Лекція 4
Випадкова величина. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Поняття випадкової величини є фундаментальним у теорії ймовірностей поряд з такими поняттями, як випадкова подія та ймовірність випадкової події .

Якщо випадкову подію розуміти як якісну характеристику випадкового результату досліду, то випадкова величина – її числовий еквівалент.

Прикладами випадкової величини можуть слугувати:

- кількість балів, одержаних під час сесії студентом з певного предмета;
- кількість очок, які випали на верхній грані грального кубика;
- кількість якісних товарів серед відібраних n товарів певної партії;
- кількість пострілів, які зробив стрілець, до першого влучного;
- кількість автомобілів, які перетнуть деяке перехрестя за проміжок часу T ;
- час T безвідмовної роботи деякого приладу;
- величина відхилення розміру деталі від стандарту тощо.

У всіх прикладах маємо справу з величиною, яка певним чином характеризує досліджуване явище. Кожна з описаних величин під впливом випадкових обставин може набувати різних значень. Вказати наперед, якого саме значення набуде випадкова величина, неможливо, оскільки воно може змінюватися випадково від досліду до досліду.

Для позначення випадкових величин використовують великі латинські літери $X, Y, Z, ...$ (також використовують літери $\xi, \eta, \ldots$ грецького алфавіту), а їх можливих значень – відповідні малі літери $x, y, z, \ldots$.

Враховуючи теоретико-множинне трактування основних понять теорії ймовірностей, випадкова величина X є числовою функцією елементарної події: $X = X(\omega)$, де ω – елементарна подія, яка належить простору елементарних подій Ω ($\omega \in \Omega$). Тобто областю визначення функції $X(\omega)$ є простір Ω елементарних подій деякого випробування, а множина можливих значень випадкової величини X є не що інше, як множина значень функції $X(\omega)$.

Випадковою величиною *вважають величину X, яка залежно від випадкового результату експерименту набуває лише одного з можливих для неї числових значень.*

Залежно від характеру множини значень, розглядатимемо випадкові величини двох типів: *дискретні* (множина значень є скінченною або зліченною) та *неперервні* (множина значень повністю заповнює деякий проміжок числової осі). У сформульованих на початку розділу прикладах перші шість є прикладами дискретних, а останні два – неперервних випадкових величин.

Отже, для того, щоб описати випадкову величину, необхідно передусім визначити всі можливі її значення. Однак цього замало для того, щоб можна було робити деякі істотні висновки про неї. Різні випадкові величини можуть мати однакову множину можливих значень.

Тому для повного опису випадкової величини потрібно не тільки визначити множину всіх можливих її значень, а також встановити, з якою ймовірністю вона може набувати цих значень.

Будь-яке правило, яке встановлює відповідність між множиною значень випадкової величини та ймовірністю всіх можливих подій, пов'язаних з цією випадковою величиною (ймовірністю того, що вона набуде те чи інше значення або потрапить у деякий інтервал тощо), називають її ***законом розподілу***.

4.1. Функція розподілу ймовірностей випадкової величини

Випадкові величини можуть бути найрізноманітнішого характеру. Більше того, множини їх можливих значень можуть бути як скінченними, так і нескінченними (зліченними або незліченними). Універсальний спосіб задання закону розподілу різних за своєю природою випадкових величин пов'язаний із *функцією розподілу випадкової величини*.

Нехай X – деяка випадкова величина, а x – довільне дійсне число.

Функцією розподілу ймовірностей (функцією розподілу) *$F(x)$ випадкової величини X називають ймовірність того, що в результаті випробування ця випадкова величина набуде значення, меншого за деяке фіксоване число x:*

$$F(x) = P(X < x), \tag{4.1}$$

де $x \in (-\infty; +\infty)$.

Геометрично цю рівність можна трактувати так: функція $F(x)$ вказує на ймовірність того, що випадкова величина X набуде значень, які зображаються точками, що розміщені на дійсній осі ліворуч від точки x:

$$F(x) = P\left(X \in (-\infty; x)\right).$$

Нижче буде показано, що для дискретних випадкових величин функція розподілу є розривною функцією.

Часто неперервність випадкової величини і її функції розподілу фактично ототожнюють, тобто: в*ипадкову величину вважають* ***неперервною****, якщо її функція розподілу є неперервною функцією.*

Кожна випадкова величина однозначно визначає свою функцію розподілу.

Властивості функції розподілу ймовірностей

1. *Значення функції розподілу $F(x)$ належать відрізку $[0;1]$*, тобто $0 \le F(x) \le 1$.

► Дійсно, $F(x)-$ це ймовірність події $\{X < x\}$, а значення ймовірності довільної події завжди належить проміжку $[0;1]$. ◄

2. *Функція розподілу $F(x)$ є неспадною функцією*, тобто для довільних x_1 та x_2 з того, що $x_1 < x_2$ випливає, що $F(x_1) \le F(x_2)$.

► Нехай $x_1 < x_2$ і, згідно з означенням, $F(x_1) = P(X < x_1)$, $F(x_2) = P(X < x_2)$. Подію $X < x_2$ можна розглядати як суму несумісних подій $\{X < x_1\}$ та $\{x_1 \le X < x_2\}$. Тоді, згідно з теоремою про суму несумісних подій, $P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$. Або інакше $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$. Але ж $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, як ймовірність деякої події, тому $F(x_1) \le F(x_2)$.◄

3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a,b]$, *то*

$$F(x)=0 \ \textit{при} \ x \le a \quad \textit{і} \quad F(x)=1 \ \textit{при} \ x > b.$$

► Справді, з умови, що всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a,b]$, очевидно, що, якщо $x \le a$, то подія $\{X < x\}$ є неможливою і $F(x)=P\left(X<x\right)=P(\varnothing)=0$.

Зрозуміло, що подія, яка полягає в тому, що випадкова величина, всі можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, у результаті випробування набуде значення саме з цього відрізка, є достовірною, тобто $P\left(a \le X \le b\right)=1$. Залишилось показати, що для довільного $x > b$ подія $\{X < x\}$ є також достовірною:

$P\left(X<x\right)=P\left(X<a\right)+P\left(a \le X \le b\right)+P\left(b < X \le x\right)= 0+1+0=1$.◄

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$. Цю властивість можна вважати узагальненням попередньої для випадку безмежно віддалених кінців відрізка $[a,b]$ ($a\to-\infty$, $b\to+\infty$).

5. Ймовірність того, що випадкова величина X *набуде значення з проміжку* $[a;b)$ *дорівнює приросту функції* $F(x)$ *на цьому проміжку*, тобто

$$P(a \le x < b)=F(b)-F(a). \tag{4.2}$$

► Рівність (4.2) можна одержати за $x_1=a$ та $x_2=b$ з рівності $F(x_2)-F(x_1)=P(x_1 \le X < x_2)$, яку було одержано під час доведення властивості 2. ◄

6. *Функція розподілу випадкової величини неперервна зліва*, тобто для будь-якого значення x_0:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0). \tag{4.3}$$

► Виберемо деяку збіжну до числа x_0 зростаючу послідовність $x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$. Позначимо A_n подію, яка полягає в тому, що $x_n \le X < x_0$. Зрозуміло, що $A_i \subset A_j$ для довільних подій A_i та A_j

таких, що $i > j$. Подія, яка є добутком усіх подій A_n, є неможливою, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Застосувавши рівність (4.2), одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}\left(F(x_0) - F(x_n)\right) =$$
$$= F(x_0) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0) - F(x_0 - 0).$$

Отже, $F(x_0) - F(x_0 - 0) = 0$. Враховуючи відоме позначення $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} F(x) = F(x_0 - 0)$, одержуємо рівність (4.3). ◄

7. *Функція розподілу може мати не більше ніж зліченну множину точок розриву першого роду (стрибків).* У кожній точці x_i розриву величина стрибка дорівнює різниці $F(x_i + 0) - F(x_i)$, де $F(x_i + 0) = \lim\limits_{x\to x_i + 0} F(x)$.

