Divisores reversos generalizados

Eudes Antonio Costa[1]
Ronaldo Antonio dos Santos [2]

Resumo:

Neste trabalho estudamos os números que são divisores reversos em uma base b.

Ver o que vamos aproveitar escrevendo já na base b

[Webster e Wilians] 3 tipos de números reversos?

1 Introduction

Once a base $b > 2$ is fixed, the numerical property highlighted here is the relationship between a number x and the reverse number x' formed by the inversion of the position of its digits, a particular case of permutation of the digits. Thus, we will consider the set of non-negative (natural) integers denoted by $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, and for convenience, we will just say $[x]_b$ is a (natural) number written or represented in base b. Let $[x_n]_b$ be a non-zero number, with n digits, in the positional system with base b; and therefore, written in the form $x_n = a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, that is, $x_n = a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{k-2} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0$, where $a_i \in B = \{0, 1, \ldots, b-2, b-1\}$ and $a_{n-1} \neq 0$. And more, $x'_n = a_0 \cdot b^{n-1} + a_1 \cdot b^{k-2} + \cdots + a_{n-2} \cdot b^1 + a_{n-1}$.

Definição 1. *In a fixed base $b > 2$, a pair of distinct numbers $[x_n]_b = [a_{n-1} \ldots a_1 a_0]_b$ and $[x'_n]_b = [a_0 a_1 \ldots a_{n-1}]_b$ formed by the same n digits are called reverse divisors if there exists a $2 \leq q \leq b-1$ such that $[x'_n]_b = [q]_b \cdot [x_n]_b$.*

Exemplo 1. *[16, 17, 22] In base 10, the numbers 1089 and 9801 are reverse divisors, since $9801 = 9 \cdot 1089$.*

Exemplo 2. *(a) In base 3, the numbers 1012 and 2101 are reverse divisors, since $[2101]_3 = [2]_3 \cdot [1012]_3$.*

(b) In base 7, the numbers 1056 and 6501 are reverse divisors, as long as $[6501]_7 = [6]_b \cdot [1056]_7$.

(c) Likewise, in base 8, the numbers 1067 and 7601 are reverse divisors.

[1]Universidade Federal do Tocantins. E:mail: eudes@uft.edu.br
[2]Universidade Federal de Goiás. E:mail: rasantos@ufg.br

In general we have:

Proposição 1. *If $b > 2$, $a_1 = b - 1$ and $a_2 = b - 2$ then the numbers $[10a_2a_1]_b$ and $[a_1a_201]_b$ are reverse divisors.*

Demonstração. Let's show that $[a_1a_201]_b = [a_1 \cdot 10a_2a_1]_b$. The direct calculation gives us:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0^{+a_2} & {a_2}^{+a_2} & a_1 \\ \times & & & & a_1 \\ \hline & a_1 & a_2 & 0 & 1 \end{array} ,$$

since:

$$a_1 \cdot a_1 = a_2 \cdot b + 1 \ ;$$

$$a_1 \cdot a_2 b + a_2 \cdot b = a_2 \cdot b^2 \ ,$$

that is,

$$\begin{aligned} [a_1 \cdot 10a_2a_1]_b &= a_1 \cdot \left(1 \cdot b^3 + 0 \cdot b^2 + a_2 \cdot b + a_1\right) \\ &= a_1 \cdot b^3 + a_2 \cdot b^2 + 0 \cdot b + 1 \\ &= [a_1a_201]_b \ . \end{aligned}$$

□

Still, in base 10, we present the following examples:

Exemplo 3. *[16, 17, 22] In base 10, the numbers* 10989 *and* 98901 *are reverse divisors because* $98901 = 9 \cdot 10989$.

Exemplo 4. *[3] In base 10, the numbers* 102564 *and* 410256 *are also reverse divisors, since* $410256 = 4 \cdot 102564$.

Our main result is:

Teorema 2. *Every number of the form $[10\underbrace{a_1a_1\ldots a_1a_1}_{n-4 \text{ times}}a_2a_1]_b$ is a reverse divisor of $[a_1a_2\underbrace{a_1a_1\ldots a_1a_1}_{n-4 \text{ times}}01]_b$, with $n > 3$ being a natural and $b > 2$ being a fixed base.*

Other important result is:

Teorema 3. *Given $k_1, k_2, ..., k_t$ positive integers, $D_{k_1}, D_{k_2}, ..., D_{k_t}$ reverse divisors of type 1 (Theorem 2). Consider $V_r = \underbrace{00\ldots00}_{r \text{ times}}$ with $r \geq 0$. Every number in the form $D_{k_1}D_{k_2}...D_{k_t}VD_{k_t}...D_{k_2}D_{k_1}$ is a reverse divisor, where $V = V_r$ or V is a reverse divisor of type 1, with r digits.*

2 Reverse divisors with 4 or more digits

The following two results guarantee no reverse divisors with 2 or 3 digits.

