ВАРІАНТ 11

1. У шаховому турнірі беруть участь 20 осіб. Їх за жеребкуванням розподілено на 2 групи по 10 осіб. Скільки існує при цьому способів, щоб четверо найсильніших гравців потрапили по двоє у різні групи ?

2. Гральну кістку підкидають два рази. Результат експерименту – сума очок, що випали. Розглянемо події: M – сума очок дорівнює 11; N – сума очок не менша 3; K – число очок ділиться на 5. Які з даних подій сумісні, а які – ні ? Описати події: $M \cap N$, $N \cap K$, $M \cup N$, $M \cup K$, $\overline{N}$, $\overline{K}$, $M \cup N \cup K$, $M \cap N \cap K$.

3. Партія з 50 виробів містить 5 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 4 виробів буде: а) саме 2 бракованих; б) жодного бракованого.

4. Усередині квадрата з вершинами в точках (0; 0), (0; 1), (1; 1), (1; 0) навмання вибирається точка $M(x; y)$. Знайти ймовірність того, що $xy < a$, якщо $0 < a < 1$.

5. Вироби, які виготовляє завод, з імовірністю 0,09 мають дефект. Працюють два контролери, причому виріб потрапляє до кожного з них з однаковою ймовірністю. Перший контролер бракує поганий виріб з ймовірністю 0,85, а другий – з ймовірністю 0,91. Яка ймовірність того, що довільно взятий виріб буде забраковано ?

6. Завод виготовляє деталі, серед яких 5% бракованих. Що ймовірніше: що серед 10 деталей буде саме 2 бракованих чи серед 5 деталей буде не менше однієї бракованої ?

7. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини ξ, яка може набувати лише два значення: x_1 з імовірністю $p_1 = 0,9$ і x_2, якщо $x_1 < x_2$ і $M\xi = 3,1$, $D\xi = 0,09$.

8. Серед людей, що проживають на даній території, 35% мають карі очі. Які ймовірність того, що серед 350 дітей місцевої школи буде рівно 100 кароокких ?

9. Один раз підкидаємо дві гральні кістки. Випадкова величина ξ набуває значення, рівні більшому з чисел, які випали. Побудувати для неї ряд розподілу, многокутник розподілу та функцію розподілу. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

10. Функція розподілу випадкової величини ξ задається формулою:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 2(x-1), & x \in (-1;\ 1,5]; \\ 1, & x > 1,5. \end{cases}$$

Знайти моду, медіану, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ. Побудувати криву розподілу.

Розрахункова робота із предмету "Теорія ймовірності та математична статистика"

Варіант 11

Виконала студентка групи ЛЗ-23 Кохман Олеся

1) $C_4^2 \cdot C_{16}^8 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{16!}{8!\cdot 8!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} \cdot$

$\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{8!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 3\cdot 2\cdot 3\cdot 11\cdot 13\cdot 15\cdot 2 =$

$= 77220$ способи   В: 77220 способів

2) $M = \{11\}$

$N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$K = \{5, 10\}$

Сумісні: M і N, N і K; несумісні: M і K

$M \cap N = \{11\}$

$N \cap K = \{5, 10\}$

$M \cup N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$M \cup K = \{5, 10, 11\}$

$\bar{N} = \{1,2\}$
$\bar{K} = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12\}$
$M \cup N \cup K = \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
$M \cap K \cap N = \{\varnothing\}$

3. 50 виробів

5 бракованих   45 небракованих

б) жодного браку - подія Б

$$P(Б) = \frac{C^4_{45}}{C^4_{50}} = \frac{\frac{45!}{4!\cdot 41!}}{\frac{50!}{4!\cdot 46!}} = \frac{\cancel{45!}}{\cancel{4!\cdot 41!}} \cdot \frac{\cancel{4!}\cdot 46!}{50!} =$$

$$= \frac{\cancel{42}\cdot 43\cdot \cancel{44}\cdot \cancel{45}\cdot \cancel{46}}{\cancel{46}\cdot 47\cdot \cancel{48}\cdot \cancel{49}\cdot \cancel{50}} = \frac{43\cdot \cancel{22}\cdot 9}{47\cdot 8\cdot 7\cdot 5} =$$

$\approx 0,65$

а) саме 2 бракованих - подія А

$$P(A) = \frac{C^2_5 \cdot C^2_{45}}{C^4_{50}} = \frac{\frac{5!}{2!\cdot \cancel{3!}} \cdot \frac{45!}{2!\cdot \cancel{43!}}}{\frac{50!}{4!\cdot \cancel{46!}}} =$$