Цю властивість приймемо без доведення. Ілюстрацію стрибків функції розподілу можна побачити на рис. 4.2.

8. *Ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде будь-якого окремого (точкового) значення* a*, дорівнює нулю,* тобто, якщо X – неперервна випадкова величина, то

$$P(X = a) = 0.$$

► У формулі (4.2) приймемо $b = a + \Delta x$, тоді $P(a \le x < a + \Delta x) =$ $P(a \le x < a + \Delta x) = F(a + \Delta x) - F(a)$. Але, якщо у випадкової величини функція розподілу є неперервною, то, спрямувавши $\Delta x \to 0$, одержуємо $F(a + \Delta x) \to F(a)$ і $P(a \le x < a + \Delta x) = F(a + \Delta x) - F(a) \to 0$, що й треба було довести. ◄

Остання властивість означає, що хоча подія, яка полягає в тому, що неперервна випадкова величина набуде одного конкретного значення із нескінченної кількості можливих значень, не є неможливою, проте ймовірність такої події є нульовою. Цей результат чудово узгоджується з практичними задачами. Подія {потяг прибуде точно о 18.00} завжди передбачає потрапляння моменту прибуття X в інтервал щонайменше завдовжки в одну хвилину.

4.2. Закони розподілу дискретної випадкової величини

Випадкову величину X *називають* ***дискретною****, якщо множина її можливих значень є скінченною чи зліченною.*

Тобто дискретна випадкова величина набуває значень, які можна пронумерувати та записати у вигляді скінченної або зліченної послідовності чисел $x_1, x_2, ..., x_k, ...$. Закон розподілу такої випадкової величини називають *дискретним*. За дискретного розподілу загальна "маса" ймовірності, яка дорівнює одиниці, зосереджена в скінченній або зліченній множині точок x_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Інакше кажучи, це – точковий розподіл "маси" ймовірності, подібний, наприклад, до точкового розподілу електричних зарядів.

Поведінку випадкової величини не обов'язково описують за допомогою функції розподілу. Її часто характеризують іншим способом. *Будь-яку характеристику випадкової величини називають* ***законом її розподілу,*** *якщо за певним правилом з неї можна одержати функцію розподілу*. Так для повної ймовірнісної характеристики дискретної випадкової величини X, яка з певними додатними ймовірностями може набувати значень $x_1, x_2, ..., x_k, ...$, достатньо знати ймовірності p_i того, що випадкова величина набуде значення x_i:

$$p_i = P(X = x_i)\,.$$

Відповідність між значеннями дискретної випадкової величини та ймовірностями відповідних подій можна подати таблично, аналітично (у вигляді формули) чи графічно.

У разі табличного задання дискретної випадкової величини у першому рядку таблиці в порядку зростання записують всі можливі її значення, а в другому – відповідні їм ймовірності.

Таблиця 4.1

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

де $x_1 < x_2 < ... < x_n$, $p_i = P(X = x_i)$.

Таке подання закону розподілу називають ***дискретним рядом розподілу ймовірностей*** або ***рядом розподілу*** *дискретної випадкової величини* X.

Події $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots, \{X = x_n\}$ утворюють повну групу несумісних подій, тому згідно з наслідком 2.2 теореми про суму ймовірностей несумісних подій (див. п. 2.1) повинна виконуватись умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (4.4)$$

Тобто сума ймовірностей всіх можливих значень дискретної випадкової величини дорівнює одиниці. Цю рівність часто називають *умовою нормування ймовірностей.*

⏭ **Приклад 4.1**. Серед 500 лотерейних квитків є 10 з виграшем 100 грн., три – з виграшем 500 грн. та один, на який припадає супервиграш у 10000 грн. Учасник лотереї придбав один квиток. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – виграшу, що припадає на цей квиток.

Розв'язання. За умовою задачі 486 квитків є безвиграшними. Поставимо у відповідність випадковій події, яка полягає у придбанні безвиграшного квитка, значення $x_1 = 0$ випадкової величини. Ймовірність того, що квиток виявиться безвиграшним $p_1 = P(X = 0) = \dfrac{486}{500}$. Зважаючи на величини виграшу лотереї, випадкова величина X може набувати також значень $x_2 = 100$, $x_3 = 500$, $x_4 = 10000$ з ймовірностями

$$p_2 = P(X = 100) = \frac{10}{500}, \quad p_3 = P(X = 500) = \frac{3}{500},$$

$$p_4 = P(X = 10000) = \frac{1}{500}.$$

Перевірка виконання умови нормування:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{486}{500} + \frac{10}{500} + \frac{3}{500} + \frac{1}{500} = 1.$$

Будуємо дискретний ряд розподілу ймовірностей цієї випадкової величини. Для цього у першому рядку таблиці запишемо можливі значення випадкової величини, а у другому – відповідні їм ймовірності:

X	0	100	500	10000

p	$\frac{486}{500}$	$\frac{10}{500}$	$\frac{3}{500}$	$\frac{1}{500}$

За аналітичного подання закону розподілу дискретної випадкової величини у порядку зростання вказують можливі значення x_i випадкової величини, а відповідні їм ймовірності p_i подають аналітично, у вигляді формули (такий спосіб задання, як буде показано нижче, зручний для біномного, геометричного, пуассонового та деяких інших розподілів).

Графічне задання закону розподілу полягає ось у чому: у прямокутній системі координат вздовж осі абсцис відкладають можливі значення x_i випадкової величини X, а вздовж осі ординат – їх ймовірності p_i. Точки з координатами (x_i, p_i) з'єднують відрізками. Одержану ламану лінію називають *многокутником розподілу ймовірностей*. В умовах прикладу 4.1 многокутник розподілу ймовірностей має вигляд, зображений на рис. 4.1.

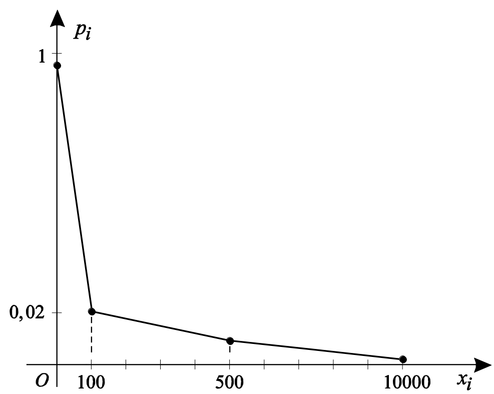


Рис. 4.1. Многокутник розподілу ймовірностей

Коли множина можливих значень дискретної випадкової величини є зліченною, таблиця дискретного ряду розподілу ймовірностей складається з двох нескінченних рядків $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ та $p_1, p_2, ..., p_n, ...$:

Таблиця 4.2

X	x_1	x_2	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_n	...

Аналогічно до (4.1), сума числового ряду, складеного з ймовірностей p_i, дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 .$$

Якщо закон розподілу дискретної випадкової величини заданий рядом розподілу ймовірностей (табл. 4.1), то для довільного дійсного x функцію розподілу визначають за допомогою рівності:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i ,$$

де підсумовують за всіма індексами $i = 1, 2, \ldots, k$, для яких $x_i < x$, тобто $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x \le x_1, \\ p_1, & якщо \quad x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & якщо \quad x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \ldots \qquad \ldots \\ p_1 + p_2 + ... p_{n-1}, & якщо \quad x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & якщо \quad x > x_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Функція розподілу дискретної випадкової величини (зауважимо, що іноді цю функцію ще називають *кумулятивною функцією*) є сталою на окремих проміжках і має скінченну $x_1, x_2, ..., x_n$ або зліченну $x_1, x_2, ...$ множину точок розриву першого роду. Стрибок функції $F(x)$ у точці x_i дорівнює ймовірності $p_i = P(X = x_i)$ того, що випадкова величина набуде значення x_i .