Proposição 4. *There is no reverse divisor with* 2 *digits.*

Demonstração. For all $b > 2$, let $a_1, a_0, a_3 \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$ be a digit. We assume that $x_2 = a_1a_0$ is a reverse divisor. Without loss of generality, we can assume $a_0 > a_1$, that is, $a_0 = a_1 + a_3$ with $a_3 \neq 0$. So we have $x_2 = b \cdot a_1 + a_0$ and $x_2' = b \cdot a_0 + a_1$.

Since x_2 is a divisor of x_2', there exists an integer $1 < k < b$ such that

$$\begin{aligned} k &= \frac{b \cdot a_0 + a_1}{b \cdot a_1 + a_0} = \frac{b \cdot a_0 + b^2 \cdot a_1 - (b^2-1) \cdot a_1}{b \cdot a_1 + a_0} \\ &= b - \frac{(b^2-1) \cdot a_1}{b \cdot a_1 + a_0} = b - \frac{(b^2-1) \cdot a_1}{(b+1) \cdot a_1 + a_3} \ . \end{aligned}$$

So,

$$b - k = \frac{(b^2-1) \cdot a_1}{(b+1) \cdot a_1 + c},$$

and

$$(b-k)a_3 = (b+1)\big((b-1)a_1 - a_1(b-k)\big) = (b+1)a_1(k-1) \ .$$

As $a_1(k-1) > 1$, we should have that $(b+1)$ divides $b-k$ or $(b+1)$ divides a_3, a contradiction, because $b-k < b+1$ and $a_3 < b+1$.

Therefore, x_2 is not the reverse divisor. □

To prove the next result we will prescribe the following lemmas. To prove this auxiliary result you can use congruence notation or consult the references [11, 14].

Lemma 1. *A number $a = (a_na_{n-1}\ldots a_1a_0)_b$, written in base b, is divisible by $b-1$ if, and only if the sum of the digits is divisible by $b-1$, that is,*

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \mod (b-1) \ .$$

Lemma 2. *A number $a = (a_na_{n-1}\ldots a_1a_0)_b$, written in base b, is divisible by $b+1$ if, and only if the alternating sum of the digits is divisible by $b+1$, that is,*

$$(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \equiv 0 \mod (b+1) \ .$$

Proposição 5. *There was no reverse divisor with* 3 *digits.*

Demonstração. Let $a_0, a_1, a_2, a_4 \in \{0, 1, 2, ..., b-1\}$ with $a_2 \neq 0$, and such that the number $x_3 = a_2a_1a_0$ is a reverse divisor with $a_0 = a_2 + a_4$, since $a_0 > a_2$. So, we have $x_3 = a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0$, and $x_3' = a_0 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_2$.

Since x_3 is a divisor of x_3', there exists an integer $1 < k < b$ such that

$$\begin{aligned} k &= \frac{a_0 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_2}{a_2a_1a_0} = \frac{(a_2 + a_4) \cdot b^2 + a_1 \cdot b + (a_0 - a_4)}{a_2a_1a_0} \\ &= 1 + \frac{(b-1) \cdot (b+1) \cdot a_4}{a_2a_1a_0} \ , \end{aligned}$$

that is, $k - 1 = \dfrac{(b-1) \cdot (b+1) \cdot a_4}{a_2a_1a_0}$, so

$$(k-1) \cdot a_2a_1a_0 = (b-1) \cdot (b+1) \cdot a_4 \ .$$

Since $k - 1 < (b-1) - 1$, it follows that neither $b+1$ nor $b-1$ divide $k-1$; therefore, $b+1$ and $b-1$ must divide $a_2a_1a_0$.

Terminar

$\square$

3 Demonstração dos Teoremas 2 e 3

3.1 Proof of Theorem 2

For all $b > 2$, remember that $a_1 = b - 1$, $a_2 = b - 2$ are digits, $[10]_b = b + 0 = b$, and $[11]_b = b + 1$.

Theorem 2 is a direct consequence of two following result.

