Лекція 1

Основні поняття теорії ймовірностей

1.1. Простір елементарних подій

Кожна математична дисципліна має свої основні поняття, пов'язані з предметом вивчення. Основними поняттями теорії ймовірностей є: *експеримент (або випробування), випадкова подія, ймовірність випадкової події.*

Випробуванням (експериментом) називають дію, яку можна повторювати довільну кількість разів і результат якої не можна передбачити наперед.

Результатом експерименту є деяка ***подія***. *Якщо подію можна розглядати як сукупність деяких інших подій, то її називають* ***складеною*** *(або* ***подільною****).* Наприклад, подію – {при киданні грального кубика випала парна кількість очок} – можна розглядати як сукупність подій: {випало два очки}, {випало чотири очки },{випало шість очок }.

У протилежному випадку, *якщо подію не можна розглядати як сукупність деяких інших подій, то її називають* ***елементарною (нерозкладною)*** *подією.* Внаслідок випробування обов'язково відбудеться одна з елементарних подій, причому одночасно з нею не відбудеться жодна з інших елементарних подій.

Сукупність усіх можливих елементарних подій, які відповідають певному випробуванню, називають ***простором елементарних подій*** і позначають Ω, а самі елементарні події (якщо їх є скінченна чи зліченна кількість) здебільшого позначають літерою ϖ .

Таким чином, *простір елементарних подій* $\boldsymbol{\Omega}$ *– це сукупність усіх можливих неподільних наслідків випробування (елементарних подій).* Множина Ω може бути *скінченною* (якщо її елементи можна полічити), *зліченною* (якщо її елементи можна пронумерувати) або *незліченною* (якщо її елементи не можна ні полічити, ні пронумерувати). Скінченні та зліченні простори елементарних подій називають *дискретними просторами*. У деяких випадках для одного випробування можна побудувати різні простори елементарних подій, в залежності від того, яку ознаку результату випробування беруть до уваги.

Очевидно, що у розглянутому вище експерименті з гральним кубиком є шість елементарних подій: ϖ_1 ={при киданні грального кубика випало одне очко}; w_2 ={при киданні грального кубика випало два очка}; ...; w_6 ={при киданні грального кубика випало шість очок}.

Прикладом експерименту з нескінченною кількістю елементів простору елементарних подій є кидання грального кубика до першої появи шести очок.

1.2. Класифікація подій

Розглянемо основні види подій.

Випадковою *називають подію, яка за певних умов експерименту може або відбутися, або не відбутися*. Для позначення випадкових подій використовують великі латинські букви $A, B, C,...$ Кожну випадкову подію A можна ототожнити з деякою підмножиною A простору елементарних подій – множини Ω. Підмножина A містить лише ті елементарні події ϖ, за яких настає подія A. Такі елементарні події ϖ називають *сприятливими для появи події* A. Вважають, що подія A відбулась тоді, і лише тоді, коли відбулась одна з елементарних подій, що їй сприяють.

Саму множину Ω – простір елементарних подій – можна також ототожнити з деякою подією. Їй сприяють усі елементарні події, тому ця подія обов’язково відбудеться.

Подію, яка обов’язково настає при довільному результаті експерименту, називають ***достовірною (вірогідною)***. Достовірну подію позначають, як і простір елементарних подій, буквою Ω.

Неможливою *називають подію, яка не настає при довільному результаті експерименту*. Їй не відповідає жодна з елементарних подій. Тому неможливу подію позначають, як і порожню множину, символом $\varnothing$.

Таким чином, *усі події поділяються на неможливі, випадкові та достовірні події.*

Очевидно, що якщо підмножина простору Ω містить лише один елемент, то відповідна випадкова подія є елементарною, а коли ж підмножина складається з більш ніж одного елемента, то подія є складеною.

Дві випадкові події A, B *називають* ***несумісними****, якщо поява однієї з них виключає появу іншої.* У цьому випадку не знайдеться жодної елементарної події, яка б сприяла появі обох випадкових подій A, B.