Якщо два можливі значення дискретної випадкової величини розділені інтервалом, в якому інших значень цієї величини немає, то в цьому інтервалі функція розподілу є сталою. Графік функції розподілу дискретної випадкової величини зі скінченною множиною можливих значень має "східчастий" вигляд. Така функція не є неперервною справа. Графічно цей факт ілюструють стрілками (див. рис. 4.2).

⏭ **Приклад 4.2.** У деякому районі міста працює декілька туристичних агенств, причому п'ять із них мають дворічний стаж роботи, два – чотирирічний та три – шестирічний. Побудувати: закон розподілу випадкової величини X – тривалості (в роках) присутності на ринку навмання обраного туристичного агентства цього району, функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ цієї випадкової величини та її графік.

Розв'язання. Поставимо у відповідність випадковій події, яка полягає у тому, що випадково вибране агенство має дворічний стаж роботи, значення випадкової величини $x_1 = 2$. Зрозуміло, що відповідна ймовірність $p_1 = P(X = 2) = \dfrac{5}{5+2+3} = 0,5$. Аналогічно, $p_2 = P(X = 4) = 0,2$ та $p_3 = P(X = 6) = 0,3$. Тому дискретний ряд розподілу випадкової величини X має вигляд :

X	2	4	6
p	0,5	0,2	0,3

Для побудови функції розподілу відкладемо на числовій осі Ox точки, що відповідають всім можливим значенням тривалості присутності на ринку навмання вибраної фірми (див. рис. 4.2). У результаті одержимо такі чотири проміжки: $(-\infty; 2]$; $(2; 4]$; $(4; 6]$; $(6; \infty)$. Запишемо функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x \le 2, \\ 0,5, & \textit{якщо} \quad 2 < x \le 4, \\ 0,2 + 0,5 = 0,7, & \textit{якщо} \quad 4 < x \le 6, \\ 0,2 + 0,5 + 0,3 = 1, & \textit{якщо} \quad x > 6. \end{cases}$$

Графік знайденої функції розподілу зображений на рис. 4.2.

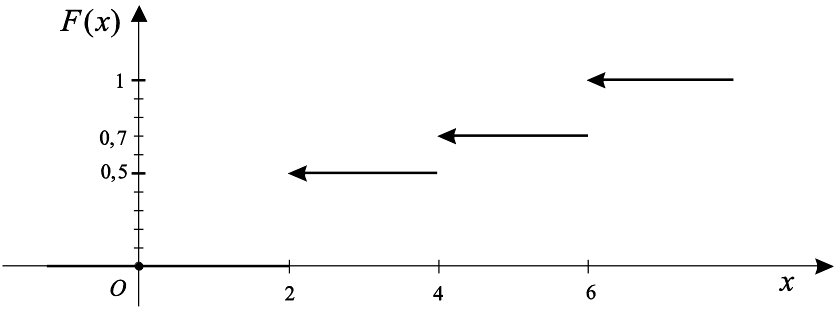


Рис. 4.2. Графік функції розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини з прикладу 4.2

4.3. Числові характеристики випадкової величини

Як було показано в попередньому пункті, функція розподілу ймовірностей випадкової величини надає повну інформацію про неї. Проте часто достатньо одержати про неї лише деяке загальне уявлення. Наприклад, досить вказати окремі числові величини, які певним способом визначають істотні ознаки розподілу випадкової величини: середнє значення випадкової величини; деяке число, що характеризує ступінь розсіювання значень навколо її середнього значення тощо. Користуючись такими величинами, стисло можемо одержати загальну кількісну характеристику випадкової величини.

Ці величини називають *числовими характеристиками* випадкової величини.

Найважливішими з числових характеристик випадкової величини є математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

У подальших викладеннях властивості числових характеристик будемо формулювати загально для випадкових величин дискретного та неперервного типу. Формули для обчислення числових характеристик та доведення властивостей здійснимо для дискретного випадку. Аналогічні формули для обчислення числових характеристик неперервної випадкової величини читач знайде у наступному розділі.

4.3.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Випадкова величина може набувати різних числових значень, тому на практиці часто важливо знати середнє значення випадкової величини. Для оцінювання середнього (у ймовірнісному сенсі) значення випадкової величини введено поняття математичного сподівання, яке визначають з врахуванням ймовірностей її окремих значень.

Для дискретної випадкової величини X *, заданої дискретним рядом розподілу*

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

математичним сподіванням *називають суму добутків усіх можливих значень цієї випадкової величини на їхні ймовірності:*

$$M\left(X\right)= x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \qquad (4.6)$$

Розглянемо тепер випадок зліченнозначної дискретної випадкової величини із таким рядом розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	...
p	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n	...

Математичним сподіванням *дискретної випадкової величини* X *із зліченною множиною можливих значень називають суму ряду*

$$M\left(X\right)= x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_i p_i + ... = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \ , \qquad (4.6')$$

за умовою, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ *є абсолютно збіжним.*

Якщо ж для деякої випадкової величини X ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ не є абсолютно збіжним, то така випадкова величина не має математичного сподівання.

Математичне сподівання є числом, навколо якого зосереджені всі можливі значення випадкової величини, тому його часто ще називають *центром розподілу*. Варто також запам'ятати, що математичне сподівання завжди є числом, яке є не меншим від найменшого, та не більшим від найбільшого (якщо такі існують) з можливих значень випадкової величини.

⏭ **Приклад 4.3.** Обчислити математичне сподівання дискретної випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	2	4	6
p	0,5	0,2	0,3

Розв'язання. $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{k} x_i p_i = 2\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}3=3{,}6$. ⏮

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини C дорівнює цій величині:

$$M(C)=C.$$

► Довільну сталу величину можна розглядати, як випадкову величину X, множина значень якої складається з одного числа C. Дискретний ряд розподілу такої величини (її іноді називають *виродженою*) має вигляд :

X	C
p	1

тому і $M(C)=M(X)=C\cdot 1=C$. ◄

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання, тобто, якщо $C=const$, то:

$$M(CX) = CM(X).$$

► Якщо випадкова величина X задана дискретним рядом

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

то добуток CX є також випадковою величиною із дискретним рядом розподілу

CX	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Справді, у той час, коли $X = x_i$, випадкова величина CX набуває значень Cx_i. Тому для ймовірностей відповідних подій виконуються рівності $P(X = x_i) = P(CX = Cx_i) = p_i$ для довільного $i = 1, 2, \ldots, n$.

Математичне сподівання випадкової величини CX дорівнює

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CM(X). \quad ◄$$

Нехай X та Y – деякі випадкові величини із законами розподілу $P(X = x_i) = p_i$ та $P(Y = y_j) = g_j$. Тоді *випадкову величину* $Z = X + Y$ *називають сумою цих величин, якщо її можливі значення є всеможливими сумами* $x_i + y_j$ *кожного із значень* X *та кожного із можливих значень* Y *з ймовірностями* p_{ij}*, які дорівнюють ймовірностям спільного настання подій* $\{X = x_i\}$ *та* $\{Y = y_j\}$.

3. Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Ця властивість поширюється на довільну кількість доданків, тобто:

Якщо X_1, X_2, …, X_k *– випадкові величини, то*

$$M\left(X_1 + X_2 + \ldots + X_k\right) = M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + \ldots + M(X_k).$$

Наслідком властивостей 2 та 3 є властивість:

Математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці математичних сподівань цих величин

$$M\left(X - Y\right) = M\left(X\right) - M\left(Y\right).$$

Нехай X та Y – деякі випадкові величини із законами розподілу $P(X = x_i) = p_i$ та $P(Y = y_j) = g_j$. Тоді *добутком цих випадкових величин називають випадкову величину* $Z = X \cdot Y$*, можливі значення якої є всеможливими добутками* $x_i \cdot y_j$ *кожного із можливих значень* X *на кожне із можливих значень* Y *з ймовірностями* p_{ij}*, які дорівнюють ймовірності спільного настання подій* $\{X = x_i\}$ *та* $\{Y = y_j\}$*:* $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Випадкові величини X *та* Y *називають* ***незалежними****, якщо закон розподілу величини* X *не залежить від того, якого значення набула величина* Y *і навпаки.* Для дискретних випадкових величин незалежність величин X та Y означає незалежність подій $\{X = x_i\}$ та $\{Y = y_j\}$ для довільних i, j. Згодом будуть сформульовані умови залежності чи незалежності двох випадкових величин.