Proposição 6. *For every natural $n > 3$ we obtain $11 \times (b^{n-2} - 1) = 10\underbrace{a_1a_1 \ldots a_1}_{n-4 \text{ times}}a_2a_1$.*

Demonstração. We based the proof on the induction of n. For $n = 4$ we have

$$\begin{aligned} [11 \times (b^2 - 1)]_b &= b \cdot (b^2 - 1) + (b^2 - 1) \\ &= b^3 + b^2 - b - 1 \\ &= b^3 + (b-2)b + (b-1) \\ &= [10a_2a_1]_b \ . \end{aligned}$$

We assume that the result is true for some natural $k > 4$; that is,

$$11 \times (b^{k-2} - 1) = 10\underbrace{a_1a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}}a_2a_1 \ . \tag{1}$$

For $k+1$, we have

$$\begin{aligned}
[11 \times (b^{(k+1)-2} - 1)]_b &= 11 \times (b \times b^{k-2} - b + b - 1) \\
&= 11 \times [(b \times (b^{k-2} - 1) + (b-1)] \\
&= b \times (11 \times (b^{k-2} - 1) + 11 \times a_1 \ .
\end{aligned} \tag{2}$$

By using the induction hypothesis, that is, Equation (1) in Equation (2), we have

$$\begin{aligned}
[11 \times (b^{(k+1)-2} - 1)]_b &= [b \times (10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} a_2 a_1) + 11 \times a_1]_b \\
&= [10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} a_2 a_1 0 + a_1 a_1]_b \\
&= [10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} a_1 a_2 a_1]_b \\
&= [10 \quad \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{(k+1)-4 \text{ times}} \quad a_2 a_1]_b \ .
\end{aligned}$$

Which completes the proof.

$\square$

Proposição 7. *For every natural $b > 3$ and $n > 3$ we obtain*

$$[a_1 \times 10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{n-4 \ \textit{times}} a_2 a_1]_b = [a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{n-4 \ \textit{times}} 01]_b \ .$$

Demonstração. We based the proof on the induction of n. For $n = 4$ we have $a_1 \times 10 a_2 a_1 = a_1 a_2 01$, note Proposition 1.

From Proposition 6 we have $[11 \times (b^{n-2} - 1)]_b = [10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{n-4 \text{ times}} a_2 a_1]_b$.

Now, we admit that the result is valid for some natural $k > 4$; that is,

$$[a_1 \times 11 \times (b^{k-2} - 1)]_b = a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} 01 \ . \tag{3}$$

For $k+1$, we have

$$\begin{aligned}
[a_1 \times 11 \times (b^{(k+1)-2} - 1)]_b &= [a_1 \times 11 \times (b \times b^{k-2} - b + b - 1)]_b \\
&= [a_1 \times 11 \times [(10 \times (b^{k-2} - 1) + (b-1)]]_b \\
&= [b \times a_1 \times (11 \times (b^{k-2} - 1) + a_1 \times 11 \times a_1]_b \\
&= [b \times a_1 \times (11 \times (b^{k-2} - 1) + a_2 a_1 1]_b \ .
\end{aligned} \tag{4}$$

Using the induction hypothesis, Equation (3), in Equation (4), we have

$$\begin{aligned}[a_1 \times 11 \times (b^{(k+1)-2} - 1)]_b &= [a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} 010 + a_2 a_1 1]_b \\ &= [a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{k-4 \text{ times}} a_1 01]_b \\ &= [a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{(k+1)-4 \text{ times}} 01]_b \ .\end{aligned}$$

Which completes the proof.

□

Let us look into

Demonstração. of Theorem 2
For $n = 4$, $a_1 a_2 01 = 9 \cdot 10 a_2 a_1$, Proposition 1.

For $n > 4$ let $Y = [11 \times (b^{n-2} - 1)]_b$: from Proposition 6, we have $Y = [10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{n-4 \text{ times}} a_2 a_1]_b$. Because $Y' = [a_1 a_2 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1}_{n-4 \text{ times}} 01]_b$, it follows from Proposition 7 that $[Y']_b = [a_1 \cdot Y]_b$. □

3.2 Proof of Theorem 3

Exemplo 5. *In base $b = 7$, consider the two pairs of reverse divisor numbers $D_1 = 1056$ and $D_1' = 6501$, and $D_2 = 106656$ and $D_2' = 656601$. Let $D = D_1 D_2 D_1$ be the symmetric concatenation of D_1 and D_2, i.e., $D = [\mathbf{1056}106656\mathbf{1056}]_7$, observe that,*

$$\begin{aligned}[6 \cdot D]_7 &= [6 \cdot (\mathbf{1056}106656\mathbf{1056})]_7 \\ &= [6 \cdot (1056 \times 7^{10} + 106656 \times 7^4 + 1056)]_7 \\ &= [6 \cdot 1056 \times 7^{10} + 6 \cdot 106656 \times 7^4 + 6 \cdot 1056]_7 \\ &= [6501 \times 7^{10} + 656601 \times 7^4 + 6501]_7 \\ &= [\mathbf{6501}656601\mathbf{6501}]_7 \ .\end{aligned}$$

Therefore, the numbers $6 \cdot D$ is a reverse divisor number.

