Лекція 2

Основні теореми теорії ймовірностей

В попередніх лекціях були означені операції над подіями (сума, добуток, різниця, заперечення). Результатом дій над подіями є також події. Розглянемо питання про те, як ймовірності результуючої випадкової події пов'язані з ймовірностями вихідних подій.

2.1. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Теорема1. *Якщо події A і B несумісні* ($A \cdot B = \varnothing$)*, причому відомі їх ймовірності $P(A)$ і $P(B)$, то ймовірність суми $A+B$ подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B)\,. \qquad (2.1)$$

Отже, для того, щоб знайти ймовірність настання або однієї, або іншої з двох несумісних подій, потрібно додати ймовірності цих подій.

Приклад 2.1. Студент забув, скільки у нього за розкладом завтра пар, пам'ятаючи, що двічі на тиждень у нього є три пари і по одому дню - дві , чотири або п'ять пар. Яка ймовірність того, що завтра у нього буде менше чотирьох пар?

Розв'язання. Складна подія $A-$ завтра за розкладом менше чотирьох пар, є сумою двох елементарних подій: A_1 – завтра за розкладом дві пари та A_2 – завтра за розкладом три пари, тобто $A = A_1 + A_2$. Легко знайти ймовірності $P(A_1) = \dfrac{1}{5}$ і $P(A_2) = \dfrac{2}{5}$. Події A_1 та A_2 є несумісними, тому згідно з (2.1) $P(A) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} = 0{,}6$.

Наслідок 1. *Ймовірність суми скінченої кількості попарно несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_n$ дорівнює сумі ймовірностей цих подій:*

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)\,. \qquad (2.2)$$

Наслідок 2. *Якщо події $A_1, A_2, ...A_n$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1\,. \qquad (2.3)$$

Найпростішим прикладом повної групи попарно несумісних подій є довільна подія A і протилежна до неї подія $\overline{A}$. З цього випливає

Наслідок 3. *Сума ймовірностей довільної події A і протилежної до неї події $\overline{A}$ дорівнює одиниці:*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2.4)$$

Отже, якщо відома ймовірність події A, то ймовірність події $\overline{A}$, протилежної до неї, обчислюють згідно з формулою

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2.2. Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей залежних подій

Якщо ніякі умови не впливають на величину ймовірності деякої події A, то така ймовірність називається *безумовною*. Якщо ж величина ймовірності появи події A залежить від того, чи відбулась інша подія B (причому подія B не є неможливою), то таку ймовірність появи події A називають *умовною*. Вона позначається $P(A/B)$ або $P_B(A)$ (читається "ймовірність події A за умови появи події B".

Приклад 2.2. Підкидають гральний кубик. Нехай подія A –випала парна кількість очок, подія B – випало більше трьох очок . Знайти умовну ймовірність $P(A/B)$.

Розв'язання. I СПОСІБ. Подія $A = \{w_2, w_4, w_6\}$, тобто для неї сприятливими є три елементарні події: випало 2, 4 або 6 очок; подія $B = \{w_4, w_5, w_6\}$ складається з елементарних подій – випало 4, 5 або 6 очок. Очевидно, що $P(A) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$, тоді як $P(A/B) = \dfrac{2}{3}$ (подія B настала, тому сприятливими для події A є лише дві елементарні події $\{w_4, w_6\}$ із можливих трьох $\{w_4, w_5, w_6\}$.

Означення умовної ймовірності формулюють так:

Умовною ймовірністю події *A за умови, що B відбулася, називають відношення ймовірності спільного настання подій A та B до ймовірності події B*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \qquad (2.5)$$

Приклад 2.2. *II СПОСІБ.* Подія A складається з трьох елементарних подій – випало 2, 4, 6 очок, подія B - з елементарних подій: випало 4, 5, 6 очок, тобто $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Очевидно, що $A \cdot B = \{w_4, w_6\}$. Тоді $P(A \cdot B) = \dfrac{2}{6}$; $P(B) = \dfrac{3}{6}$ і умовна ймовірність події A, згідно з (2.5), дорівнює $P(A/B) = \dfrac{2/6}{3/6} = \dfrac{2}{3}$.

Величина умовної ймовірності служить характеристикою залежності однієї події від іншої.

Виходячи із сформульованого означення умовної ймовірності можна дати більш чітке означення залежних та незалежних подій.