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань :

$$M\left(X \cdot Y\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

5. Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю

$$M\left(X - M\left(X\right)\right) = 0.$$

► Дійсно, за наслідком властивості 3

$$M\left(X - M\left(X\right)\right) = M(X) - M(M(X)),$$

але згідно з властивістю 1 справедлива рівність $M(M(X)) = M(X)$, оскільки математичне сподівання випадкової величини є сталою, невипадковою, величиною. Тому

$$M\left(X - M\left(X\right)\right) = M(X) - M(X) = 0. \text{ ◄}$$

Випадкову величину $\overset{0}{X} = X - M\left(X\right)$ *називають* ***центрованою***. Тому останню властивість формулюють також так:

Математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

6. *Якщо для довільної елементарної події* ω *значення випадкової величини* X *не перевищує значення* Y, *тобто є такими, що* $X(\omega) \le Y(\omega)$, *то* $M(X) \le M(Y)$.

Цю властивість приймемо без доведення.

4.3.2. Дисперсія випадкової величини

Для характеристики розсіювання значень випадкової величини навколо її центра розподілу використовують числову характеристику, яку називають дисперсією випадкової величини та позначають $D(X)$.

Дисперсією *випадкової величини* X *називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання*

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 . \tag{4.7}$$

Згідно з означенням математичного сподівання у разі скінченної кількості значень дискретної випадкової величини рівність (4.7) можна подати у вигляді:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i , \tag{4.8}$$

а у разі зліченної кількості значень

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i , \tag{4.9}$$

якщо ряд у правій частині рівності є збіжним.

Зрозуміло, що чим менша величина дисперсії, тим тісніше концентруються значення випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Природно може виникнути запитання: чому для характеристики розсіяння значень випадкової величини навколо її математичного сподівання використовують математичне сподівання квадрата різниці $(X - M(X))^2$, а не самої різниці $X - M(X)$, адже ця різниця для кожного значення x з множини можливих значень величини X також визначає наскільки значення x відрізняється від середнього значення $M(X)$. Але для тих значень x, які розташовані на числовій осі лівіше від $M(X)$ (тобто $x < M(X)$) різниця $x - M(X)$ від'ємна. Для випадку $x > M(X)$ різниця $x - M(X)$ є більшою за нуль. Під час підсумовування такі доданки за рахунок різних знаків "погашають" одні одних і в результаті сума може бути близькою до нуля (або дорівнювати нулю), хоча всі можливі значення випадкової величини можуть бути істотно віддаленими від середнього значення. Подібний результат, зрештою, вже було сформульовано і теоретично доведено (див. властивість 5 математичного сподівання). Для прикладу знайдіть $M\left(X - M(X)\right)$ для випадкової величини, заданої дискретним рядом

X	-1000	1000
p	0,5	0,5

Квадрат різниці (або її модуль) дає змогу уникнути таких взаємних "погашень", а оскільки піднесення до другого степеня у певному сенсі є "простішою" функцією за модуль, то вибір зроблено на користь означення дисперсії за формулою (4.7).

Найпростіші властивості дисперсії:

1. Для довільної випадкової величини дисперсія невід'ємна:

$$D(X) \geq 0 .$$

► Дисперсія, як математичне сподівання невід'ємної величини $\left(X - M\left(X\right)\right)^2$, не може бути від'ємною: сума невід'ємних доданків є невід'ємною. ◄

2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$ *і навпаки, якщо дисперсія випадкової величини дорівнює нулю, то ця величина є сталою величиною.*

► Згідно з означенням, дисперсія величини С:

$$D(C) = M\left(C - M\left(C\right)\right)^2 = M(C - C)^2 = M(0) = 0 .$$

Тут застосована властивість 1 математичного сподівання.

Тепер навпаки, якщо $D(X) = M(X - M(X))^2 = 0$, то $X = M(X)$, тобто X є сталою величиною. ◄

3. Дисперсія добутку випадкової величини на стале число дорівнює добутку дисперсії випадкової величини на квадрат цього числа:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

► Згідно з означенням,

$$D(CX) = M\left(CX - M\left(CX\right)\right)^2 = M(C(X - M(X))^2 =$$

$$= M(C^2(X - M(X))^2) = C^2 M(X - M(X))^2 = C^2 D(X).$$

що і доводить цю властивість. ◄

4. Дисперсія є парною функцією від випадкової величини:

$$D(-X) = D(X).$$

► Ця властивість є наслідком попередньої, адже

$$D(-X) = (-1)^2 D(X) = D(X). \quad ◄$$

5. Дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням її квадрата та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{4.10}$$

► Справді, згідно з означенням дисперсії,

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = M\left(X \cdot X - 2X \cdot M(X) + (M(X))^2\right) =$$

$$= M(X^2) - 2M\left(X \cdot M(X)\right) + M\left(M(X)\right)^2 =$$

$$= M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2 =$$

$$= M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - M^2(X). \quad ◄$$

Формула (4.10) для обчислення дисперсії випадкової величини часто виявляється зручнішою у застосуванні, аніж (4.7). Для скінченної дискретної випадкової величини ця формула має вигляд

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2, \tag{4.10′}$$

а для зліченної

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i-\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i\right)^2. \qquad (4.10'')$$

Зрозуміло, що дисперсія зліченної випадкової величини існує, якщо ряди у правій частині рівності (4.10″) абсолютно збіжні.

6. *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин* X,Y *дорівнює сумі їх дисперсій*

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

► Згідно з формулою (4.10) дисперсію суми запишемо у вигляді

$$D(X+Y)=M(X+Y)^2-M^2(X+Y).$$

Тоді, застосовуючи властивість математичного сподівання суми випадкових величин, одержуємо

$$D(X+Y)=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$$

$$=M(X^2)+2M(XY)+M(Y^2)-M^2(X)-2M(X)M(Y)-M^2(Y).$$

Оскільки X,Y незалежні, то використаємо тепер властивість 4 математичного сподівання $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$:

$$D(X+Y)=M(X^2)-M^2(X)+M(Y^2)-M^2(Y)=D(X)+D(Y). \ ◄$$

Ця властивість поширюється на довільну кількість незалежних випадкових величин:

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

7. *Дисперсія різниці незалежних випадкових величин* X,Y *дорівнює сумі їх дисперсій:*

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

► $D(X-Y)=D(X+(-Y))=D(X)+D(-Y)=D(X)+D(Y)$.

Під час доведення була використана властивість парності дисперсії. ◄

4.3.3. Середнє квадратичне відхилення, мода та медіана дискретної випадкової величини

Величина дисперсії свідчить про відхилення випадкової величини від її математичного сподівання та має розмірність квадрата цієї розмірності випадкової величини.

Інша числова характеристика випадкової величини, яку називають *середнім квадратичним відхиленням* та обчислюють за формулою

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}, \qquad (4.11)$$

також слугує для оцінювання міри розсіювання випадкової величини відносно її математичного сподівання, проте вона є тієї ж розмірності, що й сама випадкова величина. Завдяки цій властивості для характеристики розсіяння випадкової величини здебільшого застосовують саме її.