Demonstração. of Theorem 3:
We have that

$$\begin{aligned}& D_{k_1} D_{k_2} ... D_{k_t} V D_{k_t} ... D_{k_2} D_{k_1} \\ = \ & D_{k_1} \times b^{k_1 + 2(k_2 + ... + k_t) + r} + D_{k_2} \times b^{k_2 + 2(k_3 + ... + k_t) + r} + ... + \\ & D_{k_t} \times b^{k_1 + k_2 + ... + k_t + r} + D_{k_t} \times b^{k_1 + k_2 + ... + k_{t-1}} + ... + D_{k_2} \times b^{k_1} + D_{k_1} \ . \quad (5)\end{aligned}$$

It follows that every reverse divisor $D_s = a_1 D'_s$, for $s \in k_1, k_2, ..., k_t$ and $V = a_1 V'$. Thus, for each s, substituting into Equation 5, we will have that

$$\begin{aligned}
& D_{k_1} D_{k_2} ... D_{k_t} V D_{k_t} ... D_{k_2} D_{k_1} \\
= \; & D_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_t+r} + D_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_{t-1}} + ... + D_{k_2} \times b^{k_1} + D_{k_1} \\
= \; & a_1 D'_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_t+r} + a_1 D'_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_{t-1}} + ... + a_1 D'_{k_2} \times b^{k_1} + a_1 D'_{k_1} \\
= \; & a_1 \big(D'_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_t+r} + D'_{k_t} \times b^{k_1+k_2+...+k_{t-1}} + ... + D'_{k_2} \times b^{k_1} + D'_{k_1} \big) \\
= \; & a_1 \times D'_{k_1} D'_{k_2} ... D'_{k_t} V' D'_{k_t} ... D'_{k_2} D'_{k_1} \; .
\end{aligned}$$

Therefore, it follows that $D_{k_1} D_{k_2} ... D_{k_t} V D_{k_t} ... D_{k_2} D_{k_1}$ is a reverse divisor with a reverse quotient of a_1. □

4 Divisores reversos do Tipo 2

Na base 10 apresentamos os seguintes exemplos:

Exemplo 6. *[16, 17, 22] Na base 10, os números* 2178 *e* 8712 *são divisores reversos pois* $8712 = 4 \cdot 2178$*. E mais,* $2178 = 2 \cdot 1089$*.*

Assim com ocorre na base 10, um múltiplo de um divisor reverso generalizado pode ainda ser um divisor reverso. De fato,

Teorema 8. *Seja* $b > 4$ *um número par. Se* $D = 10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1 a_1}_{n-4 \text{ vezes}} a_2 a_1$*, com* $a_1 = b-1$ *e* $a_2 = b-2$ *é um divisor reverso do Tipo 1, dado no Teorema 2, então* $2 \times D$ *também é divisor reverso.*

Corolário 9. *No Teorema 8, o quociente de* D' *por* D *é um número* $q = \frac{b-2}{2}$*.*

Corolário 10. *Em bases pares os únicos quocientes possíveis são:* $q = b - 1$ *e* $q = \frac{b-2}{2}$*.*

Teorema 11. *Seja* $b \geq 3$ *um número impar. Se* $D = 10 \underbrace{a_1 a_1 \ldots a_1 a_1}_{n-4 \text{ vezes}} a_2 a_1$*, com* $a_1 = b-1$ *e* $a_2 = b-2$ *é um divisor reverso do Tipo 1, dado no Teorema 2, então* ?? $\times D$ *também é divisor reverso??*

O nome *permúltiplo* foi usado por Holt(2015) e é uma justaposição das palavras permutação e múltiplo. No curioso trabalho de Holt[16, 17] ele exibe e apresenta propriedades acerca de uma subclasse dos números *permúltiplos*, os *palíntuplos* (palíndromos e múltiplos) na base 10, como no Exemplo 6; e também exemplos em outras bases além da decimal. Lembramos que os números palíndromos ou capicuas são os números que que têm a mesma representação quando lido tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita. Os números *palíntuplos* também são conhecidos como *divisores reversos* pois seus algarismos dispõe em ordem de posição inversa.

Nosso interesse aqui é estudar esta subclasse dos números *permúltiplos* em uma base $b > 2$ qualquer, os divisores reversos generalizados; e assim exibir uma relação com os números mágicos de Ball generalizados, que apresentamos na próxima seção.

5 Reverse divisor in odd base

Some points to thinking about.