Дві події A і B називаються ***залежними****, якщо на ймовірність появи однієї з них впливає, чи відбулась при цьому інша подія, тобто*

$$P(A/B) \neq P(A/\overline{B}). \tag{2.6}$$

Дві події A і B називаються ***незалежними****, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбулась чи ні інша подія, тобто*

$$P(A/B) = P(A/\overline{B}) = P(A) \tag{2.7}$$

Розглянемо дві залежні події A і B, причому нехай відомі ймовірності $P(A)$ і $P(B/A)$. Тоді справедлива

Теорема 2. *Ймовірність добутку* **(***сумісної появи***)** *двох подій A і B дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша подія відбулася:*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

або

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{2.8}$$

Якщо умовну ймовірність означати формулою (3.5), то формулювання теореми 2 стає очевидним. Дійсно, якщо $P(A/B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)}$, то і $P(B/A) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(A)}$, звідки $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Наслідок 1. *Ймовірність добутку* (сумісної появи) *декількох подій $A_1, A_2, ...A_n$ дорівнює добуткові ймовірності однієї з них на умовні ймовірності всіх решти, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події відбулися:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot ... \cdot$$
$$\cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdots A_{n-1}). \tag{2.9}$$

Зокрема, для трьох подій *A, B, C* ця формула набуває вигляду

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cdot B).$$

Приклад 2.3. З колоди 36 карт послідовно виймають три карти. Яка ймовірність того, що цими картами виявляться трійка, сімка, туз?

Розв'язання. Позначимо події: A – перша вийнята карта – трійка; B – друга вийнята карта – сімка; C – третя вийнята карта – туз. Ймовірність події A є безумовною, вона не залежить від жодних додаткових умов і дорівнює

$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Ймовірності подій B і C є умовними, причому ймовірність першої з них залежить від настання події A, а ймовірність другої залежить від настання подій A та B. Тобто, $P(B/A) = \frac{4}{35}$ (є чотири сімки серед 35 карт, які залишились) та $P(C/B \cdot A) = \frac{4}{34}$ (є чотири тузи серед решти 34 карт). Остаточно $P(A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{35} \cdot \frac{4}{34} = \frac{16}{11060}$.

2.3. Теорема множення ймовірностей незалежних подій

Ця теорема є наслідком попередньої теореми 2.

Теорема 3. *Якщо події A і B є незалежні, то ймовірність їх добутку (сумісної появи) дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{2.10}$$

Декілька подій $A_1, A_2, ...A_n$ *називаються **попарно незалежними**, якщо кожні дві з них незалежні.* Наприклад, три події *A, B, C* є попарно незалежні, якщо незалежні події *A* і *B*, *A* і *C*, *B* і *C*.

Декілька подій $A_1, A_2, ...A_n$ *називаються **незалежними** в сукупності, якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна з них і всі можливі добутки решти подій.* Наприклад, три події A, B, C є незалежні в сукупності, якщо незалежні події A і B, A і C, B і C, A і $B \cdot C$, B і $A \cdot C$, C і $A \cdot B$.

Зауваженя. Якщо декілька подій попарно незалежні, то це ще не означає, що вони незалежні в сукупності.

Наслідок 1. *Якщо події* $A_1, A_2, ...A_n$ *є незалежними в сукупності, то ймовірність їх добутку (сумісної появи) дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто*

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \tag{2.11}$$

Ймовірність появи принаймні однієї з декількох подій

Нехай в результаті експерименту можуть з'явитися події A_1, A_2, A_3, незалежні в сукупності, причому відомі ймовірності їх появи $P(A_i) = p_i$ і ймовірності того, що ці події не з'являться $P(\overline{A_i}) = 1 - p_i = q_i$, ($p_i + q_i = 1$), $i = 1,2,3$. Нехай A – подія, яка полягає в появі принаймні однієї з подій A_1, A_2, A_3, тобто $A = A_1 + A_2 + A_3$.

Подія $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ (не появилася жодна з подій A_1, A_2, A_3) є протилежною до події A: $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Отже, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \; = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3})$.

Оскільки події A_1, A_2, A_3 незалежні в сукупності, то матимемо $P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})$, або враховуючи вище введені позначення $P(A)=1-q_1\,q_2\,q_3$.

За аналогією, для n незалежних у сукупності подій A_1, $A_2,\ldots$, A_n ймовірність того, що з'явиться хоча б одна з них обчислюють за формулою $P(A)=1-q_1q_2\cdots q_n$.