Крім $\sigma(X)$ для середнього квадратичного відхилення часто використовують позначення σ_x. Зрозуміло, що

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}\geq 0 .$$

⏭ **Приклад 4.4.** Знайти середнє квадратичне відхилення σ_x дискретної випадкової величини X, заданої рядом розподілу:

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,35	0,20	0,15

Розв'язання. Обчислимо спочатку математичне сподівання заданої випадкової величини

$$M(X)=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}35+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}15=2{,}1,$$

а також математичне сподівання квадрата цієї випадкової величини

$$M\left(X^2\right)=0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}35+9\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}15=5{,}8.$$

Для відшукання дисперсії скористаємося формулою (4.10)

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=5{,}8-(2{,}1)^2=1{,}39 .$$

Середнє квадратичне відхилення обчислимо згідно з формулою (4.11)

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}39}\approx 1{,}17.$$ ⏮

Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ *дорівнює квадратному кореню суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин:*

$$\sigma\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)} . \qquad (4.12)$$

► Згідно з властивістю 6, дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n) .$$

Тоді

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{D(X_1 + X_2 + ... + X_n)} =$$

$$= \sqrt{D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)} = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)},$$

що і доводить твердження. ◄

У теорії ймовірностей та її застосуваннях часто використовують інші числові характеристики.

Модою (*позначають* M_0*) дискретної випадкової величини* X *називають найімовірніше значення цієї випадкової величини.*

Для визначення моди у дискретному ряді розподілу знаходять таке значення x_k випадкової величини, якому відповідає найбільша ймовірність p_k. Тоді $M_0 = x_k$. Зауважимо, що таке значення не обов'язково одне (*унімодальний* випадок), їх може бути декілька (*багатомодальна* або *полімодальна* випадкова величина). Якщо ж у випадкової величини найбільша ймовірність не відповідає жодному значенню або відповідає значній кількості значень дискретної випадкової величини, тоді більший інтерес становить значення, якому відповідає найменша ймовірність. Таку випадкову величину називають *антимодальною*.

Антимодальною також є дискретна скінченнозначна випадкова величина, в якої ймовірності всіх подій $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,n}$ є однаковими і, очевидно, дорівнюють $\dfrac{1}{n}$.

Медіаною M_e *випадкової величини X називають таке її значення, відносно якого ймовірність набуття нею як більших, так і менших значень не перевищує* $0,5$:

$$P(X < M_e) \le 0,5 \quad i \quad P(X > M_e) \le 0,5. \qquad (4.13)$$

Таке означення медіани характеризує її, подібно до математичного сподівання, як деяке середнє значення випадкової величини. Внаслідок цього медіана є корисною для таких випадкових величин, які не мають математичного сподівання (для дискретної випадкової величини це випадок розбіжного числового ряду (4.6′)).

Для дискретної випадкової величини можна сформулювати ще одне означення медіани.

Медіаною *випадкової величини, заданої дискретним рядом розподілу*

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

називають таке значення x_k *цієї випадкової величини, для якого*

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \ge 0,5 \text{, та } \sum_{i=k}^{n} p_i \ge 0,5 . \qquad (4.15)$$

⏭ **Приклад 4.5.** Знайти медіану дискретної випадкової величини, заданої дискретним рядом розподілу

X	2	3	4	5	7
p	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,3 + 0,1 + 0,3 = 0,7 \ge 0,5 ,$$

а також

$$\sum_{i=3}^{5} p_i = 0,3 + 0,1 + 0,2 = 0,6 \ge 0,5 ,$$

то ймовірність p_3, яка увійшла доданком у кожну із знайдених сум, відповідатиме шуканому значенню медіани $M_e = x_3 = 4$. ⏮

Потрібно зазначити, що як моду, так і медіану частіше використовують у разі неперервних випадкових величин, про що йтиметься згодом.

Моменти k-го порядку випадкової величини. Асиметрія та ексцес

Якщо необхідне детальніше вивчення випадкової величини, то використовують такі числові характеристики, як моменти k-го порядку.

Моментом k ***-го порядку*** *випадкової величини* X *щодо точки* a *(*a *– деяке дійсне число) називають математичне сподівання* k*-го степеня відхилення випадкової величини від величини* a

$$M((X-a)^k).$$

Якщо $a=0$*, то момент називають* ***початковим*** *і позначають через* ν_k *:*

$$\nu_k = M(X^k).$$

Очевидно, що $\nu_1 = M\left(X\right)$, тобто *початковим моментом першого порядку є математичне сподівання випадкової величини*, а початковим моментом другого порядку є математичне сподівання квадрата цієї випадкової величини $\nu_2 = M(X^2)$.

Якщо $a = M\left(X\right)$*, то момент називають* ***центральним*** *і позначають* μ_k *:*

$$\mu_k = M((X-M(X))^k).$$

Згідно з властивістю 5 математичного сподівання $\mu_1 = 0$, а згідно з означенням дисперсії

$$\mu_2 = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^2\right) = D(X),$$

тобто *дисперсія є центральним моментом другого порядку*.

Внаслідок властивостей математичного сподівання центральні моменти можна виразити через початкові, зокрема:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Моменти вищих порядків використовують доволі рідко.

Величину $M\left(\left|X-a\right|^k\right)$ *називають* ***абсолютним моментом*** k ***-го порядку відносно точки*** a***.***

Коефіцієнтом асиметрії *(зкошеності), або* ***асиметрією*** *називають число*

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} \ .$$

Він характеризує асиметрію графіка щільності розподілу щодо математичного сподівання. Для симетричного розподілу $A = 0$. Якщо $A > 0$, то крива розподілу (многокутник розподілу у разі дискретної випадкової величини) має правосторонню асиметрію, а якщо $A < 0$, то лівосторонню.

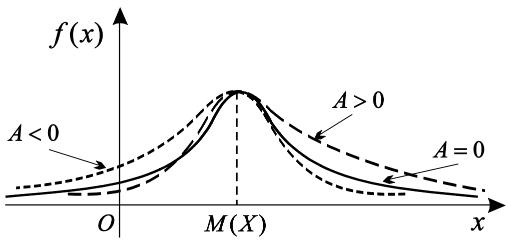


Рис. Вплив величини асиметрії на графік щільності розподілу

***Коефіцієнтом ексцесу**, або **ексцесом** називають число*

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 .$$

Ексцес характеризує гостровершинність кривої розподілу. Випадкові величини, криві розподілу яких (многокутники розподілу у разі дискретних випадкових величин) є більше гостровершинні ніж крива нормально розподіленої випадкової величини (про неї йтиметься у п. 5.3.3), мають додатний коефіцієнт ексцесу. Якщо ж крива розподілу є більше плосковершинною порівняно з кривою нормально розподіленої випадкової величини, то ексцес є від'ємним .

Зрозуміло, що порівнюють з кривою розподілу нормально розподіленої випадкової величини з такими самими математичним сподіванням та дисперсією, як і у досліджуваної випадкової величини.

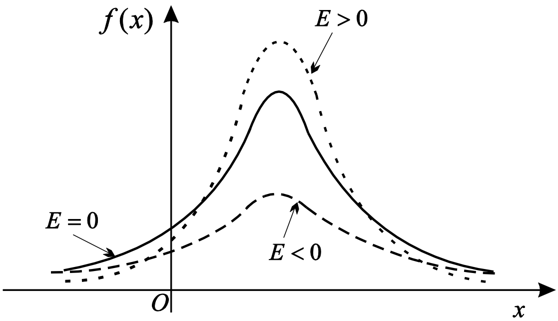


Рис. 5.8. Вплив величини ексцесу на графік щільності розподілу

На практиці використовують також таку числову характеристику, як ***коефіцієнт варіації*** – *відносну характеристику розсіювання, яка числово дорівнює відношенню середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, обчисленому у відсотках*

$$V = \frac{\sigma_x}{M(X)} \cdot 100\ \%.$$

Коефіцієнт варіації показує, наскільки великим є розсіювання випадкової величини порівняно із її середнім значенням.

4.4. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин та їх числові характеристики

Найпоширенішими законами розподілу дискретних випадкових величин є біномний, Пуассона, геометричний та гіпергеометричний. У подальших викладеннях будуть детально описані аналітичний, табличний та графічний способи задання таких законів розподілу, а також доведені формули для спрощеного обчислення числових характеристик випадкових величин, розподілених за вказаними законами розподілу.