Let be $p > 2$ a odd base and

$$N = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$$
$$kN = a_3 + a_2 p + a_1 p^2 + a_0 p^3$$

Here, k is caled reverce quatient In order to obtain kN with four digit number, Já encontrei os erros que cometi need to less than p. So, let $k = p - s$, $s = 1, ..., p-1$.

$$\begin{aligned}
(p-s)N = &\quad (p-s)a_0 + (p-s)a_1 p + (p-s)a_2 p^2 + (p-s)a_3 p^3 \\
= &\quad pa_0 - sa_0 + p^2 a_1 - psa_1 + a_2 p^3 - sa_2 p^2 + a_3 p^4 - sa_3 p^3 \\
= &\quad -sa_0 + pa_0 - psa_1 + p^2 a_1 - sa_2 p^2 + a_2 p^3 - sa_3 p^3 + a_3 p^4 \\
= &\quad -sa_0 + (a_0 - sa_1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - sa_3)p^3 + a_3 p^4
\end{aligned}$$

It is necessary $a_3 = 1$ and $a_2 - sa_3 < 0$ or $a_2 < s$. In this case,

$$\begin{aligned}
(p-s)N = &\quad -sa_0 + (a_0 - sa_1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s.1)p^3 + 1p^4 \\
(p-s)N = &\quad -sa_0 + (a_0 - sa_1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s + p)p^3
\end{aligned}$$

The unit digit also need to be positive, so

(p-s)N=(p-sa$_0$) $+ (a_0 - sa_1 - 1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s + p)p^3$

Now, we can use the reverse divisor condition. We have two possibility to $p - sa_0$

First; supose $sa_0 < p$,

$sa_0 < p \Rightarrow 0 < p - sa_0 < p$ it is the unit digit.

By the reverse condition, we have,

$p - sa_0 = a_3 = 1 \Rightarrow sa_0 = p - 1$. So, s and a_0 are $p - 1$ divisors. Quando p é ímpar a única possibilidade deveria ser $s = p - 1$ e $a_0 = 1$

On the other hand, by the reverse condition again, we have

$a_2 + p - s = a_0 \Rightarrow a_0 - a_2 = p - s = k$ the divisor quotient.

Second; supose $sa_0 > p$, in this case, we have $sa_0 = np + r$, with $0 \leq r < p$. Seria bom que esse caso gerasse uma indeterminação

The unit digit is $p - r$, so

$$
\begin{aligned}
(p-s)N &= (p - sa_0) + (a_0 - sa_1 - 1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s + p)p^3 \\
(p-s)N &= (p - (np + r)) + (a_0 - sa_1 - 1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s + p)p^3 \\
(p-s)N &= (p - r) + (a_0 - sa_1 - n - 1)p + (a_1 - sa_2)p^2 + (a_2 - s + p)p^3
\end{aligned}
$$

$p - r = a_3 = 1 \Rightarrow r = p - 1$

by the reverse condition, we have $a_2 + p - s = a_0 \Rightarrow a_2 - a_0 = p - s = k$ the divisor quotient.

6 Números mágicos de Ball generalizados e códigos

Para uma base $b > 2$ fixada, consideremos $x_n = a_{n-1} \dots a_1 a_0$ um número não palíndromo positivo com n algarismos; e para $n \geq 2$, o número de n algarismos obtido pela inversão da posição dos algarismos de x_n é chamado de número reverso de x_n e é indicado por x'_n, logo $x'_n = a_0 \dots a_{n-1}$. Agora consideremos o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1. *:* ***O Número de Ball***

1. *Considere um número x_n;*
2. *Escreva o número reverso x'_n ;*
3. *Encontre o número (positivo) $y_n = |x_n - x'_n|$;*

4. *Escreva o número reverso* y'_n*;*

5. *Obtenha o número* $B = y_n + y'_n$*.*

Exemplo 7. *[12] Consideremos a base* $b = 7$ *e* $n = 2$*, assim temos um número inicial* $(x_2)_7 = (a_1a_0)_7$*, com* $a_1 \neq a_0$*, assim* $(x'_2)_7 = (a_0a_1)_7$*. Para obtermos* $(y_2)_7$ *façamos*

$$\begin{aligned}(y_2)_7 &= (x_2)_7 - (x'_2)_7\\ &= [a_1 \cdot 7 + a_0] - [a_0 \cdot 7 + a_1]\\ &= [(a_1 - 1) \cdot 7 + (a_0 + 7)] - [a_0 \cdot 7 + a_1]\\ &= (a_1 - 1 - a_0) \cdot 7 + (a_0 + 7 - a_1)\ .\end{aligned}$$

