад побудови block cluster tree



Означення $\mathcal{H}$-матриці

Означення

Нехай $\mathbb{T}_{I\times I}$ - block cluster tree над множиною індексів I.
Означаємо множину $\mathcal{H}$-матриць як

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_{I\times I}, k) := \{M \in \mathbb{R}^{I\times I} | rank(M|_{t\times s}) \leq k \text{ для всіх}$$

$$\text{допустимих листків } t \times s \text{ дерева } \mathbb{T}_{I\times I}\}$$

BEM

Нехай задано функцію $F : [0,1] \to \mathbb{R}$. Шукаємо функцію $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, яка задовільняє наступне інтегральне рівняння:

$$\int_0^1 \ln|x-y|u(y)dy = F(x), x \in [0,1] \qquad (1)$$

де $g(x,y) = \ln|x-y|$ називається ядром інтегрального рівняння

Метод Гальоркіна

$V_n = span\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y|u(y)dydx = \int_0^1 \varphi_i(x)F(x)dx \qquad (2)$$

Потрібно знайти u_n в просторі V_n:

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \varphi_j \tag{3}$$

таке, що вектор коефіцієнтів u є розв'язком лінійної системи

$$Gu = f$$

$$G_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x - y| \varphi_j(y) dy dx \tag{4}$$

$$f_i = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx$$

Базисні функції визначені як

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Шукаємо наближену матрицю $\tilde{G}$. Для цього заміняємо ядро $g(x, y) = \ln|x - y|$ на розкладене ядро

$$\tilde{g}(x, y) = \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x) h_v(y) \tag{5}$$

Будуємо локальні наближення на підобластях $[0, 1] \times [0, 1]$, де g є гладкою: $\tau := [a, b]$, $\sigma := [c, d]$, $\tau \times \sigma \subset [0, 1] \times [0, 1]$, $\tau \cap \sigma = \emptyset$. $x_0 := (a + b)/2$

Наближення низького рангу блоків матриці

$$\tilde{G}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x)\tilde{g}(x,y)\varphi_j(y)dydx =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x)h_v(y)\varphi_j(y)dydx$$

$$= \sum_{v=0}^{k-1} (\int_0^1 \varphi_i(x)g_v(x)dx)(\int_0^1 \varphi_j(y)h_v(y)dy)$$

Факторизований вигляд підматриці

$$G|_{t\times s} = AB^{\top}, \quad A \in \mathbb{R}^{t\times\{0,\ldots,k-1\}}, \quad B \in \mathbb{R}^{s\times\{0,\ldots,k-1\}}$$

$$A_{iv} := \int_0^1 \varphi_i(x)g_v(x)dx, \quad B_{jv} := \int_0^1 \varphi_j(y)h_v(y)dy \tag{5}$$

Програмна репрезентація $\mathcal{H}$-матриці.

Недопустимі листки

$$\tilde{G}_{ij} := \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y| \varphi_j(y) dydx$$
$$= \int_{i/n}^{(i+1)/n} \int_{j/n}^{(j+1)/n} ln|x-y| dydx$$

Репрезентація fullmatrix

Кажуть, що матриця M розмірності $n \times m$ зберігається у вигляді fullmatrix, якщо її елементи M_{ij} зберігаються як дійсні числа у масиві довжиною mn в стовпцевому порядку

$$M_{11}, \ldots, M_{n1}, M_{12}, \ldots, M_{n2}, \ldots, M_{1m}, \ldots, M_{nm}$$

Допустимі листки

$$\tilde{G}|_{t\times s} := AB^\top$$

$$A_{iv} := \int_{i/n}^{(i+1)/n} (x - x_0)^v dx$$

$$B_{jv} := \begin{cases} (-1)^{v+1} v^{-1} \int_{j/n}^{(j+1)/n} (x_0 - y)^{-v} dy, & \text{якщо } v > 0 \\ \int_{j/n}^{(j+1)/n} \ln|x_0 - y| dy, & \text{якщо } v = 0 \end{cases}$$

Репрезентація rkmatrix

Кажуть, що матриця M розмірності $n \times m$ найбільшого рангу k зберігається у вигляді rkmatrix, якщо вона зберігається у факторизованій формі $M = AB^\top$, де обидві матриці $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ і $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ зберігаються як масиви (в стовпцевому порядку).

Репрезентація $\mathcal{H}$-матриці

Нехай $\mathbb{T}_{I \times I}$ - block cluster tree над множиною індексів I. Кажуть, що матриця $M \in \mathcal{H}(\mathbb{T}_{I \times I}, k)$ зберігається в $\mathcal{H}$-matrix репрезентації, якщо підматриці, що відповідають недопустимим листкам, зберігаються у вигляді fullmatrix, а ті, що відповідають допустимим листкам - у вигляді rkmatrix.

```
public class Supermatrix
    {
        public int rows;
        public int cols;
        public int blockrows;
        public int blockcols;
        public Rkmatrix r;
        public Fullmatrix f;
        public Supermatrix[,] s;
    }
```

Дякую за увагу!