Випадкові події A, B *називають* ***сумісними****, якщо вони можуть настати одночасно:* обов'язково знайдеться принаймні одна елементарна подія, яка сприяє появі кожної з цих випадкових подій.

Подію A *називають* ***незалежною від події*** B*, якщо на можливість появи події* A *не впливає, чи відбулася подія В.*

Дві події А і В називаються ***незалежними****, якщо подія* A *не залежить від настання події* B *і навпаки: подія* B *не залежить від* A.

Дві події А і В називаються ***залежними****, якщо можливість появи події А залежить від того, чи відбулася подія В і навпаки.*

Випадкові події вважають *рівноможливими* , якщо жодна з них не має переваг у появі над іншими (можна вважати, що можливості їхньої появи в умовах даного експерименту є однаковими). Наприклад, події, що полягають у випаданні одиниці і п'ятірки під час однократного підкидання симетричного грального кубика є рівноможливими.

1.3. Операції над випадковими подіями

Поняття множини відноситься до основних, неозначуваних понять математики; *під множиною розуміють сукупність елементів однакової природи.*

Випадкові події ототожнюють з підмножинами простору елементарних подій, тому операції (дії) над подіями можна трактувати подібно до дій над множинами.

Подія B ***є наслідком події*** A (чи *подія* A *є окремим випадком події* B, або *подія* A *належить події В), якщо усі елементарні події, що сприяють появі події* A*, є сприятливими і для події* B. У цьому випадку множина A є підмножиною множини B: $A \subset B$. Це означає, що кожного разу, коли відбувається подія A, також відбувається і подія B.

Дві події називають ***рівносильними****, якщо* $A \subset B$ *і* $B \subset A$*, тобто кожна з них є наслідком іншої події.* Рівносильні події A і B позначають $A = B$.

Сумою (об'єднанням) *двох подій* A *і* B *називають подію* $C = A + B$ *(або* $C = A \bigcup B$*), яка полягає в тому, що відбулась подія* A *або подія* B. Сума $A + B$ складається з тих елементарних подій, які входять до складу хоча б до однієї з подій A, B.

Добутком (перетином) *двох подій* A *і* B *називають подію* $C = A \cdot B$ *(або* $C = A \bigcap B$*), яка полягає в тому, що відбулись подія* A *і подія* B (тобто, що дві події A, B настали одночасно). Добуток $C = A \cdot B$ складається з тих елементарних подій, що належать одночасно обидвом подіям A і B.

Таким чином введені поняття суми та добутку двох подій A і B можна розширити і у випадку скінченної чи зліченної кількості подій.

Сумою (об'єднанням) скінченної кількості подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ *є подія* $C = A_1 + A_2 + \ldots A_n$ *(або* $C = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$*), яка відбувається тоді, і лише тоді, коли відбувається хоча б одна з подій* $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Добутком скінченної кількості подій $A_1, A_2, \ldots A_n$ *є подія* $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_n$*, яка полягає в тому, що всі події* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *відбуваються одночасно.*

Різницею *двох подій* A *і* B *називається подія* $C = A \setminus B$ *(*$C = A - B$*), яка полягає в тому, що відбулася подія* A *і не відбулася подія* B. Подія $C = A \setminus B$ складається з тих елементарних подій, які належать події A і не належать події B. (Якщо події A і B є несумісними, то $A \setminus B = A$ і $B \setminus A = B$).

Подія, яка відбувається тоді і лише тоді, коли не відбувається подія A*, називається* ***протилежною*** *до події* . Подія, протилежна до події A, позначається $\overline{A}$ (читається "не A"), вона складається з усіх елементарних подій, що не сприяють події A (події A та $\overline{A}$ є обов'язково несумісними).

Подію $\overline{A}$, протилежну до A, можна означити і як $\overline{A} = \Omega \backslash A$, тому її іноді називають *доповненням події A*.