4.4.1. Біномний розподіл

Нехай за схемою Бернуллі проводять n незалежних випробувань із сталою ймовірністю $p = P(A)$ настання деякої події A в кожному окремому випробуванні. Позначимо X випадкову величину, яка дорівнює кількості появ події A в n випробуваннях.

Випадкову величину X, яка може набути значень $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$ з ймовірностями, які обчислюють за формулою Бернуллі:

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{4.16}$$

де $q = 1 - p$, називають розподіленою за ***біномним*** *законом розподілу.*

Ряд розподілу описаної випадкової величини X є таким:

X	0	1	2	…	n
p	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Описаний закон розподілу названо так завдяки рівності ймовірностей $C_n^k p^k q^{n-k}$ у формулі (4.16), яка аналітично задає біномний закон розподілу, із доданками у формулі бінома Ньютона (про це вже йшлося у розділі 3, див. зауваження, п. 3.1).

Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини, розподіленої за біномним законом, відповідно дорівнюють

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \tag{4.17}$$

► Позначимо X_i випадкову величину, яка дорівнює кількості появ події A в i-му випробуванні $(i = \overline{1, n})$. Випадкова величина X_i, яку іноді називають *індикатором події*, може набувати лише двох можливих значень 0 та 1. Величина X_i набуває значення 1, якщо в i-му випробуванні подія A відбулася (ймовірність події $\{X_i = 1\}$, зрозуміло, дорівнює p). Аналогічно одержимо, що $P(X_i = 0) = q = 1 - p$. Тому відповідний ряд розподілу кожної випадкової величини X_i матиме вигляд

X	0	1

p	q	p

Звідки $M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $M(X_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p$, $D(X_i) = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

Випадкову величину X, розподілену за біномним законом, можна розглядати як суму випадкових величин: $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Оскільки випадкові величини X_i незалежні в сукупності, то

$$M(X) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = n \cdot M(x_i) = np,$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n \cdot D(x_i) = npq. \blacktriangleleft$$

У підп. 3.2 зазначено, що найімовірніше число появ події у схемі Бернуллі визначається як ціле число, яке задовольняє подвійну нерівність $np - q \le m_0 \le np + p$, тому мода випадкової величини, розподіленої за біномним законом, перебуває у проміжку

$$M_0 \in [np - q; np + p]. \tag{4.18}$$

Зрозуміло, що випадкова величина, розподілена за біномним законом, може бути унімодальною або бімодальною залежно від того, одне чи два значення випадкової величини є найімовірнішими. Цікавим є випадок рівності $p = q = 0{,}5$. Многокутник розподілу за цієї умови є симетричним щодо прямої $x = M(X)$. Якщо, крім того, добуток np є цілим числом, то рівними є мода, медіана та математичне сподівання: $M_0 = M_e = M(X)$ (рис. 4.7).

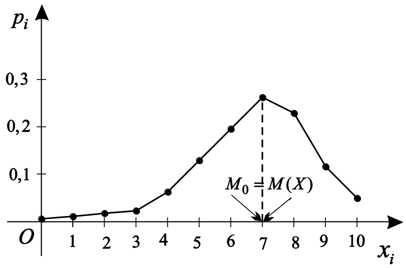


Рис. 4.3.

$n = 10,\quad p = 0,7,\quad M(X) = M_0 = 7$

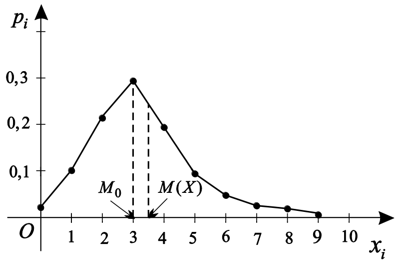


Рис. 4.4.

$n = 10,\quad p = 0,35,\quad M(X) = 3,5,\quad M_0 = 3$

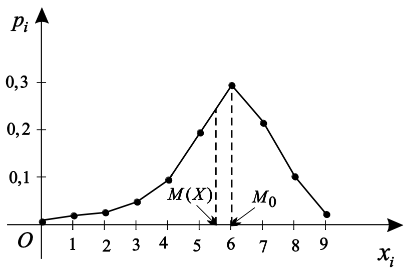


Рис. 4.5.

$n = 9,\quad p = 0,65,\quad M(X) = 5,85,\quad M_0 = 6$

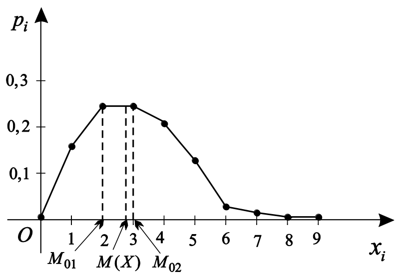


Рис. 4.6.

$n = 9,\quad p = 0,3,\quad M(X) = 2,7,$

$M_{01} = 2,\quad M_{02} = 3$

⏭ **Приклад 4.5.** На науковій конференції 50 % всіх учасників становлять іноземці. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості іноземних учасників серед чотирьох навмання відібраних. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, визначити моду та побудувати многокутник розподілу для цієї випадкової величини.

Розв'язання. Серед чотирьох вибраних учасників може не бути жодного іноземця, можуть бути один, два, три або чотири іноземці. Тобто випадкова величина X є дискретною і може набувати значень $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Зважаючи на те, що учасників конференції є доволі багато, певною мірою можна вважати, що ймовірність того, що навмання вибраний учасник є іноземцем, є сталою у кожному з чотирьох випробувань і дорівнює $p = \dfrac{50}{100} = 0,5$. За такого припущення X є розподіленою за біномним законом розподілу. Згідно з формулою Бернуллі обчислимо відповідні ймовірності p_k для випадку $p = 0,5,\ q = 1 - p = 0,5$:

$$p_0 = C_4^0 p^0 q^4 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad p_1 = C_4^1 p^1 q^3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}, \ p_3 = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_4 = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Перевіримо виконання умови нормування:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1.$$

Ряд розподілу цієї випадкової величини X є таким:

X	0	1	2	3	4
p	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Математичне сподівання $M(X) = np = 2$, дисперсія $D(X) = npq = 1$, а мода і медіана рівні між собою і дорівнюють $M_0 = M_e = 2$. ⏮

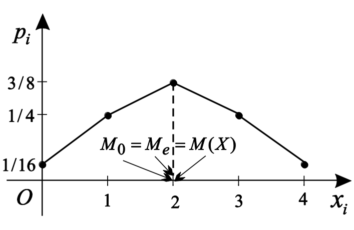


Рис. 4.7. Многокутник розподілу
$n = 4,\ p = 0,5$

Розподіл Пуассона

Дискретну випадкову величину X, що може набувати значень: 0, 1, 2, … *з ймовірностями, які обчислюють згідно з формулою*

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \ k = 0, 1, 2, ..., n, ...\ ,\ \ \lambda > 0\,, \qquad (4.19)$$

називають ***розподіленою за законом Пуассона*** *з параметром* λ.

Дискретний ряд розподілу для такої випадкової величини:

X	0	1	2	…	k	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…

Перевіримо умову нормування. Оскільки ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$ є розкладом функції e^{λ} у ряд Маклорена, тобто $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, що розподілена за законом Пуассона, дорівнюють параметру λ*, тобто:*

$$M(X) = D(X) = \lambda\,. \qquad (4.20)$$

► $M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda\,,$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\lambda^2=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}((k-1)+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\lambda^2=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)-\lambda^2=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)-\lambda^2=\lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})-\lambda^2=\lambda. \blacktriangleleft$$

Для закону розподілу Пуассона *многокутник розподілу* матиме вигляд, дещо подібний до многокутника біномного розподілу з тією відмінністю, що частина ламаної, яка розміщена праворуч від точки $(M_0, p(M_0))$, міститиме, взагалі кажучи, зліченну (а не скінченну) множину відрізків.