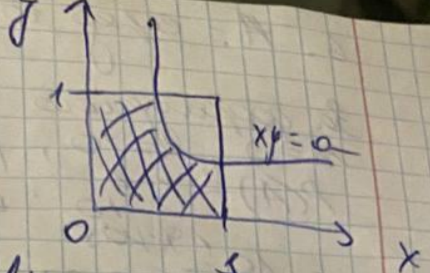
$$= \frac{\frac{4\cdot 5}{2} \cdot \frac{44\cdot 45}{2}}{\frac{47\cdot 48\cdot 49\cdot 50}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{8\cdot \cancel{44}\cdot \cancel{45}}{47\cdot 2\cdot 49\cdot \cancel{50}} =$$

$$= \frac{11\cdot 9}{47\cdot 49} \approx 0,043$$

В: а) 0,043 б) 0,65

4. $xy < a$

$y = \frac{a}{x}$



$\mu(\Omega) = 1$

$\mu(A) = \int_0^a dx + \int_a^1 \frac{a}{x} dx = x \Big|_0^{a} +$

$a \cdot \ln|x| \Big|_a^1 = a - 0 + a(0 - \ln|a|) =$

$= a - a\ln|a| = a - a\ln a \quad (a \in (0;1))$

$P(A) = \frac{a - a\ln a}{1}$ В: $\frac{a - a\ln a}{1}$

5. 1 контр. $- 0{,}85$ ім. браку $- 0{,}09$

2 контр. $- 0{,}91$ $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

За формулою повної ймовірності, маємо:

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) =$

$= \frac{1}{2}(0{,}09 \cdot 0{,}85) + \frac{1}{2}(0{,}09 \cdot 0{,}91) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}09(0{,}85 + 0{,}91) = 0{,}0792$

В: $0{,}0792$

6. А – серед 10 деталей 2 браковані

За формулою Бернуллі, маємо:

$n=2,\ k=10,\ p=0{,}05,\ q=0{,}95$

$P(A) = C_{10}^{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^8 =$

$= \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0{,}0025 \cdot 0{,}95^8 = 45 \cdot 0{,}0025$

$\cdot 0{,}95^8 \approx 0{,}075$

Б – серед 5 деталей не менше однієї бракованої

$n=0,\ k=5,\ p=\cancel{0{,}95}\ 0{,}05,\ q=\cancel{0{,}05}\ 0{,}95$

За формулою Бернуллі, маємо:

$P(Б) = 1-(C_5^0 \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^5) = 1-(0{,}95^5) =$

$\approx 0{,}23$

Відповідь: подія Б більш імовірна.

7. ξ

x_1	x_2
0,9	0,1

$M(\xi)=3{,}1 \quad D(\xi)=0{,}09$

$M(\xi) = 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2$

$D(\xi) = (0{,}9x_1^2 + 0{,}1x_2^2) - (3{,}1)^2 = 0{,}09$

Складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0{,}9x_1 + 0{,}1x_2 = 3{,}1 & |\cdot 10 \\ 0{,}9x_1^2 + 0{,}1x_2^2 = 9{,}7 & |\cdot 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 = 31 \\ 9x_1^2 + x_2^2 = 97 \end{cases}$$

$x_2 = 31 - 9x_1$

$9x_1^2 + (31-9x_1)^2 = 97$

$9x_1^2 + 961 - 558x_1 + 81x_1^2 - 97 = 0$

$90x_1^2 - 558x_1 + 864 = 0 \quad |:9$

$10x_1^2 - 62x_1 + 96 = 0$

$D = 62^2 - 4 \cdot 10 \cdot 96 = 4$

$\sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$

$x_1 = \frac{62-2}{20} = 3;\quad x_1 = \frac{62+2}{20} = \frac{64}{20} = 3{,}2$ – сторонній корінь, бо $(x_1 < x_2)$

$x_2 = 31 - 9 \cdot 3 = 4 \qquad x_2 = 31 - 9 \cdot 3{,}2 = 2{,}2$ – сторонній корінь, бо $(x_1 < x_2)$

В: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$

ξ	3	4
	0,9	0,1

8. За формулою Муавра-Лапласа (локальною), маємо:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$(m=100,\ n=350,\ p=0{,}35,\ q=0{,}65)$

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{100-350\cdot 0{,}35}{\sqrt{350\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65}} \approx -2{,}52$$

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{350\cdot 0{,}35\cdot 0{,}65}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-2{,}52)^2}{2}} =$$

$$\approx 0{,}112 \cdot \varphi(2{,}52) \approx 0{,}112\cdot 0{,}0167 \approx$$

$$\approx 0{,}00187$$

В: 0,00187

9. $P(\xi = 1) = \frac{1\cdot 1}{6\cdot 6} = \frac{1}{36}$

$$P(\xi=2) = \frac{2\cdot 2}{6\cdot 6} - P(\xi=1) = \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P(\xi=3) = \frac{3\cdot 3}{6\cdot 6} - P(\xi=2) - P(\xi=1) =$$

$$= \frac{9}{36} - \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(\xi=4) = \frac{4\cdot 4}{6\cdot 6} - P(\xi=3) - P(\xi=2) - P(\xi=1)$$

$$= \frac{16}{36} - \frac{5}{36} - \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P(\xi=5)=\frac{5\cdot5}{6\cdot6}-P(\xi=4)-P(\xi=3)-$$

$$-P(\xi=2)-P(\xi=1)=\frac{25}{36}-\frac{7}{36}-\frac{5}{36}-\frac{3}{36}-\frac{1}{36}=$$

