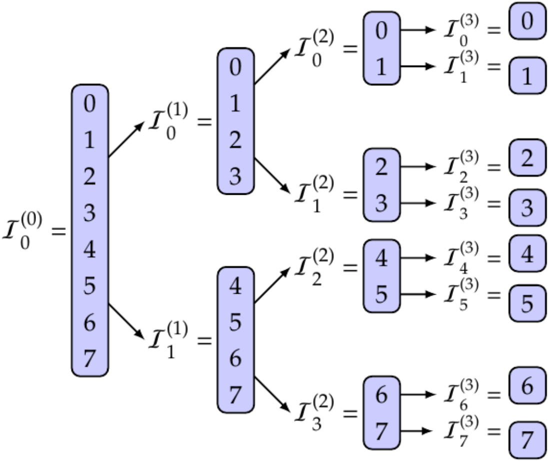
Реалізація алгоритму розв'язування інтегральних рівнянь та задачі Діріхле для рівняння Лапласа використовуючи ієрархічні матриці

Солук Олена

Львівський національний університет імені І.Франка

Кластерне дерево



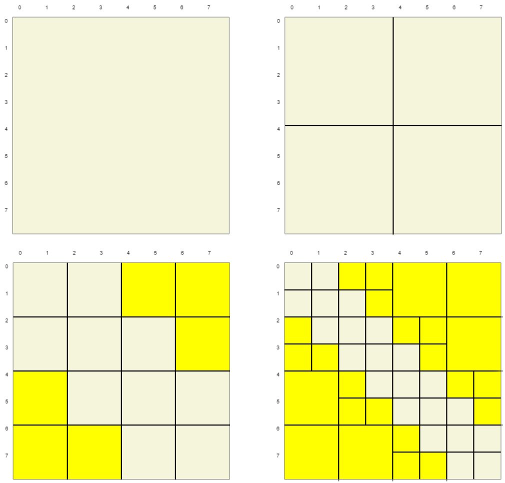
Блочне кластерне дерево

Означення

Нехай $\mathbb{T}_I$ і $\mathbb{T}_J$ - кластерні дерева над множинами індексів I та J відповідно. Кластерне дерево $\mathbb{T}_{I\times J} = \mathbb{T}_{\mathbb{T}_I \times \mathbb{T}_J} = (V, E)$ називається блочним кластерним деревом над добутком множини індексів $I \times J$, якщо $\forall v \in V$ виконуються наступні умови:

- $\mathbb{T}^{(0)}_{I\times J} = I \times J$
- Якщо $v \in \mathbb{T}^{(l)}_{I\times J}$, то існують $\tau \in \mathbb{T}^{(l)}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}^{(l)}_J$ такі, що $v = \tau \times \sigma$.
- Для синів $v = \tau \times \sigma$, де $\tau \in \mathbb{T}_I$ і $\sigma \in \mathbb{T}_J$ виконується
  $$\mathrm{S(v)} = \begin{cases} \emptyset, \text{якщо } S(\tau) = \emptyset \text{ або } S(\sigma) = \emptyset \\ \{\tau' \times \sigma' : \tau' \in S(\tau), \sigma' \in S(\sigma)\}, \text{інакше} \end{cases}$$

Приклад побудови блочного кластерного дерева



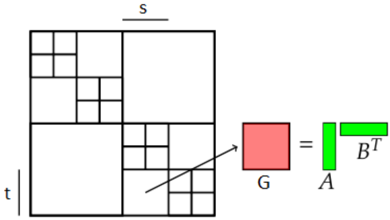
Означення $\mathcal{H}$-матриці

Означення

Нехай $\mathbb{T}_{I\times I}$ - блочне кластерне дерево над множиною індексів I. Означаємо множину $\mathcal{H}$-матриць як

$$\mathcal{H}(\mathbb{T}_{I\times I}, m) := \{M \in \mathbb{R}^{I\times I} | rank(M|_{t\times s}) \leq m \text{ для всіх}$$

$$\text{допустимих листків } t \times s \text{ дерева } \mathbb{T}_{I\times I}\}$$



$$G|_{t\times s} = AB^\top,$$
$$A \in \mathbb{R}^{t\times\{0,\ldots,m-1\}},$$
$$B \in \mathbb{R}^{s\times\{0,\ldots,m-1\}}$$

Внутрішня задача Діріхле для рівняння Лапласа

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена однозв'язна область з границею $\Gamma \subset C^2$,
$f \in C(\Gamma)$ - задана. Знайти $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$:

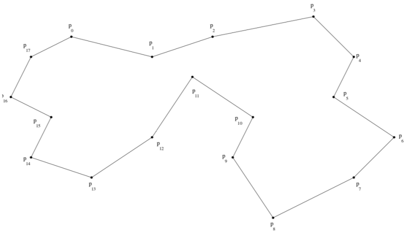
$$\triangle u = 0 \text{ в } \Omega \tag{1}$$

$$u = f \text{ на } \Gamma \tag{2}$$

$$\Upsilon_{slp}[u](x) := -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log(\|x - y\|) u(y) dy \tag{3}$$

$$a_{slp}(u, v) := -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma v(x) \int_\Gamma \log(\|x - y\|) u(y) dy dx \tag{4}$$