Закон розподілу Пуассона можна одержати за допомогою граничного переходу з біномного за умови, що $\lim\limits_{n\to\infty}np=\lambda$ ($n\to\infty$ та $p\to 0$) (див. розділ 3, п. 3.6). Тому його інтерпретують як закон рідкісних (малоймовірних) явищ, які трапляються у довгій серії незалежних випробувань.

⏭ **Приклад 4.6.** До ювелірної крамниці надійшла нова партія коштовностей з 500 виробів. Ймовірність того, що довільний виріб з цієї партії буде проданий упродовж тижня, становить 0,002. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількості проданих упродовж тижня виробів з нової партії. Побудувати многокутник розподілу і вказати найімовірнішу кількість проданих упродовж тижня виробів.

Розв'язання. Оскільки партія містить доволі велику кількість $n=500$ ювелірних виробів з малою ймовірністю продажу кожного з них, то припускаємо, що випадкова величина X – кількість проданих впродовж тижня виробів, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda=np=500\cdot 0,002=1$. Тоді ймовірності можливих значень випадкової величини обчислюють згідно з формулою (4.19) $p_k = P\left(X = k\right) = \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{1}{k!\cdot e}$, а відповідний ряд розподілу

X	0	1	2	3	4	…	500
p	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2!e}$	$\frac{1}{3!e}$	$\frac{1}{4!e}$	…	$\frac{1}{500!e}$

Многокутник розподілу зображено на рис. 4.8.

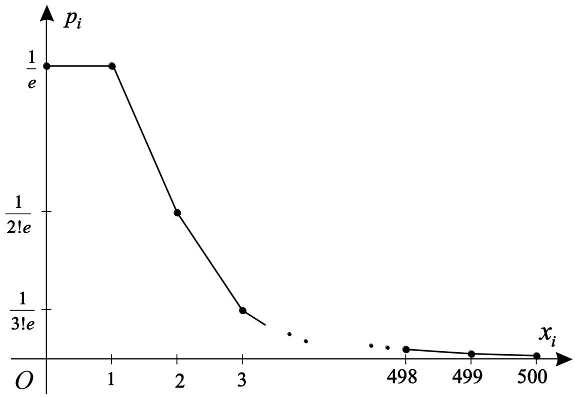


Рис. 4.8. Многокутник розподілу випадкової величини з прикладу 4.6

Ряд та многокутник розподілу ілюструють той факт, що найімовірніше протягом тижня не буде реалізовано жодної або реалізована одна коштовність з нової партії ювелірних виробів. Це означає, що розглянута в прикладі випадкова величина є бімодальною: $M_{01} = 0$, $M_{02} = 1$. Обчислимо математичне сподівання та дисперсію згідно з формулами (4.20): $M\left(X\right) = D\left(X\right) = \lambda = 1$. Медіана також дорівнює одиниці $M_e = 1$. Справді, $P(X < 1) = \frac{1}{e} \le 0,5$ і

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left(P(X=1)+P(X=0)\right)=1-\frac{2}{e}\le 0{,}5.$$

Розподіл Пуассона описує також найпростіший (пуассонівський) потік випадкових подій (див. розділ 3, п. 3.7), інтенсивність якого $\lambda=\frac{np}{t}$. Нагадаємо, що для найпростішого потоку ймовірності того, що за час t подія відбудеться рівно k разів, обчислюють згідно з формулою Пуассона

$$P_t(k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

⏭ **Приклад 4.7.** На телефонну станцію протягом однієї години надходить в середньому 30 викликів. Через несприятливі технічні умови робота станції була призупинена на 4 *год*. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості пропущених викликів впродовж цього часу. Знайти її математичне сподівання та дисперсію.

Розв'язання. Враховуючи, що 1 *год* = 60 *хв*, інтенсивність потоку викликів (кількість викликів за одну хвилину) $\lambda=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$. Тому для $t=4$ *год* = 240 *хв* величина $\lambda\cdot t=120$. Ймовірність того, що було пропущено k викликів, дорівнює $P(k)=\frac{(120)^k e^{-120}}{k!}$.

Дискретний ряд розподілу випадкової величини X – кількості пропущених викликів впродовж 4 *год* має такий вигляд:

X	0	1	2	…	k	…
p	$\frac{1}{e^{120}}$	$\frac{120}{e^{120}}$	$\frac{120^2}{2!e^{120}}$	…	$\frac{120^k}{k!e^{120}}$	…

Математичне сподівання та дисперсія описаної в прикладі випадкової величини дорівнюють $M(X)=D(X)=\lambda=120$. ⏮

4.4.2. Геометричний розподіл

Нехай за схемою Бернуллі проводять серію незалежних випробувань з ймовірністю p настання події A в кожному незалежному випробуванні і ймовірністю $q = 1 - p$ ненастання цієї події. Випробування припиняються, як тільки настане подія A. Це означає, що n-те випробування проводять у разі, якщо в попередніх $n-1$ випробуваннях подія A не відбувалась.

Нехай дискретна випадкова величина X – кількість випробувань, які необхідно виконати до першої появи події A. Можливими значеннями X є $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots$. Оскільки ймовірності того, що подія A в $n-1$ випробуваннях не настане, дорівнює q^{n-1}, а p – ймовірність того, що вона відбудеться в n-му випробуванні, то, зважаючи на незалежність випробувань,

$$P(X = n) = q^{n-1} p . \tag{4.21}$$

Дискретну випадкову величину, яка може набувати значень $1, 2, 3, \ldots$ *з ймовірностями, які обчислюють згідно з формулою (4.21), називають розподіленою за* ***геометричним законом.***

Назва закону зумовлена тим, що права частина формули (4.21) є загальним членом нескінченно спадної геометричної прогресії

$$p,\ pq,\ pq^2,\ pq^{n-1}, \ldots\ .$$

Дискретний ряд розподілу випадкової величини, розподіленої за геометрични законом

X	1	2	3	…	n	…
p	p	pq	pq^2	…	pq^{n-1}	…

Умова нормування виконується. Справді, застосувавши формулу для обчислення суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії із першим членом p та знаменником $q < 1$, одержуємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{n-1} + \ldots = \frac{p}{1-q} = 1 .$$

Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини, розподіленої за геометричним законом, відповідно дорівнюють

$$M(X) = \frac{1}{p}, \tag{4.22}$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}. \tag{4.23}$$

► Обчислимо математичне сподівання

$$M(X) = p + 2pq + 3pq^2 + ... + npq^{n-1} + ... =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} + ...) = p\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1}.$$

Для знаходження суми ряду в правій частині рівності використаємо допоміжний ряд

$$q + q^2 + ... + q^n + ..., \quad 0 < q < 1.$$

Зрозуміло, що його сума, як сума нескінченно спадної геометричної прогресії, дорівнює $S = q + q^2 + ... + q^n + ... = \dfrac{q}{1-q}$.

Продиференціюємо цю суму за q:

$$\frac{dS}{dq} = \left(q + q^2 + ... + q^n + ...\right)' = 1 + 2q + 3q^2 + ... + nq^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}.$$

З іншого боку,

$$\frac{dS}{dq} = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2},$$

тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{p^2}.$$

Остаточно

$$M(X) = p\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Обчислимо дисперсію згідно з формулою (4.10)

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

де

$$M(X^2) = p + 4pq + 9pq^2 + ... + n^2pq^{n-1} + ... = p\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}.$$

Обидві частини рівності $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}=\frac{1}{p^2}$ домножимо на q:

$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n}=\frac{q}{p^2}=\frac{q}{(1-q)^2}$ і продиференціюємо за змінною q:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}=\left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)'=\frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Обидві частини одержаної рівності домножимо на $p=1-q$, звідки

$$p\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}=p\cdot\frac{1+q}{(1-q)^3}=\frac{1+q}{p^2},$$

тобто $M(X^2)=\frac{1+q}{p^2}$.

