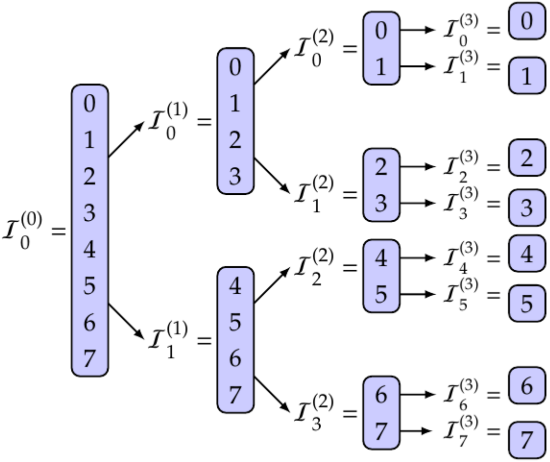
Ієрархічні матриці у методі граничних елементів

Солук Олена

Львівський національний університет імені І.Франка

Зміст

Кластерне дерево



Block Cluster Tree

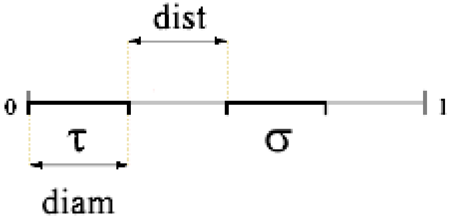
Означення

Нехай $\mathbb{T}_I$ і $\mathbb{T}_J$ - кластерні дерева над множинами індексів I та J відповідно. Кластерне дерево $\mathbb{T}_{I\times J} = \mathbb{T}_{\mathbb{T}_I \times \mathbb{T}_J} = (V, E)$ називається блочне кластерне дерево над добутком множини індексів $I \times J$, якщо $\forall v \in V$ виконуються наступні умови:

- $\mathbb{T}^{(0)}_{I\times J} = I \times J$
- Якщо $v \in \mathbb{T}^{(l)}_{I\times J}$, то існують $\tau \in \mathbb{T}^{(l)}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}^{(l)}_J$ такі, що $v = \tau \times \sigma$.
- Для синів $v = \tau \times \sigma$, де $\tau \in \mathbb{T}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J$ виконується
  $$S(v) = \begin{cases} \emptyset, \text{якщо } S(\tau) = \emptyset \text{ або } S(\sigma) = \emptyset \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S(\tau), \sigma' \in S(\sigma)\}, \text{інакше} \end{cases}$$

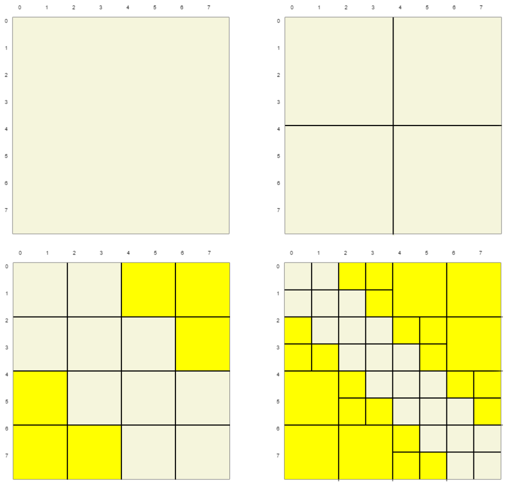
Умова допустимості

Ми будемо використовувати стандартну умову допустимості в такому вигляді



$$diam(\tau) \leq dist(\tau, \sigma)$$

Приклад побудови блочного кластерного дерева



Означення $\mathcal{H}$-матриці

Означення

Нехай $\mathbb{T}_{I\times I}$ - блочне кластерне дерево над множиною індексів I. Означаємо множину $\mathcal{H}$-матриць як

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_{I\times I}, k) := \{M \in \mathbb{R}^{I\times I} | rank(M|_{t\times s}) \leq k \text{ для всіх}$$

$$\text{допустимих листків } t \times s \text{ дерева } \mathbb{T}_{I\times I}\}$$

Модельна задача

Нехай задано функцію $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Шукаємо функцію $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, яка задовільняє наступне інтегральне рівняння:

$$\int_0^1 \ln|x-y| u(y) dy = F(x), x \in [0, 1] \quad (1)$$

де $g(x, y) = \ln|x-y|$ називається ядром інтегрального рівняння

Метод Гальоркіна

$V_n = span\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}\}$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y| u(y) dy dx = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx \quad (2)$$

