Homework N1.

N1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -3 \\ 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad A = LU$$

U:

$$\xrightarrow[R_{21}(-2)]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{31}(-3)]{R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_{32}(-2)]{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$LY = B$ for Y:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$y_1 = -2$

$2y_1 + y_2 = -2$; $-4 + y_2 = -2$; $y_2 = 2$

$-6 + 4 + y_3 = -2$; $y_3 = 0$

$UX = Y$ for X:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$x_3 = 0$

$2x_2 + 0 = 2$; $2x_2 = 2$; $x_2 = 1$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$;

$3x_1 + 1 = -2$; $3x_1 = -3$; $x_1 = -1$

В.: Сума діагональних елементів матриці $U = 8$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; $x_3 = 0$.

N2. 2.3.3 (b)

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -3 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 - \frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2{,}5 & -1 \end{array}\right];$$

$2{,}5c = -1$; $c = -0{,}4$

$-4b - 0{,}4 \cdot 3 = -4$; $b = 0{,}7$

$a + 0{,}7 = 1$; $a = 0{,}3$

Перевірка:

$$0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0{,}7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}6 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}2 \\ -1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

*для обчислень було використано звичайний калькулятор

В.: $a = 0{,}3$; $b = 0{,}7$; $c = -0{,}4$

N1. Перевірка:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & -3 \\ 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 \\ -6+4 \\ -9-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \; V$$

N 2.3.7 (a) S the subspace of $M_{2\times2}$ consisting of all symmetric 2×2 matrices. Show that S is spanned by the matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• показати, що лінійно незалежні

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{S is spanned by the matrices}; \; = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow a = 0,\; b = 0,\; c = 0$$

2.3.8. (b) До ... span $P^{(3)}$

$d\cdot(x^3-1)+e\cdot(x^2+1)+f\cdot(x-1)\cdot k(1)=rx^3+ax^2+bx+c$

$$d\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+e\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+f\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&r\\0&1&0&0&a\\0&0&1&0&b\\-1&1&-1&1&c\end{array}\right]\xrightarrow{R_4+R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&r\\0&1&0&0&a\\0&0&1&0&b\\0&1&-1&1&c+r\end{array}\right]\xrightarrow[R_4+R_3]{R_4-R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&r\\0&1&0&0&a\\0&0&1&0&b\\0&0&0&1&c+r-a+b\end{array}\right]$$

$d=r,\ e=a,\ f=b,\ k=c+r-a+b$

В: Span $P^{(3)}$: $rx^3-r,\ ax^2+a,\ bx-b,\ c+r-a+b$

N 2.3.27 (d, e)

d) $\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\3&2&0\\-2&1&0\end{array}\right]\Rightarrow$ $\lambda=0$; $3\lambda+2\beta=0$; $2\beta=0$; $\beta=0$; $-2\lambda+\beta=0$; $\beta=0$

В: $\lambda,\beta=0\Rightarrow$ ЛНЗ

e) $\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&3&0\\1&-1&-1&0\\1&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\1&-1&-1&0\\0&1&3&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&-1&-3&0\\0&1&3&0\end{array}\right]\Rightarrow$

$\xrightarrow{R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&-1&-3&0\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{0}\end{array}\right]\Rightarrow$ $\lambda+2\gamma=0$; $2\gamma=-\lambda$; $\gamma=-\frac{\lambda}{2}$; $\lambda=-2\gamma$; $-\beta-3\gamma=0$; $-3\gamma=\beta$; $\gamma=\beta/-3$ → безліч розв'язків

$\{(-2\gamma,\ -3\gamma,\ \gamma)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}\Rightarrow$ В.: ЛЗ,

N 2.3.33 (b) Визначити чи ф-ї ЛНЗ/ЛЗ

$\lambda f_1+\beta f_2+\gamma f_3=0$; $\lambda(3x-1)+\beta(2x^2+x)+\gamma(x^2-x)=0$

$3x\lambda-\lambda+2x^2\beta+x\beta+x^2\gamma-x\gamma=0$; $x^2(2\beta+\gamma)+x(3\lambda+\beta-\gamma)-\lambda=0\cdot x^2+0\cdot x+0$

$\begin{cases}2\beta+\gamma=0\\3\lambda+\beta-\gamma=0\\-\lambda=0;\ \lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\gamma=0;\ \gamma=0\\\beta-\gamma=0;\ \beta=\gamma\Rightarrow\beta=0\end{cases}\Rightarrow\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0$

В.: ф-ї ЛНЗ, оскільки кожен коефіцієнт $=0$.

Homework №1. (продовження)

№3.

№2.4.1 (c, d)

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $\det = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 = -3 \rightarrow$ ЛНЗ

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & b-a \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} \alpha + 2a - 2\beta = a;\ \alpha = -2a + a + 2\beta = 2\beta - a \\ -\beta = b - a;\ \beta = a - b \end{array}$$

В.: це система векторів є базисом для $\mathbb{R}^2$.

d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; $\det = 0 \rightarrow$ ЛЗ

В.: це система векторів не є базисом для $\mathbb{R}^2$.

№2.4.8 (b) знайти базис і розмірність

$p(x) = ax^2 + bx + c$ that satisfy $p(1) = 0$

$p(1) = a + b + c = 0$; $c = -a - b$

$p(x) = ax^2 + bx - a - b = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$

перевірка на ЛНЗ:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \rightarrow \text{ЛНЗ}$$

Базис: $\begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ x - 1 \end{pmatrix}$, розмірність $= 2$.