Отже, $D(X)=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$. ◄

Очевидно, що найімовірнішим числом появи події, тобто *модою* для геометричного закону, є значення $M_0=1$.

Для геометричного закону розподілу *многокутник розподілу* буде ламаною, яка сполучає зліченну кількість точок, ординати яких зменшуються ($p_i > p_{i+1}$) із зростанням абсцис (рис. 4.9).

⏭ **Приклад 4.8.** Екзаменатор задає студенту додаткові запитання. Ймовірність того, що студент відповідає на довільне запитання дорівнює 0,1. Викладач завершує іспит, як тільки студент відповість правильно на поставлене додаткове запитання. Скласти закон розподілу величини X – числа додаткових запитань. Обчислити її математичне сподівання, дисперсію та моду.

Розв'язання. Опитують до першої правильної відповіді, тому $p=0{,}1$.

$$P(X=1)=p=0{,}1,\ P(X=2)=q\cdot p=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09,$$

$$P(X=3)=q\cdot q\cdot p=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}081,$$

……………………….. ,

$$P(X = n) = (0{,}9)^{n-1} \cdot 0{,}1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Дискретний ряд розподілу для випадкової величини, розподіленої за геометричним законом розподілу є таким:

X	1	2	3	…	n	…
p	0,1	0,09	0,081	…	$(0{,}9)^{n-1}\cdot 0{,}1$	…

Математичне сподівання дорівнює $M(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$, а дисперсія $D(X) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{1-0{,}1}{0{,}01} = 90$. Із ряду розподілу очевидно, що найімовірніше буде задано одне запитання, тобто $M_0 = 1$. Многокутник розподілу матиме вигляд, зображений на рис. 4.9.

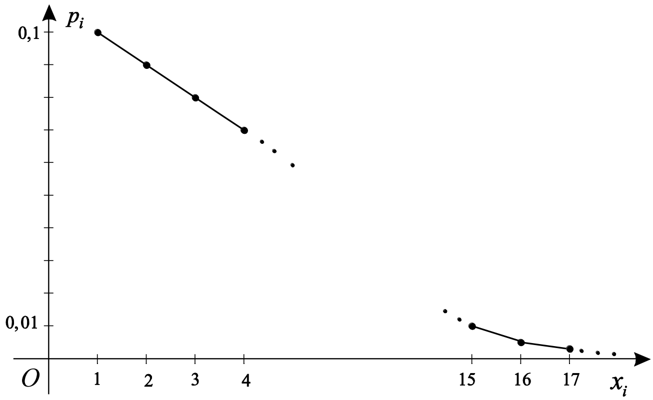
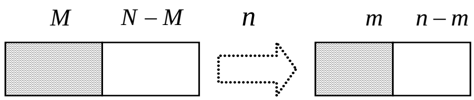


Рис. 4.9. Многокутник розподілу випадкової величини з прикладу 4.8

Геометричний закон розподілу застосовують у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності.

4.4.3. Гіпергеометричний розподіл

Нехай деяка скінченна множина містить N елементів, серед яких є M елементів першого і, відповідно, $N-M$ елементів другого типу. З усієї множини вибирають n $(n<N)$ елементів. Відомо, що цей вибір можна здійснити C_N^n способами. Серед відібраних n елементів може бути m $(m \le M)$ елементів першого та, відповідно, $n-m$ другого типу.



Нехай випадкова величина X – це кількість m елементів першого типу серед n відібраних. Її можливими значеннями можуть бути всі цілі числа, що належать проміжку $\left[\max\left(0; n+M-N\right), \min\left(M, n\right)\right]$. Ймовірність події $\{X=m\}$ обчислюють за формулою

$$P\left(X=m\right)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (4.24)$$

Нагадаємо, що подібні ймовірності вже розглядали у п. 1.5.5.

Дискретну випадкову величину X називають розподіленою за ***гіпергеометричним законом,*** *якщо закон її розподілу можна задати формулою* (4.24).

Математичне сподівання та дисперсія для цього розподілу відповідно дорівнюють

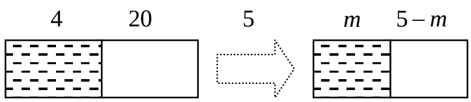
$$M(X)=\frac{n\cdot M}{N}, \quad D(X)=\frac{M\cdot n\cdot\left(N-n\right)\cdot\left(N-M\right)}{N^2\cdot\left(N-1\right)}. \qquad (4.25)$$

Моду випадкової величини X, розподіленої за гіпергеометричним законом, визначають як цілу частину дробу $\frac{\left(M+1\right)\cdot\left(n+1\right)}{N+2}$, тобто,

$$M_0=\left[\frac{\left(M+1\right)\cdot\left(n+1\right)}{N+2}\right]. \qquad (4.26)$$

⏭ **Приклад 4.9.** У групі є 24 студенти, серед яких чотири відмінники. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості відмінників серед п'яти випадково відібраних студентів групи та обчислити її математичне сподівання, дисперсію та моду.

Розв'язання. Описана схема має вигляд



Випадкова величина X – кількість відібраних відмінників – розподілена за гіпергеометричним законом. Можливі значення X – це всі цілі числа з проміжку

$$\left[\max\left(0; n+M-N\right), \min\left(M,n\right)\right]=$$
$$=\left[\max\left(0;5+4-24\right), \min\left(4,5\right)\right]=\left[0;4\right],$$

тому випадкова величина X може набувати значень: $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4$. Ймовірності подій $\{X=m\}$ обчислюють згідно з (14.24):

$$P\left(X=m\right)=\frac{C_4^m C_{20}^{5-m}}{C_{24}^5}. \qquad (4.27)$$

Для побудови ряду розподілу знаходимо $C_{24}^5=\dfrac{24!}{5!\cdot 19!}=42504$

та добутки $C_4^m C_{20}^{5-m}$ для всіх можливих $m=0;1;...;4$:

$$C_4^0\cdot C_{20}^5=15504, \qquad C_4^1\cdot C_{20}^4=19380, \qquad C_4^2\cdot C_{20}^3=6840,$$
$$C_4^3\cdot C_{20}^2=760, \qquad C_4^4\cdot C_{20}^1=20.$$

Підставляючи знайдені величини у формулу (4.27), знайдемо потрібні ймовірності. Тоді ряд розподілу випадкової величини X – кількості відмінників серед п'яти випадково відібраних студентів групи матиме такий вигляд :

X	0	1	2	3	4
p	$\dfrac{15504}{42504}$	$\dfrac{19380}{42504}$	$\dfrac{6840}{42504}$	$\dfrac{760}{42504}$	$\dfrac{20}{42504}$

Числові характеристики обчислюємо згідно з формулами (4.25), (4.26):

$$M(X)=\frac{n\cdot M}{N}=\frac{5\cdot 4}{24}=\frac{5}{6},$$

$$D(X)=\frac{M\cdot n\cdot(N-n)\cdot(N-M)}{N^2\cdot(N-1)}=\frac{4\cdot 5\cdot 19\cdot 20}{576\cdot 23}=\frac{475}{828},$$

$$M_0=\left[\frac{(M+1)\cdot(n+1)}{N+2}\right]=\left[\frac{6\cdot 5}{26}\right]=1.$$

Зауважимо, що у разі відомого ряду розподілу (або многокутника розподілу) значення моди можна знайти безпосередньо як значення випадкової величини, якому відповідає найбільша ймовірність. Так, у прикладі $p_{\max}=\dfrac{19380}{42504}$, а, отже, $M_0=1$. ⏮

Звісно, математичне сподівання, дисперсію та інші числові характеристики для випадкових величин, які розглядали у п. 4.4, можна обчислювати, використовуючи означення цих числових характеристик. Проте для кожного з основних законів розподілу значно раціональніше використовувати запропоновані прості формули, як, наприклад, для гіпергеометричного закону формул (4.25), (4.26). Переваги полягають ще й у тому, що обчислювати числові характеристики можна без побудови ряду розподілу, що само по собі є трудомістким завданням.