Зокрема, якщо всі події A_i $(i=\overline{1,n})$ мають однакову ймовірність p : $P(A_i)=p_i=p$, то $P(\overline{A_i})=q_i=q$ і $P(A)=1-q^n$.

2.4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій.

Нехай дві події A і B сумісні, причому відомі ймовірності цих подій $P(A)$, $P(B)$ та ймовірність їх сумісної появи $P(A\cdot B)$.

Теорема 4. *Ймовірність суми (появи принаймні однієї з) двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх добутку (спільної появи)*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (2.12)$$

Цю теорему можна застосувати і у випадку двох несумісних подій. Дійсно, якщо події A і B є несумісними, то $P(A\cdot B)=0$ і формула (2.12) набуде вигляду $P(A+B)=P(A)+P(B)$, тобто співпадатиме з (2.1). Отже, формула (2.12) є універсальна і підходить як для несумісних, так і для сумісних подій.

Формула для обчислення ймовірності суми трьох сумісних подій

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+$$
$$+P(A\cdot B\cdot C). \qquad (2.13)$$

Приклад 2.4. Клієнт шукає необхідний товар у трьох Інтернет-магазинах. Ймовірність того, що товар є у першому магазині дорівнює $0{,}6$, у другому--$0{,}8$, у третьому--$0{,}9$. Яка ймовірність того, що товар буде знайдено:

а) в усіх трьох магазинах;

б) лише у одному магазині;

в) хоча б в одному магазині.

Розв'язання. Введемо допоміжні події A_1-товар є у першому магазині, A_2-товар є у другому магазині, A_3-товар є у третьому магазині, причому $P(A_1)=0{,}6$, $P(A_2)=0{,}8$, $P(A_3)=0{,}9$. Розглянемо відповідні протилежні події $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$, -товару немає у кожному з цих магазинів, $P(\overline{A_1})=0{,}4$,

$P(\overline{A_2})=0{,}2$, $P(\overline{A_3})=0{,}1$. Зауважимо, що події A_1, A_2, A_3, $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ незалежні в сукупності. Тоді:

а) Нехай A - товар є в усіх трьох магазинах, тоді $A=A_1A_2A_3$ і згідно з (3.11), матимемо

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}432.$$

б) Нехай B - товар є лише в одному магазині (тільки в першому, тільки в другому або лише в третьому), тоді $B=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$. Оскільки події $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ попарно несумісні, то згідно з (2.2), матимемо

$$P(B)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=0{,}6\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+$$
$$+0{,}4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}116.$$

в) Нехай C - товар є хоча б в одному магазині. Тоді

I спосіб. Подія C означає, що товар є лише в одному магазині, або лише в двох магазинах, або у трьох магазинах:
$C=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1A_2A_3$.
Тоді згідно з (2.2), (2.11), отримаємо $P(C)=0{,}992$.

II спосіб. Подія C означає, що товар є або в першому магазині, або в другому магазині, або у третьому магазині: $C=A_1+A_2+A_3$, причому події A_1, A_2, A_3 сумісні. Отже, у цьому випадку використаємо формулу (2.13):

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cdot A_2)-P(A_1\cdot A_3)-$$
$$-P(A_2\cdot A_3)+P(A\cdot B\cdot C)=0{,}6+0{,}8+0.9-0{,}6\cdot 0{,}8-0{,}6\cdot 0{,}9-0{,}8\cdot 0{,}9+$$
$$+0{,}6\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}992.$$

III спосіб. Розглянемо протилежну подію $\overline{C}$ - товару немає в жодному магазині: $\overline{C}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, тоді $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0{,}4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1=0{,}992$.

2.5. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може наступити лише разом з однією з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій (так звані гіпотези), причому:

- відомі ймовірності гіпотез $P(H_i)$ $(i=\overline{1,n})$, для яких, згідно з (2.3) виконується умова $P(H_1)+P(H_2)+\ldots+P(H_n)=1$;

- відомі умовні ймовірності події A за умови настання цих гіпотез $P(A/H_i)$ $(i=\overline{1,n})$. Тоді має місце

Теорема 5 (формула повної ймовірності). *Ймовірність появи події* A, *яка може відбутися лише разом з однією з гіпотез* $H_1, H_2, ..., H_n$, *які утворюють повну групу попарно несумісних подій, дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез* H_i $(i=\overline{1,n})$ *на відповідні умовні ймовірності появи події* A