№2.4.10 (b) знайти базис і dimention of span

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; $\det = 0 \not\rightarrow$ ЛНЗ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 1 & 3 & -2 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & c \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 2 & 0 & 2 & a \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & c \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & -6 & 6 & a - 2c \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 6R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & c \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a - 2c - 6b \end{array}\right]$$

↓не є span

В.:

базис: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\dim = 2$.

Homework №1. (продовження)

№4.

Системи векторів e,f у вигляді матриці:

$$E=\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\1&-1&-1\end{bmatrix};\quad \det E = 2+2+2-4-0+1 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис простору } \mathbb{R}^3$$

$$F=\begin{array}{c}\begin{matrix}b_1&b_2&b_3\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}4&3&1\\-1&-2&-1\\4&2&-2\end{bmatrix}\end{array};\quad \det F = 16-24-2+8-2+8 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{ЛНЗ} \Rightarrow \text{базис простору } \mathbb{R}^3$$

Вираження кожного вектору з другого базису за допомогою векторів з першого:

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=b_1,\ (b_2, b_3)$$

$E = LU$

U:

$$\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\0&-3&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-\frac{3}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix} = U$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$$

LY = B for Y:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\4\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}y_1=4\\y_2=-1\\4-\frac{3}{2}+y_3=4;\ y_3=\frac{3}{2}\end{array}$$

UX = Y for X:

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x_1-2+6=4;\ x_1=4+2-6=0\\-2x_2-3=-1;\ -2x_2=2;\ x_2=-1\\-\frac{1}{2}x_3=\frac{3}{2};\ x_3=\frac{3}{2}\cdot -2=-3\end{array}\quad \begin{bmatrix}0\\-1\\-3\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix};\ \begin{array}{l}y_1=3\\y_2=-2\\3-3+y_3=2;\ y_3=2\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{array}{l}x_1-2+8=3;\ x_1=3-6=-3\\-2x_2-4=-2;\ -2x_2=2;\ x_2=-1\\-\frac{1}{2}x_3=2;\ x_3=-4\end{array}\quad \begin{bmatrix}-3\\-1\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix};\ \begin{array}{l}y_1=1\\y_2=-1\\1-\frac{3}{2}+y_3=-2;\ y_3=-2-1+1{,}5=-3+1{,}5=-1{,}5\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-2&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1{,}5\end{bmatrix};\ \begin{array}{l}x_1+4-6=1;\ x_1=1+6-4=3\\-2x_2+3=-1;\ -2x_2=-4;\ x_2=2\\-\frac{1}{2}x_3=-\frac{3}{2};\ x_3=-\frac{3}{2}\cdot(-2)=+3\end{array}\quad \begin{bmatrix}3\\2\\+3\end{bmatrix}$$

Перевірка:

$$0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

В.: Матриця переходу $= E_{e\Rightarrow f} = \begin{bmatrix}0&-3&3\\-1&-1&2\\-3&-4&3\end{bmatrix}$

N2.4.17.

Базис: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\dim = 3$

Generalization to $n \times n$ matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

базис: $a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \dots$

Про к-сть таких матриць: у першому рядку всі n елементів можуть бути не нульовими, у другому $= n-1$, у третьому $n-2 \dots$

Тобто $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, де n = розмірність матриці, k = просто індекс суми

★ цю формулу взято із статті в Інтернеті

за допомогою цієї формули одразу можна і розмірність порахувати

N2.4.11.

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (1-t) + \lambda_3 \underbrace{(1-t)^2}_{t^2 - 2t + 1} + \lambda_4 \cdot \underbrace{(1-t)^3}_{-t^3 + 3t^2 - 3t + 1} = dx^3 + ax^2 + bx + c$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 3 & a \\ 0 & -1 & -2 & -3 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{A \cdot (-1)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -b \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -c \end{array}\right] \end{array}$$

$\to \lambda_4 = -d$

$-\lambda_3 + 3d = -a$; $-\lambda_3 = -a - 3d$; $\lambda_3 = a + 3d$

$\lambda_2 + 2a + 6d - 3d = -b$; $\lambda_2 = -b - 2a - 6d + 3d = -b - 2a - 3d$

$-\lambda_1 + b + 2a + 6d - 3d - a - 3d + d = -c$;

$-\lambda_1 = \cancel{-c} - \cancel{b} - \cancel{2a} - 6d + 3d + \cancel{a} + \cancel{3d} - d = -c - b - a - d$

$\lambda_1 = c + b + a + d$

Пояснення, що ці вектори лінійно незалежні:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}$$

В.: $p(t) = 1 + t^3 = c + b + a + d + (-b - 2a - 3d)(1-t) + (a + 3d) \cdot (1-t)^2 - d(1-t)^3$

$$\begin{pmatrix} d \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \lambda_3 = 3 \\ \lambda_4 = -1 \end{array}$$

Перевірка: $2 - 3(1-t) + 3(t^2 - 2t + 1) - 1(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) =$
$= 2 \cancel{-3} \cancel{+3t} + \cancel{3t^2} - \cancel{6t} + \cancel{3} + t^3 - \cancel{3t^2} + \cancel{3t} - 1 = 1 + t^3$