Промоделировать распределение с плотностью

$$p(x) = c\begin{cases} e^{2x}, & x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ e^{-3x}, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем константу c. Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{2} ce^{2x}dx + \int\limits_{2}^{3} cdx + \int\limits_{3}^{+\infty} ce^{-3x}dx = \frac{1}{2}ce^4 + c + \frac{1}{3}ce^{-9} = 1,$$

то

$$c = \frac{1}{\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9}}\ .$$

1 Метод обратных функций

Найдем функцию распределения $F(x)$.

$$F(x) = c\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}, & x < 2 \\ \int\limits_{-\infty}^{2} e^{2x}dx + \int\limits_{2}^{x} 1\cdot dx = \frac{1}{2}e^4 - 2 + x, & 2 < x < 3 \\ \int\limits_{-\infty}^{2} e^{2x}dx + \int\limits_{2}^{3} 1\cdot dx + \int\limits_{3}^{x} e^{-3x}dx = \frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9} - \frac{1}{3}e^{-3x}, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем обратные функции на соответствующих промежутках:

1) Если $0 < y < \frac{1}{2}ce^4$, то $y = \frac{1}{2}ce^{2x} \leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(2y/c)$.

2) Если $\frac{1}{2}ce^4 < y < \frac{1}{2}ce^4 + 1$, то $y = c(\frac{1}{2}e^4 - 2 + x) \leftrightarrow x = y/c - \frac{1}{2}e^4 + 2$.

3) Если $\frac{1}{2}ce^4 + 1 < y < 1$, то $y = c(\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9} - \frac{1}{3}e^{-3x}) \leftrightarrow x =$
$= -\frac{1}{3}\ln(3(\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9} - y/c))$.

Получаем следующий алгоритм:

1) Get(α), $c = \frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9}$, $b = \frac{1}{2c}e^4$;

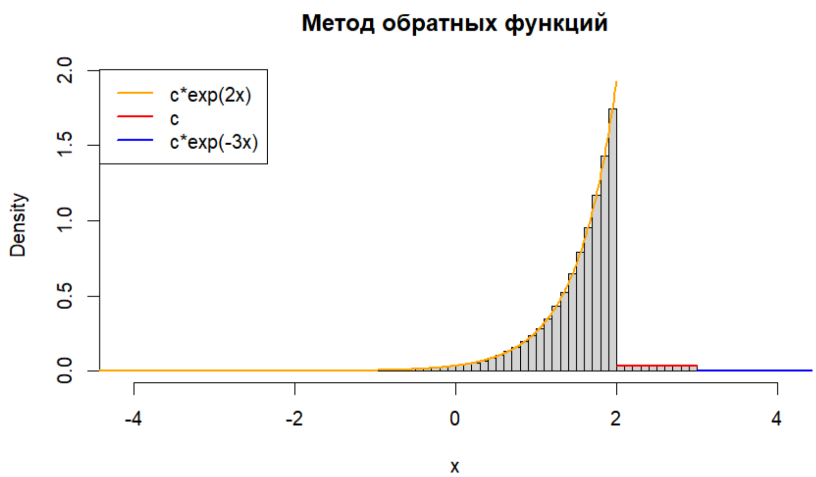
2) if $\alpha < b \rightarrow \xi = \frac{1}{2}\ln(2\alpha \cdot c)$

else if $\alpha < b + 1/c \to \xi = \alpha \cdot c - \frac{1}{2}e^4 + 2$

else $\xi = -\frac{1}{3}\ln(3(\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9} - \alpha \cdot c))$;

3) return ξ.

Промоделируем 300000 раз и посмотрим на гистограмму значений.



2 Метод дискретной декомпозиции

Представим распределение с плотностью $p(x)$ в виде смеси распределений следующим образом:

$$p(x) = \frac{c}{r_1} r_1 e^{2x} \mathbb{I}_{(-\infty,2)} + \frac{c}{r_2} r_2 \mathbb{I}_{(2,3)} + \frac{c}{r_3} r_3 e^{-3x} \mathbb{I}_{(3,\infty)}.$$

Находим константы r_1, r_2, r_3 для каждого распределения из смеси, получаем

$$p(x) = \frac{ce^4}{2} p_1(x) + c p_2(x) + \frac{c}{3e^9} p_3(x),$$

где $p_1(x) = 2e^{2(x-2)}\mathbb{I}_{(-\infty,2)},\ p_2(x) = \mathbb{I}_{(2,3)}(x),\ p_3(x) = 3e^{-3(x-3)}\mathbb{I}_{(3,\infty)}$.

Распределение с плотностью $p_1(x)$ моделируется как $\ln(\alpha)/2 + 2$, распределение с плотностью $p_2(x)$ моделируется как $\alpha + 2$, распределение с плотностью $p_3(x)$ моделируется как $-\frac{1}{3}\ln(1-\alpha)+3 = -\frac{1}{3}\ln(\alpha)+3$.

