Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@ufg.br - https://olepeter.mat.ufg.br

Curso:	Engenharia de Elementos
Data:	15/02/2024
Disciplina:	Cálculo Numérico
Prova:	II

1. Os coeficientes binomiais para números não inteiros, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$C_{n,\alpha} = \binom{n}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Considere as funções:

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

O polinômio de Taylor é dado por:

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_{n,\alpha} x^n$$

(a) *1pt.* Estabelece uma função (`def`) Python, `Binomial(n,alpha)`, calculando o valor da coeficiente binomial, $C_{n,\alpha}$.

(b) *1pt.* Lista os coeficiente binomiais, $C_{n,\alpha}$ para $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, .., \frac{1}{10}$ e $n = 1, ..., 10$.

(c) *1pt.* Escreve uma função Python, `def Pn`, com argumentos α, x e n, retornando o valor do polinômio de Taylor, $P_n(x)$. Para n 'suficientemente grande', $P_n(x)$ aproxima-se à, $f_\alpha(x)$. Escreve uma função Python gerando uma tabela da seguinte forma com $x = \frac{1}{2}$:

α	x	$f_\alpha(x)$	n	$P_n(x)$	$\lvert\varepsilon(\alpha,x,n)\rvert$
-	-	-	1	...	...
-	-	-	2	...	...
-	-	-	...	...	...

onde $\varepsilon(\alpha,x,n)$ é o erro relativo (resíduo):

$$\varepsilon(\alpha,x,n) = f_\alpha(x) - P_n(x))/f_\alpha(x)$$

Exibe a tabela para $x = \frac{1}{2}$. Para cada destes valores de α e n, quantos termos é preciso incluir, para o erro relativo ser menor do que $\varepsilon = 1.0E-4$?

2. Estamos procurando um polinômio interpolador:

$$P(x) = p_4x^4 + p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0,$$

contendo os pontos:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	-3	2	-1	4	-2

Ou seja:

$$y_i = P(x_i),\ i = 0, ..., 4$$

(a) *2pts.* Encontre uma matriz, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, tal que: $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\ \underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{y}}$ e resolve o sistema linear do item anterior, usando o método de Gauss com pivotação parcial.

(b) *2pts.* Encontre os polinômios de Lagrange, $H_0(x), ..., H_4(x)$, associado aos valores $x_0, ..., x_4$ e calcule o polinômio interpolador, $P(x) = \sum_{k=0}^{4} y_k H_k(x)$, verificando que coincide com o polinômio obtido no item (a). Verifique também, que: $y_i = P(x_i),\ i = 0, ..., 4$.

(c) *1pt.* Encontre a fatorização LU da matriz $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$.

Hint! Em Python, pode-se representar um polinômio de grau n:

$$P(x) = p_nx^n + p_2x^2 + p_1x + p_0,$$

com uma lista (`list`): [p_0,p_1,...,p_n,]. Por exemplo: $P(x) = 3$ é representado por [3], $P(x) = x^2 + 2x + 3$ é representado por `[3,2,1]`.

3. Considere a função e seu primitivo:

$$f(x) = \sqrt{1+x}, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás
ole@ufg.br - https://olepeter.mat.ufg.br

(a) *1pt.* Escreve funções (def) Python, retornando o valor de $f(x)$, respectivamente $F(x)$.

(b) *2pts.* Para $x = 3$, estime $F(x)$ usando o Método de Trapézios e de 1/3 de Simpson, calculando os erros absolutos e relativos com $n = 10, 20, ..., 100$ intervalos.

Instruções:

- Salve suas respostas numa pasta nova, em arquivos respostas: 01.py, 02.py e 03.py.
- Responstas literais, deviam ser incluídas no código como comentários (#) ou `print`'s.
- Pode-se utilizar os códigos disponibilizado no site abaixo, salvos como arquivos auxiliares (incluídos via `import`'s) ou, alternativamente, copiando os códigos relevantes para os arquivos respostas.
- Entregar um arquivo ZIP de todo os arquivos deste pasta por email: ole@ufg.br.
- Incluir como assunto do email: CN, P1: seu nome completo.

http://www.olesmith.com.br/SmtC?ModuleName=Texts&Action=Root&Text=356

Destacamos também o link:
http://www.olesmith.com.br/SmtC?ModuleName=Texts&Action=Codes&Text=356