Obtemos que $(y'_2)_7 = (a_0 + 7 - a_1) \cdot 7 + (a_1 - 1 - a_0)$*. Agora*

$$\begin{aligned}(B)_7 &= (y_2)_7 + (y'_2)_7\\ &= [(a_1 - 1 - a_0) \cdot 7 + (a_0 + 7 - a_1)] + [(a_0 + 7 - a_1) \cdot 7 + (a_1 - 1 - a_0)]\\ &= 6 \cdot 7 + 6\ .\end{aligned}$$

Segue que $(B)_7 = (66)_7$ *é um número de Ball na base 7.*

Exemplo 8. *[12] Para a base* $b = 12$ *e* $n = 3$*, teremos um número inicial* $(x_3)_{12} = (a_2a_1a_0)_{12}$*. Se tivermos* $a_2 \neq a_0$*, obteremos que* $(10\alpha\beta)_{12}$ *é o número de Ball na base 12 (Verifique!), considerando* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$ *o conjunto de algarismos para a base* 12*.*

Quando $(x_n)_b > (x'_n)_b$, de forma simplificada obtemos o número de *Ball* generalizado fazendo $B_b = (x_n - x'_n)_b + (x_n - x'_n)'_b$.

Os **mágico mágico de Ball generalizados** foram propostos e estudados por Costa e Santos [12], sendo o número $B \neq$ resultante do Algoritmo 1 . Quando $x_n > x'_n$, de forma simplificada obtemos o número de *Ball* fazendo $B = (x_n - x'_n) + (x_n - x'_n)'$. Especificamente na base 10 recomendamos Ball[2], Costa [5], Costa e Mesquita [8], Rouse Ball[2], Beiler [4], Webster[21].

Os seguintes resultados nos será útil

Teorema 12. *[12] Todo número de Ball não nulo* B *é múltiplo* a_1a_1*.*

Como consequência do Teorema 12, mostraremos que:

Teorema 13. *Todo número da forma* $10\underbrace{a_1a_1\ldots a_1a_1}_{n-4\ \mathit{vezes}}a_2a_1$ *é um número de Ball.*

6.1 Demonstração do Teorema 12

Sejam $(x_{n+1})_b$ um número com $n+1$ algarismos na base $b > 2$ e $(x'_{n+1})_b$ seu reverso, considerado com $n+1$ algarismos mesmo se aparecer zeros à esquerda. Assim,

$$\begin{aligned}
(x_{n+1})_b &= (a_n a_{n-1} \dots a_{n-i} \dots a_i \dots a_1 a_0)_b, \\
(x'_{n+1})_b &= (a_0 a_1 \dots a_i \dots a_{n-i} \dots a_{n-1} a_n)_b,
\end{aligned}$$

com $a_n > a_0$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
(x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b &= (a_n - a_0)b^n + (a_{n-1} - a_1)b^{n-1} + \dots + (a_{n-i} - a_i)b^{n-i} + \\
&\quad + \dots + (a_i - a_{n-i})b^i + \dots + (a_1 - a_{n-1})b + (a_0 - a_n) \ .
\end{aligned}$$

No entanto, a representação na base b exige que cada coeficiente seja maior ou igual a zero e menor que b. Em alguns casos, para que o coeficiente fique positivo, necessita deslocar b da ordem i para $i-1$ (o famoso deslocar uma dezena ou “empresta um” na base 10). Escrevemos,

$$\begin{aligned}
(x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b &= (a_n - a_0 - z_{n-1})b^n + (a_{n-1} - a_1 - z_{n-2} + z_{n-1}b)b^{n-1} + \dots \\
&\quad + (a_{n-i} - a_i - z_{n-i-1} + z_{n-i}b)b^{n-i} + \dots + (a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b)b^i + \\
&\quad \dots + (a_1 - a_{n-1} - z_0 + z_1 b)b + (a_0 - a_n + z_0 b) \ .
\end{aligned}$$

Definindo $z_{-1} = z_n = 0$ e recursivamente para z_i, $i = 0, \dots, n-1$,

$$z_i = \begin{cases} 1; & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} < 0 \ ; \\ 0; & \text{se } a_i - a_{n-i} - z_{i-1} \geq 0 \ ; \end{cases}$$

e assim, segue que $0 \leq a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b < b$ para $i = 0, \dots, n-1$. Escrevemos

$$(y_n)_b = (x_{n+1})_b - (x'_{n+1})_b = \sum_{i=0}^{n} (a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b)b^i \ .$$