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i). \tag{2.14}$$

► Подія A наступає лише разом з однією з подій H_i, тобто $A=(H_1\cdot A)+(H_2\cdot A)+....+(H_n\cdot A)$. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій маємо $P(A)=P(H_1\cdot A)+P(H_2\cdot A)+....+P(H_n\cdot A)$. До кожного з доданків застосуємо теорему множення ймовірностей залежних подій $P(H_i\cdot A)=P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ і отримаємо формулу (2.14) ◄

2.6. Формули Бейєса

У формулі повної ймовірності вважалось, що ймовірності $P(H_i)$ відомі до проведення досліду (*апріорні ймовірності*). Дослідимо, чи зміняться ймовірності гіпотез після проведення досліду? Тобто дамо нову оцінку гіпотезам $P(H_i / A)$ з врахуванням факту настання події A.

Теорема 6. *Нехай події* $H_1, H_2, ..., H_n$ *утворюють повну групу попарно несумісних подій, причому* $P(H_i)>0$ $(i=\overline{1,n})$. *Тоді ймовірністьі події (гіпотези)* H_i *після проведення досліду, результатом якого стала подія* A, *обчислюються за формулою*

$$P(H_i / A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad (i=\overline{1,n}). \tag{2.15}$$

Ця формула називається *формулами Бейєса*[1].

Формули Бейєса дозволяють переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стало відомо, що у результаті випробування подія A настала. Ймовірності $P(H_i / A)$ називаються *апостеріорними*, тобто такими, які обчислюються після проведення досліду.

---

[1] Історія виникнення цієї формули така. У 18 столітті преподобний Томас Бейєс, англійський пресвітеріанський міністр, обдумував питання: чи існує бог. Цікавлячись математикою, він намагався вивести формулу, яка б дозволила обчислити ймовірність існування бога на підставі фактів земного життя. Згодом, ознайомившись з цим філософським трактатом, Лаплас оформив думки Т.Бейєса у строгу математичну формулу, за якою зберіг назву “формула Бейєса”. Формула була опублікована у 1764 році.

Приклад.5. При наборі 100 сторінок тексту з однаковою ймовірністю може бути 0, 1,2 чи 3 сторінки з помилками. Для перевірки вибрано 5 сторінок, які виявились набраними без помилок. Яка ймовірність того, що і у всьому тексті немає жодної помилки?

Розв'язання. Висунемо гіпотези щодо можливої кількості помилок у тексті: H_1 – текст набрано без помилок, H_2, H_3, H_4 – серед 100 сторінок є відповідно одна, дві чи три сторінки з помилками. Нехай подія A полягає в тому, що на відібраних 5 сторінках не виявиться жодної помилки. Тоді ймовірність того, що і весь текст набрано правильно запишеться $P(H_1/A)$ і може бути обчислена згідно з формулою Бейєса. Спочатку знайдемо ймовірності гіпотез H_1, H_2, H_3, H_4 та умовні ймовірності появи події A. Оскільки гіпотези рівноможливі і утворюють повну групу попарно несумісних подій, то, згідно з (2.3) $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = \dfrac{1}{4} = 0.25$ (це апріорні ймовірності). Обчислимо умовні ймовірності події A за умов настання кожної з гіпотез. Якщо відбулась подія H_1, то у тексті не зроблено жодної помилки і подія A стане достовірною, тому $P(A/H_1) = 1$ (або $P(A/H_1) = \dfrac{C_{100}^5}{C_{100}^5} = 1$). Якщо мала місце гіпотеза H_2, то у тексті є одна сторінка з помилками і 99 сторінок без помилок; вибрати 5 сторінок, набраних правильно, зможемо з ймовірністю $P(A/H_2) = \dfrac{C_{99}^5}{C_{100}^5} = 0{,}95$. За аналогією $P(A/H_3) = \dfrac{C_{98}^5}{C_{100}^5} \approx 0{,}92$, $P(A/H_4) = \dfrac{C_{97}^5}{C_{100}^5} \approx 0{,}86$. Отже, згідно (2.17) отримаємо

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2)\cdot P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}25\cdot 1}{0{,}25\cdot 1 + 0{,}25\cdot 0{,}95 + 0{,}25\cdot 0{,}92 + 0{,}25\cdot 0{,}86} \approx 0{,}27$$ (це апостеріорна ймовірність).