Потрібно знайти u_n в просторі V_n:

$$u_n = \sum_{j=0}^{n-1} u_j \varphi_j \tag{3}$$

таке, що вектор коефіцієнтів u є розв'язком лінійної системи

$$Gu = f$$

$$G_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x - y| \varphi_j(y) dy dx \tag{4}$$

$$f_i = \int_0^1 \varphi_i(x) F(x) dx$$

Базисні функції визначені як

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{i}{n} \leq x < \frac{i+1}{n} \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$\tilde{G}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x)\tilde{g}(x,y)\varphi_j(y)dydx =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x)h_v(y)\varphi_j(y)dydx$$

$$= \sum_{v=0}^{k-1} (\int_0^1 \varphi_i(x)g_v(x)dx)(\int_0^1 \varphi_j(y)h_v(y)dy)$$

Наближення низького рангу блоків матриці

$$\tilde{G}_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x)\tilde{g}(x,y)\varphi_j(y)dydx =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \sum_{v=0}^{k-1} g_v(x)h_v(y)\varphi_j(y)dydx$$

$$= \sum_{v=0}^{k-1} (\int_0^1 \varphi_i(x)g_v(x)dx)(\int_0^1 \varphi_j(y)h_v(y)dy)$$

Факторизований вигляд підматриці

$$G|_{t\times s} = AB^\top, \quad A \in \mathbb{R}^{t\times\{0,\dots,k-1\}}, \quad B \in \mathbb{R}^{s\times\{0,\dots,k-1\}}$$

$$A_{iv} := \int_0^1 \varphi_i(x)g_v(x)dx, \quad B_{jv} := \int_0^1 \varphi_j(y)h_v(y)dy \tag{5}$$

Недопустимі листки

$$\tilde{G}_{ij} := \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x) \ln|x-y| \varphi_j(y) dydx$$
$$= \int_{i/n}^{(i+1)/n} \int_{j/n}^{(j+1)/n} ln|x-y|dydx$$

Допустимі листки

$$\tilde{G}|_{t\times s} := AB^\top$$
$$A_{iv} := \int_{i/n}^{(i+1)/n} (x-x_0)^v dx$$
$$B_{jv} := \begin{cases} (-1)^{v+1} v^{-1} \int_{j/n}^{(j+1)/n} (x_0-y)^{-v} dy, & \text{якщо } v > 0 \\ \int_{j/n}^{(j+1)/n} \ln|x_0-y| dy, & \text{якщо } v = 0 \end{cases}$$

Чисельні експерименти

Приклад 1

$$\int_0^1 \log|x-y|u(y)dy = \frac{2x^2\log|x| - 2\log|x-1|(x^2-1) - 2x - 1}{4}$$

$$u^*(x) = x$$

n \ k	1	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{4}$	n
4	0.142393	0.142393	0.1423937	0.1423937	0.1423937
16	0.035737	0.0357365	0.0357365	0.0357365	0.0357365
64	0.00894708	0.00894237	0.00894237	0.00894237	0.00894237
256	0.0022506	0.00223609	0.00223609	0.00223609	0.00223609
1024	7.7118E-4	5.590532E-4	5.59053E-4	5.59053E-4	5.5905321665E-4

Приклад 2

$$\int_0^1 \log|x-y|u(y)dy = -\frac{(12x^3-18x^2)\ln(|x|) - 12\ln(|x-1|)x^3 +}{36}$$

$$\frac{+(18\ln(|x-1|)-12)x^2 + 12x - 6\ln(|x-1|)+5}{36}$$

$$u^*(x) = x(1-x)$$

n \ k	1	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{4}$	n
4	0.09689281	0.09689281	0.09689281	0.09689281	0.09689281
16	0.03246286	0.032463147	0.032463147	0.03246314722	0.03246314722
64	0.00873409	0.008736689	0.008736689	0.008736689	0.008736689
256	0.002215192	0.0022232	0.0022232	00.0022232047	0.00222320
1024	5.40425E-4	5.58247E-4	5.58247E-4	5.582473E-4	5.582473E-4

Приклад 3

$$\int_0^1 \log|x-y|u(y)dy = x\log|x| + (1-x)\log|1-x| - 1$$

$$u^*(x) = 1$$

n \ k	1	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{3n}{4}$	n
4	8.881784E-16	8.881784E-16	8.8818E-16	8.8818E-16	8.8818E-16
16	1.99770E-6	2.02060E-14	2.020606E-14	2.020606E-14	2.042810E-14
64	1.9708842E-5	4.993783E-13	4.9938E-13	4.993783E-13	5.140338E-13
256	7.34135E-5	1.18067E-11	1.18067E-11	1.18067E-11	1.176681E-11
1024	2.3177027E-4	2.04782E-10	1.98478E-10	1.9847878E-10	2.00121E-10

Дякую за увагу!