Por hipótese, temos que $a_n > a_0$, logo $z_0 = 1$. E com esta notação podemos escrever um número de *Ball* da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
B_b &= (y_n)_b + (y'_n)_b \\
&= \sum_{i=0}^{n}((a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b) + (a_{n-i} - a_i - z_{n-i-1} + z_{n-i} b))b^i \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-z_{i-1} + z_i b - z_{n-i-1} + z_{n-i} b)b^i \\
&= -\sum_{i=0}^{n} z_{i-1} b^i + \sum_{i=0}^{n} z_i b^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} z_{n-i-1} b^i + \sum_{i=0}^{n} z_{n-i} b^{i+1} \\
&= -\sum_{i=0}^{n-1} z_i b^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} z_i b^{i+1} - \sum_{i=1}^{n} z_{n-i} b^{i-1} + b^2 \sum_{i=1}^{n} z_{n-i} b^{i-1} \\
&= (b^2-1)\sum_{i=1}^{n} z_{n-i} b^{i-1} \\
&= (b^2-1)(z_0 z_1 \ldots z_{n-1})_b \ .
\end{aligned}$$

Portanto o número de *Ball* generalizado B_b é um múltiplo de $b^2 - 1$.

É fácil concluir que

Corolário 14. *Todo número de Ball não nulo B é múltiplo $(z_0 z_1 \ldots z_{n-1})_b$.*

6.2 Códigos

Vamos associar a cada número x_{n+1} com $n+1$ algarismos o número Z_{n+1} chamado de código de x_{n+1}. Este código Z_{n+1} compreende uma sequência de $0s$ e $1s$, tem algarismo final 0 e sintetiza ou codifica as informações necessárias para passar do número inicial x_{n+1} para o número de Ball B resultante.

Escreva o número $x_{n+1} = a_n \ldots a_0$, o qual tomamos $a_n > a_0$, e abaixo dele, seu reverso $x'_{n+1} = a_0 \ldots a_n$, como mostrado abaixo:

$$\begin{array}{cccc}
 & a_n & \ldots & a_0 \\
- & a_0 & \ldots & a_n \\
\hline
 & * & \ldots & *
\end{array}$$

Considere o papel desempenhado pela i-ésima coluna da direita para esquerda ($i = 0, \ldots, n$) na subtração do número x'_{n+1} de x_{n+1}. O algarismo z_i da seguinte maneira: se uma quantidade b (agrupamento ou base) tiver que ser deslocada da coluna $(i+1)$-ésima para a i-ésima, z_i será 1; caso contrário, é 0. Escrevemos,

$$\begin{aligned}
&x_{n+1} - x'_{n+1} = \\
&= (a_n - a_0 - z_{n-1})b^n + (a_{n-1} - a_1 - z_{n-2} + z_{n-1}b)b^{n-1} + \dots \\
&+(a_{n-i} - a_i - z_{n-i-1} + z_{n-i}b)b^{n-i} + \cdots + (a_i - a_{n-i} - z_{i-1} + z_i b)b^i + \\
&\cdots + (a_1 - a_{n-1} - z_0 + z_1 10)b + (a_0 - a_n + z_0 b)\ .
\end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos a sequencia $z_0, \dots, z_n$ de $0's$ e $1's$. O número $z_0 \dots z_n$ com $n+1$ algarismos é chamado de código de x_{n+1} e é denotado por Z_{n+1}, ou seja, $Z_{n+1} = z_0 z_1 \dots z_{n-1} z_n$. Desde que estamos assumindo que $a_n > a_0$, $z_0 = 1$ e $z_n = 0$. O número de n algarismos obtido de Z_{n+1} pela exclusão do algarismo $z_n = 0$ (no final) denotamos por $Z_{\overline{n+1}} = z_0 \dots z_{n-1}$ e é chamado de código truncado de x_{n+1}.

Vamos apresentar um exemplo para fixar essas ideias:

Exemplo 9. *[12] Considere o número de quatro algarismos $x_4 = accd$ na base $b > 2$ com $a > d$. Subtraindo $x'_4 = dcca$ de x_4, temos*

$$\begin{array}{ccccc}
 & \text{a} & \cancel{\text{c}}^{(c-1)+b} & \cancel{\text{c}}^{(c-1)+b} & \cancel{\text{d}}^{d+b} \\
- & \text{d} & \text{c} & \text{c} & \text{a} \\
\hline
 & \text{(a-d)} & \text{(b-1)} & \text{(b-1)} & \text{(d-a+b)} \\
\hline\hline
 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

As colunas nas quais a quantidade b foi deslocada da coluna adjacente à esquerda são (iniciando à direita) 0, 1 e 2, usando a notação acima temos

$$z_0 = 1,\ z_1 = 1,\ z_2 = 1,\ e\ z_3 = 0\ .$$

E temos o código $Z_4 = 1110$ e o código trucado $Z_{\overline{4}} = 111$, um divisor de B_b. Assim para qualquer $x_4 = accd$, temos o número de Ball

$$B_b = (x_4 - x'_4) + (x_4 - x'_4)' = (b^2 - 1) \times 111 = (b^2 - 1) \times Z_{\overline{4}}\ .$$

Pela maneira como obtemos um número de *Ball*, uma certa simetria é esperada nos códigos. Passamos agora a caracterizá-los. [12] Seja $x_n = a_n ... a_1 a_0$ um número qualquer.