Область і базисні функції



$$\gamma_i : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$y \mapsto p_{i-1}(1-y) + p_i y$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \gamma_i[0,1] \\ 0, & \text{якщо } x \notin \gamma_i[0,1] \end{cases}$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \varphi_i(x) \int_\Gamma \log(\|x-y\|)\varphi_j(y)dydx \tag{5}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\|p_i - p_{i-1}\|\|p_j - p_{j-1}\| \int_0^1 \int_0^1 \log(\|\gamma_i(x) - \gamma_j(y)\|)dydx \tag{6}$$

Геометрична бісекція і обмежувальні коробки

$$i \in I, \Omega_i := supp(\varphi_i), x_i \in \Omega_i$$

$\hat{t} \in I$ - множина індексів, що відповідає кластеру t

$$a_l := \min\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

$$b_l := \max\{(x_i)_l : i \in \hat{t}\}$$

для кожного $l \in \{1, ..., d\}$.
$Q_t = [a_1, b_1] \times ... \times [a_d, b_d]$ - обмежувальна коробка.

$$min(diam(\Omega_\tau), diam(\Omega_\sigma)) \leq \eta \cdot dist(\Omega_\tau, \Omega_\sigma) \tag{7}$$

$$max(diam(Q_t), diam(Q_s)) \leq \eta \cdot dist(Q_t, Q_s) \tag{8}$$

Інтерполяція

$$\tilde{g}(x,y) := \sum_{v \in K} g(x_v, y)\mathcal{L}_v(x) \tag{9}$$

$$\tilde{G}_{ij} = \int_\Omega \varphi_i(x) \int_\Omega \tilde{g}(x,y)\varphi_j(y)dydx =$$

$$\sum_{v \in K} \int_\Omega \varphi_i(x)\mathcal{L}_v(x)dx \int_\Omega \varphi_j(y)g(x_v, y)dy = (AB^\top)_{ij} \tag{10}$$

Якщо $diam(Q_t) \leq diam(Q_s)$

$$A^{t,s}_{iv} = \int_\Omega \varphi_i(x)\mathcal{L}^t_v(x)dx \qquad B^{t,s}_{jv} = \int_\Omega \varphi_j(y)g(x^t_v, y)dy$$

інакше

$$A^{t,s}_{iv} = \int_\Omega \varphi_i(x)g(x, x^s_v)dx \qquad B^{t,s}_{jv} = \int_\Omega \varphi_j(y)\mathcal{L}^s_v(y)dy$$

Інтерполяція

$$K := \{v \in \mathbb{N}_0^d : v_i \leq m \text{ для всіх } i \in \{1, ..., d\}\}$$

$$(x_v)_{v=0}^m = \left(cos\left(\frac{2v+1}{2m+2}\pi\right)\right)_{v=0}^m \qquad \mathcal{L}_v(x) = \prod_{\mu=0,\mu\neq v}^{m} \frac{x - x_\mu}{x_v - x_\mu} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_v^t(x) = \prod_{i=1}^{d} \mathcal{L}_{v_i}^{[a_i,b_i]}(x_i) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{\mu=0,\mu\neq v_i}^{m} \frac{x_i - x_\mu^{[a_i,b_i]}}{x_{v_i}^{[a_i,b_i]} - x_\mu^{[a_i,b_i]}} \quad (12)$$

$$A_{iv}^{(t,s)} = \|p_i - p_{i-1}\| \int_0^1 \mathcal{L}_v^t(\gamma_i(x))dx$$

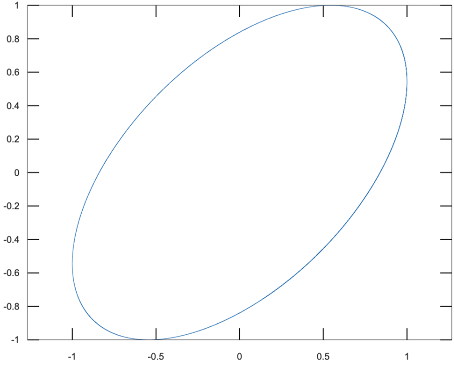
$$B_{jv}^{t,s} = -\frac{1}{2\pi}\|p_j - p_{j-1}\| \int_0^1 \log(\|x_v^t - \gamma_j(y)\|)dy$$

Чисельні експерименти

Розглядаємо рівняння

$$f(x) = \log \|x - x^*\|$$

на $D = (\cos(t+10), \sin(t)), x^* \notin D, x^* = (2, 2)$.



Чисельні експерименти

n \ m	1	2	4	8	$\frac{n}{2}$	n
16	0.006358	0.005982	0.005982	0.005982	0.005982	0.005982
128	0.005312	2.11039E-4	1.38351E-5	1.38039E-5	1.38039E-5	1.38039E-5
512	0.002525	7.28675E-5	5.84060E-7	2.10061E-7	2.10046E-7	2.10046E-7
1024	0.002373	6.46704E-5	4.55549E-7	2.19112E-8	2.17739E-8	2.17739E-8
2048	0.002462	7.13012E-5	4.38285E-8	1.01539E-9	8.32696E-10	8.32696E-10

Табл.: Похибки при різних n і m

n	Обчислення з ієрархічними матрицями		Обчислення з методом Гауса	
	похибка	час	похибка	час
16	0.0059827717	308мс	0.0059827717	156мс
128	1.38351742E-5	2747мс	1.380390913E-5	2281мс
512	5.8406019E-7	11844мс	2.10046807E-7	20133мс
1024	4.555495E-7	30741мс	2.17744124E-8	70600мс
2048	4.38285E-8	88427мс	4.88285E-9	274826мс

Дякую за увагу!