Зважаючи на сформульовані операції над подіями, можна дати нове трактування раніше введеним означенням сумісних та несумісних подій.

*Дві події A і B називають **несумісними** тоді, і лише тоді, коли їх добуток є неможлива подія, тобто* $A \bigcap B = \varnothing$.

Відповідно, *дві події A і B називають **сумісними** тоді, і лише тоді, коли* $A \bigcap B \neq \varnothing$.

Декілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ *називають **попарно несумісними** (чи просто **несумісними**), якщо поява будь-якої з них виключає появу кожної з решти подій, тобто при* $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Розглянемо ще одне важливе поняття.

Декілька подій $A_1, A_2, ..., A_n$ *утворюють **повну групу подій**, якщо в результаті експерименту хоча б одна з цих подій обов'язково відбудеться, тобто коли* $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ *(поява хоча б однієї з цих подій є достовірною подією).*

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$, які утворюють повну групу подій, є попарно несумісні (тобто якщо $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при $(i \neq j)$ та $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$ *)*, то кажуть, що вони утворюють *повну групу попарно несумісних подій*. У цьому випадку в результаті експерименту обов'язково настане одна, і лише одна з цих подій.

Найпростішим прикладом повної групи попарно несумісних подій є довільна випадкова подія A та протилежна до неї $\overline{A}$. Дійсно, ці події є несумісними і їх сумою є вірогідна подія.

Ще одним прикладом повної групи попарно несумісних подій є простір елементарних подій (у випадку, коли Ω є скінченою множиною).

1.4. Класична ймовірність випадкової події

Ймовірність події - це числова характеристика міри можливості того, що випадкова подія відбудеться. Існує декілька підходів у означенні ймовірності випадкової події: *класичне, геометричне, статистичне, аксіоматичне.* Розглянемо перше з них.

Нехай простір елементарних подій є скінченним і містить n елементарних подій: $\Omega = \{\varpi_1, \varpi_2, ..., \varpi_n\}$, причому елементарні події є рівноможливими. Нехай m – кількість тих елементарних подій, що сприяють появі події A.

Ймовірністю $P(A)$ ***події*** A *називають відношення кількості* m *елементарних подій, що сприяють появі події* A, *до загальної кількості* n *усіх елементарних рівноможливих подій, тобто*

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Таке означення взагалі не вимагає проведення експерименту, а кожна елементарна рівноможлива подія ϖ_i, $(i = 1, 2, \dots n)$ зі скінченного простору елементарних подій розглядається як така, що відбувається з ймовірністю $P(\varpi_i) = \frac{1}{n}$.

Приклад 1.1. Яка ймовірність витягнути даму з колоди, що містить 36 карт?

Розв'язання. У даному експерименті простір Ω складається з 36 рівноможливих елементарних подій (шансів), для кожної з яких $P(\varpi_i) = \frac{1}{36}$. Для складної випадкової події A – {вийнято даму}, існує чотири сприятливих елементарних події (у колоді є чотири різних дами), звідки $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Виходячи з класичного означення ймовірності, очевидними є **основні властивості ймовірності**:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$.
2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю: P (Ø)=0.
3. Ймовірність довільної випадкової події A є число, що розміщене між нулем і одиницею: $0 < P(A) < 1$.

Отже, ймовірність довільної події задовольняє нерівність $0 \le P(A) \le 1$.

1.5. Елементи комбінаторики

Комбінаторика вивчає питання про те, скільки різних підмножин, які задовольняють певним умовам, можна утворити із елементів деякої скінченної.

Розв’язуючи комбінаторні задачі в першу чергу слід встановити, якими є утворювані множини з елементів множини M :

– впорядковані чи невпорядковані;

– у них можуть повторюватись одні і ті ж елементи (з повтореннями), чи ні (без повторень).