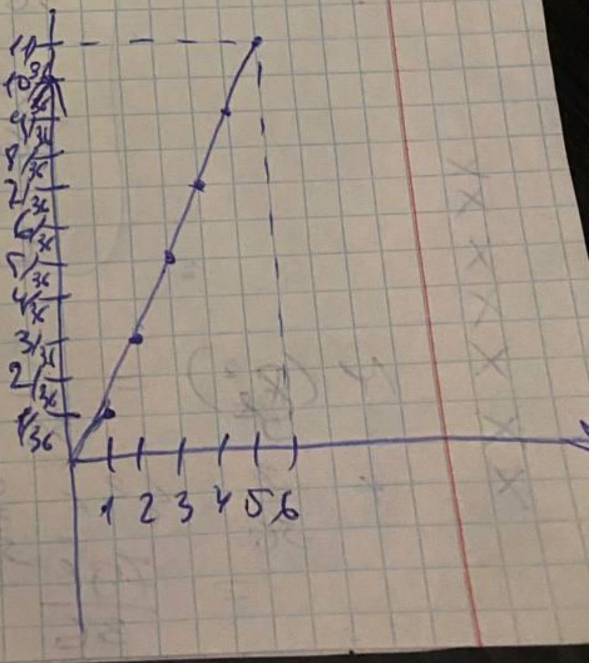
$$=\frac{9}{36}$$

$$P(\xi=6)=\frac{6\cdot6}{36}-P(\xi=5)-P(\xi=4)-$$

$$-P(\xi=3)-P(\xi=2)-P(\xi=1)=\frac{36}{36}-\frac{9}{36}-$$

$$-\frac{7}{36}-\frac{5}{36}-\frac{3}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$$

ξ	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$



$$M\xi = \frac{1}{36}\cdot 1 + \frac{3}{36}\cdot 2 + \frac{5}{36}\cdot 3 + \frac{7}{36}\cdot 4 + \frac{9}{36}\cdot 5 +$$

$$+ \frac{11}{36}\cdot 6 = \frac{161}{36}$$

$$F(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi \le 1 \\ \frac{1}{36}, & \text{якщо } 1 < \xi \le 2 \\ \frac{4}{36}, & \text{якщо } 2 < \xi \le 3 \\ \frac{9}{36}, & \text{якщо } 3 < \xi \le 4 \\ \frac{16}{36}, & \text{якщо } 4 < \xi \le 5 \\ \frac{25}{36}, & \text{якщо } 5 < \xi \le 6 \\ 1, & \text{якщо } \xi > 6 \end{cases}$$

$$M(\xi^2) = \frac{1}{36}\cdot 1^2 + \frac{3}{36}\cdot 2^2 + \frac{5}{36}\cdot 3^2 +$$

$$+ \frac{7}{36}\cdot 4^2 + \frac{9}{36}\cdot 5^2 + \frac{11}{36}\cdot 6^2 =$$

$$= \frac{791}{36}$$

D (

$-\left(\frac{16}{3}\right.$

σ

10

$D(\xi) = M(\xi_2^2) - (M(\xi))^2 = \frac{791}{36} -$

$- \left(\frac{161}{36}\right)^2 \approx 1,972$

$\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1,972} \approx 1,404$

10. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 2(x-1), & x \in (-1; 1,5] \\ 1, & x > 1,5 \end{cases}$

$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ 2, & x \in (-1; 1,5] \\ 0 & x > 1,5 \end{cases}$

Мода - довільне число на проміжку $[-1, 1,5]$

$f(M_0) = max(f(x))$

$M_0 \in (-1; 1,5]$

$P(x < \mu) = \frac{1}{2}$

$\cancel{P(x < \mu) = \int_{-1}^{\mu} (2dx = 2x\Big|_{-1}^{\mu} =}$

$$= 2\mu + 2 = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{2\mu = -\frac{3}{2}}$$

$$\cancel{\mu = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\cancel{\mu = -\frac{3}{4} = -0{,}75}$$

$$2(\mu - 1) = \frac{1}{2}$$

$$2\mu - 2 = \frac{1}{2}$$

$$2\mu = \frac{5}{2}$$

$$\mu = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx =$$

$$\cancel{= \int_{-1}^{1{,}5} x \cdot 2 \, dx} =$$

$$= \int_{-1}^{1,5} \cancel{2x}\, x^2 = x^2 \Big|_{-1}^{1,5} =$$

$$= \frac{3^2}{2^2} + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{9}$$

$$\cancel{D(x) = M(x^2) - M^2(x)} =$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(M(x)\right)^2 =$$

$$= \int_{-1}^{1,5} 2 \; \frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{1,5} = \frac{2\cdot 3^2}{2^3} \cdot 3 =$$

$$= \frac{\cancel{27}^{\,9} \cdot \cancel{2}}{{}_{4}\cancel{8} \cdot \cancel{3}} = \frac{9}{4}$$