(a) Se $a_n > a_0$ então $z_0 = 1$ e $z_n = 0$.

(b) Para algum $i = 1, \dots, n-1$, temos:

- Se $z_{i+1} = 1$ e $z_i = 0$, então $z_{n-i-1} = 0$.
- Se $z_{i+1} = 0$ e $z_i = 1$, então $z_{n-i-1} = 1$.
- Se $z_{i+1} = 1$ e $z_i = 1$, então $z_{n-i-1} = 0$ ou 1.
- Se $z_{i+1} = 0$ e $z_i = 0$, então $z_{n-i-1} = 0$ ou 1.

Seja $z_0 z_1 \dots z_{n-1} z_n z_{n+1} \dots z_{2n}$ o código gerado por um número com $2n+1$ algarismos,então $z_{n-1} = z_n$.

6.3 Demonstração do Teorema 13

Parei aqui

7 Considerações

Escrever

Referências

[1] Ball, Jhon *Think of a Number*, Dorling Kinderly Limited, Great Britain, 2005 .

[2] Ball, Walter W. R. *Mathematical Recreations an Essays*, The Macmillan Company, (Tenth Edition), London, 1926 .

[3] Barros, Augusto M. A. Qual a relação que existe entre os números 102564 e 410256?. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, Vol. 63, p.22-23, 2007.

[4] Beiler, Albert H. (1966) *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*. Dover Publications, New York.

[5] Costa, Eudes Antonio. *Os números mágicos de Ball e a sequência de Fibonacci*. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, v. 6, n. 1, p. 19-25. 2021. << disponível em : `https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/14066` >>

[6] Carvalho, Fernando S.; Costa, Eudes A. Escrever o número $111\cdots111$ como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, 87, 2015.

[7] Costa, Eudes A.; Costa, Grieg A. Existem números primos na forma 101... 101. **Revista do Professor de Matemática**, v. 103, p. 21-22, 2021.

[8] Costa, Eudes A.; Mesquita, Élis G. C. O número mágico M. **Revista da Olimpíada (IME-UFG)**, número 9, p.33-43, 2014. << disponível em : `https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1170/o/Eudes9.pdf` >>

[9] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C. Números repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Professor de Matemática Online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020.

[10] Costa, Eudes A.; Santos, Douglas C. Algumas propriedades dos números Monodígitos e Repunidades. **Revista de Matemática**, v. 2, p. 47-58, 2022.

[11] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio; BEZERRA, Cesar Santos. Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 37-47, 2023.

[12] Costa, Eudes A.; Santos, Ronaldo A. Números de Ball generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v.7 , n.1 , p.61-85 . 2022. << disponível em : `https://seer.ufs.br/index.php/ReviSe/article/view/16202` >>

[13] Domingues, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. Editora da UFSC. 2009.

[14] Fomín, Serguei Vasil'evich. **Sistemas de Numeración**. Editorial MIR. 1975.

[15] HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[16] HOLT, Benjamim V. Some General Results and Open Questions on Palintiple Numbers. **Integers**, v. 14, p. A42, 2014.

[17] HOLT, Benjamin V. On Permutiples Having a Fixed Set of Digits. **arXiv preprint** arXiv:1511.02033, 2015.

[18] Moreira, Carlos G. T. de A. Números Mágicos e Contas de Dividir. **Eureka**, número 1, OBM-SBM, 1998.

[19] Silva, Valdir Vilmar. **Números: Construção e Propriedades**. Editora UFG. 2003.

[20] Vorobiov, N. N. **Numeros de Fibonacci**. Lecciones populares de matemáticas: Editorial MIR, Moscú, Rússia. 1974.

[21] Webster, R. A Combinatorial Problem with a Fibonacci Solution. **The Fibonacci Quarterly**, 33, p.26-31, 1995.

[22] Webster, R. and WILLIAMS, G. On the trail of Reverse Divisors: 1089 and all that follow *Disponível em:* `http://users.mct.open.ac.uk/gw3285/publications/reverse-divisors.pdf`