*Скінченна множина M називається **впорядкованою**, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність певний порядковий номер (натуральне число).*

Дві впорядковані множини M і K є *рівними*, якщо вони складаються із однакових елементів, розміщених в однаковому порядку. Якщо ж вони відрізняються хоча б одним елементом або порядком хоча б одного елемента, то такі впорядковані множини є *різними*.

Основне правило комбінаторики. Нехай задано k множин $M_1, M_2, \ldots, M_k$, кожна з яких складається відповідно з $n_1, n_2, \ldots, n_k$ різних елементів. Тоді утворити невпорядкований k-елементний набір $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, де $m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2, \ldots,\ m_k \in M_k$ можна $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами. Основне правило комбінаторики ще називають *правилом добутку*.

Перестановки. Якщо із множини M, що містить n різних елементів, утворити впорядковану множину, то така множина називається ***перестановкою** n **елементів без повторень***. Кількість таких всеможливих перестановок позначають символом P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = n! \qquad (1.2)$$

(читається “ен факторіал”). (Нагадаємо, що згідно з означенням: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1,\ 1! = 1$.)

Наприклад, із множини $M = \{a, b, c\}$ можна утворити таку множину з шести ($P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$) різних перестановок: $\{\{a,b,c\},\{b,a,c\},\{a,c,b\},\{b,c,a\},\{c,a,b\},\{c,b,a\}\}$.

Зауваження. Якщо ж утворювати перестановки множини M, яка складається з n елементів, деякі з яких повторюються, то їх кількість, очевидно, відрізнятиметься від кількості перестановок без повторень. Зрозуміло, що перестановка місцями двох однакових елементів не приведе до нової перестановки, тому кількість перестановок з повтореннями є меншою, ніж кількість перестановок без повторень.

Нехай деякий елемент множини M повторюється n_1 раз, інший – n_2 разів. і т.д., k – тий елемент – n_k разів ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $n_i \ge 1$, $i = \overline{1,k}$). Кількість *перестановок з повтореннями* позначають символом $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ і обчислюють за формулою

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!}. \quad (1.3)$$

Розміщення. *Впорядкована k-елементна підмножина n-елементної множини M ($k \le n$), називається* ***розміщенням (розташуванням) з n по k без повторень.*** Кількість всеможливих розміщень з n по k позначають символом A_n^k (від першої літери англійського слова *Arrange* – впорядковувати) і обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1). \quad (1.4)$$

Комбінації (сполуки). *Якщо із множини M з n різних елементів вибирають довільну невпорядковану підмножину з k ($k \le n$) елементів, то таку підмножину називають* ***комбінацією (сполукою) з n по k без повторень***.

Кількість комбінацій значають символом C_n^k і вона дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.5)$$

Приклад 1.2. У шаховому турнірі беруть участь 12 гросмейстрів. А) Скількома способами можуть бути розподілені місця у турнірі? Б) Скількома способами можуть бути розподілені три призові місця? В) Скількома способами можна вибрати делегацію на шаховий конгресс у складі чотирьох осіб?

Розв'язання. А) Оскільки необхідно розподілити 12 гросмейстрів по 12 місцях, то кількість способів зробити дію визначається кількістю перестановок з 12 елементів: $P_{12} = 12!$.

Б) Кількість способів заповнити призові місця визначається кількістю розміщень з 12 елементів по 3 елементи: .

В) При виборі чотирьох членів делегації вижливим є лише її склад, а порядок відбору несуттєвий. Тому використовуємо формулу для обчислення кількості комбінацій з 12 елементів по 4 елементи:

$$C \quad C_{12}^{4} = \frac{12!}{4!(12-4)!} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = 495.$$

1.6. Геометрична ймовірність

Сформульоване вище класичне означення ймовірності передбачало, що кількість елементарних результатів випробування є скінченна. У випадку, коли простір елементарних подій є незліченною множиною і за умови симетрії досліду, коли жодна з елементарних подій не має переваг у появі перед іншими, застосовують “геометричний” підхід до означення ймовірності.