Получаем следующий алгоритм:

1) Get(α_1, α_2), $c = 1/(\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9}),\ s_1 = ce^4/2$;

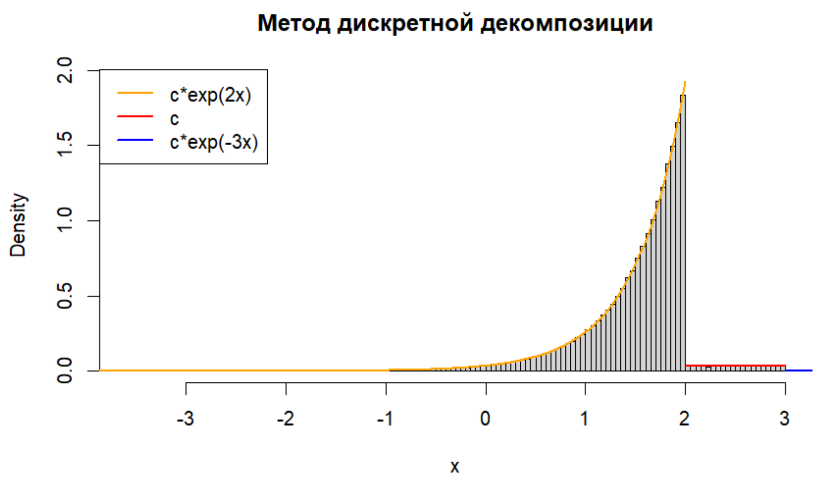
2) if $\alpha_1 < s_1 \to \xi = \ln(\alpha_2)/2 + 2$

else if $\alpha_1 < s_1 + c \to \xi = \alpha_2 + 2$

else $\xi = -\frac{1}{3}\ln(\alpha_2) + 3$;

3) return ξ.

Промоделируем 300000 раз и посмотрим на гистограмму значений.



Алгоритм без второго обращения к генератору:

1) Get(α), $c = 1/(\frac{1}{2}e^4 + 1 + \frac{1}{3}e^{-9}),\ s_1 = ce^4/2$;

2) if $\alpha < s_1 \to \xi = \ln(\alpha/s_1)/2 + 2$

else if $\alpha < s_1 + c \to \xi = (\alpha - s_1)/c + 2$

else $\xi = -\frac{1}{3}\ln((\alpha - s_1 - c)\cdot 3e^9/c) + 3$;

3) return ξ.

Промоделируем 300000 раз и посмотрим на гистограмму значений.

3 Метод отбора

$p(x) \neq 0 \ \forall x \to q(x) \neq 0 \ \forall x$. Возьмем в качестве η случайную величину с распределением Коши и плотностью

$$q(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x-2)^2)}.$$

Тогда

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} ce^{2x}\pi(1+(x-2)^2), & x < 2 \\ c\pi(1+(x-2)^2), & 2 < x < 3 \\ ce^{-3x}\pi(1+(x-2)^2), & x > 3. \end{cases}$$

$r(x)$ возрастает при $x < 2$, так как

$$(e^{2x}(1+(x-2)^2))' = 2e^{2x}(x^2 - 3x + 3) > 0 \ \forall x.$$

$r(x)$ также возрастает при $x \in (2,3)$. При $x > 3$ $r(x)$ убывает, так как

$$(e^{-3x}(1+(x-2)^2))' = e^{-3x}(-3x^2 + 14x - 19) < 0 \ \forall x.$$

$\lim_{x\to 2^-} c\pi(e^{2x}(1+(x-2)^2) = ce^4\pi$.
$\lim_{x\to 3^-} c\pi(1+(x-2)^2) = 2c\pi$.
$\lim_{x\to 3^+} c\pi(e^{-3x}(1+(x-2)^2) = 2ce^{-9}\pi$.

Значит $r(x) \leqslant M = ce^4\pi \approx 6.06$.
При проверке неравенства $r(\eta) < M\alpha_2$ сократим обе части на c и π. Получим, что либо

$$e^{2(\eta-2)}(1 + (\eta - 2)^2) < \alpha_2 \quad \text{и} \quad \eta < 2,$$

либо

$$1 + (\eta - 2)^2 < e^4\alpha_2 \quad \text{и} \quad 2 < \eta < 3,$$

либо

$$e^{-3(\eta-2)-10}(1 + (\eta - 2)^2) < \alpha_2 \quad \text{и} \quad \eta > 3.$$

Видно, что для проверки неравенств удобно моделировать не случайную величину η, а случайную величину $t = \eta - 2$, то есть моделировать распределение Коши без сдвига. $t \leftarrow \tan(\pi\alpha_1)$.

Получаем следующий алгоритм:

1) Do (Get(α_1, α_2), $t_1 = \tan(\pi\alpha_1)$, $t_2 = 1 + t_1^2$) while
($t_1 < 0$ and $e^{2t_1}t_2 < \alpha_2$) or ($t_1 > 0$ and $t_1 < 1$ and $t_2 < e^4\alpha_2$) or
or ($t_1 > 1$ and $e^{-3t_1-10}t_2 < \alpha_2$);

2) return $t_1 + 2$.

Промоделируем 300000 раз и посмотрим на гистограмму значений.