ВАРІАНТ 11

1. Задано щільність розподілу випадкової величини ξ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in (0;4); \\ 0, & x \notin (0;4). \end{cases}$$

Знайти сталу A, а також $M\eta$ і $D\eta$, якщо $\eta = \xi^2$.

2. Знайти характеристичну функцію для випадкової величини ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0,5e^{-2x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

За знайденою характеристичною функцією знайти $M\xi$ та $D\xi$.

3. **а)** Математичне сподівання випадкової величини ξ дорівнює 1, а дисперсія – 0,04. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити знизу ймовірності подій $A = \{0,5 < \xi < 1,5\}$, $B = \{\xi < 2\}$.

б) Дано послідовність незалежних випадкових величин $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2 \ldots$, заданих розподілами

x_i	-3	0	3
p_i	$\frac{n}{n^3+1}$	$1 - \frac{2n}{n^3+1}$	$\frac{n}{n^3+1}$

Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел ?

4. Дано розподіл двовимірного дискретного випадкового вектора (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	-4	0	3
-1	$0,1$	a	0
0	$0,2$	$0,1$	$0,1$
2	0	$0,1$	$0,1$

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, коваріацію, коефіцієнт кореляції. Перевірити чи компоненти є незалежними.

5. Дано щільність двовимірного неперервного випадкого вектора (ξ, η):

$$f(x,y) = \begin{cases} ay, & (x,y) \in [0;2] \times [0;4]; \\ 0, & (x,y) \notin [0;2] \times [0;4]. \end{cases}$$

Знайти невідому сталу a, розподіл компонент, коваріацію, умовну щільність компоненти ξ за умови, що $\eta = y$.

№1. $f_\xi(x) = \begin{cases} A\sqrt{x}, & x \in (0;4) \\ 0, & x \in (0;4) \end{cases}$

За властивістю щільності розподілу $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$, маємо:

$$\int_0^4 A\sqrt{x}\,dx = 1 = \frac{2}{3}Ax^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}A\cdot 8$$

$$A = \frac{3}{16}$$

$$M\eta = M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \frac{3}{16}\int_0^4 x^2\sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{2}{7}\,x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4 = \frac{48}{7}$$

$$M\eta^2 = M\xi^4 = \int_0^4 \frac{3}{16}\cdot x^4\cdot\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{2}{11}\cdot$$

$$\cdot\, x^{\frac{11}{2}}\Big|_0^4 = \frac{768}{11}$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = \frac{768}{11} - \left(\frac{48}{7}\right)^2 =$$

$$= 256\cdot\left(\frac{3}{11} - \frac{9}{49}\right) = \frac{256\cdot 48}{11\cdot 49} \approx 22{,}8$$

В: $A = \frac{3}{16}$; $M\xi = \frac{48}{7}$, $D\eta = 22{,}8$

12. За формулою характеристичної функції $\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)\,dx$, маємо:

$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)\,dx = 0{,}5\int_0^{+\infty} e^{(it-2)x}\,dx =$

$= 0{,}5\,\frac{e^{(it-2)x}}{it-2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{-0{,}5}{it-2} \neq$

$\neq 0{,}5 \cdot \frac{it-2}{(it-2)(it-2)} = \frac{1+0{,}5it}{4+t^2}$

$\psi^{(k)}(0) = i^k M\xi^k$, тоді

$\psi' = \frac{0{,}5\cdot i\cdot(4+t^2) - 2t(1+0{,}5it)}{(4+t^2)^2} =$

$= \frac{-2t + i(2-0{,}5t^2)}{(4+t^2)^2}$

$\psi'' = \frac{-(-2t+i(2-0{,}5t^2))\cdot 4t(4+t^2) + (4+t^2)^2(-2-it)}{(4+t^2)^3}$

$\psi'(0) = iM\xi$; $M\xi = -i\,\psi'(0) = -i\cdot\frac{i}{4^2} = \frac{1}{16}$

$\varphi''(0) = -M\xi^3$; $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 =$

$= -\varphi''(0) - (\varphi'(0))^2$

$\varphi''(0) = \frac{-2}{16}$, тому $D\xi = \frac{2}{16} -$

$-\left(\frac{1}{4^2}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{256} = \frac{33}{256}$

В: $M\xi = \frac{1}{16}$, $D\xi = \frac{33}{256}$

№3 $M\xi = 1$, $D\xi = 0{,}04$

$A = \{0{,}5 < \xi < 1{,}5\}$, $B = \{\xi < 2\}$

а) За нерівністю Чебишова, ~~[illegible]~~:

$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

$\forall \varepsilon > 0)$, маємо:

$A = \{0{,}5 < \xi < 1{,}5\} = \{1 - 0{,}5 < \xi <$

$1 + 0{,}5\} = \{M\xi - 0{,}5 < \xi < M\xi + 0{,}5\}$

$= \{|\xi - M\xi| < 0{,}5\}$, тому

$P(A) = P\{|\xi - M\xi| < 0{,}5\} \geq 1 - \frac{0{,}04}{0{,}5^2} =$

$= 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} = 0{,}84$, отже

$P(A) \geq 0{,}84$

$B = \{\xi < 2\} = \{\xi - M\xi < 1\} \supseteq \{|\xi - M\xi| < 1\}$

$\Rightarrow P(B) \geq P\{|\xi - M\xi| < 1\} \geq 1 - \frac{D\xi}{1^2} =$

$= 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

б) За законом великих чисел має виконуватись:

$\xi_1 \ldots \xi_n$ - попарно незалежні

$M\xi_n$ - скінченні, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k = 0$

перевіряємо умови:

ξ_1, ξ_n - незалежні, тому попарно незалежні

$M\xi_n = \sum x_i p_i = \frac{-3n}{n^3+1} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2n}{n^3+1}\right) +$

$+ 3\left(\frac{n}{n^3+1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 = M\xi_n^2 =$

$= \frac{9n}{n^3+1} + \frac{9n}{n^3+1} = \frac{18n}{n^3+1}$

$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18k}{k^3+1} \to 0$

при $n \to \infty$, бо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18k}{k^3+1}$ — збіжний. Отже, для даної послідовності ξ_n виконується закон великих чисел.

№14.

$\xi \backslash \eta$	-4	0	3
-1	0,1	a	0
0	0,2	0,1	0,1
2	0	0,1	0,1

$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, тому $0,7 + a = 1$

Отже $a = 0,3$.

Розподіл компонент

ξ_i	-1	0	2
p_i	$0{,}4$	$0{,}4$	$0{,}2$

η_j	-4	0	3
p_j	$0{,}3$	$0{,}5$	$0{,}2$

$$P\{\xi = -1\} = 0{,}1 + 0{,}3 + 0 = 0{,}4$$

$$P\{\eta = -4\} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}3$$

$$cov(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - M_\xi \cdot M_\eta -$$

– коваріація

$$r_{\xi\eta} = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$ – коефіцієнт кореляції

$$M_\xi = \sum_i \xi_i \cdot p_i = 0; \; M_\eta = -0{,}6$$

$$M_\xi^2 = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}2; \; M_\eta^2 = \sum_i \eta_i \cdot p_i = 6{,}6$$

$$D_\xi = M_\xi^2 - (M_\xi)^2 = 1{,}2;$$

$D\eta = 6{,}6 - 0{,}6^2 = 6{,}24$

$M(\xi\eta) = \sum_{i,j} \xi_i \cdot p_i \cdot p_{ij} = (-1)(-4) =$

$= 0{,}1 + 2\cdot 3 \cdot 0{,}1 = 1$, тому cov

$(\xi, \eta) = 1 - 0\cdot(-0{,}6) = 1$

$r_{\xi\eta} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2 \cdot 6{,}28}} \approx 0{,}365$

ξ і η – незалежні, якщо $\forall i, j$

$P\{\xi = \xi_i, \eta = \eta_j\} = P\{\xi = \xi_i\}$

$P\{\eta = \eta_j\}$; $P\{\xi = -1, \eta = -4\} = 0{,}1$,

$P\{\xi = -1\} \cdot P(\eta = -4\} = 0{,}3 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}12$

Отже, ξ і η є залежні випадкові величини.

15. Маємо $a\iint_{Y} f(x,y)\,dx\,dy = S$,

тому $1 = a\int_0^2\int_0^4 y\,dx\,dy = a\int_0^2 dx\int_0^4 y\,dy =$

$= ax\Big|_0^2 \quad \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 16a$, отже

$a = \frac{1}{16}$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \frac{1}{16}\int_0^4 y\,dy, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \frac{y}{16}\int_0^2 dx, & y \in [0,4] \\ 0, & y \notin [0,4] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{y}{8}, & y \in [0,4] \\ 0, & y \notin [0,4] \end{cases}$$

Тоді розподіли компонент будуть такі:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f(x)\,dt = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{1}{8}\int_0^{y_0} t\,dt, & 0 < y \le 4 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ \frac{y^2}{16}, & 0 < y \le 4 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{cov}(\xi, 2) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta$$

$$M\xi = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = 1$$

$M\eta = \int_{\mathbb{R}} y f_2(y)\,dy = \frac{1}{8}\int_0^4 y^2\,dy = \frac{y^3}{24}\Big|_0^4 =$

$= \frac{2}{3}$

$M(\xi,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x,y)\,dx\,dy =$

$= \frac{1}{16}\int_0^2\int_0^4 xy^2\,dx\,dy = \frac{1}{16}\int_0^2 x\,dx \cdot \int_0^4 y^2\,dy =$

$= \frac{1}{16}\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{32}{3}$, тому

$cov(\xi,\eta) = \frac{32}{3} - 1\cdot\frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$

$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin [0,2]\times[0,4] \\ \frac{1}{2}, & (x,y) \in [0,2]\times[0,4] \end{cases}$ - умовна щільність

компоненти ξ за умови $\eta = y$.