Розглянемо експеримент, який полягає у киданні точки на обмежену частину Ω числової осі, чи площини, чи простору. Нехай область Ω має міру $m(\Omega)$ (якщо Ω є обмеженою частиною числової осі, то її мірою є довжина, якщо площини – то площа, якщо простору – то об’єм). Нехай на Ω побудовано систему F підмножин (підобластей), які мають міру (так звані вимірні підмножини).

Потрапляння випадкової точки в деяку множину з системи F можна трактувати як випадкову подію. Припустимо, що ймовірність потрапляння випадкової точки у будь-яку підобласть A з системи F пропорційна мірі $m(A)$ цієї підобласті і не залежить ні від її розташування відносно Ω, ні від її форми (іноді за таких умов кажуть, що точки “рівномірно розподілені на множині Ω” чи “рівноможливі”).

Тоді ймовірність довільної випадкової події A з F можна обчислити згідно з таким означенням.

Геометричною ймовірністю *події* A *називається відношення міри* $m(A)$ *до міри* $m(\Omega)$*, тобто*

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{1.6}$$

Отже, формула (1.6) є узагальненням класичної формули (1.1) у випадку незліченної множини елементарних подій. Легко переконатись, що геометрична ймовірність задовольняє властивості ймовірності, сформульовані для випадку класичної схеми.

Приклад 1.3. Тривалості горіння червоного, жовтого та зеленого світла світлофора дорівнюють відповідно 70, 10 та 120 секунд. Яка ймовірність того, що в момент приходу до світлофора пішохода для нього горітиме зелене світло?

Розв'язання. Тривалість робочого циклу світлофора – 70+10+120=200 секунд, з яких 120 секунд горить зеленее світло. Отже, згідно з геометричним означенням ймовірності, матимемо:

$$P(A) = \frac{120}{200} = 0,6\,.$$

1.7. Статистична ймовірність випадкової події

Існує ще один підхід до поняття ймовірності, не пов'язаний з поняттям простору елементарних подій. Необхідність застосування і такого підходу зумовлена обмеженістю застосування класичної та геометричної ймовірностей. В основі такого підходу лежить явище стійкості частоти настання події при багаторазовому повторенні однорідних випробувань.

Розглянемо випробування, які можна проводити як завгодно багато разів за даних фіксованих умов, причому результати попередніх випробувань не впливають на наступні (тобто випробування є незалежними). Нехай в результаті випробування може настати чи не настати подія A. Повторимо випробування n разів і підрахуємо кількість $k_n(A)$ тих випробувань, в яких подія A настала.

Відносною частотою $W_n(A)$ *події* A *називається відношення числа* $k_n(A)$ *тих випробувань, у яких подія* A *відбулася, до числа* n *усіх випробувань, тобто*

$$W_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}\,.$$

Відносна частота $W_n(A)$ події A може змінитись, якщо провести іншу серію з n випробувань, або змінити кількість цих випробувань. Проте, як показує практика, при збільшенні кількості n випробувань величина $W_n(A)$ стабілізується, хоча сама подія A та величина $k_n(A)$ є випадковими. В цьому і полягає явище *стійкості відносної частоти настання події*.

Статистичною ймовірністю *події* A *називається число* $P^*(A)$, *навколо якого коливається (або якому дорівнює) відносна частота появи події* $W_n(A)$ *у серіях з достатньо великою кількістю* n *випробувань.*

На практиці за чисельне значення статистичної ймовірності події A у випадку великої кількості випробувань приймають або відносну частоту події, або число, достатньо близьке до неї.

Очевидно, властивості ймовірності, що випливають із класичного означення, зберігаються і при статистичному означенні ймовірності.

Недоліком статистичного означення ймовірності є, по-перше, вимога щодо теоретичної можливості проводити необмежену кількість випробувань; по-друге, неоднозначність величини ймовірності в різних серіях випробувань.